



최상위
품격

일품 수학 I

정답 및 풀이

◆ 빠른 정답 찾기	2~4
◆ 자세한 풀이	
Ⅰ 지수함수와 로그함수	5
Ⅱ 삼각함수	32
Ⅲ 수열	62

I. 지수함수와 로그함수

I -1. 지수

본책 8~9 쪽

- 01 10 02 4 03 ③
04 ② 05 ④ 06 6 07 ① 08 ③
09 ② 10 2 11 ⑤ 12 ①

본책 10~12 쪽

- 01 ① 02 12 03 ⑤
04 ⑤ 05 ③ 06 22 07 13 08 24
09 ④ 10 ② 11 $\frac{1}{3}$ 12 ⑤ 13 ③
14 ⑤ 15 $\frac{4b}{1-b^2}$ 16 256 17 ① 18 ②
19 72

본책 13 쪽

- 01 ④ 02 ③ 03 ③
04 ③ 05 48 06 ②

I -2. 로그

본책 14~15 쪽

- 01 ④ 02 4 03 ①
04 -1 05 ① 06 ③ 07 ④ 08 6
09 ⑤ 10 ② 11 1,1297 12 $\frac{19}{7}$

본책 16~17 쪽

- 01 22 02 ② 03 ④
04 ⑤ 05 ③ 06 20 07 40 08 ①
09 $\frac{3}{2}$ 10 ① 11 $\frac{21}{4}$ 12 ① 13 ①
14 40 15 ④ 16 2배

본책 18 쪽

- 01 ⑤ 02 ⑤ 03 8
04 ⑤ 05 ③ 06 608

I -3. 지수함수

본책 20~21 쪽

- 01 ① 02 1 03 78
04 ② 05 625 06 ③ 07 ③ 08 ①
09 2 10 ③ 11 $x \geq 2$ 12 ④

본책 22~23 쪽

- 01 3 02 2 03 ⑤
04 $A < B < C$ 05 ⑤ 06 ② 07 5
08 ③ 09 14 10 ③ 11 3 12 $x \geq 1$
13 ④ 14 ④ 15 $\frac{1}{32} < a \leq \frac{1}{8}$ 또는 $128 \leq a < 512$

본책 24 쪽

- 01 ③ 02 ⑤ 03 ②
04 ⑤ 05 3

I -4. 로그함수

본책 26~27 쪽

- 01 9 02 ③ 03 $\frac{1}{2}$
04 ① 05 ② 06 8 07 $x=10$ 08 625
09 ① 10 ④ 11 ① 12 89

본책 28~29 쪽

- 01 ② 02 ② 03 8
04 ④ 05 -1 06 27 07 ② 08 $-\frac{1}{4}$
09 ③ 10 7 11 ⑤
12 $-1 < x < 0$ 또는 $1 < x < 2$ 13 $\left\{x \mid \frac{1}{4} \leq x < 2\right\}$
14 100

본책 30 쪽

- 01 ④ 02 ② 03 ①
04 5 05 ② 06 6

본책 31~34 쪽

- 01 ③ 02 ④ 03 ⑤
04 ⑤ 05 ② 06 ④ 07 ② 08 ①
09 ③ 10 ③ 11 ⑤ 12 ⑤ 13 ⑤
14 ④ 15 ② 16 12 17 31 18 8
19 7 20 11 21 9
22 $0 < x < \frac{1}{2}$ 또는 $1 < x < \frac{3}{2}$ 23 5 24 187
25 7 26 5

본책 35 쪽

- 01 ③ 02 ② 03 ⑤
04 512

II. 삼각함수

II -1. 삼각함수

본책 38~40 쪽

- 01 $\neg, \supset$ 02 6
 03 제 2 사분면 04 $\frac{3}{2}\pi$ 05 $\frac{4}{5}\pi$ 06 3π
 07 ⑤ 08 ⑤ 09 ② 10 ④ 11 $-2\sqrt{2}$
 12 ② 13 ④ 14 ② 15 제 1 사분면, 제 3 사분면
 16 50 17 ② 18 9

본책 41~43 쪽

- 01 113 02 36 03 ③
 04 $\frac{1}{2}$ 05 6 06 $\frac{1}{2}$ 07 ③ 08 ④
 09 36 10 ③ 11 0 12 ② 13 ④
 14 16 15 ⑤ 16 ④ 17 $\frac{3\sqrt{41}}{25}$ 18 ⑤
 19 ③ 20 $-\frac{3}{8}$

본책 44 쪽

- 01 9 02 23 03 ⑤
 04 ① 05 169 06 ②

II -2. 삼각함수의 그래프

본책 46~48 쪽

- 01 ③ 02 π 03 ③
 04 ② 05 ④ 06 $\frac{32}{15}$ 07 -1 08 ④
 09 4 10 ① 11 ④ 12 ④ 13 $\frac{\pi}{6}$
 14 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ 15 ② 16 ③

본책 49~51 쪽

- 01 33 02 ④ 03 3
 04 $(100+20\sqrt{3}) \text{ lux}$ 05 3 06 3 07 ③
 08 ② 09 ③ 10 $-\frac{3\sqrt{13}}{13}$ 11 ②
 12 ③ 13 $\frac{3}{4}$ 14 -2 15 ④ 16 ④
 17 17 18 ③ 19 ③ 20 $\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$

본책 52 쪽

- 01 ② 02 6 03 2
 04 1 05 24 06 ③ 07 32

II -3. 삼각함수의 활용

본책 54~56 쪽

- 01 ④ 02 $\frac{12}{13}$ 03 4
 04 ③ 05 ② 06 ③ 07 ④ 08 15
 09 ⑤ 10 ④ 11 ④ 12 ② 13 $\frac{8}{5}$
 14 ② 15 109 16 ③ 17 ③ 18 ④

본책 57~59 쪽

- 01 ③ 02 2 03 ②
 04 49 05 ⑤ 06 ④ 07 ④ 08 21
 09 56초 10 48 11 ① 12 ③ 13 25
 14 $\frac{8}{3}$ 15 30° 16 55 17 ⑤ 18 ④
 19 $\frac{25}{3}\pi$ 20 ④

본책 60 쪽

- 01 306 02 130 03 ②
 04 ③ 05 ③ 06 ②

본책 61~64 쪽

- 01 ③ 02 ④ 03 ④
 04 ④ 05 ② 06 ③ 07 ② 08 ④
 09 ⑤ 10 ③ 11 ② 12 ⑤ 13 ②
 14 ② 15 ③ 16 ③ 17 ⑤ 18 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 19 6 20 $\frac{4}{5}$ 21 2π 22 $6\sqrt{2}$ 23 $\sqrt{21}$
 24 $\frac{4}{3}$ 25 $15\sqrt{3}$

본책 65 쪽

- 01 ② 02 ② 03 141
 04 109

Ⅲ. 수열

Ⅲ-1. 등차수열과 등비수열

본책 68~71 쪽

01 29	02 16	03 ②
04 ③	05 ①	06 21
07 ④	08 ②	09 220
10 ②	11 ③	12 ②
13 ①	14 ⑤	15 ③
16 ④	17 ⑤	18 ⑤
19 ③	20 ④	21 10
22 7	23 80	24 ②

본책 72~75 쪽

01 ③	02 36	03 ③
04 9	05 ④	06 $\frac{\sqrt{6}}{3}$
07 16	08 140	09 368
10 1089	11 32	12 125
13 ②	14 ④	15 ①
16 ③	17 $2+\sqrt{2}$	18 ④
19 ③	20 56	21 19
22 ①	23 -255	24 ②
25 ①	26 41.5 cm	27 8317000원
28 15352000원	29 ①	

본책 76~77 쪽

01 ②	02 ②	03 2
04 ②	05 ④	06 27
07 27	08 ②	09 ③
10 ③	11 467	12 ①

Ⅲ-2. 수열의 합

본책 78~79 쪽

01 57	02 153	03 15
04 ②	05 ①	06 ④
07 4	08 570	09 854
10 ②	11 ⑤	12 ④
13 ③		

본책 80~82 쪽

01 -50	02 198	03 ④
04 10	05 159	06 ④
07 1729	08 ③	09 287
10 ①	11 ③	12 8
13 ①	14 ②	15 10
16 ①	17 512	18 51
19 $\frac{4}{5}$	20 ②	21 ①

본책 83 쪽

01 6	02 ①	03 ④
04 ⑤	05 255	06 ①

Ⅲ-3. 수학적 귀납법

본책 84~85 쪽

01 ③	02 ⑤	03 ②
04 ⑤	05 ④	06 1023
07 18	08 ④	09 ⑤
10 ③		

본책 86~87 쪽

01 ③	02 -21	03 ①
04 $\frac{3}{16}$	05 40	06 ④
07 ③	08 14	09 ②
10 23	11 ⑤	12 풀이 84쪽

본책 88 쪽

01 ③	02 480	03 ①
04 ③	05 41	

본책 89~92 쪽

01 ③	02 ②	03 ②
04 ⑤	05 ①	06 ⑤
07 ④	08 ①	09 ②
10 ③	11 ④	12 ②
13 ②	14 ①	15 ②
16 32	17 13	18 71
19 546	20 335	21 31
22 $31(1+\sqrt{2})$	23 84	24 $\left(\frac{4}{3}\right)^{20}$
25 9		

본책 93 쪽

01 ⑤	02 ②	03 206
04 ③		

I 지수함수와 로그함수

I -1. 지수

개념 & 핵심 기출

본책 8~9쪽

01 -8의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -8$ 이므로
 $x^3 + 8 = 0, \quad (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$
 따라서 -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이므로
 $a = -2$

625의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 625$ 이므로
 $x^4 - 625 = 0, \quad (x^2 - 25)(x^2 + 25) = 0$
 $(x+5)(x-5)(x^2 + 25) = 0$
 $\therefore x = \pm 5$ 또는 $x = \pm 5i$
 따라서 625의 네제곱근 중 음수인 것은 -5이므로
 $b = -5$
 $\therefore ab = 10$

답 10

02 (i) $n=3$ 일 때,
 방정식 $x^3 = -5$ 의 실근은 $\sqrt[3]{-5}$ 이므로
 $f(3) = 1$
 (ii) $n=6$ 일 때,
 방정식 $x^6 = -2$ 의 실근은 존재하지 않으므로
 $f(6) = 0$
 (iii) $n=9$ 일 때,
 방정식 $x^9 = 1$ 의 실근은 1이므로
 $f(9) = 1$
 (iv) $n=12$ 일 때,
 방정식 $x^{12} = 4$ 의 실근은 $\sqrt[12]{4}, -\sqrt[12]{4}$ 이므로
 $f(12) = 2$
 이상에서
 $f(3) + f(6) + f(9) + f(12) = 4$

답 4

03 ① $5^3 = 125$ 이므로 5는 125의 세제곱근이다.
 ② -27의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -27$ 이므로
 $x^3 + 27 = 0, \quad (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3뿐이다.

③ $(-2)^4 = 16$ 이므로 -2는 -16의 네제곱근이 아니다.

④ 81의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 81$ 이므로
 $x^4 - 81 = 0, \quad (x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$
 $(x+3)(x-3)(x+3i)(x-3i) = 0$
 $\therefore x = \pm 3$ 또는 $x = \pm 3i$

따라서 81의 네제곱근은 3, -3, $3i$, $-3i$ 이다.

$A > 0, B > 0$ 이고 n 이
 2 이상의 정수일 때,
 $A < B \Rightarrow \sqrt[n]{A} < \sqrt[n]{B}$

방정식 $x^n = a$ 의 실근
 $\Rightarrow a$ 의 n 제곱근 중 실수

$(a-b)^3$
 $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 $= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}}$
 $= x^0 = 1$

n 이 짝수이고 $a < 0$ 일 때,
 방정식 $x^n = a$ 를 만족시
 키는 실수 x 는 존재하지
 않는다.

⑤ 256의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 256$ 이므로
 $x^4 - 256 = 0, \quad (x^2 - 16)(x^2 + 16) = 0$
 $(x+4)(x-4)(x+4i)(x-4i) = 0$
 $\therefore x = \pm 4$ 또는 $x = \pm 4i$

따라서 256의 네제곱근 중 실수인 것은 -4, 4의 2개
 이다.

답 ③

04 $\sqrt[3]{8^2} + \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{8} - \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[6]{64}$
 $= \sqrt[3]{4^3} + \sqrt[4]{2^4} - \sqrt[6]{2^6}$
 $= 4 + 2 - 2 = 4$

답 ②

05 $\frac{\sqrt{\sqrt{2 \cdot 3^2}} \sqrt[4]{2}}{\sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 3}}} = \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 3^2} \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^2 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 3^2 \cdot 2}}{\sqrt[4]{2^2 \cdot 3}}$
 $= \sqrt[4]{\frac{2^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3}} = \sqrt[4]{3}$

답 ④

06 $\sqrt[3]{3\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{18},$

$\sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \sqrt[6]{12},$

$\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{16}$

이므로 $M = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}, m = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}$

$\therefore M^6 - m^6 = 18 - 12 = 6$

답 6

07 $a = \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$ 이므로

$a^4 \times (a^{-2})^3 \div a^{\frac{1}{2}} = a^4 \times a^{-6} \div a^{\frac{1}{2}}$

$= a^{4+(-6)-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{5}{2}}$

$= (3^{\frac{1}{5}})^{-\frac{5}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

답 ①

08 $x^3 = (2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})^3$

$= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{-\frac{1}{3}})^3 - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \cdot (2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})$

$= \frac{3}{2} - 3x$

즉 $x^3 + 3x = \frac{3}{2}$ 이므로 $2x^3 + 6x = 3$

$\therefore 2x^3 + 6x + 1 = 3 + 1 = 4$

답 ③

09 $(3 - x^{\frac{2}{3}})(3 - x^{-\frac{2}{3}}) = 9 - 3(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}) + 1$

$= 10 - 3\{(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})^2 - 2\}$

$= 10 - 3(3^2 - 2)$

$= -11$

답 ②

10 $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{x}{2}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{2}} = 3^{2x} = (3^x)^2$

$= (\sqrt{2})^2 = 2$

답 2

11 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$ 의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}} = \frac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})} = \frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}$$

$$= \frac{(a^{2x})^2 + \frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x}+1} = \frac{5^2 + \frac{1}{5}}{5+1}$$

$$= \frac{21}{5}$$

답 ⑤

다른 풀이

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}} = \frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$$

$$= a^{2x}-1+a^{-2x}$$

$$= 5-1+\frac{1}{5} = \frac{21}{5}$$

12 $2^x=36$ 에서 $2=36^{\frac{1}{x}}$

..... ㉠

$3^{-y}=36$ 에서 $3=36^{-\frac{1}{y}}$

..... ㉡

㉠, ㉡의 양변을 각각 곱하면

$$2 \cdot 3 = 36^{\frac{1}{x}} \cdot 36^{-\frac{1}{y}}$$

$$\therefore 6 = 36^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} = 6^{2(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})}$$

따라서 $2(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})=1$ 이므로

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$$

답 ①

1등급을 위한 고난도 문제

본책 10~12쪽

01 $\sqrt[3]{-a}$ 는 $-a$ 의 세제곱근이므로

$$(\sqrt[3]{-a})^3 = -a$$

ㄴ. [반례] $a=0$ 이면 $a^2=0$ 이므로 a^2 의 제곱근 중 실수인 것은 0으로 1개이다.

ㄷ. [반례] $a=-2$, $n=2$ 이면 주어진 방정식은 $x^4=4$ 이므로 이 방정식의 실근은 $\sqrt[4]{4}$ 또는 $-\sqrt[4]{4}$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

02 $(-4)^2=4^2=16$, $(-3)^2=3^2=9$, $(-2)^2=2^2=4$ 이므로

$$B = \{4, 9, 16\}$$

..... ①

(i) y 가 짝수일 때,

$\sqrt[4]{x}$ 가 실수가 되려면 $x \geq 0$ 이어야 하므로 순서쌍 (x, y) 는

$$(2, 4), (3, 4), (4, 4), (2, 16),$$

$$(3, 16), (4, 16) \text{의 6개}$$

..... ②

(ii) y 가 홀수일 때,

x 의 값의 부호에 관계없이 $\sqrt[4]{x}$ 는 항상 실수이므로 순서쌍 (x, y) 는

$$(-4, 9), (-3, 9), (-2, 9), (2, 9),$$

$$(3, 9), (4, 9) \text{의 6개}$$

..... ③

$$\frac{126}{5} = \frac{126}{30} = \frac{21}{5}$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

실수 a 의 n 제곱근 중 실수의 개수

n	짝수	홀수
$a > 0$	2	1
$a = 0$	1	1
$a < 0$	0	1

$$(\text{짝수}) + (\text{홀수}) = (\text{홀수}),$$

$$(\text{짝수}) \times (\text{홀수}) = (\text{짝수})$$

$$\textcircled{1} n \text{이 홀수일 때,}$$

$$A > 0 \iff \sqrt[n]{A} > 0$$

$$A < 0 \iff \sqrt[n]{A} < 0$$

$$\textcircled{2} n \text{이 짝수일 때,}$$

$$A > 0 \iff \sqrt[n]{A} > 0$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2} = \sqrt[4]{-a},$$

$$-\sqrt[4]{4} = -\sqrt{2} = -\sqrt[4]{-a}$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$6+6=12$$

..... ④

답 12

채점 기준	비율
① 집합 B 를 구할 수 있다.	20%
② y 가 짝수일 때, 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구할 수 있다.	30%
③ y 가 홀수일 때, 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구할 수 있다.	30%
④ 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구할 수 있다.	20%

03 $\neg$. 임의의 실수 x 에 대하여 n 이 홀수이면

$$f(n, x) = 1 \text{이므로}$$

$$f(3, a) = f(3, a^2) = 1$$

$$\therefore f(4, x) = \begin{cases} 2 & (x > 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로 } a < b \text{이면}$$

$$f(4, a) \leq f(4, b)$$

ㄷ. 자연수 x 에 대하여 $f(n, x) = \begin{cases} 2 & (n \text{이 짝수}) \\ 1 & (n \text{이 홀수}) \end{cases}$

이때 $f(a, b) \neq f(b, a)$ 이므로 a, b 중 하나는 짝수, 나머지 하나는 홀수이다.

따라서 $a+b$ 는 홀수, ab 는 짝수이므로

$$f(a+b, b) = 1, f(ab, b) = 2$$

$$\therefore f(a+b, b) < f(ab, b)$$

이상에서 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

04 $\sqrt{-x^2+2(a-1)x-16} < 0$ 에서

$$-x^2+2(a-1)x-16 < 0$$

$$\therefore x^2-2(a-1)x+16 > 0$$

위의 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+16=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = \{-(a-1)\}^2 - 16 < 0$$

$$a^2-2a-15 < 0, \quad (a+3)(a-5) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\sqrt{ax^2+ax+2} > 0$ 에서 $ax^2+ax+2 > 0$

(i) $a=0$ 일 때,

$$2 > 0 \text{이므로 모든 실수 } x \text{에 대하여 부등식}$$

$$ax^2+ax+2 > 0 \text{이 성립한다.}$$

(ii) $a \neq 0$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax^2+ax+2 > 0$ 이 성립해야 하므로 $a > 0$ 이고, 이차방정식 $ax^2+ax+2=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = a^2-8a < 0, \quad a(a-8) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 8$$

(i), (ii)에서 $0 \leq a < 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$0 \leq a < 5$$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=5$ 이므로 $\alpha+\beta=5$

답 ⑤

1등급 비밀노트 >>>

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$ 이 성립할 조건은 다음과 같다.

- ① $a=0, b=0, c>0$
 ② $a>0, b^2-4ac<0$

05 $\neg. A(a, b) = \sqrt[a]{b} = \sqrt[ac]{b^c} = A(ac, b^c)$

ㄴ. [반례] $a=3, b=2$ 일 때,

$$A(3, 2) = \sqrt[3]{2}, A(3^2, 2^2) = \sqrt[9]{4} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^2}}$$

$$\therefore A(3, 2) \neq A(3^2, 2^2)$$

ㄷ. $A(a, b) \cdot A(a, c) = \sqrt[a]{b} \sqrt[a]{c} = \sqrt[a]{bc} = A(a, bc)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

참고 ㄴ. $A(a, b) = \sqrt[a]{b} = \sqrt[2a]{b^2} = A(2a, b^2)$

06 주어진 직육면체의 부피는

$$\begin{aligned} \sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{128} &= \sqrt{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[3]{2^7} \\ &= \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2^{10}} \cdot \sqrt[3]{2^{14}} \\ &= \sqrt[3]{2^9 \cdot 2^{10} \cdot 2^{14}} = \sqrt[3]{2^{33}} \\ &= \sqrt[3]{2^{13}} \end{aligned}$$

정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$a^3 = \sqrt[3]{2^{13}} \quad \therefore a = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{13}}} = \sqrt[9]{2^{13}}$$

따라서 $m=9, n=13$ 이므로

$$m+n=22$$

답 22

07 $P = \sqrt[6]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{\sqrt{12}} = \sqrt[12]{12}$,

$$Q = \sqrt[8]{3\sqrt[3]{n}} = \sqrt[8]{\sqrt[3]{27n}} = \sqrt[24]{27n},$$

$$R = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{8}} = \sqrt[8]{8}$$

→ ①

$P < Q < R$ 에서 $\sqrt[12]{12} < \sqrt[24]{27n} < \sqrt[8]{8}$ 이므로

$$\sqrt[24]{12^2} < \sqrt[24]{27n} < \sqrt[24]{8^3}$$

즉 $144 < 27n < 512$ 이므로

$$\frac{16}{3} < n < \frac{512}{27}$$

→ ②

따라서 자연수 n 은

$$6, 7, 8, \dots, 18 \text{의 } 13 \text{개}$$

→ ③

답 13

채점 기준	비율
① P, Q, R 를 간단히 할 수 있다.	40%
② n 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ n 의 개수를 구할 수 있다.	20%

08 $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}, \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125},$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[9]{10} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{100},$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{12}} = \sqrt[9]{12} = \sqrt[12]{12^2} = \sqrt[12]{144} \text{이므로}$$

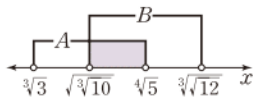
$$\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{\sqrt[3]{10}} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{\sqrt[3]{12}}$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$A \cap B$$

$$= \{x | \sqrt[3]{\sqrt[3]{10}} < x < \sqrt[4]{5}\}$$

$$= \{x | \sqrt[12]{100} < x < \sqrt[12]{125}\}$$



$a \in (A \cap B)$ 이면
 $a \in A$ 이고 $a \in B$

$$\begin{aligned} 2^{-\frac{1}{2}} \cdot (2^{\frac{3}{4}} + 2^{\frac{5}{4}}) \\ &= 2^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} + 2^{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

이므로 $\sqrt[12]{n} \in (A \cap B)$ 를 만족시키는 자연수 n 은

$$101, 102, \dots, 124 \text{의 } 24 \text{개}$$

답 24

09
$$\begin{aligned} &\sqrt[4]{\frac{2+2^2+2^3}{3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}}} \times \sqrt[4]{\frac{3+3^2+3^3}{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{2+2^2+2^3}{3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3+3^2+3^3}{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{2^4(2^{-1}+2^{-2}+2^{-3})}{3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3^4(3^{-1}+3^{-2}+3^{-3})}{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}}} \\ &= \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{6^4} = 6 \end{aligned}$$

답 ④

10 $a^{-2}=2$ 에서 $a=2^{-\frac{1}{2}}$

$$b^{-3}=4=2^2 \text{에서 } b=2^{-\frac{2}{3}}$$

$$c^{-6}=8=2^3 \text{에서 } c=2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore f(n) = \left(\frac{a}{bc}\right)^n = b^{-n} = 2^{\frac{2}{3}n}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2) \times f(4) \times f(6) &= 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{8}{3}} \cdot 2^4 \\ &= 2^8 = 256 \end{aligned}$$

답 ②

11 $x\sqrt[3]{y^3}=a$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2 y^3 = a^2 \quad \dots\dots ㉠$$

$\sqrt[3]{xy}=b$ 의 양변을 세제곱하면

$$xy^3 = b^3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠ ÷ ㉡을 하면 $x = \frac{a^2}{b^3} = a^2 b^{-3} \quad \dots\dots ①$

$x = a^2 b^{-3}$ 을 ㉡에 대입하면

$$a^2 b^{-3} y^3 = b^3, \quad y^3 = \frac{b^3}{a^2 b^{-3}} = a^{-2} b^6$$

$$\therefore y = (a^{-2} b^6)^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{2}{3}} b^2 \quad \dots\dots ②$$

따라서 $p=2, q=-3, r=-\frac{2}{3}, s=2$ 이므로

$$p+q+r+s = \frac{1}{3} \quad \dots\dots ③$$

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
① x 를 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② y 를 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ $p+q+r+s$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

12 $\overline{AC} = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{3}{4}},$

$$\overline{BD} = f(2\sqrt{2}) = \sqrt{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \sqrt{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{5}{2}}} = 2^{\frac{5}{4}},$$

$$\overline{CD} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

사각형 ACDB의 넓이는

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot (2^{\frac{3}{4}} + 2^{\frac{5}{4}}) \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-1} \cdot (2^{\frac{3}{4}} + 2^{\frac{5}{4}}) \cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-\frac{1}{2}} \cdot (2^{\frac{3}{4}} + 2^{\frac{5}{4}}) \\ &= 2^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{3}{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{4}}(1 + 2^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

따라서 $2^{\frac{1}{4}}(1+2^{\frac{1}{2}})=2^{\frac{1}{4}} \cdot a$ 이므로

$$a=1+2^{\frac{1}{2}}$$

답 ⑤

13 $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \dots \times \sqrt[10]{2}$

$$=2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{5}} \times \dots \times 2^{\frac{1}{10}}$$

$$=2^{\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{9.10}}$$

$$=2^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \dots + (\frac{1}{9} - \frac{1}{10})}$$

$$=2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}} = 2^{\frac{2}{5}}$$

$$= \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$$

답 ③

14 현재 ^{14}C 의 양이 8g이므로 5750년 후의 ^{14}C 의 양은

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ (g)}$$

따라서 n 년 후의 ^{14}C 의 양은

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5750}} \text{ (g)}$$

이므로 500년 후의 ^{14}C 의 양은

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{500}{5750}} = 2^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{23}} = 2^{3 - \frac{2}{23}} = 2^{\frac{67}{23}} \text{ (g)}$$

$$\therefore k = \frac{67}{23}$$

답 ⑤

15 주어진 등식의 우변의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$b = \frac{a^x(a^x - a^{-x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}$$

즉 $b(a^{2x} + 1) = a^{2x} - 1$ 이므로

$$b \cdot a^{2x} + b = a^{2x} - 1, \quad (1-b)a^{2x} = 1-b$$

$$\therefore a^{2x} = \frac{1+b}{1-b} \quad (\because b \neq 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore a^{2x} - a^{-2x} &= \frac{1+b}{1-b} - \frac{1-b}{1+b} \\ &= \frac{(1+b)^2 - (1-b)^2}{1-b^2} \\ &= \frac{4b}{1-b^2} \end{aligned}$$

→ ①

→ ②

답 $\frac{4b}{1-b^2}$

채점 기준	비율
① a^{2x} 을 b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
② $a^{2x} - a^{-2x}$ 을 b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%

16 $25^x = 2$ 에서 $2^{\frac{1}{x}} = 25$ ㉠

$a^y = 4 = 2^2$ 에서 $2^{\frac{2}{y}} = a$

$$\therefore 2^{\frac{1}{y}} = a^{\frac{1}{2}}$$

..... ㉡

$200^z = 8 = 2^3$ 에서 $2^{\frac{3}{z}} = 200$ ㉢

㉠ $\times$ ㉡ $\div$ ㉢을 하면

$$2^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z}} = \frac{25\sqrt{a}}{200} = \frac{\sqrt{a}}{8}$$

→ ②

이때 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = 1$ 이므로

$$2 = \frac{\sqrt{a}}{8}, \quad \sqrt{a} = 16$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{AB} \\ &= \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \\ &\quad (\text{단, } A \neq B) \end{aligned}$$

5750년 후의 ^{14}C 의 양

$$\Rightarrow 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \text{ (g)}$$

5750·2년 후의 ^{14}C 의 양

$$\Rightarrow 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ (g)}$$

⋮

5750n년 후의 ^{14}C 의 양

$$\Rightarrow 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ (g)}$$

$$b = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} \text{에서}$$

$$a^{2x} - 1 \neq a^{2x} + 1 \text{이므로}$$

$$b \neq 1$$

$$\text{등호는 } \frac{3^{a^2+a}}{2^{a^2+a-4}} = \frac{2^{a^2+a}}{3^{a^2+a-4}}$$

일 때 성립하므로

$$2^{2a^2+2a-4} = 3^{2a^2+2a-4}$$

따라서 $2a^2+2a-4=0$ 이므로

$$2(a+2)(a-1)=0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\therefore a = 16^2 = 256$$

→ ③

답 256

채점 기준	비율
① 주어진 등식을 변형할 수 있다.	40%
② $2^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z}}$ 을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30%

17 $81^a = 64^b = x^c = k$ ($k > 0$)라 하면

$$k^{\frac{1}{a}} = 81, \quad k^{\frac{1}{b}} = 64, \quad k^{\frac{1}{c}} = x$$

$$\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = \frac{24}{c} \text{에서} \quad k^{\frac{3}{a} + \frac{4}{b}} = k^{\frac{24}{c}}$$

$$k^{\frac{3}{a}} \cdot k^{\frac{4}{b}} = k^{\frac{24}{c}}, \quad 81^3 \cdot 64^4 = x^{24}$$

$$(3^4)^3 \cdot (2^6)^4 = x^{24}, \quad 3^{12} \cdot 2^{24} = x^{24}$$

$$\therefore x = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

답 ①

$$18 \quad 4^{-a} + 4^{-b} = \frac{1}{4^a} + \frac{1}{4^b} = \frac{4^a + 4^b}{4^{a+b}} = \frac{4^a + 4^b}{4}$$

이때

$$\begin{aligned} (4^a + 4^b)^2 &= (4^a - 4^b)^2 + 4 \cdot 4^a \cdot 4^b \\ &= (4^a - 4^b)^2 + 4^{a+b+1} \\ &= x^2 + 16 \end{aligned}$$

$$\text{이므로} \quad 4^a + 4^b = \sqrt{x^2 + 16} \quad (\because 4^a + 4^b > 0)$$

$$\therefore 4^{-a} + 4^{-b} = \frac{4^a + 4^b}{4} = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4}$$

답 ②

19 점 (a, b) 가 함수 $y = x^2 - 4$ 의 그래프 위에 있으므로

$$b = a^2 - 4$$

이때 $3^{a^2+a} > 0$, $2^{a^2+a} > 0$, $2^{a+b} > 0$, $3^{a+b} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{3^{a^2+a}}{2^{a+b}} + \frac{2^{a^2+a}}{3^{a+b}} &\geq 2\sqrt{\frac{3^{a^2+a}}{2^{a^2+a-4}} \cdot \frac{2^{a^2+a}}{3^{a^2+a-4}}} \\ &= 2\sqrt{3^4 \cdot 2^4} = 72 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $a = -2$ 또는 $a = 1$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 72이다.

답 72

1등급 비밀노트 >>>

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립})$$

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 13쪽

01 $2^{\frac{m+1}{n}} \times \sqrt[3]{3^{2m+1}} = 2^{\frac{m+1}{n}} \times 3^{\frac{2m+1}{3}}$ 이 자연수가 되려면 2와 3이 서로소이므로 $\frac{m+1}{n}$ 과 $\frac{2m+1}{3}$ 이 모두 자연수가 되어야 한다.

$\frac{2n+1}{3}$ 이 자연수가 되려면 $2n+1$ 이 3의 배수가 되어야

하므로 n 의 값은

1, 4, 7, 10

따라서 $\frac{m+1}{n}$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$m+1$ 이 자연수가 되도록 하는 m 의 값은

1, 2, ..., 10의 10개

(ii) $n=4$ 일 때,

$\frac{m+1}{4}$ 이 자연수가 되려면 $m+1$ 이 4의 배수가 되어야

하므로 m 의 값은

3, 7의 2개

(iii) $n=7$ 일 때,

$\frac{m+1}{7}$ 이 자연수가 되려면 $m+1$ 이 7의 배수가 되어야

하므로 m 의 값은

6의 1개

(iv) $n=10$ 일 때,

$\frac{m+1}{10}$ 이 자연수가 되려면 $m+1$ 이 10의 배수가 되어

야 하므로 m 의 값은

9의 1개

이상에서 구하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$10+2+1+1=14$

답 ④

02 $\neg$. $(-\sqrt{2}i)^4=4$ 이므로

$-\sqrt{2}i \in R(4)$

나. [반례] $n=3$ 일 때, $\sqrt[3]{3} \in R(3)$ 이지만 $(\sqrt[3]{3})^9=3^3 \neq 9$ 이

므로 $\sqrt[3]{3} \notin R(9)$

$\therefore R(3) \not\subset R(9)$

다. $R(n) \cap R(n+1) \neq \emptyset$ 이라 가정하면

$R(n) \cap R(n+1)$ 의 원소 a 가 존재하므로

$a \in R(n), a \in R(n+1)$

즉 $a^n=n, a^{n+1}=n+1$ 에서

$a^{n+1}=a \cdot a^n=an$

이므로 $an=n+1$

$\therefore a=\frac{n+1}{n}$

이때 $n, n+1$ 은 서로소이므로 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \neq n$

즉 $\frac{n+1}{n} \notin R(n)$ 이므로 가정에 모순이다.

$\therefore R(n) \cap R(n+1) = \emptyset$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, 다이다.

답 ③

03 $a=\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}=(2^8)^{\frac{1}{12}}=256^{\frac{1}{12}},$

$b=\sqrt[4]{6}=6^{\frac{1}{4}}=(6^3)^{\frac{1}{12}}=216^{\frac{1}{12}},$

$c=\sqrt[6]{15}=15^{\frac{1}{6}}=(15^2)^{\frac{1}{12}}=225^{\frac{1}{12}}$

$A>0, B>0$ 일 때,

① $\frac{A}{B}>1 \Rightarrow A>B$

② $\frac{A}{B}=1 \Rightarrow A=B$

③ $\frac{A}{B}<1 \Rightarrow A<B$

$x_1y_1=2^{1-2n}>0$ 이므로
 $|x_1y_1|=x_1y_1$

$R(4)$
 $=\{x|x \text{는 } 4 \text{의 네제곱근}\}$
 $=\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}i, \sqrt{2}i\}$

$2n=\frac{8}{n}$ 에서 $n^2=4$
 $\therefore n=2 (\because n \text{은 자연수})$

귀류법 $\Rightarrow$ 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 명제 또는 명제의 결론을 부정한 다음 모순이 생기는 것을 보이는 증명법

이므로 $b<c<a$

$\therefore m(a, M(b, c))=m(a, c)=c$

한편 $a=2^{\frac{2}{3}}, c=3^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}, d=2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}$ 이므로

$$\frac{d}{ac} = \frac{2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}} = 2^{-\frac{1}{15}} \cdot 3^{\frac{1}{30}} \cdot 5^{\frac{1}{30}}$$

$$= \left(\frac{3 \cdot 5}{2^2}\right)^{\frac{1}{30}} > 1$$

즉 $ac < d$ 이므로

$M(ac, d)=d$

$\therefore m(a, M(b, c)) \cdot M(ac, d)$

$=cd = (3^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}) \cdot (2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{5}})$

$=2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{11}{30}} \cdot 5^{\frac{11}{30}}$

따라서 $p=\frac{3}{5}, q=\frac{11}{30}, r=\frac{11}{30}$ 이므로

$$p+q+r=\frac{4}{3}$$

답 ③

04 원 $x^2+y^2=16^{\frac{1}{n}}$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=16^{\frac{1}{n}}$$

따라서 $Q\left(\frac{16^{\frac{1}{n}}}{x_1}, 0\right), R\left(0, \frac{16^{\frac{1}{n}}}{y_1}\right)$ 이므로

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{16^{\frac{1}{n}}}{|x_1|} \cdot \frac{16^{\frac{1}{n}}}{|y_1|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16^{\frac{2}{n}}}{|x_1y_1|}$$

$$= 2^{-1} \cdot 2^{\frac{8}{n}} \cdot 2^{2n-1}$$

$$= 2^{2n+\frac{8}{n}-2}$$

이때 $2n>0, \frac{8}{n}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2n+\frac{8}{n} \geq 2\sqrt{2n \cdot \frac{8}{n}} = 8 \text{ (단, 등호는 } n=2 \text{일 때 성립)}$$

$$\therefore S_n = 2^{2n+\frac{8}{n}-2} \geq 2^{8-2} = 64$$

따라서 S_n 의 최솟값은 64이다.

답 ③

05 $30^b=3$ 에서 $30^{-b}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

위의 식의 양변에 30을 곱하면

$$30^{1-b}=10$$

$$\therefore 10^{\frac{2a+b}{1-b}} = (30^{1-b})^{\frac{2a+b}{1-b}}$$

$$= 30^{2a+b} = (30^a)^2 \cdot 30^b$$

$$= 4^2 \cdot 3 = 48$$

답 48

06 $t=axy^{1+2b}$ ㉠

염분의 농도가 $4y$, 음식의 양이 $2x$ 일 때, 끓기까지 걸리는 시간은 $8t$ 이므로

$$8t = a \cdot (2x)^b \cdot (4y)^{1+2b} \text{ ㉡}$$

㉡ $\div$ ㉠을 하면

$$8=2^b \cdot 4^{1+2b} \therefore 2^3=2^{5b+2}$$

즉 $3=5b+2$ 이므로

$$b=\frac{1}{5}$$

답 ②

I -2. 로그

개념 & 핵심 기술

본책 14~15쪽

01 $\log_4 \{ \log_3 (\log_2 x) \} = \frac{1}{2}$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$\log_3 (\log_2 x) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\log_2 x = 3^2 = 9$$

$$\therefore x = 2^9 = 512$$

답 ④

02 $\log_2 \frac{16}{n} = m$ (m 은 자연수)이라 하면 로그의 정의에

의하여 $2^m = \frac{16}{n} = \frac{2^4}{n}$

따라서 $\frac{2^4}{n}$ 은 2의 거듭제곱이므로 n 은

$$2^0=1, 2^1=2, 2^2=4, 2^3=8 \text{의 } 4 \text{개}$$

답 4

03 밑의 조건에서 $9-x > 0, 9-x \neq 1$

$$\therefore x < 8 \text{ 또는 } 8 < x < 9 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

진수의 조건에서 $x^2 - 7x + 10 > 0$

$$(x-2)(x-5) > 0$$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②의 공통 범위를 구하면

$$x < 2 \text{ 또는 } 5 < x < 8 \text{ 또는 } 8 < x < 9$$

따라서 자연수 x 는

$$1, 6, 7 \text{의 } 3 \text{개}$$

답 ①

04 $2 \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \sqrt{18} - \frac{1}{2} \log_3 32$

$$= \log_3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \log_3 \sqrt{18} + \log_3 \frac{1}{\sqrt{32}}$$

$$= \log_3 \frac{4}{9} + \log_3 3\sqrt{2} + \log_3 \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$= \log_3 \left(\frac{4}{9} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} \right)$$

$$= \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

답 -1

다른 풀이 $2 \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \sqrt{18} - \frac{1}{2} \log_3 32$

$$= 2(\log_3 2 - 1) + \log_3 (3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} \log_3 2^5$$

$$= (2 \log_3 2 - 2) + \left(1 + \frac{1}{2} \log_3 2 \right) - \frac{5}{2} \log_3 2$$

$$= -1$$

05 $\log_5 \sqrt{2.4} = \frac{1}{2} \log_5 2.4 = \frac{1}{2} \log_5 \frac{12}{5}$

$$= \frac{1}{2} \log_5 \frac{2^2 \cdot 3}{5}$$

$$= \frac{1}{2} (2 \log_5 2 + \log_5 3 - 1)$$

$$= \frac{1}{2} (2a + b - 1)$$

답 ①

양수 A, B 와 0이 아닌 실

수 x, y 에 대하여

$$A^x = B^y$$

$$\Rightarrow A = B^{\frac{y}{x}}, B = A^{\frac{x}{y}}$$

06 $a^2 = b^3$ 에서 $b = a^{\frac{2}{3}}$

또 $b^3 = c^4$ 에서 $c = b^{\frac{3}{4}}$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b c &= \log_a a^{\frac{2}{3}} + \log_b b^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

따라서 $p=12, q=17$ 이므로 $p+q=29$

답 ③

다른 풀이 $a^2 = b^3$ 이므로 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a a^2 = \log_a b^3, \quad 2 = 3 \log_a b$$

$$\therefore \log_a b = \frac{2}{3}$$

또 $b^3 = c^4$ 이므로 양변에 b 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_b b^3 = \log_b c^4, \quad 3 = 4 \log_b c$$

$$\therefore \log_b c = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \log_a b + \log_b c = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$$

따라서 $p=12, q=17$ 이므로 $p+q=29$

07 $\log_{12} 14 = \frac{\log_7 14}{\log_7 12} = \frac{\log_7 (2 \cdot 7)}{\log_7 (2^2 \cdot 3)}$

$$= \frac{\log_7 2 + 1}{2 \log_7 2 + \log_7 3} = \frac{a+1}{2a+b}$$

답 ④

08 $a = \sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}}, b = (\sqrt{8})^3 = (2^{\frac{3}{2}})^3 = 2^{\frac{9}{2}}$ 이므로

$$\log_a b = \log_{2^{\frac{3}{4}}} 2^{\frac{9}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{4}} \log_2 2 = 6$$

답 6

09 $a = \frac{\log_3 10}{\log_9 16} = \frac{\log_3 10}{\log_{3^2} 4^2} = \frac{\log_3 10}{\log_3 4} = \log_4 10$ 이므로 로

그의 정의에 의하여

$$4^a = 10$$

답 ⑤

10 $\log 6^5 = 5 \log 6 = 5(\log 2 + \log 3)$

$$= 5(0.3010 + 0.4771)$$

$$= 3.8905$$

따라서 $3 < \log 6^5 < 4$ 이므로

$$n=3$$

답 ②

11 직육면체의 부피는 $12.6 \times 13.5 \times 14.4$ 이므로

$$a^3 = 12.6 \times 13.5 \times 14.4$$

$$\therefore a = \sqrt[3]{12.6 \times 13.5 \times 14.4}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log a = \frac{1}{3} (\log 12.6 + \log 13.5 + \log 14.4)$$

$$= \frac{1}{3} \{ \log (1.26 \times 10) + \log (1.35 \times 10) + \log (1.44 \times 10) \}$$

$$+ \log (1.44 \times 10) \}$$

$$= \frac{1}{3} (\log 1.26 + 1 + \log 1.35 + 1 + \log 1.44 + 1)$$

$$= \frac{1}{3}(3 + 0.1004 + 0.1303 + 0.1584)$$

$$= 1.1297 \quad \text{답 1.1297}$$

12 $\log 10 < \log 30 < \log 100$ 에서

$$1 < \log 30 < 2$$

$$\therefore n=1, \alpha = \log 30 - 1 = \log 30 - \log 10 = \log 3$$

$$\therefore \frac{10^n + 10^{2\alpha}}{10^n - 10^\alpha} = \frac{10 + 10^{2\log 3}}{10 - 10^{\log 3}} \quad \begin{matrix} 10^{2\log 3} = 10^{\log 9} = 9^{\log 10} \\ = 9 \\ 10^{\log 3} = 3^{\log 10} = 3 \end{matrix}$$

$$= \frac{10+9}{10-3} = \frac{19}{7} \quad \text{답 } \frac{19}{7}$$

다른 풀이 $\log 10 < \log 30 < \log 100$ 에서 $1 < \log 30 < 2$ 이므로 $n=1$

즉 $\log 30 = 1 + \alpha$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$10^{1+\alpha} = 30, \quad 10 \cdot 10^\alpha = 30 \quad \therefore 10^\alpha = 3$$

$$\therefore \frac{10^n + 10^{2\alpha}}{10^n - 10^\alpha} = \frac{10 + 3^2}{10 - 3} = \frac{19}{7}$$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 16~17쪽

01 밑의 조건에서

$$(a-2)^2 > 0, (a-2)^2 \neq 1$$

$$\therefore a \neq 1, a \neq 2, a \neq 3 \quad \dots \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{1}$$

진수의 조건에서

$$ax^2 - ax + 2 > 0$$

(i) $a=0$ 일 때,

$2 > 0$ 이므로 위의 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 $a > 0$ 이고, 이차방정식 $ax^2 - ax + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = (-a)^2 - 8a < 0$

$$a(a-8) < 0 \quad \therefore 0 < a < 8$$

(i), (ii)에서 $0 \leq a < 8$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$0 + 4 + 5 + 6 + 7 = 22 \quad \dots \textcircled{3} \rightarrow \text{답 22}$$

02 밑의 조건에서

$$x-5 > 0, x-5 \neq 1$$

$$\therefore 5 < x < 6 \text{ 또는 } x > 6$$

진수의 조건에서

$$10 - |x| - |y| > 0$$

$$\therefore |x| + |y| < 10$$

양변에 $8y^2$ 을 더하면

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = 8y^2$$

$$\therefore (x-2y)^2 = 8y^2$$

05 $x^2 - 4xy - 4y^2 = 0$ 에서 $(x-2y)^2 = 8y^2$

$$\therefore x-2y = 2\sqrt{2}y \quad (\because x > 2y, y > 0)$$

$$\therefore \log_2(x-2y) - \log_2 y = \log_2 2\sqrt{2}y - \log_2 y$$

$$= \log_2 \frac{2\sqrt{2}y}{y} = \log_2 2^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \quad \text{답 ③}$$

이때 x, y 는 정수이므로

(i) $x=7$ 일 때 $|y| < 3$ 이므로

$$-3 < y < 3$$

따라서 정수 y 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 이므로 순서쌍 (x, y) 의 개수는 5이다.

(ii) $x=8$ 일 때 $|y| < 2$ 이므로

$$-2 < y < 2$$

따라서 정수 y 는 $-1, 0, 1$ 이므로 순서쌍 (x, y) 의 개수는 3이다.

(iii) $x=9$ 일 때 $|y| < 1$ 이므로

$$-1 < y < 1$$

따라서 정수 y 는 0이므로 순서쌍 (x, y) 의 개수는 1이다.

(iv) $x \geq 10$ 일 때 $|y| < 0$ 이므로 이를 만족시키는 정수 y 는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$5 + 3 + 1 = 9 \quad \text{답 ②}$$

03 $ab^2=1$ 에서 $a=b^{-2}$ 이므로

$$a^{-5}b^3 = (b^{-2})^{-5}b^3 = b^{10} \cdot b^3 = b^{13}$$

$$\therefore \log_b a^{-5}b^3 = \log_b b^{13} = 13$$

답 ④

다른 풀이 $ab^2=1$ 의 양변에 b 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_b ab^2 = \log_b 1, \quad \log_b a + 2 = 0$$

$$\therefore \log_b a = -2$$

$$\therefore \log_b a^{-5}b^3 = -5 \log_b a + 3$$

$$= -5 \cdot (-2) + 3 = 13$$

04 $a^3=b^2$ 이므로

$$b^4c^2 = (b^2)^2c^2 = (a^3)^2c^2 = a^6c^2 = 1$$

$a^6c^2=1$ 의 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a a^6c^2 = \log_a 1, \quad 6 + 2 \log_a c = 0$$

$$\therefore \log_a c = -3$$

$b^4c^2=1$ 의 양변에 b 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_b b^4c^2 = \log_b 1, \quad 4 + 2 \log_b c = 0$$

$$\therefore \log_b c = -2$$

$$\therefore \log_a c + \log_b c = -3 - 2 = -5 \quad \text{답 ⑤}$$

다른 풀이 $a^3=b^2$ 에서 $a=b^{\frac{2}{3}}$

$$b^4c^2=1 \text{에서 } c^2=b^{-4} \quad \therefore c=b^{-2}$$

$$\therefore \log_a c + \log_b c = \log_{b^{\frac{3}{2}}} b^{-2} + \log_b b^{-2}$$

$$= \frac{-2}{\frac{3}{2}} - 2 = -\frac{4}{3} - 2 = -\frac{10}{3}$$

06 $\log_2 xy = 4$ 에서

$$\log_2 x + \log_2 y = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\log_2 yz = 6$ 에서

$$\log_2 y + \log_2 z = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\log_2 zx = 8$ 에서

$$\log_2 z + \log_2 x = 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉢} \rightarrow \textcircled{1}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 을 하면

$$2(\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z) = 18$$

$$\therefore \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉣} - \textcircled{㉠}$ 을 하면 $\log_2 z = 5$

$\textcircled{㉣} - \textcircled{㉡}$ 을 하면 $\log_2 x = 3$

$\textcircled{㉣} - \textcircled{㉢}$ 을 하면 $\log_2 y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$$\begin{aligned} \therefore \log_2 \frac{x^2 z^3}{y} &= 2\log_2 x + 3\log_2 z - \log_2 y \\ &= 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 - 1 \\ &= 20 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 20

채점 기준	비율
① 주어진 세 등식을 변형할 수 있다.	30%
② $\log_2 x, \log_2 y, \log_2 z$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $\log_2 \frac{x^2 z^3}{y}$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

다른 풀이 $xy = 2^4, zx = 2^8$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{x^2 z^3}{y} &= \frac{(zx)^3}{xy} = \frac{(2^8)^3}{2^4} = 2^{20} \\ \therefore \log_2 \frac{x^2 z^3}{y} &= \log_2 2^{20} = 20 \end{aligned}$$

07 $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} = \log_x 2 + \log_x 3 = \log_x 6 = 10$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\log_6 \sqrt{x}} + \frac{1}{\log_{36} x} &= \log_{\sqrt{x}} 6 + \log_x 36 \\ &= 2\log_x 6 + 2\log_x 36 \\ &= 4\log_x 6 = 4 \cdot 10 \\ &= 40 \end{aligned} \quad \text{답 40}$$

08 $5^a = \frac{1}{2}$ 에서

$$a = \log_5 \frac{1}{2} = -\log_5 2 = \log_{\frac{1}{5}} 2$$

$5^b = \frac{1}{3}$ 에서

$$\begin{aligned} b &= \log_5 \frac{1}{3} = -\log_5 3 = \log_{\frac{1}{5}} 3 \\ \therefore \log_{0.2} 360 &= \log_{\frac{1}{5}} 360 = \log_{\frac{1}{5}} (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) \\ &= 3\log_{\frac{1}{5}} 2 + 2\log_{\frac{1}{5}} 3 - 1 \\ &= 3a + 2b - 1 \end{aligned}$$

답 ①

09 $\log_a \beta^2 + \log_\beta a^2 = 2(\log_a \beta + \log_\beta a) = 32$ 이므로

$$\log_a \beta + \log_\beta a = 16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 3n, \log_3 \alpha \cdot \log_3 \beta = 2n$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a \beta + \log_\beta a &= \frac{\log_3 \beta}{\log_3 a} + \frac{\log_3 a}{\log_3 \beta} = \frac{(\log_3 \alpha)^2 + (\log_3 \beta)^2}{\log_3 \alpha \cdot \log_3 \beta} \\ &= \frac{(\log_3 \alpha + \log_3 \beta)^2 - 2\log_3 \alpha \cdot \log_3 \beta}{\log_3 \alpha \cdot \log_3 \beta} \\ &= \frac{(3n)^2 - 2 \cdot 2n}{2n} = \frac{9}{2}n - 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{9}{2}n - 2 = 16 \text{이므로}$$

$$\frac{9}{2}n = 18 \quad \therefore n = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore \log_n 8 = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
① $\log_a \beta + \log_\beta a$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
② n 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $\log_n 8$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{7}} \sqrt{2} &= \log_{7^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \log_7 2 \\ &= \log_7 2 \end{aligned}$$

분모, 분자에 x 를 곱한다.

$\log_3 7 \neq \frac{1}{\log_3 7}$ 이므로 등호는 성립하지 않는다.

10 $A = \log_4 \sqrt{2} + \log_9 27 = \log_{2^2} 2^{\frac{1}{2}} + \log_{3^2} 3^3$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{3}{2} \log_3 3 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$B = 7^{\log_{\sqrt{7}} 2} = 7^{\log_7 2} = 2^{\log_7 7} = 2$$

$$C = \log_3 7 + \log_7 3 = \log_3 7 + \frac{1}{\log_3 7}$$

이때 $\log_3 7 > 0, \frac{1}{\log_3 7} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \log_3 7 + \frac{1}{\log_3 7} &> 2\sqrt{\log_3 7 \cdot \frac{1}{\log_3 7}} = 2 \\ \therefore C &> 2 \\ \therefore A &< B < C \end{aligned}$$

답 ①

11 $\log_a b = \alpha, \log_b c = \beta, \log_c a = \gamma$ 라 하자.

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} 2(\log_a b + \log_b c + \log_c a) &= 7 \\ 2(\alpha + \beta + \gamma) &= 7 \\ \therefore \alpha + \beta + \gamma &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} 2(\log_b a + \log_c b + \log_a c) &= 7 \\ 2\left(\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b c} + \frac{1}{\log_c a}\right) &= 7 \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} &= \frac{7}{2} \\ \therefore \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

이때 $\alpha\beta\gamma = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$ 이므로

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\log_a b)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c a)^2 \\ = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

답 21/4

12 $(\sqrt{8})^a = (\sqrt{32})^b = x^c$ 의 각 변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_2 8^{\frac{a}{2}} = \log_2 32^{\frac{b}{2}} = \log_2 x^c$$

$$\log_2 2^{\frac{3}{2}a} = \log_2 2^{\frac{5}{2}b} = \log_2 x^c$$

$$\frac{3}{2}a = \frac{5}{2}b = c \log_2 x$$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{3}{2c \log_2 x}, \quad \frac{1}{b} = \frac{5}{2c \log_2 x}$$

이때 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{7}{c}$ 이므로

$$\frac{6}{2c \log_2 x} + \frac{15}{2c \log_2 x} = \frac{7}{c}$$

$$\frac{21}{2c \log_2 x} = \frac{7}{c} \quad \therefore \log_2 x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

답 ①

다른 풀이 $(\sqrt{8})^a = (\sqrt{32})^b$ 에서 $2^{\frac{3}{2}a} = 2^{\frac{5}{2}b}$

$$\frac{3}{2}a = \frac{5}{2}b \quad \therefore a = \frac{5}{3}b$$

$a = \frac{5}{3}b$ 를 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{7}{c}$ 에 대입하면

$$\frac{6}{5b} + \frac{3}{b} = \frac{7}{c}, \quad \frac{21}{5b} = \frac{7}{c}$$

$$21c = 35b \quad \therefore c = \frac{5}{3}b$$

따라서 $(\sqrt{32})^b = x^c$ 에서 $2^{\frac{5}{2}b} = x^{\frac{5}{3}b}$ 이므로

$$2^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} \quad \therefore x = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

13 $\log_a b + \log_b a = 5$ 에서

$$\log_a b + 6 \log_b a = 5 \quad \therefore \log_a b + \frac{6}{\log_a b} = 5$$

양변에 $\log_a b$ 를 곱하여 정리하면

$$(\log_a b)^2 - 5 \log_a b + 6 = 0$$

$$(\log_a b - 2)(\log_a b - 3) = 0$$

$$\therefore \log_a b = 2 \text{ 또는 } \log_a b = 3$$

$$\therefore b = a^2 \text{ 또는 } b = a^3$$

이때 $1 < a^2 < b$ 이므로 $b = a^3$

$$\therefore \frac{a^3 b}{a^6 + b^2} = \frac{a^3 \cdot a^3}{a^6 + (a^3)^2} = \frac{a^6}{2a^6} = \frac{1}{2}$$

답 ①

14 1000의 양의 약수의 개수는 16이므로

$$n = 16$$

따라서 1000의 양의 약수를 작은 것부터 순서대로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{16}$ 이라 하면

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, \dots, a_{15} = 500, a_{16} = 1000$$

이때 $a_1 a_{16} = a_2 a_{15} = \dots = a_8 a_9 = 1000$ 이므로

$$a_1 a_2 \dots a_{16} = 1000^8 = 10^{24}$$

답 2

$$\frac{3}{2}a = c \log_2 x \text{에서}$$

$$\frac{2}{3a} = \frac{1}{c \log_2 x}$$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{3}{2c \log_2 x}$$

$$\frac{5}{2}b = c \log_2 x \text{에서}$$

$$\frac{2}{5b} = \frac{1}{c \log_2 x}$$

$$\therefore \frac{1}{b} = \frac{5}{2c \log_2 x}$$

$$\therefore n + \log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_{16}$$

$$= 16 + \log a_1 a_2 \dots a_{16}$$

$$= 16 + \log 10^{24}$$

$$= 40$$

답 40

채점 기준	비율
① n 의 값을 구할 수 있다.	20%
② $a_1 a_2 \dots a_{16}$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ 답을 구할 수 있다.	30%

1등급 비밀노트 >>>

자연수 N 이

$$N = a^m b^n \quad (a, b \text{는 서로 다른 소수, } m, n \text{는 자연수})$$

으로 소인수분해될 때,

$$\textcircled{1} N \text{의 양의 약수의 개수는 } (m+1)(n+1)$$

$$\textcircled{2} N \text{의 모든 양의 약수의 곱은 } N^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}}$$

15 $L_1 = 4a, L_2 = a$ 일 때 $W = 30$ 이므로

$$C \log \frac{4a}{a} = C \log 4 = 30$$

$$\therefore C = \frac{30}{2 \log 2} = \frac{15}{\log 2}$$

따라서 $W = \frac{15}{\log 2} \cdot \log \frac{L_1}{L_2}$ 이므로 이 식에 $L_1 = ka,$

$L_2 = 2a, W = 45$ 를 대입하면

$$45 = \frac{15}{\log 2} \cdot \log \frac{ka}{2a}, \quad \frac{\log \frac{k}{2}}{\log 2} = 3$$

$$\log_2 \frac{k}{2} = 3, \quad \frac{k}{2} = 8 \quad \therefore k = 16$$

답 ④

16 현재 입장료를 A 원이라 하면 3년마다 8%씩 인상되므로 30년 후의 입장료는

$$A \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{10} = 1.08^{10} A \text{ (원)}$$

답 ①

1.08^{10} 에 상용로그를 취하면

$$\log 1.08^{10} = 10 \log 1.08 = 10 \times 0.03 = 0.3$$

이때 $\log 2 = 0.30$ 이므로 $1.08^{10} = 2$

답 ②

따라서 $1.08^{10} A = 2A$ 이므로 30년 후의 입장료는 현재 입장료의 2배가 된다.

답 ③

답 2배

채점 기준	비율
① 30년 후의 입장료를 A 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② 1.08^{10} 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ 답을 구할 수 있다.	10%

1등급 비밀노트 >>>

처음의 양이 a 이고 매회의 시행에서 $p\%$ 씩 증가 또는 감소하는 경우 n 번째의 양은

$$\textcircled{1} \text{ 증가할 때 } \Rightarrow a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$\textcircled{2} \text{ 감소할 때 } \Rightarrow a \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 18쪽

01 $-a+b+1 = -\log_2 3 + \log_2 5 + 1 = \log_2 \frac{10}{3}$ 이므로

$$2^{-a+b+1} = \frac{10}{3}$$

$2a-3 = 2\log_2 3 - 3 = \log_2 \frac{9}{8}$ 이므로

$$2^{2a-3} = \frac{9}{8}$$

$$\therefore A\left(\frac{10}{3}, \frac{9}{8}\right)$$

$b-1 = \log_2 5 - 1 = \log_2 \frac{5}{2}$ 이므로

$$2^{b-1} = \frac{5}{2}$$

$a+b-3 = \log_2 3 + \log_2 5 - 3 = \log_2 \frac{15}{8}$ 이므로

$$2^{a+b-3} = \frac{15}{8}$$

$$\therefore B\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{8}\right)$$

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{15}{8} - \frac{9}{8}}{\frac{5}{2} - \frac{10}{3}} = \frac{\frac{6}{8}}{-\frac{5}{6}} = -\frac{9}{10}$$

답 ⑤

02 $2^{a+b} = 9$ 에서 $a+b = \log_2 9$

$3^{a-b} = 10$ 에서 $a-b = \log_3 10$

$$\therefore a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$= \log_2 9 \cdot \log_3 10$$

$$= 2\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 10}{\log_2 3} = 2\log_2 10$$

$$= \log_2 100$$

답 ⑤

03 자연수 n 에 대하여 $3^n > 1$ 이므로

$$\log 3^n > 0$$

(i) $m=0$ 인 경우

$$\log 3^n = a \text{에서 } 0 < \log 3^n < 1 \text{이므로}$$

$$1 < 3^n < 10$$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 1, 2이므로

$$f(1)=0, f(2)=0$$

(ii) $m=1$ 인 경우

$$\log 3^n = 1+a \text{에서 } 1 \leq \log 3^n < 2 \text{이므로}$$

$$10 \leq 3^n < 100$$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 3, 4이므로

$$f(3)=1, f(4)=1$$

(iii) $m=2$ 인 경우

$$\log 3^n = 2+a \text{에서 } 2 \leq \log 3^n < 3 \text{이므로}$$

$$100 \leq 3^n < 1000$$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 5, 6이므로

$$f(5)=2, f(6)=2$$

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
를 지나는 직선의 기울기는
 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (단, $x_1 \neq x_2$)

$n=9$ 일 때,

$$M = 9 \cdot 10^9$$

$n=1$ 일 때,

$$m = 1 \cdot 10^1 = 10$$

(iv) $m=3$ 인 경우

$$\log 3^n = 3+a \text{에서 } 3 \leq \log 3^n < 4 \text{이므로}$$

$$1000 \leq 3^n < 10000$$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 7, 8이므로

$$f(7)=3, f(8)=3$$

$\vdots$

따라서

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(7)=9 < 10,$$

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)=12 > 10$$

이므로 자연수 k 의 최솟값은 8이다.

답 8

04 $0 \leq a < 1$ 이므로

$$1 \leq 10^a < 10$$

즉 $1 \leq n < 10$ 이고 n 은 정수이므로

$$n=1, 2, 3, \dots, 9$$

$$\log x = n+a \text{에서}$$

$$x = 10^{n+a} = 10^n \cdot 10^a = n \cdot 10^n$$

따라서 $M = 9 \cdot 10^9, m = 10$ 이므로

$$\log \frac{M}{m} = \log \frac{9 \cdot 10^9}{10} = \log (9 \cdot 10^8)$$

$$= 8 + 2\log 3$$

답 ⑤

05 P, Q소리의 강도가 기준음의 강도의 각각 K_P 배, K_Q 배라 하면

$$K_P = 25K_Q$$

또 P, Q소리의 크기를 각각 D_P dB, D_Q dB이라 하면 두 소리의 크기의 차는

$$|D_P - D_Q| = |10 \log K_P - 10 \log K_Q|$$

$$= \left| 10 \log \frac{K_P}{K_Q} \right| = \left| 10 \log \frac{25K_Q}{K_Q} \right|$$

$$= 10 \log 25 = 20 \log 5$$

$$= 20(1 - \log 2)$$

$$= 20 \times 0.7 = 14(\text{dB})$$

답 ③

06 조건 (가), (나)에 의하여

$$\log x = f(x) + g(x)$$

$$= f(z) + 2 + g(z)$$

$$= \log z + 2 = \log 100z$$

$$\therefore x = 100z$$

$$\log y = f(y) + g(y)$$

$$= f(z) + 1 + g(z)$$

$$= \log z + 1 = \log 10z$$

$$\therefore y = 10z$$

조건 (다)에서 $x+y+z=21312$ 이므로

$$100z + 10z + z = 21312, \quad 111z = 21312$$

$$\therefore z = 192$$

따라서 $x=19200, y=1920$ 이므로

$$\frac{x}{60} + \frac{y}{20} + z = 320 + 96 + 192 = 608$$

답 608

I -3. 지수함수

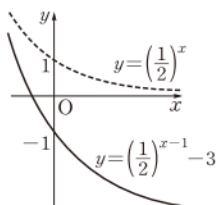
개념 & 핵심 기출

본책 20~21쪽

01 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 3$ 의 그래프는

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.



답 ①

02 $y = 16 \cdot 2^{2x} + 3 = 4^2 \cdot 4^x + 3$
 $= 4^{x+2} + 3$

따라서 $y = 16 \cdot 2^{2x} + 3$ 의 그래프는 $y = 4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$$m = -2, n = 3$$

$$\therefore m + n = 1$$

답 1

03 함수 $y = 3^{x-p} + q$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $y = -3$ 이므로

$$q = -3$$

$y = 3^{x-p} - 3$ 의 그래프가 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$3^{-1-p} - 3 = 0 \quad \therefore 3^{-1-p} = 3$$

즉 $-1-p=1$ 이므로 $p=-2$

따라서 함수 $y = 3^{x+2} - 3$ 의 그래프가 점 $(2, k)$ 를 지나므로
 $k = 3^{2+2} - 3 = 78$

답 78

04 밑이 1보다 크고 $a > 0$ 이므로 주어진 함수는 $x=3$ 에서 최댓값을 갖고, $x=0$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$\text{즉 } a \cdot 3^2 + b = 55 \text{이므로 } 9a + b = 55 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \cdot 3^{-1} + b = 3 \text{이므로 } \frac{a}{3} + b = 3$$

$$\therefore a + 3b = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=6, b=1$

$$\therefore a+b=7$$

답 ②

05 $g(x) = x^2 - 2x + 2$ 라 하면

$$g(x) = (x-1)^2 + 1$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $g(0)=2, g(1)=1, g(3)=5$ 이므로

$$1 \leq g(x) \leq 5$$

이때 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^5 \leq f(x) \leq \left(\frac{1}{5}\right)^1$$

따라서 $M = \frac{1}{5}, m = \left(\frac{1}{5}\right)^5$ 이므로

$$\frac{M}{m} = \frac{1}{5} \cdot 5^5 = 625$$

답 625

③의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}$$

$$= (-3)^2 - 1 \cdot (-10)$$

$$= 19 > 0$$

이므로 ③은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$a = (2^6)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

밑이 같은 경우

09 (i) $x^2 + 4x + 4 = x + 8$ 일 때,

$$x^2 + 3x - 4 = 0, \quad (x+4)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 1$$

(ii) $x-5=0$, 즉 $x=5$ 일 때,

$$49^0 = 13^0 = 1 \text{이므로 등식이 성립한다.}$$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$$-4 + 1 + 5 = 2$$

답 2

10 $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-1} < 3\sqrt{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$ 에서

$$(3^{-2})^{2x-1} < 3^{\frac{3}{2}} < (3^{-1})^{x-5}$$

$$\therefore 3^{-4x+2} < 3^{\frac{3}{2}} < 3^{-x+5}$$

이때 밑이 1보다 크므로 $-4x+2 < \frac{3}{2} < -x+5$

$$(i) -4x+2 < \frac{3}{2} \text{에서 } x > \frac{1}{8}$$

$$(ii) \frac{3}{2} < -x+5 \text{에서 } x < \frac{7}{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{1}{8} < x < \frac{7}{2}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 는

1, 2, 3의 3개

답 ③

11 $2^{x-2} + 3 \leq 16^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$ 에서
 $2^{x-2} + 3 \leq (2^4)^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}, \quad 2^{x-2} + 3 \leq 2^{2x-2}$
 $\therefore \frac{1}{4} \cdot 2^{2x} - \frac{1}{4} \cdot 2^x - 3 \geq 0$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t - 3 \geq 0, \quad t^2 - t - 12 \geq 0$
 $(t+3)(t-4) \geq 0 \quad \therefore t \geq 4$ ($\because t > 0$)
 즉 $2^x \geq 2^2$ 이고 밑이 1보다 크므로
 $x \geq 2$

답 $x \geq 2$

12 $9^x \geq k \cdot 3^x - 3k - 7$ 에서
 $(3^x)^2 - k \cdot 3^x + 3k + 7 \geq 0$
 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - kt + 3k + 7 \geq 0$
 이때 $f(t) = t^2 - kt + 3k + 7$ 이라 하면
 $f(t) = \left(t - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}k^2 + 3k + 7$

(i) $\frac{k}{2} > 0$, 즉 $k > 0$ 일 때,
 $t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{4}k^2 + 3k + 7$ 이다.
 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $f(t) \geq 0$ 이라면
 $-\frac{1}{4}k^2 + 3k + 7 \geq 0$ 이어야 하므로
 $k^2 - 12k - 28 \leq 0, \quad (k+2)(k-14) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq k \leq 14$
 그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 14$

(ii) $\frac{k}{2} \leq 0$, 즉 $k \leq 0$ 일 때,
 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $f(t) \geq 0$ 이라면 $f(0) \geq 0$
 이어야 하므로
 $3k + 7 \geq 0 \quad \therefore k \geq -\frac{7}{3}$
 이때 $k \leq 0$ 이므로 $-\frac{7}{3} \leq k \leq 0$
 (i), (ii)에서 $-\frac{7}{3} \leq k \leq 14$
 따라서 $a = -\frac{7}{3}$, $b = 14$ 이므로
 $\frac{b}{a} = \frac{14}{-\frac{7}{3}} = -6$

답 ④

도형의 대칭이동

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

- ① x 축: $y=-f(x)$
- ② y 축: $y=f(-x)$
- ③ 원점: $y=-f(-x)$

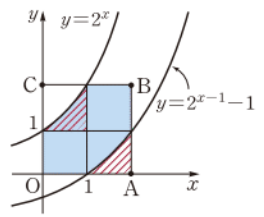
함수 $f(t)$ 의 그래프의 축의 방정식은
 $t = \frac{k}{2}$

$t > 0$ 에서
 $f(t) > f(0)$

$\triangle POH$ 와 $\triangle QOH'$ 에서
 $\angle POH$ 는 공통,
 $\angle PHO = \angle QH'O$
 $= 90^\circ$
 $\therefore \triangle POH \sim \triangle QOH'$
 (AA 닮음)

$2^x = 2$ 에서 $x = 1$

이때 함수 $y = 2^{x-1} - 1$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같다.
 따라서 색칠한 부분의 넓이는
 $3 \cdot (1 \cdot 1) = 3$



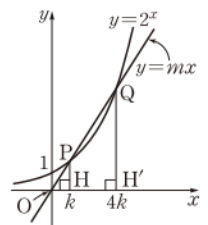
답 3

02 함수 $y = 2^{2x+a} + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $y = 3$ 이므로 $b = 3$
 함수 $y = 2^{2x+a} + 3$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
 $y = 2^{-2x+a} + 3$
 이 그래프가 점 $(-2, 11)$ 을 지나므로
 $11 = 2^{4+a} + 3 \quad \therefore 2^{4+a} = 8$
 따라서 $4 + a = 3$ 이므로
 $a = -1$
 $\therefore a + b = 2$

답 2

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	30%
② 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $a + b$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

03 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면



$\triangle POH \sim \triangle QOH'$
 이고, 닮음비는
 $OP : OQ = 1 : 4$
 두 점 H, H'의 x 좌표를 각각 k , $4k$ ($k > 0$)라 하면
 $\overline{PH} = 2^k, \quad \overline{QH'} = 2^{4k}$
 이때 $\overline{PH} : \overline{QH'} = 1 : 4$ 이므로
 $2^k : 2^{4k} = 1 : 4, \quad 4 \cdot 2^k = 2^{4k}$
 $\therefore 2^{2+k} = 2^{4k}$
 따라서 $2 + k = 4k$ 이므로

$3k = 2 \quad \therefore k = \frac{2}{3}$
 $\therefore m = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

답 ⑤

04 $A = \sqrt[3]{a^3 \sqrt[4]{a^4}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}$
 $= a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}} = a^{\frac{12+4+1}{24}}$
 $= a^{\frac{17}{24}}$

1등급을 위한 고난도 문제 본책 22~23쪽

01 함수 $y = 2^x$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나고, 그래프가 변 BC와 만나는 점의 좌표는
 $(1, 2)$
 또 함수 $y = 2^{x-1} - 1$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 그래프가 변 AB와 만나는 점의 좌표는
 $(2, 1)$

$$B = \sqrt[3]{a^4 \sqrt[4]{a^3}} = a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}} \\ = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}} = a^{\frac{8+2+1}{24}} \\ = a^{\frac{11}{24}}$$

$$C = \sqrt[4]{a^4 \sqrt[3]{a}} = a^{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} \\ = a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24}} = a^{\frac{6+3+1}{24}} \\ = a^{\frac{5}{12}}$$

이때 $\frac{5}{12} < \frac{11}{24} < \frac{17}{24}$ 이고 $0 < a < 1$ 이므로
 $a^{\frac{17}{24}} < a^{\frac{11}{24}} < a^{\frac{5}{12}}$
 $\therefore A < B < C$

답 A < B < C

05 $y = 2^{x-2} \cdot 3^{3-x} = 2^{x-2} \cdot 3^{-(x-2)} \cdot 3$
 $= 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$

이때 밑이 1보다 작으므로 함수 $y = 2^{x-2} \cdot 3^{3-x}$ 은 $x=2$ 에
 서 최솟값을 갖는다.

따라서 구하는 최솟값은

$$1 \cdot 3 = 3$$

답 ⑤

06 $a < b$, $f(x) = 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이라 하면

$$f(b) - f(a) = 2^b - \left(\frac{1}{2}\right)^b - 2^a + \left(\frac{1}{2}\right)^a \\ = 2^b - 2^a + \left(\frac{1}{2}\right)^a - \left(\frac{1}{2}\right)^b$$

이때 $2^a < 2^b$, $\left(\frac{1}{2}\right)^b < \left(\frac{1}{2}\right)^a$ 이므로

$$2^b - 2^a > 0, \left(\frac{1}{2}\right)^a - \left(\frac{1}{2}\right)^b > 0$$

따라서 $f(b) - f(a) > 0$ 이므로

$$f(a) < f(b)$$

즉 함수 $y = 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증
 가한다.

따라서 함수 $y = 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은

$$x=2 \text{에서 최댓값} \quad 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$$

$$x=-2 \text{에서 최솟값} \quad 2^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -\frac{15}{4}$$

를 가지므로

$$M = \frac{15}{4}, m = -\frac{15}{4}$$

$$\therefore M - m = \frac{15}{4} - \left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{15}{2}$$

답 ②

07 $2^x + 2^{-x} = t$ 로 놓으면

$$y = 4^x + 4^{-x} + 2(2^x + 2^{-x}) - 1 \\ = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 + 2(2^x + 2^{-x}) - 1 \\ = t^2 + 2t - 3 \\ = (t+1)^2 - 4$$

→ ①

$2^x = 2^{-x}$ 에서 $2^{2x} = 1$
 따라서 $2x=0$ 이므로
 $x=0$

이때 $t = 2^x + 2^{-x}$ 에서 $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기
 하평균의 관계에 의하여

$$t = 2^x + 2^{-x}$$

$$\geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } x=0 \text{ 일 때 성립}) \rightarrow ②$$

따라서 주어진 함수는 $t=2$, 즉 $x=0$ 일 때 최소이므로 최
 소값은

$$3^2 - 4 = 5$$

→ ③

답 5

채점 기준	비율
① 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② t 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
③ 최솟값을 구할 수 있다.	30%

1등급 비밀노트 >>>

$a^x + a^{-x}$ 꼴이 반복되는 지수함수의 최대·최소

$a^x + a^{-x}$ 꼴이 반복되면 $a^x + a^{-x} = t$ 로 치환한다.

이때 $a^x > 0$, $a^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } a^x = a^{-x} \text{ 일 때 성립})$$

임에 주의한다.

08 $x \cdot \sqrt[3]{x^x} = x^x \cdot \sqrt[3]{x^x}$ 에서 $x \cdot \sqrt[3]{x^x} = x^{1+\frac{x}{3}}$, $x^x \cdot \sqrt[3]{x^x} = x^{x+\frac{2}{3}}$
 이므로 $x^{1+\frac{x}{3}} = x^{x+\frac{2}{3}}$

(i) $x=1$ 일 때,

$$1^{\frac{4}{3}} = 1^{\frac{5}{3}} \text{ 이므로 등식이 성립한다.}$$

(ii) $x \neq 1$ 일 때,

$$1 + \frac{x}{3} = x + \frac{2}{3} \text{ 에서 } \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

답 ③

09 $4^x - 2^{-x} = 5(2^x - 1)$ 에서

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 5 - 2^{-x} = 0$$

양변에 2^x 을 곱하면

$$2^{3x} - 5 \cdot 2^{2x} + 5 \cdot 2^x - 1 = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$) 로 놓으면

$$t^3 - 5t^2 + 5t - 1 = 0, \quad (t-1)(t^2 - 4t + 1) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2-\sqrt{3} \text{ 또는 } t=2+\sqrt{3} \rightarrow ①$$

이때 $0 < 2-\sqrt{3} < 1 < 2+\sqrt{3}$ 이므로

$$2^a = 2+\sqrt{3}, \quad 2^b = 2-\sqrt{3} \rightarrow ②$$

$$\therefore 4^a + 4^b = (2^a)^2 + (2^b)^2 \\ = (2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2 \\ = 14 \rightarrow ③$$

답 14

채점 기준	비율
① t 의 값을 구할 수 있다.	50%
② $2^a, 2^b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ $4^a + 4^b$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & -1 \\ & & 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

10 $2^{x+2} = -2^{3-x} + 33$ 에서
 $2^{x+2} + 2^{3-x} - 33 = 0$
 $\therefore 4 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^{-x} - 33 = 0$

양변에 2^x 을 곱하면

$$4 \cdot 2^{2x} - 33 \cdot 2^x + 8 = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$4t^2 - 33t + 8 = 0, \quad (4t-1)(t-8) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{4} \text{ 또는 } t = 8$$

즉 $2^x = \frac{1}{4}$ 또는 $2^x = 8$ 이므로

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 주어진 두 함수의 그래프가 만나는 두 점의 좌표는 $(-2, 1)$, $(3, 32)$ 이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{32 - 1}{3 - (-2)} \{x - (-2)\}$$

$$\therefore y = \frac{31}{5}x + \frac{67}{5}$$

따라서 $a = \frac{67}{5}$ 이므로

$$5a = 67$$

답 ③

11 방정식 $|3^x - 2| = k$ 의 실근은 함수 $y = |3^x - 2|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표와 같다. $\cdots$ ①

함수 $y = |3^x - 2|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 는 오른쪽 그림과 같으므로 두 교점의 x 좌표 x_1 , x_2 가 서로 다른 부호하려면

$$1 < k < 2 \quad \cdots$$
 ②

따라서 $a = 1$, $\beta = 2$ 이므로

$$a + \beta = 3$$

$\cdots$ ③

답 3

채점 기준	비율
① 주어진 방정식의 실근을 그래프의 교점으로 설명할 수 있다.	30%
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ $a + \beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 방정식 $|3^x - 2| = k$ 가 실근을 가져야 하므로

$$k \geq 0 \quad \cdots$$
 ①

방정식 $|3^x - 2| = k$ 에서

$$3^x - 2 = k \text{ 또는 } 3^x - 2 = -k$$

$$\therefore 3^x = k + 2 \text{ 또는 } 3^x = 2 - k$$

이때 ①에 의하여

$$k + 2 \geq 2 - k$$

이고 주어진 방정식이 서로 다른 부호의 두 실근을 가져야 하므로

$$k + 2 > 1, \quad 0 < 2 - k < 1$$

$$\therefore 1 < k < 2$$

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 실근과 같다.

$y = 2^{x+2}$ 에 $x = -2$ 를 대입하면 $y = 2^0 = 1$
 $\therefore (-2, 1)$
 또 $y = 2^{x+2}$ 에 $x = 3$ 을 대입하면 $y = 2^5 = 32$
 $\therefore (3, 32)$

$2^{2b} = 4^b$ 이고 $b > 0$ 이므로
 $4^b < 5^b$

두 집합 A, B에 대하여
 ① $A \cap B = A$ 이면 $A \subset B$
 ② $A \cup B = A$ 이면 $B \subset A$

$a > 0$ 이므로
 $2 \leq 3 + a$
 는 항상 성립한다.

$x > 0$ 이면 $3^x > 1$
 $x < 0$ 이면 $0 < 3^x < 1$

따라서 $a = 1$, $\beta = 2$ 이므로

$$a + \beta = 3$$

$$12 \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = 2^{2x+1} + 1 = 2 \cdot 2^x + 1,$$

$$\{f(x)\}^2 = (2^x + 1)^2 = 2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1$$

$$(f \circ g)(x) \geq \{f(x)\}^2 \text{에서}$$

$$2 \cdot 2^{2x} + 1 \geq 2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x \geq 0 \quad \therefore 2^x(2^x - 2) \geq 0$$

이때 $2^x > 0$ 이므로

$$2^x - 2 \geq 0, \quad 2^x \geq 2$$

$$\therefore x \geq 1$$

답 $x \geq 1$

$$13 \quad \begin{cases} x^2 - (2^{3a} + 1)x + 8^a < 0 & \cdots \text{ ㉠} \\ x^2 - (2^{2b} + 5^b)x + 20^b < 0 & \cdots \text{ ㉡} \end{cases}$$

㉠에서

$$x^2 - (2^{3a} + 1)x + 2^{3a} < 0, \quad (x-1)(x-2^{3a}) < 0$$

$$\therefore 1 < x < 2^{3a} \quad (\because a > 0)$$

㉡에서

$$x^2 - (2^{2b} + 5^b)x + 2^{2b} \cdot 5^b < 0$$

$$(x-2^{2b})(x-5^b) < 0$$

$$\therefore 2^{2b} < x < 5^b \quad (\because b > 0)$$

이때 주어진 연립부등식의 해가 존재하지 않으므로

$$2^{3a} \leq 2^{2b}$$

$$\text{즉 } 3a \leq 2b \text{이므로 } \frac{b}{a} \geq \frac{3}{2}$$

따라서 $\frac{b}{a}$ 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다. $\cdots$ ④

참고 $1 < x < 2^{3a}$ 과 $2^{2b} < x < 5^b$ 의 공통 범위가 존재하지 않으려면 $2^{3a} \leq 2^{2b}$ 또는 $5^b \leq 10$ 이어야 한다.

그런데 $b > 0$ 에서 $5^b > 10$ 이므로 $2^{3a} \leq 2^{2b}$

$$14 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{에서 밑이 1보다 작으므로}$$

$$x+2 > x^2, \quad x^2 - x - 2 < 0$$

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore -1 < x < 2$$

$$\therefore A = \{x \mid -1 < x < 2\}$$

또 $3^{|x-3|} \leq 3^a$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$|x-3| \leq a, \quad -a \leq x-3 \leq a$$

$$\therefore 3-a \leq x \leq 3+a$$

$$\therefore B = \{x \mid 3-a \leq x \leq 3+a\}$$

$$A \cap B = A \text{에서 } A \subset B$$

$$\text{즉 } 3-a \leq -1 \text{이므로 } a \geq 4$$

따라서 a 의 최솟값은 4이다. $\cdots$ ④

15 $4^{2x} - (2a+10) \cdot 4^x + 20a \leq 0$ 에서 $4^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - (2a+10)t + 20a \leq 0$$

$$\therefore (t-2a)(t-10) \leq 0$$

$\cdots$ ①

(i) $0 < 2a < 10$, 즉 $0 < a < 5$ 일 때,

$$2a \leq t \leq 10$$

즉 $2a \leq 4^x \leq 10$ 이므로 정수 x 의 개수가 3이려면

$$\frac{1}{16} < 2a \leq \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{32} < a \leq \frac{1}{8}$$

(ii) $2a=10$, 즉 $a=5$ 일 때,

$$(t-10)^2 \leq 0 \quad \therefore t=10$$

즉 $4^x=10$ 이므로

$$x=\log_4 10$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $2a>10$, 즉 $a>5$ 일 때,

$$10 \leq t \leq 2a$$

즉 $10 \leq 4^x \leq 2a$ 이므로 정수 x 의 개수가 3이려면

$$256 \leq 2a < 1024$$

$$\therefore 128 \leq a < 512$$

이상에서

$$\frac{1}{32} < a \leq \frac{1}{8} \text{ 또는 } 128 \leq a < 512$$

$$\text{답} \quad \frac{1}{32} < a \leq \frac{1}{8} \text{ 또는 } 128 \leq a < 512$$

채점 기준	비율
① 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	20%
② $0 < 2a < 10$ 일 때 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
③ $2a=10$ 일 때 조건을 만족시키지 않음을 알 수 있다.	10%
④ $2a>10$ 일 때 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
⑤ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	10%

x 는 1, 0, -1이어야 하므로

$$4^{-2} < 2a \leq 4^{-1}$$

x 는 2, 3, 4이어야 하므로

$$4^4 \leq 2a < 4^5$$

1 등급 비밀노트 >>>

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2n}$ 의 그래프는 점 $(-2n, 1)$ 을 지나고 그래프의 점 근선의 방정식은 $y=0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와의 교점의 개수는

$x>0$ 일 때, 6

$$x<0 \text{ 일 때, } \begin{cases} n-1 & (n=1, 3, 5) \\ n & (n=2, 4) \end{cases}$$

또 함수 $y=2^{x-2n}-1$ 의 그래프는 두 점 $(2n, 0)$, $(2n+1, 1)$ 을 지나고 그래프의 점근선의 방정식은 $y=-1$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와의 교점의 개수는

$x<0$ 일 때, 6

$$x>0 \text{ 일 때, } \begin{cases} n & (n=1, 3, 5) \\ n+1 & (n=2, 4) \end{cases}$$

$$02 \quad \overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{AD} \text{이므로 } H(k, a^k), D(2k, a^{2k}) \quad (k>0)$$

이라 하면

$$A(-2k, a^{2k}), C(2k, a^{-2k}),$$

$$E(-k, a^k), G(k, a^{-k})$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$$\{2k-(-2k)\} \cdot \{a^{2k}-a^{-2k}\}=4k(a^{2k}-a^{-2k})$$

또 직사각형 EFGH의 넓이는

$$\{k-(-k)\} \cdot \{a^k-a^{-k}\}=2k(a^k-a^{-k})$$

이때 직사각형 EFGH의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{8}$ 이므로

$$2k(a^k-a^{-k})=4k(a^{2k}-a^{-2k}) \cdot \frac{1}{8}$$

$$4(a^k-a^{-k})=(a^k+a^{-k})(a^k-a^{-k})$$

$$\therefore a^k+a^{-k}=4$$

$$\therefore \overline{ID}+\overline{IC}=a^{2k}+a^{-2k}$$

$$=(a^k+a^{-k})^2-2a^k \cdot a^{-k}$$

$$=4^2-2=14$$

답 ⑤

03 직사각형의 가로 길이는 1, 세로 길이는

4^n-2^{n+1} 이므로

$$4^n-2^{n+1}=24, \quad 4^n-2^{n+1}-24=0$$

$$\therefore (2^n)^2-2 \cdot 2^n-24=0$$

$2^n=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t^2-2t-24=0, \quad (t+4)(t-6)=0$$

$$\therefore t=6 \quad (\because t>0)$$

즉 $2^n=6$ 이므로 $n=\log_2 6$

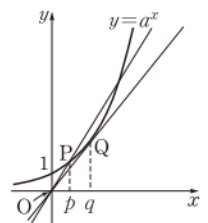
답 ②

04 $\frac{a^p}{p}$ 은 원점과 점 P를 지나는 직선의 기울기이고,

$\frac{a^q}{q}$ 은 원점과 점 Q를 지나는 직선의 기울기이다.

[반례] 오른쪽 그림과 같이 직선 OQ와 함수 $y=a^x$ 의 그래프가 접하면 직선 OP의 기울기가 직선 OQ의 기울기보다 크므로

$$\frac{a^p}{p} > \frac{a^q}{q}$$

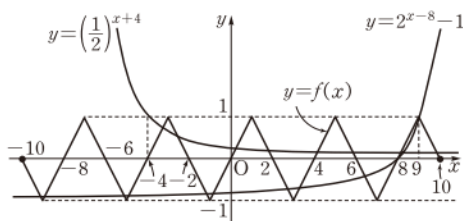


◎ 사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 24쪽

01 $\neg$, $\cup$. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 함수

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$, $y=2^{x-8}-1$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$\therefore s(2)=8, t(4)=11$$

단.

n	1	2	3	4	5
$s(n)$	6	8	8	10	10
$t(n)$	7	9	9	11	11

$$\therefore t(n)=s(n)+1$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\cup$ 이다.

답 ③

y 좌표가 1인 점을 기준으로 교점의 개수를 구하면 편리하다.

ㄴ. $A(0, 1)$ 이라 하면 직선 AQ의 기울기가 직선 AP의 기울기보다 크므로

$$\frac{a^p-1}{p} < \frac{a^q-1}{q}$$

$$\therefore q(a^p-1) < p(a^q-1)$$

ㄷ. $a > 2, q > p+1$ 이면

$$a^q > a^{p+1}$$

$$\therefore a^q - a^p > a^{p+1} - a^p$$

$$= a^p(a-1) > 1$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

$a > 2, p > 0$ 이므로
 $a^p > 1$
 $a > 20$ 이므로 $a-1 > 1$
 $\therefore a^p(a-1) > 1$

05 $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + k = 0$ 에서

$$(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + k = 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t + k = 0$$

..... ㉠

이때 주어진 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면

㉠은 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t) = t^2 - 6t + k$ 라 하면 함수

$y = f(t)$ 의 그래프는 직선 $t = 3$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y = f(t)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

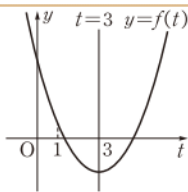
즉 $f(1) = k - 5 > 0$,

$f(3) = k - 9 < 0$ 이어야 하므로

$$5 < k < 9$$

따라서 정수 k 는 6, 7, 8의 3개이다.

답 3



$a > 0, a \neq 1$ 일 때

① $\log_a 1 = 0$

② $\log_a a = 1$

주어진 방정식의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면
 $\alpha > 0, \beta > 0$

이고, ㉠의 두 실근이 $3^a, 3^b$ 이므로
 $3^a > 1, 3^b > 1$

$$f(t) = t^2 - 6t + k$$

$$= (t-3)^2 + k-9$$

$$\log_{0.2} 5 = \log_{\frac{1}{5}} 5$$

$$= -\log_5 5$$

$$= -1$$

I -4. 로그함수

개념 & 핵심 기술

본책 26~27쪽

01 주어진 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$$y = 3^{2-x} \text{에서} \quad \log_3 y = 2-x$$

$$\therefore x = 2 - \log_3 y = \log_3 \frac{9}{y}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면} \quad y = \log_3 \frac{9}{x}$$

이 식이 $y = \log_3 \frac{k}{x}$ 와 일치하므로

$$k = 9$$

답 9

02 $y = \log_k(2x-5) + 2$ 에서 $2x-5=1$, 즉 $x=3$ 일 때

$$y = \log_k 1 + 2 = 2$$

따라서 $y = \log_k(2x-5) + 2$ 의 그래프는 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore a + b = 5$$

답 ③

03 $y = \log_2 \sqrt{2}(x-1) = \log_2(x-1) + \log_2 \sqrt{2}$

$$= \log_2(x-1) + \log_2 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_2(x-1) + \frac{1}{2}$$

따라서 함수 $y = \log_2 \sqrt{2}(x-1)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로

$$m = 1, n = \frac{1}{2}$$

$$\therefore mn = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

04 $y = \log_{0.2}(x^2 - 4x + 5)$

$$= \log_{0.2} \{(x-2)^2 + 1\}$$

$f(x) = (x-2)^2 + 1$ 이라 하면 $0 \leq x \leq 4$ 에서

$$f(0) = f(4) = 5, f(2) = 1$$

이므로

$$1 \leq f(x) \leq 5$$

이때 $y = \log_{0.2} f(x)$ 에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$ 가 최소일 때 y 는 최대이고, $f(x)$ 가 최대일 때 y 는 최소이다.

따라서 $M = \log_{0.2} 1 = 0, m = \log_{0.2} 5 = -1$ 이므로

$$M - m = 1$$

답 ①

05 $y = \log_2 x + \log_2(8-x) = \log_2(-x^2 + 8x)$

$$= \log_2 \{-(x-4)^2 + 16\}$$

$f(x) = -(x-4)^2 + 16$ 이라 하면 $1 \leq x \leq 5$ 에서

$$f(1) = 7, f(4) = 16, f(5) = 15$$

이므로

$$7 \leq f(x) \leq 16$$

이때 $y = \log_2 f(x)$ 에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최소일 때 y 도 최소이다.

즉 주어진 함수는 $x=1$ 에서 최솟값 $\log_2 7$ 을 가지므로

$$a=1, b=\log_2 7$$

$$\therefore ab = \log_2 7$$

답 ②

$$\begin{aligned} 06 \quad y &= (\log_3 x)^2 + a \log_3 x^2 + b \\ &= (\log_3 x)^2 + 2a \log_3 x + b \end{aligned}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 + 2at + b$$

$$= (t+a)^2 + b - a^2$$

따라서 주어진 함수는 $t = -a$, 즉 $x = 3^{-a}$ 에서 최솟값 $b - a^2$ 을 갖는다.

$$\text{즉 } 3^{-a} = \frac{1}{9}, b - a^2 = 2 \text{이므로}$$

$$a=2, b=6$$

$$\therefore a+b=8$$

답 8

07 진수의 조건에서

$$x+2 > 0, x+8 > 0$$

$$\therefore x > -2$$

..... ㉠

$$\log_2(x+2) - \log_4(x+8) = \frac{3}{2} \text{에서}$$

$$\log_2(x+2) - \frac{1}{2} \log_2(x+8) = \frac{3}{2}$$

$$2 \log_2(x+2) = \log_2(x+8) + 3$$

$$\therefore \log_2(x+2)^2 = \log_2 8(x+8)$$

즉 $(x+2)^2 = 8(x+8)$ 이므로

$$x^2 - 4x - 60 = 0, (x+6)(x-10) = 0$$

$$\therefore x = -6 \text{ 또는 } x = 10$$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x = 10$

답 $x = 10$

08 $(\log_5 x)^2 = 4 \log_5 25x$ 에서

$$(\log_5 x)^2 = 4(\log_5 25 + \log_5 x)$$

$$(\log_5 x)^2 = 4(2 + \log_5 x)$$

$$\therefore (\log_5 x)^2 - 4 \log_5 x - 8 = 0$$

..... ㉡

$\log_5 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t - 8 = 0$$

..... ㉢

이때 ㉡의 두 근을 α, β 라 하면 ㉢의 두 근은 $\log_5 \alpha, \log_5 \beta$

이므로 ㉢에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_5 \alpha + \log_5 \beta = 4, \log_5 \alpha \beta = 4$$

$$\therefore \alpha \beta = 5^4 = 625$$

답 625

09 $x^{\log_3 x} = x^3$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 x^3, (\log_3 x)^2 = 3 \log_3 x$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - 3 \log_3 x = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t = 0, t(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 3$$

즉 $\log_3 x = 0$ 또는 $\log_3 x = 3$ 이므로

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 27$$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$1 + 27 = 28$$

답 ①

10 진수의 조건에서 $x-10 > 0, x > 0$

$$\therefore x > 10$$

..... ㉣

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-10) > 1 - \log_2 x \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-10) > 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(x-10) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{2}$$

밑이 1보다 작으므로

$$x-10 < \frac{x}{2}, \frac{x}{2} < 10$$

$$\therefore x < 20$$

..... ㉤

㉣, ㉤의 공통 범위를 구하면

$$10 < x < 20$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는

$$20 - 10 - 1 = 9$$

답 ④

1등급 비밀노트 >>>

정수 a, b ($a < b$)에 대하여 각 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 다음과 같다.

$$\textcircled{1} a \leq x \leq b \Rightarrow b-a+1$$

$$\textcircled{2} a \leq x < b \Rightarrow b-a$$

$$\textcircled{3} a < x \leq b \Rightarrow b-a$$

$$\textcircled{4} a < x < b \Rightarrow b-a-1$$

11 $(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 < \log_{\frac{1}{3}} x^3 + 4$ 에서

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 < 3 \log_{\frac{1}{3}} x + 4$$

$$\therefore (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 3 \log_{\frac{1}{3}} x - 4 < 0$$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t - 4 < 0, (t+1)(t-4) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 4$$

즉 $-1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 4$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

밑이 1보다 작으므로 $\frac{1}{81} < x < 3$

따라서 $\alpha = \frac{1}{81}, \beta = 3$ 이므로

$$\alpha \beta = \frac{1}{27}$$

답 ①

12 $x^{\log x} < \frac{x^3}{100}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{\log x} < \log \frac{x^3}{100}, (\log x)^2 < 3 \log x - 2$$

$$\therefore (\log x)^2 - 3 \log x + 2 < 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t + 2 < 0, (t-1)(t-2) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 2$$

즉 $1 < \log x < 2$ 이므로

$$\log 10 < \log x < \log 10^2$$

밑이 1보다 크므로

$$10 < x < 100$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는

$$100 - 10 - 1 = 89$$

답 89

1등급을 위한 고난도 문제

본책 28~29쪽

01 두 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ 과 $g(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x$ 는 서로 역함수 관계이므로

$$f(a) = d \iff g(d) = a,$$

$$f(b) = e \iff g(e) = b,$$

$$g(b) = d \iff f(d) = b,$$

$$g(c) = e \iff f(e) = c$$

$$\therefore (g \circ g \circ f)(d) = g(d) = a,$$

$$(g \circ g \circ g)(c) = g(g(g(c)))$$

$$= g(g(e))$$

$$= g(b) = d$$

$$\therefore (g \circ g \circ f)(d) + (g \circ g \circ g)(c) = a + d$$

답 ②

1등급 비밀노트 >>>

역함수의 그래프가 주어지고 합성함수의 함수값을 구하는 문제는 $f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a$ 임을 이용한다.

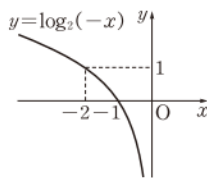
$$\begin{aligned} (g \circ g \circ f)(d) &= (g \circ I)(d) \\ &= g(d) \end{aligned}$$

(단, I 는 항등함수)

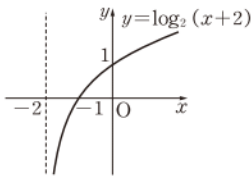
$2 \leq x \leq 10$ 에서 x 의 값이 증가하면 $3\sqrt{x+a}$ 의 값도 증가한다.

점근선이 y 축이다.

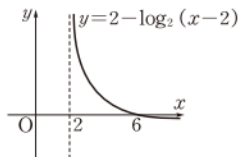
02 ㄱ. $y = \log_2(-x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 y 축, 즉 직선 $x=0$ 과 만나지 않는다.



ㄴ. $y = \log_2(x+2)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 원점을 지나는 임의의 직선과 항상 만난다.



ㄷ. $y = 2 - \log_2(x-2)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $x=0$ 과 만나지 않는다.



이상에서 구하는 함수는 ㄴ뿐이다.

답 ②

03 점 A의 좌표를 (k, k) ($k > 0$)라 하면 사각형 COBA의 넓이가 16이므로

$$k^2 = 16 \quad \therefore k = 4 \quad (\because k > 0)$$

점 A(4, 4)가 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\log_a 5 = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore f(24) &= \log_a 25 = 2 \log_a 5 \\ &= 2 \cdot 4 = 8 \end{aligned}$$

답 8

04 (i) $\log_3 x \geq 0$, 즉 $x \geq 1$ 일 때,

$$\log_3 y = 2 \log_3 x, \quad \log_3 y = \log_3 x^2$$

$$\therefore y = x^2$$

(ii) $\log_3 x < 0$, 즉 $0 < x < 1$ 일 때,

$$\log_3 y = -\log_3 x, \quad \log_3 y = \log_3 \frac{1}{x}$$

$$\therefore y = \frac{1}{x}$$

$$(i), (ii)에서 \quad y = \begin{cases} x^2 & (x \geq 1) \\ \frac{1}{x} & (0 < x < 1) \end{cases}$$

따라서 그래프의 개형으로 가장 알맞은 것은 ④이다.

답 ④

1등급 비밀노트 >>>

$\log_3 x$ 와 $\log_3 y$ 사이의 관계식은 다음과 같이 치환을 이용하면 쉽게 찾을 수 있다.

$\log_3 x = X, \log_3 y = Y$ 로 놓으면

$$Y = \begin{cases} 2X & (X \geq 0) \\ -X & (X < 0) \end{cases}$$

05 $y = \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{x+a}$ 에서 밑이 1보다 작으므로 y 는 $3\sqrt{x+a}$ 가 최대일 때 최솟값을 갖고, $3\sqrt{x+a}$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉 $2 \leq x \leq 10$ 에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{x+a}$ 는 $x=10$ 일 때 최솟값 -2 를 가지므로

$$\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{10+a} = -2$$

$$3\sqrt{10+a} = 9, \quad \sqrt{10+a} = 3$$

$$10+a = 9 \quad \therefore a = -1$$

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{x-1}$ 은 $x=2$ 일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{2-1} = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$$

답 -1

06 $y = ax^{2-\log_3 x}$ 의 양변에 3을 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_3 y = \log_3 a + (2 - \log_3 x) \log_3 x$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$\log_3 y = -t^2 + 2t + \log_3 a$$

$$= -(t-1)^2 + 1 + \log_3 a$$

→ ①

이때 $1 \leq x \leq 27$ 에서 $0 \leq t \leq 3$ 이므로

$$-3 + \log_3 a \leq \log_3 y \leq 1 + \log_3 a$$

→ ②

즉 $1 + \log_3 a = \log_3 81 = 4$ 이므로

$$\log_3 a = 3 \quad \therefore a = 27$$

또 $\log_3 m = -3 + \log_3 27 = 0$ 이므로

$$m = 1$$

→ ③

$$\therefore am = 27$$

→ ④

답 27

채점 기준	비율
① $\log_3 y$ 를 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② $\log_3 y$ 의 값의 범위를 $\log_3 a$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
③ a, m 의 값을 구할 수 있다.	40%
④ am 의 값을 구할 수 있다.	10%

$$07 \log_2(2^x + 2^{-x-1}) = \log_2 \frac{2^x + 2 \cdot 2^{-x}}{4}$$

$$= \log_2(2^x + 2 \cdot 2^{-x}) - 2$$

이므로 주어진 함수의 식에서 $\log_2(2^x + 2 \cdot 2^{-x}) = t$ 로 놓으면

$$y = (t-2)^2 + 2t + 6$$

$$= t^2 - 2t + 10$$

$$= (t-1)^2 + 9 \quad \dots\dots ①$$

한편 $2^x > 0, 2 \cdot 2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^x + 2 \cdot 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2 \cdot 2^{-x}}$$

$$= 2\sqrt{2} \quad (\text{단, 등호는 } x = \frac{1}{2} \text{일 때 성립})$$

$$\therefore t = \log_2(2^x + 2 \cdot 2^{-x})$$

$$\geq \log_2 2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

즉 $t \geq \frac{3}{2}$ 이므로 ①에서 y 는 $t = \frac{3}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{37}{4}$ 을 갖는다. 답 ②

08 $(\log x - 1) \log x = k$ 에서 $\log x = t$ 로 놓으면

$$(t-1)t = k$$

$$\therefore t^2 - t - k = 0 \quad \dots\dots ① \rightarrow ①$$

①의 두 근이 $\log \alpha, \log \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = 1, \quad \log \alpha \beta = 1$$

$$\therefore \alpha \beta = 10 \quad \dots\dots ②$$

$\alpha > 0, \beta > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} = 2\sqrt{10}$$

이때 등호는 $\alpha = \beta$ 일 때 성립하므로

$$\alpha = \beta = \sqrt{10} \quad \dots\dots ③$$

따라서 $\log \alpha \cdot \log \beta = -k$ 에서

$$k = -\log \sqrt{10} \cdot \log \sqrt{10}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \quad \dots\dots ④$$

$$\text{답 } -\frac{1}{4}$$

채점 기준	비율
① 주어진 방정식을 t 에 대한 방정식으로 나타낼 수 있다.	20%
② $\alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ $\alpha + \beta$ 의 값이 최소일 때, α, β 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ k 의 값을 구할 수 있다.	30%

◀참고 $\log \alpha, \log \beta$ 의 진수의 조건에서 α, β 는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{2^x + 2 \cdot 2^{-x}}{4} \\ &= \log_2(2^x + 2 \cdot 2^{-x}) \\ &\quad - \log_2 4 \\ &= \log_2(2^x + 2 \cdot 2^{-x}) - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^x &= 2 \cdot 2^{-x} \text{에서} \\ 2^{2x} &= 2 \\ \text{즉 } 2x &= 1 \text{이므로} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

진수의 조건에서
 $a-3 > 0, 8-a > 0$
 $\therefore 3 < a < 8$
 따라서 $a=7$ 은 진수의 조건을 만족시킨다.

09 밑과 진수의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$

$\left(\frac{x^2}{3}\right)^{\log_3 x} = (9x^5)^{\log_3 3}$ 의 양변에 3을 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_3 \left(\frac{x^2}{3}\right)^{\log_3 x} = \log_3 (9x^5)^{\log_3 3}$$

$$\therefore \log_3 x \cdot (2 \log_3 x - 1) = \frac{1}{\log_3 x} \cdot (2 + 5 \log_3 x)$$

양변에 $\log_3 x$ 를 곱하면

$$2(\log_3 x)^3 - (\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x - 2 = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$2t^3 - t^2 - 5t - 2 = 0$$

$$(t+1)(2t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2$$

즉 $\log_3 x = -1$ 또는 $\log_3 x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\log_3 x = 2$ 이므로

$$x = 3^{-1} \text{ 또는 } x = 3^{-\frac{1}{2}} \text{ 또는 } x = 3^2$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$3^{-1} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^2 = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

답 ③

10 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선

$y=a$ 가 서로 다른 두 점에서

만나기 위해서는 $4 < a < 8$ 이어

야 한다.

$y=4^{x-2}+3$ 의 그래프와 직선

$y=a$ 의 교점의 x 좌표는 $a=4^{x-2}+3$ 에서

$$4^{x-2} = a-3, \quad x-2 = \log_4(a-3)$$

$$\therefore x = \log_4(a-3) + 2$$

$y=-2^x+8$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표는

$a=-2^x+8$ 에서

$$2^x = 8-a \quad \therefore x = \log_2(8-a)$$

따라서 $\overline{AB} = \log_4(a-3) + 2 - \log_2(8-a) = 3$ 이므로

$$\log_4(a-3) = \log_2(8-a) + 1$$

$$\frac{1}{2} \log_2(a-3) = \log_2 2(8-a)$$

$$\log_2(a-3) = \log_2 \{2(8-a)\}^2$$

$$a-3 = 4(8-a)^2, \quad 4a^2 - 65a + 259 = 0$$

$$(a-7)(4a-37) = 0$$

$$\therefore a=7 \quad (\because 4 < a < 8)$$

답 7

11 $\log d_1 = 0.855 - k(8 + \log 10)^3$ 이므로

$$\log d_1 = 0.855 - k \cdot 9^3 \quad \dots\dots ①$$

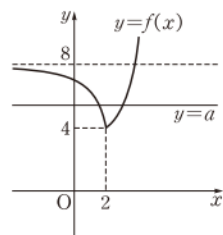
$\log d_2 = 0.855 - k(8 + \log 100)^3$ 이므로

$$\log d_2 = 0.855 - k \cdot 10^3 \quad \dots\dots ②$$

①-②을 하면

$$\log \frac{d_1}{d_2} = k(10^3 - 9^3) = 271k$$

$$\therefore \frac{d_1}{d_2} = 10^{271k} \quad \text{답 ⑤}$$



12 진수의 조건에서 $2-x>0$ 이므로

$$x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) 밑의 조건에서 $0 < x^2 + x + 1 < 1$ 일 때,

$$x^2 + x + 1 > 0 \text{에서 } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로 항상 성립한다.}$$

$$x^2 + x + 1 < 1 \text{에서 } x(x+1) < 0 \quad \therefore -1 < x < 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\log_{x^2+x+1}(2-x) < 0 \text{에서 } 2-x > 1 \quad \therefore x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

따라서 ①, ②, ③의 공통 범위를 구하면 $-1 < x < 0$

(ii) 밑의 조건에서 $x^2 + x + 1 > 1$ 일 때,

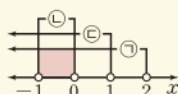
$$x(x+1) > 0 \text{이므로 } x < -1 \text{ 또는 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\log_{x^2+x+1}(2-x) < 0 \text{에서 } 2-x < 1 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

따라서 ①, ④, ⑤의 공통 범위를 구하면 $1 < x < 2$

(i), (ii)에서

$$-1 < x < 0 \text{ 또는 } 1 < x < 2 \quad \text{답 } -1 < x < 0 \text{ 또는 } 1 < x < 2$$



13 집합 A에서 $2\log 2x < \log x$ 이므로

$$\log(2x)^2 < \log x$$

밑이 1보다 크므로 $4x^2 < x, \quad 4x^2 - x < 0$

$$x(4x-1) < 0 \quad \therefore 0 < x < \frac{1}{4}$$

$$\therefore A = \left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{4}\right\} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

집합 B에서

$$\log x^2 < \log 2x$$

밑이 1보다 크므로 $x^2 < 2x, \quad x^2 - 2x < 0$

$$x(x-2) < 0 \quad \therefore 0 < x < 2$$

$$\therefore B = \{x \mid 0 < x < 2\} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore A^c \cap B = \left\{x \mid \frac{1}{4} \leq x < 2\right\} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } \left\{x \mid \frac{1}{4} \leq x < 2\right\}$$

채점 기준	비율
① A를 구할 수 있다.	40%
② B를 구할 수 있다.	30%
③ $A^c \cap B$ 를 구할 수 있다.	30%

14 $\log ax \cdot \log a^3 x + 4 > 0$ 에서

$$(\log a + \log x)(3\log a + \log x) + 4 > 0$$

$$\therefore (\log x)^2 + 4\log a \cdot \log x + 3(\log a)^2 + 4 > 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + (4\log a)t + 3(\log a)^2 + 4 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a > 1$ 일 때,
 $m < n$
 $\iff \log_a m < \log_a n$
 $0 < a < 1$ 일 때,
 $m < n$
 $\iff \log_a m > \log_a n$

전체집합이 $\{x \mid x > 0\}$ 이므로

$$A^c = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{4}\right\}$$

$$\therefore A^c \cap B$$

$$= \left\{x \mid \frac{1}{4} \leq x < 2\right\}$$

$\frac{f(a)}{a-1}$ 의 값은 두 점

$(a, f(a)), (1, 0)$ 을 지나는 직선(i)의 기울기이고,

$\frac{f(b)}{b-1}$ 의 값은 두 점

$(b, f(b)), (1, 0)$ 을 지나는 직선(ii)의 기울기이다.

$\frac{f(a)}{a}$ 의 값은 두 점

$(a, f(a)), (0, 0)$ 을 지나는 직선(iii)의 기울기이고,

$\frac{f(b)}{b}$ 의 값은 두 점

$(b, f(b)), (0, 0)$ 을 지나는 직선(iv)의 기울기이다.

모든 실수 t 에 대하여 앞의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 + (4\log a)t + 3(\log a)^2 + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\log a)^2 - 3(\log a)^2 - 4 < 0$$

$$(\log a)^2 - 4 < 0, \quad (\log a + 2)(\log a - 2) < 0$$

$$\therefore -2 < \log a < 2$$

$$\therefore \frac{1}{100} < a < 100 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 99, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$$99 + 1 = 100 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 100

채점 기준	비율
① 주어진 부등식을 t 에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30%
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%
③ 답을 구할 수 있다.	10%

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 30쪽

01 $1 < x < a$ 의 각 변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a 1 < \log_a x < \log_a a \quad \therefore 0 < \log_a x < 1$$

$\log_a x = t$ 로 놓으면 $0 < t < 1$ 이고

$$A = \log_a x = t,$$

$$B = \log_a (\log_a x) = \log_a t,$$

$$C = (\log_a x)^2 = t^2$$

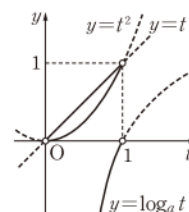
이때 $0 < t < 1$ 에서 세 함수 $y = t, y = \log_a t, y = t^2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\log_a t < t^2 < t$$

즉

$$\log_a (\log_a x) < (\log_a x)^2 < \log_a x$$

$$\text{이므로 } B < C < A$$

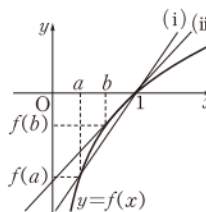


답 ④

02 ㄱ. 오른쪽 그림에서 직선

(i)의 기울기가 직선 (ii)의 기울기보다 크므로

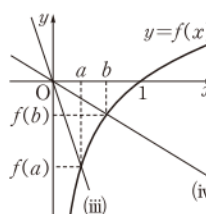
$$\frac{f(a)}{a-1} > \frac{f(b)}{b-1}$$



ㄴ. 오른쪽 그림에서 직선 (iii)의 기울기가 직선 (iv)의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b}$$

$$\therefore bf(a) < af(b)$$



$$\begin{aligned} & \text{㉔. } \frac{f(a)-f(b)}{f(a)} - \frac{f(b)-f(a)}{f(b)} \\ &= 1 - \frac{f(b)}{f(a)} - 1 + \frac{f(a)}{f(b)} \\ &= \frac{\{f(a)\}^2 - \{f(b)\}^2}{f(a)f(b)} \\ &= \frac{\{f(a)+f(b)\}\{f(a)-f(b)\}}{f(a)f(b)} \end{aligned}$$

이때 $f(a) < f(b) < 0$ 이므로

$$\frac{\{f(a)+f(b)\}\{f(a)-f(b)\}}{f(a)f(b)} > 0$$

$$\therefore \frac{f(a)-f(b)}{f(a)} > \frac{f(b)-f(a)}{f(b)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

1등급 비밀노트 >>>

함수 $f(x)$ 에 대하여 $\frac{f(a)-q}{a-p}$ 의 값은 점 (p, q) 와 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같다.

03 $\log_a y = (\log_a x)^2 - 3\log_a x + 3$ 에서
 $y = a^{(\log_a x)^2 - 3\log_a x + 3}$

$\log_a x = t$ 로 놓으면 $y = a^{t^2 - 3t + 3}$

이때 $t^2 - 3t + 3 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ 이므로 y 의 최댓값이 존재하려면 $0 < a < 1$ 이어야 한다.

따라서 $t = \frac{3}{2}$ 일 때 y 는 최댓값 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 를 가지므로

$$a^{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore a = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{4}{3}} = (2^{-\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

답 ①

04 진수의 조건에서 $x-2 > 0$, $-2x+a > 0$ 이므로

$$x > 2, x < \frac{a}{2}$$

이때 실근이 존재하려면 $\frac{a}{2} > 2$ 이어야 하므로

$$a > 4 \quad \dots\dots ㉑$$

따라서 x 의 값의 범위는 $2 < x < \frac{a}{2}$

$$\log_2(x-2) = \log_4(-2x+a) \text{에서}$$

$$\log_2(x-2) = \frac{1}{2} \log_2(-2x+a)$$

$$\therefore \log_2(x-2)^2 = \log_2(-2x+a)$$

$$\text{즉 } (x-2)^2 = -2x+a \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x + 4 - a = 0$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 - a \text{라 하면}$$

$$f(x) = (x-1)^2 + 3 - a$$

이므로 $2 < x < \frac{a}{2}$ 에서 실근을 가지려면

$$f(2) < 0, f\left(\frac{a}{2}\right) > 0$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned} & f(a)+f(b) < 0, \\ & f(a)-f(b) < 0, \\ & f(a)f(b) > 0 \end{aligned}$$

$$f(2) < 0 \text{에서}$$

$$4-a < 0 \quad \therefore a > 4 \quad \dots\dots ㉒$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) > 0 \text{에서}$$

$$\frac{a^2}{4} - a + 4 - a > 0$$

$$a^2 - 8a + 16 > 0, \quad (a-4)^2 > 0$$

$$\therefore a \neq 4 \quad \dots\dots ㉓$$

$$\text{㉑, ㉒, ㉓에서 } a > 4$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 5이다.

답 5

05 현재 용액에 녹아 있는 두 기체 A, B의 양을 각각 $5a$, a 라 하면 n 시간 후의 두 기체 A, B의 양은 각각

$$5a(1-0.1)^n = 5a \times 0.9^n, \quad a(1+0.2)^n = a \times 1.2^n$$

이므로 기체 B의 양이 기체 A의 양보다 많아지려면

$$5a \times 0.9^n < a \times 1.2^n$$

$$\therefore 5 \times 0.9^n < 1.2^n$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log(5 \times 0.9^n) < \log 1.2^n$$

$$\log 5 + n(2 \log 3 - 1) < n(2 \log 2 + \log 3 - 1)$$

$$n(2 \log 2 - \log 3) > 1 - \log 2$$

$$\therefore n > \frac{1 - \log 2}{2 \log 2 - \log 3} = \frac{1 - 0.30}{2 \times 0.30 - 0.48} = \frac{35}{6}$$

따라서 5시간에서 6시간 사이에 기체 B의 양이 기체 A의 양보다 많아지기 시작하므로

$$m = 5$$

답 ②

06 $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leq 3$ 에서 m, n 이 자연수이므로

$$\log_2 m^3 \geq 0, \quad \log_3 n^2 \geq 0$$

따라서 $0 \leq \log_2 m^3 \leq 3$ 이므로

$$1 \leq m^3 \leq 8$$

$$\therefore m = 1 \text{ 또는 } m = 2$$

(i) $m = 1$ 일 때,

$$\log_2 1 + \log_3 n^2 \leq 3 \quad \therefore \log_3 n^2 \leq 3$$

즉 $n^2 \leq 27$ 이므로 자연수 n 은

1, 2, 3, 4, 5의 5개

(ii) $m = 2$ 일 때,

$$\log_2 2^3 + \log_3 n^2 \leq 3 \quad \therefore \log_3 n^2 \leq 0$$

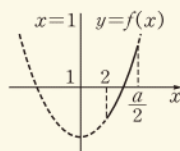
즉 $n^2 \leq 1$ 이므로 자연수 n 은

1의 1개

(i), (ii)에서 자연수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$5 + 1 = 6$$

답 6



만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 31~34쪽

01 전략 서로소인 두 자연수 m, n ($m > 2$)에 대하여 $2^{\frac{n}{m}}$ 은 2^n 의 m 제곱근임을 이용한다.

풀이 $f(5) = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 5 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$(f \circ f)(5) = f(f(5)) = f(5 \cdot 2^{\frac{1}{2}})$$

$$= (10 \cdot 5 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 2^{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore (f \circ f \circ f)(5) = f(f(f(5))) = f(5 \cdot 2^{\frac{3}{4}})$$

$$= (10 \cdot 5 \cdot 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 2^{\frac{7}{8}}$$

따라서 $\frac{1}{5}(f \circ f \circ f)(5) = 2^{\frac{7}{8}}$ 이므로 $2^{\frac{7}{8}}$ 은 2^7 의 8제곱근이다.

즉 $p=7, q=8$ 이므로

$$q-p=1$$

답 ③

02 전략 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 $m \xrightarrow{A} \sqrt{m} = m^{\frac{1}{2}}, m \xrightarrow{B} \sqrt[4]{m^3} = m^{\frac{3}{4}},$

$m \xrightarrow{C} \sqrt[7]{m^4 \sqrt[3]{m^5}} = m^{\frac{7}{8}}$ 이므로

$$a \xrightarrow{A} a^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{B} (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{8}}$$

$$\xrightarrow{C} (a^{\frac{3}{8}})^{\frac{7}{8}} = a^{\frac{21}{64}} = \sqrt[64]{a^{21}}$$

따라서 (가)에 알맞은 것은 $\sqrt[64]{a^{21}}$ 이다.

답 ④

03 전략 지수법칙을 이용하여 $f(a)$ 를 간단히 한다.

풀이 $f(a) = (a^x + a^y)^2 - (a^x - a^y)^2$

$$= (a^{2x} + 2a^x a^y + a^{2y}) - (a^{2x} - 2a^x a^y + a^{2y})$$

$$= 4a^x a^y = 4a^{x+y}$$

$$= 4a^2 \quad (\because x+y=2)$$

$$\therefore f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{5}) + f(\sqrt{7})$$

$$= 4 \cdot (\sqrt{3})^2 + 4 \cdot (\sqrt{5})^2 + 4 \cdot (\sqrt{7})^2$$

$$= 60$$

답 ⑤

04 전략 로그의 성질을 이용하여 연산의 참, 거짓을 판단한다.

풀이 $\neg, x \circ y = x^{\log_2 y} = y^{\log_2 x} = y \circ x$

$$\neg, x \circ \frac{1}{y} = x^{\log_2 \frac{1}{y}} = x^{-\log_2 y} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\log_2 y} = \frac{1}{x} \circ y$$

$$\neg, x \circ yz = x^{\log_2 yz} = x^{\log_2 y + \log_2 z} = x^{\log_2 y} \cdot x^{\log_2 z}$$

$$= (x \circ y)(x \circ z)$$

이상에서 $\neg, \neg, \neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이 $\neg, x \circ yz = x^{\log_2 yz} = (yz)^{\log_2 x}$

$$= y^{\log_2 x} \cdot z^{\log_2 x} = x^{\log_2 y} \cdot x^{\log_2 z}$$

$$= (x \circ y)(x \circ z)$$

05 전략 주어진 조건을 이용하여 k 의 값을 먼저 구한다.

풀이 $T_0=95, T_s=5, T=35, t=3$ 을 $\log \frac{T-T_s}{T_0-T_s} = kt$

에 대입하면

$(2^{\frac{7}{8}})^q = 2^p$ 에서

$$\frac{7}{8}q = p$$

이때 p, q 는 서로소인 자연수이므로

$$p=7, q=8$$

$$(m \cdot m^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2}} = m^{\frac{7}{8}}$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2}$$

$$= \log 10 - \log 2$$

$$= 1 - \log 2$$

$$= 0.70$$

$$5^1 \neq -5 \text{이므로} \\ (1, -5) \notin A$$

$$\log \frac{35-5}{95-5} = 3k, \quad \log \frac{1}{3} = 3k$$

$$\therefore k = \frac{1}{3} \log \frac{1}{3}$$

앞으로 t 분 후에 달걀의 온도가 15°C 가 된다고 할 때,

$$T_0=35, T_s=5, T=15, k=\frac{1}{3} \log \frac{1}{3} \text{을 주어진 관계식}$$

에 대입하면

$$\log \frac{15-5}{35-5} = \frac{t}{3} \log \frac{1}{3}, \quad \log \frac{1}{3} = \frac{t}{3} \log \frac{1}{3}$$

$$1 = \frac{t}{3} \quad \therefore t=3$$

따라서 앞으로 3분이 더 걸린다.

답 ②

06 전략 주어진 조건을 식으로 나타낸 후 로그의 성질을 이용한다.

풀이 처음 그래프의 크기를 G 라 하자.

버튼 A를 한 번 누를 때 처음 그래프의 크기의 a 배만큼 확대된다고 하면

$$a^3 G = 3G \quad \therefore a^3 = 3$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log a^3 = \log 3, \quad 3 \log a = 0.48$$

$$\therefore \log a = 0.16$$

또 버튼 B를 한 번 누를 때 처음 그래프의 크기의 b 배만큼 확대된다고 하면

$$b^5 G = 5G \quad \therefore b^5 = 5$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log b^5 = \log 5, \quad 5 \log b = 0.70$$

$$\therefore \log b = 0.14$$

버튼 A를 2번 누르고 버튼 B를 3번 누르면 그래프의 크기는 처음 그래프의 크기의 $a^2 b^3$ 배가 되므로 $a^2 b^3 = k$ 라 하면

$$\log k = \log a^2 b^3 = 2 \log a + 3 \log b$$

$$= 2 \times 0.16 + 3 \times 0.14$$

$$= 0.74$$

이때 $\log 5.5 = 0.74$ 이므로

$$k = 5.5$$

따라서 그래프의 크기는 처음의 5.5배가 된다.

답 ④

07 전략 지수법칙을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판단한다.

풀이 $\neg, (a, b) \in A$ 에서 $5^a = b$ 이므로

$$5^{\frac{a}{2}} = (5^a)^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$$

$$\therefore \left(\frac{a}{2}, \sqrt{b}\right) \in A$$

$\neg, (-a, b) \in A$ 에서 $5^{-a} = b$ 이므로

$$5^a = (5^{-a})^{-1} = b^{-1} = \frac{1}{b}$$

$$\therefore \left(a, \frac{1}{b}\right) \in A$$

$\neg, [\text{반례}] a=1, b=-5$ 이면 $(-5)^2=25$ 에서

$$(2, 25) \in A \text{이지만 } (1, -5) \notin A \text{이다.}$$

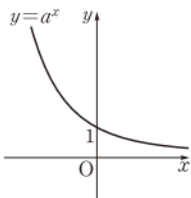
이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ②

08 전략 주어진 함수의 그래프를 이용하여 a 의 값의 범위를 구한 후 $-a^2+a+\frac{1}{2}$ 의 값의 범위를 구한다.

풀이 $y = -\left(\frac{1}{a}\right)^x = -a^{-x}$ 의 그래프

프는 $y=a^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=a^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 $\therefore 0 < a < 1$



$f(a) = -a^2 + a + \frac{1}{2}$ 이라 하면

$$f(a) = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

이므로 $0 < a < 1$ 에서

$$\frac{1}{2} < f(a) \leq \frac{3}{4}$$

따라서 $y = \{f(a)\}^{-x+1} = \{f(a)\}^{-(x-1)}$ 의 그래프는 $y = \{f(a)\}^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ①이다.

답 ①

09 전략 $2^x + 2^{-x} = X$ 로 치환하여 X 에 대한 방정식으로 나타낸다.

풀이 $2^x + 2^{-x} = X$ 로 놓으면 $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ 이므로 산술 평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} X &= 2^x + 2^{-x} \\ &\geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } x=0 \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

이때 $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = X^2 - 2$ 이므로 주어진 방정식은

$$\begin{aligned} 2(X^2 - 2) - 3X - 1 &= 0, & 2X^2 - 3X - 5 &= 0 \\ (X+1)(2X-5) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore X = \frac{5}{2} \quad (\because X \geq 2)$$

$$\text{즉 } 2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2} \text{이므로} \quad 2^{2x} + 1 = \frac{5}{2} \cdot 2^x$$

$$\therefore 2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$2t^2 - 5t + 2 = 0, \quad (2t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2$$

$$\text{즉 } 2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \text{ 또는 } 2^x = 2 \text{이므로}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$$-1 + 1 = 0$$

답 ③

10 전략 번식을 시작한 지 n 시간 후 두 종류의 세균 A, B의 수를 각각 n 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 번식을 시작한 지 n 시간 후 두 종류의 세균 A, B의 수는 각각 $2 \cdot 2^n$, 4^n 이므로

$$4^n - 2 \cdot 2^n = 960$$

$$\therefore 2^{2n} - 2 \cdot 2^n - 960 = 0$$

$$-\frac{1}{2} < a - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$0 \leq \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} < -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} < -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}$$

$\frac{1}{2} < f(a) \leq \frac{3}{4}$ 이므로 함수 $y = \{f(a)\}^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

$2^x = 2^{-x}$ 에서
 $2^{2x} = 1$
 따라서 $2x = 0$ 이므로
 $x = 0$

$2^n = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 2t - 960 = 0, \quad (t+30)(t-32) = 0$$

$$\therefore t = 32 \quad (\because t > 0)$$

즉 $2^n = 32 = 2^5$ 이므로

$$n = 5$$

따라서 두 종류의 세균 A, B의 수의 차가 960이 되는 것은 번식을 시작한 지 5시간 후이다.

답 ③

11 전략 먼저 $x^2 - 4x + 6$ 과 1의 대소를 비교한다.

풀이 $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \geq 2$ 이고

$$(x^2 - 4x + 6)^{2x-11} < 1 \text{에서}$$

$$(x^2 - 4x + 6)^{2x-11} < (x^2 - 4x + 6)^0$$

밑이 1보다 크므로

$$2x - 11 < 0 \quad \therefore x < \frac{11}{2}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

답 ⑤

12 전략 $\overline{EF}$ 를 $\overline{AB}$ 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{AB} = \log_2 a - \log_5 a$, $\overline{CD} = \log_2 b - \log_5 b$ 이고

$$\overline{AB} : \overline{CD} = 1 : 2 \text{에서}$$

$$\overline{CD} = 2\overline{AB}$$

$$\therefore \overline{EF} = \log_2 ab^2 - \log_5 ab^2$$

$$= \log_2 a + 2\log_2 b - \log_5 a - 2\log_5 b$$

$$= \log_2 a - \log_5 a + 2(\log_2 b - \log_5 b)$$

$$= \overline{AB} + 2\overline{CD}$$

$$= \overline{AB} + 4\overline{AB}$$

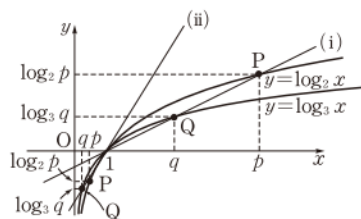
$$= 5\overline{AB}$$

$$\therefore \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = 5$$

답 ⑤

13 전략 두 점을 지나는 직선의 기울기를 이용한다.

풀이 $\neg$.



(i) $p > 1$ 일 때,

위의 그림에서 $p > q$ 이므로

$$\log_2 p > \log_3 p > \log_3 q$$

(ii) $0 < p < 1$ 일 때,

위의 그림에서 $p > q$ 이므로

$$\log_2 p > \log_3 q$$

(i), (ii)에서

$$\log_2 p > \log_3 q$$

ㄴ. 직선 l 의 기울기는 직선 PQ의 기울기와 같으므로

$$m = \frac{\log_2 p - \log_3 q}{p - q}$$

ㄷ. 직선 l 의 기울기는 두 점 $(1, 0)$, $(q, \log_3 q)$ 를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$$m = \frac{\log_3 q}{q - 1} > \frac{\log_3 q}{q}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

14 **전략** $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$ 일 때 $a^{\log_3 c} = c^{\log_3 a}$ 임을 이용한다.

풀이 $x^{\log_4} = 4^{\log x}$ 이므로 주어진 방정식은

$$(4^{\log x})^2 - 6 \cdot 4^{\log x} + 8 = 0$$

$4^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t + 8 = 0, \quad (t - 2)(t - 4) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

즉 $4^{\log x} = 2 = 4^{\frac{1}{2}}$ 또는 $4^{\log x} = 4$ 이므로

$$\log x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \log x = 1$$

$$\therefore x = \sqrt{10} \text{ 또는 } x = 10$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\sqrt{10})^2 + 10^2 = 110$$

답 ④

15 **전략** 판별식을 이용하여 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립할 조건을 구한다.

풀이 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하므로 이차방정식 $x^2 - 2x \log_2 a + \frac{4}{\log_a 2} = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-\log_2 a)^2 - \frac{4}{\log_a 2} < 0$$

$$\therefore (\log_2 a)^2 - 4 \log_2 a < 0$$

$\log_2 a = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t < 0, \quad t(t - 4) < 0$$

$$\therefore 0 < t < 4$$

즉 $0 < \log_2 a < 4$ 이므로

$$1 < a < 16$$

따라서 정수 a 의 개수는

$$16 - 1 - 1 = 14$$

답 ②

16 **전략** $3^a = 4^b = 5^c = k$ ($k > 0$)로 놓는다.

풀이 $3^a = 4^b = 5^c = k$ ($k > 0$)로 놓으면

$$3 = k^{\frac{1}{a}}, \quad 4 = k^{\frac{1}{b}}$$

위의 두 식을 변끼리 곱하면

$$12 = k^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = k^{\frac{a+b}{ab}}$$

$$= k^{a+b} \quad (\because ab = 1)$$

이때 $k = 5^c$ 이므로

$$5^{c(a+b)} = 12$$

답 12

다른 풀이 $5^{c(a+b)} = 5^{ca+cb} = 5^{ca} \cdot 5^{cb}$
 $= (5^c)^a \cdot (5^c)^b = (4^b)^a \cdot (3^a)^b$
 $= 4^{ab} \cdot 3^{ab} = 4 \cdot 3 = 12$

17 **전략** $n = 2^a 3^b 5^c$ 이라 하고 주어진 세 수를 변형한다.

풀이 $n = 2^a 3^b 5^c$ 이라 하면

$$\sqrt{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{a-1}{2}} 3^{\frac{b}{2}} 5^{\frac{c}{2}}, \quad \sqrt[3]{\frac{n}{3}} = 2^{\frac{a}{3}} 3^{\frac{b-1}{3}} 5^{\frac{c}{3}},$$

$$\sqrt[5]{\frac{n}{5}} = 2^{\frac{a}{5}} 3^{\frac{b}{5}} 5^{\frac{c-1}{5}}$$

→ ①

위의 세 수가 모두 자연수가 되려면 a 는 3과 5의 공배수이고 $a-1$ 은 2의 배수이어야 하므로 a 의 최솟값은 15이다.

또 b 는 2와 5의 공배수이고 $b-1$ 은 3의 배수이어야 하므로 b 의 최솟값은 10이다.

c 는 2와 3의 공배수이고 $c-1$ 은 5의 배수이어야 하므로 c 의 최솟값은 6이다.

→ ②

따라서 $a+b+c$ 의 최솟값은

$$15 + 10 + 6 = 31$$

→ ③

답 31

채점 기준	비율
① 주어진 세 수를 변형할 수 있다.	30%
② a, b, c 의 최솟값을 구할 수 있다.	60%
③ $a+b+c$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	10%

18 **전략** 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $x \log_6 \sqrt{3} + y \log_{36} \sqrt{2} = z$ 에서

$$x \log_6 3^{\frac{1}{2}} + \frac{y}{2} \log_6 2^{\frac{1}{2}} = z$$

$$\log_6 3^{\frac{x}{2}} + \log_6 2^{\frac{y}{4}} = z, \quad \log_6 (3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{y}{4}}) = z$$

$$\therefore 3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{y}{4}} = 6^z = 3^z \cdot 2^z$$

이때 x, y, z 가 자연수이고, $2^{\frac{y}{4}}$ 은 3의 배수가 될 수 없고

$3^{\frac{x}{2}}$ 은 2의 배수가 될 수 없으므로

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = z$$

즉 $x = 2z, y = 4z$ 이므로

$$\frac{xy}{z^2} = \frac{2z \cdot 4z}{z^2} = 8$$

답 8

19 **전략** 주어진 함수의 그래프가 지나는 점의 좌표를 이용한다.

풀이 주어진 함수의 그래프가 세 점 $(a, 2)$, $(b, 9)$, $(c, 12)$ 를 지나므로

$$6^a = 2, \quad 6^b = 9, \quad 6^c = 12$$

이때 $6^{2b} = 9^2, 6^{3c} = 12^3$ 이므로

$$6^{a+2b+3c} = 6^a \cdot 6^{2b} \cdot 6^{3c} = 2 \cdot 9^2 \cdot 12^3$$

$$= 2 \cdot (3^2)^2 \cdot (2^3 \cdot 3)^3$$

$$= 2^7 \cdot 3^7 = 6^7$$

$$\therefore a + 2b + 3c = 7$$

답 7

3과 5의 공배수는

15, 30, 45, ...

1을 빼면

14, 29, 44, ...

$\therefore a = 15, 45, \dots$

2와 5의 공배수는

10, 20, 30, 40, ...

1을 빼면

9, 19, 29, 39, ...

$\therefore b = 10, 40, \dots$

2와 3의 공배수는

6, 12, ..., 36, ...

1을 빼면

5, 11, ..., 35, ...

$\therefore c = 6, 36, \dots$

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 세 점 $(a, 2)$, $(b, 9)$, $(c, 12)$ 를 지나므로

$$6^a=2, 6^b=9, 6^c=12$$

따라서 $a=\log_6 2$, $b=\log_6 9$, $c=\log_6 12$ 이므로

$$\begin{aligned} a+2b+3c &= \log_6 2 + 2\log_6 9 + 3\log_6 12 \\ &= \log_6 2 + 2\log_6 3^2 + 3\log_6 (2^2 \cdot 3) \\ &= \log_6 (2 \cdot 3^4 \cdot 2^6 \cdot 3^3) \\ &= \log_6 6^7 = 7 \end{aligned}$$

20 **전략** $2^x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 부등식으로 나타낸다.

풀이 $4^x + a \cdot 2^{x+1} + b \leq 0$ 에서

$$2^{2x} + 2a \cdot 2^x + b \leq 0$$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t^2 + 2at + b \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $2 \leq t \leq 8$

해가 $2 \leq t \leq 8$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(t-2)(t-8) \leq 0 \quad \therefore t^2 - 10t + 16 \leq 0$$

이 부등식이 $\textcircled{1}$ 과 일치하므로

$$2a = -10, b = 16 \quad \therefore a = -5, b = 16$$

$$\therefore a+b=11$$

답 11

21 **전략** $2^x=X$, $2^y=Y$ 로 치환하여 주어진 연립방정식을 X , Y 에 대한 연립방정식으로 나타낸다.

풀이 $2^x=X$, $2^y=Y$ ($X>0$, $Y>0$)로 놓으면 주어진 방정식은

$$\begin{cases} X+Y=9 \\ \frac{X^2}{Y}=\frac{1}{8} \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} X+Y=9 \\ Y=8X^2 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$8X^2 + X - 9 = 0, \quad (8X+9)(X-1) = 0$$

$$\therefore X=1 \quad (\because X>0)$$

$X=1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $Y=8$

$\dots\dots \textcircled{2}$

즉 $2^x=1$, $2^y=8$ 이므로 $x=0$, $y=3$

$$\therefore x^2+y^2=9$$

$\dots\dots \textcircled{3}$

답 9

채점 기준	비율
① X, Y 에 대한 연립방정식으로 나타낼 수 있다.	30%
② X, Y 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ x^2+y^2 의 값을 구할 수 있다.	30%

22 **전략** 주어진 명제가 참이 되려면 지수의 밑이 0보다 크고 1보다 작아야 함을 이용한다.

풀이 두 실수 p, q 에 대하여 주어진 명제가 참이 되려면

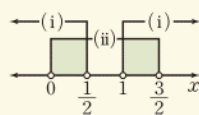
$$0 < 2x^2 - 3x + 1 < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $2x^2 - 3x + 1 > 0$ 에서 $(2x-1)(x-1) > 0$

$$\therefore x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(ii) $2x^2 - 3x + 1 < 1$ 에서 $2x^2 - 3x < 0$

$$x(2x-3) < 0 \quad \therefore 0 < x < \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$



(i), (ii)에서

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } 1 < x < \frac{3}{2}$$

$\dots\dots \textcircled{4}$

$$\text{답 } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } 1 < x < \frac{3}{2}$$

채점 기준	비율
① 주어진 명제가 참이 될 조건을 알 수 있다.	30%
② $2x^2-3x+1>0$ 의 해를 구할 수 있다.	30%
③ $2x^2-3x+1<1$ 의 해를 구할 수 있다.	30%
④ x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	10%

23 **전략** 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프의 점근선을 이용한다.

풀이 함수 $y=2^{1-x}+p$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$y=p$$

함수 $y=2^{1-x}+p$ 의 그래프와 직선 $y=4$ 가 한 점에서 만나므로

$$p < 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수

$$y=\log_2(2p-4x)+p$$

의 그래프의 점근선

의 방정식은

$$2p-4x=0 \text{에서}$$

$$x=\frac{p}{2}$$

함수 $y=\log_2(2p-4x)+p$ 의 그래프와 직선 $x=-1$ 이 한 점에서 만나므로

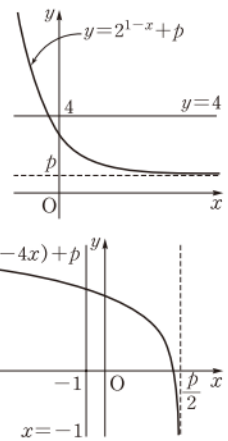
$$\frac{p}{2} > -1 \quad \therefore p > -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $-2 < p < 4$

따라서 정수 p 의 개수는

$$4 - (-2) - 1 = 5$$

답 5



24 **전략** 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 경계로 범위를 나누어 각각의 함수식을 구한다.

풀이 $y=|\log_2 x|$ 에서

$$y = \begin{cases} \log_2 x & (x \geq 1) \\ -\log_2 x & (x < 1) \end{cases}$$

A(3, $\log_2 3$)이고 점 C의 x 좌표를 a ($a < 1$)라 하면

C(a , $-\log_2 a$)이므로

$$-\log_2 a = \log_2 3, \quad \log_2 a = \log_2 \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

또 B(12, $\log_2 12$)이고 점 D의 x 좌표를 b ($b < 1$)라 하면

D(b , $-\log_2 b$)이므로

$$-\log_2 b = \log_2 12, \quad \log_2 b = \log_2 \frac{1}{12}$$

$$\therefore b = \frac{1}{12}$$

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ 에서

① $a > 10$ 이면

$$f(x) > g(x)$$

② $0 < a < 10$ 이면

$$f(x) < g(x)$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left(3 - \frac{1}{3} \right) + \left(12 - \frac{1}{12} \right) \right] \cdot (\log_2 12 - \log_2 3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{143}{12} \right) \cdot \log_2 4 \\ &= \frac{175}{12} \end{aligned}$$

따라서 $p=12$, $q=175$ 이므로

$$p+q=187$$

답 187

25 전략 $a > 10$ 이면 $y = \log_a f(x)$ 는 $f(x)$ 가 최소일 때 최소값을 가짐을 이용한다.

풀이 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$= \log_a (x^2 - 4x + a^5 + 4)$$

$$= \log_a \{(x-2)^2 + a^5\}$$

밑이 1보다 크므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $f(x)$ 가 최소일 때, 즉 $x=2$ 일 때 최솟값 $\log_a a^5 = 5$ 를 갖는다.

따라서 $a=2$, $\beta=5$ 이므로

$$\alpha + \beta = 7$$

답 7

26 전략 로그의 성질을 이용하여 주어진 방정식을 정리한다.

풀이 진수의 조건에서

$$x \neq a, x > 2$$

..... ㉠ → ㉡

$\log_2 |x-a| = \log_2 (x-2)$ 에서

$$\log_2 |x-a| = \frac{1}{2} \log_2 (x-2)$$

$$2 \log_2 |x-a| = \log_2 (x-2)$$

$$\therefore \log_2 (x-a)^2 = \log_2 (x-2)$$

즉 $(x-a)^2 = x-2$ 이므로

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{2a+1 \pm \sqrt{\{(2a+1)\}^2 - 4(a^2+2)}}{2}$$

$$= \frac{2a+1 \pm \sqrt{4a-7}}{2}$$

..... ㉢ → ㉣

따라서 주어진 방정식의 실근이 존재하려면

$$a \geq \frac{7}{4}$$

$$\therefore f(0) = f(1) = 0$$

(i) $a=2$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x > 2$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 주어진 방정식의 실근은 $x=3$ 의 1개이므로

$$f(2)=1$$

(ii) $a=3$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2 < x < 3 \text{ 또는 } x > 3$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } x = \frac{7-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$$

따라서 주어진 방정식의 실근은 $x = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$ 또는

$$x = \frac{7+\sqrt{5}}{2} \text{의 2개이므로}$$

$$f(3)=2$$

사각형 ABCD는 사다리꼴이다.

(iii) $a=4$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2 < x < 4 \text{ 또는 } x > 4$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } x=3 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 주어진 방정식의 실근은 $x=3$ 또는 $x=6$ 의 2개이므로

$$f(4)=2$$

이상에서

$$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=5$$

→ ㉤

답 5

채점 기준	비율
① 진수의 조건을 구할 수 있다.	10%
② 방정식의 해를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
③ $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	70%

최상위로는 최고 수준 문제

본책 35쪽

01

해결 단계

- ① 지수법칙을 이용하여 m, n 에 대한 방정식을 구한다.
- ② 순서쌍 $(m-6, n-4)$ 를 구한 후 $m+n$ 의 값을 구한다.
- ③ $m+n$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

풀이 ① $4\sqrt[m]{9} \cdot \sqrt[n]{3} = 12\sqrt{3}$ 에서

$$(3^2)^{\frac{1}{4m}} \cdot 3^{\frac{1}{3n}} = 3^{\frac{1}{12}}, \quad 3^{\frac{1}{2m} + \frac{1}{3n}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

$$\therefore \frac{1}{2m} + \frac{1}{3n} = \frac{1}{12}$$

양변에 $12mn$ 을 곱하면

$$6n + 4m = mn$$

$$\therefore (m-6)(n-4) = 24$$

..... ㉠

② m, n 은 2 이상의 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 순서쌍 $(m-6, n-4)$ 는

$$(1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6),$$

$$(6, 4), (8, 3), (12, 2), (24, 1)$$

즉 $m+n-10$ 의 값은 10, 11, 14, 25이므로 $m+n$ 의 값은

$$20, 21, 24, 35$$

③ 따라서 $m+n$ 의 최댓값은 35, 최솟값은 20이므로 구하는 합은

$$35+20=55$$

답 ③

02

해결 단계

- ① $\left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{3}\right)^b = k$ 라 하고 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 을 각각 k 에 대한 식으로 나타내어 a, b 의 대소를 비교한다.
- ② 양수 m 에 대하여 $\left(\frac{1}{2}\right)^m > \left(\frac{1}{3}\right)^m$ 임을 이용한다.
- ③ 지수법칙을 이용하여 대소를 비교한다.

풀이 ① $\neg. \left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{3}\right)^b = k \ (0 < k < 1)$ 라 하면

$$k^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{2}, \quad k^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore k^{\frac{1}{a}} > k^{\frac{1}{b}}$$

이때 $0 < k < 1$ 이므로

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\therefore b < a$$

② $\neg. \left(\frac{1}{2}\right)^b > \left(\frac{1}{3}\right)^b = \left(\frac{1}{2}\right)^a > \left(\frac{1}{3}\right)^a$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^b > \left(\frac{1}{3}\right)^a$$

③ $\neg. \left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^a = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^b < 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^b = \left(\frac{1}{3}\right)^{b-1}$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{b-1}$$

이상에서 옳은 것은 ②뿐이다.

답 ②

03

해결 단계

- ① 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그린다.
- ② $a-1 \geq 1$, $0 < a-1 < 1$ 인 경우로 나누어 조건을 만족시키는 a 의 값을 구한다.
- ③ 모든 실수 a 의 값의 곱을 구한다.

풀이 ① 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

② (i) $a-1 \geq 1$, 즉 $a \geq 2$ 일 때,

$1 \leq a-1 < a+1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a-1$ 에서 최솟값을 갖고, $x=a+1$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$\text{즉 } \{\log_2(a-1)+1\} + \{\log_2(a+1)+1\} = 4 \text{이므로}$$

$$\log_2(a^2-1)+2=4, \quad \log_2(a^2-1)=2$$

$$a^2-1=4, \quad a^2=5$$

$$\therefore a=\sqrt{5} \ (\because a \geq 2)$$

(ii) $0 < a-1 < 1$, 즉 $1 < a < 2$ 일 때,

$a-1 < 1 < a+1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 1을 갖는다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a-1$ 에서 최댓값을 가지면

$$\{\log_{\frac{1}{2}}(a-1)+1\} + 1 = 4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(a-1)=2, \quad a-1=\frac{1}{4}$$

$$\therefore a=\frac{5}{4}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=a+1$ 에서 최댓값을 가지면

$$\{\log_2(a+1)+1\} + 1 = 4$$

$$\log_2(a+1)=2, \quad a+1=4$$

$$\therefore a=3$$

이때 $1 < a < 2$ 이므로 $a=\frac{5}{4}$

③ (i), (ii)에서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$\sqrt{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

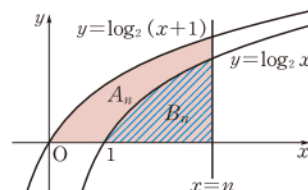
답 ⑤

04

해결 단계

- ① 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 가 역함수 관계임을 이용하여 도형 B_n 과 같은 도형을 찾는다.
- ② 주어진 조건을 $g(n)$ 에 대한 식으로 변형하여 n 의 값의 범위를 구한다.
- ③ 자연수 n 의 개수를 구한다.

풀이 ① 함수 $y=2^x$ 의 역함수는 $y=\log_2 x$ 이므로 도형 B_n 은 다음 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=n$ 으로 둘러싸인 도형(경계선 포함)과 같다.



② 이때 $y=\log_2 x$ 의 그래프는 $y=\log_2(x+1)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로

$$f(n)=g(n+1)$$

$$f(n)-g(n)=10 \text{에서 } g(n+1)-g(n)=10 \text{이므로}$$

$$9 \leq \log_2(n+1) < 10$$

$$2^9 \leq n+1 < 2^{10}$$

$$\therefore 511 \leq n < 1023$$

③ 따라서 자연수 n 의 개수는

$$1023 - 511 = 512$$

답 512

II 삼각함수

II -1. 삼각함수

개념 & 핵심 기출

본책 38~40쪽

01 $\neg$. $830^\circ = 360^\circ \times 2 + 110^\circ$ 이므로 830° 의 동경이 나타내는 일반각은

$$360^\circ \times n + 110^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$\neg$. $-210^\circ = 360^\circ \times (-1) + 150^\circ$ 이므로 -210° 는 제2사분면의 각이다.

$\neg$. $410^\circ = 360^\circ \times 1 + 50^\circ$, $-670^\circ = 360^\circ \times (-2) + 50^\circ$ 이므로 50° , 410° , -670° 를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 $\neg$, $\neg$

02 $\theta = 360^\circ \times n + 120^\circ$ (n 은 정수)이므로 $-900^\circ < \theta < 1260^\circ$ 에서

$$-900^\circ < 360^\circ \times n + 120^\circ < 1260^\circ$$

$$-1020^\circ < 360^\circ \times n < 1140^\circ$$

$$\therefore -\frac{17}{6} < n < \frac{19}{6}$$

n 은 정수이므로 $n = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

따라서 구하는 각 θ 의 개수는 6이다.

답 6

03 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 360^\circ \times \frac{n}{3} + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times \frac{n}{3} + 90^\circ$$

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 210^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 300^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 330^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

이상에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다.

답 제2사분면

04 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$$5\theta - \theta = (2n+1)\pi \quad (n \text{은 정수})$$

정수 n 에 대하여

$$\theta = 360^\circ \times n + \alpha^\circ$$

일 때

$$\textcircled{1} 0^\circ < \alpha^\circ < 90^\circ$$

$\Rightarrow \theta$ 는 제1사분면의 각

$$\textcircled{2} 90^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$$

$\Rightarrow \theta$ 는 제2사분면의 각

$$\textcircled{3} 180^\circ < \alpha^\circ < 270^\circ$$

$\Rightarrow \theta$ 는 제3사분면의 각

$$\textcircled{4} 270^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$$

$\Rightarrow \theta$ 는 제4사분면의 각

$-600^\circ, -240^\circ, 120^\circ, 480^\circ, 840^\circ, 1200^\circ$

$$\therefore \theta = \frac{2n+1}{4}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-\pi < \theta < \pi \text{에서 } -\pi < \frac{2n+1}{4}\pi < \pi \text{이므로}$$

$$-4 < 2n+1 < 4 \quad \therefore -\frac{5}{2} < n < \frac{3}{2}$$

n 은 정수이므로 $n = -2, -1, 0, 1$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\theta = -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

따라서 각 θ 의 크기의 최댓값과 최솟값의 차는

$$\frac{3}{4}\pi - \left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi \quad \text{답 } \frac{3}{2}\pi$$

05 각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 4\theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{5}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{2n}{5}\pi < \pi \text{이므로}$$

$$\frac{5}{4} < n < \frac{5}{2}$$

n 은 정수이므로 $n = 2$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\theta = \frac{4}{5}\pi \quad \text{답 } \frac{4}{5}\pi$$

06 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$2\theta + 3\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{2n}{5}\pi + \frac{\pi}{10} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\pi < \theta < 2\pi \text{에서 } \pi < \frac{2n}{5}\pi + \frac{\pi}{10} < 2\pi \text{이므로}$$

$$\frac{9}{10}\pi < \frac{2n}{5}\pi < \frac{19}{10}\pi \quad \therefore \frac{9}{4} < n < \frac{19}{4}$$

n 은 정수이므로 $n = 3, 4$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\theta = \frac{13}{10}\pi, \frac{17}{10}\pi$$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$\frac{13}{10}\pi + \frac{17}{10}\pi = 3\pi \quad \text{답 } 3\pi$$

07 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2}r \cdot 6\pi = 42\pi \quad \therefore r = 14$$

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$14\theta = 6\pi \quad \therefore \theta = \frac{3}{7}\pi$$

답 ⑤

08 부채꼴의 중심각의 크기는 $320^\circ = \frac{16}{9}\pi$ 이므로 부채꼴

의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{16}{9}\pi = 32\pi, \quad r^2 = 36$$

$$\therefore r = 6 \quad (\because r > 0)$$

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$$6 \cdot \frac{16}{9}\pi = \frac{32}{3}\pi$$

이므로 둘레의 길이는

$$2 \cdot 6 + \frac{32}{3}\pi = 12 + \frac{32}{3}\pi$$

답 ⑤

09 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 24이므로

$$2r + l = 24 \quad \therefore l = 24 - 2r$$

이때 $24 - 2r > 0$, $r > 0$ 이므로 $0 < r < 12$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(24 - 2r)$$

$$= -r^2 + 12r$$

$$= -(r - 6)^2 + 36 \quad (0 < r < 12)$$

이므로 S 는 $r = 6$ 일 때 최댓값 36을 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$36 = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \theta \quad \therefore \theta = 2$$

답 ②

10 $OP = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{5}{13}, \quad \cos \theta = -\frac{12}{13}, \quad \tan \theta = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{13 \sin \theta + 24 \tan \theta}{26 \cos \theta + 4} &= \frac{13 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + 24 \cdot \frac{5}{12}}{26 \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + 4} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ④

11 $OP = \sqrt{k^2 + 9}$ 이므로 $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{k^2 + 9}}$

$$\text{즉 } \frac{3}{\sqrt{k^2 + 9}} = \frac{1}{3} \text{이므로 } \sqrt{k^2 + 9} = 9$$

$$k^2 + 9 = 81, \quad k^2 = 72$$

$$\therefore k = -6\sqrt{2} \quad (\because k < 0)$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{k}{3} = -2\sqrt{2}$$

답 -2√2

12 $y = -\frac{3}{4}x$ 를 $x^2 + y^2 = 25$ 에 대입하면

$$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x\right)^2 = 25, \quad x^2 = 16$$

$$\therefore x = -4 \quad (\because x < 0)$$

따라서 점 P의 좌표는 $(-4, 3)$ 이고 $OP = 5$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \quad \tan \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{5}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

답 ②

$$320 \times \frac{\pi}{180} = \frac{16}{9}\pi$$

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

$OP=r$ 인 점 $P(x, y)$ 에 대하여 동경 OP가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\sin \theta = \frac{y}{r},$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r},$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

13 $\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = 2$ 에서

$$1 - \tan \theta = 2(1 + \tan \theta), \quad 3 \tan \theta = -1$$

$$\therefore \tan \theta = -\frac{1}{3}$$

$\sin \theta < 0$, $\tan \theta = -\frac{1}{3} < 0$ 이므로 θ 는 제4사분면의 각이다.

따라서 각 θ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하는

원과의 교점을 P라 하면 $\tan \theta = -\frac{1}{3}$ 에서 점 P의 좌표를

$(3, -1)$ 로 놓을 수 있다.

이때 $OP = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{aligned} \therefore 10(\sin \theta + \cos \theta) &= 10\left(-\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

답 ④

14 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \quad \cos \theta < 0, \quad \tan \theta > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore |\sin \theta| + |\tan \theta| - \sqrt{(\tan \theta - \cos \theta)^2} \\ + \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \end{aligned}$$

$$= -\sin \theta + \tan \theta - (\tan \theta - \cos \theta) - (\sin \theta + \cos \theta) = -2 \sin \theta$$

답 ②

15 $\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

또 $\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서 $\cos \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 같으므로 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2n\pi + \pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore n\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < n\pi + \frac{\pi}{2}$$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때,

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$$2k\pi + \frac{5}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 위치하는 사분면은 제1사분면, 제3사분면이다.

답 제1사분면, 제3사분면

16 $\frac{4 \sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} = 3$ 에서

$$4 \sin x - \cos x = 3(\sin x + 2 \cos x)$$

$$\therefore \sin x = 7 \cos x$$

양변을 $\cos x$ 로 나누면

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 7 \quad \therefore \tan x = 7$$

$$\therefore 1 + \tan^2 x = 1 + 7^2 = 50$$

답 50

17 $x^2 - x + k = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①에서 $2 \sin \theta = 1$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

②에서 $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = k$ 이므로

$$k = \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) = 2 \sin^2 \theta - 1$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

답 ②

18 $\sin \theta + \cos \theta = \sin \theta \cos \theta$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$(\sin \theta \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = 1 - \sqrt{2} \quad (\because \sin \theta \cos \theta < 0)$$

$$\therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = -1 - \sqrt{2}$$

따라서 $a = -1$, $b = -1$ 이므로

$$a - 10b = -1 + 10 = 9$$

답 9

1등급을 위한 고난도 문제

본책 41~43쪽

01 $36^\circ \times n$ 이 제3사분면의 각이 되려면

$$360^\circ \times k + 180^\circ < 36^\circ \times n < 360^\circ \times k + 270^\circ$$

(k 는 정수)

$$\therefore 10k + 5 < n < 10k + \frac{15}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{1}$$

이때 n 은 두 자리 자연수이고 k 는 정수이므로 $k=1$ 을 ①에 대입하면

$$15 < n < 17.5 \quad \therefore m = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또 $k=9$ 를 ①에 대입하면

$$95 < n < 97.5 \quad \therefore M = 97 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore M + m = 113 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

답 113

채점 기준	비율
① n 의 값의 범위를 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② m 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ M 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $M + m$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

$\cos x = 0$ 이면

$$\frac{4 \sin x}{\sin x} = 4 \neq 3$$

이므로 주어진 등식을 만족시키지 않는다.

$n=1$ 일 때

$$170^\circ \times 1 + 10^\circ = 180^\circ$$

$n=37$ 일 때

$$170^\circ \times 37 + 10^\circ$$

$$= 6300^\circ$$

$$= 360^\circ \times 17 + 180^\circ$$

이므로 $n=1$ 일 때와

$n=37$ 일 때 주어진 각을 나타내는 동경이 일치한다.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

두 각 α , β 를 나타내는 동경이 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$$

(단, n 은 정수)

02 10° 를 나타내는 동경과 $170^\circ \times n + 10^\circ$ 를 나타내는 동경이 일치한다고 하면

$$170^\circ \times n + 10^\circ = 360^\circ \times m + 10^\circ \quad (m \text{은 정수})$$

$$\therefore n = \frac{36}{17}m$$

즉 구하는 서로 다른 동경의 개수는 위의 식을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값과 같으므로 36이다.

답 36

$$03 \quad \neg. \alpha + \beta = \frac{13}{5}\pi + \left(-\frac{28}{5}\pi\right) = -3\pi$$

$$= \{2 \cdot (-2) + 1\}\pi$$

따라서 두 동경 OP, OQ는 y 축에 대하여 대칭이다.

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{7}{6}\pi + \frac{7}{3}\pi = \frac{7}{2}\pi = 2\pi + \frac{3}{2}\pi$$

따라서 두 동경 OP, OQ는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{19}{4}\pi - \left(-\frac{9}{4}\pi\right) = 7\pi = (2 \cdot 3 + 1)\pi$$

따라서 두 동경 OP, OQ는 원점에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

04 각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$7\theta - \theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n\pi}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{n\pi}{3} < \pi \text{이므로}$$

$$\frac{3}{2} < n < 3$$

n 은 정수이므로 $n=2$

$$\text{이것을 ①에 대입하면 } \theta = \frac{2}{3}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ 이므로

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① θ 를 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② θ 의 크기를 구할 수 있다.	40%
③ $\cos \frac{\theta}{2}$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

05 두 부채꼴 A, B의 호의 길이는 각각 $\frac{3}{2}r_A$, $\frac{3}{2}r_B$ 이므로

$$\frac{3}{2}r_A + \frac{3}{2}r_B = 9 \quad \therefore r_A + r_B = 6$$

두 부채꼴 A, B의 넓이는 각각 $\frac{3}{4}r_A^2$, $\frac{3}{4}r_B^2$ 이므로

$$\frac{3}{4}r_A^2 + \frac{3}{4}r_B^2 = 18 \quad \therefore r_A^2 + r_B^2 = 24$$

따라서 $(r_A + r_B)^2 = r_A^2 + 2r_A r_B + r_B^2$ 에서

$$6^2 = 24 + 2r_A r_B \quad \therefore r_A r_B = 6$$

답 6

06 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ 라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 20이므로

$$r + r + r\theta = 20, \quad r\theta = 20 - 2r$$

$$\therefore \theta = \frac{20 - 2r}{r} \quad \dots\dots ①$$

부채꼴의 넓이가 16이므로 $\frac{1}{2}r^2\theta = 16$

①을 위의 식에 대입하면

$$\frac{1}{2}r(20 - 2r) = 16, \quad r^2 - 10r + 16 = 0$$

$$(r - 2)(r - 8) = 0$$

$$\therefore r = 2 \text{ 또는 } r = 8$$

(i) $r = 2$ 를 ①에 대입하면 $\theta = 8$

이때 $\theta < 2\pi$ 이므로 $\theta = 8$ 은 부채꼴의 중심각의 크기가 될 수 없다.

(ii) $r = 8$ 을 ①에 대입하면 $\theta = \frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{1}{2}$ 이다. **답** $\frac{1}{2}$

07 오른쪽 그림의 직각삼각형

OPQ에서 $\overline{OP} = 1$ 이므로

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{OP}}{\cos 60^\circ} = 2$$

접선 l 이 큰 원과 만나는 다른 한

점을 R라 하면 부채꼴 ROQ의 중

심각의 크기는 $120^\circ = \frac{2}{3}\pi$ 이므로 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

한편 $\overline{RQ} = 2\overline{PQ} = 2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 OQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ **답** ③

08 오른쪽 그림의 직각삼각형

OAP에서

$$\overline{AP} = \overline{OA} \tan 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

이때 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\overline{BP} = \overline{AP} = 2\sqrt{3}$$

따라서 사각형 AOBP의 넓이는

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3}\right) \cdot 2 = 12\sqrt{3}$$

한편 부채꼴 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{\pi}{3} = 6\pi$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$12\sqrt{3} - 6\pi$$

09 밑면인 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$2\pi r = 9 \cdot \frac{4}{3}\pi \quad \therefore r = 6 \quad \dots\dots ①$$

$$120 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$$

두 사각형 OAQP, OPRB가 모두 마름모이므로 네 변의 길이가 모두 같다.

$$60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

원뿔에서 밑면인 원의 둘레의 길이는 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 같다.

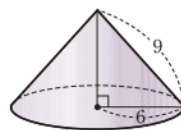
오른쪽 그림에서 원뿔의 높이는

$$\sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5} \quad \dots\dots ②$$

따라서 원뿔의 부피는

$$\frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 6^2) \cdot 3\sqrt{5} = 36\sqrt{5}\pi$$

이므로 $a = 36$ **답** 36



채점 기준	비율
① 밑면인 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40%
② 원뿔의 높이를 구할 수 있다.	30%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30%

10 오른쪽 그림과 같이 부채꼴

AOB의 중심각의 이등분선은 내

접원의 중심 O' 을 지나므로

$$\overline{OO'} = 1 - r$$

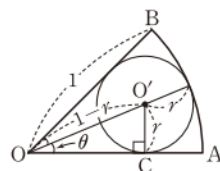
점 O' 에서 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발

을 C라 하면 직각삼각형 $O'OC$ 에서

$$\sin \theta = \frac{r}{1 - r}, \quad (1 - r)\sin \theta = r$$

$$(1 + \sin \theta)r = \sin \theta$$

$$\therefore r = \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} \quad \text{답 ③}$$



11 $\overline{OP} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ 이므로

$$\overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{OP} = 2 \quad \dots\dots ①$$

이때 점 Q의 좌표는

$$(1 + 2, \sqrt{3}), \text{ 즉 } (3, \sqrt{3})$$

이므로 $\overline{OQ} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ②$$

점 R의 좌표는

$$(1 - 2, \sqrt{3}), \text{ 즉 } (-1, \sqrt{3})$$

이므로 $\overline{OR} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\therefore \cos \beta = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore \sin \alpha + \cos \beta = 0 \quad \dots\dots ④$$

답 0

채점 기준	비율
① 두 마름모의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	20%
② $\sin \alpha$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $\cos \beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $\sin \alpha + \cos \beta$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

12 $\sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = -\sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}$ 에서

$$\cos \theta > 0, \sin \theta < 0$$

따라서 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\tan \theta < 0, \tan \theta - 1 < 0$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{\tan^2 \theta} + \sqrt{(\tan \theta - 1)^2} &= -\tan \theta - (\tan \theta - 1) \\ &= 1 - 2 \tan \theta\end{aligned}$$

답 ②

13 $\sqrt{\sin x} \sqrt{\cos x} = -\sqrt{\sin x \cos x}$ ($\sin x \cos x \neq 0$)에서

$$\sin x < 0, \cos x < 0$$

따라서 x 는 제3사분면의 각이므로

$$-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\sin y}} = -\sqrt{\frac{\cos y}{\sin y}} \quad (\sin y \cos y \neq 0) \text{에서}$$

$$\sin y < 0, \cos y > 0$$

따라서 y 는 제4사분면의 각이므로

$$-\frac{\pi}{2} < y < 0$$

$$\therefore x \sin x + x \sin y + y \sin x + y \sin y$$

$$= x(\sin x + \sin y) + y(\sin x + \sin y)$$

$$= (x+y)(\sin x + \sin y)$$

$$\text{이때 } -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < 0 \text{에서}$$

$$x+y < 0$$

$$\sin x < 0, \sin y < 0 \text{에서}$$

$$\sin x + \sin y < 0$$

$$\text{이므로 } (x+y)(\sin x + \sin y) > 0$$

$$\therefore x \sin x + x \sin y + y \sin x + y \sin y > 0$$

$$\therefore x \cos x + x \cos y + y \cos x + y \cos y$$

$$= x(\cos x + \cos y) + y(\cos x + \cos y)$$

$$= (x+y)(\cos x + \cos y)$$

$$[\text{반례}] x = -\frac{3}{4}\pi, y = -\frac{\pi}{4} \text{이면}$$

$$\cos x + \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\text{이므로 } (x+y)(\cos x + \cos y) = 0$$

$$\therefore x \sin x - y \sin x - x \cos y + y \cos y$$

$$= (x-y) \sin x - (x-y) \cos y$$

$$= (x-y)(\sin x - \cos y)$$

$$\text{이때 } -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < 0 \text{에서}$$

$$x-y < 0$$

$$\sin x < 0, \cos y > 0 \text{에서}$$

$$\sin x - \cos y < 0$$

$$\text{이므로 } (x-y)(\sin x - \cos y) > 0$$

$$\therefore x \sin x - y \sin x - x \cos y + y \cos y > 0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

1등급 비밀노트 >>>

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\textcircled{1} \sqrt{-a} \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$$

$$\textcircled{2} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = -\sqrt{\frac{a}{-b}}$$

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} < 0 \text{에서} \\ \cos \theta &\neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}14 \quad & \frac{1}{1+\sin \theta} + \frac{1}{1+\cos \theta} + \frac{1}{1-\sin \theta} + \frac{1}{1-\cos \theta} \\ &= \frac{2}{1-\sin^2 \theta} + \frac{2}{1-\cos^2 \theta} \\ &= \frac{2}{\cos^2 \theta} + \frac{2}{\sin^2 \theta}\end{aligned}$$

$\tan \theta = \sqrt{2} - 1$ 의 양변을 제곱하면

$$\tan^2 \theta = 3 - 2\sqrt{2}, \quad \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$1 - \cos^2 \theta = (3 - 2\sqrt{2}) \cos^2 \theta$$

$$(4 - 2\sqrt{2}) \cos^2 \theta = 1 \quad \therefore \frac{1}{\cos^2 \theta} = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{또 } \cos^2 \theta = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \text{ 이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{4}{2 - \sqrt{2}} = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식}) &= \frac{2}{\cos^2 \theta} + \frac{2}{\sin^2 \theta} \\ &= 2(4 - 2\sqrt{2}) + 2(4 + 2\sqrt{2}) \\ &= 16\end{aligned}$$

답 16

15 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하고, A(1, 0), B(0, 1)이라 하자.

ㄱ. 삼각형 POQ에서 $\overline{OP} = 1$ 이므로

$$\overline{PQ} = \overline{OP} \sin \theta = \sin \theta$$

$$\widehat{AP} = 1 \cdot \theta = \theta \text{ 이고, } \overline{PQ} < \widehat{AP} \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta < \theta$$

$$\therefore \widehat{AB} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\widehat{BP} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\overline{PR} = \overline{OQ} = \overline{OP} \cos \theta = \cos \theta \text{ 이고, } \overline{PR} < \widehat{BP} \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta < \frac{\pi}{2} - \theta \quad \therefore \theta + \cos \theta < \frac{\pi}{2}$$

ㄷ. $\overline{AQ} = 1 - \cos \theta$ 이므로 삼각형 AQP에서

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos \theta)}\end{aligned}$$

이때 $\overline{PQ} < \overline{AP}$ 이므로

$$\sin \theta < \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

$$\begin{aligned}16 \quad & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로 주어진 등식은} \\ & 5 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta \cos \theta - (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0 \\ & \therefore 4 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta = 0 \\ & \text{양변을 } \cos^2 \theta \text{로 나누면}\end{aligned}$$

$$4\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 - 3 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1 = 0$$

$$4 \tan^2 \theta - 3 \tan \theta - 1 = 0$$

$$(4 \tan \theta + 1)(\tan \theta - 1) = 0$$

$$\therefore \tan \theta = -\frac{1}{4} \quad (\because \tan \theta < 0)$$

답 ④

17 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{3}{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{8}{25}$$

→ ①

$$\therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 + \frac{16}{25} = \frac{41}{25}$$

이때 θ 가 제1사분면의 각이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

→ ②

$$\therefore \sin^4 \theta - \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)$$

$$= \frac{\sqrt{41}}{5} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{3\sqrt{41}}{25}$$

→ ③

답 $\frac{3\sqrt{41}}{25}$

채점 기준	비율
① $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
② $\sin \theta + \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

18 $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right)$

$$= \sin^2 \theta \cdot \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \sin^2 \theta \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \sin^2 \theta \tan^2 \theta$$

$$= \left(-\frac{8}{3} \right)^2 = \frac{64}{9}$$

답 ⑤

19 $\cos \theta = \sin^2 \theta$ 이므로

$$\cos^2 \theta + \cos \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\therefore \sin^8 \theta + 2 \sin^6 \theta + 3 \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta$$

$$= (\sin^2 \theta)^4 + 2(\sin^2 \theta)^3 + 3(\sin^2 \theta)^2 + 2 \sin^2 \theta$$

$$= \cos^4 \theta + 2 \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta$$

$$= (\cos^4 \theta + 2 \cos^3 \theta + \cos^2 \theta) + 2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta$$

$$= (\cos^2 \theta + \cos \theta)^2 + 2(\cos^2 \theta + \cos \theta)$$

$$= 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$$

답 ③

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 가 접한다.

→ 이차방정식

$f(x)=g(x)$ 의 판별

식을 D 라 하면

$D=0$

θ 가 제1사분면의 각이므로

$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$

$\therefore \sin \theta + \cos \theta > 0$

20 점 P의 좌표를 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 라 하면 직선 l의 방정식은

$$y - \sin \theta = -(x - \cos \theta)$$

$$\therefore y = -x + \sin \theta + \cos \theta$$

→ ①

직선 l과 포물선 $y=x^2+\frac{3}{4}$ 이 접하므로 이차방정식

$$-x + \sin \theta + \cos \theta = x^2 + \frac{3}{4}, \text{ 즉}$$

$$x^2 + x + \frac{3}{4} - \sin \theta - \cos \theta = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$D = 1^2 - 4\left(\frac{3}{4} - \sin \theta - \cos \theta\right) = 0$$

$$-2 + 4(\sin \theta + \cos \theta) = 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$$

→ ②

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

→ ③

답 $-\frac{3}{8}$

채점 기준	비율
① 직선 l의 방정식을 세울 수 있다.	20%
② $\sin \theta + \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 44쪽

01 오른쪽 그림과 같이 직선 OC가 호 AB와 만나는 점을 D, 원의 중심 C에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 E라 하고, 원 C의 반지름의 길이를 r 라 하자. 부채꼴 AOB의 반지름의 길이를 R 라 하면 호 AB의 길이가 3π 이므로

$$3\pi = R \cdot \frac{\pi}{3} \quad \therefore R = 9$$

$$\text{즉 } \overline{OD} = 9 \text{이므로 } \overline{OC} = 9 - r$$

$$\text{직각삼각형 COE에서 } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{CE}}{\overline{OC}} \text{이므로}$$

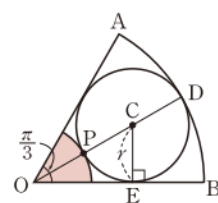
$$\frac{1}{2} = \frac{r}{9-r}, \quad 9-r=2r$$

$$\therefore r=3$$

$$\therefore \overline{OP} = \overline{OC} - \overline{CP} = 6 - 3 = 3$$

따라서 색칠한 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi$$



$$\text{이므로 } k = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 6k = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$$

답 9

02 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로

$$2 \leq a+b \leq 12$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq \frac{a+b}{6} \pi \leq 2\pi$$

이때 $\cos \frac{a+b}{6} \pi < 0$ 에서

$$\frac{\pi}{2} < \frac{a+b}{6} \pi < \frac{3}{2} \pi$$

$$\therefore 3 < a+b < 9$$

(i) $a+b=4$ 일 때, a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 3개

(ii) $a+b=5$ 일 때, a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ 의 4개

(iii) $a+b=6$ 일 때, a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개

(iv) $a+b=7$ 일 때, a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2),$

$(6, 1)$ 의 6개

(v) $a+b=8$ 일 때, a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ 의 5개

이상에서 x 의 값이 음수가 되도록 하는 a, b 의 순서쌍

(a, b) 의 개수는

$$3+4+5+6+5=23$$

답 23

03 $\angle POC = \theta$ 라 하면 $P(\cos \theta, \sin \theta)$

$$\therefore \overline{OC} = \cos \theta$$

직각삼각형 QOA에서 $\cos \theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}}$ 이므로

$$\overline{OQ} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\therefore \overline{OC} \cdot \overline{OQ} = \cos \theta \cdot \frac{1}{\cos \theta} = 1$$

$$\therefore \overline{PC} = \sin \theta$$

직각삼각형 ROD에서 $\tan \theta = \frac{\overline{RD}}{\overline{OD}}$ 이므로

$$\overline{OD} = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\therefore \overline{PC} \cdot \overline{OD} = \sin \theta \cdot \frac{1}{\tan \theta}$$

$$= \sin \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \cos \theta = \overline{OC}$$

ㄷ. 직각삼각형 QOA에서 $\tan \theta = \frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}}$ 이므로

$$\overline{AQ} = \tan \theta$$

직각삼각형 ROD에서 $\sin \theta = \frac{\overline{RD}}{\overline{OR}}$ 이므로

$$\overline{OR} = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\therefore \overline{AQ} \cdot \overline{OR} = \tan \theta \cdot \frac{1}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} = \overline{OQ}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

1등급 비밀노트 >>>

길이가 1인 변을 포함한 직각삼각형을 찾아 다른 변의 길이를 삼각함수로 나타낸다. 이때 삼각함수 사이의 관계를 이용하면 주어진 식을 간단히 할 수 있다.

04 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 이므로 θ 는 제3사분면의 각이다.

ㄱ. θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\tan \theta > 0$$

$$\therefore \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} > 0$$

ㄴ. θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 360^\circ \times \frac{n}{2} + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times \frac{n}{2} + 135^\circ$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 135^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각이므로

$$\cos \frac{\theta}{2} < 0$$

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 315^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각이므로

$$\cos \frac{\theta}{2} > 0$$

(i), (ii)에서 $\cos \frac{\theta}{2} < 0$ 또는 $\cos \frac{\theta}{2} > 0$

한편 $360^\circ \times 2n + 360^\circ < 2\theta < 360^\circ \times 2n + 540^\circ$, 즉

$$360^\circ \times (2n+1) < 2\theta < 360^\circ \times (2n+1) + 180^\circ$$

따라서 2θ 는 제1사분면의 각 또는 제2사분면의 각 또는 90° 이므로 $\sin 2\theta > 0$

$$\therefore \cos \frac{\theta}{2} \sin 2\theta < 0 \text{ 또는 } \cos \frac{\theta}{2} \sin 2\theta > 0$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \tan \theta + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta(1 + \sin \theta) + \cos^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} < 0 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

05 $\sin^2 \theta \tan^2 \theta = \frac{9}{4}$ 에서

$$\sin^2 \theta \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{9}{4}, \quad 4 \sin^4 \theta = 9 \cos^2 \theta$$

$$4 \sin^4 \theta = 9(1 - \sin^2 \theta)$$

$$4 \sin^4 \theta + 9 \sin^2 \theta - 9 = 0$$

$$(4 \sin^2 \theta - 3)(\sin^2 \theta + 3) = 0$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{3}{4} \quad (\because \sin^2 \theta + 3 > 0)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{9}{4 \sin^2 \theta} = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} = 3 \text{이므로}$$

$$\tan^4 \theta + \sin^4 \theta = 3^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{153}{16}$$

따라서 $p=16$, $q=153$ 이므로

$$p+q=169$$

답 169

06 $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$ 라 하면 주어진 등식은

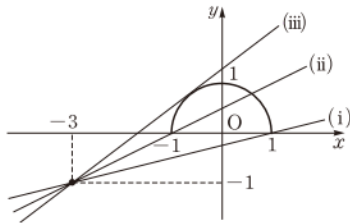
$$y - kx - 3k + 1 = 0, \quad \text{즉 } y + 1 = k(x + 3)$$

..... ㉠

또 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0)$$

..... ㉡



이때 ㉠, ㉡이 한 점에서 만나려면 위의 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 (1, 0)을 지날 때,

$$4k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 (-1, 0)을 지날 때,

$$2k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

(iii) 직선 ㉠이 반원에 접할 때,

직선 ㉠과 반원의 중심 (0, 0) 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 1, \quad |3k-1| = \sqrt{k^2+1}$$

$$(3k-1)^2 = k^2 + 1, \quad 8k^2 - 6k = 0$$

$$2k(4k-3) = 0 \quad \therefore k = \frac{3}{4} \quad (\because k > 0)$$

이상에서 조건을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{4} \leq k < \frac{1}{2} \quad \text{또는} \quad k = \frac{3}{4}$$

$$\text{이므로} \quad a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a+b+c = \frac{3}{2}$$

답 ②

$\pi x + 4\pi = X$ 로 놓으면
 $y = \sin x$ 의 그래프는 원
 점에 대하여 대칭이므로
 $\sin(-X)$
 $= -\sin X$
 $= -\sin(\pi x + 4\pi)$

점 (-3, -1)을 지나고
 기울기가 k 인 직선이다.

중심이 원점이고 반지름의
 길이가 1인 반원이다.

$k=0$ 이면 ㉠의 방정식은
 $y = -1$ 이므로 반원과 만
 나지 않는다.

II -2. 삼각함수의 그래프

개념 & 핵심 기술

본책 46~48쪽

01 ③ $y = 2 \sin(\pi x - 4\pi) = 2 \sin \pi(x - 4)$ 의 그래프는
 $y = 2 \sin \pi x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행
 이동한 것이다.

④ 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이다.

⑤ $f(x) = 2 \sin(\pi x - 4\pi)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2 \sin(-\pi x - 4\pi) \\ &= -2 \sin(\pi x + 4\pi) \\ &= -f(x+8) \\ &= -f(x+6) \\ &\vdots \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

따라서 $y = 2 \sin(\pi x - 4\pi)$ 의 그래프는 원점에 대하여
 대칭이다.

답 ③

02 주어진 그림에서 함수의 주기가

$$\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = 4$$

따라서 함수 $y = \cos 4(x+b) + 1$ 의 그래프가 점 (0, 0)을
 지나므로

$$\cos 4b + 1 = 0 \quad \therefore \cos 4b = -1$$

$0 < b < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < 4b < 2\pi$ 이므로

$$4b = \pi \quad \therefore b = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore ab = \pi$$

답 π

03 ㄱ. $f(-x) = -x \tan(-x)$

$$= -x(-\tan x)$$

$$= x \tan x$$

$$= f(x)$$

ㄴ. $f(-x) = \sin(-x) + \tan(-x)$

$$= -\sin x - \tan x$$

$$= -(\sin x + \tan x)$$

$$= -f(x)$$

ㄷ. $f(-x) = \cos(-x) |\tan(-x)|$

$$= \cos x |-\tan x|$$

$$= \cos x |\tan x|$$

$$= f(x)$$

이상에서 $f(-x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

1등급 비밀노트 >>>

기함수와 우함수

① 기함수: $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키는 함수

→ 그래프가 원점에 대하여 대칭이다.

예 $y = \sin x, y = \tan x, y = x$

② 우함수: $f(-x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수

→ 그래프가 y 축에 대하여 대칭이다.

예 $y = \cos x, y = x^2$

04 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = \pm 2$$

그런데 주어진 그래프는 $y = \tan 2x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로

$$y = \tan(-2x) \quad \therefore a = -2$$

답 ②

05 $\neg, \sin 203^\circ = \sin(180^\circ + 23^\circ) = -\sin 23^\circ$

$$\therefore \sin 23^\circ + \sin 203^\circ = \sin 23^\circ - \sin 23^\circ = 0$$

$\neg, \cos 337^\circ = \cos(360^\circ - 23^\circ) = \cos 23^\circ$

$$\therefore \cos 23^\circ + \cos 337^\circ = \cos 23^\circ + \cos 23^\circ = 2\cos 23^\circ$$

$\neg, \tan 517^\circ = \tan(360^\circ + 157^\circ) = \tan 157^\circ$

$$= \tan(180^\circ - 23^\circ) = -\tan 23^\circ$$

$$\therefore \tan 23^\circ + \tan 517^\circ = \tan 23^\circ - \tan 23^\circ = 0$$

이상에서 계산한 값이 0인 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ④

$$\begin{aligned} 06 \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta) &= \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{32}{15} \end{aligned}$$

답 $\frac{32}{15}$

07 (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin(\pi + \theta)}{\sin(2\pi - \theta)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos(\pi + \theta)} \\ &\quad - \tan\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \tan(\pi + \theta) \\ &= \frac{-\sin \theta}{-\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{-\cos \theta} - \frac{1}{\tan \theta} \cdot \tan \theta \\ &= -1 + 1 - 1 = -1 \end{aligned}$$

답 -1

$y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 것이다.

$$2\sin \frac{\pi}{2} + 1 = 3$$

x 대신 $-x$ 를 대입한다.

$$\begin{aligned} 08 \quad y &= \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) + 1 \\ &= \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 1 \\ &= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \end{aligned}$$

함수 $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sin x$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi$ 이므로 주어진 함수

는 $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 즉 $x = \frac{3}{4}\pi$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.

따라서 $a = \frac{3}{4}\pi, b = 3$ 이므로

$$ab = \frac{9}{4}\pi$$

답 ④

$$\begin{aligned} 09 \quad y &= (\sin x + a)^2 + \cos^2 x \\ &= \sin^2 x + 2a\sin x + a^2 + 1 - \sin^2 x \\ &= 2a\sin x + a^2 + 1 \end{aligned}$$

$-1 \leq \sin x \leq 1, a > 0$ 이므로

$$a^2 - 2a + 1 \leq 2a\sin x + a^2 + 1 \leq a^2 + 2a + 1$$

주어진 함수의 최댓값이 16이므로

$$a^2 + 2a + 1 = 16, \quad a^2 + 2a - 15 = 0$$

$$(a+5)(a-3) = 0 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$$

따라서 주어진 함수의 최솟값은

$$a^2 - 2a + 1 = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4$$

답 4

$$\begin{aligned} 10 \quad y &= a\cos^2 x + a\sin x + b \\ &= a(1 - \sin^2 x) + a\sin x + b \\ &= -a\sin^2 x + a\sin x + a + b \end{aligned}$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -at^2 + at + a + b$$

$$= -a\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}a + b$$

$-a < 0$ 이므로 함수의 그래프는 위로 볼록한 포물선이다.

오른쪽 그림에서

$$t = \frac{1}{2} \text{일 때 최댓값은 } \frac{5}{4}a + b,$$

$$t = -1 \text{일 때 최솟값은 } -a + b$$

이므로

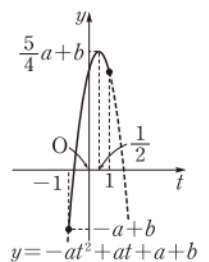
$$\frac{5}{4}a + b = 6, \quad -a + b = -3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 4, b = 1$$

$$\therefore a + b = 5$$

답 ①



11 $\left| \tan x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} = 0$ 에서

$$\left| \tan x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \quad \tan x - \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan x = 0 \text{ 또는 } \tan x = 1$$

(i) $\tan x = 0$ 일 때,

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } x = 0$$

(ii) $\tan x = 1$ 일 때,

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } x = \frac{\pi}{4}$$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$$0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

답 ④

12 $4 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x = 3$ 에서

$$4 \cos^2 x = 3, \quad \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leq x < \pi$ 이므로

$$x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{6}$$

즉 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$2\beta - \alpha = \frac{10}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi$$

답 ④

13 $2 \cos^2 x + \sin x = 1$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 1$$

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

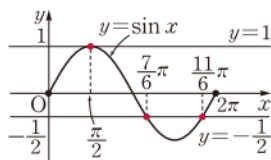
$$\therefore \sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = 1$$

(i) $\sin x = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$0 \leq x < 2\pi$ 이므로

$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 }$$

$$x = \frac{11}{6}\pi$$



(ii) $\sin x = 1$ 일 때,

$$0 \leq x < 2\pi \text{이므로 } x = \frac{\pi}{2}$$

(i), (ii)에서

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{7}{6}\pi, \gamma = \frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore \gamma - \beta - \alpha = \frac{11}{6}\pi - \frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

답 $\frac{\pi}{6}$

14 $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 \geq 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x - 4 \geq 0$$

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 \leq 0$$

$$\therefore (2 \sin x - 1)(\sin x - 2) \leq 0$$

이때 $\sin x - 2 < 0$ 이므로

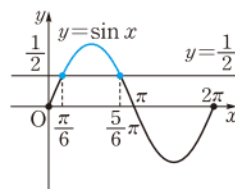
$$2 \sin x - 1 \geq 0 \quad \therefore \sin x \geq \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로} \\ -3 \leq \sin x - 2 \leq -1 \end{aligned}$$

오른쪽 그림에서 x 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{답 } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$$



15 $2 \cos^4 x - \cos^3 x > 0$ 에서

$$\cos^3 x (2 \cos x - 1) > 0$$

이때 $\cos^2 x \geq 0$ 이므로

$$\cos x \neq 0, \cos x (2 \cos x - 1) > 0$$

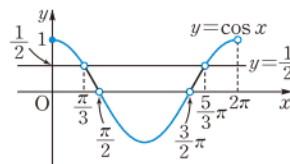
$$\therefore \cos x < 0 \text{ 또는 } \cos x > \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 x 의 값의 범위는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 }$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 }$$

$$\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$$



따라서 주어진 부등식의 해가 될 수 없는 것은 ②이다.

$$\frac{\pi}{3} < \frac{5}{12}\pi < \frac{\pi}{2}$$

답 ②

16 $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서

$$-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}\pi \text{이고 주어진 부등식은}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

오른쪽 그림에서 t 의 값의 범위는

$$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 }$$

$$\frac{2}{3}\pi < t \leq \frac{5}{6}\pi$$

이므로

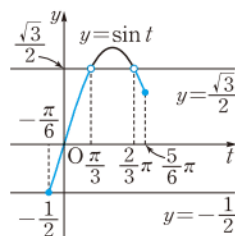
$$-\frac{\pi}{6} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{2}{3}\pi < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore -\pi \leq x < 0 \text{ 또는 } \frac{2}{3}\pi < x \leq \pi$$

따라서 $a = -\pi, b = 0, c = \frac{2}{3}\pi, d = \pi$ 이므로

$$b - a + d - c = \frac{4}{3}\pi$$

답 ③

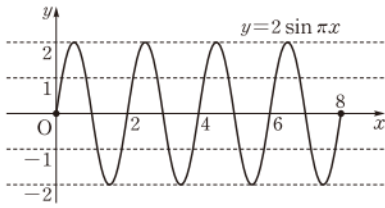


1등급을 위한 고난도 문제

본책 49~51쪽

01 $-2 \leq 2 \sin \pi x \leq 2$ 이므로 함수 $y = 2 \sin \pi x$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 2, -2이고 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이다. $\rightarrow$ ①

따라서 $0 \leq x \leq 8$ 에서 함수 $y = 2 \sin \pi x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 y 좌표가 정수이므로 y 좌표가 될 수 있는 값은
 $-2, -1, 0, 1, 2$

함수 $y = 2 \sin \pi x$ 의 그래프와 두 직선 $y = 2, y = -2$ 의 교점의 개수는 $4 \cdot 2 = 8$

함수 $y = 2 \sin \pi x$ 의 그래프와 두 직선 $y = 1, y = -1$ 의 교점의 개수는 $8 \cdot 2 = 16$

함수 $y = 2 \sin \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = 0$ 의 교점의 개수는 9

이므로 y 좌표가 정수인 점의 개수는

$$8 + 16 + 9 = 33$$

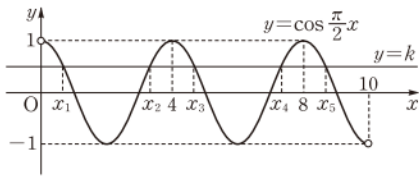
→ 2

→ 3

답 33

채점 기준	비율
① 함수 $y = 2 \sin \pi x$ 의 최댓값, 최솟값, 주기를 구할 수 있다.	30%
② 함수 $y = 2 \sin \pi x$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	30%
③ y 좌표가 정수인 점의 개수를 구할 수 있다.	40%

02 함수 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 4이므로 $0 < x < 10$ 에서 함수 $y = \cos \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ ($0 < k < 1$)가 만나는 점의 x 좌표는 다음 그림과 같이 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 이다.



ㄱ. $y = \cos \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 5이므로 $n = 5$

ㄴ. $x_2 = 4 - x_1, x_3 = 4 + x_1, x_4 = 8 - x_1, x_5 = 8 + x_1$ 이므로
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 + 24 > 24$

ㄷ. $x_1 + x_2 = x_1 + (4 - x_1) = 4$ 이므로

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(2) = \cos \pi = -1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

→ 4

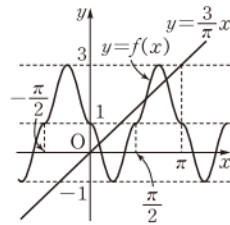
두 점 $(x_1, k), (x_2, k)$ 가 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이므로
 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2$
 로 계산해도 된다.

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

1등급 비밀노트 >>>

- ① $y = \sin x$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi, \dots$, 즉 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)에 대하여 대칭이다.
- ② $y = \cos x$ 의 그래프는 직선 $x = 0, x = \pi, \dots$, 즉 $x = n\pi$ (n 은 정수)에 대하여 대칭이다.

03 조건 ㄱ에서 $f(x)$ 는 주기가 π 인 주기함수이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{3}{\pi}x$ 는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{3}{\pi}x$ 의 교점의 개수는 3이다.

→ 3

04 $t = 20$ 일 때 $T = 120$ 이므로

$$A + \frac{k}{2} = 120 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$t = 60$ 일 때 $T = 140$ 이므로

$$A + k = 140 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

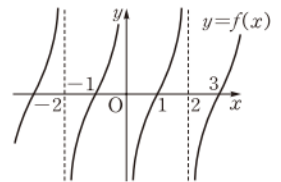
$$A = 100, k = 40$$

따라서 4시간 40분, 즉 280분 후의 실험실의 밝기는

$$\begin{aligned} 100 + 40 \sin \frac{7}{3}\pi &= 100 + 40 \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 100 + 40 \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 100 + 20\sqrt{3} \text{ (lux)} \end{aligned}$$

$$\text{답 } (100 + 20\sqrt{3}) \text{ lux}$$

05 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉 $f(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이므로



$$\frac{\pi}{b} = 2 \quad \therefore b = \frac{\pi}{2}$$

→ 1

따라서 $f(x) = a \tan\left(\frac{\pi}{2}x + c\right)$ 이고 $f(1) = 0$ 이므로

$$a \tan\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = 0$$

이때 $a > 0$ 이므로 $\tan\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = 0$

$-2 < c < -1$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} + c = 0 \quad \therefore c = -\frac{\pi}{2}$$

→ 2

조건 ㄴ에서 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$ 이므로

$$a \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -3 \quad \therefore a = 3$$

→ 3

$$\therefore a + b + c = 3 + \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

→ 4

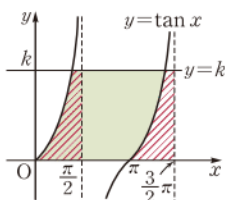
답 3

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	30%
② c 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20%
④ $a+b+c$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

06 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $y=\tan x$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $y=k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

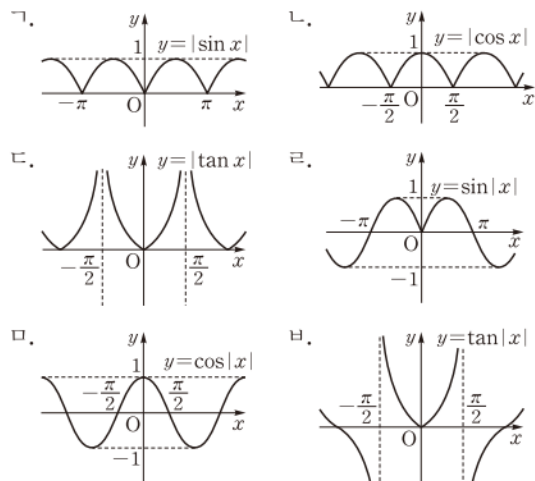
$$\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\right)k = 3\pi$$

$$k\pi = 3\pi \quad \therefore k = 3$$



답 3

07 주어진 함수의 그래프는 다음과 같다.



이상에서 주기함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ의 4개이다. **답 ③**

1등급 비밀노트 >>>

절댓값 기호를 포함한 식의 그래프 그리는 방법

① $y=|f(x)|$ 의 그래프

$y=f(x)$ 의 그래프를 그린 후 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한다.

② $y=f(|x|)$ 의 그래프

$y=f(x)$ 의 그래프를 그린 후 $x \geq 0$ 인 부분만 남기고, $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동한다.

08 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1)=f(x-1)$ 이 성립하므로 위의 식의 양변에 x 대신 $x+1$ 을 대입하면

$$f(x+2)=f(x)$$

$$\therefore f(x)=\tan \frac{\pi}{2}x \text{의 주기는 } \frac{\pi}{2}=2$$

$$\therefore f(x+2)=f(x)$$

$$\therefore f(x)=\cos 2\pi(x-1) \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{2\pi}=1$$

$$\therefore f(x+2)=f(x+1)=f(x)$$

- ① $\sin(-x)=-\sin x$
- ② $\cos(-x)=\cos x$
- ③ $\tan(-x)=-\tan x$

09 ㄱ. $f(x)=\sin \pi(\pi x-1)=\sin(\pi^2 x-\pi)$
 $=-\sin(\pi-\pi^2 x)$
 $=-\sin \pi^2 x$

이므로

$$f(-x)=-\sin \pi^2(-x)=\sin \pi^2 x$$

$$\therefore f(-x)=-f(x)$$

ㄴ. $f(x)=\cos \pi\left(x-\frac{1}{2}\right)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$
 $=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)$
 $=\sin \pi x$

이므로

$$f(-x)=\sin \pi(-x)=-\sin \pi x$$

$$\therefore f(-x)=-f(x)$$

ㄷ. $f(-x)=\left|\tan \frac{\pi}{2}(-x)\right|=\left|-\tan \frac{\pi}{2}x\right|$
 $=\left|\tan \frac{\pi}{2}x\right|=f(x)$

이상에서 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄴ이다. **답 ③**

10 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sin(4\alpha+3\beta)=\sin\{3(\alpha+\beta)+\alpha\}$$

$$=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$$

$$=-\cos \alpha=-\frac{\overline{PA}}{AB}$$

$$=-\frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}=-\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

답 $-\frac{3\sqrt{13}}{13}$

11 $\angle AOB = \angle AOD = \frac{\pi}{2}$, $\angle AOC = \pi$ 이므로

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha, \gamma = \pi + \alpha, \delta = \frac{3}{2}\pi + \alpha$$

$$\begin{aligned} \neg. \sin \alpha + \sin \gamma &= \sin \alpha + \sin(\pi + \alpha) \\ &= \sin \alpha - \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \cos \beta + \cos \delta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) \\ &= -\sin \alpha + \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \tan \alpha - \tan \delta &= \tan \alpha - \tan\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) \\ &= \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} \geq 2 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ②

12 $y = a^2 \sin x + (a+1) \cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) + b$

$$\begin{aligned} &= a^2 \sin x + (a+1) \sin x + b \\ &= (a^2 + a + 1) \sin x + b \end{aligned}$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ 이고 $a^2 + a + 1 > 0$ 이므로

$$-a^2 - a - 1 + b \leq y \leq a^2 + a + 1 + b$$

주어진 함수의 최댓값이 8이므로

$$a^2 + a + 1 + b = 8 \quad \dots\dots ㉠$$

최솟값이 -6이므로

$$-a^2 - a - 1 + b = -6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠+㉡을 하면 $2b = -2 \quad \therefore b = -1$

$b = -1$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$a^2 + a - 6 = 0, \quad (a+3)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -3 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore a + b = -4$$

답 ③

13 $y = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4 \cos^2 x + 5 \sin(x - \pi)$

$$= (-\sin x)^2 - 4(1 - \sin^2 x) - 5 \sin x$$

$$= 5 \sin^2 x - 5 \sin x - 4$$

→ ①

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = 5t^2 - 5t - 4 = 5\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$$

오른쪽 그림에서

$t = -1$ 일 때 최댓값은 6,

$t = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 $-\frac{21}{4}$

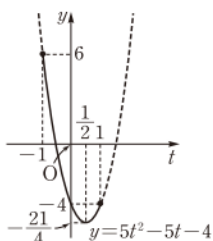
이므로

$$M = 6, \quad m = -\frac{21}{4} \quad \rightarrow ②$$

$$\therefore M + m = \frac{3}{4}$$

→ ③

답 $\frac{3}{4}$



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 일 때,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\tan \alpha > 0$$

$$\therefore \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\geq 2 \sqrt{\tan \alpha \cdot \frac{1}{\tan \alpha}}$$

$= 2$ (단, 등호는 $\tan \alpha = 1$ 일 때 성립)

$$\begin{aligned} &a^2 + a + 1 \\ &= \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \end{aligned}$$

점근선의 방정식은

$$t = 2, y = -2$$

$0 \leq x \leq 3\pi$ 에서

$$0 \leq 3x \leq 9\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} \leq 3x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{37}{4}\pi$$

14 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $\cos x \neq 0$ 이므로

$$y = \frac{3 \cos x + 2 \sin x}{2 \cos x - \sin x} = \frac{3 + \frac{2 \sin x}{\cos x}}{2 - \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \frac{3 + 2 \tan x}{2 - \tan x} = \frac{-2(2 - \tan x) + 7}{2 - \tan x}$$

$$= -2 + \frac{7}{2 - \tan x}$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq \tan x \leq 1$ 이므로

$$1 \leq 2 - \tan x \leq 2, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2 - \tan x} \leq 1$$

$$\frac{7}{2} \leq \frac{7}{2 - \tan x} \leq 7$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq -2 + \frac{7}{2 - \tan x} \leq 5$$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\left\{y \mid \frac{3}{2} \leq y \leq 5\right\}$ 이므로

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = 5$$

$$\therefore 2a - b = 2 \cdot \frac{3}{2} - 5 = -2$$

답 -2

참고 $y = -2 + \frac{7}{2 - \tan x}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)에서 $\tan x = t$ 로 놓으

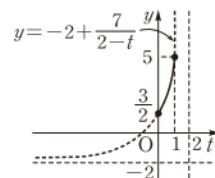
면 $0 \leq t \leq 1$ 이고 $y = -2 + \frac{7}{2 - t}$

오른쪽 그림에서 주어진 함수는

$t = 0$ 일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$,

$t = 1$ 일 때 최댓값 5

를 갖는다.



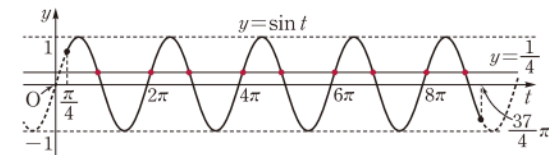
15 $3x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq 3\pi$ 에서 $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{37}{4}\pi$ 이

고 주어진 방정식은

$$4 \sin t = 1 \quad \therefore \sin t = \frac{1}{4}$$

따라서 방정식 $\sin t = \frac{1}{4}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수

$y = \sin t$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{4}$ 의 교점의 개수와 같다.



위의 그림과 같이 $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{37}{4}\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그

래프와 직선 $y = \frac{1}{4}$ 의 교점의 개수는 9이므로 주어진 방정

식의 서로 다른 실근의 개수는 9이다.

답 ④

1등급 비밀노트 >>>

① 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

② 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수와 같다.

채점 기준	비율
① 주어진 함수의 식을 한 종류의 삼각함수의 식으로 변형할 수 있다.	40%
② M, m 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $M + m$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

16 $\tan x - \sin 2x = 0$ 에서

$$\tan x = \sin 2x$$

방정식 $\tan x - \sin 2x = 0$ 의 실근은 두 함수 $y = \tan x$, $y = \sin 2x$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

오른쪽 그림에서 주어진 방정식의 근은

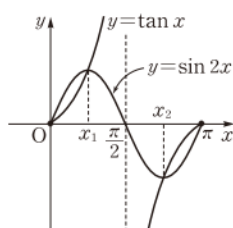
$$0, x_1, x_2, \pi \quad (x_1 < x_2)$$

$$\text{이때 } \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$x_1 + x_2 = \pi$$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$0 + x_1 + x_2 + \pi = 2\pi$$



답 ④

17 $2\sin^2 x + \cos x = a$ 에서

$$2(1 - \cos^2 x) + \cos x = a$$

$$\therefore -2\cos^2 x + \cos x + 2 = a$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 방정식은

$$-2t^2 + t + 2 = a$$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y = -2t^2 + t + 2$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점이 존재해야 한다.

$y = -2t^2 + t + 2$ 라 하면

$$y = -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$$

오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

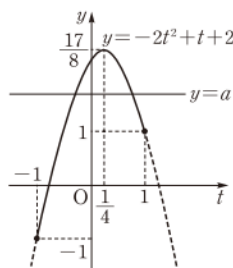
$$-1 \leq a \leq \frac{17}{8}$$

즉 $M = \frac{17}{8}$, $m = -1$ 이므로

$$M + m = \frac{9}{8}$$

따라서 $p = 8$, $q = 9$ 이므로

$$p + q = 17$$



$$\cos^4 \theta = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$\cos^2 \theta = \pm \frac{1}{2}$$

이때 $\cos^2 \theta \geq 0$ 이므로

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{4}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

즉 포물선의 꼭짓점의 y 좌표는 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때 최댓값 $-\frac{3}{4}$ 을

$$\text{가지므로 } p = \frac{\pi}{4}, q = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore pq = -\frac{3}{16}\pi$$

답 ③

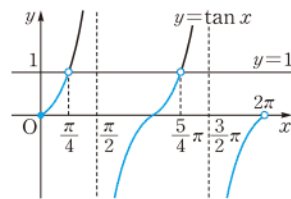
19 오른쪽 그림에서 $\tan x < 1$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는}$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{4}\pi \text{ 또는}$$

$$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

..... ㉠



$$\text{또 } |\cos x| < \frac{1}{2} \text{에서 } -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서

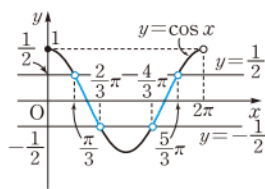
$$-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2} \text{을 만족}$$

시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi \text{ 또는}$$

$$\frac{4}{3}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$$

..... ㉡



18 점 B의 좌표는 $(-\cos \theta, -\sin \theta)$ 이고 두 점 A, B가 포물선 $y = x^2 + ax + b$ 위의 점이면

$$\sin \theta = \cos^2 \theta + a \cos \theta + b \quad \dots\dots ㉠$$

$$-\sin \theta = \cos^2 \theta - a \cos \theta + b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠-㉡을 하면

$$2\sin \theta = 2a \cos \theta \quad \therefore a = \tan \theta$$

점의 대칭이동

점 (x, y) 를 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭 이동한 점의 좌표는 다음과 같다.

$$\textcircled{1} x\text{축} \rightarrow (x, -y)$$

$$\textcircled{2} y\text{축} \rightarrow (-x, y)$$

$$\textcircled{3} \text{원점} \rightarrow (-x, -y)$$

점 A는 제1사분면 위의 점이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

따라서 $\cos \theta \neq 0$ 이므로

$$2\sin \theta = 2a \cos \theta \text{에서}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = a$$

$$\therefore \tan \theta = a$$

㉠, ㉡에서 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$

따라서 주어진 연립부등식의 해가 될 수 있는 것은 ㉢이다.

답 ㉢

20 주어진 이차방정식의 두 실근을 α , β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{\sin \theta}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{2\cos \theta + 1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 $\alpha + \beta > 0$ 이므로

$$\frac{\sin \theta}{2} > 0, \quad \sin \theta > 0$$

$$\therefore 0 < \theta < \pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi) \quad \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

또 $\alpha\beta < 0$ 이므로

$$\frac{2\cos \theta + 1}{2} < 0, \quad \cos \theta < -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi) \quad \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

㉠, ㉡에서 $\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi \quad \cdots \textcircled{4}$

답 $\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$

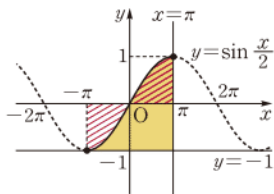
채점 기준	비율
① 주어진 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.	20%
② 두 근의 합의 조건을 만족시키는 θ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
③ 두 근의 곱의 조건을 만족시키는 θ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
④ θ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 52쪽

01 $y = \sin \frac{x}{2}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

이므로 함수 $y = \sin \frac{x}{2}$ 의 그래프와 두 직선 $x = \pi$, $y = -1$ 로 둘러싸인 부분은 다음 그림의 색칠한 부분이다.

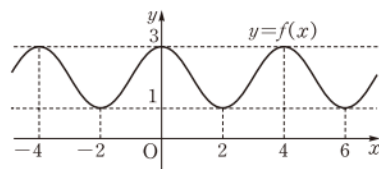


이때 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 $\{\pi - (-\pi)\} \cdot 1 = 2\pi$

답 ㉡

02 함수 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x + 2$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 1이고, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다

음 그림과 같다.

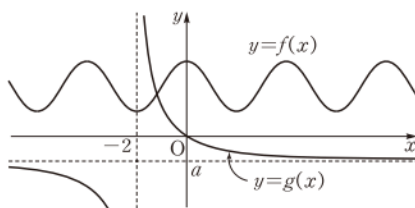


$g(x) = \frac{ax}{x+2} = -\frac{2a}{x+2} + a$ 이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -2, y = a$$

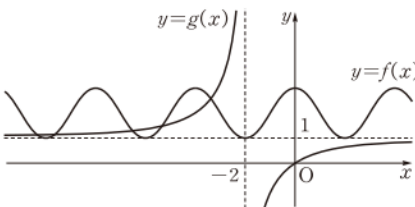
(i) $a < 0$ 일 때,

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 1개의 점에서 만난다.



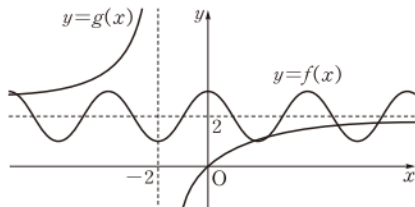
(ii) $a = 1$ 일 때,

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 무수히 많은 점에서 만난다.



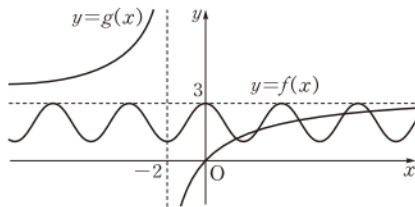
(iii) $a = 2$ 일 때,

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 무수히 많은 점에서 만난다.



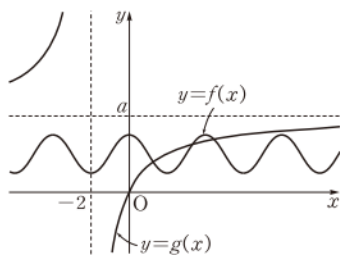
(iv) $a = 3$ 일 때,

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 무수히 많은 점에서 만난다.



(v) $a > 3$ 일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 유한 개의 점에서 만난다.



이상에서 구하는 a 의 값의 합은

$$1+2+3=6$$

답 6

03 $v=a \sin b \pi t$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$ 이고, 최댓값은 a , 최솟값은 $-a$ 이다.

이때 v 의 최댓값이 0.8이므로 $a=0.8$

또 1회의 호흡을 하는 데 걸리는 시간은

$$\frac{60}{12}=5(\text{초})$$

즉 호흡의 주기가 5초이므로

$$\frac{2}{b}=5 \quad \therefore b=\frac{2}{5}=0.4$$

$$\therefore \frac{a}{b}=2$$

답 2

04 $\frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \theta = \pi$ 에서 $50\theta = \pi$

$$\begin{aligned} \therefore |\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos 50\theta| \\ &= |(\cos \theta + \cos 49\theta) + (\cos 2\theta + \cos 48\theta) \\ &\quad + \cdots + (\cos 24\theta + \cos 26\theta) + \cos 25\theta + \cos 50\theta| \\ &= |(\cos \theta + \cos(\pi - \theta)) + (\cos 2\theta + \cos(\pi - 2\theta)) \\ &\quad + \cdots + (\cos 24\theta + \cos(\pi - 24\theta)) + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi| \\ &= |(\cos \theta - \cos \theta) + (\cos 2\theta - \cos 2\theta) \\ &\quad + \cdots + (\cos 24\theta - \cos 24\theta) + 0 - 1| \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 1

05 $y=\sin kx$ 의 그래프에서

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2k}, \quad \frac{x_2+x_3}{2}=\frac{3\pi}{2k}$$

$$\text{이므로 } x_1+x_2=\frac{\pi}{k}, \quad x_2+x_3=\frac{3\pi}{k}$$

$$\begin{aligned} \therefore x_1+2x_2+x_3 &= (x_1+x_2) + (x_2+x_3) \\ &= \frac{\pi}{k} + \frac{3\pi}{k} = \frac{4\pi}{k} \end{aligned}$$

$2 \sin(x_1+2x_2+x_3)=1$ 에서

$$\sin \frac{4\pi}{k} = \frac{1}{2}$$

이므로 $\frac{4\pi}{k}$ 의 값은

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \dots$$

1 ≤ a ≤ 3일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 무수히 많은 점에서 만난다.

1분, 즉 60초 동안 12회의 호흡을 한다.

반지름의 길이가 r , 중심 각의 크기가 θ 인 부채꼴의 넓이 S 는 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$

$$\begin{aligned} -1 \leq f_4(x) \leq 0 \text{에서} \\ 0 \leq |f_4(x)| \leq 1 \\ \therefore -1 \leq f_5(x) \leq 0 \end{aligned}$$

함수 $y=\sin kx$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$

따라서 k 의 값은

$$24, \frac{24}{5}, \frac{24}{13}, \frac{24}{17}, \dots$$

이므로 k 의 최댓값은 24이다.

답 24

06 $\neg. 0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $-3 \leq 2 \sin x - 1 \leq 1$

따라서 함수 $f_1(x)$ 의 최솟값은 -3 이다.

∴ $f_2(x) = |2 \sin x - 1| - 1$ 이므로 방정식 $f_2(x) = 0$ 에서

$$|2 \sin x - 1| - 1 = 0, \quad |2 \sin x - 1| = 1$$

$$2 \sin x - 1 = -1 \text{ 또는 } 2 \sin x - 1 = 1$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = 1$$

(i) $\sin x = 0$ 일 때,

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{이므로}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=2\pi$$

(ii) $\sin x = 1$ 일 때,

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{이므로 } x=\frac{\pi}{2}$$

(i), (ii)에서 방정식 $f_2(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

∴ $-3 \leq f_1(x) \leq 1$ 이므로

$$0 \leq |f_1(x)| \leq 3$$

$$f_2(x) = |f_1(x)| - 1 \text{에서 } -1 \leq f_2(x) \leq 2 \text{이므로}$$

$$0 \leq |f_2(x)| \leq 2$$

$$f_3(x) = |f_2(x)| - 1 \text{에서 } -1 \leq f_3(x) \leq 1 \text{이므로}$$

$$0 \leq |f_3(x)| \leq 1$$

따라서 $f_4(x) = |f_3(x)| - 1$ 에서 $-1 \leq f_4(x) \leq 0$ 이므로

$$f_5(x) = |f_4(x)| - 1 = -f_4(x) - 1$$

또 $-1 \leq f_5(x) \leq 0$ 이므로

$$f_6(x) = |f_5(x)| - 1 = -f_5(x) - 1$$

$$= -\{-f_4(x) - 1\} - 1$$

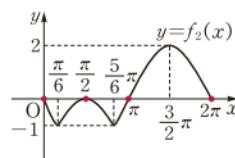
$$= f_4(x)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

◦참고 ∴ 함수

$y = |2 \sin x - 1| - 1$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f_2(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

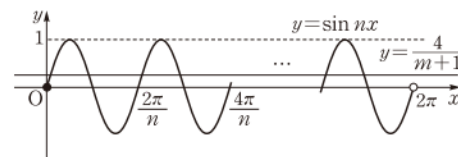


07 $m \sin nx = -\sin nx + 4$ 에서

$$(m+1) \sin nx = 4 \quad \therefore \sin nx = \frac{4}{m+1}$$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수

$y = \sin nx$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{m+1}$ 의 교점의 개수와 같다.



(i) $\frac{4}{m+1} > 1$, 즉 $0 < m < 3$ 일 때,

함수 $y = \sin nx$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{m+1}$ 가 만나지 않으므로 주어진 방정식의 실근이 존재하지 않는다.

(ii) $\frac{4}{m+1} = 1$, 즉 $m = 3$ 일 때,

함수 $y = \sin nx$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{m+1}$ 의 교점의 개수는
 n

따라서 n 이 짝수일 때만 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 짝수이다.

(iii) $0 < \frac{4}{m+1} < 1$, 즉 $m > 3$ 일 때,

함수 $y = \sin nx$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{m+1}$ 의 교점의 개수는
 $2n$

따라서 n 의 값에 관계없이 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 짝수이다.

이상에서 n 이 짝수이면 m 의 최솟값은 3, n 이 홀수이면 m 의 최솟값은 4이므로

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(9) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 32$$

답 32

반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이다.

$$f(n) = \begin{cases} 3 & (n \text{이 짝수}) \\ 4 & (n \text{이 홀수}) \end{cases}$$

$$\sin 50^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ$$

$$\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ = 1$$

II -3. 삼각함수의 활용

개념 & 핵심 기출

본책 54~56쪽

01 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 120^\circ} = 2 \cdot 4 \quad \therefore a = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

한편 $A + B + C = 180^\circ$ 이고 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로

$$B = C = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot 4 \quad \therefore b = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

따라서 $c = b = 4$ 이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$4\sqrt{3} + 4 + 4 = 8 + 4\sqrt{3} \quad \text{답 ④}$$

02 $\angle BDC = 90^\circ$ 이므로 직각삼각형 DBC에서

$$\overline{BD} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

이때 삼각형 ABD의 외접원의 지름의 길이가 13이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A} = 13, \quad \frac{12}{\sin A} = 13$$

$$\therefore \sin A = \frac{12}{13} \quad \text{답 } \frac{12}{13}$$

03 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 40^\circ} = 2 \quad \therefore \overline{AB} = 2 \sin 40^\circ$$

$\angle CBD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ 이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin 50^\circ} = 2 \quad \therefore \overline{CD} = 2 \sin 50^\circ = 2 \cos 40^\circ$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4 \sin^2 40^\circ + 4 \cos^2 40^\circ = 4 \quad \text{답 4}$$

04 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= \frac{a}{2 \cdot 4\sqrt{2}} + \frac{b}{2 \cdot 4\sqrt{2}} + \frac{c}{2 \cdot 4\sqrt{2}} \\ &= \frac{a+b+c}{8\sqrt{2}} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a+b+c}{8\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$ 이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$a+b+c = 8\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 16 + 8\sqrt{2} \quad \text{답 ③}$$

05 삼각형 ABC에서 $A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \frac{A+B-C}{2} &= \cos \frac{180^\circ - 2C}{2} \\ &= \cos(90^\circ - C) = \sin C \end{aligned}$$

$$\cos \frac{A-B+C}{2} = \cos \frac{180^\circ - 2B}{2}$$

$$= \cos (90^\circ - B) = \sin B$$

즉 주어진 등식은

$$c \sin C = b \sin B$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인 법칙에 의하여

$$c \cdot \frac{c}{2R} = b \cdot \frac{b}{2R} \quad \therefore c^2 = b^2$$

이때 $b > 0, c > 0$ 이므로

$$b = c$$

따라서 삼각형 ABC는 $b = c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ②

06 $(a+b) : (b+c) : (c+a) = 6 : 9 : 7$ 에서
 $a+b=6k, b+c=9k, c+a=7k (k>0)$ 로 놓으면

$$(a+b) + (b+c) + (c+a) = 22k$$

$$\therefore a+b+c=11k$$

$$\therefore a=2k, b=4k, c=5k$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 2k : 4k : 5k$$

$$= 2 : 4 : 5$$

답 ③

07 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 21$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{21}$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin A} = \frac{5}{\sin C} = \frac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{7}$$

$$\frac{4}{\sin A} = 2\sqrt{7} \text{에서} \quad \sin A = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\frac{5}{\sin C} = 2\sqrt{7} \text{에서} \quad \sin C = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

$$\therefore \sin A + \sin C = \frac{9\sqrt{7}}{14}$$

답 ④

08 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 19$$

$\angle APC = 180^\circ - B = 60^\circ$ 이므로 $\overline{AP} = x, \overline{CP} = y$ 라 하면

삼각형 ACP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos 60^\circ$$

$$19 = x^2 + y^2 - xy, \quad (x+y)^2 - 3xy = 19$$

$$8^2 - 3xy = 19 \quad \therefore xy = 15$$

$$\therefore \overline{AP} \cdot \overline{CP} = 15$$

답 15

09 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{4}{x} \cdot \cos 120^\circ$$

$$= x^2 + \frac{16}{x^2} + 4$$

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

$x^2 = \frac{16}{x^2}$ 에서 $x^4 = 16$ 이므로

로

$$x^2 = 4 \quad (\because x^2 > 0)$$

$$\therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

이때 $x^2 > 0, \frac{16}{x^2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{16}{x^2}} = 2 \cdot 4 = 8$$

(단, 등호는 $x=2$ 일 때 성립)

즉 $\overline{BC}^2 \geq 8 + 4 = 12$ 이므로

$$\overline{BC} \geq \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

따라서 $\overline{BC}$ 의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

답 ⑤

10 정사각형의 한 변의 길이가 3이므로

$$\overline{BE} = \overline{DF} = 1, \quad \overline{EC} = \overline{FC} = 2$$

$$\therefore \overline{AE} = \overline{AF} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\overline{EF} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 AEF에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3}{5}$$

답 ④

11 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} = 1$ 에서

$$a(c+a) + b(b+c) = (b+c)(c+a)$$

$$ac + a^2 + b^2 + bc = bc + ab + c^2 + ac$$

$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = ab$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$$

답 ④

12 $\angle BOA = \theta$ 라 하면 삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 4 \cdot 7} = -\frac{2}{7}$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \quad \left(\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$$

이때 $\cos \theta = \frac{a}{7}, \sin \theta = \frac{b}{7}$ 이므로

$$a = -2, \quad b = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore ab = -6\sqrt{5}$$

답 ②

다른 풀이 $\angle OAB = \theta$ 라 하면 삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{4-a}{9} \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{에서} \quad \frac{2}{3} = \frac{4-a}{9} \quad \therefore a = -2$$

$\overline{OB} = 7$ 이므로

$$(-2)^2 + b^2 = 49, \quad b^2 = 45$$

$$\therefore b = 3\sqrt{5} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = -6\sqrt{5}$$

13 $\sin \alpha : \sin \beta = 1 : 2$ 에서

$$\sin \beta = 2 \sin \alpha$$

삼각형 ABD의 넓이를 S_1 , 삼각형 ACD의 넓이를 S_2 라 하면

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \overline{AD} \cdot \sin \beta}{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \overline{AD} \cdot \sin \alpha} = \frac{4 \sin \beta}{5 \sin \alpha}$$

$$= \frac{4 \cdot 2 \sin \alpha}{5 \sin \alpha} = \frac{8}{5}$$

답 8/5

다른 풀이 $\angle ADB = \theta$ 라 하면 $\angle ADC = \pi - \theta$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{10}{\sin \theta} = \frac{\overline{BD}}{\sin \alpha}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{10}{\overline{BD}} \sin \alpha \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{8}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{\overline{CD}}{\sin \beta}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{8}{\overline{CD}} \sin \beta \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②에서 $\frac{10}{\overline{BD}} \sin \alpha = \frac{8}{\overline{CD}} \sin \beta$

이때 $\sin \alpha : \sin \beta = 1 : 2$ 에서 $\sin \beta = 2 \sin \alpha$ 이므로

$$\frac{10}{\overline{BD}} \sin \alpha = \frac{8}{\overline{CD}} \cdot 2 \sin \alpha \quad \therefore \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{8}{5}$$

14 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

사각형 ABCD에서

$$\angle D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

이므로 삼각형 ACD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

답 ②

15 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} n(n+3) \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} n(n+3)$$

이므로 사각형의 넓이가 자연수가 되려면 n 또는 $n+3$ 이 4의 배수가 되어야 한다.

(i) n 이 4의 배수일 때,

n 이 두 자리 자연수이므로 n 의 값은

$$12, 16, 20, \dots, 96$$

(ii) $n+3$ 이 4의 배수일 때,

n 이 두 자리 자연수이므로 $n+3$ 의 값은

$$16, 20, 24, \dots, 100$$

따라서 n 의 값은 13, 17, 21, ..., 97

(i), (ii)에서 $M=97$, $m=12$ 이므로

$$M+m=109$$

답 109

높이가 같은 두 삼각형의 밑변의 길이의 비는 넓이의 비와 같다.

사각형 ABCD는 원에 내접하므로
 $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$a=7$ 이면 $b=8$
 $a=8$ 이면 $b=7$

$n+3=12$ 이면 $n=9$ 이므로 n 이 두 자리 자연수가 아니다.

16 $a=3$, $b=7$, $c=8$ 이라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = -\frac{1}{7}$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$$

$$= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = 6\sqrt{3}$$

답 ③

다른 풀이 헤론의 공식에서 $s = \frac{3+7+8}{2} = 9$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\sqrt{9(9-3)(9-7)(9-8)} = 6\sqrt{3}$$

17 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면 외접원의 반지름의 길이가 R 이므로

$$S = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{4R} = \frac{70}{R}$$

또 내접원의 반지름의 길이가 r 이므로

$$S = \frac{1}{2} r(5+7+8) = 10r$$

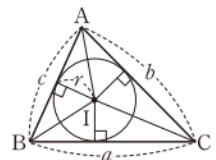
따라서 $\frac{70}{R} = 10r$ 이므로 $Rr=7$

답 ③

1등급 비밀노트 >>>

삼각형 ABC의 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB \\ &= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr \\ &= \frac{1}{2} r(a+b+c) \end{aligned}$$



18 헤론의 공식에서

$$s = \frac{9+a+b}{2} = \frac{9+15}{2} = 12$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\sqrt{12(12-9)(12-a)(12-b)} = 12\sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(12-a)(12-b) = 20$$

$a+b=15$ 에서 $b=15-a$ 이므로

$$(12-a)(a-3) = 20, \quad a^2 - 15a + 56 = 0$$

$$(a-7)(a-8) = 0 \quad \therefore a=7 \text{ 또는 } a=8$$

이때 $a < b$ 이므로 $a=7$

답 ④

1등급을 위한 고난도 문제

본책 57~59쪽

01 삼각형 AQB에서

$$\angle AQB = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AQ}}{\sin 45^\circ} = \frac{30}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore \overline{AQ} = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{6} \text{ (m)}$$

삼각형 APQ에서 $\angle PQA = 90^\circ$ 이므로

$$\overline{PQ} = \overline{AQ} \tan 30^\circ$$

$$= 10\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{2} \text{ (m)}$$

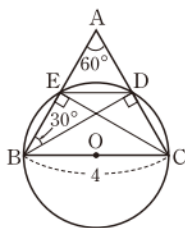
답 ③

02 $\angle BEC = 90^\circ$, $\angle CDB = 90^\circ$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 두 점 D, E는 $\overline{BC}$ 를 지름으로 하는 원 O 위의 점이다.

이때 $\angle DBE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ 이고 삼각형 DBE의 외접원 O의 지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DE}}{\sin 30^\circ} = 4 \quad \therefore \overline{DE} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

답 2



채점 기준	비율
① 네 점 B, C, D, E가 한 원 위에 있음을 알 수 있다.	40%
② DE의 길이를 구할 수 있다.	60%

03 오른쪽 그림과 같이 원 O 위에 점 P를 잡고 $\widehat{AB}$ 에 대한 중심각의 크기를 θ 라 하면 $\widehat{APB}$ 에 대한 중심각의 크기는 $2\pi - \theta$ 이므로

$$l_1 = 5\theta, l_2 = 5(2\pi - \theta)$$

이때 $l_1 : l_2 = 1 : (\pi - 1)$ 이므로

$$5\theta : 5(2\pi - \theta) = 1 : (\pi - 1)$$

$$\theta : (2\pi - \theta) = 1 : (\pi - 1)$$

$$2\pi - \theta = \theta(\pi - 1), \quad 2\pi = \pi\theta$$

$$\therefore \theta = 2$$

따라서 $\angle APB = \frac{\theta}{2} = 1$ 이고 삼각형 APB의 외접원 O의 반지름의 길이가 5이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 1} = 2 \cdot 5 \quad \therefore \overline{AB} = 10 \sin 1$$

답 ②

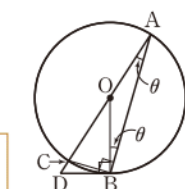
04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OB}$, $\overline{BC}$ 를 긋고 $\angle OAB = \theta$ 라 하면

$$\angle BCD = \frac{\pi}{2} + \theta, \quad \angle CBD = \theta$$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DC}}{\sin \theta} = \frac{\overline{DB}}{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}$$

$$\frac{\overline{DC}}{\sin \theta} = \frac{\overline{DB}}{\cos \theta} \quad \therefore \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$



$$\begin{aligned} \angle OPB &= \angle OBP \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\pi - \frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 배이다.

$$\begin{aligned} \angle CBD &= \frac{\pi}{2} - \angle OBC \\ &= \angle ABO \\ &= \theta \end{aligned}$$

이때 $\sin \theta = \frac{2}{7}$ 이므로

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}\right)^2 &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^2}{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{4}{45} \end{aligned}$$

따라서 $p = 45$, $q = 4$ 이므로

$$p + q = 49$$

답 49

다른 풀이 $\angle OAB = \theta$ 라 하면 삼각형 ADB와 삼각형 BDC에서 $\angle DAB = \angle DBC = \theta$, $\angle D$ 는 공통이므로 $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DB} : \overline{DC}$ 이므로

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

이때 삼각형 ABC에서 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \tan \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}\right)^2 &= \tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^2}{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{4}{45} \end{aligned}$$

따라서 $p = 45$, $q = 4$ 이므로

$$p + q = 49$$

05 부채꼴 POB의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$3\theta = \pi \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

즉 삼각형 POB는 정삼각형이므로 $\overline{PB} = 3$

따라서 직각삼각형 PAB에서

$$\overline{PA} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

이때 $\angle POA = \frac{2}{3}\pi$ 이므로 삼각형 POA의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 2R, \quad 2R = 6 \quad \therefore R = 3$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

답 ⑤

06 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{8R^3 + 8R^3 + 8R^3} = 64$$

$$8R^3 = 64, \quad R^3 = 8 \quad \therefore R = 2$$

그런데 삼각형에서 변의 길이는 외접원의 지름의 길이보다 길 수 없으므로

$$a \leq 2R = 4$$

따라서 a 의 최댓값은 4이다.

답 ④

07 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= \cos^2 B + (\sin C + \cos A)(\sin C - \cos A) = 0 \\ \cos^2 B + \sin^2 C - \cos^2 A &= 0 \\ 1 - \sin^2 B + \sin^2 C - (1 - \sin^2 A) &= 0 \\ \therefore \sin^2 A + \sin^2 C &= \sin^2 B\end{aligned}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \\ \therefore a^2 + c^2 &= b^2\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 ④

08 오른쪽 그림의 삼각형 ACD

에서 사인법칙에 의하여

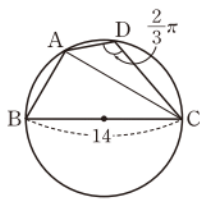
$$\begin{aligned}\frac{AC}{\sin \frac{2}{3}\pi} &= 14 \\ \therefore AC &= 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 7\sqrt{3}\end{aligned}$$

$AD=x$ 라 하면 $CD=2x$ 이므로 삼각형 ACD에서 코사인 법칙에 의하여

$$\begin{aligned}(7\sqrt{3})^2 &= (2x)^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \cos \frac{2}{3}\pi \\ 7x^2 &= 147 \quad \therefore x^2 = 21 \\ \therefore AD^2 &= 21\end{aligned}$$

→ ②

답 21



채점 기준	비율
① AC의 길이를 구할 수 있다.	40%
② AD ² 의 값을 구할 수 있다.	60%

09 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}AC^2 &= 20^2 + 32^2 - 2 \cdot 20 \cdot 32 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 784\end{aligned}$$

$\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 이므로 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}AC^2 &= 12^2 + CD^2 - 2 \cdot 12 \cdot CD \cdot \cos 120^\circ \\ &= CD^2 + 12CD + 144\end{aligned}$$

①, ②에서 $CD^2 + 12CD + 144 = 784$

$$\begin{aligned}CD^2 + 12CD - 640 &= 0 \\ (CD + 32)(CD - 20) &= 0 \\ \therefore CD &= 20 \quad (\because CD > 0)\end{aligned}$$

따라서 산책로의 총길이는

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 20 + 32 + 20 + 12 = 84 \text{ (m)}$$

이므로 구하는 시간은

$$\frac{84}{1.5} = 56 \text{ (초)}$$

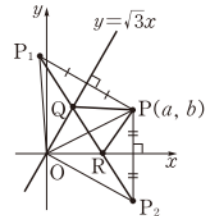
답 56초

사각형 ABCD가 원에 내접하므로
 $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

r_2, r_3 은 이차방정식 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근이다.

채점 기준	비율
① CD의 길이에 대한 방정식을 세울 수 있다.	60%
② CD의 길이를 구할 수 있다.	20%
③ 산책로를 한 바퀴 돌아 제자리로 돌아오는 데 걸리는 시간을 구할 수 있다.	20%

10 오른쪽 그림과 같이 점 P를 직선 $y=\sqrt{3}x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 P_1 , x 축에 대하여 대칭이동한 점을 P_2 라 하면



$$\begin{aligned}\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} &= \overline{P_1Q} + \overline{QR} + \overline{RP_2} \\ &\geq \overline{P_1P_2}\end{aligned}$$

이때 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값이 12이므로

$$\overline{P_1P_2} = 12$$

한편 $\overline{OP_1} = \overline{OP} = \overline{OP_2}$ 이므로

$$\overline{OP_1} = \overline{OP_2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\tan(\angle QOR) = \sqrt{3}$ 에서 $\angle QOR = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\angle P_1OP_2 = 2\angle QOR = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 삼각형 P_1OP_2 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}12^2 &= (\sqrt{a^2 + b^2})^2 + (\sqrt{a^2 + b^2})^2 \\ &\quad - 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \frac{2}{3}\pi \\ 3(a^2 + b^2) &= 144 \quad \therefore a^2 + b^2 = 48\end{aligned}$$

답 48

11 세 원 O_1, O_2, O_3 의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3 ($r_1 < r_2 < r_3$)이라 하면 삼각형 $O_1O_2O_3$ 의 둘레의 길이가 12이므로

$$\begin{aligned}2(r_1 + r_2 + r_3) &= 12 \\ \therefore r_1 + r_2 + r_3 &= 6\end{aligned}$$

또 삼각형 $O_1O_2O_3$ 의 넓이가 6이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(r_1 + r_2)(r_1 + r_3) &= 6 \\ r_1^2 + r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 &= 12 \\ r_1(r_1 + r_2 + r_3) + r_2r_3 &= 12 \\ \therefore 6r_1 + r_2r_3 &= 12 \quad (\because \text{㉠})\end{aligned}$$

한편 삼각형 $O_1O_2O_3$ 이 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}(r_2 + r_3)^2 &= (r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_3)^2 \\ r_1^2 + r_1r_2 + r_1r_3 - r_2r_3 &= 0 \\ r_1(r_1 + r_2 + r_3) - r_2r_3 &= 0 \\ \therefore 6r_1 = r_2r_3 \quad (\because \text{㉡})\end{aligned}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$r_1 = 1, r_2r_3 = 6$$

$r_1 = 1$ 을 ㉠에 대입하면

$$r_2 + r_3 = 5$$

$$\therefore r_2 = 2, r_3 = 3 \quad (\because r_3 > r_2)$$

삼각형 $O_1O_2O_3$ 에서

$$\cos(\angle O_1O_2O_3) = \frac{r_1 + r_2}{r_2 + r_3} = \frac{3}{5}$$

이므로 삼각형 O_1O_2T 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{O_1T}^2 &= (1+2)^2 + 2^2 - 2 \cdot (1+2) \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{29}{5}\end{aligned}$$

답 ①

12 $\overline{BD} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BI} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,

$\overline{DI} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = 3$ 이므로 삼각형 BDI 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle BDI) = \frac{(2\sqrt{2})^2 + 3^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ③

13 정오각형의 한 내각의 크기는

$$\frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ$$

이므로 오른쪽 그림에서

$$\angle BAC = \angle DAE = 36^\circ$$

$$\therefore \angle CAD$$

$$= 108^\circ - (36^\circ + 36^\circ) = 36^\circ$$

$\overline{AC} = \overline{AD} = x$ 라 하면 삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 36^\circ = \frac{x^2 + 1^2 - 1^2}{2 \cdot x \cdot 1} = \frac{x}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

또 삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 36^\circ = \frac{x^2 + x^2 - 1^2}{2 \cdot x \cdot x} = \frac{2x^2 - 1}{2x^2} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{x}{2} = \frac{2x^2 - 1}{2x^2}$ 이므로

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0, \quad (x-1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 0)$$

이때 $x > 1$ 이므로 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = 5$ 이므로

$$10ab = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = 25$$

답 25

14 삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{5^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{19}{30}$$

$\overline{BD} = x$ 라 하면 삼각형 ABD 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{5^2 + x^2 - 5^2}{2 \cdot 5 \cdot x} = \frac{x}{10}$$

즉 $\frac{x}{10} = \frac{19}{30}$ 이므로

$$x = \frac{19}{3}$$

따라서 $\overline{BD} = \frac{19}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{DC} &= \overline{BC} - \overline{BD} \\ &= 9 - \frac{19}{3} = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{8}{3}$

$$\overline{DI} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{EI}^2}$$

변의 길이가 짧을수록 대각의 크기가 작다.

정 n 각형의 한 내각의 크기

$$\rightarrow \frac{180^\circ \times (n-2)}{n}$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

이때 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

15 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여 주어진 식은

$$\frac{6a}{2R} = \frac{2\sqrt{3}b}{2R} = \frac{3c}{2R}$$

$$\therefore a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2}$$

... ①

이때 $a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2} = k$ ($k > 0$)로 놓으면

$$a = k, \quad b = \sqrt{3}k, \quad c = 2k$$

따라서 A 의 크기가 가장 작으므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(\sqrt{3}k)^2 + (2k)^2 - k^2}{2 \cdot \sqrt{3}k \cdot 2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

... ②

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 30^\circ$$

... ③

답 30°

채점 기준	비율
① a, b, c 의 관계식을 구할 수 있다.	30%
② $\cos A$ 의 값을 구할 수 있다.	60%
③ 가장 작은 내각의 크기를 구할 수 있다.	10%

16 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로 $\overline{AD} = x$ 라 하면

$$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot x \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot x \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ \quad \dots\dots ①$$

$$48\sqrt{3} = 4x + 3x, \quad 7x = 48\sqrt{3}$$

$$\therefore x = \frac{48\sqrt{3}}{7}$$

... ②

따라서 $\overline{AD} = \frac{48\sqrt{3}}{7}$ 이므로 $p=7, q=48$

$$\therefore p+q=55$$

... ③

답 55

채점 기준	비율
① 삼각형의 넓이를 이용하여 식을 세울 수 있다.	40%
② x 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

17 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

이므로 삼각형 APQ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$\overline{AP} = a$, $\overline{AQ} = b$ 라 하면 삼각형 APQ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \quad \therefore ab = 24$$

삼각형 APQ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ \\ &= a^2 + b^2 - 24\end{aligned}$$

이때 $a^2 > 0$, $b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= a^2 + b^2 - 24 \\ &\geq 2\sqrt{a^2b^2} - 24 = 2ab - 24 \\ &= 24 \quad (\text{단, 등호는 } a=b=2\sqrt{6} \text{ 일 때 성립})\end{aligned}$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

답 ⑤

18 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$\angle AOB : \angle BOC : \angle COD : \angle DOA = 1 : 2 : 4 : 5$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{1}{12} \times 360^\circ = 30^\circ,$$

$$\angle BOC = \frac{2}{12} \times 360^\circ = 60^\circ,$$

$$\angle COD = \frac{4}{12} \times 360^\circ = 120^\circ,$$

$$\angle DOA = \frac{5}{12} \times 360^\circ = 150^\circ$$

사각형 ABCD의 넓이는 네 삼각형 OAB, OBC, OCD, ODA의 넓이의 합과 같으므로

$$\begin{aligned}\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD + \triangle ODA \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 150^\circ \\ &= 4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4 \\ &= 8(1 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

답 ④

19 $a=8, b=13, c=15$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{13^2 + 15^2 - 8^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{11}{13} \\ \therefore \sin A &= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{13}\end{aligned}$$

→ ①

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 15 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{13} = 30\sqrt{3}$$

→ ②

삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}r(8+13+15) = 18r$$

즉 $30\sqrt{3} = 18r$ 이므로

$$r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

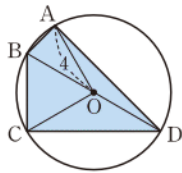
따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}\pi$$

→ ③

답 $\frac{25}{3}\pi$

채점 기준	비율
① $\sin A$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② 삼각형 ABC의 넓이를 구할 수 있다.	30%
③ 삼각형 ABC에 내접하는 원의 넓이를 구할 수 있다.	30%



외접원의 반지름의 길이가 R 인 삼각형 ABC의 넓이 S 는

$$S = \frac{abc}{4R}$$

사각형 APDQ에서 $\angle APD + \angle AQD = 180^\circ$ 이므로 사각형 APDQ는 원에 내접한다.

다른 풀이 헤론의 공식에서 $s = \frac{8+13+15}{2} = 18$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\sqrt{18(18-8)(18-13)(18-15)} = 30\sqrt{3}$$

한편 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}r(8+13+15) = 18r$$

$$\text{즉 } 30\sqrt{3} = 18r \text{ 이므로 } r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{따라서 구하는 원의 넓이는 } \pi \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}\pi$$

20 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 12이므로

$$a+b+c=12$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \text{ 에서}$$

$$144 = 50 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca=47$$

한편 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$R = \frac{5}{2}$$

이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$$6 = \frac{abc}{4 \cdot \frac{5}{2}} \quad \therefore abc = 60$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc$$

$$= 12(50-47) + 3 \cdot 60$$

$$= 216$$

답 ④

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 60쪽

01 오른쪽 그림과 같이 네 점 A, P, D, Q는 지름이 $\overline{AD}$ 인 원 위의 점이다.

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{DH} = \overline{HC} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3$$

이므로

$$\overline{DQ} = 3, \overline{AQ} = 8 - 3 = 5$$

따라서 직각삼각형 ADQ에서

$$\overline{AD} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

이므로 삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여

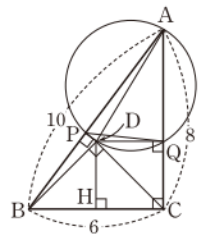
$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle PAQ)} = \sqrt{34} \quad \therefore \overline{PQ} = \sqrt{34} \sin(\angle PAQ)$$

이때 직각삼각형 ABC에서 $\sin(\angle PAQ) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{34} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3\sqrt{34}}{5}$$

$$\therefore 25\overline{PQ}^2 = 25 \cdot \frac{306}{25} = 306$$

답 306



02 정사면체 OABC의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 최단 거리는 선분 MA'의 길이와 같다.

삼각형 A'M에서 코사인법칙에 의하여

$$d^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 13$$

$$\therefore 10d^2 = 130$$

답 130

03 $B = 180^\circ - D$ 이므로

$$\cos B = \cos(180^\circ - D)$$

$$= -\cos D = -\frac{1}{3}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 48$$

$$\therefore \overline{AC} = 4\sqrt{3}$$

한편 원 O의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin D} = 2R$$

이때

$$\sin D = \sqrt{1 - \cos^2 D}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{이므로 } 4\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

따라서 원 O의 넓이는

$$\pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{27}{2}\pi$$

답 ②

04 $\overline{PB} = 340 \cdot 5$ (m), $\overline{PC} = 340 \cdot 7$ (m),

$\overline{BC} = 1020 = 340 \cdot 3$ (m), $\overline{CD} = 680 = 340 \cdot 2$ (m)이므로

$\overline{PD} = 340x$ (m)라 하고 $340 = k$ 로 놓으면

$$\overline{PB} = 5k \text{ m}, \overline{PC} = 7k \text{ m}, \overline{BC} = 3k \text{ m},$$

$$\overline{CD} = 2k \text{ m}, \overline{PD} = kx \text{ m}$$

오른쪽 그림에서

$\angle PBC = \theta$ 라 하면 삼각형 PCB에서 코사인법칙에 의하여

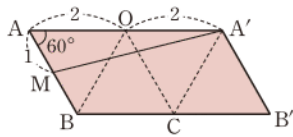
$$\cos \theta = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 3k}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

따라서 삼각형 PDB에서 코사인법칙에 의하여

$$(kx)^2 = (5k)^2 + (5k)^2 - 2 \cdot 5k \cdot 5k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 k^2 = 75k^2, \quad x^2 = 75$$



정사면체에서 두 점을 연결하는 최단 거리는 정사면체의 전개도에서 두 점을 연결한 선분의 길이를 이용하여 구할 수 있다.

- (i) $a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$
 (ii) $a^2 - 1 = (a+1)(a-1) > 0$ 에서
 $a < -1$ 또는 $a > 1$
 (iii) $2a + 1 > 0$ 에서
 $a > -\frac{1}{2}$
 이상에서 $a > 1$

$$\therefore x = 5\sqrt{3} \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{PD} = 340 \cdot 5\sqrt{3} \text{ (m)}$$

즉 D지점에서는 폭죽이 터지고 $5\sqrt{3}$ 초 후에 처음으로 소리를 들을 수 있다. **답 ③**

05 세 변의 길이가 $a^2 + a + 1$, $a^2 - 1$, $2a + 1$ 이므로

$$a^2 + a + 1 > 0, a^2 - 1 > 0, 2a + 1 > 0$$

$$\therefore a > 1$$

$a > 1$ 일 때, $(a^2 + a + 1) - (a^2 - 1) = a + 2 > 0$ 이므로

$$a^2 + a + 1 > a^2 - 1$$

또 $(a^2 + a + 1) - (2a + 1) = a^2 - a > 0$ 이므로

$$a^2 + a + 1 > 2a + 1$$

따라서 가장 긴 변의 길이가 $a^2 + a + 1$ 이므로 가장 큰 내각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{(a^2 - 1)^2 + (2a + 1)^2 - (a^2 + a + 1)^2}{2(a^2 - 1)(2a + 1)}$$

$$= \frac{-2a^3 - a^2 + 2a + 1}{2(2a^3 + a^2 - 2a - 1)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

이때 $0 < \theta < \pi$ 이므로

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

답 ③

1등급 비밀노트 >>>

두 실수 x, y 에 대하여

$$x - y > 0 \iff x > y,$$

$$x - y = 0 \iff x = y,$$

$$x - y < 0 \iff x < y$$

06 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BP}$ 를

그으면

$$\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle PBC$$

이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \overline{PQ} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{PR}$$

$$\therefore 5\overline{PQ} + 2\overline{PR} = 5$$

이때 $\overline{PQ} > 0$, $\overline{PR} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5\overline{PQ} + 2\overline{PR} \geq 2\sqrt{5\overline{PQ} \cdot 2\overline{PR}}$$

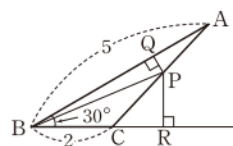
$$5 \geq 2\sqrt{10\overline{PQ} \cdot \overline{PR}}, \quad 25 \geq 40\overline{PQ} \cdot \overline{PR}$$

$$\therefore \overline{PQ} \cdot \overline{PR} \leq \frac{5}{8}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \overline{PQ} = \frac{1}{2}, \overline{PR} = \frac{5}{4} \text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\overline{PQ} \cdot \overline{PR}$ 의 최댓값은 $\frac{5}{8}$ 이다.

답 ②



① 만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 61~64쪽

01 전략 반지름의 길이가 r , 호의 길이가 l 인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}rl$ 임을 이용한다.

풀이 원 O 의 넓이가 36π 이므로 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\pi r^2 = 36\pi \quad \therefore r = 6 \quad (\because r > 0)$$

부채꼴 (가)의 호의 길이는 $6 \cdot \frac{3}{2} = 9$ 이므로 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$$

따라서 부채꼴 (나)의 넓이는

$$36\pi - 27$$

답 ③

02 전략 삼각함수의 값을 선분의 길이의 비로 나타낸다.

풀이 ㄱ. 삼각형 OAB 에서 $\angle OAB = 90^\circ$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \quad \therefore \overline{AB} = \tan \theta$$

ㄴ. 삼각형 OAB 에서 $\cos \theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

$$\therefore \overline{OB} = \frac{1}{\cos \theta}$$

ㄷ. 삼각형 ABC 에서 $\angle ABC = \theta$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

이때 ㄱ에서 $\overline{AB} = \tan \theta$ 이므로

$$\overline{AC} = \overline{AB} \tan \theta = \tan^2 \theta$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

03 전략 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 임을 이용한다.

풀이 θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$\sin \theta - 3 \cos \theta = 3$ 에서

$$\sin \theta = 3 \cos \theta + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta = 9 \cos^2 \theta + 18 \cos \theta + 9$$

$$1 - \cos^2 \theta = 9 \cos^2 \theta + 18 \cos \theta + 9$$

$$5 \cos^2 \theta + 18 \cos \theta + 4 = 0$$

$$(5 \cos \theta + 4)(\cos \theta + 1) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{4}{5} \quad \left(\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \right)$$

따라서 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ 를 ㉠에 대입하면

$$\sin \theta = 3 \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) + 3 = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

답 ④

$$\sin \frac{\pi}{4} < \sin 1 < \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \frac{2}{3}\pi < \sin 2 < \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \pi < \sin 3 < \sin \frac{3}{4}\pi$$

원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 수직이다.

$\angle AOB + \angle ACB = 90^\circ$,
 $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$
이므로
 $\angle ABC = \angle AOB = \theta$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서
 $-1 < \cos \theta < 0$

04 전략 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값도 증가하고, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값은 감소함을 이용한다.

풀이 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값도 증가한다.

$$\text{이때 } \frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} \text{ 이므로 } \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값은 감소한다.

$$\text{이때 } \frac{\pi}{2} < 2 < \frac{2}{3}\pi \text{ 이므로 } \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin 2 < 1$$

$$\text{또 } \frac{3}{4}\pi < 3 < \pi \text{ 이므로 } 0 < \sin 3 < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

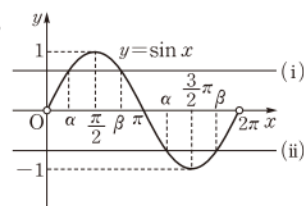
$$\text{한편 } \pi < 4 < 2\pi \text{ 이므로 } \sin 4 < 0$$

$$\therefore \sin 4 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2$$

답 ④

05 전략 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용한다.

풀이 ㄱ.



(i) $0 < x < \pi$ 일 때,

위의 그림과 같이 함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 직선

$x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 $\sin \alpha = \sin \beta$ 이면

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha + \beta = \pi$$

(ii) $\pi < x < 2\pi$ 일 때,

위의 그림과 같이 함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 직선

$x = \frac{3\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 $\sin \alpha = \sin \beta$ 이면

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \alpha + \beta = 3\pi$$

(i), (ii)에서 $\alpha + \beta = \pi$ 또는 $\alpha + \beta = 3\pi$

ㄴ. 오른쪽 그림과 같이

$0 < x < 2\pi$ 일 때 함수

$y = \cos x$ 의 그래프는

직선 $x = \pi$ 에 대하여

대칭이므로

$\cos \alpha = \cos \beta$ 이면

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi \quad \therefore \alpha + \beta = 2\pi$$

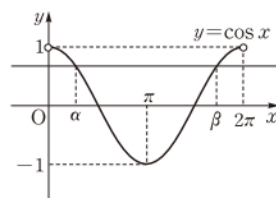
ㄷ. [반례] $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}\pi$ 이면 $\tan \frac{\pi}{3} = \tan \frac{4}{3}\pi = \sqrt{3}$ 이

지만

$$\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②



06 전략 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 π 임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\overline{BD}=2r$ 이면 $A=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos A = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

ㄴ. $A=\pi-C$, $B=\pi-D$ 이므로

$$\begin{aligned}\sin A \sin B &= \sin(\pi-C) \sin(\pi-D) \\ &= \sin C \sin D\end{aligned}$$

ㄷ. $C=\pi-A$, $D=\pi-B$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C + \cos D \\ &= \cos A + \cos B + \cos(\pi-A) + \cos(\pi-B) \\ &= \cos A + \cos B - \cos A - \cos B = 0\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

07 전략 두 점 B, C'을 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 이용하여 점 C'의 x좌표와 y좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 점 C'의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned}x &= 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= 2 + \sin \theta\end{aligned}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

이때 $f(\theta)$ 는 선분 OC'의 길이이므로

$$\begin{aligned}\{f(\theta)\}^2 &= \overline{OC'}^2 = x^2 + y^2 \\ &= (2 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta \\ &= 4 + 4 \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &= 4 \sin \theta + 5\end{aligned}$$

따라서 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y = \{f(\theta)\}^2$, 즉

$y = 4 \sin \theta + 5$ 의 그래프의 개형은 ②와 같다.

답 ②

08 전략 주어진 함수를 한 종류의 삼각함수로 변형한 후 삼각함수를 t 로 치환한다.

풀이 $y = \left\{1 + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right\} \{1 + \sin^2(\pi - x)\}$

$$\begin{aligned}&= (1 + 2 \cos^2 x)(1 + \sin^2 x) \\ &= (1 + 2 \cos^2 x)(2 - \cos^2 x) \\ &= -2 \cos^4 x + 3 \cos^2 x + 2\end{aligned}$$

$\cos^2 x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -2t^2 + 3t + 2$$

$$= -2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$$

따라서 y 는 $t = \frac{3}{4}$ 일 때 최댓값 $\frac{25}{8}$ 를 가지므로 주어진 함수의 최댓값은 $\frac{25}{8}$ 이다.

답 ④

09 전략 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 실근은 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x좌표와 같음을 이용한다.

반원에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

풀이 ㄱ. 오른쪽 그림과 같이

$0 \leq x \leq \pi$ 일 때 함수

$y = \sin x$ 의 그래프는 직선

$x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \pi$$

ㄴ. ㄱ에서 $\alpha + \beta = \pi$ 이므로 $\beta = \pi - \alpha$

$$\begin{aligned}\therefore \cos \alpha + \cos \beta &= \cos \alpha + \cos(\pi - \alpha) \\ &= \cos \alpha - \cos \alpha \\ &= 0\end{aligned}$$

ㄷ. ㄱ에서 $\alpha + \beta = \pi$ 이므로 $\beta = \pi - \alpha$

$$\begin{aligned}\therefore \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta &= \sin^2 \alpha + \cos^2(\pi - \alpha) \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= 1\end{aligned}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

10 전략 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 성립할 조건 $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$

풀이 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차방정식 $x^2 - 2x \cos \theta + \sin^2 \theta = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-\cos \theta)^2 - \sin^2 \theta < 0$$

$$\cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) < 0, \quad \cos^2 \theta < \frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

오른쪽 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

답 ③

11 전략 조건 ㄱ에서 $2\theta - \frac{5}{4}\pi = t$ 로 놓고 부등식을 풀어 θ 의 값의 범위를 구한다.

풀이 조건 ㄱ에서 $2\theta - \frac{5}{4}\pi = t$ 로 놓으면 $0 \leq \theta < \pi$ 에서

$-\frac{5}{4}\pi \leq t < \frac{3}{4}\pi$ 이고 주어진 부등식은

$$2 \cos t < -\sqrt{2} \quad \therefore \cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

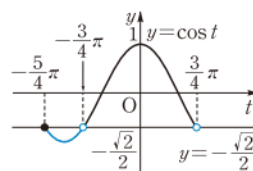
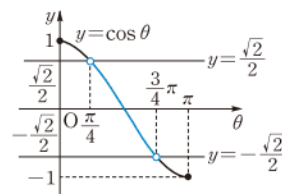
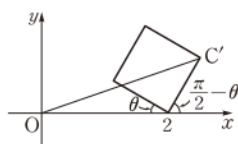
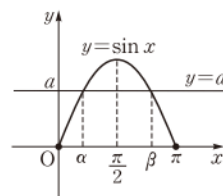
오른쪽 그림에서 t 의 값의 범위는

$$-\frac{5}{4}\pi < t < -\frac{3}{4}\pi$$

이므로

$$-\frac{5}{4}\pi < 2\theta - \frac{5}{4}\pi < -\frac{3}{4}\pi$$

$$0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \quad \therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$



조건 ④에서 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{16}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{16}{9} \quad \therefore 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 에서 $\sin \theta < \cos \theta$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

답 ②

12 전략 삼각형 ABC에서 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ 임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 삼각형의 내각의 크기는 대변의 길이가 길수록 커지므로 $a < b < c$ 에서

$$A < B < C$$

ㄴ. $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ 이므로 $a < b < c$ 이면 $\sin A < \sin B < \sin C$ 이다.

ㄷ. $0 < x < \pi$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\cos x$ 의 값은 감소한다.

이때 ㄱ에서 $A < B < C$ 이므로

$$\cos A > \cos B > \cos C$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

13 전략 $\sin A, \sin \frac{A+B+C}{2}, \sin C$ 를 각각 a, b, c 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $A+B+C=\pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \frac{A+B+C}{2} &= \sin \frac{\pi-2B}{2} \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - B \right) \\ &= \cos B \end{aligned}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$\sin A = 2 \cos B \sin C$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{a}{2R} &= 2 \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \cdot \frac{c}{2R} \\ a^2 &= c^2 + a^2 - b^2, \quad b^2 = c^2 \\ \therefore b &= c \quad (\because b > 0, c > 0) \end{aligned}$$

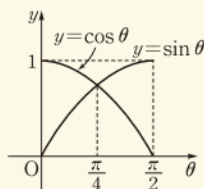
따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ②

14 전략 삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 세 변의 길이의 비를 구한다.

풀이 $\overline{AD}=3n, \overline{BE}=\overline{CF}=2n$ ($n>0$)이라 하면 삼각형 ABC의 넓이에서

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3n &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot 2n = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 2n \\ \therefore 3a &= 2b = 2c \end{aligned}$$



$A+B+C=\pi$ 이므로
 $A=\pi-(\theta_1+\theta_2)$

$\overline{AC}$ 의 길이를 a, θ_1, θ_2 에 대한 식으로 나타낸 후 삼각형 ABC의 넓이가

$$\frac{1}{2} \overline{AC} \cdot a \sin \theta_2$$

임을 이용하여 구할 수도 있다.

$\angle ABE$ 와 $\angle BED$ 는 엇각이다.

$$\therefore a : b : c = 2 : 3 : 3$$

$a=2k, b=3k, c=3k$ ($k>0$)라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(3k)^2 + (3k)^2 - (2k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 3k} = \frac{7}{9}$$

따라서 $p=9, q=7$ 이므로

$$p+q=16$$

답 ②

15 전략 사인법칙을 이용하여 $\overline{AB}$ 의 길이를 a, θ_1, θ_2 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\sin \theta_2} &= \frac{a}{\sin \{\pi - (\theta_1 + \theta_2)\}} \\ \therefore \overline{AB} &= \frac{a \sin \theta_2}{\sin (\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot a \sin \theta_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin \theta_2}{\sin (\theta_1 + \theta_2)} \cdot a \sin \theta_1 \\ &= \frac{a^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{2 \sin (\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

답 ③

16 전략 이웃하는 두 변의 길이가 a, b 이고 그 끼인각의 크기가 θ 인 평행사변형의 넓이는 $ab \sin \theta$ 임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 B를 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 직선 m 과 만나는 점을 E라 하면 사각형 ACEB는 평행사변형이므로

$$\overline{CE} = \overline{BE} = 5, \overline{ED} = 9 - 5 = 4$$

$\angle ABE = \theta$ 라 하면 $\angle BED = \theta$ 이므로 삼각형 BED에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{5^2 + 4^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = -\frac{1}{5} \\ \therefore \sin \theta &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

따라서 평행사변형 ACEB의 넓이는

$$5 \cdot 5 \cdot \sin \theta = 5 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 10\sqrt{6}$$

삼각형 BED의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$$

이므로 사각형 ACDB의 넓이는

$$10\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 14\sqrt{6}$$

답 ③

17 전략 헤론의 공식을 이용하여 삼각형의 넓이를 x 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x+2>0, 10-x>0$ 이므로

$$-2 < x < 10$$

..... ㉠

$$\begin{aligned} &\text{또 } 8+(x+2)>10-x, 8+(10-x)>x+2, \\ &(x+2)+(10-x)>8 \text{ 이므로} \\ &0 < x < 8 \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $0 < x < 8$

헤론의 공식에서

$$s = \frac{1}{2} \{8 + (x+2) + (10-x)\} = 10$$

이므로 삼각형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{10 \cdot 2 \cdot (8-x) \cdot x} = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{-x^2 + 8x} \\ &= 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{-(x-4)^2 + 16} \end{aligned}$$

따라서 $x=4$ 일 때 S 의 최댓값은

$$2\sqrt{5} \cdot 4 = 8\sqrt{5}$$

답 ⑤

18 전략 두 각 α, β 를 나타내는 두 동경이 일치하면 $\alpha - \beta = 2n\pi$ (n 은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$4\theta - \theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

→ ①

$$3\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n\pi}{3}$$

..... ㉠

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \pi < \frac{2n\pi}{3} < \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{3}{2} < n < \frac{9}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면 } \theta = \frac{4}{3}\pi$$

→ ②

$$\begin{aligned} \therefore \sin(\theta - \pi) &= \sin\left(\frac{4}{3}\pi - \pi\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

→ ③

$$\text{답 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

채점 기준	비율
① 두 각 $\theta, 4\theta$ 를 나타내는 동경이 일치할 조건을 알 수 있다.	30%
② θ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $\sin(\theta - \pi)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

19 전략 두 함수 $y = |\cos x|, y = |\tan x|$ 의 주기는 모두 π 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } y &= \left| 4 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\pi\right) \right| \\ &= \left| -4 \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2}{3}x\right) \right| \\ &= \left| 4 \cos \frac{2}{3}x \right| \end{aligned}$$

$$\text{이므로 이 함수의 주기는 } \frac{\pi}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\text{함수 } y = \left| \tan \frac{1}{4}x \right| \text{의 주기는 } \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$$

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

$$\begin{aligned} &8 + (x+2) > 10 - x \text{에서} \\ &x > 0 \\ &8 + (10 - x) > x + 2 \text{에서} \\ &x < 8 \\ &\therefore 0 < x < 8 \end{aligned}$$

$$\therefore b = 4$$

$$\therefore ab = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$$

답 6

1등급 비밀노트 >>>

절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 주기

세 함수 $y = |\sin x|, y = |\cos x|, y = |\tan x|$ 의 주기가 모두 π 이므로 세 함수 $y = |\sin kx|, y = |\cos kx|, y = |\tan kx|$ 의 주기는 모두 $\frac{\pi}{|k|}$ 이다.

20 전략 α 를 θ 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\alpha = \pi - \theta$ 이므로

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

한편 직각삼각형 OBC에서

$$\overline{OC} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}$$

이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin \alpha = \sin \theta = \frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

21 전략 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 중근을 가질 조건

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2 \sin \theta)^2 - 3 \cdot 2(1 - \cos \theta) = 0$$

$$4 \sin^2 \theta - 6 + 6 \cos \theta = 0$$

$$4(1 - \cos^2 \theta) - 6 + 6 \cos \theta = 0$$

$$2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0$$

$$(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos \theta = 1$$

→ ①

(i) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 일 때,

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{3}\pi$$

(ii) $\cos \theta = 1$ 일 때,

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{이므로 } \theta = 0$$

→ ②

(i), (ii)에서 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi + 0 = 2\pi$$

→ ③

답 2π

채점 기준	비율
① $\cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
② θ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ 모든 θ 의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

22 전략 사인법칙을 이용하여 $\overline{AC}$ 의 길이를 구한다.

풀이 삼각형 ADC에서 $\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 이므로

$$\angle DCA = \angle DAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore AC = 6 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

다른 풀이 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{AD}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore AD = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$$

따라서 $CD = AD = 2\sqrt{6}$ 이므로 삼각형 ACD에서 코사인 법칙에 의하여

$$AC^2 = (2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \cos 120^\circ$$

$$= 72$$

$$\therefore AC = 6\sqrt{2}$$

삼각형 ADC는 $AD=CD$ 인 이등변삼각형
이므로 $\angle DCA = \angle DAC$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

23 전략 코사인법칙을 이용하여 PQ 의 길이를 BQ 의 길이에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $BQ = x$ ($0 \leq x \leq 7$)라

하면

$$AP = 2x,$$

$$BP = 14 - 2x \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 삼각형 BPQ에서 코사인 법칙에 의하여

$$PQ^2 = x^2 + (14 - 2x)^2 - 2x(14 - 2x) \cos 60^\circ$$

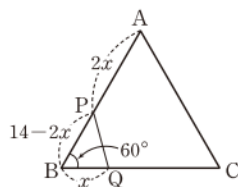
$$= 7x^2 - 70x + 196$$

$$= 7(x - 5)^2 + 21$$

$$\therefore PQ = \sqrt{7(x - 5)^2 + 21} \quad (0 \leq x \leq 7) \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $x=5$ 일 때 PQ 의 길이의 최솟값은 $\sqrt{21}$ 이다. $\cdots \textcircled{3}$

$$\text{답 } \sqrt{21}$$



채점 기준	비율
① BQ, BP의 길이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
② PQ의 길이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
③ PQ의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

24 전략 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ 인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab \sin \theta$ 임을 이용한다.

풀이 $BD = \frac{8}{3}AB$, $BE = \frac{1}{2}BC$ 이므로

$$\triangle DBE = \frac{1}{2}BD \cdot BE \cdot \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}AB \cdot \frac{1}{2}BC \cdot \sin B$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B \right)$$

$$= \frac{4}{3} \triangle ABC$$

$$\therefore k = \frac{4}{3} \quad \text{답 } \frac{4}{3}$$

25 전략 코사인법칙을 이용하여 BC 의 길이를 구한 후 삼각형의 넓이를 이용한다.

풀이 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 49$$

$$\therefore BC = 7$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot AH$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{2}AH \quad \therefore AH = \frac{15\sqrt{3}}{14}$$

$$\therefore k = 15\sqrt{3} \quad \text{답 } 15\sqrt{3}$$

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 65쪽

01

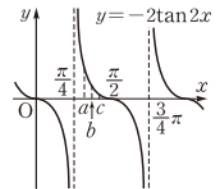
해결 단계

- 함수 $y = -2 \tan 2x$ 의 그래프를 그려 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 의 값의 부호를 알아본다.
- 함수 $y = -2 \tan 3x$ 의 그래프를 그려 조건을 만족시킬 때의 $f(a)$ 의 값의 부호를 알아본다.
- 함수 $y = -2 \tan 6x$ 의 그래프를 그린 후 반례를 찾는다.

풀이 ① $y = -2 \tan 2x$ 의 주

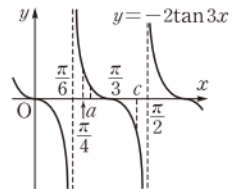
기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(a) > 0$, $f(b) > 0$, $f(c) > 0$ 이므로

$$f(a) + f(b) + f(c) > 0$$



② $y = -2 \tan 3x$ 의 주기

는 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 $f(a) > f(b) > f(c)$ 이므로 $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ 이면

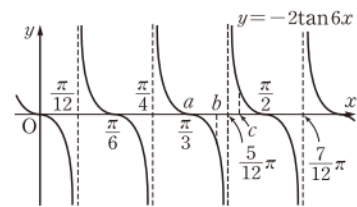


$$f(a) > 0, f(b) \geq 0, f(c) < 0 \text{ 또는}$$

$$f(a) > 0, f(b) \leq 0, f(c) < 0$$

$$\therefore f(a) > 0$$

③ $y = -2 \tan 6x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{6}$ 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



점근선의 방정식은

$$x = \frac{2n+1}{12}\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$\frac{b+c}{2} = \frac{5}{12}\pi$$

[반례] $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{7}{18}\pi$, $c = \frac{4}{9}\pi$ 이면

$$f(a)+f(b)+f(c)=0, 2b=a+c$$

이지만 $b \neq \frac{\pi}{3}$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

02

해결 단계

- 1 $g(-x)$ 를 구하여 $g(x)$ 와 같은지 확인한다.
- 2 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표를 구한다.
- 3 함수 $y=g(x)$ 의 그래프에서 함수값이 0보다 작거나 같은 x 의 값의 범위를 구한다.

풀이 ① ㄱ. $g(-x) = \frac{f(-x) + |f(-x)|}{2}$

$$= \frac{\sin(-x) + |\sin(-x)|}{2}$$

$$= \frac{-\sin x + |\sin x|}{2}$$

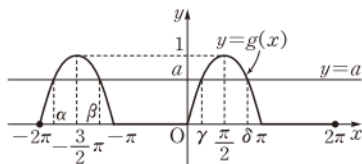
$$= \frac{-f(x) + |f(x)|}{2} \neq g(x)$$

$$|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$$

② ㄴ. $f(x) \geq 0$ 이면 $g(x) = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$

$f(x) < 0$ 이면 $g(x) = \frac{f(x) - f(x)}{2} = 0$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \sin x & (-2\pi \leq x \leq -\pi \text{ 또는 } 0 \leq x \leq \pi \\ & \text{또는 } x=2\pi) \\ 0 & (-\pi < x < 0 \text{ 또는 } \pi < x < 2\pi) \end{cases}$$



방정식 $g(x)=a$ 의 실근은 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 위의 그림에서 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 이다. 이때

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{3}{2}\pi, \quad \frac{\gamma+\delta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

이므로 방정식 $g(x)=a$ 의 모든 실근의 합은

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = -3\pi + \pi = -2\pi$$

- ③ ㄷ. ㄴ의 함수 $y=g(x)$ 의 그래프에서 부등식 $g(x) \leq 0$ 의 해는

$$x = -2\pi \text{ 또는 } -\pi \leq x \leq 0 \text{ 또는 } \pi \leq x \leq 2\pi$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

03

해결 단계

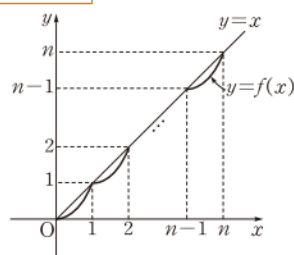
- 1 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그린다.
- 2 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표를 구한 후 조건을 만족시키는 l 의 값의 범위를 n 에 대한 부등식으로 나타낸다.
- 3 $n=3k, 3k+1, 3k+2$ 일 때로 나누어 ②의 부등식을 만족시키는 n 의 값을 구한다.
- 4 모든 자연수 n 의 값의 합을 구한다.

함수 $y=f(x+1)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

풀이 ① 조건 ㄴ에서 $f(x-1)=f(x)-1$ 이므로 x 대신 $x+1$ 을 대입하면

$$f(x)=f(x+1)-1 \quad \therefore f(x+1)=f(x)+1$$

따라서 $0 \leq x \leq n$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



② 한편

$$g(x) = x + \left| \sin \frac{\pi}{l} x \right|$$

서 $g(x) \geq x$

즉 $y=g(x)$ 의 그래프는

직선 $y=x$ 보다 위에 있거나 직선 $y=x$ 와 만나므로

$y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나려면 $\sin \frac{\pi}{l} x = 0$ 이어야 한다.

즉 $x=0, l, 2l, \dots$ 일 때 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나므로 만나는 점의 좌표는

$$(0, 0), (l, l), (2l, 2l), \dots$$

따라서 $0 \leq x \leq n$ 에서 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점이 3개가 되려면

$$2l \leq n < 3l \quad \therefore \frac{n}{3} < l \leq \frac{n}{2}$$

③ (i) $n=3k$ (k 는 자연수)일 때,

$k < l \leq \frac{3}{2}k$ 를 만족시키는 자연수 l 의 값이 4개이려면

$$k+4 \leq \frac{3}{2}k < k+5, \quad 4 \leq \frac{1}{2}k < 5$$

$$\therefore 8 \leq k < 10$$

k 는 자연수이므로

$$k=8 \text{ 또는 } k=9$$

$$\therefore n=3 \cdot 8=24 \text{ 또는 } n=3 \cdot 9=27$$

(ii) $n=3k+1$ (k 는 자연수)일 때,

$k + \frac{1}{3} < l \leq \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 자연수 l 의 값이 4개이려면

$$k+4 \leq \frac{3}{2}k + \frac{1}{2} < k+5$$

$$4 \leq \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} < 5, \quad \frac{7}{2} \leq \frac{1}{2}k < \frac{9}{2}$$

$$\therefore 7 \leq k < 9$$

k 는 자연수이므로

$$k=7 \text{ 또는 } k=8$$

$$\therefore n=3 \cdot 7+1=22 \text{ 또는 } n=3 \cdot 8+1=25$$

(iii) $n=3k+2$ (k 는 자연수)일 때,

$k + \frac{2}{3} < l \leq \frac{3}{2}k + 1$ 을 만족시키는 자연수 l 의 값이 4개이려면

$$k+4 \leq \frac{3}{2}k + 1 < k+5, \quad 3 \leq \frac{1}{2}k < 4$$

$$\therefore 6 \leq k < 8$$

k 는 자연수이므로

$$k=6 \text{ 또는 } k=7$$

$$\therefore n=3 \cdot 6+2=20 \text{ 또는 } n=3 \cdot 7+2=23$$

④ 이상에서 자연수 n 의 값은

20, 22, 23, 24, 25, 27

이므로 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$20 + 22 + 23 + 24 + 25 + 27 = 141$$

답 141

04

해결 단계

- ① $\overline{AD}$ 의 길이를 구한다.
- ② $\angle D = \theta$ 라 하고 $\cos \theta$ 의 값을 구한다.
- ③ $\sin \theta$ 의 값을 구한다.
- ④ 삼각형 ACD 의 넓이를 구한 후 $m+n$ 의 값을 구한다.

풀이 ① 오른쪽 그림과 같이

사각형 $ABCD$ 와 원 O_2 의 교

점들 E, F, G, H 라 하고,

$\overline{AE} = \overline{AH} = a$,

$\overline{DG} = \overline{DH} = b$ 라 하면 $\overline{BC} = 6$

이므로

$$(6-a) + (4-b) = 6$$

$$\therefore a+b=4$$

$$\therefore \overline{AD}=4$$

② 사각형 $ABCD$ 에서 $\angle D = \theta$ 라 하면

$$\angle B = \pi - \theta$$

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos(\pi - \theta)$$

$$= 72 + 72 \cos \theta \quad \dots\dots ㉠$$

또 삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos \theta$$

$$= 32 - 32 \cos \theta \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $72 + 72 \cos \theta = 32 - 32 \cos \theta$ 이므로

$$104 \cos \theta = -40 \quad \therefore \cos \theta = -\frac{5}{13}$$

③ 이때 $0 < \theta < \pi$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

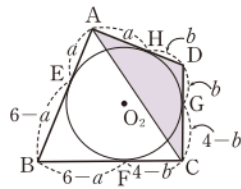
④ 따라서 삼각형 ACD 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin \theta = 8 \cdot \frac{12}{13} = \frac{96}{13}$$

이므로 $m=13, n=96$

$$\therefore m+n=109$$

답 109



원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 π 이다.

$n > \frac{17}{2}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구한다.

III 수열

III -1. 등차수열과 등비수열

개념 & 핵심 기술

본책 68~71쪽

01 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_4 - a_2 = 6$ 에서

$$(a_1 + 3d) - (a_1 + d) = 6$$

$$2d = 6 \quad \therefore d = 3$$

따라서 $a_5 = a_1 + 4d = a_1 + 12$ 이므로 $a_1 + a_5 = 16$ 에서

$$2a_1 + 12 = 16 \quad \therefore a_1 = 2$$

$$\therefore a_{10} = a_1 + 9d$$

$$= 2 + 9 \cdot 3 = 29$$

답 29

02 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_6 = a_1 + 10$ 에서

$$a_1 + 5d = a_1 + 10, \quad 5d = 10$$

$$\therefore d = 2$$

따라서 $a_2 = a_1 + 2, a_3 = a_1 + 4$ 이므로 $a_2 a_3 = 24$ 에서

$$(a_1 + 2)(a_1 + 4) = 24$$

$$a_1^2 + 6a_1 - 16 = 0, \quad (a_1 + 8)(a_1 - 2) = 0$$

$$\therefore a_1 = 2 \quad (\because a_1 > 0)$$

$$\therefore a_8 = a_1 + 7d$$

$$= 2 + 7 \cdot 2 = 16$$

답 16

03 $a_n = 30 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 34$

$$-4n + 34 < 0 \text{에서} \quad n > \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제9항이다.

답 ②

04 세 수 a_1, a_3, a_5 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

세 수 a_2, a_3, a_4 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\frac{a_2 + a_4}{2} = 6 \quad \therefore a_2 + a_4 = 12$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_4 = 12 + 6 = 18$$

답 ③

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_5 = a_1 + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 4d = 12$$

$$\therefore a_1 + 2d = 6$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d)$$

$$= 3a_1 + 6d = 3(a_1 + 2d)$$

$$= 18$$

05 세 수 $\log_3 a, \log_3 b, 1$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\log_3 b = \frac{\log_3 a + 1}{2}, \quad 2\log_3 b = \log_3 a + 1$$

$$\log_3 b^2 = \log_3 3a \quad \therefore b^2 = 3a \quad \dots\dots ㉠$$

세 수 $\log_3 b$, 1, $\log_3 c$ 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$1 = \frac{\log_3 b + \log_3 c}{2}, \quad \log_3 bc = 2$$

$$\therefore bc = 9 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

①을 $abc=81$ 에 대입하면

$$9a = 81 \quad \therefore a = 9$$

$a=9$ 를 ①에 대입하면 $b^2=27$

$$\therefore b = 3\sqrt{3} \quad (\because b > 0)$$

$b=3\sqrt{3}$ 을 ①에 대입하면

$$3\sqrt{3}c = 9 \quad \therefore c = \sqrt{3}$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 9^2 + 27 + (\sqrt{3})^2 = 111 \quad \text{답 ①}$$

06 세 수 a , $2a+b$, 8이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a+b = \frac{a+8}{2}, \quad 4a+2b = a+8$$

$$\therefore 3a+2b=8 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

두 정수 a , b 의 차가 1이므로 $|a-b|=1$

$$\therefore a-b=1 \text{ 또는 } a-b=-1$$

(i) $a-b=1$ 일 때,

$b=a-1$ 을 ①에 대입하면

$$3a+2(a-1)=8, \quad 5a=10$$

$$\therefore a=2$$

$a=2$ 를 $b=a-1$ 에 대입하면 $b=1$

(ii) $a-b=-1$ 일 때,

$b=a+1$ 을 ①에 대입하면

$$3a+2(a+1)=8, \quad 5a=6 \quad \therefore a = \frac{6}{5}$$

$$a = \frac{6}{5} \text{을 } b=a+1 \text{에 대입하면 } b = \frac{11}{5}$$

그런데 a , b 가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=2$, $b=1$ 이므로

$$10a+b=21 \quad \text{답 21}$$

07 $a_{2n+1}=4n+5$ 에서

$$a_3=4 \cdot 1+5=9, \quad a_5=4 \cdot 2+5=13$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_5-a_3=2d$ 이므로

$$2d=4 \quad \therefore d=2$$

따라서 $a_3=a_1+2d$ 에서 $a_1=9-2 \cdot 2=5$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10} = \frac{10\{2 \cdot 5 + (10-1) \cdot 2\}}{2}$$

$$= 140 \quad \text{답 ④}$$

☞참고 $2n+1=m$ 이라 하면 $n=\frac{m-1}{2}$ 이므로

$$a_m = 4 \cdot \frac{m-1}{2} + 5 = 2m+3$$

08 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_{10}=a_1+9d$ 이므로

$$16+9d=-11 \quad \therefore d=-3$$

$$\therefore a_n = 16+(n-1) \cdot (-3) = -3n+19$$

$$a_n < 0 \text{에서 } -3n+19 < 0$$

$$\therefore n > \frac{19}{3} = 6.3 \times \times \times$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제6항까지 양수이고, 제7항부터 음수이다.

$a_6=1$, $a_7=-2$ 이므로

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{10}|$$

$$= (a_1+a_2+\dots+a_6) - (a_7+a_8+a_9+a_{10})$$

$$= \frac{6(16+1)}{2} - \frac{4\{-2+(-11)\}}{2}$$

$$= 51+26=77 \quad \text{답 ②}$$

09 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$S_5 = \frac{5(2a+4d)}{2} = 20 \text{이므로}$$

$$a+2d=4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

주어진 조건에서 $S_{10}=20+120=140$ 이므로

$$\frac{10(2a+9d)}{2} = 140$$

$$\therefore 2a+9d=28 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-4, \quad d=4$$

$$a_{11} = -4+10 \cdot 4 = 36,$$

$$a_{15} = -4+14 \cdot 4 = 52$$

$$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15} = \frac{5(a_{11}+a_{15})}{2}$$

$$= \frac{5(36+52)}{2}$$

$$= 220$$

답 220

다른 풀이 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=A$,

$a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=B$, $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=C$ 라 하면 세 수 A , B , C 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2B=A+C, \quad 2 \cdot 120=20+C$$

$$\therefore C=220$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 세 수 A , B , C 는 공차가 $5d$ 인 등차수열을 이룬다.

10 $S_n=pn+2^n$ 이므로

$$n=1 \text{일 때, } a_1=S_1=p+2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (pn+2^n) - \{p(n-1)+2^{n-1}\}$$

$$= p+2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이때 $a_6=34$ 에서 $p+2^5=34$ 이므로

$$p=2$$

$p=2$ 를 ①, ②에 각각 대입하면

$$a_1=4, \quad a_n=2+2^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_1a_2a_3a_4 = 4 \cdot (2+2) \cdot (2+2^2) \cdot (2+2^3)$$

$$= 960 \quad \text{답 ②}$$

11 $S_n=2n^2+3n$ 이므로

$$a_1=S_1=5 \quad \therefore k \neq 1$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + 3n) - \{2(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= (2n^2 + 3n) - (2n^2 - n - 1) \\ &= 4n + 1 \end{aligned}$$

$a_k = 61$ 에서 $4k + 1 = 61$
 $\therefore k = 15$

답 ③

12 $S_n = 3n^2 - 4n + 1$ 이므로

$n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 0$ ㉠

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3n^2 - 4n + 1) - \{3(n-1)^2 - 4(n-1) + 1\} \\ &= (3n^2 - 4n + 1) - (3n^2 - 10n + 8) \\ &= 6n - 7 \end{aligned}$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $a_1 = 0, a_n = 6n - 7 (n \geq 2)$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} &= 0 + 11 + 23 + \cdots + 107 \\ &= \frac{9(11 + 107)}{2} \\ &= 531 \end{aligned}$$

답 ②

13 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$a_3 = 8$ 에서 $ar^2 = 8$ ㉠

$a_6 = -64$ 에서 $ar^5 = -64$ ㉡

㉡ $\div$ ㉠을 하면 $r^3 = -8 \therefore r = -2$

$r = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$4a = 8 \therefore a = 2$

따라서 $a_n = 2 \cdot (-2)^{n-1}$ 이므로

$a_{10} = 2 \cdot (-2)^9 = -1024$

답 ①

14 등비수열 $\{2a_n\}$ 의 첫째항이 $2a_1$ 이므로

$2a_5 = 2a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4, 2a_{10} = 2a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9$

$\therefore a_5 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4, a_{10} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9$

$\therefore \frac{a_{10}}{a_5} = \frac{a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9}{a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

답 ⑤

다른 풀이 등비수열 $\{2a_n\}$ 의 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$2a_{10} = 2a_5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$\therefore \frac{a_{10}}{a_5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

15 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$a_3 + a_6 = 14$ 에서 $ar^2 + ar^5 = 14$ ㉠

$\therefore ar^2(1 + r^3) = 14$ ㉡

$\log_2 a_4 - \log_2 a_2 = 1 + \log_2 a_5$ 에서

$\log_2 \frac{a_4}{a_2} = \log_2 2a_5, \frac{a_4}{a_2} = 2a_5$

$\frac{ar^3}{ar} = 2ar^4, r^2 = 2ar^4$

$\therefore ar^2 = \frac{1}{2}$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}(1 + r^3) = 14, r^3 = 27 \therefore r = 3$

$r = 3$ 을 ㉢에 대입하면

$9a = \frac{1}{2} \therefore a = \frac{1}{18}$

$\therefore a_4 + a_5 = \frac{1}{18} \cdot 3^3 + \frac{1}{18} \cdot 3^4 = 6$

답 ③

16 세 수 $x, y, 30$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2y = x + 30$ ㉠

세 수 $2, x, y$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$x^2 = 2y$ ㉡

㉠, ㉡에서

$x^2 = x + 30, x^2 - x - 30 = 0$

$(x + 5)(x - 6) = 0$

$\therefore x = 6 (\because x > 0)$

$x = 6$ 을 ㉠에 대입하면

$2y = 36 \therefore y = 18$

$\therefore x + y = 24$

답 ④

17 세 수 a_1, a_2, a_3 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_2^2 = a_1 a_3 = 16$

세 수 a_2, a_3, a_4 도 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_3^2 = a_2 a_4 = 64$ ㉠

한편 ㉠에서 $a_4 = \frac{a_3^2}{a_2}$ 이므로

$a_4^2 = \left(\frac{a_3^2}{a_2}\right)^2 = \frac{64^2}{16} = 256$

$\therefore a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 336$

답 ⑤

다른 풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$a_1 a_3 = 16$ 에서 $a_1^2 r^2 = 16$ ㉠

$a_2 a_4 = 64$ 에서 $a_1^2 r^4 = 64$ ㉡

㉡ $\div$ ㉠을 하면 $r^2 = 4$

$$\begin{aligned} \therefore a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 &= (a_1 r)^2 + (a_1 r^2)^2 + (a_1 r^3)^2 \\ &= a_1^2 r^2 (1 + r^2 + r^4) \\ &= 16(1 + 4 + 4^2) \\ &= 336 \end{aligned}$$

18 세 수 $2a + b, b, 2a - b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2 = (2a + b)(2a - b), b^2 = 4a^2 - b^2$

$2b^2 = 4a^2 \therefore b^2 = 2a^2$

$b^2=2a^2$ 을 $2b^2+3a=1$ 에 대입하면

$$4a^2+3a=1, \quad 4a^2+3a-1=0$$

$$(a+1)(4a-1)=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{4} \quad (\because a>0)$$

따라서 $\frac{1}{a}=4$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} \\ &= 16 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 24 \end{aligned}$$

답 ⑤

19 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_2=3\text{에서} \quad \frac{a(r^2-1)}{r-1}=3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_4=15\text{에서} \quad \frac{a(r^4-1)}{r-1}=15 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면

$$\frac{r^4-1}{r^2-1}=5, \quad \frac{(r^2-1)(r^2+1)}{r^2-1}=5$$

$$r^2+1=5 \quad \therefore r=2 \quad (\because r>0)$$

$$\therefore S_8 = \frac{a(r^8-1)}{r-1} = \frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1} = 15 \cdot (2^4+1) = 255$$

답 ③

$r=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$\frac{a(2^2-1)}{2-1}=3$$

$$\therefore a=1$$

$$S_4 = \frac{a(r^4-1)}{r-1} \text{이므로} \\ S_8 = S_4(r^4+1)$$

2020년 초부터 2039년
말까지 20번 적립한다.

20 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$S_6=\sqrt{3}+1\text{에서}$$

$$\frac{a_1(r^6-1)}{r-1}=\sqrt{3}+1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_8=10S_4\text{에서}$$

$$\frac{a_1(r^8-1)}{r-1}=10 \cdot \frac{a_1(r^4-1)}{r-1}$$

$$\frac{a_1(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=10 \cdot \frac{a_1(r^4-1)}{r-1}$$

$$r^4+1=10, \quad r^4=9$$

$$r^2=3 \quad \therefore r=\sqrt{3} \quad (\because r>0)$$

$r=\sqrt{3}$ 을 ㉠에 대입하면

$$\frac{a_1\{(\sqrt{3})^6-1\}}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1, \quad 26a_1=2$$

$$\therefore a_1=\frac{1}{13}$$

답 ④

21 주어진 수열은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이

므로

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\{1-(\frac{1}{2})^n\}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

$|S_n-1|<0.001$ 에서

$$\left|1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right| < \frac{1}{1000}$$

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \quad \therefore 2^n > 1000$$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 10이다.

답 10

22 첫날 걸러 낸 오염 물질의 양을 a 라 하면 10일 동안 걸러 낸 오염 물질의 양의 합은

$$a + a \times 0.9 + a \times 0.9^2 + \dots + a \times 0.9^9$$

$$= \frac{a(1-0.9^{10})}{1-0.9}$$

$$= \frac{a(1-0.3)}{0.1}$$

$$= 7a$$

따라서 $7a=ka$ 이므로

$$k=7$$

답 7

23 원금 130만 원을 연이율 5%의 복리로 10년 동안 예금했을 때의 원리합계는

$$130 \times (1+0.05)^{10} = 130 \times 1.6 = 208 \text{ (만 원)}$$

원금 a 만 원을 연이율 10%의 복리로 10년 동안 예금했을 때의 원리합계는

$$a(1+0.1)^{10} = a \times 2.6 = 2.6a \text{ (만 원)}$$

따라서 $208=2.6a$ 이므로

$$a = \frac{208}{2.6} = 80$$

답 80

24 매년 초에 적립하는 금액을 a 만 원이라 하면 2039년 말의 적립금의 원리합계는

$$a(1+0.04) + a(1+0.04)^2 + a(1+0.04)^3$$

$$+ \dots + a(1+0.04)^{20}$$

$$= \frac{a \times 1.04 \times (1.04^{20}-1)}{1.04-1}$$

$$= \frac{a \times 1.04 \times (2.2-1)}{0.04}$$

$$= 31.2a \text{ (만 원)}$$

즉 $31.2a=2340$ 이므로

$$a=75$$

따라서 매년 초에 75만 원씩 적립해야 한다.

답 ②

1등급을 위한 고난도 문제

본책 72~75 쪽

01 $a_{10}=10+9d$ 가 자연수가 되도록 하는 d 의 값은

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \dots, \frac{8}{9}$$

그런데 $d=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ 또는 $d=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ 이면 $a_4=10+3d$ 와

$a_7=10+6d$ 가 자연수가 되므로 조건을 만족시키는 d 의 값은

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + \frac{7}{9} + \frac{8}{9} = 3$$

답 ③

02 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$a_4 = 2a_{10}$ 에서

$$a + 3d = 2(a + 9d)$$

$$\therefore a = -15d$$

따라서 $a_k = 5a_{20}$ 에서

$$-15d + (k-1)d = 5(-15d + 19d)$$

$$(k-16)d = 20d, \quad k-16 = 20$$

$$\therefore k = 36$$

→ ①

→ ②

답 36

채점 기준	비율
① a 를 d 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
② k 의 값을 구할 수 있다.	50%

03 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 공차가 $\frac{1}{12}$ 인 등차수열이므로 첫째항을 a 라 하면

$$\frac{1}{a_n} = a + (n-1) \cdot \frac{1}{12} = \frac{n+12a-1}{12}$$

$$\therefore a_n = \frac{12}{n+12a-1}$$

이때 $a_3 : a_5 = 5 : 3$ 이므로

$$\frac{12}{12a+2} : \frac{12}{12a+4} = 5 : 3$$

$$\frac{5}{12a+4} = \frac{3}{12a+2}, \quad 60a+10 = 36a+12$$

$$24a = 2 \quad \therefore a = \frac{1}{12}$$

따라서 $a_n = \frac{12}{n}$ 이므로

$$a_1 + a_2 = 12 + 6 = 18$$

답 ③

04 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$a_{10} = 7$ 에서

$$a + 9d = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a_5^2 + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2$ 에서

$$(a+4d)^2 + (a+5d)^2 = (a+6d)^2 + (a+7d)^2$$

$$2a^2 + 18ad + 41d^2 = 2a^2 + 26ad + 85d^2$$

$$8ad + 44d^2 = 0$$

$$\therefore 2a + 11d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -11, \quad d = 2$$

따라서 $a_n = -11 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 13$ 이므로

$$\frac{a_m}{a_{m+2}} = \frac{2m-13}{2(m+2)-13} = \frac{2m-13}{2m-9}$$

$$= 1 - \frac{4}{2m-9}$$

→ ②

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 $2k-1$ (k 는 -5 이상인 정수)

풀이므로 $2m-9$ 의 값이 될 수 있는 수는

$$-2, -1, 1, 2$$

$$2m-9 = \pm 2 \text{ 이면 } m = \frac{7}{2} \text{ 또는 } m = \frac{11}{2}$$

이는 m 이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

답음비가 $m : n : l$ 인 세
평면도형의 넓이의 비는
 $m^2 : n^2 : l^2$

$$\frac{2m-13}{2m-9} = \frac{2m-9-4}{2m-9} = 1 - \frac{4}{2m-9}$$

①에서 $c^2 = a^2 - b^2$
②에서 $c^2 = 2b^2 - a^2$
따라서 $a^2 - b^2 = 2b^2 - a^2$ 이
므로 $2a^2 = 3b^2$

$$2m-9 = \pm 1 \text{ 이면 } m = 4 \text{ 또는 } m = 5$$

(i) $m=4$ 를 ②에 대입하면

$$\frac{a_m}{a_{m+2}} = 1 - \frac{4}{-1} = 5 = a_9$$

(ii) $m=5$ 를 ②에 대입하면

$$\frac{a_m}{a_{m+2}} = 1 - 4 = -3 = a_5$$

(i), (ii)에서 모든 자연수 m 의 값의 합은

$$4 + 5 = 9$$

답 9

05 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_4 + b_5 + b_6 \text{에서}$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d)$$

$$= (b_1 + 3d) + (b_1 + 4d) + (b_1 + 5d)$$

$$3a_1 + 3d = 3b_1 + 12d, \quad 9d = 3(a_1 - b_1)$$

$$9d = 18 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore a_6 - b_8 = (a_1 + 5d) - (b_1 + 7d)$$

$$= a_1 - b_1 - 2d$$

$$= 6 - 2 \cdot 2 = 2$$

답 ④

다른 풀이 세 수 a_1, a_2, a_3 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $a_1 + a_3 = 2a_2$

세 수 b_4, b_5, b_6 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b_4 + b_6 = 2b_5$$

따라서 $a_1 + a_2 + a_3 = b_4 + b_5 + b_6$ 에서

$$a_2 + 2a_2 = b_5 + 2b_5 \quad \therefore a_2 = b_5$$

두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 + d = b_1 + 4d \quad \therefore a_1 - b_1 = 3d$$

이때 $a_1 - b_1 = 6$ 이므로

$$3d = 6 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore a_6 - b_8 = (a_1 + 5d) - (b_1 + 7d)$$

$$= a_1 - b_1 - 2d$$

$$= 6 - 2 \cdot 2 = 2$$

06 $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$ 라 하면 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\triangle ABC \sim \triangle DAC \sim \triangle DBA$ 이고, 답음비는

$$\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{BA} = a : b : c$$

이므로

$$\triangle ABC : \triangle DAC : \triangle DBA = a^2 : b^2 : c^2$$

$\triangle ABC = a^2k, \triangle DAC = b^2k, \triangle DBA = c^2k$ ($k > 0$)라 하면 세 수 a^2k, b^2k, c^2k 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b^2k = a^2k + c^2k$$

$$\therefore 2b^2 = a^2 + c^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 2a^2 = 3b^2 \text{ 이므로 } b = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$\therefore \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

07 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 이차방정식 $ax^2 - 2bx + c = 0$ 에 대입하면

$$ax^2 - (a+c)x + c = 0, \quad (ax-c)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{c}{a} \text{ 또는 } x = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $\frac{c}{a} = 5, k = 1$ 이므로

$$c = 5a, k = 1$$

$c = 5a$ 를 ①에 대입하면

$$2b = 6a \quad \therefore b = 3a \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\therefore k + \frac{bc}{a^2} = 1 + \frac{3a \cdot 5a}{a^2} = 16 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 16

채점 기준	비율
① 주어진 이차방정식의 근을 구할 수 있다.	40%
② b, c 를 a 에 대한 식으로 나타내고 k 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $k + \frac{bc}{a^2}$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

08 $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{10})$

$$= \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} + \frac{10(b_1 + b_{10})}{2}$$

$$= 5(a_1 + b_1 + a_{10} + b_{10})$$

$$= 5(4 + 24)$$

$$= 140$$

답 140

☞참고 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 등차수열이므로 수열 $\{a_n + b_n\}$ 도 등차수열이다.

$$\therefore (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{10})$$

$$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_{10} + b_{10})$$

$$= \frac{10\{(a_1 + b_1) + (a_{10} + b_{10})\}}{2}$$

09 도형 A_n 을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수를 a_n 이라 하면

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = a_1 + 3 \cdot 4 = 16$$

$$a_3 = a_2 + 3 \cdot 4 = 28$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공차가 12인 등차수열이므로 구하는 합은

$$a_1 + a_2 + \dots + a_8 = \frac{8(2 \cdot 4 + 7 \cdot 12)}{2}$$

$$= 368$$

답 368

10 $a_1 = 3 + 6 + 9 = 18$

$$a_2 = 3 + 6 + 12 = 21$$

$$a_3 = 3 + 6 + 15 = 24$$

⋮

서로 다른 세 수의 합의 최댓값

$$a_k = 24 + 27 + 30 = 81$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 18, 공차가 3인 등차수열이므로 $a_k = 81$ 에서

$$18 + (k-1) \cdot 3 = 81, \quad 3k + 15 = 81$$

$$3k = 66 \quad \therefore k = 22$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = \frac{22(18 + 81)}{2}$$

$$= 1089$$

답 1089

11 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_8 < a_{12}$ 이므로 $|a_8| = |a_{12}|$ 에서

$$a_8 < 0, a_{12} > 0$$

따라서 $-a_8 = a_{12}$ 이므로 $a_8 + a_{12} = 0$

$$(a + 7d) + (a + 11d) = 0, \quad 2a + 18d = 0$$

$$\therefore a = -9d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$|a_7| + |a_{11}| + |a_{15}| = 45$ 에서

$$|a + 6d| + |a + 10d| + |a + 14d| = 45$$

$$|-9d + 6d| + |-9d + 10d| + |-9d + 14d| = 45$$

$$3d + d + 5d = 45 \quad \therefore d = 5$$

$d = 5$ 를 ①에 대입하면 $a = -45$

$$\therefore S_n = \frac{n\{2 \cdot (-45) + (n-1) \cdot 5\}}{2}$$

$$= \frac{5n(n-19)}{2}$$

$$S_n > 1000 \text{에서 } \frac{5n(n-19)}{2} > 1000$$

$$n^2 - 19n - 400 > 0$$

$$\therefore n < \frac{19 - \sqrt{1961}}{2} \text{ 또는 } n > \frac{19 + \sqrt{1961}}{2}$$

이때 $\frac{19 + \sqrt{1961}}{2} = 31.\times\times\times$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 32이다.

답 32

채점 기준	비율
① a, d 의 값을 구할 수 있다.	50%
② S_n 을 구할 수 있다.	20%
③ n 의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

12 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_n = n^2 + 2n$

$$n = 1 \text{일 때, } a_1 = S_1 = 3$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$$

$$= (n^2 + 2n) - (n^2 - 1)$$

$$= 2n + 1$$

⋮ ①

이때 $a_1 = 3$ 은 $n = 1$ 을 ①에 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n + 1$$

$$\therefore a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} + a_{20} = \frac{5(9 + 41)}{2}$$

$$= 125$$

⋮ ②

답 125

서로 다른 세 수의 합의 최솟값

$a_4, a_8, a_{12}, a_{16}, a_{20}$ 은 공차가 $2 \cdot 4 = 8$ 인 등차수열을 이룬다.

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	60%
② $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} + a_{20}$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

13 $n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} &= S_n - S_{n-1} \\ \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} &= (\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) \\ \therefore \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} &= 1 \quad (n \geq 2)\end{aligned}$$

즉 수열 $\{\sqrt{S_n}\}$ 은 첫째항이 $\sqrt{S_1}=1$, 공차가 1인 등차수열이므로

$$\sqrt{S_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$$

따라서 $S_n = n^2$ 이므로

$$\begin{aligned}a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= 10^2 - 9^2 = 19\end{aligned}$$

답 ②

14 $S_n = pn^2 + qn + 5$ 이므로

$n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = p + q + 5$

이때 $a_1 = 6$ 이므로 $p + q + 5 = 6$

$$\therefore p + q = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (pn^2 + qn + 5) - \{p(n-1)^2 + q(n-1) + 5\} \\ &= (pn^2 + qn + 5) \\ &\quad - \{pn^2 + (-2p + q)n + p - q + 5\} \\ &= 2pn - p + q\end{aligned}$$

이때 $a_{20} + a_{21} = 236$ 이므로

$$\begin{aligned}(39p + q) + (41p + q) &= 236 \\ \therefore 40p + q &= 118 \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$p = 3, q = -2$$

따라서 $a_n = 6n - 5$ ($n \geq 2$)이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 = 7 + 19 + 31 = 57$$

답 ④

15 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ 이므로 수열 $\{pa_n + qa_{n+1}\}$ 의 첫째항은

$$pa_1 + qa_2 = 3p + 6q = 12 \quad \dots\dots ㉠$$

수열 $\{qa_n + pa_{n+1}\}$ 의 첫째항은

$$qa_1 + pa_2 = 6p + 3q = 15 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p = 2, q = 1$

따라서 수열 $\{2a_n + a_{n+1}\}$ 의 공비는

$$\begin{aligned}r &= \frac{2a_2 + a_3}{2a_1 + a_2} = \frac{2 \cdot 6 + 12}{12} = 2 \\ \therefore p + q + r &= 5\end{aligned}$$

답 ①

16 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{2k}{5-k}$$

$a_6 = a_4 \cdot r^2$ 이므로

$$8k + 30 = 2k \cdot \left(\frac{2k}{5-k}\right)^2$$

$n=1$ 을 대입하면
 $a_1 = p + q = 1$
이므로 $a_1 = 6$ 과 같지 않다.

$$a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를
 r 라 하면 이 수열은 공비
가 r^4 인 등비수열을 이룬다.

$$(8k + 30)(5 - k)^2 = 8k^3$$

$$50k^2 + 100k - 750 = 0, \quad k^2 + 2k - 15 = 0$$

$$(k + 5)(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 3 \quad (\because k > 0)$$

$$\text{따라서 } r = \frac{6}{5-3} = 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{a_7 + a_8}{a_6} &= \frac{a_6(r + r^2)}{a_6} \\ &= r + r^2 \\ &= 3 + 3^2 = 12\end{aligned}$$

답 ③

17 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 조건 (가)에서

$$\begin{aligned}b_n &= (a_1 r^n)^2 - (a_1 r^{n-1})^2 \\ &= a_1^2 r^{2n-2} (r^2 - 1) \\ &= a_1^2 (r^2 - 1) (r^2)^{n-1}\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이다. $\dots\dots ①$

조건 (나)에서 $\frac{b_4}{b_2} = 4$ 이므로

$$\frac{b_4(r^2)^3}{b_2 r^2} = 4, \quad r^4 = 4$$

$$r^2 = 2 \quad \therefore r = \sqrt{2} \quad (\because r > 1)$$

$\dots\dots ②$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_4}{a_2} &= \frac{a_1 r}{a_1} + \frac{a_1 r^3}{a_1 r} = r + r^2 \\ &= 2 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

$\dots\dots ③$

답 2 + $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
① 수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② r 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_4}{a_2}$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

18 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 한 변의 길이를 $2a$ 라 하면

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1D_2} = a \text{이므로}$$

$$\overline{A_2D_2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

따라서 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓음비가

$2 : \sqrt{2}$ 이므로 넓이의 비는

$$2^2 : (\sqrt{2})^2 = 2 : 1$$

같은 방법으로 하면 두 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$,

$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 넓이의 비는 $2 : 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$

은 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore a_n = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{a_m}{a_1} < \frac{1}{100} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} < \frac{1}{100} \quad \therefore 2^{m-1} > 100$$

이때 $2^6 = 64$, $2^7 = 128$ 이므로 자연수 m 의 최솟값은 8이다.

답 ④

19 세 수 a_3, a_7, a_{11} 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_3 a_{11} = a_7^2$$

$a_3a_{11}=4a_7$ 에서

$$a_7^2=4a_7, \quad a_7(a_7-4)=0$$

$$\therefore a_7=4 \quad (\because a_7>0)$$

따라서 $b_7=a_7=4$ 이고, 세 수 b_5, b_7, b_9 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b_5+b_9=2b_7=2 \cdot 4=8$$

답 ③

20 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 조건 (가)에서

$$\frac{ar^{l-1}}{ar^{m-1}} = \left(\frac{ar^{10}}{ar^4}\right)^2, \quad r^{l-m}=r^{12}$$

$$\therefore l-m=12 \quad (\because r \neq 1) \quad \dots\dots ㉠$$

조건 (나)에서 세 수 $m, m+l, m+6l$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(m+l)^2=m(m+6l)$$

$$m^2+2ml+l^2=m^2+6ml$$

$$l^2=4ml \quad \therefore l=4m \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$m=4, \quad l=16$$

$$\therefore l+10m=16+40=56$$

답 56

21 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$b^2=ac \quad \therefore c=\frac{b^2}{a} \quad \dots\dots ㉠$$

$x=3$ 이 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$ 의 근이므로

$$9a+6b+c=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$9a+6b+\frac{b^2}{a}=0, \quad 9a^2+6ab+b^2=0$$

$$(3a+b)^2=0 \quad \therefore b=-3a$$

$b=-3a$ 를 ㉠에 대입하면

$$c=\frac{(-3a)^2}{a}=\frac{9a^2}{a}=9a \quad \dots\dots ㉢$$

이차방정식 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)=0$ 에서

$$-2ax^2+6ax+10a=0$$

$$\therefore x^2-3x-5=0$$

따라서 이차방정식 $x^2-3x-5=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \quad \alpha\beta=-5 \quad \dots\dots ㉣$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=3^2-2 \cdot (-5)$$

$$=19 \quad \dots\dots ㉤$$

답 19

채점 기준	비율
① b, c 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
② $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ $\alpha^2+\beta^2$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

22 세 수 $a, b, 8$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$b^2=8a=2^2 \cdot 2a$$

등차수열 $\{b_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 이 수열은 공차가 $2d$ 인 등차수열을 이룬다.

$(2, 4), (18, 12),$
 $(32, 16), (50, 20),$
 $(72, 24), (98, 28)$

$$\begin{aligned} r^{12}-1 &= (r^4)^3-1^3 \\ &= (r^4-1)(r^8+r^4+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^4 > 0 \text{ 이므로} \\ 3r^4+2 > 0 \end{aligned}$$

a, b 는 자연수이므로 $a=2m^2$ (m 은 자연수)이라 하면

$$b=4m$$

이때 $1 \leq a \leq 100$ 이므로

$$1 \leq 2m^2 \leq 100 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq m^2 \leq 50$$

따라서 m 의 값이 될 수 있는 수는

$$1, 2, 3, \dots, 7$$

이때 $m=2$ 이면 $a=b=8$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 서로 다른 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$7-1=6$$

답 ①

23 $\log_2(S_n+2)=1-n$ 에서 $S_n+2=2^{1-n}$

$$\therefore S_n=2^{1-n}-2$$

$$n=1 \text{ 일 때, } a_1=S_1=-1$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=(2^{1-n}-2)-(2^{2-n}-2)$$

$$=-2^{1-n} \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $a_1=-1$ 은 $n=1$ 을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$a_n=-2^{1-n}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n}=(-2^{1-n})^{-1}$$

$$=-2^{n-1} \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 -1 , 공비가 2 인 등비수열

이므로 첫째항부터 제 8 항까지의 합은

$$\frac{-(2^8-1)}{2-1}=-255$$

답 -255

채점 기준	비율
① $\frac{1}{a_n}$ 을 구할 수 있다.	70%
② 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 첫째항부터 제8항까지의 합을 구할 수 있다.	30%

24 $3S_{12}=7S_8$ 에서

$$\frac{3\sqrt{2}(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{7\sqrt{2}(r^8-1)}{r-1}$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{2}(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}=\frac{7\sqrt{2}(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}$$

$r^2 \neq 1$ 이므로 양변에 $\frac{r-1}{\sqrt{2}(r^4-1)}$ 을 곱하면

$$3(r^8+r^4+1)=7(r^4+1)$$

$$3r^8-4r^4-4=0, \quad (3r^4+2)(r^4-2)=0$$

$$\therefore r^4=2$$

$$\therefore a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4+a_5^4=\frac{a_1^4\{(r^4)^5-1\}}{r^4-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^4(2^5-1)}{2-1}$$

$$=124$$

답 ②

25 n 회 시행에서 색칠한 조각의 넓이의 합을 a_n 이라 하면

$$a_1 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4$$

$$a_2 = 3 \cdot \left[\left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot 4^2 \right] = 3$$

$$a_3 = 3^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{4} \right)^3 \cdot 4^2 \right] = \frac{9}{4}$$

⋮

$$\therefore a_n = 3^{n-1} \cdot \left[\left(\frac{1}{4} \right)^n \cdot 4^2 \right] = 4 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 $\frac{3}{4}$ 인 등비수열이

므로 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\frac{4 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{10} \right]}{1 - \frac{3}{4}} = 16 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{10} \right]$$

답 ①

다른 풀이 n 회 시행 후 색칠하지 않은 조각들의 넓이의 합을 b_n 이라 하면

$$b_1 = 4^2 \cdot \frac{3}{4} = 12$$

$$b_2 = \frac{3}{4} \cdot \left(4^2 \cdot \frac{3}{4} \right) = 9$$

$$b_3 = \frac{3}{4} \cdot \left[4^2 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right] = \frac{27}{4}$$

⋮

$$\therefore b_n = 12 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

따라서 구하는 넓이의 합은

$$\begin{aligned} 16 - b_{10} &= 16 - 12 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^9 = 16 - 16 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{10} \\ &= 16 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{10} \right] \end{aligned}$$

26 싹이 튼 후 8주 동안 자란 나팔꽃 덩굴의 길이는

$$\begin{aligned} 10 + 10 \cdot \frac{4}{5} + \cdots + 10 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^7 &= \frac{10 \left[1 - \left(\frac{4}{5} \right)^8 \right]}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= 50(1 - 0.17) \\ &= 41.5 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

답 41.5 cm

27 최초의 보험료가 100만 원이므로 보험에 가입한 후

n ($1 \leq n \leq 8$)번째 납입한 보험료는

$$100 \times (1 - 0.05)^{n-1} = 100 \times 0.95^{n-1} \text{ (만 원)}$$

따라서 8번 납입한 보험료의 총합은

$$\begin{aligned} \frac{100 \times (1 - 0.95^8)}{1 - 0.95} &= \frac{100 \times (1 - 0.7 \times 0.95)}{0.05} \\ &= 670 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

이때 8번째 납입한 보험료가

$$100 \times 0.95^7 = 70 \text{ (만 원)}$$

이므로 9번째 납입한 보험료는

$$70 \times (1 + 0.1) = 77 \text{ (만 원)}$$

10번째 납입한 보험료는

$$77 \times (1 + 0.1) = 84.7 \text{ (만 원)}$$

따라서 10번 납입한 보험료의 합은

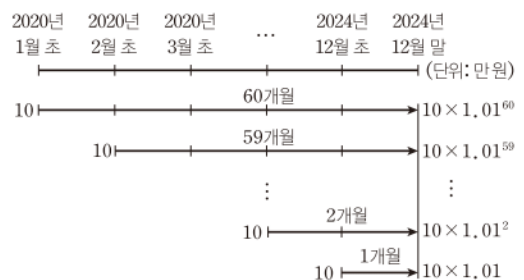
$$670 + 77 + 84.7 = 831.7 \text{ (만 원)}$$

즉 8317000원이다.

답 8317000원

채점 기준	비율
① 8번 납입한 보험료의 총합을 구할 수 있다.	50%
② 9, 10번째 납입한 보험료를 구할 수 있다.	40%
③ 10번 납입한 보험료의 총합을 구할 수 있다.	10%

28 매월 초 적립금의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 2024년 12월 말의 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} &10 \times 1.01 + 10 \times 1.01^2 + 10 \times 1.01^3 + \cdots + 10 \times 1.01^{60} \\ &= \frac{10 \times 1.01 \times (1.01^{60} - 1)}{1.01 - 1} \\ &= \frac{10 \times 1.01 \times (1.8 - 1)}{0.01} \\ &= 808 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

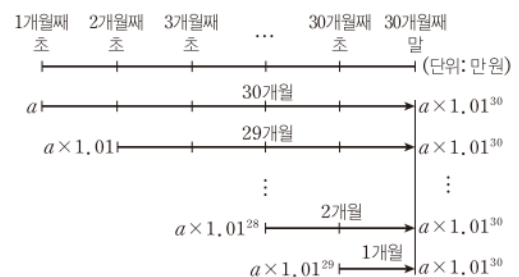
또 808만 원에 대한 2025년 1월 초부터 2031년 12월 말까지의 원리합계는

$$808 \times (1 + 0.1)^7 = 808 \times 1.9 = 1535.2 \text{ (만 원)}$$

따라서 2031년 12월 말에 같이 인출하는 금액은 15352000원이다.

답 15352000원

29 매월 초 적립금의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 30개월째 말의 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} a \times 1.01^{30} \times 30 &= 30a \times 1.35 \\ &= 40.5a \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

즉 $40.5a = 2430$ 이므로 $a = 60$

답 ①

◎ 사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 76~77쪽

01 $b_1=2^{a_2}$, $b_2=2^{a_3}$, $b_3=2^{a_4+a_1}$, $b_4=2^{a_1+a_2}$ 이므로
 $b_1b_3=64b_2b_4$ 에서

$$2^{a_2} \cdot 2^{a_3+a_1} = 2^6 \cdot 2^{a_1} \cdot 2^{a_1+a_2} \quad \therefore 2^{2a_2+a_1} = 2^{2a_1+a_5+6}$$

즉 $2a_2+a_4=2a_1+a_3+6$ 이므로

$$2(a_2-a_1)+(a_4-a_3)=6$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$2d+d=6, \quad 3d=6$$

$$\therefore d=2$$

답 ②

02 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 $1-b_1$ 은
 제 $(m+1)$ 항이므로

$$1-b_1=1+a_1+md$$

이때 $a_1=1$, $b_1=24$ 이므로

$$-23=2+md, \quad md=-25$$

$$\therefore d=-\frac{25}{m} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

m 은 자연수이고 d 는 정수이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 m , d
 의 순서쌍 (m, d) 는

$$(1, -25), (5, -5), (25, -1)$$

(i) $m=1$, $d=-25$ 일 때,

주어진 등차수열에서 $5-b_5$ 는 제 6 항이므로

$$5-b_5=2+5 \cdot (-25)=-123$$

$$\therefore b_5=128$$

$$\therefore m+b_5=129$$

(ii) $m=5$, $d=-5$ 일 때,

주어진 등차수열에서 $5-b_5$ 는 제 10 항이므로

$$5-b_5=2+9 \cdot (-5)=-43$$

$$\therefore b_5=48$$

$$\therefore m+b_5=53$$

(iii) $m=25$, $d=-1$ 일 때,

주어진 등차수열에서 $5-b_5$ 는 제 30 항이므로

$$5-b_5=2+29 \cdot (-1)=-27$$

$$\therefore b_5=32$$

$$\therefore m+b_5=57$$

이상에서 $m+b_5$ 의 최솟값은 53이다.

답 ②

03 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$|a_5-2k|=|a_9-2k|$ 에서

$$-(a_5-2k)=a_9-2k, \quad a_5+a_9=4k$$

$$2a_1+12d=4k$$

$$\therefore k=\frac{a_1+6d}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

같은 방법으로 $|a_6-\frac{5}{2}k|=|a_{12}-\frac{5}{2}k|$ 에서

$$a_6+a_{12}=5k, \quad 2a_1+16d=5k$$

$$\therefore k=\frac{2a_1+16d}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$a_5-2k=a_9-2k$ 이면
 $a_5=a_9$
 따라서 $d=0$ 이므로 공차
 가 양수라는 조건을 만족
 시키지 않는다.

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\frac{a_1+6d}{2}=\frac{2a_1+16d}{5}$$

$$5a_1+30d=4a_1+32d$$

$$\therefore d=\frac{1}{2}a_1$$

따라서 $a_{10}=11$ 에서

$$a_1+\frac{9}{2}a_1=11, \quad \frac{11}{2}a_1=11$$

$$\therefore a_1=2$$

$$d=\frac{1}{2} \cdot 2=1$$

답 2

04 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차를 a 라 하면

$$a_n=a+(n-1)a$$

$$=an$$

이므로

$$b_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)$$

$$=\frac{1}{n} \cdot \frac{n(a+an)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}a(n+1)$$

따라서 $S_n=a_nb_n$ 에서

$$S_n=an \cdot \frac{1}{2}a(n+1)=\frac{1}{2}a^2n(n+1)$$

이므로 $n \geq 2$ 일 때

$$c_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}a^2n(n+1)-\frac{1}{2}a^2n(n-1)$$

$$=a^2n$$

$$c_5-c_2=48 \text{에서} \quad 5a^2-2a^2=48$$

$$3a^2=48, \quad a^2=16$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

따라서 $a_1=4$, $b_1=\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2=4$, $c_{10}=4^2 \cdot 10=160$ 이므로

$$a_1+b_1+c_{10}=168$$

답 ②

05 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_{2k}=2$ 에서

$$1+(2k-1)d=2, \quad (2k-1)d=1$$

$$\therefore d=\frac{1}{2k-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S=\frac{k\{2a_1+(k-1)d\}}{2}=\frac{k\{2+(k-1)d\}}{2},$$

$$T=\frac{k\{2(a_1+kd)+(k-1)d\}}{2}=\frac{k\{2+(3k-1)d\}}{2}$$

이고 $S:T=7:10$ 이므로

$$\{2+(k-1)d\}:\{2+(3k-1)d\}=7:10$$

$$\therefore (11k+3)d=6$$

$\textcircled{1}$ 을 위의 식에 대입하여 정리하면

$$11k+3=6(2k-1)$$

$$\therefore k=9$$

답 ④

다른 풀이 $S+T$

$$\begin{aligned} &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}) \\ &= \frac{2k(a_1 + a_{2k})}{2} \\ &= k(1+2) = 3k \end{aligned}$$

이때 $S : T = 7 : 10$ 이므로

$$S = 3k \cdot \frac{7}{7+10} = \frac{21}{17}k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_{2k}=2$ 에서

$$d = \frac{1}{2k-1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{k\{2a_1 + (k-1)d\}}{2} \\ &= \frac{k}{2} \left(2 + \frac{k-1}{2k-1} \right) \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서} \quad \frac{21}{17}k = \frac{k}{2} \left(2 + \frac{k-1}{2k-1} \right)$$

$$\frac{42}{17} = 2 + \frac{k-1}{2k-1}, \quad \frac{k-1}{2k-1} = \frac{8}{17}$$

$$8(2k-1) = 17(k-1) \quad \therefore k=9$$

06 오른쪽 그림과 같이 변

BC 위에 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ 인 점 E

를 잡고, $\overline{P_k Q_k}$ ($k=1, 2, 3,$

$\dots, 9$)와 $\overline{DE}$ 의 교점을 R_k

라 하면 $\triangle DEC \sim \triangle DR_k Q_k$

이고, 닮음비는 $10 : k$ 이다.

즉 $\overline{EC} : \overline{R_k Q_k} = 10 : k$ 이므로

$$2 : \overline{R_k Q_k} = 10 : k \quad \therefore \overline{R_k Q_k} = \frac{k}{5}$$

$$\therefore \overline{P_k Q_k} = \overline{P_k R_k} + \overline{R_k Q_k} = 2 + \frac{k}{5}$$

따라서 $\overline{P_1 Q_1}, \overline{P_2 Q_2}, \overline{P_3 Q_3}, \dots, \overline{P_9 Q_9}$ 의 길이는 공차가

$\frac{1}{5}$ 인 등차수열을 이룬다.

이때 $\overline{P_1 Q_1} = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}, \overline{P_9 Q_9} = 2 + \frac{9}{5} = \frac{19}{5}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{P_1 Q_1} + \overline{P_2 Q_2} + \overline{P_3 Q_3} + \cdots + \overline{P_9 Q_9} &= \frac{9 \left(\frac{11}{5} + \frac{19}{5} \right)}{2} \\ &= \frac{9 \cdot 6}{2} = 27 \end{aligned}$$

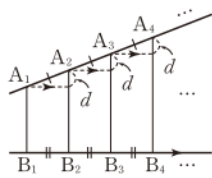
답 27

1등급 비밀노트 >>>

오른쪽 그림과 같이 두 직선 사이에
일정한 간격으로 평행하게 놓여진
선분

$\overline{A_1 B_1}, \overline{A_2 B_2}, \overline{A_3 B_3}, \overline{A_4 B_4}, \dots$

의 길이는 이 순서대로 공차가 d 인
등차수열을 이룬다.



07 $a_n = b_n - 1$ ($n=1, 2, 3, 4, 5$)이므로

$$\{a_n | n=1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$= \{-54, -24, 16, 36, 81\}$$

$r > 1$ 이면 등비수열 $\{a_n\}$
의 모든 항의 부호가 같다.

이때 $|r| > 1$ 이므로

$$r < -1$$

즉 $a_1=16, a_2=-24, a_3=36, a_4=-54, a_5=81$ 이므로

$$r = -\frac{a_2}{a_1} = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore a_3 + 6r = 36 + 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= 27$$

답 27

08 조건 ②에 의하여

$$2B = A + C$$

이때 $A + B + C = \pi$ 이므로

$$3B = \pi \quad \therefore B = \frac{\pi}{3}$$

조건 ④에 의하여

$$b^2 = a(a+c)$$

$$= a^2 + ac$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= c^2 + a^2 - ca$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$a^2 + ac = c^2 + a^2 - ca$$

$$c(c-2a) = 0 \quad \therefore c = 2a \quad (\because c > 0)$$

$c = 2a$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b^2 = 3a^2$$

$c^2 = 4a^2$ 이고, $a^2 + b^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$ 이므로

$$c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이

므로

$$C = \frac{\pi}{2}$$

답 ②

09 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 4095$ 이므로

$$\frac{a_1 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^m \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 4095$$

$$\therefore 2a_1 - a_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} = 4095$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

한편 $a_m = 1$ 이므로

$$a_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} = 1$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2a_1 - 1 = 4095 \quad \therefore a_1 = 2048$$

$a_1 = 2048$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$2048 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} = 1 \quad \therefore 2^{12-m} = 1$$

즉 $12 - m = 0$ 이므로

$$m = 12$$

답 ③

10 원 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4^n}$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정

식을 $y = 2x + k$ 로 놓으면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선

$2x - y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2^n}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2^n}, \quad |k| = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

따라서 두 접선의 방정식은

$$y = 2x + \frac{\sqrt{5}}{2^n}, \quad y = 2x - \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

직선 $y = 2x + \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ 의 x 절편과 y 절편은 각각

$$-\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}, \quad \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

직선 $y = 2x - \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ 의 x 절편과 y 절편은 각각

$$\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}, \quad -\frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}} \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{5}}{2^n} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}} \right| \cdot \left| -\frac{\sqrt{5}}{2^n} \right| \\ &= \frac{5}{2^{2n+2}} + \frac{5}{2^{2n+2}} \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \end{aligned}$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{5}{8}$ 이고, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열

이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} &= \frac{\frac{5}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{10} \right]}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{6} \left(1 - \frac{1}{2^{20}} \right) \end{aligned}$$

답 ③

11 2020년의 연매출액을 a 원이라 하면 2029년의 연매출액은 ar^9 원이므로

$$ar^9 = 8a, \quad r^9 = 8$$

$$\therefore r = \sqrt[9]{8} = \sqrt[3]{2} = 1.26$$

따라서 2020년부터 2029년까지의 연매출액의 합은

$$\begin{aligned} \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} &= \frac{a(8 \times 1.26 - 1)}{1.26 - 1} \\ &= \frac{9.08}{0.26} a \\ &= \frac{454}{13} a \end{aligned}$$

이므로 $p = 13, q = 454$

$$\therefore p + q = 467$$

답 467

12 2012년까지의 피해량의 합을 a 라 하면 2013년부터 2018년까지의 피해량은 다음 표와 같다.

년도	2013	2014	2015	2016	2017	2018
피해량	a	$2a$	$4a$	$8a$	$16a$	$32a$

원과 직선이 접할 때 원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

첫째항이 a , 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 6항까지의 합

$$\begin{aligned} &\frac{5}{2^{2n+2}} + \frac{5}{2^{2n+2}} \\ &= \frac{10}{4 \cdot 4^n} = \frac{10}{16 \cdot 4^{n-1}} \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^{10} &= r^9 \cdot r \\ &= 8 \times 1.26 \end{aligned}$$

2019년의 피해량은 2018년의 피해량과 같고 2020년부터는 피해량이 전년도에 $\frac{1}{2}$ 이므로 2019년부터 2024년까지의 피해량은 다음 표와 같다.

년도	2019	2020	2021	2022	2023	2024
피해량	$32a$	$16a$	$8a$	$4a$	$2a$	a

따라서 2024년까지의 농작물의 피해량의 합은

$$\begin{aligned} &(a + a + 2a + 4a + 8a + 16a + 32a) \\ &+ (32a + 16a + 8a + 4a + 2a + a) \\ &= a + 2(a + 2a + 4a + 8a + 16a + 32a) \\ &= a + 2 \cdot \frac{a(2^6 - 1)}{2 - 1} \\ &= a + 126a \\ &= 127a \end{aligned}$$

이므로 2024년까지의 농작물의 피해량의 합은 2012년까지의 농작물의 피해량의 합의 127배이다.

답 ①

III -2. 수열의 합

개념 & 핵심 기출

본책 78~79쪽

01 $\sum_{k=1}^{19} a_{k+1} - \sum_{i=2}^{20} a_{i-1}$
 $= (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19})$
 $= a_{20} - a_1 = a_1 + 19 \cdot 3 - a_1$
 $= 57$ 답 57

02 $\sum_{k=1}^{12} (a_k + 2)(b_k + 4) = \sum_{k=1}^{12} (a_k b_k + 4a_k + 2b_k + 8)$
 $= \sum_{k=1}^{12} a_k b_k + 2 \sum_{k=1}^{12} (2a_k + b_k) + \sum_{k=1}^{12} 8$
 $= 15 + 2 \cdot 21 + 8 \cdot 12$
 $= 153$ 답 153

03 $\sum_{k=n+1}^{2n} (2a_k + 1) = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} a_k + \sum_{k=n+1}^{2n} 1$
 $= 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{2n} 1 - \sum_{k=1}^n 1 \right)$
 $= 2 \cdot (10 - 4) + n$
 $= n + 12$
 따라서 $n + 12 = 27$ 이므로 $n = 15$ 답 15

04 주어진 수열의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(42 - 2n) = -2n^2 + 42n$$

따라서 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (-2k^2 + 42k)$$

$$= -2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 42 \sum_{k=1}^{10} k$$

$$= -2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 42 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}$$

$$= -770 + 2310 = 1540$$
 답 ②

05 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = -2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} (k + \alpha)(k + \beta)$$

$$= \sum_{k=1}^{20} \{k^2 + (\alpha + \beta)k + \alpha\beta\}$$

$$= \sum_{k=1}^{20} (k^2 - 3k - 2)$$

$$= \sum_{k=1}^{20} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 2$$

$$= \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} - 3 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - 2 \cdot 20$$

$$= 2870 - 630 - 40 = 2200$$
 답 ①

06 $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \sum_{k=3}^{10} k + \cdots + \sum_{k=10}^{10} k$
 $= (1 + 2 + 3 + \cdots + 10) + (2 + 3 + 4 + \cdots + 10)$
 $+ (3 + 4 + 5 + \cdots + 10) + \cdots + 10$
 $= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 10 \cdot 10$

수열 40, 38, 36, 34, 32, ...는 첫째항이 40, 공차가 -2인 등차수열이므로 일항은
 $40 + (n-1) \cdot (-2)$
 $= 42 - 2n$

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두근을 α, β 라 하면
 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a},$
 $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$$
 답 ④

07 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_n = 1 + (n-1)d = nd - d + 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (kd - d + 1)$$

$$= d \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 10d + 10$$

$$= 45d + 10$$

따라서 $45d + 10 = 190$ 이므로

$$45d = 180 \quad \therefore d = 4$$
 답 4

다른 풀이 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9d)}{2}$$

$$= 10 + 45d$$

즉 $10 + 45d = 190$ 이므로 $d = 4$

08 $a_n = -5 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 8$ 이므로

$$a_{n+2} = 3(n+2) - 8 = 3n - 2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15} (a_k + a_{k+2}) = \sum_{k=1}^{15} (3k - 8 + 3k - 2)$$

$$= \sum_{k=1}^{15} (6k - 10)$$

$$= 6 \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} - 10 \cdot 15$$

$$= 570$$
 답 570

09 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_n = 2n^2 + 3n + 1$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2n^2 + 3n + 1 - \{2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\}$$

$$= 4n + 1$$

따라서 $a_{2k} = 4 \cdot 2k + 1 = 8k + 1$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{14} a_{2k} = \sum_{k=1}^{14} (8k + 1)$$

$$= 8 \cdot \frac{14 \cdot 15}{2} + 14 = 854$$
 답 854

10 $a_{2n-1} + a_{2n} = b_n$ 이라 하고 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = 4n^2 + 8n$$

$n = 1$ 일 때, $b_1 = S_1 = 12$

$n \geq 2$ 일 때,

$$b_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 4n^2 + 8n - \{4(n-1)^2 + 8(n-1)\}$$

$$= 8n + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $b_1 = 12$ 는 $n = 1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입한 것과 같으므로

$$b_n = 8n + 4$$

따라서 $a_{2n-1} + a_{2n} = 8n + 4$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^8 k(a_{2k-1} + a_{2k}) &= \sum_{k=1}^8 k(8k + 4) = \sum_{k=1}^8 (8k^2 + 4k) \\ &= 8 \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 4 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} \\ &= 1632 + 144 \\ &= 1776\end{aligned}$$

답 ②

11 $\sum_{k=1}^{20} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{20} a_k$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{20} (a_{k+1} - a_k) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{21} - a_{20}) \\ &= a_{21} - a_1\end{aligned}$$

따라서 $p^2 - 2p = 80$ 이므로

$$\begin{aligned}p^2 - 2p - 80 &= 0, \quad (p+8)(p-10) = 0 \\ \therefore p &= 10 \quad (\because p > 0)\end{aligned}$$

답 ⑤

12 $S_n = n^2 + 2n$ 에서

$n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 3$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1\end{aligned}$$

이때 $a_1 = 3$ 은 $n=1$ 을 ①에 대입한 것과 같으므로

$$\begin{aligned}a_n &= 2n + 1 \\ \therefore a_{n+1} &= 2(n+1) + 1 = 2n + 3 \\ \therefore \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{27} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) \\ &= \frac{4}{27}\end{aligned}$$

답 ④

13 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$ 이므로

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2(n+1) - 1 = 2n + 1 \\ \therefore \sum_{k=1}^{60} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \sum_{k=1}^{60} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{60} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{121} - \sqrt{119}) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{121} - 1) \\ &= 5\end{aligned}$$

답 ③

1등급을 위한 고난도 문제

본책 80~82쪽

01 $\sum_{k=1}^m k(a_k - a_{k+1})$

$$\begin{aligned}&= 1 \cdot (a_1 - a_2) + 2 \cdot (a_2 - a_3) + \cdots + m \cdot (a_m - a_{m+1}) \\ &= a_1 + (2-1)a_2 + (3-2)a_3 + \cdots + \{m - (m-1)\}a_m \\ &\quad - ma_{m+1} \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m - ma_{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^m a_k - ma_{m+1} \\ &= 50 - ma_{m+1}\end{aligned}$$

따라서 $50 - ma_{m+1} = 100$ 이므로

$$ma_{m+1} = -50$$

답 -50

02 $f(x) + f(10-x) = 4$ 이므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{99}{10}\right) &= 4, \quad f\left(\frac{2}{10}\right) + f\left(\frac{98}{10}\right) = 4, \\ f\left(\frac{3}{10}\right) + f\left(\frac{97}{10}\right) &= 4, \quad \cdots, \quad f\left(\frac{49}{10}\right) + f\left(\frac{51}{10}\right) = 4\end{aligned}$$

또 $f(5) + f(5) = 4$ 에서 $f(5) = 2$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{99} f\left(\frac{k}{10}\right) &= f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + f\left(\frac{3}{10}\right) + \cdots + f\left(\frac{99}{10}\right) \\ &= \left\{ f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{99}{10}\right) \right\} + \left\{ f\left(\frac{2}{10}\right) + f\left(\frac{98}{10}\right) \right\} \\ &\quad + \cdots + \left\{ f\left(\frac{49}{10}\right) + f\left(\frac{51}{10}\right) \right\} + f(5) \\ &= 4 \cdot 49 + 2 = 198\end{aligned}$$

답 198

03 $\sum_{k=1}^{10} a_k = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_9 + a_{10})$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= 2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5 + 1) = 110 \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k + 10) &= \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 10 \\ &= 110 + 10 \cdot 10 = 210\end{aligned}$$

답 ④

04 $\sum_{k=1}^n (k^2 + k + 2) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k - 3)$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k + 2) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k - 3) + (n^2 + n + 2) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 5 + n^2 + n + 2 \\ &= 5(n-1) + n^2 + n + 2 \\ &= n^2 + 6n - 3\end{aligned}$$

따라서 $n^2 + 6n - 3 = 157$ 이므로

$$\begin{aligned}n^2 + 6n - 160 &= 0, \quad (n+16)(n-10) = 0 \\ \therefore n &= 10 \quad (\because n \text{은 자연수})\end{aligned}$$

답 10

05 점 (x_n, y_n) 이 함수 $y = 2(x-1)^2$ 의 그래프 위의 점 이므로

$$y_n = 2(x_n - 1)^2 = 2x_n^2 - 4x_n + 2$$

→ ①

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^9 y_k &= \sum_{k=1}^9 (2x_k^2 - 4x_k + 2) \\ &= 2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 - 4 \sum_{k=1}^9 x_k + \sum_{k=1}^9 2 \\ &= 2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 - 4 \cdot 36 + 2 \cdot 9 \\ &= 2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 - 126\end{aligned}$$

따라서 $2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 - 126 = 192$ 이므로

$$2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 = 318 \quad \therefore \sum_{k=1}^9 x_k^2 = 159$$

답 159

채점 기준	비율
① y_n 을 x_n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
② $\sum_{k=1}^9 y_k$ 를 $\sum_{k=1}^9 x_k^2$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
③ $\sum_{k=1}^9 x_k^2$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

$$\begin{aligned}06 \quad \sum_{k=1}^{10} (x - a_k)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (x^2 - 2a_k x + a_k^2) = \sum_{k=1}^{10} x^2 - \sum_{k=1}^{10} 2a_k x + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 \\ &= 10x^2 - 2x \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 \\ &= 10 \left(x^2 - \frac{1}{5} x \sum_{k=1}^{10} a_k \right) + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 \\ &= 10 \left(x - \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} a_k \right)^2 + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \frac{1}{10} \left(\sum_{k=1}^{10} a_k \right)^2\end{aligned}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{10} (x - a_k)^2$ 은 $x = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} a_k$ 일 때 최솟값을 갖는다.

이때

$$\begin{aligned}\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} 2^{k-1} \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \frac{1023}{10}\end{aligned}$$

이므로 $p = 10, q = 1023$

$$\therefore p + q = 1033$$

답 ④

1등급 비밀노트 >>>

$\sum_{k=1}^n r^k$ 은 첫째항과 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같으므로

$$\sum_{k=1}^n r^k = \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} \quad (\text{단, } r \neq 1)$$

$$07 \quad A = \sum_{k=1}^6 k(k+8), \quad B = \sum_{k=1}^6 (k+8)(k+14),$$

$$C = \sum_{k=1}^6 (k+14)(k+22) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}A - B + C &= \sum_{k=1}^6 \{k(k+8) - (k+8)(k+14) + (k+14)(k+22)\} \\ &= \sum_{k=1}^6 (k^2 + 22k + 196) \\ &= \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} + 22 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 196 \cdot 6 \\ &= 91 + 462 + 1176 = 1729\end{aligned}$$

답 1729

$$\begin{aligned}2^{n^2+1} - 2^{n^2-1} &= 4 \cdot 2^{n^2-1} - 2^{n^2-1} \\ &= 3 \cdot 2^{n^2-1}\end{aligned}$$

x 는 상수로 생각한다.

i 는 상수로 생각한다.

$p^m \times q^n$ (p, q 는 서로 다른 소수, m, n 은 자연수)으로 소인수분해되는 자연수의 양의 약수의 개수 $\Rightarrow (m+1)(n+1)$

$$08 \quad |\log_2 x - n^2| < 1 \text{에서}$$

$$-1 < \log_2 x - n^2 < 1, \quad n^2 - 1 < \log_2 x < n^2 + 1$$

$$\therefore 2^{n^2-1} < x < 2^{n^2+1}$$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 개수 a_n 은

$$\begin{aligned}a_n &= 2^{n^2+1} - 2^{n^2-1} - 1 \\ &= 3 \cdot 2^{n^2-1} - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10} \log_2 (a_k + 1) &= \sum_{k=1}^{10} \log_2 (3 \cdot 2^{k^2-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (\log_2 3 + k^2 - 1) \\ &= 10 \log_2 3 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 10 \\ &= 375 + 10 \log_2 3\end{aligned}$$

따라서 $p = 375, q = 10$ 이므로

$$p + q = 385$$

답 ③

09 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = n + 1, \quad \alpha_n \beta_n = -(n + 2)$$

$$\therefore \alpha_n^2 + \beta_n^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n \beta_n$$

$$= (n + 1)^2 + 2(n + 2)$$

$$= n^2 + 4n + 5$$

$$\therefore \sum_{k=1}^7 (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \sum_{k=1}^7 (k^2 + 4k + 5)$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} + 4 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} + 5 \cdot 7$$

$$= 140 + 112 + 35$$

$$= 287$$

답 287

채점 기준	비율
① $\alpha_n^2 + \beta_n^2$ 을 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② $\sum_{k=1}^7 (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ 의 값을 구할 수 있다.	70%

$$\begin{aligned}10 \quad \sum_{i=1}^{20} \left\{ \sum_{j=1}^i \frac{j \cdot 2^j}{i(i+1)} \right\} &= \sum_{i=1}^{20} \left\{ \frac{2^i}{i(i+1)} \sum_{j=1}^i j \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{20} \left\{ \frac{2^i}{i(i+1)} \cdot \frac{i(i+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{20} 2^{i-1} \\ &= \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 2^{20} - 1\end{aligned}$$

답 ①

11 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 2, 공비가 3이므로

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

이때 a_n 의 양의 약수의 개수 b_n 은

$$b_n = (1+1) \{(n-1)+1\} = 2n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{40} b_k = \sum_{k=1}^{40} 2k$$

$$= 2 \cdot \frac{40 \cdot 41}{2} = 1640$$

답 ③

12 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 -4 , 공차가 2이므로

$$a_n = -4 + (n-1) \cdot 2 = 2n-6 \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^m (a_{2k-1} + a_{2k}) &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2m-1} + a_{2m}) \\ &= \sum_{k=1}^{2m} a_k = \sum_{k=1}^{2m} (2k-6) \\ &= 2 \cdot \frac{2m(2m+1)}{2} - 6 \cdot 2m \\ &= 4m^2 - 10m \quad \cdots ② \end{aligned}$$

따라서 $4m^2 - 10m = 176$ 이므로

$$2m^2 - 5m - 88 = 0, \quad (2m+11)(m-8) = 0$$

$$\therefore m = 8 \quad (\because m \text{은 자연수}) \quad \cdots ③$$

답 8

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	20%
② $\sum_{k=1}^m (a_{2k-1} + a_{2k})$ 를 m 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
③ m 의 값을 구할 수 있다.	30%

다른 풀이 $a_n = 2n - 6$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= 4n-8, \quad a_{2n} = 4n-6 \\ \therefore \sum_{k=1}^m (a_{2k-1} + a_{2k}) &= \sum_{k=1}^m (4k-8+4k-6) \\ &= \sum_{k=1}^m (8k-14) \\ &= 8 \cdot \frac{m(m+1)}{2} - 14m \\ &= 4m^2 - 10m \end{aligned}$$

따라서 $4m^2 - 10m = 176$ 이므로

$$2m^2 - 5m - 88 = 0, \quad (2m+11)(m-8) = 0$$

$$\therefore m = 8 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

13 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} a_{k+2} - \sum_{k=2}^{21} a_k &= (a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{22}) \\ &\quad - (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{21}) \\ &= a_{22} - a_2 \\ &= (1+21d) - (1+d) \\ &= 20d \end{aligned}$$

따라서 $20d = 40$ 이므로

$$d = 2$$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

$a_{3m} = 6n-1, a_{3m+1} = 6n+1, a_{3m+2} = 6n+3$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 (a_{3k} + a_{3k+1} + a_{3k+2}) &= \sum_{k=1}^8 (6k-1 + 6k+1 + 6k+3) \\ &= \sum_{k=1}^8 (18k+3) \\ &= 18 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} + 3 \cdot 8 \\ &= 672 \end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$\sum_{k=1}^{20} a_{k+2} - \sum_{k=2}^{21} a_k = a_{22} - a_2 = 20d$$

따라서 $20d = 40$ 이므로 $d = 2$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^8 (a_{3k} + a_{3k+1} + a_{3k+2})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{26} a_k - \sum_{k=1}^2 a_k \\ &= \sum_{k=1}^{26} (2k-1) - (a_1 + a_2) \\ &= 2 \cdot \frac{26 \cdot 27}{2} - 26 - (1+3) \\ &= 672 \end{aligned}$$

14 $na_n = b_n$ 이라 하고 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까

지의 합을 S_n 이라 하면 $S_n = 2n^3 + 2n^2$

$n=1$ 일 때, $b_1 = S_1 = 4$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^3 + 2n^2 - \{2(n-1)^3 + 2(n-1)^2\} \\ &= 6n^2 - 2n \quad \cdots ① \end{aligned}$$

이때 $b_1 = 4$ 는 $n=1$ 을 ①에 대입한 것과 같으므로

$$b_n = 6n^2 - 2n$$

즉 $na_n = 6n^2 - 2n$ 이므로 $a_n = 6n - 2$

따라서 $a_{2n} = 6 \cdot 2n - 2 = 12n - 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 a_{2k} &= \sum_{k=1}^6 (12k-2) \\ &= 12 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} - 2 \cdot 6 \\ &= 240 \end{aligned}$$

답 ②

15 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하면 $S_n = 4^{n+1} - 4$

$n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 12$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 4^{n+1} - 4 - (4^n - 4) \\ &= 3 \cdot 4^n \quad \cdots ① \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 12$ 는 $n=1$ 을 ①에 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 3 \cdot 4^n \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^m \frac{a_{k+3} - a_{k+2}}{a_{k+1} - a_k} &= \sum_{k=1}^m \frac{3 \cdot 4^{k+3} - 3 \cdot 4^{k+2}}{3 \cdot 4^{k+1} - 3 \cdot 4^k} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{4^2 (3 \cdot 4^{k+1} - 3 \cdot 4^k)}{3 \cdot 4^{k+1} - 3 \cdot 4^k} \\ &= \sum_{k=1}^m 16 = 16m \quad \cdots ② \end{aligned}$$

따라서 $16m = 160$ 이므로 $m = 10$

③

답 10

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	50%
② $\sum_{k=1}^m \frac{a_{k+3} - a_{k+2}}{a_{k+1} - a_k}$ 를 m 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
③ m 의 값을 구할 수 있다.	20%

$$\begin{aligned}
 16 \quad & \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) \\
 &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\
 &= a_{n+1} - a_1 = a_{n+1} - 10 \\
 &\text{따라서 } a_{n+1} - 10 = 4n - 1 \text{ 이므로 } a_{n+1} = 4n + 9 \\
 &\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + \sum_{k=1}^9 a_{k+1} = 10 + \sum_{k=1}^9 (4k + 9) \\
 &= 10 + 4 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} + 9 \cdot 9 = 271 \quad \text{답 ①}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad & \sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-1-k} b_k \\
 &= 2^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} (a_{k+1} - 2a_k) \\
 &= 2^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{2^k} - \frac{a_k}{2^{k-1}} \right) \\
 &= 2^{n-1} \left\{ \left(\frac{a_2}{2} - a_1 \right) + \left(\frac{a_3}{2^2} - \frac{a_2}{2} \right) + \cdots + \left(\frac{a_n}{2^{n-1}} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-2}} \right) \right\} \\
 &= 2^{n-1} \left(\frac{a_n}{2^{n-1}} - a_1 \right) = a_n - 2^{n-1} \\
 &\text{따라서 } a_n - 2^{n-1} = a_n - f(n) \text{ 이므로 } f(n) = 2^{n-1} \\
 &\therefore f(10) = 2^9 = 512 \quad \text{답 512}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18 \quad & \sum_{k=1}^{25} \frac{a}{4k^2 - 1} \\
 &= \sum_{k=1}^{25} \frac{a}{(2k-1)(2k+1)} \\
 &= \frac{a}{2} \sum_{k=1}^{25} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
 &= \frac{a}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51} \right) \right\} \\
 &= \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{51} \right) = \frac{25}{51} a \quad \text{--- ①}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{25}{51}a$ 가 정수가 되려면 a 는 51의 배수이어야 하므로 자연수 a 의 최솟값은 51이다. --- ②

답 51

채점 기준	비율
① $\sum_{k=1}^{25} \frac{a}{4k^2-1}$ 를 간단히 할 수 있다.	70%
② a 의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

$$\begin{aligned}
 19 \quad & f\left(\frac{1}{k+1}\right) = \log_2 \left(1 + \frac{1}{k+1} \right) = \log_2 \frac{k+2}{k+1} \\
 &= \log_2 (k+2) - \log_2 (k+1), \\
 &f(k+1) = \log_2 (k+2) \text{ 이므로} \\
 &\sum_{k=1}^{30} \frac{f\left(\frac{1}{k+1}\right)}{f(k)f(k+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^{30} \frac{\log_2 (k+2) - \log_2 (k+1)}{\log_2 (k+1) \log_2 (k+2)} \\
 &= \sum_{k=1}^{30} \left\{ \frac{1}{\log_2 (k+1)} - \frac{1}{\log_2 (k+2)} \right\} \\
 &= \left(\frac{1}{\log_2 2} - \frac{1}{\log_2 3} \right) + \left(\frac{1}{\log_2 3} - \frac{1}{\log_2 4} \right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{\log_2 31} - \frac{1}{\log_2 32} \right) \\
 &= \frac{1}{\log_2 2} - \frac{1}{\log_2 32} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{답 } \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20 \quad & f(n) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\
 &\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{f(k)} = 3 \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{10} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{10 \cdot 11} - \frac{1}{11 \cdot 12} \right) \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{132} \right) = \frac{65}{88} \quad \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

1등급 비밀노트 >>>

부분분수로의 변형

상수 k 와 세 다항식 A, B, C 에 대하여

$$① \frac{k}{AB} = \frac{k}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \quad (\text{단, } A \neq B)$$

$$② \frac{k}{ABC} = \frac{k}{C-A} \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{BC} \right) \quad (\text{단, } A \neq C)$$

→ $\frac{1}{AB}, \frac{1}{BC}$ 은 ①을 이용하여 다시 변형할 수 있다.

21 $\overline{P_k Q_k} = \sqrt{k}, \overline{P_{k+1} Q_{k+1}} = \sqrt{k+1}, \overline{Q_k Q_{k+1}} = 1$ 이므로 사각형 $P_k Q_k Q_{k+1} P_{k+1}$ 의 넓이 S_k 는

$$\begin{aligned}
 S_k &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{P_k Q_k} + \overline{P_{k+1} Q_{k+1}}) \cdot \overline{Q_k Q_{k+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) \cdot 1 \\
 &= \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}{2} \\
 \therefore \sum_{k=1}^8 \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^8 \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2 \sum_{k=1}^8 (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
 &= 2 \{ (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{9} - \sqrt{8}) \} \\
 &= 2(\sqrt{9} - 1) = 4 \quad \text{답 ①}
 \end{aligned}$$

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 83쪽

01 $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 1$

(i) $n=4$ 일 때,

A가 처음에 1개 또는 2개의 구슬을 꺼내면 이 경우는 $n=3$ 또는 $n=2$ 일 때 B가 먼저 구슬을 꺼내는 경우와 같으므로 항상 B가 이긴다.

$$\therefore a_4 = -1$$

(ii) $n=5$ 일 때,

A가 처음에 1개의 구슬을 꺼내면 이 경우는 $n=4$ 일 때 B가 먼저 구슬을 꺼내는 경우와 같으므로

$$a_5 = 1$$

n	A	B
1	1개	
2	1개	1개
3	2개	1개

A가 처음에 2개의 구슬을 꺼내면 게임에서 지므로 1개의 구슬을 꺼낸다.

(iii) $n=6$ 일 때,

A가 처음에 2개의 구슬을 꺼내면 이 경우는 $n=4$ 일 때
B가 먼저 구슬을 꺼내는 경우와 같으므로

$$a_6 = 1$$

이상에서 구슬의 개수가 $3n-2$ 일 때는 마지막 구슬을 A가 꺼내게 되므로

$$a_{3n-2} = -1$$

구슬의 개수가 $3n-1$ 또는 $3n$ 일 때는 마지막 구슬을 B가 꺼내게 되므로

$$a_{3n-1} = 1, a_{3n} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^6 (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) + a_{19} + a_{20} \\ &= 1 \cdot 6 + (-1) + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

답 6

02 $\sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} S_k$

$$\begin{aligned} &= S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \cdots + S_{2m-1} - S_{2m} \\ &= -(S_2 - S_1) - (S_4 - S_3) - \cdots - (S_{2m} - S_{2m-1}) \\ &= -(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}) \\ &= -\sum_{k=1}^m a_{2k} \end{aligned}$$

한편 $S_n = 2n^2 - n$ 에서 $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3 \end{aligned}$$

따라서 $a_{2k} = 4 \cdot 2k - 3 = 8k - 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} S_k &= -\sum_{k=1}^m a_{2k} \\ &= -\sum_{k=1}^m (8k - 3) \\ &= -8 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + 3m \\ &= -4m^2 - m \end{aligned}$$

$-4m^2 - m > -105$ 에서

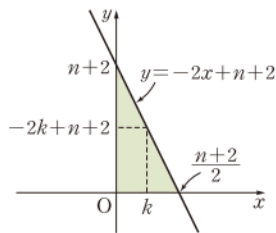
$$4m^2 + m - 105 < 0, \quad (4m+21)(m-5) < 0$$

$$\therefore -\frac{21}{4} < m < 5$$

따라서 자연수 m 의 최댓값은 4이다.

답 ①

03 직선 $y = -2x + n + 2$ 와 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



(i) $n=2l$ (l 은 자연수)일 때,

직선 $y = -2x + n + 2$, 즉 $y = -2x + 2l + 2$ 의 x 절편은

$$\frac{2l+2}{2} = l+1$$

A가 처음에 1개의 구슬을 꺼내면 게임에서 지므로 2개의 구슬을 꺼낸다.

$$\begin{aligned} a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k} \\ &= -1 + 1 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$a_1 < a_2 < a_3$ 이므로 S_3 의 값이 최소이려면 $b_1 > b_2 > b_3$ 이어야 한다.

$\{b_n\}$: 2, 4, 6, ...이면 $\{a_n\}$: 1, 3, 5, ...이어야 한다.

따라서 $x=k$ ($1 \leq k \leq l$)일 때 $y = -2k + 2l + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{2l} &= \sum_{k=1}^l (-2k + 2l + 2) \\ &= -2 \cdot \frac{l(l+1)}{2} + l(2l+2) \\ &= l^2 + l \end{aligned}$$

(ii) $n=2l-1$ (l 은 자연수)일 때,

직선 $y = -2x + n + 2$, 즉 $y = -2x + 2l + 1$ 의 x 절편은

$$\frac{2l+1}{2} = l + \frac{1}{2}$$

따라서 $x=k$ ($1 \leq k \leq l$)일 때 $y = -2k + 2l + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{2l-1} &= \sum_{k=1}^l (-2k + 2l + 1) \\ &= -2 \cdot \frac{l(l+1)}{2} + l(2l+1) \\ &= l^2 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $a_{2l-1} + a_{2l} = 2l^2 + l$ 이므로

$$2l^2 + l = 55, \quad (2l+1)(l-5) = 0$$

$$\therefore l = 5$$

즉 $a_9 + a_{10} = 55$ 이므로 $m = 9$

답 ④

04 $\neg$. $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5$ 라 하자.

$S_3 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ 의 값이 최소이려면

$$b_1 = 6, b_2 = 4, b_3 = 2$$

이어야 하므로 S_3 의 최솟값은

$$1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 28$$

$\therefore (a_k + b_k)^2 = a_k^2 + b_k^2 + 2a_k b_k$ 이므로

$$\begin{aligned} a_k b_k &= \frac{1}{2} \{169 - (a_k^2 + b_k^2)\} \\ \therefore S_6 &= \sum_{k=1}^6 a_k b_k = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{2} \{169 - (a_k^2 + b_k^2)\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^6 169 - \sum_{k=1}^6 (a_k^2 + b_k^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(169 \cdot 6 - \sum_{k=1}^{12} k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1014 - \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} \right) \\ &= 507 - 325 \\ &= 182 \end{aligned}$$

$\square$. $1 \leq i < j \leq n$ 인 자연수 i, j 에 대하여 $b_i < b_j$ 일 때 S_n 이 최대이려면 $a_i < a_j$ 이어야 한다.

즉 $b_k = 2k$ 이면 $a_k = 2k - 1$ 이어야 하므로 S_n 의 최댓값은

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n 2k(2k-1) \\ &= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 2k) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(4n-1)}{3} \end{aligned}$$

이상에서 $\neg, \sqsubset, \square$ 모두 옳다.

답 ⑤

05 $m=1$ 일 때, $k=1$ 이므로 $A_1=\{0\}$
 $m=2$ 일 때, $1 \leq k \leq 2$ 이므로 $A_2=\{0\}$
 $m=3$ 일 때, $1 \leq k \leq 3$ 이므로 $A_3=\{0, 1\}$
 $m=4$ 일 때, $1 \leq k \leq 4$ 이므로 $A_4=\{0, 1\}$
 $m=5$ 일 때, $1 \leq k \leq 5$ 이므로 $A_5=\{0, 1, 2\}$
 $m=6$ 일 때, $1 \leq k \leq 6$ 이므로 $A_6=\{0, 1, 2\}$

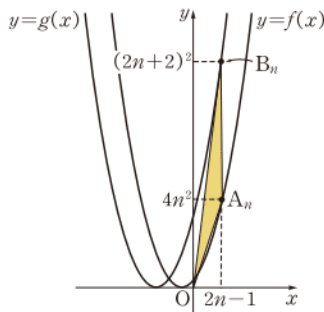
2를 1 또는 2로 나누었을
때의 나머지는 모두 0이다.

$\vdots$
 따라서 자연수 l 에 대하여
 $A_{2l-1}=A_{2l}=\{0, 1, 2, \dots, l-1\}$
 $\therefore n(A_{2l-1})=n(A_{2l})=l$
 $\therefore \frac{1}{10} \sum_{m=1}^{100} n(A_m) = \frac{1}{10} \sum_{l=1}^{50} \{n(A_{2l-1}) + n(A_{2l})\}$
 $= \frac{1}{10} \sum_{l=1}^{50} 2l$
 $= \frac{1}{10} \cdot 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 255$

답 255

06 $A_1(1, 2^2), B_1(1, 4^2)$
 점 B_1 을 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은 $y=4^2$ 이므로
 $A_2(3, 4^2)$
 점 A_2 를 지나고 y 축에 평행한 직선의 방정식은 $x=3$ 이므로
 $B_2(3, 6^2)$
 같은 방법으로 하면
 $A_3(5, 6^2), B_3(5, 8^2), \dots$
 이므로 두 점 A_n, B_n 의 x 좌표를 x_n 이라 하면 수열 $\{x_n\}$
 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이다.
 $\therefore x_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$

점 A_2 의 y 좌표가
 $4^2 = (3+1)^2$
 이므로 x 좌표는 3이다.



따라서 $A_n(2n-1, 4n^2), B_n(2n+1, (2n+2)^2)$ 이므로
 위의 그림에서 삼각형 OA_nB_n 의 넓이는

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \{(2n+2)^2 - 4n^2\} \cdot (2n-1)$$

$$= 2(2n+1)(2n-1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{S_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{2(2k+1)(2k-1)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{39} - \frac{1}{41}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{41}\right) = \frac{10}{41}$$

답 ①

$x_n = 2n-1$ 을
 $y = (x+1)^2$ 에 대입하면
 $(2n-1+1)^2 = 4n^2$
 $y = (x+3)^2$ 에 대입하면
 $(2n-1+3)^2$
 $= (2n+2)^2$

III -3. 수학적 귀납법

개념 & 핵심 기출

본책 84~85쪽

01 $a_{n+1} + \frac{1}{a_n+1} = 0$, 즉 $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3,
 $\dots$ 을 차례대로 대입하면

$$a_2 = -\frac{1}{a_1+1} = -\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

$$a_3 = -\frac{1}{a_2+1} = -\frac{1}{-\frac{1}{3}+1} = -\frac{3}{2}$$

$$a_4 = -\frac{1}{a_3+1} = -\frac{1}{-\frac{3}{2}+1} = 2$$

$$a_5 = -\frac{1}{a_4+1} = -\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

$\vdots$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 2, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{2}$ 이 이 순서대로 반복되므로

$$a_n = a_{n+3}$$

$$\textcircled{3} a_{11} = a_{14}$$

답 ③

02 $a_{n+1} = \left(\frac{1}{a_n}\right)^2$, 즉 $a_{n+1} = a_n^{-2}$ 의 n 에 1, 2, 3, $\dots$ 을 차
 례대로 대입하면

$$a_2 = a_1^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$a_3 = a_2^{-2} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right\}^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(-2)^2}$$

$$a_4 = a_3^{-2} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{(-2)^2}\right\}^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(-2)^3}$$

$\vdots$

따라서 $a_8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{(-2)^7} = 2^{128}$, $a_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(-2)^9} = 2^{512}$ 이므로

$$\log_2 a_{10} - \log_2 a_8 = \log_2 2^{512} - \log_2 2^{128}$$

$$= 512 - 128$$

$$= 384$$

답 ⑤

03 $a_{n+1} + a_n = 2n+3$, 즉 $a_{n+1} = -a_n + 2n+3$ 의 n 에 1,
 2, 3, $\dots$ 을 차례대로 대입하면

$$a_2 = -a_1 + 5 = -3 + 5 = 2$$

$$a_3 = -a_2 + 7 = -2 + 7 = 5$$

$$a_4 = -a_3 + 9 = -5 + 9 = 4$$

$$a_5 = -a_4 + 11 = -4 + 11 = 7$$

$$a_6 = -a_5 + 13 = -7 + 13 = 6$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = \begin{cases} n+2 & (n \text{이 홀수}) \\ n & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

(i) m 이 홀수일 때,

$$a_m > 100 \text{에서 } m+2 > 100$$

$$\therefore m > 98$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 99이다.

- (ii) m 이 짝수일 때,
 $a_m > 100$ 에서 $m > 100$
 따라서 자연수 m 의 최솟값은 102이다.
 (i), (ii)에서 자연수 m 의 최솟값은 99이다.

답 ②

- 04 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공차가 p 인 등차수열이므로
 $a_n = 3 + (n-1)p$
 $a_{10} + a_{11} + a_{12} = 63$ 에서
 $(3+9p) + (3+10p) + (3+11p) = 63$
 $30p = 54 \quad \therefore p = \frac{9}{5}$

답 ⑤

- 05 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 $a_2 - a_1 = 3$ 인 등차수열이므로
 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$
 $a_m = 100$ 에서
 $3m - 2 = 100, \quad 3m = 102$
 $\therefore m = 34$

답 ④

- 06 $a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}$ 의 양변을 제곱하면
 $\frac{a_{n+1}^2}{a_n a_{n+2}} = 1$
 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = 2$ 인 등비수열이므로
 $a_n = 2^{n-1}$
 $\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} 2^{k-1} = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023$

답 1023

- 07 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ 에서
 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
 위의 식의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면
 $a_2 = a_1 + 1 - \frac{1}{2}$
 $a_3 = a_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
 $= a_1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
 $= a_1 + 1 - \frac{1}{3}$
 $a_4 = a_3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$
 $= a_1 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$
 $= a_1 + 1 - \frac{1}{4}$
 $\vdots$
 $\therefore a_n = a_1 + 1 - \frac{1}{n} = 4 - \frac{1}{n}$

수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열
 $\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$
 $\Leftrightarrow 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$
 $\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{n}{n+1} a_{2n-1} \\ &= \frac{1}{n+1} a_1 \\ &= \frac{4}{n+1} \end{aligned}$$

a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등비중항이다.

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= \frac{2n-1}{2n+1} a_{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} a_2 \\ &= \frac{4}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{71}{18} \text{에서} \\ 4 - \frac{1}{m} &= \frac{71}{18}, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{18} \\ \therefore m &= 18 \end{aligned}$$

답 18

- 08 $a_{2n+1} = \frac{n}{n+1} a_{2n-1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 7을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2} a_1 \\ a_5 &= \frac{2}{3} a_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{3} a_1 \\ a_7 &= \frac{3}{4} a_5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} a_1 = \frac{1}{4} a_1 \\ &\vdots \\ \therefore a_{15} &= \frac{7}{8} a_{13} = \frac{1}{8} a_1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 또 $a_{2n+2} = \frac{2n-1}{2n+1} a_{2n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 14를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{3} a_2 \\ a_6 &= \frac{3}{5} a_4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{5} a_2 \\ a_8 &= \frac{5}{7} a_6 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5} a_2 = \frac{1}{7} a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{30} &= \frac{27}{29} a_{28} = \frac{1}{29} a_2 = \frac{4}{29} \\ \therefore a_{15} a_{30} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{29} = \frac{2}{29} \end{aligned}$$

답 ④

- 09 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \\ a_4 &= 2a_3 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31 \\ a_5 &= 2a_4 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- 이때 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 차례대로 나열하면
 3, 7, 15, 31, 63, ...
 즉 $2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^4 - 1, 2^5 - 1, 2^6 - 1, \dots$ 이므로
 $a_{10} = 2^{11} - 1, a_{11} = 2^{12} - 1$
 $\therefore (a_{10} + 1)(a_{11} + 1) = 2^{11} \cdot 2^{12} = 2^{23}$

답 ⑤

- 10 (ii) $n = k$ 일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면
 $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot 2^{k-1} = (k-1) \cdot 2^k + 1$
 양변에 $[(k+1) \cdot 2^k]$ 을 더하면
 $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot 2^{k-1} + (k+1) \cdot 2^k$
 $= (k-1) \cdot 2^k + 1 + (k+1) \cdot 2^k$
 $= 2^k (k-1 + k+1) + 1$
 $= 2^k \cdot 2k + 1 = [k \cdot 2^{k+1} + 1]$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } f(k) &= (k+1) \cdot 2^k, \quad g(k) = k \cdot 2^{k+1} + 1 \text{ 이므로} \\ f(4) - g(3) &= 5 \cdot 2^4 - (3 \cdot 2^4 + 1) \\ &= 31 \end{aligned}$$

답 ③

1등급을 위한 고난도 문제

본책 86~87쪽

01 $a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 즉 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2 \\ a_4 &= a_3 - a_2 = 2 - 4 = -2 \\ a_5 &= a_4 - a_3 = -2 - 2 = -4 \\ a_6 &= a_5 - a_4 = -4 - (-2) = -2 \\ a_7 &= a_6 - a_5 = -2 - (-4) = 2 \\ a_8 &= a_7 - a_6 = 2 - (-2) = 4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 2, 4, 2, -2, -4, -2가 이 순서대로 반복된다.

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$ 은 6개의 수가 순서대로 반복되므로

$$a_{n+6} = a_n$$

ㄴ. $100 = 6 \cdot 16 + 4$ 이므로

$$a_{100} = a_4 = -2$$

$$\text{ㄷ. } \sum_{k=1}^{30} (a_{2k} + a_{2k+2})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{30} a_{2k} + \sum_{k=1}^{30} a_{2k+2} \\ &= (a_2 + a_4 + \dots + a_{60}) + (a_4 + a_6 + \dots + a_{62}) \\ &= 10(a_2 + a_4 + a_6) + 10(a_4 + a_6 + a_8) \\ &= 10(4 - 2 - 2) + 10(-2 - 2 + 4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

02 $a_{n+1} = \begin{cases} 3 - a_n & (n \text{은 홀수}) \\ 5 - a_n & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 3 - a_1 = 3 - 1 = 2 \\ a_3 &= 5 - a_2 = 5 - 2 = 3 \\ a_4 &= 3 - a_3 = 3 - 3 = 0 \\ a_5 &= 5 - a_4 = 5 - 0 = 5 \\ a_6 &= 3 - a_5 = 3 - 5 = -2 \\ a_7 &= 5 - a_6 = 5 - (-2) = 7 \\ a_8 &= 3 - a_7 = 3 - 7 = -4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= 1 + (n-1) \cdot 2 \\ &= 2n - 1 \\ \therefore a_{25} &= 25 \end{aligned}$$

→ ①

→ ②

모든 자연수 n 에 대하여 $2^{n-1} + 1$ 과 2^{n-1} 은 서로소이다.

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + a_6 &= a_8 + a_{10} + a_{12} = \dots \\ &= a_{56} + a_{58} + a_{60} \\ a_4 + a_6 + a_8 &= a_{10} + a_{12} + a_{14} = \dots \\ &= a_{58} + a_{60} + a_{62} \end{aligned}$$

직선 $y=x$ 위의 두 점 $(a, a), (b, b)$ 의 중점 $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ 도 직선 $y=x$ 위의 점이다.

수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -2인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 2 + (n-1) \cdot (-2) \\ &= -2n + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore a_{50} = a_{2 \cdot 25} = -2 \cdot 25 + 4 = -46$$

$$\therefore a_{25} + a_{50} = -21$$

→ ③

→ ④

답 -21

채점 기준	비율
① $a_2, a_3, a_4, \dots$ 를 구할 수 있다.	30%
② a_{25} 를 구할 수 있다.	30%
③ a_{50} 을 구할 수 있다.	30%
④ $a_{25} + a_{50}$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

03 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{2a_1}{1+a_1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{1+a_2} = \frac{\frac{4}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{4}{5}$$

$$a_4 = \frac{2a_3}{1+a_3} = \frac{\frac{8}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{8}{9}$$

$$a_5 = \frac{2a_4}{1+a_4} = \frac{\frac{16}{9}}{1+\frac{8}{9}} = \frac{16}{17}$$

$$\therefore a_n = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} + 1}$$

따라서 $p_n = 2^{n-1} + 1, q_n = 2^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} p_n + q_n &= 2^{n-1} + 1 + 2^{n-1} \\ &= 2^n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^9 (p_k + q_k) &= \sum_{k=1}^9 (2^k + 1) \\ &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} + 9 \\ &= 1031 \end{aligned}$$

답 ①

04 두 점 A_1, P 가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 모든 자연수 n 에 대하여 두 점 A_n, M_n 도 직선 $y=x$ 위의 점이다.

점 A_n 의 좌표를 (x_n, x_n) 이라 하면

$$M_n \left(\frac{1}{2}(x_n + 1), \frac{1}{2}(x_n + 1) \right)$$

이므로

$$A_{n+1} \left(\frac{1}{4}(x_n + 1), \frac{1}{4}(x_n + 1) \right)$$

$$\therefore x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + 1)$$

..... ㉠

한편 $a_n = \sqrt{x_n^2 + x_n^2} = \sqrt{2}x_n$ 이므로

$$a_{n+1} = \sqrt{2}x_{n+1}$$

$$\therefore x_n = \frac{a_n}{\sqrt{2}}, x_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}}$$

앞의 식을 ㉗에 대입하면

$$\frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{\sqrt{2}} + 1 \right)$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로

$$p^2 + q^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{3}{16}$$

답 3/16

05 조건 (나)에 의하여 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -6인 등차수열이므로 조건 (가)에서

$$a_1 + 2(a_1 - 6) = 9, \quad 3a_1 = 21$$

$$\therefore a_1 = 7$$

$$\therefore a_n = 7 + (n-1) \cdot (-6)$$

$$= -6n + 13$$

→ ①

$$\therefore \sum_{k=1}^8 (a_k + p) = \sum_{k=1}^8 (-6k + 13 + p)$$

$$= -6 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} + 13 \cdot 8 + p \cdot 8$$

$$= 8p - 112$$

→ ②

$$8p - 112 > 200 \text{에서} \quad 8p > 312$$

$$\therefore p > 39$$

따라서 정수 p 의 최솟값은 40이다.

→ ③

답 40

06 $4a_{n+1}^2 - 9a_n^2 = 0$ 에서

$$(2a_{n+1} + 3a_n)(2a_{n+1} - 3a_n) = 0$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n \quad (\because 2a_{n+1} + 3a_n > 0)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$$

$$a_2 = \frac{3}{2}a_1, a_3 = \frac{9}{4}a_1, a_4 = \frac{27}{8}a_1, a_5 = \frac{81}{16}a_1 \text{에서 } a_1, a_2, a_3,$$

a_4, a_5 가 모두 자연수이므로 a_1 은 16의 배수이어야 한다.

이때 $1 < a_1 < 50$ 이므로

$$a_1 = 16 \text{ 또는 } a_1 = 32 \text{ 또는 } a_1 = 48$$

$$a_1 = 16 \text{이면 } a_5 = 81 \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_5 = 97$$

$$a_1 = 32 \text{ 이면 } a_5 = 162 \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_5 = 194$$

$$a_1 = 48 \text{ 이면 } a_5 = 243 \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_5 = 291$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1 - n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

2, 4, 8, 16의 공배수

따라서 $a_1 + a_5$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$291 + 97 = 388$$

답 ④

07 $a_1 = 20$ 이므로 $n = 1, 2, 3, \dots, m$ 일 때 $a_n \geq 2$ 라 하면

$$a_{n+1} = a_n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots, m)$$

즉 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m+1}$ 은 첫째항이 20, 공차가 -2인 등차수열이므로

$$a_n = 20 + (n-1) \cdot (-2)$$

$$= -2n + 22 \quad (n = 1, 2, 3, \dots, m+1)$$

이때 $a_n \geq 2$ 에서 $-2n + 22 \geq 2$

$$2n \leq 20 \quad \therefore n \leq 10$$

$m = 10$

따라서 $n = 1, 2, 3, \dots, 11$ 일 때 $a_n = -2n + 22$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{11} a_k = \sum_{k=1}^{11} (-2k + 22)$$

$$= -2 \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} + 22 \cdot 11 = 110$$

한편

$$a_{12} = |a_{11} - 2| = 2, \quad a_{13} = |a_{12} - 2| = 0,$$

$$a_{14} = |a_{13} - 2| = 2, \quad a_{15} = |a_{14} - 2| = 0,$$

⋮

이므로

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{13} a_k = 110 + 2 = 112$$

$$\sum_{k=1}^{14} a_k = \sum_{k=1}^{15} a_k = 110 + 2 \cdot 2 = 114$$

$$\sum_{k=1}^{16} a_k = \sum_{k=1}^{17} a_k = 110 + 2 \cdot 3 = 116$$

⋮

$$\therefore \sum_{k=1}^{2l} a_k = \sum_{k=1}^{2l+1} a_k = 100 + 2l \quad (l = 6, 7, 8, \dots)$$

$$100 + 2l \leq 150 \text{에서} \quad 2l \leq 50$$

$$\therefore l \leq 25$$

따라서 $l = 25$ 일 때 $\sum_{k=1}^{50} a_k = \sum_{k=1}^{51} a_k = 150$ 이므로

$\sum_{k=1}^n a_k \leq 150$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은 51이다.

답 ③

08 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, 즉 $a_{n+1} = a_n + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = a_1 + \sqrt{2} - 1$$

$$a_3 = a_2 + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= a_1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= a_1 + \sqrt{3} - 1$$

$$a_4 = a_3 + \sqrt{4} - \sqrt{3}$$

$$= a_1 + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{4} - \sqrt{3}$$

$$= a_1 + \sqrt{4} - 1$$

⋮

$$\therefore a_{169} = a_1 + \sqrt{169} - 1$$

$$= 2 + 13 - 1 = 14$$

답 14

다른 풀이 $a_{n+1}=a_n+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 에서

$$a_{n+1}-\sqrt{n+1}=a_n-\sqrt{n}$$

$a_n-\sqrt{n}=b_n$ 이라 하면

$$b_{n+1}=b_n$$

즉 $b_n=b_1=a_1-1=1$ 이므로

$$a_n-\sqrt{n}=1$$

$$\therefore a_n=\sqrt{n}+1$$

$$\therefore a_{169}=\sqrt{169}+1=14$$

09 $a_{n+1}-a_n=\frac{2a_n}{2n-1}$, 즉 $a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n-1}a_n$ 의 n 에 1, 2,

3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2=3a_1$$

$$a_3=\frac{5}{3}a_2=\frac{5}{3}\cdot 3a_1=5a_1$$

$$a_4=\frac{7}{5}a_3=\frac{7}{5}\cdot 5a_1=7a_1$$

$$a_5=\frac{9}{7}a_4=\frac{9}{7}\cdot 7a_1=9a_1$$

$\vdots$

$$\therefore a_n=(2n-1)a_1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2k-1)a_1$$

$$=a_1\left(2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10\right)$$

$$=100a_1$$

따라서 $100a_1=40$ 이므로 $a_1=\frac{2}{5}$

답 ②

10 $a_{n+1}=4a_n+3$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2=4a_1+3=4\cdot 1+3=7$$

$$a_3=4a_2+3=4\cdot 7+3=31$$

$$a_4=4a_3+3=4\cdot 31+3=127$$

$$a_5=4a_4+3=4\cdot 127+3=511$$

$\vdots$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 차례대로 나열하면

$$1, 7, 31, 127, 511, \dots$$

즉 $2^1-1, 2^3-1, 2^5-1, 2^7-1, 2^9-1, \dots$ 이므로

$$a_n=2^{2n-1}-1$$

따라서 $2^{2k-1}-1=2^{45}-1$ 이므로

$$2k-1=45, \quad 2k=46$$

$$\therefore k=23$$

→ ①

→ ②

→ ③

답 23

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2a_n}{2n-1}$$

$$(a_{n+1}-a_n)(2n-1)$$

$$=2a_n$$

$$(2n-1)a_{n+1}$$

$$=(2n+1)a_n$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n-1}a_n$$

$n=k+1$ 일 때 주어진 부등식의 우변은 2^{k+1} 이므로 2^k+3 과 2^{k+1} 의 대소를 비교한다.

$n=m+1$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}$$

$$=\sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k-1)\cdot 2k} + \frac{1}{(2m+1)\cdot 2(m+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k} + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)}$$

$$=\sum_{k=2}^m \frac{1}{m+k} + \frac{1}{m+1} + \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^m \frac{1}{m+k} + \frac{1}{2m+1} + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{2m+2}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^m \frac{1}{m+k} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2}$$

$$=\frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \frac{1}{m+4}$$

$$+\dots + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{m+1+k}$$

$$\text{따라서 } f(m)=\frac{1}{(2m+1)\cdot 2(m+1)}, g(m)=\frac{1}{2m+2}$$

이므로

$$\frac{1}{f(7)} + \frac{1}{g(7)} = 15\cdot 16 + 16 = 256$$

답 ⑤

12 $3n+2 < 2^n$

..... ㉠

(i) $n=4$ 일 때,

$$(\text{좌변})=3\cdot 4+2=14, (\text{우변})=2^4=16$$

따라서 $n=4$ 일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k\geq 4$)일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$3k+2 < 2^k$$

양변에 3을 더하면

$$3k+2+3 < 2^k+3$$

$$\therefore 3(k+1)+2 < 2^k+3$$

이때 $k\geq 4$ 인 자연수 k 에 대하여 $2^{k+1}-2^k > 3$, 즉

$$2^k+3 < 2^{k+1}$$
이므로

$$3(k+1)+2 < 2^{k+1}$$

..... ㉡

㉡은 ㉠의 n 에 $k+1$ 을 대입한 것과 같으므로 $n=k+1$

일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① $a_2, a_3, a_4, \dots$ 를 구할 수 있다.	20%
② a_n 을 구할 수 있다.	50%
③ k 의 값을 구할 수 있다.	30%

11 (ii) $n=m$ 일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k-1)\cdot 2k} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k}$$

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 88쪽

01 $\neg, a_n+a_{n+1}=4n+6$, 즉 $a_{n+1}=-a_n+4n+6$ 의 n 에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_1 + 10 = -1 + 10 = 9 \\ a_3 &= -a_2 + 14 = -9 + 14 = 5 \\ \therefore a_4 &= -a_3 + 18 = -5 + 18 = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{2n-1} + a_{2n} &= 4(2n-1) + 6 \\ &= 8n + 2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\begin{aligned} a_{2n+1} + a_{2n+2} &= 4(2n+1) + 6 \\ &= 8n + 10 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧ - ⑦을 하면

$$\begin{aligned} &-(a_{2n-1} + a_{2n}) + (a_{2n+1} + a_{2n+2}) = 8 \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} (-1)^k (a_{2k-1} + a_{2k}) &= 8 \\ &= -(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) - (a_5 + a_6) \\ &\quad + \dots + (a_{19} + a_{20}) \\ &= 5 \cdot 8 = 40 \end{aligned}$$

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_n = a + (n-1)d, \quad a_{n+1} = a + nd$$

$$a_n + a_{n+1} = 4n + 6 \text{이므로}$$

$$2nd + 2a - d = 4n + 6$$

$$\text{따라서 } 2d = 4, \quad 2a - d = 6 \text{이므로}$$

$$d = 2, \quad a = 4$$

$$\therefore a_n = 4 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 2$$

$$a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{10} 4k \\ &= 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 220 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

02 조건 ㄱ에서 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 은 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7, \quad a_5 = 9, \quad a_6 = 11$$

조건 ㄴ에서

$$a_{6n-5} = a_1 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 4$$

$$a_{6n-4} = a_2 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 2$$

$$a_{6n-3} = a_3 + (n-1) \cdot 5 = 5n$$

$$a_{6n-2} = a_4 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 2$$

$$a_{6n-1} = a_5 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 4$$

$$a_{6n} = a_6 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{30} a_k &= \sum_{k=1}^5 (a_{6k-5} + a_{6k-4} + a_{6k-3} + a_{6k-2} + a_{6k-1} + a_{6k}) \\ &= \sum_{k=1}^5 (5k - 4 + 5k - 2 + 5k + 0 + 5k + 2 + 5k + 4 + 5k + 6) \\ &= \sum_{k=1}^5 (30k + 6) \\ &= 30 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + 6 \cdot 5 \\ &= 480 \end{aligned}$$

답 480

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} &= \sqrt{x_4^2 + y_4^2} \text{의} \\ \text{양변을 제곱하면} \\ x_1^2 + y_1^2 &= x_4^2 + y_4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2k+1 &= 15 \text{에서} \\ 2k &= 14 \quad \therefore k=7 \end{aligned}$$

수열 $a_1, a_7, a_{13}, \dots$,
수열 $a_2, a_8, a_{14}, \dots$,
수열 $a_3, a_9, a_{15}, \dots$,
수열 $a_4, a_{10}, a_{16}, \dots$,
수열 $a_5, a_{11}, a_{17}, \dots$,
수열 $a_6, a_{12}, a_{18}, \dots$
은 모두 공차가 5인 등차수열이다.

$$2l = 20 \text{에서} \quad l = 10$$

다른 풀이 수열 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이고, 수열 $a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ 는 첫째항이 6, 공차가 2인 등차수열이다. 같은 방법으로 6개의 항씩 등차수열을 이루므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} a_k &= \sum_{k=1}^6 (2k-1) + \sum_{k=1}^6 (2k+4) + \sum_{k=1}^6 (2k+9) \\ &\quad + \sum_{k=1}^6 (2k+14) + \sum_{k=1}^6 (2k+19) \\ &= \sum_{k=1}^6 (10k + 45) \\ &= 10 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 6 \cdot 45 = 480 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 03 \quad x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 &= (ax_n - by_n)^2 + (bx_n + ay_n)^2 \\ &= (a^2 + b^2)x_n^2 + (a^2 + b^2)y_n^2 \\ &= (a^2 + b^2)(x_n^2 + y_n^2) \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{x_n^2 + y_n^2\}$ 은 첫째항이 $x_1^2 + y_1^2 = 1$, 공비가 $a^2 + b^2$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} x_n^2 + y_n^2 &= (a^2 + b^2)^{n-1} \\ \overline{OP_1} = \overline{OP_4} \text{에서 } \overline{OP_1}^2 &= \overline{OP_4}^2 \text{이므로} \\ x_1^2 + y_1^2 &= x_4^2 + y_4^2 \\ 1 &= (a^2 + b^2)^3 \\ \therefore a^2 + b^2 &= 1 \quad (\because a, b \text{는 실수}) \end{aligned}$$

답 ①

04 $a_{n+2} = \frac{2n}{n+2}a_n$ 의 n 에 1, 3, 5, ..., 13을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2}{3}a_1 \\ a_5 &= \frac{6}{5}a_3 = \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3}a_1 = \frac{2^2}{5}a_1 \\ a_7 &= \frac{10}{7}a_5 = \frac{10}{7} \cdot \frac{2^2}{5}a_1 = \frac{2^3}{7}a_1 \\ &\vdots \\ \therefore a_{15} &= \frac{2^7}{15}a_1 = \frac{2^7}{5} \end{aligned}$$

한편 $a_{n+2} = \frac{2n}{n+2}a_n$ 의 n 에 2, 4, 6, ..., 18을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{4}{4}a_2 = \frac{2^2}{4}a_2 \\ a_6 &= \frac{8}{6}a_4 = \frac{8}{6} \cdot \frac{2^2}{4}a_2 = \frac{2^3}{6}a_2 \\ a_8 &= \frac{12}{8}a_6 = \frac{12}{8} \cdot \frac{2^3}{6}a_2 = \frac{2^4}{8}a_2 \\ &\vdots \\ \therefore a_{20} &= \frac{2^{10}}{20}a_2 = \frac{2^8}{5}a_2 \end{aligned}$$

이때 $a_{15} = a_{20}$ 이므로

$$\frac{2^7}{5} = \frac{2^8}{5}a_2 \quad \therefore a_2 = \frac{1}{2}$$

답 ③

05 (i) $n = \boxed{2}$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}, (\text{우변}) = 2$$

이때

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \\ = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} > 2$$

이므로 $n=2$ 일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=m$ ($m \geq 2$)일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m^2}} > m$$

$n=m+1$ 일 때,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(m+1)^2}} \\ = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m^2}} + \sum_{k=1}^{2m+1} \frac{1}{\sqrt{m^2+k}} \\ > m + \sum_{k=1}^{2m+1} \frac{1}{\sqrt{m^2+k}}$$

이때

$$\sum_{k=1}^{2m+1} \frac{1}{\sqrt{m^2+k}} > \sum_{k=1}^{2m+1} \frac{1}{\sqrt{m^2+2m+1}} \\ = \sum_{k=1}^{2m+1} \frac{1}{m+1} \\ = (2m+1) \cdot \frac{1}{m+1} \\ = \frac{2m+1}{m+1} > 1$$

이므로

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(m+1)^2}} > m+1$$

따라서 $a=2$, $f(m)=2m+1$, $g(m)=\frac{2m+1}{m+1}$ 이므로

$$a+f(10)g(6)=2+21 \cdot \frac{13}{7} \\ = 41$$

답 41

직선 $y=f(x)$ 는 두 점
(0, 33), (11, 0)을 지나
므로

$$f(x) = \frac{0-33}{11-0}x + 33 \\ = -3x + 33$$

직선 $y=g(x)$ 는 두 점
(0, -5), (5, 0)을 지나
므로

$$g(x) = \frac{0+5}{5-0}x - 5 \\ = x - 5$$

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{m^2+2}} \\ + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m^2+2m+1}} \\ > \frac{1}{\sqrt{m^2+2m+1}} \\ + \frac{1}{\sqrt{m^2+2m+1}} \\ + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m^2+2m+1}}$$

등차수열 $a_1, a_3, a_5, \dots$,
 a_{2n-1} 의 공차는
 $2d=2 \cdot 3=6$

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 89~92쪽

01 전략 먼저 두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 각각 지나는 점을 이용하여 직선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=-3x+33$, $g(x)=x-5$

$$\neg. a_n = (-3n+33) + (n-5)$$

$$= -2n+28$$

$$= 26 + (n-1) \cdot (-2)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -2인 등차수열이다.

$$\neg. b_n = (-3n+33)(n-5) \text{이므로 } a_n b_n = 0 \text{에서}$$

$$(-2n+28)(-3n+33)(n-5)=0$$

$$(n-5)(n-11)(n-14)=0$$

$$\therefore n=5 \text{ 또는 } n=11 \text{ 또는 } n=14$$

따라서 구하는 합은

$$5+11+14=30$$

$$\neg. b_n = -3(n-5)(n-11) \text{이므로}$$

$n=1$ 일 때,

$$c_1 = b_1 = -3 \cdot (-4) \cdot (-10) = -120$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$c_n = b_n - b_{n-1}$$

$$= -3(n-11)(n-5)$$

$$+ 3(n-1-11)(n-1-5)$$

$$= -6n+51$$

$$= 45 + (n-1) \cdot (-6)$$

따라서 $n \geq 2$ 일 때 수열 $\{c_n\}$ 은 공차가 -6인 등차수열이므로

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + c_{19} - c_{20}$$

$$= c_1 + \{(c_3 - c_2) + (c_5 - c_4) \\ + \cdots + (c_{19} - c_{18})\} - c_{20}$$

$$= -120 + (-6) \cdot 9 - (-6 \cdot 20 + 51)$$

$$= -105$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ③

02 전략 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하고 $A_m - B_m$ 을 m 과 d 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$A_m - B_m = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{2m} - a_{2m-1})$$

$$= d + d + \cdots + d$$

$$= md$$

이때 $A_m - B_m = 273 - 234 = 39$ 이므로

$$md = 39$$

d 는 10 이하의 소수이므로

$$d=3, m=13$$

따라서 $B_{13}=234$ 에서

$$\frac{13(2a_1 + 12 \cdot 6)}{2} = 234$$

$$13(a_1 + 36) = 234, \quad a_1 + 36 = 18$$

$$\therefore a_1 = -18$$

$$\therefore a_{13} = -18 + 12 \cdot 3 = 18$$

답 ②

03 전략 수열 $\{c_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $c_1 = S_1$, $c_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용한다.

풀이 $a_n + 2n = b_n$ 이라 하자.

$n=1$ 일 때,

$$b_1 = S_1 = 4 + k$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (4n^2 + kn) - \{4(n-1)^2 + k(n-1)\} \\ &= 8n + k - 4 \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

이때 $b_1 = 4 + k$ 는 $n=1$ 을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$b_n = 8n + k - 4$$

즉 $a_n + 2n = 8n + k - 4$ 이므로

$$a_n = 6n + k - 4$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고, $a_1 = 2 + k$, $a_{10} = 56 + k$ 이므로

$$\frac{10\{(2+k) + (56+k)\}}{2} = 250$$

$$2k + 58 = 50, \quad 2k = -8$$

$$\therefore k = -4$$

답 ②

다른 풀이 $S_{10} = (a_1 + 2) + (a_2 + 4) + (a_3 + 6) + \dots + (a_{10} + 20)$
 $= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) + (2 + 4 + 6 + \dots + 20)$
 $= 250 + \frac{10(2+20)}{2} = 360$

이때 $S_{10} = 4 \cdot 10^2 + k \cdot 10 = 10k + 400$ 이므로

$$10k + 400 = 360, \quad 10k = -40$$

$$\therefore k = -4$$

04 전략 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하고 주어진 조건을 a 와 r 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하자.

$a_3 = 1$ 에서

$$ar^2 = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$a_9 - a_7 = 12(a_6 - a_5)$ 에서

$$ar^8 - ar^6 = 12(ar^5 - ar^4)$$

$$ar^6(r^2 - 1) = 12ar^4(r - 1)$$

$$r^2(r+1) = 12, \quad r^3 + r^2 - 12 = 0$$

$$(r-2)(r^2 + 3r + 6) = 0$$

$$\therefore r = 2$$

$r=2$ 를 ㉠에 대입하면 $4a = 1$

$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

$a_n = 6n + k - 4$
 $= 2 + k + (n-1) \cdot 6$
 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $2+k$, 공차가 6인 등차수열이다.

첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합

㉠에서 $a = 2(r-1)$
 ㉡에서 $a = \frac{2}{3}(r+1)$
 $2(r-1) = \frac{2}{3}(r+1)$ 이므로
 $r = 2, a = 2$

$$\therefore a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-3}$$

$$a_m > 100 \text{에서 } 2^{m-3} > 100$$

$$\text{이때 } 2^6 = 64, 2^7 = 128 \text{이므로}$$

$$m-3 > 6 \quad \therefore m > 9$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 10이다.

답 ⑤

05 전략 첫째항이 a , 공비가 r ($r \neq 1$)인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은 $\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ 임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하자.

조건 (가)에서

$$\frac{a(r^p - 1)}{r - 1} = 30 \quad \dots\dots ㉠$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \frac{a(r^{2p} - 1)}{r - 1} &= \frac{a(r^p - 1)(r^p + 1)}{r - 1} \\ &= 30(r^p + 1) \end{aligned}$$

즉 $30(r^p + 1) = 510$ 이므로

$$r^p + 1 = 17 \quad \therefore r^p = 16 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉡을 ㉠에 대입하면 } \frac{15a}{r - 1} = 30$$

$$\therefore \frac{a}{r - 1} = 2 \quad \dots\dots ㉢$$

조건 (다)에서

$$\begin{aligned} \frac{a^2\{(r^2)^p - 1\}}{r^2 - 1} &= \frac{a^2(r^{2p} - 1)}{(r+1)(r-1)} \\ &= \frac{a}{r+1} \cdot \frac{a(r^{2p} - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{510a}{r+1} \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{510a}{r+1} = 340 \text{이므로}$$

$$\frac{a}{r+1} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$$a = 2, r = 2$$

$$r = 2 \text{를 ㉡에 대입하면 } 2^p = 2^4$$

$$\therefore p = 4$$

답 ①

06 전략 A원이 $k\%$ 상승 $\Rightarrow A\left(1 + \frac{k}{100}\right)$ 원,

A원이 $k\%$ 감소 $\Rightarrow A\left(1 - \frac{k}{100}\right)$ 원

풀이 올해 구입한 휴대용 저장 장치의 1개당 가격과 개수를 용량별로 나타내면 다음 표와 같다.

용량	8 GB	16 GB	32 GB	64 GB	128 GB
가격 (원)	$a \times 1.2$	$\frac{3}{2}a \times 1.2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 a \times 1.2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 a \times 1.2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 a \times 1.2$
개수	$16b \times 0.5$	$8b \times 0.5$	$4b \times 0.5$	$2b \times 0.5$	$b \times 0.5$

따라서 구하는 금액의 합은

$$\begin{aligned}
 & (a \times 1.2) \times (16b \times 0.5) + \left(\frac{3}{2}a \times 1.2\right) \times (8b \times 0.5) \\
 & + \cdots + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^4 a \times 1.2\right] \times (b \times 0.5) \\
 & = 16ab \times \frac{3}{5} + 12ab \times \frac{3}{5} + \cdots + \frac{81}{16}ab \times \frac{3}{5} \\
 & = \frac{48}{5}ab \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right] \\
 & \quad 1 - \frac{3}{4} \\
 & = \frac{192}{5}ab \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right] \text{ (원)}
 \end{aligned}$$

첫째항이 $16ab \times \frac{3}{5}$ 이고
공비가 $\frac{3}{4}$ 인 등비수열의
첫째항부터 제5항까지의
합

답 ⑤

07 전략 월이율 $r\%$ 의 복리로 매월 초에 a 원씩 n 개월 동안
적립할 때, n 개월째 말에 받는 적립금의 원리합계는
 $\frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$ 원임을 이용한다.

$$\begin{aligned}
 \text{풀이} \quad S &= 50(1+0.005) + 50(1+0.005)^2 \\
 &+ \cdots + 50(1+0.005)^{30} \\
 &= \frac{50 \times 1.005 \times (1.005^{30} - 1)}{1.005 - 1} \\
 &= \frac{50 \times 1.005 \times (1.16 - 1)}{0.005} \\
 &= 1608 \text{ (만 원)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &= 100(1+0.01) + 100(1+0.01)^2 \\
 &+ \cdots + 100(1+0.01)^{60} \\
 &= \frac{100 \times 1.01 \times (1.01^{60} - 1)}{1.01 - 1} \\
 &= \frac{100 \times 1.01 \times (1.82 - 1)}{0.01} \\
 &= 8282 \text{ (만 원)} \\
 \therefore T - 5S &= 8282 - 5 \cdot 1608 \\
 &= 242 \text{ (만 원)}
 \end{aligned}$$

답 ④

08 전략 [매듭 n]을 만드는 데 필요한 검정 구슬의 개수를
구한다.

풀이 [매듭 n]을 만드는 데 필요한 검정 구슬의 개수를 a_n
이라 하면

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 4, a_2 = 6, a_3 = 8, \cdots \\
 \text{이므로 수열 } \{a_n\} &\text{은 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이다.} \\
 \therefore a_n &= 4 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 2
 \end{aligned}$$

따라서 [매듭 1]부터 [매듭 m]까지 만드는 데 필요한 검정
구슬의 개수는

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^m (2k+2) &= 2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + 2m \\
 &= m^2 + 3m
 \end{aligned}$$

$$m^2 + 3m \leq 100 \text{에서 } m^2 + 3m - 100 \leq 0$$

$$\therefore \frac{-3 - \sqrt{409}}{2} \leq m \leq \frac{-3 + \sqrt{409}}{2}$$

이때 m 은 자연수이므로 m 의 최댓값은 8이다.

답 ①

위, 아래 각각 한 개씩 늘
어난다.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{409} &= 20.\times\times\times 0 \text{이므로} \\
 \frac{-3 + \sqrt{409}}{2} &= 8.\times\times\times
 \end{aligned}$$

09 전략 $n=2m-1$ 일 때와 $n=2m$ 일 때로 나누어 생각한다.

$$\begin{aligned}
 \text{풀이} \quad a_n &= (-1)^{n+1}(3n+1) \text{에서} \\
 a_{2n-1} &= (-1)^{2n} \cdot \{3(2n-1)+1\} = 6n-2, \\
 a_{2n} &= (-1)^{2n+1} \cdot (3 \cdot 2n+1) = -6n-1 \\
 \therefore a_{2n-1} + a_{2n} &= -3
 \end{aligned}$$

(i) $n=2m-1$ (m 은 자연수)일 때,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^{2m-1} a_k \\
 &= \sum_{k=1}^m (a_{2k-1} + a_{2k}) - a_{2m} \\
 &= \sum_{k=1}^m (-3) + 6m + 1 \\
 &= -3m + 6m + 1 \\
 &= 3m + 1
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k > 100 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 3m+1 &> 100, \quad 3m > 99 \\
 \therefore m &> 33
 \end{aligned}$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 34이므로 자연수 n 의 최
솟값은

$$2 \cdot 34 - 1 = 67$$

(ii) $n=2m$ (m 은 자연수)일 때,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^{2m} a_k = \sum_{k=1}^m (a_{2k-1} + a_{2k}) \\
 &= \sum_{k=1}^m (-3) \\
 &= -3m < 0 \quad (\because m \text{은 자연수})
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 존재
하지 않는다.

(i), (ii)에서 자연수 n 의 최솟값은 67이다.

답 ②

다른 풀이 $\sum_{k=1}^n a_k = S_n$ 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_1 &= a_1 = 4 \\
 S_2 &= S_1 + a_2 = 4 - 7 = -3 \\
 S_3 &= S_2 + a_3 = -3 + 10 = 7 \\
 S_4 &= S_3 + a_4 = 7 - 13 = -6 \\
 S_5 &= S_4 + a_5 = -6 + 16 = 10 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

따라서 자연수 m 에 대하여

$$S_{2m-1} = 3m + 1, \quad S_{2m} = -3m$$

이때 $\sum_{k=1}^n a_k > 100$, 즉 $S_n > 100$ 에서 $n=2m-1$ 풀이므로

$$\begin{aligned}
 3m+1 &> 100, \quad 3m > 99 \\
 \therefore m &> 33
 \end{aligned}$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 34이므로 n 의 최솟값은

$$2 \cdot 34 - 1 = 67$$

10 전략 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ 를 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 $a_1=1, a_2=5, a_3=7, a_4=11, a_5=13, a_6=17, \cdots$
즉 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이고,
수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 4인 등차수열이므로

$$\begin{aligned}
 a_{2n-1} &= 1 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 3, \\
 a_{2n} &= 5 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{2n-1} + a_{2n} &= 12n - 6 \\ \therefore \sum_{k=1}^{25} a_k &= \sum_{k=1}^{12} (a_{2k-1} + a_{2k}) + a_{25} \\ &= \sum_{k=1}^{12} (12k - 6) + 6 \cdot 13 - 5 \\ &= 12 \cdot \frac{12 \cdot 13}{2} - 6 \cdot 12 + 73 \\ &= 937 \end{aligned}$$

답 ③

11 **전략** 주어진 조건을 이용하여 $a_n + b_n$, $a_n b_n$ 을 구한다.

풀이 $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = n^2 + 3n$ 에서

$n=1$ 일 때, $a_1 + b_1 = 4$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) - \sum_{k=1}^{n-1} (a_k + b_k) \\ &= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2n + 2 \end{aligned} \quad \text{..... ㉠}$$

이때 $a_1 + b_1 = 4$ 는 $n=1$ 을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$a_n + b_n = 2n + 2$$

또 $\sum_{k=1}^n a_k b_k = 2n^2 + 2n$ 에서

$n=1$ 일 때, $a_1 b_1 = 4$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n b_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \\ &= (2n^2 + 2n) - \{2(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 4n \end{aligned} \quad \text{..... ㉡}$$

이때 $a_1 b_1 = 4$ 는 $n=1$ 을 ㉡에 대입한 것과 같으므로

$$a_n b_n = 4n$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n^2 + b_n^2 &= (a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n \\ &= (2n + 2)^2 - 2 \cdot 4n \\ &= 4n^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^6 (a_k^2 + b_k^2) &= \sum_{k=1}^6 (4k^2 + 4) \\ &= 4 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} + 4 \cdot 6 \\ &= 388 \end{aligned}$$

답 ④

12 **전략** 첫째항과 공차를 모두 a 라 하고 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항

을 구한 후 $\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+2}}}$ 의 분모를 유리화한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차를 모두 a 라 하면

$$a_n = a + (n-1) \cdot a = an$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+2}}} &= \frac{\sqrt{a(n+1)}}{\sqrt{an} + \sqrt{a(n+2)}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})} \\ &= \frac{1}{2} \{ \sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{n(n+1)} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_{k+1}}}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+2}}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{ \sqrt{(k+1)(k+2)} - \sqrt{k(k+1)} \} \\ &= \frac{1}{2} [(\sqrt{2 \cdot 3} - \sqrt{1 \cdot 2}) + (\sqrt{3 \cdot 4} - \sqrt{2 \cdot 3}) \\ &\quad + \cdots + \{ \sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{n(n+1)} \}] \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2} (\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 3n + 2} &= 6\sqrt{2}, \quad n^2 + 3n + 2 = 72 \\ n^2 + 3n - 70 &= 0, \quad (n+10)(n-7) = 0 \\ \therefore n &= 7 \quad (\because n \text{은 자연수}) \end{aligned}$$

답 ②

13 **전략** $|a_{n+1}| = |a_n| + 3$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입한다.

풀이 $|a_{n+1}| = |a_n| + 3$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} |a_2| &= |a_1| + 3 = 5 \text{에서} & a_2 &= 5 \\ |a_3| &= |a_2| + 3 = 8 \text{에서} & a_3 &= -8 \\ |a_4| &= |a_3| + 3 = 11 \text{에서} & a_4 &= 11 \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

$$\therefore a_{2n-1} = -2 + (n-1) \cdot (-6) = -6n + 4,$$

$$a_{2n} = 5 + (n-1) \cdot 6 = 6n - 1$$

따라서 $a_{2n-1} + a_{2n} = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=10}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^9 a_k \\ &= \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) - \sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} + a_{2k}) + a_{10} \\ &= \sum_{k=1}^{10} 3 - \sum_{k=1}^5 3 + (6 \cdot 5 - 1) \\ &= 3 \cdot 10 - 3 \cdot 5 + 29 = 44 \end{aligned}$$

답 ②

14 **전략** 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, ..., 7을 차례대로 대입하여 b_8 을 구한다.

풀이 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot a_1 = a_1 n$ 이므로

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n + 2a_1 n & (n \text{이 홀수}) \\ b_n - 1 & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., 7을 차례대로 대입하면

$$b_2 = b_1 + 2a_1 = a_1 + 2a_1 = 3a_1$$

$$b_3 = b_2 - 1 = 3a_1 - 1$$

$$b_4 = b_3 + 6a_1 = (3a_1 - 1) + 6a_1 = 9a_1 - 1$$

$$b_5 = b_4 - 1 = 9a_1 - 2$$

$$b_6 = b_5 + 10a_1 = (9a_1 - 2) + 10a_1 = 19a_1 - 2$$

$$b_7 = b_6 - 1 = 19a_1 - 3$$

$$b_8 = b_7 + 14a_1 = (19a_1 - 3) + 14a_1 = 33a_1 - 3$$

이때 $a_{16} + b_8 = 4$ 이므로 $16a_1 + (33a_1 - 3) = 4$

$$49a_1 = 7 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{7}$$

답 ①

15 전략 등식의 우변을 $n=k+1$ 일 때의 식으로 변형한다.

풀이 (i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = a_1 = 1,$$

$$(\text{우변}) = 2(a_2 - 1) = 2\left(\frac{3}{2} - 1\right) = 1$$

따라서 $n=2$ 일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} = k(a_k - 1)$$

양변에 a_k 를 더하면

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k &= k(a_k - 1) + a_k \\ &= (k+1)a_k - \boxed{k} \end{aligned}$$

이때 $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{k+1}$ 에서

$$a_k = a_{k+1} - \frac{1}{k+1}$$

이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k &= (k+1)a_k - k \\ &= (k+1)\left(a_{k+1} - \frac{1}{k+1}\right) - k \\ &= (k+1)a_{k+1} - (k+1) \\ &= (k+1)(a_{k+1} - 1) \end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{3}{2}$, $f(k) = k$, $g(k) = \frac{1}{k+1}$ 이므로

$$pf(8)g(8) = \frac{3}{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{3}$$

답 ②

16 전략 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하고 주어진 조건을 a_1 과 d 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_6 + a_7 = 2a_4 \text{에서}$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 6d) = 2(a_1 + 3d)$$

$$4a_1 + 12d = 2a_1 + 6d, \quad 2a_1 + 6d = 0$$

$$\therefore a_1 + 3d = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

또 $a_8 + a_9 + a_{10} + \cdots + a_{15} = 120$ 에서

$$\frac{8(a_8 + a_{15})}{2} = 120, \quad 4(a_1 + 7d + a_1 + 14d) = 120$$

$$\therefore 2a_1 + 21d = 30 \quad \cdots \cdots \text{㉡} \rightarrow \text{㉠}$$

㉠, ㉡를 연립하여 풀면

$$a_1 = -6, \quad d = 2 \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

$$\therefore a_{20} = -6 + 19 \cdot 2 = 32 \quad \cdots \cdots \text{㉣}$$

답 32

채점 기준	비율
① a_1, d 에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	50%
② a_1, d 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ a_{20} 을 구할 수 있다.	30%

17 전략 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2b = a + c$ 임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_6 = 7a_{12}$ 에서

$$a_1 + 5d = 7(a_1 + 11d), \quad 6a_1 = -72d$$

$$\therefore a_1 = -12d \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$S_k + a_{17} + a_{18} + a_{19} = S_{k+5}$ 에서

$$a_{17} + a_{18} + a_{19} = S_{k+5} - S_k$$

$$3a_{18} = a_{k+5} + a_{k+4} + a_{k+3} + a_{k+2} + a_{k+1}$$

$$3a_{18} = 5a_{k+3}$$

$$3(a_1 + 17d) = 5\{a_1 + (k+2)d\}$$

$$2a_1 = (-5k + 41)d$$

$$\therefore a_1 = \frac{-5k + 41}{2}d \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서} \quad -12 = \frac{-5k + 41}{2}$$

$$-5k + 41 = -24, \quad 5k = 65$$

$$\therefore k = 13$$

답 13

18 전략 세 수 x_1, x_2, x_3 이 이 순서대로 등비수열을 이루면 $x_2^2 = x_1 x_3$ 임을 이용한다.

풀이 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$b^2 = ac$$

이때 주어진 그림에서

$$b = a + 2, \quad c = b + (2 + 4) = a + 8$$

$$\text{이므로} \quad (a + 2)^2 = a(a + 8)$$

$$4a = 4 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $b = 3, c = 9, d = 27$ 이므로

$$e = 6 + (11 + 27) = 44$$

$$\therefore d + e = 71$$

답 71

19 전략 $2 \leq n \leq 8$ 인 자연수 n 에 대하여 $j = n$ 일 때의 모든 ij 의 값의 합을 구한다.

풀이 $2 \leq n \leq 8$ 인 자연수 n 에 대하여 $j = n$ 일 때 i 의 값이 될 수 있는 수는

$$1, 2, 3, \cdots, n-1$$

이므로 i, j 의 순서쌍 (i, j) 에 대하여 모든 ij 의 값의 합은

$$\begin{aligned} n\{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\} &= n \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= n \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} \\ &= \frac{n^3 - n^2}{2} \end{aligned}$$

이때 $n = 2, 3, \cdots, 8$ 이므로 구하는 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^8 \frac{k^3 - k^2}{2} &= \sum_{k=1}^8 \frac{k^3 - k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{8 \cdot 9}{2} \right)^2 - \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} \right\} \\ &= 546 \end{aligned}$$

답 546

20 전략 m 을 n 에 대한 식으로 나타내어 n 의 값에 따른 b_n 을 구한다.

풀이 $a_n = -\frac{13}{5} + (n-1) \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}n - 3$

$a_m = n$ 에서 $\frac{2}{5}m - 3 = n$

$\therefore m = \frac{5}{2}(n+3)$ → ①

따라서 자연수 k 에 대하여 $n=2k-1$ 이면 자연수 m 이 존재하고, $n=2k$ 이면 자연수 m 이 존재하지 않으므로

$b_{2k-1} = \frac{5}{2}(2k-1+3) = 5k+5, b_{2k}=1$ → ②

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} b_k &= \sum_{k=1}^{10} (b_{2k-1} + b_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (5k+6) \\ &= 5 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 6 \cdot 10 \\ &= 335 \end{aligned}$$
 → ③

답 335

채점 기준	비율
① m 을 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② b_{2k-1}, b_{2k} 를 구할 수 있다.	50%
③ $\sum_{k=1}^{20} b_k$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

21 전략 직선과 원이 접하려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 함을 이용한다.

풀이 직선 $y=ax$ 가 원 $(x-4)^2 + y^2 = \frac{4}{n^2}$ 에 접하려면 원의 중심 $(4, 0)$ 과 직선 $y=ax$, 즉 $ax-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\frac{2}{n}$ 와 같아야 하므로

$$\begin{aligned} \frac{|4a|}{\sqrt{a^2+1}} &= \frac{2}{n}, \quad 4n^2a^2 = a^2+1 \\ (4n^2-1)a^2 &= 1 \\ \therefore a^2 &= \frac{1}{4n^2-1} \end{aligned}$$

따라서 $\{f(n)\}^2 = \frac{1}{4n^2-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} \{f(n)\}^2 &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{4n^2-1} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

$\therefore p+q=21+10=31$ **답** 31

22 전략 $B_n(x_n, y_n)$ 이라 하고 y_n^2 의 값이 n 번째 그린 정사각형의 넓이와 같음을 이용한다.

$n+30$ 이 짝수, 즉 n 이 홀수이면 자연수 m 이 존재하고, $n+30$ 이 홀수, 즉 n 이 짝수이면 자연수 m 이 존재하지 않는다.

첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합

풀이 점 B_n 의 좌표를 (x_n, y_n) 이라 하면

$y_1^2=1$ 에서 $y_1=1$

$y_2^2=\frac{1}{2}$ 에서 $y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y_3^2=\frac{1}{2^2}$ 에서 $y_3=\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\vdots$

$\therefore y_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

$x_n = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n$ 이므로

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= (2+\sqrt{2}) \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right] \end{aligned}$$

이때 $a_n = \frac{y_n}{x_n}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{10}} &= \frac{x_{10}}{y_{10}} = \frac{(2+\sqrt{2}) \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}\right]}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^9} \\ &= (2+\sqrt{2}) \left\{ (\sqrt{2})^9 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= (2+\sqrt{2}) \left(16\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 31(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$
 답 $31(1+\sqrt{2})$

23 전략 $S_n - S_{n-1} = a_n (n \geq 2)$ 임을 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한다.

풀이 $S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + 1)$ 에서

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= S_n - S_{n-1} + 2 \\ \therefore a_{n+1} &= a_n + 2 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$
 ㉠

이때 $a_1=1, a_2=3$ 에서 $a_2=a_1+2$
이것은 $n=1$ 을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$a_{n+1} = a_n + 2$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=5}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^4 a_k \\ &= \sum_{k=1}^{10} (2k-1) - \sum_{k=1}^4 (2k-1) \\ &= \left(2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 10\right) - \left(2 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} - 4\right) \\ &= 100 - 16 = 84 \end{aligned}$$
 답 84

24 전략 두 점 $(a, b), (c, d)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$y-b = \frac{d-b}{c-a}(x-a)$ (단, $a \neq c$)임을 이용한다.

풀이 두 점 $A(0, 4), P_n(x_n, 1)$ 을 지나는 직선의 방정

식은 $y = -\frac{3}{x_n}x + 4$ → ①

이 직선의 x 절편이 x_{n+1} 이므로

$$0 = -\frac{3}{x_n} \cdot x_{n+1} + 4 \quad \therefore x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n$$

따라서 수열 $\{x_n\}$ 은 공비가 $\frac{4}{3}$ 인 등비수열이다.

이때 x_1 은 두 점 A, B를 지나는 직선 $y = -3x + 4$ 의 x 절편이므로

$$-3x_1 + 4 = 0 \quad \therefore x_1 = \frac{4}{3}$$

따라서 $x_n = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 이므로

$$x_{20} = \left(\frac{4}{3}\right)^{20}$$

답 $\left(\frac{4}{3}\right)^{20}$

채점 기준	비율
① 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
② x_n 을 구할 수 있다.	60%
③ x_{20} 을 구할 수 있다.	10%

25 **전략** $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2-a_1} = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{2-a_2} = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{1}{2-a_3} = \frac{1}{2-\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\therefore a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{10a_n}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n}} = 171 \text{에서}$$

$$\frac{10 \cdot \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{2n+1}} = 171, \quad \frac{10n(2n+1)}{n+1} = 171$$

$$20n^2 - 161n - 171 = 0, \quad (n-9)(20n+19) = 0$$

$$\therefore n = 9 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 9

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40%
② $a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n}$ 을 구할 수 있다.	30%
③ n 의 값을 구할 수 있다.	30%

$a_{n+1} = r a_n$
 $\Rightarrow$ 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 r 인 등비수열

귀류법 $\Rightarrow$ 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 명제 또는 명제의 결론을 부정한 다음 모순이 생기는 것을 보이는 증명법

최상위로는 최고 수준 문제

본책 93쪽

01

해결 단계

- ① a_1 의 부호를 확인한다.
- ② a_1 을 공차에 대한 식으로 나타낸다.
- ③ a_{10}, T_{19} 의 값을 구한다.
- ④ a_n 을 구한 후 $\sum_{k=1}^{20} |a_k|$ 의 값을 구한다.

풀이 ① $\neg$. $a_1 \leq 0$ 이라 하면 공차가 음수이므로 $a_n \leq 0$

따라서 $|a_1| < |a_1 + a_2| < |a_1 + a_2 + a_3| < \cdots$ 이므로 $T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$

즉 $T_n \neq T_{19-n}$ 이므로 $a_1 > 0$

② $\neg$. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d < 0$)라 하면 $T_1 = T_{18}$ 이므로

$$|a_1| = \left| \frac{18(2a_1 + 17d)}{2} \right| = |18a_1 + 153d|$$

$$\therefore a_1 = 18a_1 + 153d \text{ 또는 } a_1 = -18a_1 - 153d$$

$$\therefore a_1 = -9d \text{ 또는 } a_1 = -\frac{153}{19}d \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 $T_2 = T_{17}$ 이므로

$$\left| \frac{2(2a_1 + d)}{2} \right| = \left| \frac{17(2a_1 + 16d)}{2} \right|$$

$$2a_1 + d = 17a_1 + 136d \text{ 또는}$$

$$2a_1 + d = -17a_1 - 136d$$

$$\therefore a_1 = -9d \text{ 또는 } a_1 = -\frac{137}{19}d \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a_1 = -9d$

③ 따라서 $a_n = -9d + (n-1)d = (n-10)d$ 이므로 $a_{10} = 0$

$$\text{또 } T_{19} = \left| \frac{19\{2 \cdot (-9d) + 18d\}}{2} \right| = 0 \text{이므로}$$

$$a_{10} = T_{19}$$

④ $\neg$. $\neg$ 에서 $a_1 = -9d$ 이므로

$$T_{25} = \left| \frac{25(-18d + 24d)}{2} \right| = |75d| = -75d$$

즉 $-75d = 150$ 이므로

$$d = -2$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 $-9 \cdot (-2) = 18$, 공차는 -2 이므로

$$a_n = 18 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 20$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} |a_k| = \sum_{k=1}^{20} |-2k + 20|$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (-2k + 20) + \sum_{k=11}^{20} (2k - 20)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (-2k + 20) + \sum_{k=1}^{10} (2k - 20)$$

$$= -\sum_{k=1}^{10} (2k - 20)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{10} (-2k + 20) + \sum_{k=1}^{20} (2k - 20)$$

$$= 2 \left(-2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 20 \cdot 10 \right)$$

$$+ 2 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - 20 \cdot 20$$

$-2k + 20 < 0$ 에서 $k > 10$
 따라서 11 이상의 자연수 k 에 대하여 $-2k + 20$ 의 값이 음수이다.

$$=180+420-400=200$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

02

해결 단계

- ① 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 항을 각각 나열하여 $a_m=b_l$ 인 항과 p , l 의 값의 범위를 구한다.
- ② 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 일반항을 구한다.
- ③ $a_m=b_l$ 임을 이용하여 $m+l$ 을 l 과 p 에 대한 식으로 나타낸다.
- ④ $m+l$ 의 값이 최대일 때의 l 의 값에 따른 p 의 값을 구한다.

풀이 ▶ ① p 가 자연수이므로 수열 $\{a_n\}$ 은

$$p, p-\frac{1}{4}, \dots, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, \dots$$

수열 $\{b_n\}$ 은

$$\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

따라서 $a_m=b_l$ 을 만족시키는 두 자연수 m , l 의 순서쌍 (m, l) 의 개수가 8이 되려면 $a_m=b_l$ 인 항은 작은 것부터 차례대로

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32$$

이어야 하므로

$$32 \leq p < 64, \quad 4 \leq l \leq 11 \quad \dots\dots ①$$

② 한편 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 p , 공차가 $-\frac{1}{4}$ 인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} a_n &= p + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{4}n + \frac{1}{4}p + p \end{aligned}$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{32}$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$b_n = \frac{1}{32} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-6}$$

③ $a_m=b_l$ 에서

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}m + \frac{1}{4}p + p &= 2^{l-6}, \quad \frac{1}{4}m = \frac{1}{4}p + p - 2^{l-6} \\ \therefore m &= 1 + 4p - 2^{l-4} \\ \therefore m+l &= 1 + 4p + l - 2^{l-4} \end{aligned}$$

④ ①의 범위에서 $l-2^{l-4}$ 의 값은 $l=4$ 또는 $l=5$ 일 때 최대이므로 $m+l$ 의 값도 $l=4$ 또는 $l=5$ 일 때 최대이다.

$l=4$ 또는 $l=5$ 일 때, $m+l=4p+4$ 이므로

$$4p+4=156, \quad 4p=152$$

$$\therefore p=38$$

답 ②

03

해결 단계

- ① 원 C_n 의 방정식을 세운다.
- ② 원 C_n 이 포물선 $y=x^2$ 에 접함을 이용하여 a_n 을 r_n 에 대한 식으로 나타낸다.
- ③ 수열 $\{r_n\}$ 의 일반항을 구한다.
- ④ $\sum_{k=1}^8 a_k$ 의 값을 구한다.

두 원 C_n, C_{n+1} 이 외접하므로 두 원 C_n, C_{n+1} 의 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다.

$$\begin{aligned} a_n &\neq \frac{1}{32}, a_n \neq \frac{1}{16}, \\ a_n &\neq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= \frac{1}{4}, b_5 = \frac{1}{2}, \dots, \\ b_{11} &= 32 \text{이므로} \\ 4 &\leq l \leq 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l=6 \text{이면} \quad l-2^{l-4} &= 6-2^2=2 \\ l=7 \text{이면} \quad l-2^{l-4} &= 7-2^3=-1 \\ l=8 \text{이면} \quad l-2^{l-4} &= 8-2^4=-8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

풀이 ▶ ① 원 C_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면 원 C_n 의 중심의 좌표가 $(0, a_n)$ 이므로 원의 방정식은

$$x^2 + (y-a_n)^2 = r_n^2$$

② 이때 원 C_n 은 포물선 $y=x^2$ 에 접하므로

$$y + (y-a_n)^2 = r_n^2$$

$$\therefore y^2 - (2a_n-1)y + a_n^2 - r_n^2 = 0 \quad \dots\dots ①$$

①의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(2a_n-1)\}^2 - 4(a_n^2 - r_n^2) = 0$$

$$4a_n^2 - 4a_n + 1 - 4a_n^2 + 4r_n^2 = 0$$

$$4a_n = 4r_n^2 + 1 \quad \therefore a_n = r_n^2 + \frac{1}{4}$$

③ 따라서 $a_{n+1} - a_n = r_{n+1} + r_n$ 에서

$$\left(r_{n+1}^2 + \frac{1}{4}\right) - \left(r_n^2 + \frac{1}{4}\right) = r_{n+1} + r_n$$

$$r_{n+1}^2 - r_n^2 = r_{n+1} + r_n$$

$$(r_{n+1} - r_n)(r_{n+1} + r_n) = r_{n+1} + r_n$$

$$\therefore r_{n+1} - r_n = 1$$

즉 수열 $\{r_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열이므로

$$r_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$$

④ 따라서 $a_n = n^2 + \frac{1}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 \left(k^2 + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + \frac{1}{4} \cdot 8 \\ &= 204 + 2 = 206 \end{aligned}$$

답 206

04

해결 단계

- ① n^n 의 n 에 4를 대입한 후 일의 자리의 숫자를 구한다.
- ② 17^{17} , 37^{37} 의 일의 자리의 숫자를 각각 구한다.
- ③ ②와 같은 방법으로 $a_1, a_2, \dots, a_5, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{15}$ 를 구한다.

풀이 ▶ ① $4^4=256$ 이므로

$$a_4=6$$

② ㄴ. 17^{17} 의 일의 자리의 숫자는 7^{17} 의 일의 자리의 숫자와 같다.

이때 7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 순서대로 반복되고, $17=4 \cdot 4 + 1$ 이므로 17^{17} 의 일의 자리의 숫자는 7이다.

같은 방법으로 37^{37} 의 일의 자리의 숫자는 7^{37} 의 일의 자리의 숫자와 같고, $37=4 \cdot 9 + 1$ 이므로 37^{37} 의 일의 자리의 숫자는 7이다.

$$\therefore a_{17}=a_{37}=7$$

③ ㄷ. $1^1=1$, $2^2=4$, $3^3=27$, $4^4=256$, $5^5=3125$ 이므로

$$a_1=1, a_2=4, a_3=7, a_4=6, a_5=5$$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=23$$

한편 11^{11} 의 일의 자리의 숫자는 1^{11} 의 일의 자리의 숫자와 같으므로

$$a_{11}=1$$

12^{12} 의 일의 자리의 숫자는 2^{12} 의 일의 자리의 숫자와

같고, 2의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6
이 순서대로 반복된다.

이때 $12=4 \cdot 3$ 이므로 12^{12} 의 일의 자리의 숫자는 6이다.

$$\therefore a_{12}=6$$

13^{13} 의 일의 자리의 숫자는 3^{13} 의 일의 자리의 숫자와
같고, 3의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1
이 순서대로 반복된다.

이때 $13=4 \cdot 3+1$ 이므로 13^{13} 의 일의 자리의 숫자는 3이다.

$$\therefore a_{13}=3$$

14^{14} 의 일의 자리의 숫자는 4^{14} 의 일의 자리의 숫자와
같고, 4의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 4, 6이 순서대로
반복된다.

이때 $14=2 \cdot 7$ 이므로 14^{14} 의 일의 자리의 숫자는 6이다.

$$\therefore a_{14}=6$$

15^{15} 의 일의 자리의 숫자는 5^{15} 의 일의 자리의 숫자와
같으므로

$$a_{15}=5$$

$$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=21$$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \neq a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

5의 거듭제곱의 일의 자리의
숫자는 모두 5이다.





© 좋은책신사고