

정답 및 풀이

I 다항식

01	다항식의 연산	2
02	나머지 정리와 인수분해	8

II 방정식

03	복소수	20
04	이차방정식	27
05	이차방정식과 이차함수	40
06	여러 가지 방정식	47

III 부등식

07	일차부등식	60
08	이차부등식	67

IV 순열과 조합

09	순열과 조합	80
----	--------	----

V 행렬

10	행렬과 그 연산	93
----	----------	----

* 정답을 확인하려 할 때에는 「빠른 정답 찾기」를 이용하면 편리합니다.

01 다항식의 연산

I. 다항식

개념정리

본책 6쪽

- ① 오름차순 ② $B+A$ ③ 동류항
- ④ 분배법칙 ⑤ a^2-b^2 ⑥ $2ab+2bc+2ca$
- ⑦ $3abc$ ⑧ $a+b$ ⑨ $a-b$ ⑩ $R=0$

유형 뚫개기

본책 7쪽

01 $3X-A=5A-B$ 에서 $3X=6A-B$

$$\therefore X=2A-\frac{1}{3}B$$

$$\begin{aligned} &=2(x^2-2xy+4y^2)-\frac{1}{3}(-3x^2+9xy+6y^2) \\ &=2x^2-4xy+8y^2+x^2-3xy-2y^2 \\ &=3x^2-7xy+6y^2 \end{aligned} \quad \text{답 } 3x^2-7xy+6y^2$$

02 $A-3(B-A)+C$

$$\begin{aligned} &=4A-3B+C \\ &=4(x^3-x^2-3x+5)-3(2x^3+x-1)+(-x^3+6x^2+7x-2) \\ &=4x^3-4x^2-12x+20-6x^3-3x+3-x^3+6x^2+7x-2 \\ &=-3x^3+2x^2-8x+21 \end{aligned} \quad \text{답 } ②$$

03 $(x^2+x-2y+3) \cdot (2x-y+4)$

$$\begin{aligned} &=(x^2+x-2y+3)-2(2x-y+4) \\ &=x^2+x-2y+3-4x+2y-8 \\ &=x^2-3x-5 \end{aligned}$$

답 x^2-3x-5

04 $A+B=3x^2+4xy-y^2$

$B+C=2x^2-5xy$

$C+A=-x^2+3xy-9y^2$

①+②+③을 하면

$$2(A+B+C)=4x^2+2xy-10y^2$$

$$\therefore A+B+C=2x^2+xy-5y^2$$

따라서 $a=2, b=1, c=-5$ 이므로

$$abc=-10$$

답 ①

05 $A-B=3x^2-4xy-7y^2$

$A+2B=2xy-y^2$

①-②을 하면 $3B=-3x^2+6xy+6y^2$

$$\therefore B=-x^2+2xy+2y^2$$

→ ①

이것을 ②에 대입하면

$$A-(-x^2+2xy+2y^2)=3x^2-4xy-7y^2$$

$$\therefore A=3x^2-4xy-7y^2-x^2+2xy+2y^2$$

$$=2x^2-2xy-5y^2$$

→ ②

$$\begin{aligned} \therefore 3A-B &=3(2x^2-2xy-5y^2)-(-x^2+2xy+2y^2) \\ &=6x^2-6xy-15y^2+x^2-2xy-2y^2 \\ &=7x^2-8xy-17y^2 \end{aligned}$$

→ ③

답 $7x^2-8xy-17y^2$

채점 기준	비율
① 다항식 B 를 구할 수 있다.	40 %
② 다항식 A 를 구할 수 있다.	40 %
③ $3A-B$ 를 계산할 수 있다.	20 %

06 (㉞) $6x^2-3x+12-(-x^2-2x+5)-(3x^2-4x+7)$

$$\begin{aligned} &=6x^2-3x+12+x^2+2x-5-3x^2+4x-7 \\ &=4x^2+3x \end{aligned}$$

(㉟) $6x^2-3x+12-(4x^2+3x)-(-5x+8)$

$$\begin{aligned} &=6x^2-3x+12-4x^2-3x+5x-8 \\ &=2x^2-x+4 \end{aligned}$$

(㊱) $6x^2-3x+12-(-x^2-2x+5)-(2x^2-x+4)$

$$\begin{aligned} &=6x^2-3x+12+x^2+2x-5-2x^2+x-4 \\ &=5x^2+3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 합은

$$(4x^2+3x)+(5x^2+3)=9x^2+3x+3 \quad \text{답 } 9x^2+3x+3$$

07 $(3x^2-5x-1)(2x^3-x^2+4x+7)$ 의 전개식에서 x^3 항은

$$3x^2 \cdot 4x + (-5x) \cdot (-x^2) + (-1) \cdot 2x^3 = 15x^3$$

따라서 x^3 의 계수는 15이다.

답 15

08 $(2x-y+8)(x+6y-1)$ 의 전개식에서 xy 항은

$$2x \cdot 6y + (-y) \cdot x = 11xy$$

따라서 xy 의 계수는 11이다.

답 ③

09 $(3x^2+2x-1)(x^2+x+k)$ 의 전개식에서 x 항은

$$2x \cdot k + (-1) \cdot x = (2k-1)x$$

→ ①

이때 x 의 계수가 7이므로

$$2k-1=7 \quad \therefore k=4$$

→ ②

답 4

채점 기준	비율
① 주어진 다항식의 전개식에서 x 항을 구할 수 있다.	70 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	30 %

10 $(x-a)(4x^2+bx+9)$ 의 전개식에서 x^2 항은

$$x \cdot bx + (-a) \cdot 4x^2 = (b-4a)x^2$$

이때 x^2 의 계수가 3이므로

$$b-4a=3 \quad \therefore b=4a+3$$

→ ①

x 항은

$$x \cdot 9 + (-a) \cdot bx = (9-ab)x$$

이때 x 의 계수가 8이므로

$$9-ab=8 \quad \therefore ab=1$$

①을 위의 식에 대입하면

$$a(4a+3)=1, \quad 4a^2+3a-1=0$$

$$(a+1)(4a-1)=0 \quad \therefore a=-1 (\because a \text{는 정수})$$

$$a = -1 \text{을 ㉠에 대입하면} \quad b = -1$$

$$\therefore a + b = -2$$

답 -2

$$11 \quad (1+x+2x^2+\cdots+50x^{50})^2$$

$$= (1+x+2x^2+\cdots+50x^{50})(1+x+2x^2+\cdots+50x^{50})$$

이 식의 전개식에서 x^4 항은

$$1 \cdot 4x^4 + x \cdot 3x^3 + 2x^2 \cdot 2x^2 + 3x^3 \cdot x + 4x^4 \cdot 1 = 18x^4$$

따라서 x^4 의 계수는 18이다.

답 18

▶ B $\frac{1}{x^2}$

$(1+x+2x^2+\cdots+50x^{50})^2$ 을 전개할 때, $5x^5, 6x^6, \dots, 50x^{50}$ 은 x^4 의 계수에 영향을 주지 않으므로 $(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)^2$ 의 전개식에서 x^4 의 계수를 구해도 된다.

12 $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+9)$ 에서 임의의 8개의 일차식에 서는 x 항을, 나머지 1개의 일차식에서는 상수항을 선택하여 곱 하면 x^8 항이 되므로 이 식의 전개식에서 x^8 항은

$$x^8 \cdot 9 + x^8 \cdot 8 + x^8 \cdot 7 + \cdots + x^8 \cdot 2 + x^8 \cdot 1$$

$$= (1+2+\cdots+7+8+9)x^8$$

$$= 45x^8$$

따라서 x^8 의 계수는 45이다.

답 ①

$$13 \quad ③ \quad (2x-y-z)^2 = 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 4zx$$

답 ③

$$14 \quad (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$$

$$= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$$

$$= (x^4-1)(x^4+1)(x^8+1)$$

$$= (x^8-1)(x^8+1) = x^{16}-1$$

$$= 50-1=49$$

답 ③

$$15 \quad (ax+2y)^3 = a^3x^3 + 6a^2x^2y + 12axy^2 + 8y^3$$

... ①

$$\text{즉 } 6a^2 = 54 \text{이므로} \quad a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

... ②

따라서 xy^2 의 계수는

$$12a = 12 \cdot 3 = 36$$

... ③

답 36

채점 기준	비율
① 주어진 식을 전개할 수 있다.	50 %
② a의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ xy^2 의 계수를 구할 수 있다.	20 %

$$16 \quad (x-\sqrt{3})^3(x+\sqrt{3})^3 = \{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\}^3$$

$$= (x^2-3)^3$$

$$= x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 27$$

따라서 x^4 의 계수는 -9, x^2 의 계수는 27이므로

$$a = -9, b = 27$$

$$\therefore a+b=18$$

답 18

$$17 \quad (x^2-4)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$$

$$= (x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$$

$$= \{(x+2)(x^2-2x+4)\}\{(x-2)(x^2+2x+4)\}$$

$$= (x^3+8)(x^3-8)$$

$$= x^6-64$$

$$\text{답 } x^6-64$$

다른 풀이 $(x^2-4)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

$$= (x^2-4)\{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)\}$$

$$= (x^2-4)(x^4+4x^2+16)$$

$$= x^6-64$$

$$18 \quad a+b+c=3 \text{에서}$$

$$a+b=3-c, b+c=3-a, c+a=3-b$$

이므로

$$(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$= (3-c)(3-a)(3-b)$$

$$= 27 - 9(a+b+c) + 3(ab+bc+ca) - abc$$

$$= 27 - 9 \cdot 3 + 3 \cdot (-16) - 12$$

$$= -60$$

답 ①

$$19 \quad (a+2b-5c)(a-2b+5c) = \{a+(2b-5c)\}\{a-(2b-5c)\}$$

$2b-5c=t$ 로 놓으면

$$(\text{주어진 식}) = (a+t)(a-t) = a^2 - t^2$$

$$= a^2 - (2b-5c)^2$$

$$= a^2 - 4b^2 + 20bc - 25c^2$$

$$\text{답 } a^2 - 4b^2 + 20bc - 25c^2$$

$$20 \quad (x-2)(x-1)(x+3)(x+4)$$

$$= \{(x-2)(x+4)\}\{(x-1)(x+3)\}$$

$$= (x^2+2x-8)(x^2+2x-3) \quad \begin{array}{l} \text{상수항끼리의 합이 같아지도록} \dots ① \\ \text{두 개씩 짝을 지어 곱한다.} \end{array}$$

$x^2+2x=t$ 로 놓으면

$$(\text{주어진 식}) = (t-8)(t-3) = t^2 - 11t + 24$$

$$= (x^2+2x)^2 - 11(x^2+2x) + 24$$

$$= x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 11x^2 - 22x + 24$$

$$= x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$$

... ②

따라서 $a=4, b=-7, c=-22$ 이므로

$$a+b-c=19$$

... ③

답 19

채점 기준	비율
① 공통부분이 생기도록 식을 변형할 수 있다.	30 %
② 공통부분을 t 로 치환하여 식을 전개할 수 있다.	50 %
③ $a+b-c$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

$$21 \quad 4+3k=a, 4-3k=b \text{로 놓으면}$$

$$(\text{주어진 식}) = (a^3-b^3)^2 - (a^3+b^3)^2$$

$$= a^6 - 2a^3b^3 + b^6 - (a^6 + 2a^3b^3 + b^6) = -4a^3b^3$$

$$= -4(4+3k)^3(4-3k)^3$$

$$= -4\{(4+3k)(4-3k)\}^3$$

$$= -4(16-9k^2)^3$$

$$= -4 \cdot (16-9 \cdot 2)^3 = 32$$

답 ⑤

22 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$ 에서
 $6=(x-y)^2+2$, $(x-y)^2=4$
 $\therefore x-y=2$ ($\because x>y$) $\xrightarrow{x>y\text{이므로}} x-y>0$
 $\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
 $=2^3+3\cdot 1\cdot 2=14$ 답 ④

23 $x+y=9$, $xy=-3$ 이므로
 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$
 $= \frac{9^2-2\cdot(-3)}{-3} = -29$ 답 -29

24 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$ 에서 $\frac{a+b}{ab} = 2$
 이때 $ab=4$ 이므로 $\frac{a+b}{4} = 2 \therefore a+b=8$
 따라서 $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 8^2 - 4\cdot 4 = 48$ 이므로
 $a-b=4\sqrt{3}$ ($\because a>b$) 답 ③

25 $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$ ①
 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 에서
 $3=1^3-3\cdot xy\cdot 1 \therefore xy=-\frac{2}{3}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-2\cdot(-\frac{2}{3})=\frac{7}{3}$ 이므로 ①에서
 $x^4+y^4=(\frac{7}{3})^2-2\cdot(-\frac{2}{3})^2=\frac{41}{9}$
 따라서 $p=9$, $q=41$ 이므로 $p+q=50$ 답 ③

26 $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{x^3+y^3}{xy}$
 $= \frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$ ① ... ①
 $x^2+y^2=(5+2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})=10$ 이고
 $x^2y^2=(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=25-24=1$ 에서
 $xy=1$ ($\because x>0, y>0$)
 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=10+2\cdot 1=12$ 이므로
 $x+y=2\sqrt{3}$ ($\because x>0, y>0$) ... ②
 따라서 ①에서 $\xrightarrow{x>0, y>0\text{이면}} x+y>0$
 $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{(2\sqrt{3})^3-3\cdot 1\cdot 2\sqrt{3}}{1} = 18\sqrt{3}$... ③
답 $18\sqrt{3}$

채점 기준	비율
① 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
② xy , $x+y$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

27 $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5$
 $=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$
 이므로
 $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ ①

이때
 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-2)^2-2\cdot(-1)=6$,
 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
 $=(-2)^3-3\cdot(-1)\cdot(-2)=-14$

이므로 ①에서
 $x^5+y^5=6\cdot(-14)-(-1)^2\cdot(-2)=-82$

한편
 $x^6+y^6=(x^3)^2+(y^3)^2=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$
 $=(-14)^2-2\cdot(-1)^3=198$

이므로
 $x^5+y^5+x^6+y^6=116$ 답 ④

예 B $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

x^5+y^5 과 같이 곱셈 공식이나 곱셈 공식의 변형을 바로 적용할 수 없을 때에는 27번의 풀이처럼 x^2+y^2 , x^3+y^3 , x^4+y^4 등을 곱한 식을 전개하여 그 값을 구할 수 있다.
 같은 방법으로 x^7+y^7 의 값은

$$(x^3+y^3)(x^4+y^4)=x^7+x^3y^4+x^4y^3+y^7$$

$$=x^7+y^7+x^3y^3(x+y)$$

에서 $x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$ 임을 이용하여 구할 수 있다.

28 $x \neq 0$ 이므로 $x^2-3x-1=0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x-3-\frac{1}{x}=0 \therefore x-\frac{1}{x}=3$$

$$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$=3^3+3\cdot 3=36$$

참고 $x=0$ 을 $x^2-3x-1=0$ 에 대입하면 $-1 \neq 0$ 이므로 $x \neq 0$ 이다.

예 B $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$x^2-px \pm 1=0$ (p 는 상수) 꼴의 등식이 주어지면 주어진 등식의 양변을 x 로 나누어 $x \pm \frac{1}{x}=p$ 꼴로 변형한다.

29 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=6+2=8$

그런데 $x>0$ 이므로 $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$

$$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot 2\sqrt{2}$$

$$=10\sqrt{2}$$

30 $x \neq 0$ 이므로 $x^2-4x+1=0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x-4+\frac{1}{x}=0 \therefore x+\frac{1}{x}=4$$

따라서

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4^3-3\cdot 4=52$$
 ... ②

이므로

$$x^3 - 2x^2 + 5 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5$$

$$= 52 - 2 \cdot 14 + 5 = 29 \quad \cdots \textcircled{3}$$

답 29

채점 기준	비율
① $x + \frac{1}{x}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

31 $\frac{x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 1}{x^3} = x^3 + 4x + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3}$

$$= x^3 + \frac{1}{x^3} + 4\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 4 = (-3\sqrt{5})^2 + 4 = 49 \text{ 이고 } x^2 > 0 \text{ 이므로}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 7 + 2 = 9$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x + \frac{1}{x} = 3$

따라서 ①에서

$$(\text{주어진 식}) = 3^3 + 3 = 30$$

답 30

32 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ 에서

$$4^2 = 24 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -4$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{-4}{-2} = 2$$

답 ④

33 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ 에서

$$(\sqrt{3})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 6$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \text{에서}$$

$$6\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \left\{6 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right\} + 3abc$$

$$3abc = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \therefore abc = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

34 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

$$= \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}{(abc)^2}$$

$$= \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2ab^2c - 2bc^2a - 2ca^2b}{(abc)^2}$$

$$= \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{(abc)^2} \quad \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \text{에서}$$

$$1^2 = 5 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -2$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{2}{3} \text{ 이므로}$$

$$-\frac{2}{abc} = \frac{2}{3} \quad \therefore abc = -3$$

답 ②

따라서 ①에서

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{(-2)^2 - 2 \cdot (-3) \cdot 1}{(-3)^2} = \frac{10}{9}$$

답 ③

답 $\frac{10}{9}$

채점 기준	비율
① 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
② $ab+bc+ca$, abc 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

35 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$$= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{1}{2}\{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a-b = -5, c-a = 3 \text{을 변끼리 더하면}$$

$$c-b = -2 \quad \therefore b-c = 2$$

따라서 ①에서

$$(\text{주어진 식}) = \frac{1}{2} \cdot \{(-5)^2 + 2^2 + 3^2\} = 19$$

답 19

36 $9 \times 111 \times 1001 \times 1000001$

$$= (10-1)(100+10+1)(1000+1)(1000000+1)$$

$$= (10-1)(10^2+10+1)(10^3+1)(10^6+1)$$

$$= (10^3-1)(10^3+1)(10^6+1)$$

$$= (10^6-1)(10^6+1)$$

$$= 10^{12} - 1$$

답 ④

37 $\alpha = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^4}\right)\left(1 + \frac{1}{3^8}\right)$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^4}\right)\left(1 + \frac{1}{3^8}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^4}\right)\left(1 + \frac{1}{3^8}\right) \quad 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^4}\right)\left(1 + \frac{1}{3^4}\right)\left(1 + \frac{1}{3^8}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^8}\right)\left(1 + \frac{1}{3^8}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{16}}\right)$$

이므로

$$\frac{2}{3}\alpha = 1 - \frac{1}{3^{16}}, \quad \frac{1}{3^{16}} = \frac{3-2\alpha}{3}$$

$$\therefore 3^{16} = \frac{3}{3-2\alpha}$$

답 ⑤

38 $298^2 + 199 \times 201 = (300-2)^2 + (200-1)(200+1)$
 $= 90000 - 1200 + 4 + 40000 - 1$
 $= 128803$ 답 ②

39 $\sqrt{1021} = a, 1020 = b$ 로 놓으면 주어진 수는

$$\frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{a}$$

$$= \frac{(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)}{a}$$

$$= \frac{2a^3 + 6ab^2}{a}$$

$$= 2a^2 + 6b^2$$

$$= 2 \cdot 1021 + 6 \cdot 1020^2$$
 ... ①

$2 \cdot 1021$ 의 일의 자리의 숫자는 2, $6 \cdot 1020^2$ 의 일의 자리의 숫자는 0이므로 구하는 일의 자리의 숫자는
 $2 + 0 = 2$... ②

답 2

채점 기준	비율
① 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %
② 일의 자리의 숫자를 구할 수 있다.	40 %

참고 일의 자리의 숫자를 구하는 문제이므로 수를 모두 계산할 필요는 없다.

40
$$\begin{array}{r} 2x-3 \\ x^2-x-5 \overline{) 2x^3-5x^2+x-1} \\ \underline{2x^3-2x^2-10x} \\ -3x^2+11x-1 \\ \underline{-3x^2+3x+15} \\ 8x-16 \end{array}$$

따라서 $Q(x) = 2x-3, R(x) = 8x-16$ 이므로
 $Q(3) + R(-1) = 3 + (-24) = -21$ 답 -21

41 $a=4, b=4, c=9, d=7$ 이므로
 $a+b+c+d=24$ 답 24

42 ④
$$\begin{array}{r} x+2 \\ 2x^2+2x-1 \overline{) 2x^3+6x^2+x+3} \\ \underline{2x^3+2x^2-x} \\ 4x^2+2x+3 \\ \underline{4x^2+4x-2} \\ -2x+5 \end{array}$$

 $\Rightarrow$ 몫: $x+2$, 나머지: $-2x+5$ 답 ④

43
$$\begin{array}{r} x-5 \\ x^2+4x-2 \overline{) x^3-x^2-8x+3} \\ \underline{x^3+4x^2-2x} \\ -5x^2-6x+3 \\ \underline{-5x^2-20x+10} \\ 14x-7 \end{array}$$

따라서 몫은 $x-5$, 나머지는 $14x-7$ 이므로
 $a=1, b=-5, c=14, d=-7$
 $\therefore ac-bd = -21$ 답 ④

44 $x^4 - 11x^2 + 2x + 9 = A(x^2 - x - 7) + 6x - 12$ 이므로
 $A(x^2 - x - 7) = x^4 - 11x^2 + 2x + 9 - (6x - 12)$
 $= x^4 - 11x^2 - 4x + 21$
 $\therefore A = (x^4 - 11x^2 - 4x + 21) \div (x^2 - x - 7)$

$$\begin{array}{r} x^2+x-3 \\ x^2-x-7 \overline{) x^4-x^2-4x+21} \\ \underline{x^4-x^3-7x^2} \\ x^3-4x^2-4x \\ \underline{x^3-x^2-7x} \\ -3x^2+3x+21 \\ \underline{-3x^2+3x+21} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore A = x^2 + x - 3$ 답 ③

45 $P(x) = (x-1)(3x+4) + 5$
 $= 3x^2 + x + 1$... ①

$$\begin{array}{r} 3x-2 \\ x+1 \overline{) 3x^2+x+1} \\ \underline{3x^2+3x} \\ -2x+1 \\ \underline{-2x-2} \\ 3 \end{array}$$

따라서 $P(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫은 $3x-2$, 나머지는 3이다. ... ②

답 몫: $3x-2$, 나머지: 3

채점 기준	비율
① $P(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $P(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	60 %

46
$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2-2x+b \overline{) x^3-x^2+ax+3} \\ \underline{x^3-2x^2+bx} \\ x^2+(a-b)x+3 \\ \underline{x^2-2x+b} \\ (a-b+2)x+3-b \end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$$a-b+2=0, 3-b=0$$

따라서 $a=1, b=3$ 이므로

$$a+b=4$$

답 4

47
$$\begin{array}{r} 2x^2+x-4 \\ x^2+x-1 \overline{) 2x^4+3x^3-5x^2-5x+7} \\ \underline{2x^4+2x^3-2x^2} \\ x^3-3x^2-5x \\ \underline{x^3+x^2-x} \\ -4x^2-4x+7 \\ \underline{-4x^2-4x+4} \\ 3 \end{array}$$

$$\therefore 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 5x + 7 = (x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 4) + 3$$

이때 $x^2 + x - 1 = 0$ 이므로 구하는 식의 값은 3이다. 답 ⑤

48 $P(x)$ 를 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x + \frac{1}{2}\right)Q(x) + R \\ &= \frac{1}{2}(2x+1)Q(x) + R \\ &= (2x+1) \cdot \frac{1}{2}Q(x) + R \end{aligned}$$

따라서 $P(x)$ 를 $2x+1$ 로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R 이다. 답 ①

49 $P(x)$ 를 $4x-6$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned} P(x) &= (4x-6)Q(x) + R \quad \cdots ① \\ &= 4\left(x - \frac{3}{2}\right)Q(x) + R \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot 4Q(x) + R \quad \cdots ② \end{aligned}$$

따라서 $P(x)$ 를 $x - \frac{3}{2}$ 으로 나누었을 때의 몫은 $4Q(x)$, 나머지는 R 이다. ③

답 몫: $4Q(x)$, 나머지: R

채점 기준	비율
① $P(x)$ 를 $4x-6$ 으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
② 식을 변형할 수 있다.	50 %
③ $P(x)$ 를 $x - \frac{3}{2}$ 으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	20 %

50 $P(x)$ 를 $(5x-2)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $P(x)$
 $= (5x-2)^3Q(x) + 25x^2 + ax + b$
 $= (5x-2)^3Q(x) + 25x^2 - 20x + 4 + (a+20)x + b - 4$
 $= (5x-2)^3Q(x) + (5x-2)^2 + (a+20)x + b - 4$
 $= (5x-2)^2\{(5x-2)Q(x) + 1\} + (a+20)x + b - 4$
 이때 $P(x)$ 를 $(5x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $2ax+5$ 이므로

$$\begin{aligned} a+20 &= 2a, \quad b-4=5 \\ \therefore a &= 20, \quad b=9 \\ \therefore a-b &= 11 \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

다른 풀이 $P(x)$ 를 $(5x-2)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} P(x) &= (5x-2)^3Q(x) + 25x^2 + ax + b \\ (5x-2)^3Q(x) &\text{는 } (5x-2)^2\text{으로 나누어떨어지므로 } P(x)\text{를} \\ (5x-2)^2\text{으로 나누었을 때의 나머지는 다항식 } 25x^2 + ax + b\text{를} \\ (5x-2)^2\text{으로 나누었을 때의 나머지와 같다.} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 25x^2 - 20x + 4 \overline{) 25x^2 + ax + b} \\ \underline{25x^2 - 20x + 4} \\ (a+20)x + b - 4 \end{array}$$

이때 $P(x)$ 를 $(5x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $2ax+5$ 이므로

$$a+20=2a, \quad b-4=5 \quad \therefore a=20, \quad b=9$$

51 $P(x)$ 를 $3x+1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned} P(x) &= (3x+1)Q(x) + R \\ \therefore xP(x) &= x(3x+1)Q(x) + Rx \\ &= 3x\left(x + \frac{1}{3}\right)Q(x) + R\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}R \\ &= \left(x + \frac{1}{3}\right)\{3xQ(x) + R\} - \frac{1}{3}R \end{aligned}$$

따라서 $xP(x)$ 를 $x + \frac{1}{3}$ 로 나누었을 때의 몫은 $3xQ(x) + R$, 나머지는 $-\frac{1}{3}R$ 이다. 답 ③

52 직육면체의 밑면의 가로 길이, 세로 길이, 높이를 각각 a, b, c 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 20이므로

$$4(a+b+c)=20 \quad \therefore a+b+c=5$$

또 직육면체의 겉넓이가 16이므로

$$2(ab+bc+ca)=16$$

대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 이고

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca) \text{에서}$$

$$5^2 = a^2+b^2+c^2 + 16 \quad \therefore a^2+b^2+c^2 = 9$$

따라서 구하는 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{답 3}$$

53 직사각형의 가로 길이를 a , 세로 길이를 b 라 하면 직사각형의 대각선의 길이가 19이므로

$$\sqrt{a^2+b^2} = 19 \quad \therefore a^2+b^2 = 361 \quad \cdots ①$$

또 둘레의 길이가 50이므로

$$2(a+b) = 50 \quad \therefore a+b = 25 \quad \cdots ②$$

직사각형의 넓이는 ab 이고 $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ 에서

$$25^2 = 361 + 2ab, \quad 2ab = 264$$

$$\therefore ab = 132$$

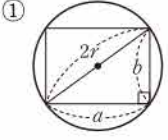
따라서 구하는 넓이는 132이다. ③

답 132

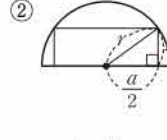
채점 기준	비율
① 대각선의 길이를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
② 둘레의 길이를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
③ 직사각형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

예제 B 탐구

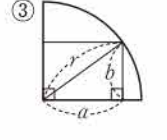
가로의 길이가 a , 세로 길이가 b 인 직사각형이 아래와 같이 각 도형에 내접할 때, 다음이 성립한다.



① $\Rightarrow a^2 + b^2 = (2r)^2$



② $\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = r^2$



③ $\Rightarrow a^2 + b^2 = r^2$

54 주어진 등식에서

$$\begin{aligned} \{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\} &= \{(b-c)+a\}\{(b-c)-a\} \\ a^2-(b+c)^2 &= (b-c)^2-a^2 \\ a^2-b^2-2bc-c^2 &= b^2-2bc+c^2-a^2 \\ 2a^2 &= 2(b^2+c^2) \quad \therefore a^2=b^2+c^2 \end{aligned}$$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

답 ③

55 직육면체의 높이를 A 라 하면

$$\begin{aligned} (a+1)(a+2)A &= 2a^3+5a^2+a-2 \\ (a^2+3a+2)A &= 2a^3+5a^2+a-2 \\ \therefore A &= (2a^3+5a^2+a-2) \div (a^2+3a+2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2a-1 \\ a^2+3a+2 \overline{) 2a^3+5a^2+a-2} \\ \underline{2a^3+6a^2+4a} \\ -a^2-3a-2 \\ \underline{-a^2-3a-2} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore A=2a-1$$

따라서 직육면체의 높이는 $2a-1$ 이다.

답 2a-1

다른 풀이 $2a^3+5a^2+a-2$ 에서 a^3 의 계수가 2이므로 구하는 높이를 $2a+k$ (k 는 상수)라 하면

$$(a+1)(a+2)(2a+k)=2a^3+5a^2+a-2$$

좌변의 전개식의 상수항이 -2 이어야 하므로

$$2k=-2 \quad \therefore k=-1$$

따라서 직육면체의 높이는 $2a-1$ 이다.

56 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} (x+4)^3-3 \cdot x^2(x+4)+2 \cdot x^3 & \quad \text{직육면체가 겹치는 부분을 3번} \\ & \quad \text{뺐으므로 2번을 더한다.} \\ = x^3+12x^2+48x+64-3x^3-12x^2+2x^3 \\ = 48x+64 \end{aligned}$$

답 48x+64

57 $\overline{PR}=a$, $\overline{RC}=b$ 라 하면 $\triangle PRC$ 의 넓이가 48이므로

$$\frac{1}{2}ab=48 \quad \therefore ab=96$$

$\overline{PC}=\overline{BC}=16$ 이므로 직각삼각형 PRC 에서

$$a^2+b^2=256$$

$\overline{PS}=16-a$, $\overline{PQ}=\overline{RB}=16-b$ 이므로

$$\square AQPS=(16-a)(16-b)=256-16(a+b)+ab$$

이때 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=256+2 \cdot 96=448$ 이므로

$$a+b=8\sqrt{7} \quad (\because a>0, b>0)$$

$$\therefore \square AQPS=256-16 \cdot 8\sqrt{7}+96$$

$$=352-128\sqrt{7}$$

답 352-128√7

02 나머지 정리와 인수분해

I. 다항식

개념정리

본책 16쪽

- | | |
|----------------|----------------------------|
| ① $a=b=c=0$ | ② $a=a', b=b', c=c'$ |
| ③ 수치 대입법 | ④ $P(x)$ ⑤ 0 ⑥ 계수 |
| ⑦ $(a+b+c)^2$ | ⑧ $(a-b)^3$ ⑨ a^2-ab+b^2 |
| ⑩ a^2-ab+b^2 | |

유형 뽐내기

본책 17쪽

01 $x^3+ax^2-48=(x+b)(x^2+cx+12)$ 에서
 $x^3+ax^2-48=x^3+(b+c)x^2+(bc+12)x+12b$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=b+c, 0=bc+12, -48=12b$$

$$\therefore a=-1, b=-4, c=3$$

$$\therefore a+b+c=-2$$

답 ④

※ B 탐구

미정계수법은 항등식의 뜻과 성질을 이용한 것이므로 주어진 등식이 항등식인지 먼저 확인해야 한다.

다음은 모두 x 에 대한 항등식을 나타낸다.

- ① 모든 x 에 대하여 성립하는 등식
- ② 임의의 x 에 대하여 성립하는 등식
- ③ x 의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
- ④ 어떤 x 의 값에 대하여도 항상 성립하는 등식

02 $a(x-3y)+b(-2x+y)+4=-12x+11y-c$ 에서
 $(a-2b)x+(-3a+b)y+4=-12x+11y-c$

이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로

$$a-2b=-12, -3a+b=11, 4=-c$$

$$\therefore a=-2, b=5, c=-4$$

$$\therefore a-b+c=-11$$

답 -11

03 $f(x)=x^3+4x^2-3x-2$ 에서

$$f(x+a)$$

$$=(x+a)^3+4(x+a)^2-3(x+a)-2$$

$$=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3+4x^2+8ax+4a^2-3x-3a-2$$

$$=x^3+(3a+4)x^2+(3a^2+8a-3)x+a^3+4a^2-3a-2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이므로

$$x^3+(3a+4)x^2+(3a^2+8a-3)x+a^3+4a^2-3a-2$$

$$=x^3-2x^2-7x+b$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$3a+4=-2, 3a^2+8a-3=-7, a^3+4a^2-3a-2=b$$

$$\therefore a=-2, b=12$$

$\cdots \textcircled{2}$

$$\therefore a+b=10$$

$\cdots \textcircled{3}$

답 10

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 $f(x+a)$ 로 변형할 수 있다.	40 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

- 04 주어진 등식의 양변에 $x=0, x=1, x=-3$ 을 각각 대입하면
 $3=-3b, 4=4c, 24=12a$
 $\therefore a=2, b=-1, c=1$
 $\therefore a-b-c=2$ 답 ⑤

[참고] 수치 대입법을 이용할 때에는 계산이 간단한 식을 얻을 수 있는 수를 미정계수의 개수만큼 대입한다.

- 05 주어진 등식의 양변에 $x=-1, x=1$ 을 각각 대입하면
 $-a-(a+1)+3+4=0,$
 $a-(a+1)-3+4=2(3+b+4)$
 이므로
 $-2a+6=0, 0=2(b+7)$
 $\therefore a=3, b=-7$
 $\therefore ab=-21$ 답 ①

- [다른 풀이]** $ax^3-(a+1)x^2-3x+4=(x+1)(3x^2+bx+4)$ 에서
 $ax^3-(a+1)x^2-3x+4$
 $=3x^3+(b+3)x^2+(b+4)x+4$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $a=3, -(a+1)=b+3, -3=b+4$
 $\therefore a=3, b=-7$
 $\therefore ab=-21$

- 06 주어진 등식의 좌변의 x^3 의 계수는 1이고, 우변의 전개식에서 x^3 의 계수는 c 이므로
 $c=1$
 $\therefore x^3+ax^2-4x+b=(x+2)(x-2)(x+4)$
 이 등식의 양변에 $x=0, x=2$ 를 각각 대입하면
 $b=-16, 8+4a-8+b=0$
 $\therefore a=4, b=-16$
 $\therefore a-b+c=21$ 답 21

- 07 주어진 등식의 양변에 $x=1, x=2$ 를 각각 대입하면
 $1=1+a+b-32+16, 0=16+8a+4b-64+16$
 $\therefore a+b=16, 2a+b=8$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $a=-8, b=24$
 $\therefore a+2b=40$ 답 40

- 08 주어진 등식의 양변에 $x=-1, x=\sqrt{5}$ 를 각각 대입하면
 $0=1+a+b, 0=25+5a+b$
 $\therefore a+b=-1, 5a+b=-25$
 위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-6, b=5$... ①

- $\therefore (x+1)(x^2-5)P(x)=x^4-6x^2+5$
 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $3 \cdot (-1) \cdot P(2)=16-24+5$
 $-3P(2)=-3 \therefore P(2)=1$... ②
답 1

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② $P(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

- 09 $x^2+kx+y^2+ky+2k-10=0$ 을 k 에 대하여 정리하면
 $(x+y+2)k+x^2+y^2-10=0$
 이 등식이 k 에 대한 항등식이므로
 $x+y+2=0, x^2+y^2-10=0$ 임의의 실수 k 에 대하여 성립하므로 k 에 대한 항등식이다.
 $\therefore x+y=-2, x^2+y^2=10$
 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 이므로
 $10=4-2xy \therefore xy=-3$ 답 ②

- 10 주어진 이차방정식이 2를 근으로 가지므로
 $4+2(k-2)-(2k+5)m+n+3=0$
 $\therefore (2-2m)k-5m+n+3=0$
 이 등식이 k 에 대한 항등식이므로
 $2-2m=0, -5m+n+3=0$
 $\therefore m=1, n=2$
 $\therefore m+n=3$ 답 ③

- 11 $x+y=1$ 에서 $y=1-x$
 이것을 주어진 등식의 좌변에 대입하면
 $px^2+qx+3(1-x)^2-2x(1-x)+r(1-x)-4=0$
 $\therefore (p+5)x^2+(q-r-8)x+r-1=0$... ①
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $p+5=0, q-r-8=0, r-1=0$
 $\therefore p=-5, q=9, r=1$... ②
 $\therefore p+q+r=5$... ③
답 5

채점 기준	비율
① 주어진 등식의 좌변을 x 에 대하여 정리할 수 있다.	40 %
② p, q, r 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $p+q+r$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

- 12 $\frac{ax+by-2}{x-2y+5}=k$ (k 는 상수)라 하면
 $ax+by-2=k(x-2y+5)$
 $\therefore (a-k)x+(b+2k)y-2-5k=0$
 이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로
 $a-k=0, b+2k=0, -2-5k=0$
 $\therefore k=-\frac{2}{5}, a=-\frac{2}{5}, b=\frac{4}{5}$
 $\therefore ab=-\frac{8}{25}$ 답 $-\frac{8}{25}$

26 $P(x)=ax^7+bx^5+cx^3+dx+3$ 이라 하면 나머지 정리에 의하여 $P(1)=-6$

$$a+b+c+d+3=-6 \quad \therefore a+b+c+d=-9 \quad \cdots ①$$

따라서 $P(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned} P(-1) &= -a-b-c-d+3 \\ &= -(a+b+c+d)+3 \\ &= -(-9)+3=12 \end{aligned} \quad \cdots ②$$

답 12

채점 기준	비율
① $a+b+c+d$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② 주어진 다항식을 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50 %

27 $P(x)=4x^2+kx-2$ 라 하면 나머지 정리에 의하여

$$R_1=P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}k-1, R_2=P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}k-1$$

$$R_1R_2=-8 \text{이므로} \quad \left(-\frac{1}{2}k-1\right)\left(\frac{1}{2}k-1\right)=-8$$

$$1-\frac{1}{4}k^2=-8, \quad k^2=36$$

$$\therefore k=6 (\because k>0) \quad \text{답 6}$$

28 $Q(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 $Q(-2)$ 이고 조건 ㉞에서

$$Q(-2)=-4P(-2) \quad \cdots \cdots ①$$

조건 ㉞, ㉝에 의하여

$$-2x^2P(x)+(3x^2+x)P(x)=x^4+ax^3+b$$

$$x(x+1)P(x)=x^4+ax^3+b$$

양변에 $x=0, x=-1$ 을 각각 대입하면

$$0=b, 0=1-a+b$$

$$\therefore a=1, b=0$$

즉 $x(x+1)P(x)=x^4+x^3$ 이므로 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$2P(-2)=8 \quad \therefore P(-2)=4$$

따라서 ①에서 구하는 나머지는

$$Q(-2)=-4 \cdot 4=-16 \quad \text{답 -16}$$

29 나머지 정리에 의하여

$$P(3)=2, P(-2)=7$$

다항식 $P(x)$ 를 x^2-x-6 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

$R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-x-6)Q(x)+ax+b \\ &= (x+2)(x-3)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 $x=3, x=-2$ 를 각각 대입하면

$$P(3)=3a+b, P(-2)=-2a+b$$

$$\therefore 3a+b=2, -2a+b=7$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=5$

따라서 $R(x)=-x+5$ 이므로 $R(5)=0$ 답 ①

30 나머지 정리에 의하여

$$P(2)=-1, P(-2)=3$$

다항식 $(x^2-x+1)P(x)$ 를 x^2-4 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} (x^2-x+1)P(x) &= (x^2-4)Q(x)+ax+b \\ &= (x+2)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 $x=2, x=-2$ 를 각각 대입하면

$$3P(2)=2a+b, 7P(-2)=-2a+b$$

$$\therefore 2a+b=-3, -2a+b=21$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-6, b=9$

따라서 구하는 나머지는 $-6x+9$ 이다. 답 $-6x+9$

31 $P(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-1)Q_1(x)+x+1 \\ &= (x+1)(x-1)Q_1(x)+x+1 \end{aligned} \quad \cdots \cdots ①$$

$P(x)$ 를 x^2+5x+6 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+5x+6)Q_2(x)-3x-1 \\ &= (x+2)(x+3)Q_2(x)-3x-1 \end{aligned} \quad \cdots \cdots ②$$

$P(x)$ 를 x^2+x-2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+x-2)Q(x)+ax+b \\ &= (x+2)(x-1)Q(x)+ax+b \end{aligned} \quad \cdots \cdots ③$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $P(1)=2$

②의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면 $P(-2)=5$

③의 양변에 $x=1, x=-2$ 를 각각 대입하면

$$P(1)=a+b, P(-2)=-2a+b$$

$$\therefore a+b=2, -2a+b=5$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=3$

따라서 구하는 나머지는 $-x+3$ 이다. 답 ②

32 $P(x)$ 를 $x^2+3x-10$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

$R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+3x-10)Q(x)+ax+b \\ &= (x+5)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned} \quad \cdots \cdots ① \quad \cdots ①$$

조건 ㉞의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$P(2)+P(2)=8 \quad \therefore P(2)=4 \quad \cdots \cdots ②$$

조건 ㉞의 양변에 $x=9$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} P(9)+P(-5) &= 8, \quad 11+P(-5)=8 (\because \text{조건 ㉞}) \\ \therefore P(-5) &= -3 \end{aligned} \quad \cdots \cdots ③$$

①의 양변에 $x=2, x=-5$ 를 각각 대입하면

$$P(2)=2a+b, P(-5)=-5a+b$$

$$\therefore 2a+b=4, -5a+b=-3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$

따라서 $R(x)=x+2$ 이므로 $R(-6)=-4$ 답 -4

채점 기준	비율
① 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	30 %
② $P(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $P(-5)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ $R(-6)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

33 $x^{12}-x^9+x^6-3$ 을 x^3-x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

$R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$x^{12}-x^9+x^6-3$$

$$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$$

$$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $c=-3$

㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0=a-b+c \quad \therefore a-b=3 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$-2=a+b+c \quad \therefore a+b=1 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

따라서 $R(x)=2x^2-x-3$ 이므로

$$R(4)=25 \quad \text{답 ㉠}$$

B $\frac{1}{3}$

다항식 $P(x)$ 를 $A(x)$ 로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$ 는

① $A(x)$ 가 일차식 $\Rightarrow R(x)$ 는 상수

$$\Rightarrow R(x)=a \text{ (단, } a \text{는 상수)}$$

② $A(x)$ 가 이차식 $\Rightarrow R(x)$ 는 상수이거나 일차식

$$\Rightarrow R(x)=ax+b \text{ (단, } a, b \text{는 상수)}$$

③ $A(x)$ 가 삼차식 $\Rightarrow R(x)$ 는 상수이거나 이차 이하의 다항식

$$\Rightarrow R(x)=ax^2+bx+c \text{ (단, } a, b, c \text{는 상수)}$$

34 $P(x)$ 를 $x(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면

$$P(x)=x(x-1)Q_1(x)-x+3 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$P(x)$ 를 $(x-1)(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q_2(x)+3x-1 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$P(x)$ 를 $x(x-1)(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$P(x)=x(x-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠의 양변에 $x=0, x=1$ 을 각각 대입하면

$$P(0)=3, P(1)=2$$

㉡의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$P(-2)=-7$$

㉢의 양변에 $x=0, x=1, x=-2$ 를 각각 대입하면

$$P(0)=c, P(1)=a+b+c, P(-2)=4a-2b+c$$

$$3=c, 2=a+b+c, -7=4a-2b+c$$

$$\therefore a=-2, b=1, c=3$$

따라서 구하는 나머지는 $-2x^2+x+3$ 이다. **답** $-2x^2+x+3$

35 $P(x)$ 를 $(x-1)^2(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

$R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$P(x)=(x-1)^2(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$P(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $2x-1$ 이므로 ㉠

에서 ax^2+bx+c 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $2x-1$ 이다.

$$\therefore ax^2+bx+c=a(x-1)^2+2x-1$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$P(x)=(x-1)^2(x-3)Q(x)+a(x-1)^2+2x-1$$

한편 $P(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로

$$P(3)=4a+5=1 \quad \therefore a=-1$$

따라서 $R(x)=-(x-1)^2+2x-1$ 이므로

$$R(4)=-2$$

답 ㉤

36 $P(x)$ 를 $3x^2-10x-8$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$P(x)=(3x^2-10x-8)Q(x)+2x+1$$

$$=(3x+2)(x-4)Q(x)+2x+1 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$P(x+1)$ 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$P(3+1)=P(4)$$

이므로 ㉠의 양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$P(4)=9$$

답 ㉣

다른 풀이 $P(x)$ 를 $3x^2-10x-8$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$P(x)=(3x^2-10x-8)Q(x)+2x+1$$

$$=(3x+2)(x-4)Q(x)+2x+1$$

양변에 x 대신 $x+1$ 을 대입하면

$$P(x+1)=(3x+5)(x-3)Q(x+1)+2x+3$$

이때 $(3x+5)(x-3)Q(x+1)$ 은 $x-3$ 으로 나누어떨어지므로

$P(x+1)$ 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $2x+3$ 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는

$$2 \cdot 3 + 3 = 9$$

37 $P(x)$ 를 x^2-5x+4 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$P(x)=(x^2-5x+4)Q(x)+3x-2$$

$$=(x-1)(x-4)Q(x)+3x-2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$(4x-1)P(6x+13)$ 을 $2x+3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$\left\{4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1\right\} P\left(6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 13\right) = -7P(4)$$

이때 ㉠의 양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$P(4)=10$$

이므로 구하는 나머지는

$$-7P(4)=-7 \cdot 10=-70$$

답 -70

38 $P(x+202)$ 를 $x+201$ 로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$$P(-201+202)=P(1)=5$$

$$1+a+b+3=5 \quad \therefore a+b=1 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

한편 $P(x+201)$ 을 $x+202$ 로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로

$$P(-202+201)=P(-1)=-3$$

$$1-a+b+3=-3 \quad \therefore a-b=7 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4, b=-3$

따라서 $P(x)=x^4+4x^3-3x^2+3$ 이므로

$$P(-2)=-25$$

답 -25

39 $P(2x-1)$ 을 $3x^2-4x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$P(2x-1)=(3x^2-4x+1)Q(x)+x+1$$

$$=(3x-1)(x-1)Q(x)+x+1$$

양변에 $x=\frac{1}{3}$, $x=1$ 을 각각 대입하면

$$P\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}, P(1)=2$$

$$5\left(-\frac{1}{3}a+b\right)+1=\frac{4}{3}, 5(a+b)+1=2$$

$$\therefore -\frac{1}{3}a+b=\frac{1}{15}, a+b=\frac{1}{5}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{10}, b=\frac{1}{10}$

$$\therefore a-b=0$$

답 0

40 $x^8-x^7+x^6$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면

$$x^8-x^7+x^6=(x+1)Q(x)+R$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=3$

$$\therefore x^8-x^7+x^6=(x+1)Q(x)+3 \quad \dots\dots ①$$

$Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$ 이므로 ①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1=2Q(1)+3 \quad \therefore Q(1)=-1 \quad \text{답 } -1$$

41 $P(x)$ 를 $4x+7$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -5 이므로

$$P(x)=(4x+7)Q(x)-5 \quad \dots\dots ① \quad \dots\dots ①$$

$Q(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$$Q\left(\frac{1}{2}\right)=4 \quad \dots\dots ②$$

$P(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ 이므로 ①의 양변에 $x=\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=9Q\left(\frac{1}{2}\right)-5=9\cdot 4-5=31 \quad \dots\dots ③$$

답 31

채점 기준	비율
① 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	30 %
② $Q\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $P(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

42 $P(x)$ 를 x^2-2x+4 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x-3$ 이므로

$$P(x)=(x^2-2x+4)Q(x)+x-3 \quad \dots\dots ①$$

$Q(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$ 라 하면 나머지가 1이므로

$$Q(x)=(x+2)Q'(x)+1 \quad \dots\dots ②$$

②을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-2x+4)\{(x+2)Q'(x)+1\}+x-3 \\ &= (x^3+8)Q'(x)+x^2-x+1 \end{aligned}$$

따라서 $R(x)=x^2-x+1$ 이므로 $R(3)=7$ 답 7

43 $95^{99}=(94+1)^{99}$

$(x+1)^{99}$ 을 x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$(x+1)^{99}=xQ(x)+R \quad \dots\dots ①$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $R=1$

①의 양변에 $x=94$ 를 대입하면

$$95^{99}=94Q(94)+1$$

따라서 95^{99} 을 94로 나누었을 때의 나머지는 1이다. 답 ①

44 (1) $(x-1)^7$ 을 x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$(x-1)^7=xQ(x)+R \quad \dots\dots ①$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $R=-1$

따라서 구하는 나머지는 -1 이다. ①

(2) ①의 양변에 $x=60$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} 59^7 &= 60Q(60)-1 \\ &= 60\{Q(60)-1\}+60-1 \\ &= 60\{Q(60)-1\}+59 \end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 59이다. ②

답 (1) -1 (2) 59

채점 기준	비율
① $(x-1)^7$ 을 x 로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %
② 59^7 을 60으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	60 %

참고 다항식의 나눗셈에서는 나머지가 음수일 수 있지만 자연수의 나눗셈에서는 나머지가 0 또는 자연수이어야 한다.

45 $x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}=(x-1)Q(x)+R \quad \dots\dots ①$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=4$

①의 양변에 $x=12$ 를 대입하면

$$12^{11}+12^{12}+12^{13}+12^{14}=11Q(12)+4$$

따라서 $12^{11}+12^{12}+12^{13}+12^{14}$ 을 11로 나누었을 때의 나머지는 4이다. 답 4

$$46 \quad 3^{119}=(3^3)^{39}\cdot 3^2=9\cdot 27^{39}$$

$9x^{39}$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$9x^{39}=(x+1)Q(x)+R \quad \dots\dots ①$$

①의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=-9$

①의 양변에 $x=27$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} 9\cdot 27^{39} &= 28Q(27)-9 \\ &= 28\{Q(27)-1\}+28-9 \\ &= 28\{Q(27)-1\}+19 \end{aligned}$$

따라서 3^{119} 을 28로 나누었을 때의 나머지는 19이다. 답 ③

47 $P(x)=x^3+mx^2+nx+6$ 이라 하면 $P(x)$ 가 $x+2$, $x-3$ 으로 각각 나누어떨어지므로

$$\begin{aligned} P(-2) &= 0, P(3) = 0 \\ -8+4m-2n+6 &= 0, 27+9m+3n+6=0 \\ \therefore 2m-n &= 1, 3m+n &= -11 \end{aligned}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $m=-2, n=-5$

$$\therefore m-n=3$$

답 ①

48 $P(x)=4x^4-kx^3+k^2x+2$ 라 하면 인수 정리에 의하여 $P(-1)=0$ 이어야 하므로

$$4+k-k^2+2=0 \quad \cdots ①$$

$$k^2-k-6=0, \quad (k+2)(k-3)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=3 \quad \cdots ②$$

$$\text{따라서 모든 } k \text{의 값의 곱은 } -2 \cdot 3 = -6 \quad \cdots ③$$

답 -6

채점 기준	비율
① 인수 정리를 이용하여 식을 세울 수 있다.	40 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 모든 k 의 값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

49 $P(6x+1)$ 이 $2x+1$ 로 나누어떨어지므로

$$P\left(6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = P(-2) = 0$$

$$-8+4a-6-8=0 \quad \therefore a = \frac{11}{2} \quad \text{답 } \frac{11}{2}$$

50 $P(1)=2, P(2)=4, P(3)=6$ 에서

$$P(1)-2=0, P(2)-4=0, P(3)-6=0$$

이므로 $P(x)-2x$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 으로 각각 나누어떨어진다.

이때 $P(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$$P(x)-2x=(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+2x$$

따라서 $P(x)$ 를 $x-5$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$P(5)=(5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-3) + 10 = 34 \quad \text{답 } 34$$

51 $P(x)=2x^3-5x^2+ax+b$ 라 하면 $P(x)$ 가 $(x+1)(x-4)$ 로 나누어떨어지므로

$$P(-1)=0, P(4)=0$$

$$-2-5-a+b=0, 128-80+4a+b=0$$

$$\therefore -a+b=7, 4a+b=-48$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-11, b=-4$

$$\therefore P(x)=2x^3-5x^2-11x-4$$

따라서 $P(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$P(1)=-18 \quad \text{답 } -18$$

52 $P(x)=x^4+4x^3+ax+b$ 라 하면 $P(x)$ 가 x^2+3x+2 , 즉 $(x+2)(x+1)$ 로 나누어떨어지므로

$$P(-2)=0, P(-1)=0$$

$$16-32-2a+b=0, 1-4-a+b=0$$

$$\therefore -2a+b=16, -a+b=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-13, b=-10$

$$\therefore a+b=-23 \quad \text{답 } ③$$

53 $P(x)+8$ 이 $x^2-6x-27$, 즉 $(x+3)(x-9)$ 로 나누어떨어지므로

$$P(-3)+8=0, P(9)+8=0$$

$$\therefore P(-3)=-8, P(9)=-8 \quad \cdots ①$$

$P(2x+7)$ 을 x^2+4x-5 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$P(2x+7)=(x^2+4x-5)Q(x)+ax+b$$

$$=(x+5)(x-1)Q(x)+ax+b \quad \cdots ②$$

양변에 $x=-5, x=1$ 을 각각 대입하면

$$P(-3)=-5a+b, P(9)=a+b$$

$$\therefore -5a+b=-8, a+b=-8$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=0, b=-8$

따라서 구하는 나머지는 -8 이다. $\cdots ③$

답 -8

채점 기준	비율
① $P(-3), P(9)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	20 %
③ $P(2x+7)$ 을 x^2+4x-5 로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

54 $P(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$P(2-x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 9이므로

$$P(2-2)=P(0)=9 \quad \therefore c=9$$

$x^2P(x)-6x$ 가 x^2-9 , 즉 $(x+3)(x-3)$ 으로 나누어떨어지므로

$$9P(-3)+18=0, 9P(3)-18=0$$

$$P(-3)=-2, P(3)=2$$

$$9a-3b+9=-2, 9a+3b+9=2$$

$$\therefore 9a-3b=-11, 9a+3b=-7$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=\frac{2}{3}$

따라서 $P(x)=-x^2+\frac{2}{3}x+9$ 이므로

$$P(2)=\frac{19}{3} \quad \text{답 } ⑤$$

55 x^3+ax^2-2x+b 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & a & -2 & b \\ & & 3 & 3a+9 & 9a+21 \\ \hline & 1 & a+3 & 3a+7 & 9a+b+21 \end{array}$$

따라서 $k=3, c=3, a+3=-1, 3a+9=d, 9a+b+21=-5$ 이므로

$$a=-4, b=10, c=3, d=-3, k=3 \quad \text{답 } ③$$

다른 풀이 x^3+ax^2-2x+b 를 $x-3$ 으로 나누었을 때, 주어진 조립제법에서 $k=3$

$$\text{즉 } c=k \cdot 1=3 \cdot 1=3 \text{이므로 } a+3=-1 \quad \therefore a=-4$$

$$-2+d=-5 \text{이므로 } d=-3$$

$$b-15=-5 \text{이므로 } b=10$$

56 조립제법을 완성하면 오른쪽

과 같다.

$3x^3+2x^2-5$ 를 $x+1$ 로 나누었을

때의 몫은 $3x^2-x+1$ 이므로

$$Q(x)=3x^2-x+1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 2 & 0 & -5 \\ & -3 & 1 & -1 & \\ \hline & 3 & -1 & 1 & -6 \\ & & 12 & 44 & \\ \hline & 3 & 11 & & 45 \end{array}$$

$Q(x)$ 를 $x-4$ 로 나누었을 때의 몫은 $3x+11$ 이므로
 $Q'(x)=3x+11$ 답 3x+11

57 (1) 주어진 조립제법에서 $2a+1=0$ 이므로 $a=-\frac{1}{2}$
 따라서 조립제법을 완성하면 $-\frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 2 & 7 \\ & -2 & 4 & -3 \\ & 4 & -8 & 6 \end{array} \right| 4$
 오른쪽과 같으므로
 $b=-8, c=4, d=4$
 $\therefore abcd=64$

(2) $4x^3-6x^2+2x+7$ 을 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫은
 $4x^2-8x+6$, 나머지는 4이므로
 $4x^3-6x^2+2x+7=(x+\frac{1}{2})(4x^2-8x+6)+4$
 $= (2x+1)(2x^2-4x+3)+4$
 따라서 주어진 다항식을 $2x+1$ 로 나누었을 때의 몫은
 $2x^2-4x+3$, 나머지는 4이다.
 답 (1) 64 (2) 몫: $2x^2-4x+3$, 나머지: 4

58 $-2 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 8 \\ & -2 & 2 & 2 \\ -2 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 10 \\ & -2 & 6 & \end{array} \right. \\ -2 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & \\ & -2 & \\ 1 & -5 \end{array} \right. \end{array} \right.$

위의 조립제법에서
 $x^3+x^2-3x+8=(x+2)(x^2-x-1)+10$
 $= (x+2)\{(x+2)(x-3)+5\}+10$
 $= (x+2)[(x+2)\{(x+2)-5\}+5]+10$
 $= (x+2)\{(x+2)^2-5(x+2)+5\}+10$
 $= (x+2)^3-5(x+2)^2+5(x+2)+10$
 $\therefore a=1, b=-5, c=5, d=10$
 $\therefore a-b-c+d=11$ 답 ④

다른 풀이 ① $a(x+2)^3+b(x+2)^2+c(x+2)+d$
 $=a(x^3+6x^2+12x+8)+b(x^2+4x+4)+c(x+2)+d$
 $=ax^3+(6a+b)x^2+(12a+4b+c)x+8a+4b+2c+d$
 이므로
 $a=1, 6a+b=1, 12a+4b+c=-3, 8a+4b+2c+d=8$
 $\therefore a=1, b=-5, c=5, d=10$

다른 풀이 ② 주어진 등식의 좌변의 최고차항의 계수가 1이므로
 $a=1$ 이고, 주어진 등식은
 $x^3+x^2-3x+8=(x+2)^3+b(x+2)^2+c(x+2)+d$
 $\dots\dots ㉠$

㉠의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면 $d=10$
 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $8+4b+2c+10=8$
 $\therefore 2b+c=-5$ \dots\dots ㉡
 ㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $1+b+c+10=11$
 $\therefore b+c=0$ \dots\dots ㉢
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $b=-5, c=5$

59 (1) $1 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -9 \\ & 1 & 1 & 3 \\ 1 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -6 \\ & 1 & 2 & \end{array} \right. \\ 1 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & \\ & 1 & \\ 1 & 3 \end{array} \right. \end{array} \right.$

위의 조립제법에서
 $x^3+2x-9=(x-1)(x^2+x+3)-6$
 $= (x-1)\{(x-1)(x+2)+5\}-6$
 $= (x-1)[(x-1)\{(x-1)+3\}+5]-6$
 $= (x-1)\{(x-1)^2+3(x-1)+5\}-6$
 $= (x-1)^3+3(x-1)^2+5(x-1)-6$
 $\therefore a=1, b=3, c=5, d=-6$ \dots\dots ①
 (2) (1)에서 $P(x)=(x-1)^3+3(x-1)^2+5(x-1)-6$ 이므로
 $P(0.9)=(-0.1)^3+3 \times (-0.1)^2+5 \times (-0.1)-6$
 $=-6.471$ \dots\dots ②
 답 (1) $a=1, b=3, c=5, d=-6$ (2) -6.471

채점 기준	비율
① a, b, c, d 의 값을 구할 수 있다.	70 %
② $P(0.9)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

60 $\frac{3}{2} \left| \begin{array}{ccc|c} 8 & -24 & -2 & 1 \\ & 12 & -18 & -30 \\ \frac{3}{2} \left| \begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & -20 & -29 \\ & 12 & 0 & \end{array} \right. \\ \frac{3}{2} \left| \begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & -20 & \\ & 12 & \\ 8 & 12 \end{array} \right. \end{array} \right.$

위의 조립제법에서
 $8x^3-24x^2-2x+1$
 $= (x-\frac{3}{2})(8x^2-12x-20)-29$
 $= (x-\frac{3}{2})[(x-\frac{3}{2}) \cdot 8x-20]-29$
 $= (x-\frac{3}{2})[(x-\frac{3}{2})\{8(x-\frac{3}{2})+12\}-20]-29$
 $= (x-\frac{3}{2})\{8(x-\frac{3}{2})^2+12(x-\frac{3}{2})-20\}-29$
 $= 8(x-\frac{3}{2})^3+12(x-\frac{3}{2})^2-20(x-\frac{3}{2})-29$
 $= (2x-3)^3+3(2x-3)^2-10(2x-3)-29$
 따라서 $a=1, b=3, c=-10, d=-29$ 이므로
 $ad-bc=1$ 답 1

61 ② $-8x^3+36x^2y-54xy^2+27y^3$
 $= (-2x)^3+3 \cdot (-2x)^2 \cdot 3y+3 \cdot (-2x) \cdot (3y)^2+(3y)^3$
 $= (-2x+3y)^3$ 답 ②

$$\begin{aligned}
 62 \quad x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 10x &= x(x^4 - 4x^2 + 5x - 10) \\
 &= x\{x^2(x^2 - 4) + 5(x - 2)\} \\
 &= x\{x^2(x+2)(x-2) + 5(x-2)\} \\
 &= x(x-2)\{x^2(x+2) + 5\} \\
 &= x(x-2)(x^3 + 2x^2 + 5)
 \end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 $\frac{5}{x(x-2)=x^2-2x}$ 이다. 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 63 \quad ① \quad x^2 - (y-z)^2 &= (x+y-z)(x-y+z) \\
 ② \quad x^3 + 27 &= (x+3)(x^2 - 3x + 9) \\
 ③ \quad x^6 - y^6 &= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) \\
 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2)(x-y)(x^2 + xy + y^2) \\
 &= (x+y)(x-y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ④ \quad (2x-y)^3 - 8y^3 &= (2x-y)^3 - (2y)^3 \\
 &= (2x-y-2y)\{(2x-y)^2 + (2x-y) \cdot 2y + (2y)^2\} \\
 &= (2x-3y)(4x^2 + 3y^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ⑤ \quad a^3 - b^3 - 8c^3 - 6abc &= a^3 + (-b)^3 + (-2c)^3 - 3 \cdot a \cdot (-b) \cdot (-2c) \\
 &= (a-b-2c)(a^2 + b^2 + 4c^2 + ab - 2bc + 2ca)
 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 64 \quad (x-5)(x-4)(x+1)(x+2) - 40 &= \{(x-5)(x+2)\}\{(x-4)(x+1)\} - 40 \\
 &= (x^2 - 3x - 10)(x^2 - 3x - 4) - 40
 \end{aligned}$$

$x^2 - 3x = t$ 로 놓으면 상수항끼리의 합이 같아지도록 두 개씩 짝을 지어 전개한다.

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= (t-10)(t-4) - 40 \\
 &= t^2 - 14t \\
 &= t(t-14) \\
 &= (x^2 - 3x)(x^2 - 3x - 14) \\
 &= x(x-3)(x^2 - 3x - 14)
 \end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 65 \quad x^2 + x = t \text{로 놓으면} \\
 (\text{주어진 식}) &= (t-4)(t+7) + 18 \\
 &= t^2 + 3t - 10 \\
 &= (t-2)(t+5) \\
 &= (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 5) \\
 &= (x+2)(x-1)(x^2 + x + 5)
 \end{aligned}$$

따라서 $a = -1, b = 1, c = 5$ 이므로 $abc = -5$ 답 -5

$$\begin{aligned}
 66 \quad (x^2 - 2x)^2 - 11x^2 + 22x + 24 &= (x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24 \\
 x^2 - 2x = t \text{로 놓으면} \\
 (\text{주어진 식}) &= t^2 - 11t + 24 \\
 &= (t-3)(t-8) \\
 &= (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 8) \\
 &= (x+1)(x-3)(x+2)(x-4)
 \end{aligned}$$

이때 $a < b < c < d$ 이므로

$$\begin{aligned}
 a &= -4, b = -3, c = 1, d = 2 \\
 \therefore ab + cd &= 14
 \end{aligned}$$

답 14

$$\begin{aligned}
 67 \quad (x+5)(x+4)(x+3)(x+2) - k &= \{(x+5)(x+2)\}\{(x+4)(x+3)\} - k \\
 &= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - k
 \end{aligned}$$

$x^2 + 7x = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= (t+10)(t+12) - k \\
 &= t^2 + 22t + 120 - k
 \end{aligned}$$

주어진 식이 x 에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ①이 t 에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로

$$120 - k = \left(\frac{22}{2}\right)^2 \quad \therefore k = -1$$

답 -1

채점 기준	비율
① 공통부분이 생기도록 식을 변형할 수 있다.	30 %
② 공통부분을 t 로 치환하여 식을 전개할 수 있다.	30 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 $k = -1$ 일 때, 주어진 식은 다음과 같이 인수분해된다.
 (주어진 식) $= t^2 + 22t + 121 = (t+11)^2 = (x^2 + 7x + 11)^2$

$$\begin{aligned}
 68 \quad x^2 = X \text{로 놓으면} \\
 x^4 - 20x^2 + 64 &= X^2 - 20X + 64 \\
 &= (X-4)(X-16) \\
 &= (x^2-4)(x^2-16) \\
 &= (x+2)(x-2)(x+4)(x-4) \\
 \therefore |a| + |b| + |c| + |d| &= |-2| + |2| + |-4| + |4| \\
 &= 2 + 2 + 4 + 4 = 12
 \end{aligned}$$

답 12

$$\begin{aligned}
 69 \quad x^2 = X \text{로 놓으면} \\
 x^4 - 50x^2 + 625 &= X^2 - 50X + 625 \\
 &= (X-25)^2 \\
 &= (x^2-25)^2 \\
 &= \{(x+5)(x-5)\}^2 \\
 &= (x+5)^2(x-5)^2
 \end{aligned}$$

이때 $a > b$ 이므로 $a = 5, b = -5$
 $\therefore a - b = 10$

답 10

채점 기준	비율
① 주어진 등식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	50 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

$$\begin{aligned}
 70 \quad x^4 - 21x^2y^2 + 36y^4 &= (x^4 - 12x^2y^2 + 36y^4) - 9x^2y^2 \\
 &= (x^2 - 6y^2)^2 - (3xy)^2 \\
 &= (x^2 + 3xy - 6y^2)(x^2 - 3xy - 6y^2)
 \end{aligned}$$

따라서 $a = 3, b = -6$ 또는 $a = -3, b = -6$ 이므로 $b^2 - a^2 = 27$ 답 ④

71 $x^4 + 6x^2 + 25 = (x^4 + 10x^2 + 25) - 4x^2$

$= (x^2 + 5)^2 - (2x)^2$

$= (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 5)$

(i) $f(x) = x^2 + 2x + 5$, $f(x-2) = x^2 - 2x + 5$ 인 경우

$f(x)$ 에 x 대신 $x-2$ 를 대입하면

$f(x-2) = (x-2)^2 + 2(x-2) + 5 = x^2 - 2x + 5$

이므로 조건을 만족시킨다.

마찬가지로 $f(x) = -(x^2 + 2x + 5)$,

$f(x-2) = -(x^2 - 2x + 5)$ 인 경우도 조건을 만족시킨다.

(ii) $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $f(x-2) = x^2 + 2x + 5$ 인 경우

$f(x)$ 에 x 대신 $x-2$ 를 대입하면

$f(x-2) = (x-2)^2 - 2(x-2) + 5 = x^2 - 6x + 13$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

마찬가지로 $f(x) = -(x^2 - 2x + 5)$,

$f(x-2) = -(x^2 + 2x + 5)$ 인 경우도 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x) = x^2 + 2x + 5$ 또는 $f(x) = -(x^2 + 2x + 5)$ 이므로

$f(-2) = 5$ 또는 $f(-2) = -5$

$\therefore |f(-2)| = 5$

답 5

참고 두 다항식 $f(x)$, $f(x-2)$ 는 차수가 같으므로 $f(x)$ 와 $f(x-2)$ 는 모두 이차식이어야 한다.

72 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$3x^2 + 5xy - 2y^2 - 9x + 10y - 12$

$= 3x^2 + (5y - 9)x - 2(y^2 - 5y + 6)$

$= 3x^2 + (5y - 9)x - 2(y - 2)(y - 3)$

$= \{3x - (y - 3)\} \{x + 2(y - 2)\}$

$= (3x - y + 3)(x + 2y - 4)$

따라서 $a = 3$, $b = -1$, $c = 2$ 이므로

$a + b + c = 4$

답 4

참고 y 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

73 주어진 식을 a 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2(b-c) + b^2(a-c) + c^2(a+b) - 2abc$

$= a^2(b-c) + ab^2 - b^2c + ac^2 + bc^2 - 2abc$

$= (b-c)a^2 + (b^2 + c^2 - 2bc)a - b^2c + bc^2$

$= (b-c)a^2 + (b-c)^2a - bc(b-c)$

$= (b-c)\{a^2 + (b-c)a - bc\}$

$= (b-c)(a+b)(a-c)$

$= (a+b)(b-c)(a-c)$

답 ③

74 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2 + 2xy - 3y^2 + ax - 5y - 2$

$= x^2 + (2y + a)x - (3y^2 + 5y + 2)$

$= x^2 + (2y + a)x - (y + 1)(3y + 2)$

→ ①

주어진 식이 x , y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$-(y + 1) + (3y + 2) = 2y + a \quad \therefore a = 1$

→ ②

답 1

채점 기준

비율

① 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다.

50 %

② a 의 값을 구할 수 있다.

50 %

75 주어진 식의 분자를 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$xy(y-x) + zx(x-z) - yz(y-z)$

$= xy^2 - x^2y + zx^2 - z^2x - y^2z + yz^2$

$= (z-y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz(z-y)$

$= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + yz(z-y)$

$= (z-y)\{x^2 - (z+y)x + yz\}$

$= (z-y)(x-y)(x-z)$

$= -(x-y)(y-z)(x-z)$

$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{-(x-y)(y-z)(x-z)}{(x-y)(y-z)(x-z)} = -1$

답 ②

76 $P(x) = x^3 + x^2 - 26x + 24$ 라 하면

$P(1) = 1 + 1 - 26 + 24 = 0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을

이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$x^3 + x^2 - 26x + 24 \quad \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -26 & 24 \\ & & 1 & 2 & -24 \\ \hline & & 1 & 2 & -24 & 0 \end{array}$

$= (x-1)(x^2 + 2x - 24)$

$= (x-1)(x-4)(x+6)$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (-1)^2 + (-4)^2 + 6^2 = 53$

답 53

77 $P(x)$ 가 $x+3$ 을 인수로 가지므로

$P(-3) = -27 + 9a + 3 - 30 = 0$

$9a = 54 \quad \therefore a = 6$

즉 $P(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$ 이

므로 오른쪽과 같이 조립제법을

이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하

면

$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x+3)(x^2 + 3x - 10)$

$= (x+3)(x-2)(x+5)$

답 $(x+3)(x-2)(x+5)$

78 주어진 등식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$12 = 3a \quad \therefore a = 4$

즉 $x^3 + 3x^2 - 9x - 15 = (x-3)P(x) + 4x$ 이므로

$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x-3)P(x)$

$x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ 가 $x-3$ 을 인

수로 가지므로 오른쪽과 같이 조

립제법을 이용하여 인수분해하면

$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x-3)(x^2 + 6x + 5)$

따라서 $(x-3)(x^2 + 6x + 5) = (x-3)P(x)$ 이므로

$P(x) = x^2 + 6x + 5$

답 $x^2 + 6x + 5$

79 $P(x) = x^3 + (1-2a)x^2 - 2(a+3)x + 12a$ 라 하면

$P(2) = 8 + 4(1-2a) - 4(a+3) + 12a = 0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1-2a & -2(a+3) & 12a \\ & & 2 & -4a+6 & -12a \\ \hline & 1 & 3-2a & -6a & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + (1-2a)x^2 - 2(a+3)x + 12a \\ = (x-2)\{x^2 + (3-2a)x - 6a\} \\ = (x-2)(x+3)(x-2a) \end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

다른 풀이 주어진 식을 a 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} x^3 + (1-2a)x^2 - 2(a+3)x + 12a \\ = a(-2x^2 - 2x + 12) + x^3 + x^2 - 6x \\ = -2a(x^2 + x - 6) + x(x^2 + x - 6) \\ = (x^2 + x - 6)(x - 2a) \\ = (x-2)(x+3)(x-2a) \end{aligned}$$

80 $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 18x = x(x^3 - 4x^2 - 3x + 18)$

$H(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ 이라 하면

$$H(-2) = -8 - 16 + 6 + 18 = 0$$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $H(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & -2 & 12 & -18 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \\ = (x+2)(x^2 - 6x + 9) \\ = (x+2)(x-3)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 18x = x(x+2)(x-3)^2 \quad \cdots ①$$

$P(x), Q(x)$ 는 각각 최고차항의 계수가 1인 이차식이고

$P(-2) \neq 0, Q(0) \neq 0$ 이므로

$P(x)$ 는 $x+2$ 를 인수로 갖지 않고
 $Q(x)$ 는 x 를 인수로 갖지 않는다.

$$Q(x) = (x+2)(x-3) \quad \cdots ②$$

$$\therefore P(5) - Q(-3) = 10 - 6 = 4 \quad \cdots ③$$

답 4

채점 기준	비율
① 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	40 %
② $P(x), Q(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $P(5) - Q(-3)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

81 $-1 \begin{array}{r|rrrrr} a & 0 & 1 & b & 4 \\ & -a & a & -a-1 & a-b+1 \\ -1 & a & -a & a+1 & -a+b-1 & a-b+5 \\ & -a & 2a & -3a-1 & & \\ \hline & a & -2a & 3a+1 & -4a+b-2 \end{array}$

이때 $ax^4 + x^2 + bx + 4$ 가 $(x+1)^2$ 을 인수로 가지므로

$$a - b + 5 = 0, -4a + b - 2 = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=6$

$$\therefore x^4 + x^2 + 6x + 4 = (x+1)^2(x^2 - 2x + 4)$$

따라서 $Q(x) = x^2 - 2x + 4$ 이므로

$$Q(1) = 3$$

답 ③

82 $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = x^2 \left(x^2 + 2x - 6 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$

$$\begin{aligned} &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 6 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 8 \right\} \\ &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 4 \right) \\ &= (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 4x + 1) \\ &= (x-1)^2(x^2 + 4x + 1) \end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

83 $x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 7x + 1 = x^2 \left(x^2 + 7x + 8 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$

$$\begin{aligned} &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} + 7 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 8 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 7 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 6 \right\} \\ &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 6 \right) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 + 6x + 1) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c + d = 1 + 1 + 6 + 1 = 9 \quad \cdots ②$$

답 9

채점 기준	비율
① 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	70 %
② $a + b + c + d$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

84 $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = x^2 \left(x^2 - 2x - 5 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$

$$\begin{aligned} &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 5 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 3 \right\} \\ &= x^2 \left(x - \frac{1}{x} + 1 \right) \left(x - \frac{1}{x} - 3 \right) \\ &= (x^2 + x - 1)(x^2 - 3x - 1) \\ &\quad \text{답 } (x^2 + x - 1)(x^2 - 3x - 1) \end{aligned}$$

85 $2x - 3y - z = 0$ 에서 $z = 2x - 3y$

$$\begin{aligned} \therefore 10x^2 - 15xy - z^2 &= 10x^2 - 15xy - (2x - 3y)^2 \\ &= 5x(2x - 3y) - (2x - 3y)^2 \\ &= (2x - 3y)\{5x - (2x - 3y)\} \\ &= (2x - 3y)(3x + 3y) \\ &= 3z(x + y) \quad \text{답 ③} \end{aligned}$$

참고 주어진 식에 $x = \frac{3y+z}{2}, y = \frac{2x-z}{3}$ 를 대입하여 인수분해해도 그 결과는 같다.

86 $9 - a^2 - 12ab - 36b^2 = 9 - (a^2 + 12ab + 36b^2)$

$$\begin{aligned} &= 3^2 - (a + 6b)^2 \\ &= \{3 + (a + 6b)\}\{3 - (a + 6b)\} \\ &= (3 + a + 6b)(3 - a - 6b) \end{aligned}$$

이때 $a-6b+3=0$ 에서

$$a+3=6b, -6b+3=-a$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = (6b+6b)(-a-a)$$

$$=12b \cdot (-2a) = -24ab$$

답 ①

다른 풀이 $a-6b+3=0$ 에서 $a=6b-3$

$$\therefore 9-a^2-12ab-36b^2$$

$$=9-(6b-3)^2-12b(6b-3)-36b^2$$

$$=9-36b^2+36b-9-72b^2+36b-36b^2$$

$$=-144b^2+72b$$

$$=-24b(6b-3) = -24ab$$

87 주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$$a^2+b^2-2ab+ac-bc = (a^2-2ab+b^2)+c(a-b)$$

$$= (a-b)^2+c(a-b)$$

$$= (a-b)(a-b+c)$$

즉 $(a-b)(a-b+c)=0$ 이고 $a-b+c \neq 0$ 이므로

$$a-b=0 \quad \therefore a=b$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=b$ 인 이등변삼각형이다. 답 ①

88 주어진 등식의 좌변을 c 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2$$

$$= -(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

$$= -(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)$$

$$= (a+b)(a^2+b^2-c^2)$$

→ ①

즉 $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$ 이고 $a+b \neq 0$ 이므로

$$a^2+b^2-c^2=0 \quad \therefore a^2+b^2=c^2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다. → ②

답 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

채점 기준	비율
① 주어진 등식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	50 %
② 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	50 %

89 주어진 식을 $P(x)$ 라 하면 다항식 $P(x)$ 가 $x+a$ 로 나누어 떨어지므로

$$P(-a)=0$$

$$\therefore -a^3-(b+c)a^2-(c^2-b^2)a+b^3+b^2c-bc^2-c^3=0$$

이 등식의 좌변을 인수분해하면

$$-a^3-(b+c)a^2-(c^2-b^2)a+b^3+b^2c-bc^2-c^3$$

$$= -a^3-(b+c)a^2+(b^2-c^2)a+b^2(b+c)-c^2(b+c)$$

$$= -a^3-(b+c)a^2+(b^2-c^2)a+(b^2-c^2)(b+c)$$

$$= -a^2(a+b+c)+(b^2-c^2)(a+b+c)$$

$$= (-a^2+b^2-c^2)(a+b+c)$$

즉 $(-a^2+b^2-c^2)(a+b+c)=0$ 이고 $a+b+c \neq 0$ 이므로

$$-a^2+b^2-c^2=0 \quad \therefore b^2=a^2+c^2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형이므로 그 넓이는 $\frac{1}{2}ac$ 답 $\frac{1}{2}ac$

90 $x^4+y^4+x^3y+xy^3=x^3(x+y)+y^3(x+y)$

$$= (x+y)(x^3+y^3)$$

$$= (x+y)^2(x^2-xy+y^2)$$

$$= (x+y)^2\{(x+y)^2-3xy\}$$

$$x+y=(-2+\sqrt{5})+(-2-\sqrt{5})=-4,$$

$$xy=(-2+\sqrt{5})(-2-\sqrt{5})=-1 \text{ 이므로 구하는 식의 값은}$$

$$(-4)^2 \cdot \{(-4)^2-3 \cdot (-1)\} = 304$$

답 304

91 $a^3+b^3-c^3+3abc=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$

에서 $a+b-c=0$ 이므로

$$a^3+b^3-c^3+3abc=0$$

$$\therefore a^3+b^3-c^3=-3abc$$

$$\therefore \frac{a^3+b^3-c^3}{abc} = \frac{-3abc}{abc} = -3$$

답 ①

92 주어진 식을 a 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$a^2(b-c)+b^2(a+c)-c^2(a+b)$$

$$= a^2(b-c)+ab^2+b^2c-ac^2-bc^2$$

$$= (b-c)a^2+(b^2-c^2)a+bc(b-c)$$

$$= (b-c)a^2+(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$$

$$= (b-c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$$

$$= (b-c)(a+b)(a+c)$$

→ ①

$$a+b=3+\sqrt{2}, a+c=3-\sqrt{2} \text{를 변끼리 빼면}$$

$$b-c=2\sqrt{2}$$

→ ②

따라서 구하는 식의 값은

$$2\sqrt{2} \cdot (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 14\sqrt{2}$$

→ ③

답 $14\sqrt{2}$

채점 기준	비율
① 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	60 %
② $b-c$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

93 주어진 식을 a 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$$

$$= (b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$$

$$= (b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$$

$$= (b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$

$$= (b-c)(a-b)(a-c)$$

이때 a, b, c 는 연속하는 세 짝수이고 $a < b < c$ 이므로

$$b=a+2, c=a+4$$

$$\therefore b-c=-2, a-b=-2, a-c=-4$$

따라서 구하는 식의 값은

$$-2 \cdot (-2) \cdot (-4) = -16$$

답 -16

94 $1001=a$ 로 놓으면

$$(\text{주어진 식}) = \frac{a^3-1}{(a+1)a+1} = \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$$

$$= a-1 = 1000$$

답 ④

95 $50=x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} 48 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 55 + 36 &= (x-2)(x+1)(x+2)(x+5) + 36 \\ &= \{(x-2)(x+5)\}\{(x+1)(x+2)\} + 36 \\ &= (x^2+3x-10)(x^2+3x+2) + 36 \end{aligned}$$

$x^2+3x=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} &(x^2+3x-10)(x^2+3x+2) + 36 \\ &= (X-10)(X+2) + 36 = X^2 - 8X + 16 \\ &= (X-4)^2 = (x^2+3x-4)^2 \\ &= (50^2+3 \cdot 50-4)^2 = (2500+150-4)^2 \\ &= 2646^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{48 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 55 + 36} = \sqrt{2646^2} = 2646 \quad \text{답 2646}$$

96 $P(-1)=0$, $P(3)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -6 & -8 & -3 \\ & & -1 & 1 & 5 & 3 \\ \hline 3 & 1 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ & & 3 & 6 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x) &= (x+1)(x-3)(x^2+2x+1) \\ &= (x+1)^3(x-3) \end{aligned}$$

$$\therefore P(9) = (9+1)^3 \cdot (9-3) = 6000 \quad \text{답 ①}$$

97 3^6-1 이 n 으로 나누어떨어지므로 n 은 3^6-1 의 약수이다.

$$\begin{aligned} 3^6-1 &= (3^3)^2-1^2 = (3^3-1)(3^3+1) \\ &= (3-1)(3^2+3+1)(3+1)(3^2-3+1) \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 13 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

따라서 세 자리 자연수 n 의 값은

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 \cdot 13 &= 104, \quad 2 \cdot 7 \cdot 13 = 182, \quad 4 \cdot 7 \cdot 13 = 364, \\ 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 13 &= 728 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{답 104, 182, 364, 728}$$

채점 기준	비율
① 주어진 수를 소인수분해 할 수 있다.	70 %
② n 의 값을 모두 구할 수 있다.	30 %

03 복소수

II. 방정식

개념정리

본책 32쪽

- ① 허수부분 ② 허수 ③ c ④ d
⑤ $a-bi$ ⑥ $-i$ ⑦ $-\sqrt{a}i$

유형 뽐내기

본책 33쪽

01 ⑤ $a=0$, $b=i$ 이면 $a+bi=i^2=-1$ 은 실수이다.
 $\leftarrow b$ 가 실수라는 조건이 없으므로 허수일 수도 있다. 답 ⑤

02 허수는 $6i$, $2+5i$, $1-i$, $\sqrt{5}i$ 의 4개이다. 답 4

03 ① $(5+2i)+(4-7i)=9-5i$

② $(i+6)-(2i-9)=15-i$

③ $(1-i^2)-(1+i^2)=(1+1)-(1-1)=2$

④ $(4i-1)^2=-16-8i+1=-15-8i$

⑤ $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i - (-2i)}{2} = 2i$

답 ③

$$\begin{aligned} 04 &(2-3i)(3+i) - \frac{1-\sqrt{5}i}{\sqrt{5}+i} \\ &= 6+2i-9i+3 - \frac{(1-\sqrt{5}i)(\sqrt{5}-i)}{(\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}-i)} \\ &= 9-7i - \frac{\sqrt{5}-i-5i-\sqrt{5}}{6} \\ &= 9-7i - \frac{-6i}{6} = 9-6i \end{aligned} \quad \text{답 9-6i}$$

05 $z_1=(1+i)^2=2i$

$$z_2 = \frac{2+\sqrt{2}i}{2-\sqrt{2}i} = \frac{(2+\sqrt{2}i)^2}{(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)} = \frac{2+4\sqrt{2}i}{6} = \frac{1+2\sqrt{2}i}{3}$$

$$\therefore z_1 z_2 = 2i \cdot \frac{1+2\sqrt{2}i}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}i$$

따라서 $a=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$, $b=\frac{2}{3}$ 이므로

$$a^2+b^2=4 \quad \text{답 ④}$$

06 $(3-5i) \star (-6+i)$

$$\begin{aligned} &= 2(3-5i) - (-6+i) + (3-5i)(-6+i) \\ &= 6-10i+6-i+(-18+3i+30i+5) \\ &= 12-11i-13+33i \\ &= -1+22i \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

따라서 구하는 실수부분은 -1 이다. 답 -1

채점 기준	비율
① $(3-5i) \star (-6+i)$ 를 계산할 수 있다.	80 %
② $(3-5i) \star (-6+i)$ 의 실수부분을 구할 수 있다.	20 %

07 $x = \frac{-1+\sqrt{2}i}{3}$ 에서 $3x+1=\sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2+6x+1=-2$
 $9x^2+6x=-3 \quad \therefore 3x^2+2x=-1$
 $\therefore 6x^2+4x-1=2(3x^2+2x)-1$

$=2 \cdot (-1)-1=-3$ 답 -3

다른 풀이 $6x^2+4x-1=6 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{2}i}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{-1+\sqrt{2}i}{3} - 1$

$=6 \cdot \frac{-1-2\sqrt{2}i}{9} - \frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}i - 1$
 $=-\frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}i - \frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}i - 1 = -3$

08 $x=1-\sqrt{6}i$ 에서 $x-1=-\sqrt{6}i$

양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=-6$
 $\therefore x^2-2x=-7$
 $\therefore x^2-2x+5=-7+5=-2$ 답 ②

09 $x = \frac{1+3i}{1-2i} = \frac{(1+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -1+i$ 에서 ... ①

$x+1=i$

양변을 제곱하면 $x^2+2x+1=-1$
 $\therefore x^2+2x=-2$... ②
 $\therefore x^3+2x^2-3x-2=x(x^2+2x)-3x-2$
 $=x \cdot (-2)-3x-2$
 $=-5x-2$
 $=-5(-1+i)-2$
 $=3-5i$... ③

답 3-5i

채점 기준	비율
① x 를 (실수부분) + (허수부분) i 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
② x^2+2x 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ x^3+2x^2-3x-2 의 값을 구할 수 있다.	40 %

10 $x^2=-1-2i$ 에서 $x^2+1=-2i$

양변을 제곱하면 $x^4+2x^2+1=-4$
 $\therefore x^4+2x^2+5=0$

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면 $x^3+2x+\frac{5}{x}=0$

$\therefore x^4+x^3-x^2+2x+\frac{5}{x}=x^4-x^2+\left(x^3+2x+\frac{5}{x}\right)$

$=x^4-x^2$

$=\frac{(x^4+2x^2+5)-5}{x^4+2x^2+5}$

$=-3x^2-5$

$=-3(-1-2i)-5$

$=-2+6i$ 답 -2+6i

11 $z=a(2+i)-3(4-5i)=(2a-12)+(a+15)i$

z^2 이 음의 실수가 되려면 z 는 순허수이어야 하므로

$2a-12=0, a+15 \neq 0$

$\therefore a=6$ 답 6

12 $z=-i(a-2i)^2+3ai$

$=-i(a^2-4ai-4)+3ai$

$=-a^2i-4a+4i+3ai$

$=-4a-(a^2-3a-4)i$... ①

이 복소수가 실수가 되려면

$a^2-3a-4=0, (a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1 (\because a < 0)$

$\therefore \alpha=-1$... ②

$a=-1$ 을 $z=-4a-(a^2-3a-4)i$ 에 대입하면

$z=4 \quad \therefore \beta=4$... ③

$\therefore \alpha+\beta=3$... ④

답 3

채점 기준	비율
① z 를 (실수부분) + (허수부분) i 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ β 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $\alpha+\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

13 z^2 이 실수가 되려면 z 는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$a^2-9=0$ 또는 $a+2=0$

$(a+3)(a-3)=0$ 또는 $a+2=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 모든 a 의 값의 합은

$-3+(-2)+3=-2$ 답 ①

다른 풀이 $z^2=(a^2-9)^2+2(a^2-9)(a+2)i-(a+2)^2$

z^2 이 실수가 되려면

$2(a^2-9)(a+2)=0, (a+3)(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=3$

14 $z=(a-3i)(2+5i)+a(-17+ai)$

$=2a+5ai-6i+15-17a+a^2i$

$=(-15a+15)+(a^2+5a-6)i$

z^2 이 양의 실수가 되려면 z 는 0이 아닌 실수이어야 하므로

$-15a+15 \neq 0, a^2+5a-6=0$

$-15a+15 \neq 0$ 에서

$a \neq 1$

$a^2+5a-6=0$ 에서 $(a+6)(a-1)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=1$... ㉠

㉠, ㉡에서 $a=-6$ 답 -6

15 $z=a^2(1+i)-a(1+4i)-3(2-i)$

$=a^2+a^2i-a-4ai-6+3i$

$=(a^2-a-6)+(a^2-4a+3)i$

- (i) z^2 이 실수가 되려면 z 는 실수 또는 순허수이어야 하므로
 $a^2 - a - 6 = 0$ 또는 $a^2 - 4a + 3 = 0$
 $(a+2)(a-3) = 0$ 또는 $(a-1)(a-3) = 0$
 $\therefore a = -2$ 또는 $a = 1$ 또는 $a = 3$
- (ii) $z - 15i = (a^2 - a - 6) + (a^2 - 4a + 3)i - 15i$
 $= (a^2 - a - 6) + (a^2 - 4a - 12)i$
이 복소수가 실수가 되려면
 $a^2 - 4a - 12 = 0, (a+2)(a-6) = 0$
 $\therefore a = -2$ 또는 $a = 6$
- (i), (ii)에서 $a = -2$

답 -2

- 16 $x(3-2i) - y(1+4i) = -5-6i$ 에서
 $3x - 2xi - y - 4yi = -5 - 6i$
 $(3x - y) + (-2x - 4y)i = -5 - 6i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $3x - y = -5, -2x - 4y = -6$
위의 두 식을 연립하여 풀면
 $x = -1, y = 2$
 $\therefore x + y = 1$

답 ④

- 17 $\frac{x}{2+i} - \frac{y}{2-i} = \frac{5}{3+4i}$ 에서
 $\frac{x(2-i) - y(2+i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$
 $\frac{2(x-y) - (x+y)i}{5} = \frac{3-4i}{5}$
 $2(x-y) - (x+y)i = 3-4i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x - y = \frac{3}{2}, x + y = 4$
위의 두 식을 연립하여 풀면
 $x = \frac{11}{4}, y = \frac{5}{4}$
 $\therefore x - 3y = -1$

... ①

... ②

... ③

답 -1

채점 기준	비율
① 주어진 등식의 양변을 각각 (실수부분) + (허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	50 %
② x, y 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $x - 3y$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

- 18 $x^2 + y^2 i - 6x - 4yi + 8 - 5i = 0$ 에서
 $(x^2 - 6x + 8) + (y^2 - 4y - 5)i = 0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x^2 - 6x + 8 = 0, y^2 - 4y - 5 = 0$
 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 에서 $(x-2)(x-4) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 4$
 $y^2 - 4y - 5 = 0$ 에서 $(y+1)(y-5) = 0$
 $\therefore y = -1$ 또는 $y = 5$
 $\therefore xy = -4$ 또는 $xy = -2$ 또는 $xy = 10$ 또는 $xy = 20$
따라서 xy 의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

답 ①

- 19 $\frac{a}{a-i} = \frac{a(a+i)}{(a-i)(a+i)} = \frac{a^2+ai}{a^2+1} = \frac{a^2}{a^2+1} + \frac{a}{a^2+1}i$ 이므로

로
 $x + yi = \frac{a^2}{a^2+1} + \frac{a}{a^2+1}i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x = \frac{a^2}{a^2+1}, y = \frac{a}{a^2+1}$$

이때 $x - 7y = 3$ 이므로

$$\frac{a^2}{a^2+1} - 7 \cdot \frac{a}{a^2+1} = 3, \quad \frac{a^2-7a}{a^2+1} = 3$$

$$a^2 - 7a = 3a^2 + 3, \quad 2a^2 + 7a + 3 = 0$$

$$(2a+1)(a+3) = 0$$

$$\therefore a = -3 (\because a \text{는 정수})$$

답 -3

- 20 $a(2+i) - b(2-i) = 2(a-b) + (a+b)i$
 -16 의 제곱근은 $\pm 4i$ 이므로

- (i) $2(a-b) + (a+b)i = 4i$ 일 때,

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a - b = 0, a + b = 4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = 2 \quad \therefore a^2 + b^2 = 8$$

- (ii) $2(a-b) + (a+b)i = -4i$ 일 때,

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a - b = 0, a + b = -4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = -2 \quad \therefore a^2 + b^2 = 8$$

- (i), (ii)에서 $a^2 + b^2 = 8$

답 8

다른 풀이 $\{a(2+i) - b(2-i)\}^2$
 $= a^2(2+i)^2 - 2ab(2+i)(2-i) + b^2(2-i)^2$
 $= (3+4i)a^2 - 10ab + (3-4i)b^2$
 $= (3a^2 - 10ab + 3b^2) + 4(a^2 - b^2)i$

이므로 $(3a^2 - 10ab + 3b^2) + 4(a^2 - b^2)i = -16$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3a^2 - 10ab + 3b^2 = -16, 4(a^2 - b^2) = 0$$

$4(a^2 - b^2) = 0$ 에서 $a^2 = b^2 \quad \therefore b = \pm a$

- (i) $b = a$ 일 때,

$$3a^2 - 10ab + 3b^2 = -16 \text{에서} \quad 3a^2 - 10a^2 + 3a^2 = -16$$

$$-4a^2 = -16 \quad \therefore a^2 = 4$$

따라서 $a^2 = b^2 = 4$ 이므로 $a^2 + b^2 = 8$

- (ii) $b = -a$ 일 때,

$$3a^2 - 10ab + 3b^2 = -16 \text{에서} \quad 3a^2 + 10a^2 + 3a^2 = -16$$

$$16a^2 = -16 \quad \therefore a^2 = -1$$

그런데 a 는 실수이므로 $a^2 \geq 0$

$$\therefore b \neq -a$$

- (i), (ii)에서 $a^2 + b^2 = 8$

- 21 $z^3 + \bar{z}^3 = (z + \bar{z})^3 - 3z\bar{z}(z + \bar{z})$

..... ㉠

이때 $\bar{z} = \sqrt{3} - 2i$ 이므로

$$z + \bar{z} = (\sqrt{3} + 2i) + (\sqrt{3} - 2i) = 2\sqrt{3},$$

$$z\bar{z} = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 7$$

따라서 ㉠에서

$$z^3 + \bar{z}^3 = (2\sqrt{3})^3 - 3 \cdot 7 \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} - 42\sqrt{3} = -18\sqrt{3} \quad \text{답 } -18\sqrt{3}$$

$$22 \quad z = \frac{5}{1-3i} = \frac{5(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1+3i}{2} \text{이므로}$$

$$\bar{z} = \frac{1-3i}{2}$$

$$\therefore 2+z-\bar{z} = 2 + \frac{1+3i}{2} - \frac{1-3i}{2} = \frac{4+1+3i-1+3i}{2} = 2 + \frac{1+3i}{2} - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}i \quad \text{답 } \frac{3}{2}i$$

$$23 \quad \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{(y+x)(y-x)}{xy} \quad \dots\dots ㉠$$

$$y+x = (-2-4i) + (-2+4i) = -4,$$

$$y-x = (-2-4i) - (-2+4i) = -8i,$$

$$xy = (-2+4i)(-2-4i) = 20 \text{이므로 } ㉠ \text{에서}$$

$$\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{-4 \cdot (-8i)}{20} = \frac{8}{5}i \quad \text{답 } ㉡$$

다른 풀이

$$\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{-2-4i}{-2+4i} - \frac{-2+4i}{-2-4i}$$

$$= \frac{(-2-4i)^2 - (-2+4i)^2}{(-2+4i)(-2-4i)}$$

$$= \frac{-12+16i - (-12-16i)}{20}$$

$$= \frac{8}{5}i$$

$$24 \quad a(4-7i) - b(1+3i) = 5+23i \text{에서}$$

$$(4a-b) + (-7a-3b)i = 5-23i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$4a-b=5, \quad -7a-3b=-23$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, \quad b=3$$

따라서 $z=2+3i$ 이므로 $\bar{z}=2-3i$

$$\therefore z^2\bar{z} - z\bar{z}^2 = z\bar{z}(z-\bar{z})$$

$$= (2+3i)(2-3i)\{2+3i-(2-3i)\}$$

$$= 13 \cdot 6i = 78i \quad \text{답 } 78i$$

$$25 \quad x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = x^2(x+y) - y^2(x+y)$$

$$= (x^2 - y^2)(x+y)$$

$$= (x+y)^2(x-y) \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots ㉡$$

이때

$$x = \frac{8}{1+i} = \frac{8(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 4-4i,$$

$$y = \frac{8}{1-i} = \frac{8(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 4+4i$$

이므로

$$x+y = (4-4i) + (4+4i) = 8,$$

$$x-y = (4-4i) - (4+4i) = -8i \quad \dots\dots ㉢$$

따라서 ㉠에서

$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = 8^2 \cdot (-8i) = -512i \quad \dots\dots ㉣$$

$$\text{답 } -512i$$

채점 기준	비율
① 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	40 %
② $x+y, x-y$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

26 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하자.

ㄱ. $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ 이므로 실수이다.

ㄴ. $\bar{z} = a-bi$ 가 순허수이면 $a=0, b \neq 0$

따라서 $z=bi$ ($b \neq 0$)이므로 z 도 순허수이다.

$$\text{ㄷ. } \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a+bi} - \frac{1}{a-bi} = \frac{a-bi-(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{-2bi}{a^2+b^2}$$

이므로 0 또는 순허수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㉡

27 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $z+\bar{z}=0$ 에서

$$(a+bi) + (a-bi) = 0, \quad 2a=0$$

$$\therefore a=0$$

즉 $z=bi$ 이므로 z 는 0 또는 순허수이다. $\begin{cases} b=0 \text{이면 } z=0 \\ b \neq 0 \text{ 이면 } z \text{는 순허수} \end{cases}$

따라서 z 가 될 수 있는 것은 $3i, 0, (\sqrt{2}-7)i, -\sqrt{6}i$ 의 4개이다.

답 4

28 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하자.

ㄱ. $z+\bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ 이므로 항상 실수이다.

$$\text{ㄴ. } z^2 - \bar{z}^2 = (z+\bar{z})(z-\bar{z})$$

$$= \{(a+bi) + (a-bi)\} \{(a+bi) - (a-bi)\}$$

$$= 2a \cdot 2bi = 4abi$$

이므로 0 또는 순허수이다.

$$\text{ㄷ. } z^4 + z^2\bar{z}^2 + \bar{z}^4 = \{z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2\} \{z^2 - z\bar{z} + \bar{z}^2\}$$

$$= \{(z+\bar{z})^2 - z\bar{z}\} \{(z+\bar{z})^2 - 3z\bar{z}\}$$

$$\text{이때 } (z+\bar{z})^2 = \{(a+bi) + (a-bi)\}^2 = (2a)^2,$$

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \text{이므로 } (z+\bar{z})^2, z\bar{z} \text{는 항상 실수이다.}$$

따라서 $z^4 + z^2\bar{z}^2 + \bar{z}^4$ 은 항상 실수이다.

$$\text{ㄹ. } \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a-bi} \quad \begin{matrix} (\text{실수}) \pm (\text{실수}) = (\text{실수}) \\ (\text{실수}) \times (\text{실수}) = (\text{실수}) \end{matrix}$$

$$= \frac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{2a}{a^2+b^2}$$

이므로 항상 실수이다.

이상에서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㉢, ㉣, ㉤

29 $z=\bar{z}$ 이고 $z \neq 0$ 이므로 z 는 0이 아닌 실수이다.

$$z = (x^2-4) + (3x^2-4x-4)i \text{에서}$$

$$x^2-4 \neq 0, \quad 3x^2-4x-4=0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2-4 \neq 0 \text{에서 } x^2 \neq 4$$

$$\therefore x \neq \pm 2 \quad \dots\dots ㉡$$

$$3x^2-4x-4=0 \text{에서 } (3x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=2 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } x = -\frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉣$$

$$\text{답 } -\frac{2}{3}$$

채점 기준	비율
① $z=\bar{z}$ 가 성립할 조건을 구할 수 있다.	40 %
② $x^2-4 \neq 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 조건을 구할 수 있다.	20 %
③ $3x^2-4x-4=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ x 의 값을 구할 수 있다.	20 %

30 $\frac{1}{1-z^2}$ 이 실수이므로 $\frac{1}{1-z^2} = \overline{\left(\frac{1}{1-z^2}\right)}$

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{1-\bar{z}^2}, \quad 1-z^2 = 1-\bar{z}^2$$

$$1-z^2 = 1-\bar{z}^2, \quad z^2 - \bar{z}^2 = 0$$

$$(z+\bar{z})(z-\bar{z})=0$$

그런데 z 는 허수이므로 $z \neq \bar{z}$

$$\therefore z+\bar{z}=0$$

이때 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$$z+\bar{z}=2a=0 \quad \therefore a=0$$

따라서 z 의 실수부분은 0이다. 답 0

31 $\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=\bar{\alpha}(\alpha-\beta)-\bar{\beta}(\alpha-\beta)$

$$=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$$

$$=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha-\beta=(2+5i)-(4-3i)=-2+8i, \quad \bar{\alpha}-\bar{\beta}=-2-8i \text{이므로}$$

①에서

$$\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=(-2+8i)(-2-8i)=68 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

32 $(2-z_1)(2+z_2)=4-2(z_1-z_2)-z_1z_2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\bar{z}_1-\bar{z}_2=\overline{z_1-z_2}=-1+5i \text{이므로} \quad z_1-z_2=-1-5i$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2=\overline{z_1z_2}=3-2i \text{이므로} \quad z_1z_2=3+2i$$

따라서 ①에서

$$(2-z_1)(2+z_2)=4-2(-1-5i)-(3+2i)$$

$$=3+8i \quad \text{답 } 3+8i$$

33 $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\alpha-\bar{\beta}=i \text{이므로} \quad \bar{\alpha}-\bar{\beta}=\overline{(\alpha-\bar{\beta})}=\bar{i}=-i$$

$$\therefore \beta-\bar{\alpha}=-(i)=i$$

$$\alpha\bar{\beta}=1 \text{이므로} \quad \bar{\alpha}\bar{\beta}=\overline{(\alpha\bar{\beta})}=\bar{1}=1$$

따라서 ①에서

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{i}{1}=i \quad \text{답 } i$$

34 $z=\frac{2w+3}{w-1}=\frac{2(3+i)+3}{3+i-1}=\frac{9+2i}{2+i} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\therefore z\bar{z}=\frac{9+2i}{2+i} \cdot \overline{\left(\frac{9+2i}{2+i}\right)}=\frac{9+2i}{2+i} \cdot \frac{9+2i}{2-i}$$

$$=\frac{9+2i}{2+i} \cdot \frac{9-2i}{2-i}=\frac{81+4}{4+1}$$

$$=17 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \text{답 } 17$$

채점 기준	비율
① z 를 구할 수 있다.	30 %
② $z\bar{z}$ 의 값을 구할 수 있다.	70 %

35 $\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=6$ 에서 $\alpha=\frac{6}{\bar{\alpha}}, \beta=\frac{6}{\bar{\beta}}$

$$\alpha+\beta=3i \text{에서} \quad \frac{6}{\bar{\alpha}}+\frac{6}{\bar{\beta}}=3i$$

$$\frac{6(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}{\bar{\alpha}\bar{\beta}}=3i, \quad 2(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=i\bar{\alpha}\bar{\beta}$$

$$2 \cdot 3i=i\bar{\alpha}\bar{\beta}, \quad -6i=i\bar{\alpha}\bar{\beta}$$

$$\bar{\alpha}\bar{\beta}=-6 \quad \therefore \alpha\beta=-6 \quad \text{답 } -6$$

36 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$$2iz-(1-i)\bar{z}=-5+11i \text{에서}$$

$$2i(a+bi)-(1-i)(a-bi)=-5+11i$$

$$2ai-2b-a+bi+ai+b=-5+11i$$

$$(-a-b)+(3a+b)i=-5+11i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-a-b=-5, \quad 3a+b=11$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=2$

$$\therefore z=3+2i \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

37 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로 $z-\bar{z}=6i,$

$$z\bar{z}=25 \text{에서}$$

$$(a+bi)-(a-bi)=6i, \quad (a+bi)(a-bi)=25$$

$$2bi=6i, \quad a^2+b^2=25$$

$$\therefore a=\pm 4, \quad b=3$$

$$\therefore z=-4+3i \text{ 또는 } z=4+3i \quad \text{답 } -4+3i, 4+3i$$

38 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$$(1+2i)z+(-1+2i)\bar{z}=8i \text{에서}$$

$$(1+2i)(a+bi)+(-1+2i)(a-bi)=8i$$

$$a+bi+2ai-2b-a+bi+2ai+2b=8i$$

$$2(2a+b)i=8i \quad \therefore 2a+b=4$$

$$\neg. a=1, b=2 \text{이므로} \quad 2a+b=4$$

$$\neg. a=1, b=-2 \text{이므로} \quad 2a+b=0$$

$$\neg. a=3, b=-2 \text{이므로} \quad 2a+b=4$$

이상에서 복소수 z 가 될 수 있는 것은 $\neg, \neg$ 이다. 답 ④

39 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$$(1+i)z-(2-5i)\bar{z}=-14+3i \text{에서}$$

$$(1+i)(a+bi)-(2-5i)(a-bi)=-14+3i$$

$$a+bi+ai-b-2a+2bi+5ai+5b=-14+3i$$

$$(-a+4b)+(6a+3b)i=-14+3i \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-a+4b=-14, \quad 6a+3b=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$47 \quad \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} = i^{50} + (-i)^{50} = 2i^{50}$$

$$= 2 \cdot (i^4)^{12} \cdot i^2 = -2$$

답 ①

$$48 \quad z^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{-2i}{2} = -i \text{ 이므로}$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$\therefore z^2 - z^3 + z^4 - \dots + z^{10}$$

$$= (z^2 - z^3 + z^4 - z^5) + z^4(z^2 - z^3 + z^4 - z^5) + z^{10}$$

$$= (z^2 - z^3 + z^4 - z^5) - (z^2 - z^3 + z^4 - z^5) + z^{10}$$

$$= z^{10} = (z^2)^5 = (-i)^5 = -i$$

답 -i

다른 풀이 $z^2 = -i$ 이므로

$$z^2 + z^4 + z^6 + z^8 = -i - 1 + i + 1 = 0$$

$$\therefore z^2 - z^3 + z^4 - \dots + z^{10}$$

$$= (z^2 + z^4 + z^6 + z^8) - z(z^2 + z^4 + z^6 + z^8) + z^{10}$$

$$= z^{10} = -i$$

$$49 \quad \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\therefore f(n) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n}$$

$$= i^{4n} - (-i)^{2n} = 1 - (-1)^n$$

$$= \begin{cases} 2 & (n \text{은 홀수}) \\ 0 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f(1) - f(2) + f(3) - \dots - f(100) = 2 - 0 + 2 - \dots - 0$$

$$= 2 \cdot 50$$

$$= 100$$

→ ①

→ ②

답 100

채점 기준	비율
① $f(n)$ 을 간단히 할 수 있다.	70 %
② $f(1) - f(2) + f(3) - \dots - f(100)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

$$50 \quad z = \frac{1+i}{\sqrt{2}i} \text{ 에서}$$

$$z^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^2 = \frac{2i}{-2} = -i$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = (-i) \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}i} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$z^5 = z^4 \cdot z = -z = \frac{-1-i}{\sqrt{2}i}$$

$$z^6 = z^4 \cdot z^2 = i$$

$$z^7 = z^4 \cdot z^3 = -z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$z^8 = (z^4)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\vdots$$

$$w = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{ 에서}$$

$$w^2 = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^3 = w^2 \cdot w = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = -1$$

$$w^4 = w^3 \cdot w = -w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^5 = w^3 \cdot w^2 = -w^2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^6 = (w^3)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\vdots$$

n 이 8의 배수일 때 $z^n = 1$ 이고, n 이 6의 배수일 때 $w^n = 1$ 이므로 $z^n = w^n$ 을 만족시키는 자연수 n 은 8과 6의 공배수이다.

따라서 두 자리 자연수 n 은

$$24, 48, 72, 96$$

의 4개이다.

답 4

참고 $n = 8k - 4$ (k 는 자연수)일 때 $z^n = -10$ 이고 $n = 6l - 3$ (l 은 자연수)일 때 $w^n = -10$ 이므로 $z^n = w^n = -1$ 을 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

$$51 \quad ① \sqrt{-5}\sqrt{6} = \sqrt{-30}$$

$$② \sqrt{-5}\sqrt{-6} = -\sqrt{30}$$

$$④ \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$⑤ \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{-\frac{5}{6}}$$

답 ③

참고 $a < 0, b < 0$ 이외의 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$a > 0, b < 0$ 이외의 경우에는 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (단, $b \neq 0$)

$$52 \quad \sqrt{4}\sqrt{-25} - \sqrt{-5}\sqrt{-20} + \frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{-6}}$$

$$= \sqrt{-100} - (-\sqrt{100}) + \sqrt{-4} - \sqrt{-9}$$

$$= 10i + 10 + 2i - 3i$$

$$= 10 + 9i$$

→ ①

따라서 $10 + 9i = a + bi$ 이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a = 10, b = 9$$

$$\therefore a - b = 1$$

→ ②

→ ③

답 1

채점 기준	비율
① 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $a - b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 $\sqrt{4}\sqrt{-25} - \sqrt{-5}\sqrt{-20} + \frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{-6}}$

$$= \sqrt{4}\sqrt{25}i - \sqrt{5}i\sqrt{20} + \frac{\sqrt{12}i}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}i}$$

$$= 2 \cdot 5i - \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}i + \sqrt{4}i + \frac{3\sqrt{6}i}{\sqrt{6}i^2}$$

$$= 10i + 10 + 2i - 3i = 10 + 9i$$

53 $xy > 0$ 이므로 $x > 0, y > 0$ 또는 $x < 0, y < 0$

이때 $x + y < 0$ 이므로 $x < 0, y < 0$

따라서 $x < 0, y < 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \\ &= \frac{x+y}{-\sqrt{xy}} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{7}{2}$

54 $0 < a < 2$ 이므로 $a - 2 < 0, 2 - a > 0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{-a}\sqrt{a-2} + \sqrt{a}\sqrt{2-a} &+ \frac{\sqrt{2-a}}{\sqrt{a-2}}\sqrt{\frac{a-2}{2-a}} \\ &= -\sqrt{-a(a-2)} + \sqrt{a(2-a)} - \sqrt{\frac{2-a}{a-2}} \cdot \sqrt{-1} \\ &= -\sqrt{a(2-a)} + \sqrt{a(2-a)} - i \cdot i = 1\end{aligned}$$

답 1

55 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로 $a < 0, b < 0$

즉 $-a > 0$ 이므로 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{-a}} = \sqrt{-\frac{b}{a}}$

답 ③

56 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이므로 $a < 0, b > 0$

① $\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{ab^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2} = b\sqrt{a}$

④ $-b < 0$ 이므로 $\sqrt{a}\sqrt{-b} = -\sqrt{-ab}$

⑤ $-a > 0$ 이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{b} = \sqrt{-ab}$

답 ③

정리 B

$\sqrt{x^2}$ 의 성질

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & (x \geq 0) \Rightarrow \sqrt{(\text{양수})^2} = (\text{양수}), \sqrt{0^2} = 0 \\ -x & (x < 0) \Rightarrow \sqrt{(\text{음수})^2} = -(\text{음수}) \end{cases}$$

57 $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{c-b}} = -\sqrt{\frac{a-b}{c-b}}$ 이므로 $a-b > 0, c-b < 0$

$$\therefore c < b < a \quad \begin{matrix} a \neq b, b \neq c \text{이므로} \\ a-b \neq 0, c-b \neq 0 \end{matrix} \quad \cdots ①$$

$b-a < 0, b-c > 0, a-c > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}|b-a| + |b-c| + |a-c| &= -(b-a) + b-c + a-c \\ &= 2a-2c\end{aligned}$$

답 $2a-2c$

채점 기준	비율
① a, b, c 의 대소를 비교할 수 있다.	50 %
② 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	50 %

58 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 에서 $a < 0, b < 0$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{에서} \quad a < 0, c > 0$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2} + |a+b| - |a-c| &\quad a < 0, c > 0 \text{이므로} \\ &= -a-b+c-(a+b)+(a-c) \\ &= -a-2b\end{aligned}$$

답 $-a-2b$

04 이차방정식

II. 방정식

개념정리

본책 42쪽

- ① 허근 ② b^2-4ac ③ 판별식 ④ $>$ ⑤ $-\frac{b}{a}$
 ⑥ $a+\beta$ ⑦ $a\beta$ ⑧ $x-\beta$ ⑨ $p-qi$

유형 변개기

본책 43쪽

01 근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{19}i}{2}$$

따라서 $a=1, b=19$ 이므로 $b-a=18$

답 18

02 $(2x+1)(3x-2)=x(x+8)$ 에서

$$6x^2-x-2=x^2+8x, \quad 5x^2-9x-2=0$$

$$(5x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x = -\frac{1}{5} \text{ 또는 } x=2 \quad \text{답 ④}$$

03 $\frac{3}{2}x(x-2)+x+1=\frac{(x+1)^2}{5}$ 에서

$$15x^2-30x+10x+10=2x^2+4x+2 \quad \text{양변에 10을 곱한다.}$$

$$13x^2-24x+8=0$$

$$\therefore x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 13 \cdot 8}}{13} = \frac{12 \pm 2\sqrt{10}}{13}$$

따라서 $a = \frac{12-2\sqrt{10}}{13}$ 이므로 $13a=12-2\sqrt{10}$

$$\therefore 13a-12=-2\sqrt{10} \quad \text{답 ⑤}$$

04 $(x*x)+(-4*x)=0$ 에서

$$(x^2+2x-x)+(-4x-8-x)=0$$

$$x^2-4x-8=0$$

$$\therefore x = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot (-8)} = 2 \pm 2\sqrt{3} \quad \text{답 ④}$$

05 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{3}+1$ 을 곱하면

$$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2 + (\sqrt{3}+1)(5-\sqrt{3})x + 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 0$$

$$2x^2 + (2+4\sqrt{3})x + 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 0$$

$$x^2 + (1+2\sqrt{3})x + \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 0$$

$$(x+\sqrt{3}+1)(x+\sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{3}-1 \text{ 또는 } x = -\sqrt{3} \quad \cdots ①$$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha = -\sqrt{3}-1, \beta = -\sqrt{3}$

$$\therefore \alpha-2\beta = \sqrt{3}-1 \quad \cdots ②$$

답 $\sqrt{3}-1$

채점 기준	비율
① 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	60 %
② α, β 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $\alpha-2\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 x^2 의 계수가 무리수인 이차방정식은 x^2 의 계수를 유리화한 후 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

06 이차방정식 $x^2+kx+3k-1=0$ 의 한 근이 -2 이므로

$$\begin{aligned} (-2)^2+k \cdot (-2)+3k-1 &= 0 \\ 3+k &= 0 \quad \therefore k=-3 \end{aligned}$$

$k=-3$ 을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$\begin{aligned} x^2-3x-10 &= 0, \quad (x+2)(x-5)=0 \\ \therefore x &= -2 \text{ 또는 } x=5 \end{aligned}$$

따라서 다른 한 근은 5이다. 답 5

07 이차방정식 $x^2+kx+2\sqrt{3}+5=0$ 의 한 근이 $2+\sqrt{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{3})^2+k(2+\sqrt{3})+2\sqrt{3}+5 &= 0 \\ 7+4\sqrt{3}+k(2+\sqrt{3})+2\sqrt{3}+5 &= 0 \\ 12+6\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})k &= 0 \\ (2+\sqrt{3})k &= -6(2+\sqrt{3}) \\ \therefore k &= -6 \end{aligned}$$

답 -6

08 이차방정식 $x^2+(2a+3)x-a+7=0$ 의 한 근이 3이므로

$$\begin{aligned} 3^2+(2a+3) \cdot 3-a+7 &= 0 \\ 5a+25 &= 0 \quad \therefore a=-5 \end{aligned}$$

이차방정식 $kx^2+(4k+1)x-5=0$ 의 한 근이 -5 이므로

$$\begin{aligned} k \cdot (-5)^2+(4k+1) \cdot (-5)-5 &= 0 \\ 5k-10 &= 0 \quad \therefore k=2 \\ \therefore ak &= -10 \end{aligned}$$

답 -10

09 이차방정식 $kx^2+(a+4)x-kb=0$ 의 한 근이 -2 이므로

$$\begin{aligned} k \cdot (-2)^2+(a+4) \cdot (-2)-kb &= 0 \\ \therefore (4-b)k-2a-8 &= 0 \end{aligned}$$

이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4-b=0, \quad -2a-8=0 \quad \therefore a=-4, \quad b=4$$

이차방정식 $kx^2-4k=0$ 에서 $k \neq 0$ 이므로 양변을 k 로 나누면

$$\begin{aligned} x^2-4 &= 0, \quad (x+2)(x-2)=0 \\ \therefore x &= -2 \text{ 또는 } x=2 \end{aligned}$$

따라서 $c=2$ 이므로 $a+b+c=2$ 답 ⑤

문제 B

항등식에 대한 여러 가지 표현

다음은 모두 k 에 대한 항등식을 나타낸다.

- ① k 의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
- ② 모든 k 에 대하여 성립하는 등식
- ③ 임의의 k 에 대하여 성립하는 등식

10 이차방정식 $x^2-3x-1=0$ 의 한 근이 α 이므로

$$\alpha^2-3\alpha-1=0$$

$\alpha \neq 0$ 이므로 양변을 α 로 나누면 $\alpha=0$ 이면 등식이 성립하지 않으므로 $\alpha \neq 0$

$$\alpha-3-\frac{1}{\alpha}=0 \quad \therefore \alpha-\frac{1}{\alpha}=3$$

$$\therefore \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2+2=3^2+2=11$$

답 11

11 이차방정식 $x^2-2x-2=0$ 의 한 근이 α 이므로

$$\alpha^2-2\alpha-2=0 \quad \therefore \alpha^2-2\alpha=2$$

$$\therefore \alpha(\alpha^2-\alpha-6)(\alpha^2-3\alpha-4)$$

$$= \alpha(\alpha^2-2\alpha+\alpha-6)(\alpha^2-2\alpha-\alpha-4)$$

$$= \alpha(2+\alpha-6)(2-\alpha-4)$$

$$= -\alpha(\alpha-4)(\alpha+2)$$

$$= -\alpha(\alpha^2-2\alpha-8)$$

$$= -\alpha(2-8)$$

$$= 6\alpha$$

... ①

이때 $x^2-2x-2=0$ 에서 $x=1 \pm \sqrt{3}$ 이므로

$$\alpha=1+\sqrt{3} \quad (\because \alpha > 0)$$

... ②

$$\therefore \alpha(\alpha^2-\alpha-6)(\alpha^2-3\alpha-4)=6\alpha$$

$$= 6+6\sqrt{3}$$

... ③

답 $6+6\sqrt{3}$

채점 기준	비율
① 주어진 다항식을 간단히 할 수 있다.	60 %
② α 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $\alpha(\alpha^2-\alpha-6)(\alpha^2-3\alpha-4)$

$$= \alpha(\alpha+2)(\alpha-3)(\alpha+1)(\alpha-4)$$

$$= \alpha\{(\alpha-3)(\alpha+1)\}\{(\alpha+2)(\alpha-4)\}$$

$$= \alpha(\alpha^2-2\alpha-3)(\alpha^2-2\alpha-8)$$

..... ⑦

이차방정식 $x^2-2x-2=0$ 의 한 근이 α 이므로

$$\alpha^2-2\alpha-2=0 \quad \therefore \alpha^2-2\alpha=2$$

따라서 ⑦에서

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha^2-2\alpha-3)(\alpha^2-2\alpha-8) &= \alpha(2-3)(2-8) \\ &= 6\alpha \end{aligned}$$

12 $x^2+|2x-8|=16$ 에서

(i) $x < 4$ 일 때, $x^2-(2x-8)=16$

$$x^2-2x-8=0, \quad (x+2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=4$$

그런데 $x < 4$ 이므로 $x=-2$

(ii) $x \geq 4$ 일 때, $x^2+(2x-8)=16$

$$x^2+2x-24=0, \quad (x+6)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-6 \text{ 또는 } x=4$$

그런데 $x \geq 4$ 이므로 $x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$$x=-2 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 모든 근의 합은 $-2+4=2$ 답 2

13 $x \odot x = |x \odot 3|$ 에서

$$x^2-x-x = |3x-x-3|$$

$$\therefore x^2-2x = |2x-3|$$

... ①

(i) $x < \frac{3}{2}$ 일 때, $x^2-2x = -2x+3$

$$x^2=3 \quad \therefore x=\pm\sqrt{3}$$

그런데 $x < \frac{3}{2}$ 이므로 $x=-\sqrt{3}$... ②

(ii) $x \geq \frac{3}{2}$ 일 때, $x^2 - 2x = 2x - 3$
 $x^2 - 4x + 3 = 0, \quad (x-1)(x-3) = 0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=3$

그런데 $x \geq \frac{3}{2}$ 이므로 $x=3$... ③

(i), (ii)에서 구하는 x 의 값은
 $x = -\sqrt{3}$ 또는 $x=3$... ④

답 $x = -\sqrt{3}$ 또는 $x=3$

채점 기준	비율
① $x \odot x = x \odot 3 $ 을 변형할 수 있다.	10 %
② $x < \frac{3}{2}$ 일 때 x 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $x \geq \frac{3}{2}$ 일 때 x 의 값을 구할 수 있다.	40 %
④ x 의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$ 이므로 $\sqrt{\frac{9}{4}} < \sqrt{3}$, 즉 $\frac{3}{2} < \sqrt{3}$ 임을 알 수 있다.

14 방정식 $|x^2 - (2a+3)x + 5a + 4| = 4$ 의 한 근이 a 이므로
 $|a^2 - (2a+3)a + 5a + 4| = 4$
 $|-a^2 + 2a + 4| = 4 \quad \therefore -a^2 + 2a + 4 = \pm 4$

(i) $-a^2 + 2a + 4 = 4$ 일 때, $a^2 - 2a = 0$
 $a(a-2) = 0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=2$
(ii) $-a^2 + 2a + 4 = -4$ 일 때, $a^2 - 2a - 8 = 0$
 $(a+2)(a-4) = 0 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에서 구하는 합은
 $0 + 2 + (-2) + 4 = 4$ 답 4

15 $x^2 + \sqrt{(x+1)^2} + 5 = \sqrt{x^2} + 8$ 에서
 $x^2 + |x+1| + 5 = |x| + 8$
 $\therefore x^2 + |x+1| - |x| - 3 = 0$

(i) $x < -1$ 일 때,
 $x+1 < 0$ 이므로
 $x^2 - (x+1) + x - 3 = 0$
 $x^2 - 4 = 0, \quad x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$

그런데 $x < -1$ 이므로 $x = -2$

(ii) $-1 \leq x < 0$ 일 때,
 $x+1 \geq 0$ 이므로
 $x^2 + (x+1) + x - 3 = 0$
 $x^2 + 2x - 2 = 0 \quad \therefore x = -1 \pm \sqrt{3}$

그런데 $-1 \leq x < 0$ 이므로 $x = -1 \pm \sqrt{3}$ 은 근이 아니다.

(iii) $x \geq 0$ 일 때,
 $x+1 > 0$ 이므로
 $x^2 + (x+1) - x - 3 = 0$
 $x^2 - 2 = 0, \quad x^2 = 2$
 $\therefore x = \pm \sqrt{2}$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = \sqrt{2}$

이상에서 주어진 방정식의 근은
 $x = -2$ 또는 $x = \sqrt{2}$ 답 ③

16 $2[x]^2 + 9[x] - 5 = 0$ 에서
 $([x]+5)(2[x]-1) = 0$
 $\therefore [x] = -5$ 또는 $[x] = \frac{1}{2}$

그런데 $[x]$ 는 정수이므로 $[x] = -5$
 $\therefore -5 \leq x < -4$ 답 ②

17 $[x]^2 - 4[x] - 12 = 0$ 에서
 $([x]+2)([x]-6) = 0$
 $\therefore [x] = -2$ 또는 $[x] = 6$
 $\therefore -2 \leq x < -1$ 또는 $6 \leq x < 7$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

18 $2x^2 + 7x + [x] + 8 = 0$ 에서

(i) $-3 < x < -2$ 일 때,
 $[x] = -3$ 이므로 주어진 방정식은
 $2x^2 + 7x + 5 = 0, \quad (2x+5)(x+1) = 0$
 $\therefore x = -\frac{5}{2}$ 또는 $x = -1$

그런데 $-3 < x < -2$ 이므로 $x = -\frac{5}{2}$... ①

(ii) $-2 \leq x < -1$ 일 때,
 $[x] = -2$ 이므로 주어진 방정식은
 $2x^2 + 7x + 6 = 0, \quad (x+2)(2x+3) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = -\frac{3}{2}$... ②

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은
 $x = -\frac{5}{2}$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = -\frac{3}{2}$

따라서 모든 근의 합은
 $-\frac{5}{2} + (-2) + (-\frac{3}{2}) = -6$... ③

답 -6

채점 기준	비율
① $-3 < x < -2$ 일 때 x 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $-2 \leq x < -1$ 일 때 x 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 주어진 방정식의 모든 근의 합을 구할 수 있다.	20 %

19 처음 정사각형 모양의 땅의 한 변의 길이를 x m라 하면 새로 만들어진 직사각형 모양의 땅의 가로, 세로의 길이는 $(x+5)$ m, $(x-4)$ m이므로

$(x+5)(x-4) = \frac{9}{10}x^2, \quad x^2 + x - 20 = \frac{9}{10}x^2$

$x^2 + 10x - 200 = 0, \quad (x+20)(x-10) = 0$
 $\therefore x = -20$ 또는 $x = 10$

그런데 $x > 4$ 이므로 $x = 10$ $\sqrt{x-4} > 0$ 에서 $x > 4$

따라서 처음 정사각형 모양의 땅의 한 변의 길이는 10 m이다. 답 10 m

20 길의 폭을 x m라 하면 남은 땅의 넓이는 가로, 세로의 길이가 각각 $(36-x)$ m, $(30-2x)$ m인 직사각형 모양의 땅의 넓이와 같으므로

$$(36-x)(30-2x)=792$$

$$x^2-51x+144=0, \quad (x-3)(x-48)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=48$$

그런데 $0 < x < 15$ 이므로 $x=3$
따라서 구하는 길의 폭은 3 m이다. $\frac{30-2x > 0 \text{ 에서 } x < 15}{\text{②}}$

21 $\triangle PBQ$ 가 정삼각형이므로 $\triangle ABP$ 와 $\triangle CBQ$ 에서

$$\angle PAB = \angle QCB = 90^\circ,$$

$$\overline{PB} = \overline{QB}, \overline{AB} = \overline{CB}$$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle CBQ \text{ (RHS 합동)}$$

이때 $\overline{PD} = x$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{CQ} = 3-x, \overline{QD} = x \quad \dots \text{①}$$

$\triangle PQD$ 에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{QD} = \overline{CD} - \overline{CQ} = 3 - (3-x) = x$

$$\overline{PQ}^2 = x^2 + x^2$$

$\triangle ABP$ 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PB}^2 = (3-x)^2 + 3^2$$

$\triangle PBQ$ 는 정삼각형이므로 $\overline{PQ}^2 = \overline{PB}^2$ 에서

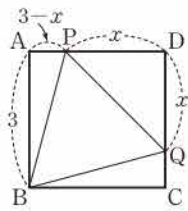
$$x^2 + x^2 = (3-x)^2 + 3^2 \quad \dots \text{②}$$

$$x^2 + 6x - 18 = 0$$

$$\therefore x = -3 \pm 3\sqrt{3}$$

그런데 $0 < x < 3$ 이므로 $x = -3 + 3\sqrt{3}$

따라서 $\overline{PD}$ 의 길이는 $-3 + 3\sqrt{3}$ 이다. $\dots \text{③}$



$$\text{답 } -3 + 3\sqrt{3}$$

채점 기준	비율
① $\overline{PD} = x$ 라 하고 $\overline{AP}$, $\overline{CQ}$, $\overline{QD}$ 의 길이를 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② x 에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
③ $\overline{PD}$ 의 길이를 구할 수 있다.	30 %

22 정오각형 ABCDE의 한 내각의 크기는

$$\frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ$$

$\triangle ABE$ 는 $\angle BAE = 108^\circ$ 이고 $\overline{AB} = \overline{AE}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle ABE = \angle AEB = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$$

같은 방법으로 하면 $\triangle BCA$ 에서 $\angle BAC = 36^\circ$ 이므로

$$\angle PAE = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$$

$\triangle APE$ 에서

$$\angle APE = 180^\circ - (72^\circ + 36^\circ) = 72^\circ$$

이므로 $\triangle APE$ 는 $\overline{PE} = \overline{AE}$ 인 이등변삼각형이다.

$$\therefore \overline{PE} = \overline{AE} = 6$$

$\triangle PAB$ 와 $\triangle ABE$ 에서

$$\angle PAB = \angle ABE = 36^\circ, \angle PBA = \angle AEB = 36^\circ$$

이므로 $\triangle PAB \sim \triangle ABE$ (AA 닮음)

$\overline{BP} = x$ 라 하면 $\overline{AB} : \overline{BE} = \overline{BP} : \overline{EA}$ 이므로

$$6 : \left(\frac{x+6}{2}\right) = x : 6$$

$$x(x+6) = 36 \quad \overline{BE} = \overline{BP} + \overline{PE}$$

$$x^2 + 6x - 36 = 0$$

$$\therefore x = -3 \pm 3\sqrt{5}$$

그런데 $x > 0$ 이므로

$$x = -3 + 3\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{BP}$ 의 길이는 $-3 + 3\sqrt{5}$ 이다. $\text{답 } -3 + 3\sqrt{5}$

23 이차방정식 $4x^2 - 2(2k+1)x + k^2 - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(2k+1)\}^2 - 4(k^2 - 3) > 0$$

$$4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 + 12 > 0$$

$$4k + 13 > 0 \quad \therefore k > -\frac{13}{4}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 -3 이다. $\text{답 } ①$

24 이차방정식 $x^2 + 3ax + 4a + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (3a)^2 - 4(4a + 1) = 0$$

$$9a^2 - 16a - 4 = 0, \quad (9a + 2)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a \text{는 정수})$$

$a = 2$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^2 + 6x + 9 = 0, \quad (x + 3)^2 = 0$$

$$\therefore x = -3$$

따라서 $m = -3$ 이므로

$$am = -6$$

$$\text{답 } -6$$

25 이차방정식 $x^2 - 6x - (2k - 5) = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (-3)^2 + (2k - 5) < 0$$

$$2k + 4 < 0 \quad \therefore k < -2 \quad \dots \text{①}$$

이차방정식 $2x^2 - (k+1)x + k + 7 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = \{-(k+1)\}^2 - 8(k+7) = 0$$

$$k^2 + 2k + 1 - 8k - 56 = 0$$

$$k^2 - 6k - 55 = 0$$

$$(k+5)(k-11) = 0$$

$$\therefore k = -5 \text{ 또는 } k = 11 \quad \dots \text{②}$$

①, ②에서 $k = -5$ $\text{답 } -5$

26 주어진 방정식이 x 에 대한 이차방정식이므로

$$k^2 - 4 \neq 0, \quad (k+2)(k-2) \neq 0$$

$$\therefore k \neq -2, k \neq 2 \quad \dots \text{①}$$

이차방정식 $(k^2 - 4)x^2 - 4(k+2)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-2(k+2)\}^2 - 4(k^2 - 4) \geq 0$$

$$4k^2 + 16k + 16 - 4k^2 + 16 \geq 0$$

$$16k + 32 \geq 0 \quad \therefore k \geq -2 \quad \dots \text{②}$$

①, ②에서 $-2 < k < 2$ 또는 $k > 2$ $\dots \text{③}$

$$\text{답 } -2 < k < 2 \text{ 또는 } k > 2$$

채점 기준	비율
① 주어진 방정식이 이차방정식이기 위한 k 의 조건을 구할 수 있다.	30 %
② 판별식을 이용하여 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

27 이차방정식 $x^2 + (a-2k)x + k^2 + 6k + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} D &= (a-2k)^2 - 4(k^2 + 6k + b) = 0 \\ a^2 - 4ak + 4k^2 - 4k^2 - 24k - 4b &= 0 \\ (-4a - 24)k + a^2 - 4b &= 0 \end{aligned}$$

이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$-4a - 24 = 0, a^2 - 4b = 0$$

따라서 $a = -6$, $b = 9$ 이므로

$$a + b = 3$$

답 3

28 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = b^2 - 4ac \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$b = a + c$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$D = (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0$$

따라서 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 은 실근을 갖는다. 답 ①

29 이차방정식 $x^2 - 2ax + a^2 + 5a - 15 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-a)^2 - (a^2 + 5a - 15) \\ &= -5a + 15 \end{aligned}$$

이때 $a < 3$ 에서 $-5a + 15 > 0$ 이므로 $\frac{D}{4} > 0$

따라서 이차방정식 $x^2 - 2ax + a^2 + 5a - 15 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

30 이차방정식 $x^2 + 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - (b^2 + 2) = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 - 3ax - 3b + 2 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\begin{aligned} D_2 &= (-3a)^2 - 4(-3b + 2) \\ &= 9(b^2 + 2) + 12b - 8 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 9b^2 + 12b + 10 \\ &= 9\left(b + \frac{2}{3}\right)^2 + 6 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

따라서 이차방정식 $x^2 - 3ax - 3b + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. $\dots\dots \textcircled{3}$

답 서로 다른 두 실근

채점 기준	비율
① 방정식 $x^2 + 2ax + b^2 + 2 = 0$ 이 중근을 가짐을 이용하여 a, b 에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
② 방정식 $x^2 - 3ax - 3b + 2 = 0$ 의 판별식의 부호를 알 수 있다.	40 %
③ 방정식 $x^2 - 3ax - 3b + 2 = 0$ 의 근을 판별할 수 있다.	20 %

31 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 에서

$$a < 0, b < 0$$

ㄱ. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = a^2 - 4b > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2 + bx + a = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = b^2 - 4a > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 이차방정식 $ax^2 + x - b = 0$ 의 판별식을 D_3 이라 하면

$$D_3 = 1 + 4ab > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄹ. 이차방정식 $x^2 - 2ax - b = 0$ 의 판별식을 D_4 라 하면

$$\frac{D_4}{4} = (-a)^2 + b = a^2 + b$$

$a^2 + b$ 의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

이상에서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

32 두 이차방정식 $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ 의 판별식을 각각 D_1 , D_2 라 하면

$$D_1 = (2a+1)^2 - 4a^2 = 4a+1, \quad \frac{D_2}{4} = a^2 - (a-2)^2 = 4a-4$$

ㄱ. $P(x) = 0$ 이 실근을 가지면

$$D_1 = 4a+1 \geq 0$$

$4a+1 \geq 0$ 의 양변에서 5를 빼면

$$4a-4 \geq -5$$

즉 $\frac{D_2}{4} \geq -5$ 이므로 $Q(x) = 0$ 이 항상 실근을 갖는다고 할 수 없다.

ㄴ. $P(x) = 0$ 이 중근을 가지면

$$D_1 = 4a+1 = 0$$

$4a+1 = 0$ 의 양변에서 5를 빼면

$$4a-4 = -5$$

즉 $\frac{D_2}{4} = -5 < 0$ 이므로 $Q(x) = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄷ. $P(x) = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 가지면

$$D_1 = 4a+1 < 0$$

$4a+1 < 0$ 의 양변에서 5를 빼면

$$4a-4 < -5$$

즉 $\frac{D_2}{4} < -5$ 이므로 $Q(x) = 0$ 도 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

33 이차방정식 $4x^2 - 4(a+b+c)x + 3(ab+bc+ca) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-2(a+b+c)\}^2 - 12(ab+bc+ca) = 0$$

$$4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0$$

양변을 2로 나누면

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca = 0$$

$$(a^2-2ab+b^2) + (b^2-2bc+c^2) + (c^2-2ca+a^2) = 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

a, b, c 가 실수이므로

$$a-b=0, b-c=0, c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

34 이차방정식 $(a-c)x^2-2bx+a+c=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-b)^2-(a-c)(a+c)<0$$

$$b^2-(a^2-c^2)<0 \quad \therefore a^2>b^2+c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $\angle A > 90^\circ$ 인 둔각삼각형이다. 답 ④

35 이차방정식 $4x^2-(a+4b)x+ab=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=\{-(a+4b)\}^2-16ab=0$$

$$a^2+8ab+16b^2-16ab=0$$

$$a^2-8ab+16b^2=0$$

$$(a-4b)^2=0 \quad \therefore a=4b$$

따라서 직각삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 4b\cdot b=2b^2 \quad \text{답 ③}$$

36 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x 에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+3)x+k^2+4k-7=0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k+3)\}^2-(k^2+4k-7)=0$$

$$k^2+6k+9-k^2-4k+7=0$$

$$2k+16=0 \quad \therefore k=-8 \quad \text{답 ②}$$

37 주어진 식이 x 에 대한 이차식이므로

$$k \neq 0 \quad \dots\dots ㉠$$

또 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $2kx^2-8kx+3k-1=0$ 이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4k)^2-2k(3k-1)=0$$

$$10k^2+2k=0, \quad 2k(5k+1)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=-\frac{1}{5} \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } k=-\frac{1}{5} \quad \text{답 } -\frac{1}{5}$$

38 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x 에 대한 이차방정식 $x^2+(a+bk)x+k^2+c+3=0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(a+bk)^2-4(k^2+c+3)=0$$

$$a^2+2abk+b^2k^2-4k^2-4c-12=0$$

$$(b^2-4)k^2+2abk+a^2-4c-12=0$$

이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$b^2-4=0, \quad 2ab=0, \quad a^2-4c-12=0$$

$$\therefore b^2=4, \quad a=0, \quad c=-3$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=13 \quad \text{답 ⑤}$$

39 주어진 이차식이 완전제곱식이 되므로 x 에 대한 이차방정식 $3x^2-(5a-1)x+a^2+6a-7=0$ 이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=\{-(5a-1)\}^2-12(a^2+6a-7)=0 \quad \dots\dots ①$$

$$25a^2-10a+1-12a^2-72a+84=0$$

$$13a^2-82a+85=0, \quad (13a-17)(a-5)=0$$

$$\therefore a=5 \quad (\because a>3) \quad \dots\dots ②$$

따라서 주어진 이차식은 $3x^2-24x+48$ 이고, 이 식은 $3(x-4)^2$ 으로 인수분해되므로

$$k=-4 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore a+k=1 \quad \dots\dots ④$$

답 1

채점 기준	비율
① 판별식을 이용하여 a 에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ $a+k$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

40 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-3, \quad \alpha\beta=-1$$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(-3)^3-3\cdot(-1)\cdot(-3)}{-1}$$

$$=36 \quad \text{답 36}$$

41 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2}, \quad \alpha\beta=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{25}{4}$$

$$\therefore |\alpha-\beta|=\frac{5}{2} \quad \text{답 ④}$$

42 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=7, \quad \alpha\beta=4 \quad \dots\dots ①$$

따라서 $\alpha>0, \beta>0$ 이므로

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$$

$$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$=7+2\cdot 2$$

$$=11 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{11} \quad \dots\dots ③$$

답 $\sqrt{11}$

채점 기준	비율
① $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

B 탐구

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$ 에서 $\sqrt{a}\sqrt{b}$ 를 간단히 하려면 a, b 의 부호를 확인해야 한다.
 이때 $a\beta = 4 > 0$ 에서 a, β 의 부호가 같음을 알 수 있고,
 $a + \beta = 7 > 0$ 이므로 $a > 0, \beta > 0$ 임을 알 수 있다.
 따라서 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a\beta}$ 이다.

43 $|x^2 + 6x| = 2$ 에서 $x^2 + 6x = \pm 2$

(i) $x^2 + 6x = 2$, 즉 $x^2 + 6x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -6, \alpha\beta = -2$$

(ii) $x^2 + 6x = -2$, 즉 $x^2 + 6x + 2 = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\gamma + \delta = -6, \gamma\delta = 2$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta} \\ &= \frac{-6}{-2} + \frac{-6}{2} = 0 \end{aligned} \quad \text{답 0}$$

44 α, β 가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2 - (a-4)\alpha - 2 = 0, \beta^2 - (a-4)\beta - 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - a\alpha - 2 = -4\alpha, \beta^2 - a\beta - 2 = -4\beta$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha^2 - a\alpha - 2)(\beta^2 - a\beta - 2) &= (-4\alpha) \cdot (-4\beta) \\ &= 16\alpha\beta \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta = -2$

따라서 ㉠에서

$$(\alpha^2 - a\alpha - 2)(\beta^2 - a\beta - 2) = 16 \cdot (-2) = -32 \quad \text{답 ①}$$

45 α 는 주어진 이차방정식의 근이므로

$$\alpha^2 - 5\alpha + 9 = 0 \quad \therefore \alpha^2 = 5\alpha - 9$$

$$\therefore \alpha^2 + 5\beta = 5\alpha - 9 + 5\beta$$

$$= 5(\alpha + \beta) - 9 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 5$

따라서 ㉡에서

$$\alpha^2 + 5\beta = 5 \cdot 5 - 9 = 16 \quad \text{답 16}$$

46 α, β 가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0, \beta^2 + 2\beta - 4 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + 2\alpha = 4, \beta^2 + 2\beta = 4$$

$$\therefore (\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha - 1)(\beta^3 + 2\beta^2 - \beta - 1)$$

$$= \{\alpha(\alpha^2 + 2\alpha) - \alpha - 1\} \{\beta(\beta^2 + 2\beta) - \beta - 1\}$$

$$= (3\alpha - 1)(3\beta - 1)$$

$$= 9\alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 1 \quad \dots\dots \text{㉢} \quad \rightarrow \text{①}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -4 \quad \rightarrow \text{②}$$

따라서 ㉢에서

$$(\text{주어진 식}) = 9 \cdot (-4) - 3 \cdot (-2) + 1 = -29 \quad \rightarrow \text{③}$$

$$\text{답 } -29$$

채점 기준

비율

① 주어진 식을 변형할 수 있다.	50 %
② $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

47 α, β 가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2 + \alpha + 5 = 0, \beta^2 + \beta + 5 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + 3\alpha + 5 = 2\alpha, \beta^2 + 3\beta + 5 = 2\beta$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta}{\alpha^2 + 3\alpha + 5} + \frac{\alpha}{\beta^2 + 3\beta + 5} &= \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2\beta} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2\alpha\beta} \quad \dots \text{㉣} \end{aligned}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 5$$

따라서 ㉣에서

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha^2 + 3\alpha + 5} + \frac{\alpha}{\beta^2 + 3\beta + 5} &= \frac{(-1)^2 - 2 \cdot 5}{2 \cdot 5} \\ &= -\frac{9}{10} \quad \text{답 } -\frac{9}{10} \end{aligned}$$

48 α, β 가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2 - \alpha - 3 = 0, \beta^2 - \beta - 3 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - \alpha = 3, \beta^2 - \beta = 3$$

$$\therefore \alpha^5 + \beta^5 - \alpha^4 - \beta^4 - \alpha^3 - \beta^3$$

$$= \alpha^3(\alpha^2 - \alpha - 1) + \beta^3(\beta^2 - \beta - 1) \quad \text{[} \alpha^2 - \alpha - 1 = 3 - 1 = 2 \text{]}$$

$$= 2(\alpha^3 + \beta^3) = 2\{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)\} \quad \dots\dots \text{㉤}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -3$$

따라서 ㉤에서

$$\begin{aligned} \alpha^5 + \beta^5 - \alpha^4 - \beta^4 - \alpha^3 - \beta^3 &= 2 \cdot \{1^3 - 3 \cdot (-3) \cdot 1\} \\ &= 20 \quad \text{답 ⑤} \end{aligned}$$

49 α, β 가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0, \beta^2 - \beta - 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - \alpha = 1, \beta^2 - \beta = 1$$

$$\therefore (\sqrt{\alpha + \alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4} + \sqrt{\beta + \beta^2 - 2\beta^3 + \beta^4})^2$$

$$= \{\sqrt{\alpha + (\alpha^2 - \alpha)^2} + \sqrt{\beta + (\beta^2 - \beta)^2}\}^2$$

$$= (\sqrt{\alpha + 1} + \sqrt{\beta + 1})^2$$

$$= \alpha + 1 + 2\sqrt{(\alpha + 1)(\beta + 1)} + \beta + 1$$

$$(\because \alpha + 1 \geq 0, \beta + 1 \geq 0)$$

$$= \alpha + \beta + 2 + 2\sqrt{\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1} \quad \dots\dots \text{㉥}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$$

따라서 ㉥에서

$$\begin{aligned} &(\sqrt{\alpha + \alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4} + \sqrt{\beta + \beta^2 - 2\beta^3 + \beta^4})^2 \\ &= 1 + 2 + 2\sqrt{-1 + 1 + 1} \\ &= 5 \\ \therefore \sqrt{\alpha + \alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4} + \sqrt{\beta + \beta^2 - 2\beta^3 + \beta^4} &= \sqrt{5} \quad \text{답 ⑤} \end{aligned}$$

참고 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, $\beta^2 - \beta - 1 = 0$ 에서

$$\alpha + 1 = \alpha^2, \beta + 1 = \beta^2$$

이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5 > 0$$

이므로 α, β 는 실수이다.

따라서 $\alpha^2 \geq 0, \beta^2 \geq 0$ 이므로 $\alpha + 1 \geq 0, \beta + 1 \geq 0$

$$\therefore \sqrt{\alpha+1} \cdot \sqrt{\beta+1} = \sqrt{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

50 주어진 이차방정식의 두 근을 $3\alpha, \alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3\alpha + \alpha = 8(m-2) \quad \therefore \alpha = 2(m-2) \quad \dots\dots ㉠$$

$$3\alpha \cdot \alpha = 12m \quad \therefore \alpha^2 = 4m \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4(m-2)^2 = 4m, \quad m^2 - 5m + 4 = 0$$

$$(m-1)(m-4) = 0 \quad \therefore m=1 \text{ 또는 } m=4$$

따라서 모든 실수 m 의 값의 합은 5이다. **답 ㉡**

51 주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha+2$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha+2) = 4k \quad \therefore \alpha = 2k-1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+2) = 5(k+1) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(2k-1)(2k+1) = 5(k+1), \quad 4k^2 - 1 = 5k + 5$$

$$4k^2 - 5k - 6 = 0, \quad (4k+3)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{3}{4} \text{ 또는 } k=2$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은 $-\frac{3}{2}$ 이다. **답 $-\frac{3}{2}$**

다른 풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ 라 하면

$$\alpha - \beta = 2$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4k, \alpha\beta = 5(k+1)$$

이때 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로

$$2^2 = (4k)^2 - 20(k+1), \quad 4k^2 - 5k - 6 = 0$$

$$(4k+3)(k-2) = 0 \quad \therefore k = -\frac{3}{4} \text{ 또는 } k=2$$

52 주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, 2\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 2\alpha = -3(m+1) \quad \therefore \alpha = -m-1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha \cdot 2\alpha = m^2 + 7 \quad \therefore 2\alpha^2 = m^2 + 7 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2(-m-1)^2 = m^2 + 7, \quad m^2 + 4m - 5 = 0$$

$$(m+5)(m-1) = 0 \quad \therefore m = -5 (\because m < 0)$$

답 ㉡

53 주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha+1$ (α 는 정수)이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha+1) = k+3 \quad \therefore k = 2\alpha - 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+1) = -k+8 \quad \therefore \alpha^2 + \alpha = -k+8 \quad \dots\dots ㉡$$

답 ㉠

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\alpha^2 + \alpha = -(2\alpha - 2) + 8, \quad \alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0$$

$$(\alpha+5)(\alpha-2) = 0 \quad \therefore \alpha = -5 \text{ 또는 } \alpha = 2 \quad \dots\dots ㉢$$

$\alpha = -5$ 를 ㉠에 대입하면 $k = -12$

$\alpha = 2$ 를 ㉠에 대입하면 $k = 2$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 2$ **답 ㉢**

답 2

채점 기준	비율
① 두 근을 $\alpha, \alpha+1$ 이라 하고 α, k 에 대한 식을 구할 수 있다.	40 %
② α 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	30 %

54 주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, -\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (-\alpha) = -(k^2 + 4k + 3) \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha \cdot (-\alpha) = 5k + 7 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠에서 \quad k^2 + 4k + 3 = 0, \quad (k+3)(k+1) = 0$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = -1 \quad \dots\dots ㉢$$

$$㉡에서 \quad -\alpha^2 < 0 \text{ 이므로 } \alpha^2 > 0 \quad \therefore -\alpha^2 < 0$$

$$5k + 7 < 0 \quad \therefore k < -\frac{7}{5} \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣에서 $k = -3$ **답 -3**

정답 B

절댓값이 같고 부호가 서로 다른 두 실근

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 실근 α, β 의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 0, \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0$$

55 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = k+3, \alpha\beta = 2-k$$

그런데 $\alpha + \beta > 0$ 이므로

$$k+3 > 0 \quad \therefore k > -3 \quad \dots\dots ㉠$$

한편

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (k+3)^2 - 2(2-k) \\ &= k^2 + 8k + 5 \end{aligned}$$

이므로 $\alpha^2 + \beta^2 = 14$ 에서

$$k^2 + 8k + 5 = 14, \quad k^2 + 8k - 9 = 0$$

$$(k+9)(k-1) = 0 \quad \therefore k = -9 \text{ 또는 } k = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $k = 1$ **답 ㉢**

56 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$$

$$(\alpha+1)(\beta+1) = 2 \text{에서} \quad \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = 2$$

$$b - a + 1 = 2 \quad \therefore -a + b = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(2\alpha-3)(2\beta-3) = -7 \text{에서} \quad 4\alpha\beta - 6(\alpha + \beta) + 9 = -7$$

$$4b + 6a + 9 = -7 \quad \therefore 3a + 2b = -8 \quad \dots\dots ㉡$$

답 ㉠

- ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, b=-1$ ②
 $\therefore a+b=-3$ ③
답 -3

채점 기준	비율
① 주어진 두 식을 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	70 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

57 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a+\beta &=4a, \alpha\beta=-b-3 \\ \therefore (a-\beta)^2 &= (a+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= (4a)^2-4(-b-3) \\ &= 16a^2+4b+12 \\ (a-\beta)^2 < 36 \text{에서} \quad 16a^2+4b+12 < 36 \\ 16a^2+4b < 24 \quad \therefore 4a^2+b < 6 \end{aligned}$$

a, b 는 자연수이므로

$$a=1 \text{일 때, } b < 2 \text{에서} \quad b=1$$

$a \geq 2$ 일 때, $b < -10$ 에서 조건을 만족시키는 자연수 b 의 값은 존재하지 않는다.

$$\therefore a=1, b=1 \quad \text{답 } a=1, b=1$$

58 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a+\beta &=2a, \alpha\beta=-3a \\ a > 0 \text{에서 } \alpha\beta < 0 \text{이므로} \\ (|\alpha|+|\beta|)^2 &= |\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha\beta| \\ &= a^2+\beta^2-2\alpha\beta \\ &= (a+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= (2a)^2-4 \cdot (-3a) \\ &= 4a^2+12a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (|\alpha|+|\beta|)^2 &= (\sqrt{7})^2 \text{에서} \quad 4a^2+12a=7 \\ 4a^2+12a-7 &= 0, \quad (2a+7)(2a-1)=0 \\ \therefore a &= \frac{1}{2} (\because a > 0) \end{aligned}$$

따라서 $a+\beta=1, \alpha\beta=-\frac{3}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2 &= (a+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= 1^2-2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \end{aligned} \quad \text{답 } 4$$

59 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a+\beta &=3-2|a|, \alpha\beta=a \\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha-2\beta &= 18 \text{에서} \\ \alpha\beta(a+\beta) &+ (a+\beta)^2-2\alpha\beta-2(a+\beta) = 18 \\ a(3-2|a|) &+ (3-2|a|)^2-2a-2(3-2|a|) = 18 \\ 4a^2-2a|a| &+ a-8|a|-15=0 \end{aligned}$$

(i) $a \geq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} 4a^2-2a^2+a-8a-15 &= 0, \quad 2a^2-7a-15=0 \\ (2a+3)(a-5) &= 0 \quad \therefore a=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } a=5 \end{aligned}$$

그런데 $a \geq 0$ 이므로 $a=5$

(ii) $a < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} 4a^2+2a^2+a+8a-15 &= 0, \quad 2a^2+3a-5=0 \\ (2a+5)(a-1) &= 0 \quad \therefore a=-\frac{5}{2} \text{ 또는 } a=1 \end{aligned}$$

$$\text{그런데 } a < 0 \text{이므로} \quad a=-\frac{5}{2}$$

(i), (ii)에서 $a=5$ 또는 $a=-\frac{5}{2}$ 이므로 구하는 곱은

$$5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{2} \quad \text{답 } ①$$

60 이차방정식 $x^2-3x-a=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=3, \alpha\beta=-a \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2+bx-18=0$ 의 두 근이 $a+\beta, \alpha\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a+\beta)+\alpha\beta=-b, (a+\beta)\alpha\beta=-18 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} 3-a &= -b, \quad -3a = -18 \quad \therefore a=6, b=3 \\ \therefore ab &= 18 \end{aligned} \quad \text{답 } ⑤$$

61 이차방정식 $2x^2-ax-1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=\frac{a}{2}, \alpha\beta=-\frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2+5x+b=0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= -5, \quad \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = b \\ \frac{a+\beta}{\alpha\beta} &= -5, \quad \frac{1}{\alpha\beta} = b \\ \therefore a+\beta &= -5\alpha\beta, \alpha\beta = \frac{1}{b} \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} = \frac{5}{2}, \quad -\frac{1}{2} = \frac{1}{b} \quad \therefore a=5, b=-2 \\ \therefore a+b &= 3 \end{aligned} \quad \text{답 } ④$$

62 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=a, \alpha\beta=b \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2-(3a-4)x-b+2=0$ 의 두 근이 $\alpha^2\beta, \alpha\beta^2$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha^2\beta+\alpha\beta^2 &= 3a-4, \alpha^2\beta \cdot \alpha\beta^2 = -b+2 \\ \therefore \alpha\beta(a+\beta) &= 3a-4, (\alpha\beta)^3 = -b+2 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} ab &= 3a-4, b^3 = -b+2 \\ b^3 &= -b+2 \text{에서} \quad b^3+b-2=0 \\ (b-1)(b^2+b+2) &= 0 \quad \therefore b=1 (\because b \text{는 실수}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= 3a-4 \text{에서} \quad a=3a-4 \\ -2a &= -4 \quad \therefore a=2 \\ \therefore a^2+b^2 &= 5 \end{aligned} \quad \text{답 } ②$$

63 이차방정식 $4x^2+3x-9=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{4}, \alpha\beta=-\frac{9}{4}$$

$$\therefore (\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=-\frac{3}{4}+2=\frac{5}{4},$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}+1=-2$$

따라서 $\alpha+1, \beta+1$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 4인 이차방정식은

$$4\left(x^2-\frac{5}{4}x-2\right)=0 \quad \therefore 4x^2-5x-8=0$$

$$\text{답 } 4x^2-5x-8=0$$

64 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a, \alpha\beta=b$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{a}{b}, \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{b}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}=0 \quad \therefore bx^2-ax+1=0$$

$$\text{답 } ④$$

65 이차방정식 $x^2-4x-1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=-1 \quad \dots ①$$

$$\therefore \frac{1-\beta}{1+\alpha}+\frac{1-\alpha}{1+\beta}=\frac{(1+\beta)(1-\beta)+(1+\alpha)(1-\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}$$

$$=\frac{1-\beta^2+1-\alpha^2}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$=\frac{2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$=\frac{2-\{4^2-2 \cdot (-1)\}}{1+4+(-1)}=-4,$$

$$\frac{1-\beta}{1+\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{1+\beta}=\frac{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$=\frac{1-4+(-1)}{1+4+(-1)}=-1 \quad \dots ②$$

따라서 $\frac{1-\beta}{1+\alpha}, \frac{1-\alpha}{1+\beta}$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2+4x-1=0 \quad \dots ③$$

$$\text{답 } x^2+4x-1=0$$

채점 기준	비율
① $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② $\frac{1-\beta}{1+\alpha}, \frac{1-\alpha}{1+\beta}, \frac{1-\beta}{1+\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{1+\beta}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ 이차방정식을 구할 수 있다.	30 %

66 $\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}$ 에서

$$\alpha+\beta=10$$

$\triangle ABP$ 는 $\angle APB=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 $\overline{PH}^2=\overline{AH} \cdot \overline{BH}$ 에서 $\alpha\beta=16$ 반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이다.

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ =10^2-2 \cdot 16=68,$$

$$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=16^2=256$$

따라서 α^2, β^2 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-68x+256=0$

$$\text{이므로 } a=-68, b=256$$

$$\therefore a+b=188$$

$$\text{답 } 188$$

참고 $\triangle AHP \sim \triangle PHB$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AH}:\overline{PH}=\overline{PH}:\overline{BH} \quad \therefore \overline{PH}^2=\overline{AH} \cdot \overline{BH}$$

67 이차방정식 $x^2+(a+3)x-b=0$ 의 두 근이 2, α 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+\alpha=-(a+3), 2\alpha=-b$$

$$\therefore a=-\alpha-5, b=-2\alpha \quad \dots ①$$

이차방정식 $x^2-(b-9)x+a+4=0$ 의 두 근이 $-2, \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+\beta=b-9, -2\beta=a+4 \quad \dots ②$$

①을 ②에 대입하면

$$-2+\beta=-2\alpha-9, -2\beta=-\alpha-5+4$$

$$2\alpha+\beta=-7, \alpha-2\beta=-1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$\alpha=-3, \beta=-1$$

따라서 $-3, -1$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 두 근의 합: -4 , 두 근의 곱: 3

$$x^2+4x+3=0$$

$$\text{이므로 } p=4, q=3$$

$$\therefore pq=12$$

$$\text{답 } 12$$

68 현수는 a 와 c 를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$\frac{c}{a}=-4 \cdot 6=-24$$

$$\therefore c=-24a \quad \dots ①$$

지혜는 a 와 b 를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$\frac{b}{a}=(5+\sqrt{3})+(5-\sqrt{3})=10$$

$$\therefore b=10a \quad \dots ②$$

①, ②을 $ax^2-bx+c=0$ 에 대입하면

$$ax^2-10ax-24a=0$$

$a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$x^2-10x-24=0, \quad (x+2)(x-12)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=12$$

따라서 양수인 근은 12이다.

$$\text{답 } 12$$

69 해주는 b 를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$\frac{b}{2}=3 \quad \therefore b=6$$

윤우는 a 를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$-\frac{a}{2}=\frac{5}{2} \quad \therefore a=-5$$

$$\therefore a+b=1$$

$$\text{답 } ③$$

70 원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b 는 상수)이라 하자. → ①

지아는 b 를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$b=(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)=12 \quad \rightarrow ②$$

나윤이는 a 를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$-a=(-4+\sqrt{7})+(-4-\sqrt{7})=-8 \quad \rightarrow ③$$

$$\therefore a=8$$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2+8x+12=0$ 이므로

$$(x+6)(x+2)=0 \quad \rightarrow ④$$

$$\therefore x=-6 \text{ 또는 } x=-2$$

답 $x=-6$ 또는 $x=-2$

채점 기준	비율
① 원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ 으로 놓을 수 있다.	20 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ 원래의 이차방정식의 근을 구할 수 있다.	20 %

71 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에서 근의 공식을

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+ac}}{a}$ 로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 $-6, 2$ 이므로

두 근의 합은

$$\frac{-b+\sqrt{b^2+ac}}{a}+\frac{-b-\sqrt{b^2+ac}}{a}=-6+2$$

$$\frac{-2b}{a}=-4 \quad \therefore b=2a \quad \dots\dots ㉠$$

두 근의 곱은

$$\frac{-b+\sqrt{b^2+ac}}{a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2+ac}}{a}=-6 \cdot 2$$

$$\frac{b^2-(b^2+ac)}{a^2}=-12, \quad -\frac{c}{a}=-12$$

$$\therefore c=12a \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$ 에 대입하면

$$ax^2+2ax+12a=0, \quad x^2+2x+12=0$$

$$\therefore x=-1\pm\sqrt{1^2-1 \cdot 12}$$

$$=-1\pm\sqrt{11}i \quad \text{답 } -1\pm\sqrt{11}i$$

72 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 이므로 $f(3-2x)=0$ 이라면

$$3-2x=\alpha \text{ 또는 } 3-2x=\beta$$

$$\therefore x=\frac{3-\alpha}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3-\beta}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(3-2x)=0$ 의 두 근의 합은

$$\frac{3-\alpha}{2}+\frac{3-\beta}{2}=\frac{6-(\alpha+\beta)}{2}$$

$$=\frac{6+4}{2}=5 \quad \text{답 } ⑤$$

다른 풀이 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta) \quad (a \neq 0)$$

라 하면 $f(3-2x)=0$ 에서

$$a(3-2x-\alpha)(3-2x-\beta)=0$$

$$\therefore x=\frac{3-\alpha}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3-\beta}{2}$$

73 방정식 $f(x)=0$ 이 -1 을 근으로 가지므로

$$f(-1)=0$$

각 방정식의 좌변에 $x=2$ 를 대입하면

$$\neg. f(2-3)=f(-1)=0 \quad \neg. f(-2+2)=f(0)$$

$$\neg. f(5-3 \cdot 2)=f(-1)=0 \quad \neg. f(2^2+1)=f(5)$$

이상에서 2를 반드시 근으로 갖는 방정식은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ②

74 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 이므로 $f(2x+5)=0$ 이라면

$$2x+5=\alpha \text{ 또는 } 2x+5=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha-5}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta-5}{2} \quad \rightarrow ①$$

따라서 이차방정식 $f(2x+5)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha-5}{2} \cdot \frac{\beta-5}{2}=\frac{\alpha\beta-5(\alpha+\beta)+25}{4}$$

$$=\frac{-3-5 \cdot 2+25}{4}$$

$$=3 \quad \rightarrow ②$$

답 3

채점 기준	비율
① 이차방정식 $f(2x+5)=0$ 의 두 근을 α, β 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
② 이차방정식 $f(2x+5)=0$ 의 두 근의 곱을 구할 수 있다.	50 %

75 $f(4\alpha-3)=0, f(4\beta-3)=0$ 이므로 $f(6x)=0$ 이라면

$$6x=4\alpha-3 \text{ 또는 } 6x=4\beta-3$$

$$\therefore x=\frac{4\alpha-3}{6} \text{ 또는 } x=\frac{4\beta-3}{6}$$

따라서 이차방정식 $f(6x)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{4\alpha-3}{6} \cdot \frac{4\beta-3}{6}=\frac{16\alpha\beta-12(\alpha+\beta)+9}{36}$$

$$=\frac{16 \cdot (-1)-12 \cdot \frac{1}{2}+9}{36}$$

$$=-\frac{13}{36} \quad \text{답 } -\frac{13}{36}$$

76 $x^2+4x+7=0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x=-2\pm\sqrt{2^2-1 \cdot 7}=-2\pm\sqrt{3}i$$

$$\therefore x^2+4x+7=\{x-(-2+\sqrt{3}i)\}\{x-(-2-\sqrt{3}i)\}$$

$$=(x+2-\sqrt{3}i)(x+2+\sqrt{3}i) \quad \text{답 } ④$$

77 $x^2-2\sqrt{2}x+3=0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x=-(-\sqrt{2})\pm\sqrt{(-\sqrt{2})^2-1 \cdot 3}=\sqrt{2}\pm i$$

$$\therefore x^2-2\sqrt{2}x+3=\{x-(\sqrt{2}+i)\}\{x-(\sqrt{2}-i)\}$$

$$=(x-\sqrt{2}-i)(x-\sqrt{2}+i)$$

따라서 인수인 것은 ②이다.

답 ②

78 $\frac{1}{2}x^2-x+5=0$, 즉 $x^2-2x+10=0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1 \cdot 10}=1\pm 3i \quad \rightarrow ①$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{2}x^2 - x + 5 &= \frac{1}{2}\{x - (1+3i)\}\{x - (1-3i)\} \\ &= \frac{1}{2}(x-1-3i)(x-1+3i) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

그런데 $b < c$ 이므로

$$\begin{aligned}a &= -1, b = -3, c = 3 \\ \therefore a+b-c &= -7 \quad \cdots ③\end{aligned}$$

답 -7

채점 기준	비율
① 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2 - x + 5 = 0$ 의 근을 구할 수 있다.	40 %
② 주어진 이차식을 인수분해할 수 있다.	40 %
③ $a+b-c$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

79 $f(a)=f(\beta)=2$ 이므로

$$f(a)-2=0, f(\beta)-2=0$$

즉 이차방정식 $f(x)-2=0$ 의 두 근이 α, β 이고, $f(x)$ 의 x^2 의 계수가 1이므로

$$\begin{aligned}f(x)-2 &= (x-\alpha)(x-\beta) \\ &= x^2 - x + 3\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=x^2-x+5$ 이므로

$$f(-1)=7 \quad \text{답 ④}$$

80 $f(a)=f(\beta)=-1$ 이므로

$$f(a)+1=0, f(\beta)+1=0$$

따라서 이차방정식 $f(x)+1=0$, 즉 $x^2+2x-5=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=-5$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\beta+1} &= \frac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} \\ &= \frac{\alpha^2+\beta^2+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1} \\ &= \frac{(-2)^2-2\cdot(-5)+(-2)}{-5+(-2)+1} \\ &= -2 \quad \text{답 -2}\end{aligned}$$

81 이차방정식 $x^2+4x-7=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-4$$

$f(a)=f(\beta)=-4$ 이므로

$$f(a)+4=0, f(\beta)+4=0$$

즉 이차방정식 $f(x)+4=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\begin{aligned}f(x)+4 &= a(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= a(x^2+4x-7) \quad (a \neq 0)\end{aligned}$$

이러 하면 $f(1)=2$ 에서

$$2+4=-2a \quad \therefore a=-3$$

따라서 $f(x)=-3(x^2+4x-7)-4$ 이므로

$$f(-2)=29 \quad \text{답 29}$$

82 이차방정식 $2x^2-6x-5=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3$$

$$\therefore \alpha=3-\beta, \beta=3-\alpha$$

$P(\alpha)=\beta, P(\beta)=\alpha$ 에서 $P(\alpha)=3-\alpha, P(\beta)=3-\beta$ 이므로

$$P(\alpha)+\alpha-3=0, P(\beta)+\beta-3=0$$

따라서 이차방정식 $P(x)+x-3=0$ 의 두 근이 α, β 이고, $P(x)$ 의 x^2 의 계수가 2이므로

$$\begin{aligned}P(x)+x-3 &= 2(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= 2x^2-6x-5\end{aligned}$$

$$\therefore P(x)=2x^2-7x-2 \quad \text{답 } 2x^2-7x-2$$

다른 풀이 이차방정식 $2x^2-6x-5=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=-\frac{5}{2}$$

$P(x)=2x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$P(\alpha)=2\alpha^2+a\alpha+b=\beta \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$P(\beta)=2\beta^2+a\beta+b=\alpha \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠-㉡을 하면

$$2(\alpha^2-\beta^2)+a(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$$

$$2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+a(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=0$$

$$(\alpha-\beta)(2\alpha+2\beta+a+1)=0$$

$\alpha \neq \beta$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{2\alpha+2\beta+a+1}{2(\alpha+\beta)} &= 0 \\ 6+a+1=0 &\quad \therefore a=-7\end{aligned}$$

㉠+㉡을 하면

$$2(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$$

$$2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$$

$$2\left\{3^2-2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}+(-7)\cdot 3+2b=3$$

$$7+2b=3 \quad \therefore b=-2$$

$$\therefore P(x)=2x^2-7x-2$$

참고 이차방정식 $2x^2-6x-5=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-2\cdot(-5)=19>0$$

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$\therefore \alpha \neq \beta$$

83 a, b 가 실수이므로 $ab, a+b$ 도 실수이다.

즉 이차방정식 $x^2+abx+a+b=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}i$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=-ab,$$

$$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=a+b$$

이므로

$$ab=-2, a+b=4$$

$$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$=4^3-3\cdot(-2)\cdot 4$$

$$=88 \quad \text{답 88}$$

$$84 \quad \frac{b-i}{2+i} = \frac{(b-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{(2b-1)-(b+2)i}{5}$$

a, b 가 실수이고 $b \neq -2$ 이므로 이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 한 근이 $\frac{(2b-1)-(b+2)i}{5}$ 이면 다른 한 근은 $\frac{(2b-1)+(b+2)i}{5}$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{(2b-1)-(b+2)i}{5} + \frac{(2b-1)+(b+2)i}{5} = 2$$

$$2b-1=5 \quad \therefore b=3$$

즉 두 근은 $1-i, 1+i$ 이므로

$$a = (1-i)(1+i) = 2$$

$$\therefore ab = 6$$

답 ②

85 m, n 이 실수이므로 이차방정식 $x^2 + mx - n = 0$ 의 한 근이 $-2+3i$ 이면 다른 한 근은 $-2-3i$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-2+3i) + (-2-3i) = -m,$$

$$(-2+3i)(-2-3i) = -n$$

이므로

$$m=4, n=-13 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore (m+n) + (m-n) = 8,$$

$$(m+n)(m-n) = -153$$

$m+n, m-n$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 - 8x - 153 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

따라서 $a=8, b=-153$ 이므로

$$a-b = 161 \quad \dots \textcircled{3}$$

답 161

채점 기준	비율
① m, n 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $m+n, m-n$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식을 구할 수 있다.	40 %
③ $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

86 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 12$$

주어진 이차방정식의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 α 이면 다른 한 근은 $\bar{\alpha}$ 이고 한 근이 β 이면 다른 한 근은 $\bar{\beta}$ 이다.

즉 $\bar{\alpha} = \beta, \bar{\beta} = \alpha$ 이므로

$$12\left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{\beta}\right) = 12\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$= 12 \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$$

$$= 12 \cdot \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= 12 \cdot \frac{3^2 - 2 \cdot 12}{12}$$

$$= -15$$

답 ①

87 $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1$

계수가 모두 유리수인 이차방정식의 한 근이 $\sqrt{2}-1$, 즉 $-1+\sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}$ 이다.

따라서 $\alpha = -1-\sqrt{2}$ 이므로

$$\alpha + 1 = -\sqrt{2}, \quad (\alpha + 1)^2 = 2$$

$$\therefore \alpha^2 + 2\alpha = 1$$

$$\therefore -4\alpha^3 - 8\alpha^2 + 5\alpha + 1 = -4\alpha(\alpha^2 + 2\alpha) + 5\alpha + 1$$

$$= -4\alpha \cdot 1 + 5\alpha + 1$$

$$= \alpha + 1$$

$$= -\sqrt{2}$$

답 $-\sqrt{2}$

88 조건 ㉞에서 나머지 정리에 의하여 $f(-3) = 4$ 이므로

$$9 - 3m + n = 4$$

$$\therefore -3m + n = -5 \quad \dots \textcircled{1}$$

m, n 이 실수이므로 조건 ㉝에서 이차방정식 $x^2 + mx + n = 0$ 의 한 근이 $a-2i$ 이면 다른 한 근은 $a+2i$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a+2i) + (a-2i) = -m,$$

$$(a+2i)(a-2i) = n$$

이므로 $m = -2a, n = a^2 + 4$

이것을 ①에 대입하면

$$6a + (a^2 + 4) = -5, \quad a^2 + 6a + 9 = 0$$

$$(a+3)^2 = 0 \quad \therefore a = -3$$

따라서 $m=6, n=13$ 이므로

$$m+n = 19$$

답 ④

05 이차방정식과 이차함수

II. 방정식

개념정리

본책 56쪽

① 실근 ② 0 ③ = ④ q ⑤ p

유형 뚫개기

본책 57쪽

01 이차함수 $y=3x^2-9x+a$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표가 $-2, b$ 이므로 $-2, b$ 는 이차방정식 $3x^2-9x+a=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+b=3, -2 \cdot b = \frac{a}{3}$$

이므로 $a=-30, b=5$

$$\therefore a+b=-25$$

답 -25

02 이차함수 $y=x^2+ax+b$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로 $-1, 3$ 은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+3=-a, -1 \cdot 3=b$$

이므로 $a=-2, b=-3$

이차함수 $y=x^2-bx-a$, 즉 $y=x^2+3x+2$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2+3x+2=0$ 의 근이므로

$$(x+2)(x+1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1$$

따라서 두 점 사이의 거리는

$$-1-(-2)=1 \quad \text{두 점의 좌표는 } (-2, 0), (-1, 0) \text{이다.}$$

답 ①

03 이차방정식 $2x^2-4x+a=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=2, a\beta=\frac{a}{2} \quad \dots\dots ①$$

이때 주어진 이차함수의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 4이므로

$$|\alpha-\beta|=4$$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=16$

$$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16 \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면 $4-2a=16$

$$-2a=12 \quad \therefore a=-6$$

답 -6

다른 풀이 이차방정식 $2x^2-4x+a=0$ 의 두 근을 $\alpha, \alpha+4$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+(\alpha+4)=2 \quad \dots\dots ①$$

$$a(\alpha+4)=\frac{a}{2} \quad \dots\dots ②$$

①에서 $2\alpha=-2 \quad \therefore \alpha=-1$

$a=-1$ 을 ②에 대입하면

$$\frac{a}{2}=-3 \quad \therefore a=-6$$

04 꼭짓점의 좌표가 $(1, 2)$ 이므로 주어진 이차함수를

$y=a(x-1)^2+2$ 라 하면

$$y=a(x-1)^2+2=ax^2-2ax+a+2 \quad \dots\dots ①$$

이때 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$ 이고

$PQ=2$ 이므로 두 점 P, Q의 x 좌표는 0, 2이다.

즉 0, 2는 이차방정식 $ax^2-2ax+a+2=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$0+2=\frac{a+2}{a}, \quad a+2=0$$

$$\therefore a=-2$$

→ ①

$a=-2$ 를 ①에 대입하면

$$y=-2x^2+4x$$

따라서 $b=4, c=0$ 이므로

→ ②

$$a-b-c=-6$$

→ ③

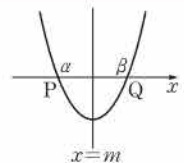
답 -6

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	60 %
② b, c 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ $a-b-c$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

예제

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로 이 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 좌표가 $P(\alpha, 0), Q(\beta, 0)$ ($\alpha < \beta$)이면

$$\alpha=m-\frac{PQ}{2}, \beta=m+\frac{PQ}{2}$$



다른 풀이 주어진 이차함수를 $y=a(x-1)^2+2$ 라 하면 이차방정식 $a(x-1)^2+2=0$ 에서

$$(x-1)^2=-\frac{2}{a}, \quad x-1=\pm\sqrt{-\frac{2}{a}} \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore x=1\pm\sqrt{-\frac{2}{a}} \quad \text{꼭짓점이 제1사분면 위에 있고 } x\text{축과 두 점에서 만나므로 } a < 0$$

따라서 두 점 P, Q의 x 좌표가 $1+\sqrt{-\frac{2}{a}}, 1-\sqrt{-\frac{2}{a}}$ 이고

$PQ=2$ 이므로

$$1+\sqrt{-\frac{2}{a}}-(1-\sqrt{-\frac{2}{a}})=2$$

$$\sqrt{-\frac{2}{a}}=1, \quad -\frac{2}{a}=1 \quad \therefore a=-2$$

따라서 주어진 이차함수는

$$y=-2(x-1)^2+2=-2x^2+4x$$

05 $2\overline{OA}=3\overline{OB}$ 이므로 $A(-3\alpha, 0), B(2\alpha, 0)$ ($\alpha > 0$)이라 하면 $-3\alpha, 2\alpha$ 는 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이다.

이때 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근의 합이 -2 이므로

$$-3\alpha+2\alpha=-2 \quad \therefore \alpha=2$$

즉 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 $-6, 4$ 이므로 이차방정식 $f(2x+k)=0$ 에서

$$2x+k=-6 \text{ 또는 } 2x+k=4$$

$$\therefore x=\frac{-k-6}{2} \text{ 또는 } x=\frac{-k+4}{2}$$

이차방정식 $f(2x+k)=0$ 의 두 근의 합이 3이므로
 $\frac{-k-6}{2} + \frac{-k+4}{2} = 3, \quad -k-1=3$
 $\therefore k=-4$ 답 ②

06 이차함수 $y=x^2+(1-2m)x+m^2-1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 x 에 대한 이차방정식 $x^2+(1-2m)x+m^2-1=0$ 의 판별식을 D 라 할 때
 $D=(1-2m)^2-4(m^2-1)>0$
 $-4m+5>0 \quad \therefore m<\frac{5}{4}$
 따라서 정수 m 의 최댓값은 1이다. 답 1

07 이차함수 $y=x^2+kx+2k-3$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+kx+2k-3=0$ 의 판별식을 D_1 이라 할 때
 $D_1=k^2-4(2k-3)=0, \quad k^2-8k+12=0$
 $(k-2)(k-6)=0$
 $\therefore k=2$ 또는 $k=6$ ① ... ①
 또 이차함수 $y=x^2-4x+k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-4x+k=0$ 의 판별식을 D_2 라 할 때
 $\frac{D_2}{4}=(-2)^2-k<0 \quad \therefore k>4$ ② ... ②
 ①, ②에서 $k=6$... ③ ... ③
답 6

채점 기준	비율
① 이차함수 $y=x^2+kx+2k-3$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나도록 하는 k 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 이차함수 $y=x^2-4x+k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않도록 하는 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

08 이차함수 $y=x^2-2(a+1)x-b^2+2a+12$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으므로 x 에 대한 이차방정식 $x^2-2(a+1)x-b^2+2a+12=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-(-b^2+2a+12)<0$
 $\therefore a^2+b^2<11$
 따라서 이를 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$ 의 6개이다. 답 6

09 이차함수 $y=x^2+(2m+3)x+m^2+2m-1$ 의 그래프가 x 축과 만나려면 x 에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+3)x+m^2+2m-1=0$ 의 판별식을 D 라 할 때
 $D=(2m+3)^2-4(m^2+2m-1)\geq 0$
 $4m+13\geq 0 \quad \therefore m\geq-\frac{13}{4}$
 따라서 실수 m 의 최솟값은 $-\frac{13}{4}$ 이다. 답 ①

10 이차함수 $y=x^2+2(k-a)x+k^2+4k+b$ 의 그래프가 x 축에 접하므로 x 에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+4k+b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+4k+b)=0$$

$$k^2-2ak+a^2-k^2-4k-b=0$$

$$\therefore (-2a-4)k+a^2-b=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로
 $-2a-4=0, \quad a^2-b=0$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $a=-2, \quad b=4$
 $\therefore ab=-8$ 답 ②

예 B 탐구

항등식의 성질

- ① $ax+b=0$ 이 x 에 대한 항등식 $\Rightarrow a=0, b=0$
- ② $ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식 $\Rightarrow a=0, b=0, c=0$
- ③ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 이 x 에 대한 항등식 $\Rightarrow a=a', b=b', c=c'$

11 이차함수 $y=2x^2+x+a$ 의 그래프와 직선 $y=bx+3$ 의 두 교점의 x 좌표가 $-4, 1$ 이므로 $-4, 1$ 은 이차방정식 $2x^2+x+a=bx+3$, 즉 $2x^2-(b-1)x+a-3=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $-4+1=\frac{b-1}{2}, \quad -4\cdot 1=\frac{a-3}{2}$

이므로

$$b-1=-6, \quad a-3=-8$$

$$\therefore a=-5, \quad b=-5$$

$$\therefore a+b=-10$$

답 ③

12 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 직선 $y=mx+n$ 의 두 교점의 x 좌표가 $-2, 4$ 이므로 $-2, 4$ 는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$ 의 두 근이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실근의 합은

$$-2+4=2$$

답 2

13 이차함수 $y=x^2-2x+4$ 의 그래프와 직선 $y=mx$ 의 두 교점의 x 좌표의 차가 3이므로 이차방정식

$$x^2-2x+4=mx, \quad \text{즉 } x^2-(m+2)x+4=0$$

의 두 근의 차가 3이다.

즉 두 근을 α, β 라 하면

$$|\alpha-\beta|=3 \quad \text{..... ①}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=m+2, \quad \alpha\beta=4 \quad \text{..... ②}$$

①의 양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=9$

$$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9 \quad \text{..... ③}$$

②를 ③에 대입하면 $(m+2)^2-16=9$

$$m^2+4m-21=0, \quad (m+7)(m-3)=0$$

$$\therefore m=3 (\because m>0)$$

답 3

14 이차함수 $y=x^2+px+q$ 의 그래프와 직선 $y=2x-3$ 의 한 교점의 x 좌표가 $2+\sqrt{5}$ 이므로 $2+\sqrt{5}$ 는 이차방정식

$$x^2+px+q=2x-3, \text{ 즉 } x^2+(p-2)x+q+3=0$$

의 한 근이다. → ①

이때 이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{5}$ 이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{5}$ 이다. → ②

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=-(p-2),$$

$$(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=q+3$$

이므로

$$4=-p+2, -1=q+3$$

$$\therefore p=-2, q=-4 \quad \rightarrow ③$$

$$\therefore q-p=-2 \quad \rightarrow ④$$

답 -2

채점 기준	비율
① $2+\sqrt{5}$ 를 한 근으로 갖는 이차방정식을 세울 수 있다.	20 %
② 이차방정식의 다른 한 근이 $2-\sqrt{5}$ 임을 알 수 있다.	20 %
③ p, q 의 값을 구할 수 있다.	40 %
④ $q-p$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

15 이차함수 $y=x^2-4x$, 즉 $y=(x-2)^2-4$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-2=(x+1-2)^2-4 \quad \therefore y=(x-1)^2-2$$

두 점 P, Q는 이차함수 $y=(x-1)^2-2$ 의 그래프와 직선 $y=mx$ 의 교점이므로 두 점 P, Q의 x 좌표는 이차방정식

$$(x-1)^2-2=mx, \text{ 즉 } x^2-(m+2)x-1=0$$

의 두 근이다.

이때 두 점 P, Q의 x 좌표의 합이 1 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m+2=1 \quad \therefore m=-1 \quad \rightarrow ①$$

B $\frac{5}{4}$

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$ 을 대입하여 구한다. 즉 평행이동한 그래프의 식은 $y=a(x-m-p)^2+q+n$

16 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표가 α, β 이므로 α, β 는 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이다.

$f(x)$ 의 x^2 의 계수가 1 이므로

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta) \quad \dots\dots ①$$

또 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 의 두 교점의 x 좌표가 α, γ 이므로 α, γ 는 이차방정식

$$f(x)=g(x), \text{ 즉 } f(x)-g(x)=0$$

의 두 근이다.

$f(x)-g(x)$ 의 x^2 의 계수가 1 이므로

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma) \quad \text{\small $g(x)$ 가 일차함수이므로 $f(x)-g(x)$ 는 x^2 의 계수가 1 인 이차함수이다.}$$

$$\therefore g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)(x-\gamma) \quad (\because ①)$$

$$=(x-\alpha)(x-\beta-x+\gamma) \\ =-x+\alpha \quad \text{\small $-\beta+\gamma=-(\beta-\gamma)=-1$ }$$

이때 $g(0)=-3$ 이므로

$$\alpha=-3$$

$$\therefore \gamma=\alpha+4=1, \beta=\gamma+1=2$$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-2)$ 이므로

$$f(\alpha+\beta+\gamma)=f(0)=-6 \quad \rightarrow ①$$

17 이차함수 $y=x^2+kx+5$ 의 그래프와 직선 $y=2x+4$ 가 접하려면 이차방정식 $x^2+kx+5=2x+4$, 즉 $x^2+(k-2)x+1=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D=(k-2)^2-4=0, \quad k^2-4k=0$$

$$k(k-4)=0 \quad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=4$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$0+4=4 \quad \rightarrow ④$$

18 이차함수 $y=x^2+3x+k$ 의 그래프와 직선 $y=x-3$ 이 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+3x+k=x-3$, 즉 $x^2+2x+k+3=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4}=1^2-(k+3) \geq 0$$

$$-2-k \geq 0 \quad \therefore k \leq -2$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -2 이다. → ②

19 이차함수 $y=x^2-2ax+2a^2+1$ 의 그래프와 직선 $y=-3x+k$ 가 만나지 않으려면 x 에 대한 이차방정식 $x^2-2ax+2a^2+1=-3x+k$, 즉

$$x^2-(2a-3)x+2a^2+1-k=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 할 때}$$

$$D=\{-(2a-3)\}^2-4(2a^2+1-k) < 0$$

$$-4a^2-12a+5+4k < 0$$

$$\therefore k < a^2+3a-\frac{5}{4}$$

$$(i) a=1 \text{일 때, } k < \frac{11}{4}$$

$$\text{자연수 } k \text{는 } 1, 2 \text{의 } 2 \text{개이므로 } f(1)=2$$

$$(ii) a=2 \text{일 때, } k < \frac{35}{4}$$

$$\text{자연수 } k \text{는 } 1, 2, 3, \dots, 8 \text{의 } 8 \text{개이므로 } f(2)=8$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(1)+f(2)=10 \quad \rightarrow ④$$

20 이차함수 $y=x^2+kx+k^2+3$ 의 그래프가 직선 $y=3kx+k$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 하므로 x 에 대한 이차방정식 $x^2+kx+k^2+3=3kx+k$, 즉 $x^2-2kx+k^2-k+3=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2-k+3) < 0 \quad \rightarrow ①$$

$$k-3 < 0 \quad \therefore k < 3 \quad \rightarrow ②$$

$$\rightarrow ③$$

$$\rightarrow ②$$

채점 기준	비율
① 주어진 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있도록 하는 조건을 구할 수 있다.	60 %
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
③ 자연수 k 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

21 ㄱ. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로 이차방정식 $-x^2+ax+b=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=a^2+4b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{ㄱ}$$

ㄴ. ㉠에서 $a^2=-4b$ 이므로 $\frac{a^2}{4}=-b$

$$\therefore \frac{a^2}{4}+d=-b+d \quad \cdots \cdots \textcircled{ㄴ}$$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 가 제3사분면과 제4사분면에서 만나므로 이차방정식

$$\begin{aligned} -x^2+ax+b=cx+d, \\ \text{즉 } x^2+(c-a)x-b+d=0 \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{ㄴ}$$

의 두 근의 곱은 음수이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-b+d<0$$

따라서 ㉡에서 $\frac{a^2}{4}+d<0$

ㄷ. ㉡이 서로 다른 두 실근을 가지므로 ㉡의 판별식을 D_2 라 하면

$$\begin{aligned} D_2=(c-a)^2-4(-b+d)>0 \\ c^2-2ac+a^2+4b-4d>0 \\ \therefore c^2-2ac-4d>0 \quad (\because \textcircled{ㄱ}) \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

22 직선 $y=ax+b$ 가 직선 $y=-3x+1$ 에 평행하므로 $a=-3$

직선 $y=-3x+b$ 가 이차함수 $y=x^2-4x+2$ 의 그래프와 접하므로 이차방정식 $x^2-4x+2=-3x+b$, 즉 $x^2-x+2-b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} D=(-1)^2-4(2-b)=0 \\ -7+4b=0 \quad \therefore b=\frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore a+b=-\frac{5}{4} \quad \text{답 } -\frac{5}{4}$$

참고 두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$ 이 평행하면 $a=a'$, $b \neq b'$ 이다.

23 직선 $y=x+1$ 을 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y=x+1+m$$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-3x-1$ 의 그래프와 접하므로 이차방정식 $x^2-3x-1=x+1+m$, 즉 $x^2-4x-2-m=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4}=(-2)^2-(-2-m)=0 \\ 6+m=0 \quad \therefore m=-6 \end{aligned} \quad \text{답 } -6$$

24 점 $(-4, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x+4)+3$ 이라 하면 이 직선이 이차함수 $y=-x^2+5x+3$ 의 그래프와 접하

므로 이차방정식 $-x^2+5x+3=a(x+4)+3$, 즉 $x^2+(a-5)x+4a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} D=(a-5)^2-4 \cdot 4a=0, \quad a^2-26a+25=0 \\ (a-1)(a-25)=0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=25 \end{aligned}$$

따라서 두 직선의 기울기의 곱은

$$1 \cdot 25=25$$

답 25

25 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+a$ 라 하면 이 직선이 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 접하므로 이차방정식 $x^2=2x+a$, 즉 $x^2-2x-a=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4}=(-1)^2-(-a)=0, \quad 1+a=0 \\ \therefore a=-1 \end{aligned}$$

따라서 직선 $y=2x-1$ 이 이차함수 $y=-2x^2+kx+k-3$ 의 그래프와 접하므로 이차방정식 $-2x^2+kx+k-3=2x-1$, 즉 $2x^2+(2-k)x-k+2=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\begin{aligned} D_2=(2-k)^2-4 \cdot 2 \cdot (-k+2)=0 \\ k^2+4k-12=0, \quad (k+6)(k-2)=0 \\ \therefore k=2 \quad (\because k>0) \end{aligned} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

26 직선 $y=mx+n$ 이 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2-2a+3$ 의 그래프와 접하므로 x 에 대한 이차방정식

$$x^2-2ax+a^2-2a+3=mx+n, \text{ 즉}$$

$x^2-(2a+m)x+a^2-2a+3-n=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} D=[-(2a+m)]^2-4(a^2-2a+3-n)=0 \quad \cdots \textcircled{1} \\ \therefore (4m+8)a+(m^2+4n-12)=0 \end{aligned}$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4m+8=0, \quad m^2+4n-12=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $m=-2$, $n=2$

$$\therefore mn=-4$$

답 -4

채점 기준	비율
① 직선이 주어진 이차함수의 그래프와 접하기 위한 조건을 구할 수 있다.	50 %
② mn 의 값을 구할 수 있다.	50 %

27 $y=\frac{1}{3}x^2-4x+k=\frac{1}{3}(x-6)^2-12+k$ 이므로 $x=6$ 에서 최솟값 $-12+k$ 를 갖는다.

$y=-4x^2-8x-1-2k=-4(x+1)^2+3-2k$ 이므로 $x=-1$ 에서 최댓값 $3-2k$ 를 갖는다.

따라서 $-12+k=3-2k$ 이므로

$$k=5$$

답 ⑤

28 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 가 $x=2$ 에서 최솟값 -5 를 가지므로

$$f(x)=a(x-2)^2-5$$

$f(4)=1$ 이므로 $1=a(4-2)^2-5$

$$4a=6 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$$

답 ①

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}(x-2)^2 - 5 = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$ 이므로

$$b = -6, c = 1$$

$$\therefore 2a - b + c = 10$$

→ ②

→ ③

답 10

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	60 %
② b, c 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $2a - b + c$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

29 $f(x) = x^2 - 2x - a + 5 = (x-1)^2 - a + 4$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $-a+4$ 를 갖는다.

$$\text{즉 } -a+4 \geq -1 \text{이므로 } a \leq 5$$

$g(x) = -2x^2 + 8x + 2b - 4 = -2(x-2)^2 + 2b + 4$ 이므로 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $2b+4$ 를 갖는다.

$$\text{즉 } 2b+4 \leq 0 \text{이므로 } 2b \leq -4$$

$$\therefore b \leq -2$$

따라서 $a+b$ 는 $a=5, b=-2$ 일 때 최댓값 3을 갖는다. 답 3

30 조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$ 의 최댓값이 2이므로 $f(x) = a(x-m)^2 + 2$ ($a < 0$)라 하자.

조건 (㉞)에서 $f(1) = 1$ 이므로

$$a(1-m)^2 + 2 = 1, \text{ 즉 } a(1-m)^2 = -1 \quad \dots\dots ㉟$$

한편 조건 (㉝)의 방정식 $f(x) + 7 = 0$ 에서

$$a(x-m)^2 + 2 + 7 = 0$$

즉 x 에 대한 이차방정식 $ax^2 - 2amx + am^2 + 9 = 0$ 의 두 실근의 합이 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{2am}{a} = 4 \quad \therefore m = 2$$

$m=2$ 를 ㉟에 대입하면 $a = -1$

따라서 $f(x) = -(x-2)^2 + 2$ 이므로 이차방정식

$-(x-2)^2 + 2 = 0$, 즉 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 2이다. $(-2)^2 - 1 \cdot 2 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 2

31 $f(x) = -2x^2 + 4x + k - 1$

$$= -2(x-1)^2 + k + 1$$

이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

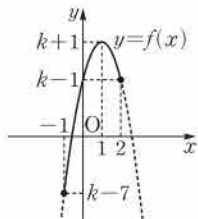
$x=1$ 에서 최댓값 $k+1$ 을 가지므로

$$k+1 = 5 \quad \therefore k = 4$$

따라서 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(-1) = k - 7 = 4 - 7 = -3$$

답 ④



32 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + a = \frac{1}{2}(x+2)^2 + a - 2$

$-2 \leq x \leq 0$ 에서 $x=0$ 일 때 최댓값은 a 이고, $x=-2$ 일 때 최솟값은 $a-2$ 이다.

따라서 구하는 차는

$$a - (a-2) = 2$$

답 ①

33 $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

$$= -(x-3)^2 + 4$$

라 하면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(3) = 4$ 이므로

$0 < a < 3$ 이면 $a \geq 3$ 이면 $f(x)$ 의 최댓값은 4이다.

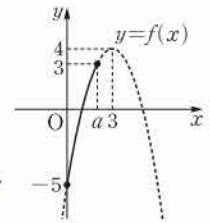
$x=a$ 에서 최댓값 $-a^2 + 6a - 5$ 를 가지므로

$$-a^2 + 6a - 5 = 3, \quad a^2 - 6a + 8 = 0$$

$$(a-2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because 0 < a < 3)$$

답 2



34 $f(x) = x^2 - 2ax + b$

$$= (x-a)^2 - a^2 + b$$

$a < 0$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x=1$ 에서 최솟값 $1-2a+b$ 를 가지므로

$$1-2a+b = 5$$

$$\therefore b = 2a + 4$$

$b < 0$ 에서 $2a+4 < 0$ 이므로 $a < -2$

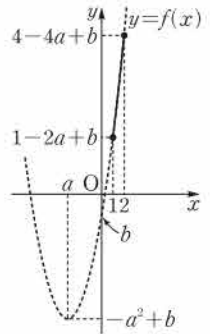
$a < b$ 에서 $a < 2a+4$ 이므로 $a > -4$

즉 $a = -3$ 이므로 a 는 정수이다.

$$b = 2 \cdot (-3) + 4 = -2$$

$$\therefore a+b = -5$$

답 ③



35 $f(x) = ax^2 - 2ax + b = a(x-1)^2 - a + b$ 라 하면

(i) $a > 0$ 일 때,

$f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값 2를 갖고, $x=1$ 에서 최솟값 1을 가지므로

$$f(-1) = 3a + b = 2, \quad f(1) = -a + b = 1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{5}{4}$$

$$\therefore a+b = \frac{3}{2}$$

→ ①

(ii) $a < 0$ 일 때,

$f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최솟값 1을 갖고, $x=1$ 에서 최댓값 2를 가지므로

$$f(-1) = 3a + b = 1, \quad f(1) = -a + b = 2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = \frac{7}{4}$$

$$\therefore a+b = \frac{3}{2}$$

→ ②

(i), (ii)에서 $a+b = \frac{3}{2}$

→ ③

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
① $a > 0$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $a < 0$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

36 $y=x^2-2kx=(x-k)^2-k^2$

(i) $k < 4$ 일 때, $\square$ 꼭짓점의 x 좌표가 주어진 범위에 속하지 않는다.

주어진 함수는 $x=4$ 에서 최솟값 $16-8k$ 를 가지므로

$$16-8k=-24 \quad \therefore k=5$$

그런데 $k < 4$ 이므로 조건을 만족시키는 k 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k \geq 4$ 일 때, $\square$ 꼭짓점의 x 좌표가 주어진 범위에 속한다.

주어진 함수는 $x=k$ 에서 최솟값 $-k^2$ 을 가지므로

$$-k^2=-24, \quad k^2=24$$

$$\therefore k=\pm 2\sqrt{6}$$

그런데 $k \geq 4$ 이므로 $k=2\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 $k=2\sqrt{6}$

답 2√6

37 $x^2-4x+1=t$ 로 놓으면

$$t=(x-2)^2-3$$

$0 \leq x \leq 3$ 이므로 오른쪽 그림에서

$$-3 \leq t \leq 1$$

이때 주어진 함수는

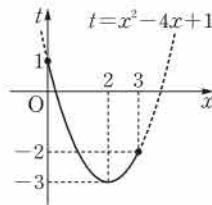
$$y=t^2-6t-3$$

$$=(t-3)^2-12 \quad (-3 \leq t \leq 1)$$

따라서 $t=1$ 일 때 최솟값은 -8 이고, $t=-3$ 일 때 최댓값은 24 이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$24+(-8)=16$$

답 ②



38 $-x^2+3x=t$ 로 놓으면

$$t=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-4t+2=(t-2)^2-2 \quad \left(t \leq \frac{9}{4}\right)$$

따라서 $t=2$ 일 때 최솟값은 -2 이다.

답 -2

39 $x^2+6x+11=t$ 로 놓으면

$$t=(x+3)^2+2 \geq 2$$

이때 주어진 함수는

$$y=-2t^2+8(t-11)+k+45$$

$$=-2t^2+8t+k-43$$

$$=-2(t-2)^2+k-35 \quad (t \geq 2)$$

따라서 $t=2$ 일 때 최댓값 $k-35$ 를 가지므로

$$k-35=-20 \quad \therefore k=15$$

답 ①

40 $x^2-4x+4=t$ 로 놓으면

$$t=(x-2)^2$$

$3 \leq x \leq 4$ 이므로 오른쪽 그림에서

$$1 \leq t \leq 4$$

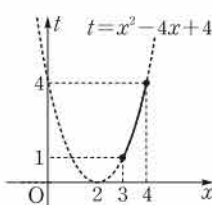
이때 주어진 함수는

$$y=t(t+4)+2(t-4)$$

$$=t^2+6t-8$$

$$=(t+3)^2-17 \quad (1 \leq t \leq 4)$$

→ ①



따라서 $t=1$ 일 때 최솟값은 -1 이고, $t=4$ 일 때 최댓값은 32 이므로

$$M=32, m=-1$$

→ ②

$$\therefore M-m=33$$

→ ③

답 33

채점 기준	비율
① $x^2-4x+4=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
② M, m 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $M-m$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

41 $f(x)=x^2-2|x|+3$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때,

$$f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

(i), (ii)에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

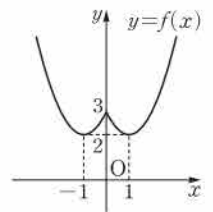
$$\therefore f(x) \geq 2$$

$y=\{f(x)\}^2+f(x)-4$ 에서 $f(x)=t$ 로 놓으면

$$y=t^2+t-4=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{17}{4} \quad (t \geq 2)$$

따라서 $t=2$, 즉 $f(x)=2$ 일 때 최솟값은 2 이다.

답 ⑤



42 $2x^2+12x+y^2-4y+25=2(x+3)^2+(y-2)^2+3$

이때 x, y 가 실수이므로

$$(x+3)^2 \geq 0, (y-2)^2 \geq 0$$

$$\therefore 2x^2+12x+y^2-4y+25 \geq 3$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 3 이다.

답 ③

43 $-x^2-y^2+8x-10y-6=-(x-4)^2-(y+5)^2+35$

이때 x, y 가 실수이므로

$$(x-4)^2 \geq 0, (y+5)^2 \geq 0$$

$$\therefore -x^2-y^2+8x-10y-6 \leq 35$$

따라서 주어진 식은 $x=4, y=-5$ 에서 최댓값 35 를 가지므로

$$\alpha=4, \beta=-5, \gamma=35$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=34$$

답 ⑤

44 $x^2+3y^2+4z^2+6x-12y-8z+1$

$$=(x+3)^2+3(y-2)^2+4(z-1)^2-24$$

이때 x, y, z 가 실수이므로

$$(x+3)^2 \geq 0, (y-2)^2 \geq 0, (z-1)^2 \geq 0$$

$$\therefore x^2+3y^2+4z^2+6x-12y-8z+1 \geq -24$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -24 이다.

답 ②

45 $2x^2-x=t$ 로 놓으면

$$(2x^2-x)^2-4(2x^2-x)y+5y^2-2y+k$$

$$=t^2-4ty+5y^2-2y+k$$

$$=(t-2y)^2+(y-1)^2+k-1$$

→ ①

이때 t, y 가 실수이므로

$$(t-2y)^2 \geq 0, (y-1)^2 \geq 0$$

$$\therefore (t-2y)^2 + (y-1)^2 + k-1 \geq k-1$$

따라서 주어진 식의 최솟값이 $k-1$ 이므로

$$k-1=2 \quad \therefore k=3$$

... ②

... ③

답 3

채점 기준	비율
① 공통부분을 t 로 놓고 식을 정리할 수 있다.	40 %
② 최솟값을 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

B $\frac{E}{3}$

주어진 식이 $(t-2y)^2=0, (y-1)^2=0$ 일 때 최소가 되려면 $(t-2y)^2=0, (y-1)^2=0$ 을 동시에 만족시키는 실수 t, y 의 값이 존재해야 한다.

이때 $(t-2y)^2=0, (y-1)^2=0$ 에서 $t=2, y=1$ 이고

$$t=2x^2-x=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8} \geq -\frac{1}{8}$$

이므로 실수 t, y 의 값이 존재함을 알 수 있다.

46 $x-y-2=0$ 에서 $x=y+2$

$$\therefore x^2+y^2+8y=(y+2)^2+y^2+8y$$

$$=2y^2+12y+4$$

$$=2(y+3)^2-14$$

따라서 $y=-3$ 일 때 최솟값은 -14 이다.

답 ③

47 $2a+b=8$ 에서 $b=-2a+8$

... ①

$$\therefore ab=a(-2a+8)=-2a^2+8a$$

$$=-2(a-2)^2+8$$

... ②

이때 $1 \leq a \leq 4$ 이므로 $a=2$ 일 때 최댓값은 8, $a=4$ 일 때 최솟값은 0이다.

따라서 구하는 합은 $8+0=8$

... ③

답 8

채점 기준	비율
① b 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
② ab 를 a 에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ ab 의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	40 %

48 점 $P(a, b)$ 가 이차함수 $y=x^2+6x+3$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b=a^2+6a+3$$

$$\therefore 4a^2-2b+12=4a^2-2(a^2+6a+3)+12$$

$$=2a^2-12a+6$$

$$=2(a-3)^2-12$$

따라서 $2 \leq a \leq 6$ 에서 $a=6$ 일 때 최댓값은 6이다.

답 ③

49 $x+y^2=1$ 에서 $y^2=1-x$

..... ①

이때 y 가 실수이므로

$$y^2=1-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 1$$

①을 x^2+4y^2-2x 에 대입하면

$$x^2+4y^2-2x=x^2+4(1-x)-2x$$

$$=x^2-6x+4$$

$$=(x-3)^2-5$$

따라서 $x \leq 1$ 에서 $x=1$ 일 때 최솟값은 -1 이다.

답 -1

50 이차방정식 $x^2-2(a+1)x+a^2-a+4=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-(a^2-a+4)>0$$

$$3a-3>0 \quad \therefore a>1$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2(a+1), \alpha\beta=a^2-a+4$$

$$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$$

$$=a^2-a+4-2(a+1)+1$$

$$=a^2-3a+3$$

$$=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

따라서 $a>1$ 에서 $a=\frac{3}{2}$ 일 때 최솟값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

답 ③

51 두 점 $A(-3, 5), B(1, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{-3-5}{1-(-3)}(x+3) \quad \therefore y=-2x-1$$

$$\therefore -2x^2+y^2=-2x^2+(-2x-1)^2$$

$$=2x^2+4x+1$$

$$=2(x+1)^2-1$$

따라서 $-3 \leq x \leq 1$ 에서 $x=-1$ 일 때 최솟값은 -1 이다.

점 P 가 $\overline{AB}$ 위를 움직이므로 $-3 \leq x \leq 1$

답 ②

B $\frac{E}{3}$

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad (\text{단, } x_1 \neq x_2)$$

52 점 A 의 좌표를 (a, a^2-6a) ($0 < a < 3$)라 하면

$$B(6-a, a^2-6a)$$

$y=x^2-6x$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=3$

$$\therefore \overline{AB}=6-2a, \overline{AD}=-a^2+6a$$

직사각형 $ABCD$ 의 둘레의 길이는

$$2\{(6-2a)+(-a^2+6a)\}=-2a^2+8a+12$$

$$=-2(a-2)^2+20$$

이때 $0 < a < 3$ 이므로 $a=2$ 일 때 최댓값은 20이다.

따라서 직사각형 $ABCD$ 의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다.

답 ③

53 $h=-5t^2+3t+1=-5\left(t-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{29}{20}$

따라서 $t=\frac{3}{10}$ 일 때 최댓값은 $\frac{29}{20}$ 이므로 구하는 높이는 $\frac{29}{20}$ m

다.

답 $\frac{29}{20}$ m

54 자두 한 개의 가격이 $(500-x)$ 원일 때 하루 판매량은 $(100+x)$ 개이므로 하루 판매액을 y 원이라 하면
 $y = (500-x)(100+x)$ (1개 가격) $\times$ (판매 개수)
 $= -x^2 + 400x + 50000$
 $= -(x-200)^2 + 90000$

따라서 $x=200$ 일 때 y 는 최대이고, 이때의 자두 한 개의 가격은 $500-200=300$ (원)이다. **답** 300원

55 텃밭의 세로의 길이를 x m라 하면 가로 길이는 $(16-2x)$ m이다.

변의 길이는 양수이므로 $0 < x < 8$

텃밭의 넓이는

$$x(16-2x) = -2x^2 + 16x$$

$$= -2(x-4)^2 + 32$$

이때 $0 < x < 8$ 이므로 $x=4$ 일 때 최댓값은 32이다.

따라서 텃밭의 넓이의 최댓값은 32m^2 이다. **답** ③

56 $\overline{AP} = \overline{CR} = x$, $\overline{BQ} = \overline{DS} = 2x$ 라 하면
 $\overline{BP} = \overline{DR} = 20-x$, $\overline{CQ} = \overline{AS} = 20-2x$

변의 길이는 양수이므로 $0 < x < 10$

□PQRS의 넓이는

$$20^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x(20-2x) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x(20-x)$$

$$= 4x^2 - 60x + 400$$

$$= 4\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + 175$$

이때 $0 < x < 10$ 이므로 $x = \frac{15}{2}$ 일 때 최솟값은 175이다.

따라서 □PQRS의 넓이의 최솟값은 175이다. **답** ④

57 $\overline{DG} = a$, $\overline{DE} = b$ 라 하면 $\triangle ABC \sim \triangle ADG$ (AA 답음)이므로

$$10 : a = 8 : (8-b), \quad 10(8-b) = 8a$$

$$8-b = \frac{4}{5}a \quad \therefore b = 8 - \frac{4}{5}a$$

변의 길이는 양수이므로 $0 < a < 10$

□DEFG의 넓이는

$$ab = a\left(8 - \frac{4}{5}a\right) = -\frac{4}{5}a^2 + 8a$$

$$= -\frac{4}{5}(a-5)^2 + 20$$

이때 $0 < a < 10$ 이므로 $a=5$ 일 때 최댓값은 20이다.

따라서 $a=5$ 일 때 $b=4$ 이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2(a+b) = 2 \cdot (5+4) = 18$$

→ ②

답 18

채점 기준	비율
① □DEFG의 넓이를 이차식으로 나타낼 수 있다.	60 %
② □DEFG의 넓이가 최대일 때, □DEFG의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	40 %

06 여러 가지 방정식

II. 방정식

개념정리

본책 66쪽

- | | | | |
|-------|-----------------|-----------------|------|
| ① a | ② $\frac{c}{a}$ | ③ $p-q\sqrt{m}$ | ④ 실수 |
| ⑤ 0 | ⑥ 1 | ⑦ v | ⑧ 0 |
| ⑨ 0 | | | |

B 유형 뽀개기

본책 67쪽

01 $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$ 에서

$$x^2(x+4) - (x+4) = 0$$

$$(x+4)(x^2-1) = 0$$

$$(x+4)(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 가장 큰 근은 1, 가장 작은 근은 -4이므로

$$\alpha = 1, \beta = -4$$

$$\therefore \alpha - \beta = 5$$

답 ⑤

참고 공통인수로 묶어 인수분해할 때에는 먼저 공통인수가 나오도록 식을 변형한다.

02 $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ 라 하면

$$P(1) = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$P(x) = (x-1)(x^2-2x+2)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x-1)(x^2-2x+2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 1 \pm i$$

즉 $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ ($\because \gamma > 0$)이므로

$$\alpha - 2\beta + \gamma = 0$$

답 0

채점 기준	비율
① 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	60 %
② α, β, γ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $\alpha - 2\beta + \gamma$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

B 유형

인수 정리

다항식 $P(x)$ 에 대하여

① $P(a) = 0$ 이면 $P(x)$ 는 일차식 $x-a$ 로 나누어떨어진다.

② $P(x)$ 가 일차식 $x-a$ 로 나누어떨어지면 $P(a) = 0$ 이다.

03 $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6$ 이라 하면

$$P(-1) = 1 - 1 - 1 + 7 - 6 = 0,$$

$$P(2) = 16 + 8 - 4 - 14 - 6 = 0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\ & & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ & & 2 & 4 & 6 & \\ & 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x+1)(x-2)(x^2+2x+3)$$

따라서 방정식 $P(x)=0$ 의 근은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{2}i$$

이므로 모든 실근의 합은 $-1+2=1$

답 ④

04 $P(x) = x^4 - 8x^2 - 8x + 15$ 라 하면

$$P(1) = 1 - 8 - 8 + 15 = 0,$$

$$P(3) = 81 - 72 - 24 + 15 = 0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -8 & -8 & 15 \\ & & 1 & 1 & -7 & -15 \\ 3 & 1 & 1 & -7 & -15 & 0 \\ & & 3 & 12 & 15 & \\ & 1 & 4 & 5 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-1)(x-3)(x^2+4x+5)$$

이때 방정식 $P(x)=0$ 의 두 허근 α, β 는 방정식 $x^2+4x+5=0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= (-4)^3 - 3 \cdot 5 \cdot (-4) = -4 \end{aligned}$$

답 -4

05 $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$ 이라 하면

$$P(1) = 1 + 6 + 7 - 6 - 8 = 0,$$

$$P(-1) = 1 - 6 + 7 + 6 - 8 = 0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 6 & 7 & -6 & -8 \\ & & 1 & 7 & 14 & 8 \\ -1 & 1 & 7 & 14 & 8 & 0 \\ & & -1 & -6 & -8 & \\ & 1 & 6 & 8 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x) &= (x-1)(x+1)(x^2+6x+8) \\ &= (x+4)(x+2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

따라서 방정식 $P(x)=0$ 의 근은

$$x = -4 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta) \\ &= (2+4) \cdot (2+2) \cdot (2+1) \cdot (2-1) \\ &= 72 \end{aligned}$$

답 72

다른 풀이 사차방정식 $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8 = 0$ 의 네 근이 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 이므로

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

위의 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta) = 16 + 48 + 28 - 12 - 8 = 72$$

06 $x^2 + 2x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2 - 11X + 24 = 0, \quad (X-3)(X-8) = 0$$

$$\therefore X = 3 \text{ 또는 } X = 8$$

(i) $X=3$ 일 때, $x^2+2x-3=0$ 에서

$$(x+3)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

(ii) $X=8$ 일 때, $x^2+2x-8=0$ 에서

$$(x+4)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$$x = -4 \text{ 또는 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| = |-4| + |-3| + |1| + |2|$$

$$= 10$$

답 10

07 $x^2 - x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$(X+2)^2 - 7X - 8 = 0, \quad X^2 - 3X - 4 = 0$$

$$(X+1)(X-4) = 0$$

$$\therefore X = -1 \text{ 또는 } X = 4$$

(i) $X=-1$ 일 때, $x^2-x+1=0$ 이므로 이 방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=4$ 일 때, $x^2-x-4=0$ 이므로 이 방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 17 > 0$$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2-x-4=0$ 의 근이고 두 허근은 방정식 $x^2-x+1=0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = -4, b = 1$$

$$\therefore b - a = 5$$

답 5

08 $x^2 - 5x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$(X+14)(X-1) + 56 = 0, \quad X^2 + 13X + 42 = 0$$

$$(X+7)(X+6) = 0$$

$$\therefore X = -7 \text{ 또는 } X = -6$$

→ ①

(i) $X=-7$ 일 때, $x^2-5x+7=0$ 이므로 이 방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -3 < 0$$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

→ ②

(ii) $X=-6$ 일 때, $x^2-5x+6=0$ 이므로 이 방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0$$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

→ ③

(i), (ii)에서 α, β 는 이차방정식 $x^2-5x+7=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = 7$$

또 $\bar{\alpha} = \beta, \bar{\beta} = \alpha$ 이므로

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 2\alpha\beta = 14$$

계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 α 이면 $\bar{\alpha}$ 도 근이므로 α 와 β 는 서로 켤레복소수이다.

→ ④

답 14

채점 기준	비율
① $x^2-5x=X$ 로 놓고 X 에 대한 이차방정식을 풀 수 있다.	30 %
② $X=-7$ 일 때 근을 판별할 수 있다.	20 %
③ $X=-6$ 일 때 근을 판별할 수 있다.	20 %
④ $\alpha\alpha+\beta\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

09 $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-14=0$ 에서
 $\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}-14=0$
 $(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)-14=0$ 공통부분이 생기도록 두 개씩
 짝을 지어 곱한다.

이때 $x^2+2x=X$ 로 놓으면

$$(X-3)(X-8)-14=0, \quad X^2-11X+10=0$$

$$(X-1)(X-10)=0$$

$$\therefore X=1 \text{ 또는 } X=10$$

(i) $X=1$ 일 때, $x^2+2x-1=0$ 이고 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 -1

(ii) $X=10$ 일 때, $x^2+2x-10=0$ 이고 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 -10

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$$-1 \cdot (-10) = 10$$

답 ④

B **Tip**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 는 실수)에서 $ac < 0$ 이면
 $b^2-4ac > 0$
 이므로 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

10 $x^2=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2-13X+36=0, \quad (X-4)(X-9)=0$$

$$\therefore X=4 \text{ 또는 } X=9$$

즉 $x^2=4$ 또는 $x^2=9$ 이므로

$$x=\pm 2 \text{ 또는 } x=\pm 3$$

이때 $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ 이므로

$$\alpha=-3, \beta=-2, \gamma=2, \delta=3$$

$$\therefore \alpha\beta+\gamma\delta=-3 \cdot (-2)+2 \cdot 3=12$$

답 12

11 $x^2=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2+3X-18=0, \quad (X+6)(X-3)=0$$

$$\therefore X=-6 \text{ 또는 } X=3$$

즉 $x^2=-6$ 또는 $x^2=3$ 이므로

$$x=\pm\sqrt{6}i \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{3}$$

따라서 주어진 방정식의 허근은 $\pm\sqrt{6}i$ 이므로 두 허근의 곱은

$$\sqrt{6}i \cdot (-\sqrt{6}i) = 6$$

답 ④

12 $x^4-3x^2+1=0$ 에서

$$(x^4-2x^2+1)-x^2=0, \quad (x^2-1)^2-x^2=0$$

$$(x^2+x-1)(x^2-x-1)=0$$

$$x^2+x-1=0 \text{ 또는 } x^2-x-1=0$$

$$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

→ ①

따라서 주어진 방정식의 양의 근은 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이므로 구하는 합은

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

→ ②

답 $\sqrt{5}$

채점 기준	비율
① 사차방정식을 풀 수 있다.	70 %
② 모든 양의 근의 합을 구할 수 있다.	30 %

13 $x^4+6x^2+25=0$ 에서

$$(x^4+10x^2+25)-4x^2=0, \quad (x^2+5)^2-(2x)^2=0$$

$$(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)=0$$

$$x^2+2x+5=0 \text{ 또는 } x^2-2x+5=0$$

방정식 $x^2+2x+5=0$ 의 두 근을 α, β , 방정식 $x^2-2x+5=0$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=5, \gamma+\delta=2, \gamma\delta=5$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + \frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$

$$= \frac{-2}{5} + \frac{2}{5} = 0$$

답 0

14 $x^2=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2-(2a+5)X+a^2+5a=0$$

$$X^2-(2a+5)X+a(a+5)=0$$

$$(X-a)\{X-(a+5)\}=0$$

$$\therefore X=a \text{ 또는 } X=a+5, \text{ 즉 } x^2=a \text{ 또는 } x^2=a+5$$

$a < 0$ 이므로 방정식 $x^2=a$ 는 서로 다른 두 허근을 갖는다.

즉 방정식 $x^2=a+5$ 가 실근을 가지야 하므로 $a+5 \geq 0$ 이고 주어진 사차방정식의 실근은

$$x=\pm\sqrt{a+5}$$

이때 모든 실근의 곱이 -2 이므로

$$\sqrt{a+5} \cdot (-\sqrt{a+5}) = -2$$

$$a+5=2 \quad \therefore a=-3$$

따라서 $x^2=-3$ 에서 주어진 사차방정식의 허근은

$$x=\pm\sqrt{3}i$$

이므로 모든 허근의 곱은

$$\sqrt{3}i \cdot (-\sqrt{3}i) = 3$$

답 3

15 방정식 $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0, \quad x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$ 로 놓으면

$$X^2-2X-3=0, \quad (X+1)(X-3)=0$$

$$\therefore X=-1 \text{ 또는 } X=3$$

(i) $X=-1$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=-1$ 에서

$$x^2+x+1=0 \quad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(ii) $X=3$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=3$ 에서

$$x^2-3x+1=0 \quad \therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 이다.

답 ④

16 방정식 $x^4-7x^3+12x^2-7x+1=0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2-7x+12-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=k$ 이므로 모든 k 의 값의 곱은 이차방정식

$$k^2-7k+10=0$$

의 두 근의 곱과 같다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은 10이다.

답 10

17 방정식 $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+3x-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$ 로 놓으면

$$X^2+3X-4=0, \quad (X+4)(X-1)=0$$

$$\therefore X=-4 \text{ 또는 } X=1$$

... ①

(i) $X=-4$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=-4$ 에서 $x^2+4x+1=0$

이 방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=2^2-1\cdot 1=3>0$$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

... ②

(ii) $X=1$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=1$ 에서 $x^2-x+1=0$

이 방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

... ③

(i), (ii)에서 a 는 방정식 $x^2+4x+1=0$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-4$ 의 한 실근이므로

$$a+\frac{1}{a}=-4$$

... ④

답 -4

채점 기준	비율
① $x+\frac{1}{x}=X$ 로 놓고 X 에 대한 이차방정식을 풀 수 있다.	40%
② $X=-4$ 일 때 근을 판별할 수 있다.	20%
③ $X=1$ 일 때 근을 판별할 수 있다.	20%
④ $a+\frac{1}{a}$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

18 방정식 $x^3+kx^2+(2-k)x+6=0$ 의 한 근이 2이므로

$$8+4k+2(2-k)+6=0$$

$$2k+18=0 \quad \therefore k=-9$$

즉 주어진 방정식은 $x^3-9x^2+11x+6=0$ 이므로

$$P(x)=x^3-9x^2+11x+6$$

$$P(2)=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수

분해하면

$$P(x)=(x-2)(x^2-7x-3)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2-7x-3)=0$$

이때 α, β 는 이차방정식 $x^2-7x-3=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=7, \alpha\beta=-3$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7^2-2\cdot(-3)=55$$

답 ③

19 주어진 방정식의 두 근이 -3, 1이므로

$$-27+9a-18+3b+3+b=0$$

$$9a+4b=42$$

..... ㉠

$$1+a-2-b-1+b=0 \text{에서} \quad a=2$$

$$a=2 \text{를 ㉠에 대입하면} \quad b=6$$

즉 주어진 방정식은 $x^3-7x+6=0$ 이므로 $P(x)=x^3-7x+6$ 이라 하면

$$P(-3)=0, P(1)=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인

수분해하면

$$P(x)=(x+3)(x-1)(x-2)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+3)(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$$\text{즉 } k=2 \text{이므로} \quad a+b+k=10$$

답 10

20 주어진 방정식의 두 근이 -1, 1이므로

$$1-a-7-1+b=0$$

$$a-b=-7$$

..... ㉠

$$1+a-7+1+b=0$$

$$a+b=5$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=6$$

... ①

즉 주어진 방정식은 $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$ 이므로

$$P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$$

$$P(-1)=0, P(1)=0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & -1 & 2 & 5 & -6 \\ \hline 1 & 1 & -2 & -5 & 6 & 0 \\ & & 1 & -1 & -6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x) = (x+1)(x-1)(x^2-x-6)$
 따라서 주어진 방정식은
 $(x+1)(x-1)(x^2-x-6) = 0$
 $(x+1)(x-1)(x+2)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 3$... ②
 즉 나머지 두 근은 $-2, 3$ 이므로
 $|\alpha| + |\beta| = |-2| + |3| = 5$... ③

답 5

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 주어진 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
③ $ \alpha + \beta $ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

21 주어진 삼차방정식의 한 근이 α 이므로
 $aa^3 + ba^2 + ca + d = 0$ ①

ㄱ. ①의 양변에 -1 을 곱하면
 $-aa^3 - ba^2 - ca - d = 0$
 $\therefore a(-a)^3 - b(-a)^2 + c(-a) - d = 0$
 따라서 $-a$ 는 $ax^3 - bx^2 + cx - d = 0$ 의 근이다.

ㄴ. ①의 양변을 a^3 으로 나누면
 $a + \frac{b}{a} + \frac{c}{a^2} + \frac{d}{a^3} = 0$
 $\therefore d\left(\frac{1}{a}\right)^3 + c\left(\frac{1}{a}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{a} + a = 0$

따라서 $\frac{1}{a}$ 은 $dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ 의 근이다.

ㄷ. ①의 양변을 $-a^3$ 으로 나누면
 $-a - \frac{b}{a} - \frac{c}{a^2} - \frac{d}{a^3} = 0$
 $\therefore d\left(-\frac{1}{a}\right)^3 - c\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{a}\right) - a = 0$

따라서 $-\frac{1}{a}$ 은 $dx^3 - cx^2 + bx - a = 0$ 의 근이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

22 $P(x) = x^3 + (3-k)x^2 + kx - 4$ 라 하면
 $P(1) = 1 + 3 - k + k - 4 = 0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3-k & k & -4 \\ & & 1 & 4-k & 4 \\ \hline & 1 & 4-k & 4 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-1)\{x^2 + (4-k)x + 4\}$$

이때 방정식 $P(x) = 0$ 이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2 + (4-k)x + 4 = 0$ 이 $x = 1$ 을 근으로 갖는 경우

$$1 + 4 - k + 4 = 0 \quad \therefore k = 9$$

(ii) 방정식 $x^2 + (4-k)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (4-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

$$k^2 - 8k = 0, \quad k(k-8) = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 8$$

(i), (ii)에서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$9 + 0 + 8 = 17$$

답 17

23 $P(x) = 2x^3 + (k-1)x + k + 1$ 이라 하면

$$P(-1) = -2 - k + 1 + k + 1 = 0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 0 & k-1 & k+1 \\ & & -2 & 2 & -k-1 \\ \hline & 2 & -2 & k+1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x+1)(2x^2 - 2x + k + 1)$$

이때 방정식 $P(x) = 0$ 의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $2x^2 - 2x + k + 1 = 0$ 이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2(k+1) \geq 0$$

$$-1 - 2k \geq 0 \quad \therefore k \leq -\frac{1}{2}$$

따라서 실수 k 의 값이 될 수 있는 것은 ①이다.

답 ①

24 $x^3 + 2x^2 - 2kx - 4k = 0$ 에서

$$x^2(x+2) - 2k(x+2) = 0$$

$$\therefore (x+2)(x^2 - 2k) = 0$$
 ... ①

이때 주어진 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2 - 2k = 0$ 이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2k) < 0$$

$$\therefore k < 0$$
 ... ②

따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다.

... ③

답 -1

채점 기준	비율
① 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	30 %
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ 정수 k 의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $x^2 - 2k = 0$ 에서 $x^2 = 2k$

이 방정식이 두 개의 허근을 가지려면

$$2k < 0 \quad \therefore k < 0$$

25 $P(x) = x^3 - 3x^2 + (k+1)x - k + 1$ 이라 하면

$$P(1) = 1 - 3 + k + 1 - k + 1 = 0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & k+1 & -k+1 \\ & & 1 & -2 & k-1 \\ \hline & 1 & -2 & k-1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-1)(x^2 - 2x + k - 1)$$

이때 방정식 $P(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2 - 2x + k - 1 = 0$ 은 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (k-1) > 0, \quad 2 - k > 0 \quad \therefore k < 2$$

또 $1-2+k-1 \neq 0$ 이어야 하므로 $k \neq 2$

$$\therefore k < 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$ 의 두 실근을 α, β ($0 < \alpha < \beta$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\alpha\beta = k-1$$

1, α, β 가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되려면

(i) 빗변의 길이가 1인 경우

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{이므로} \quad (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1$$

$$2^2 - 2(k-1) = 1, \quad 2k = 5 \quad \therefore k = \frac{5}{2}$$

그런데 $\textcircled{7}$ 이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 빗변의 길이가 β 인 경우

$$1 + \alpha^2 = \beta^2 \text{이므로} \quad \beta^2 - \alpha^2 = 1$$

$$(\beta + \alpha)(\beta - \alpha) = 1, \quad 2(\beta - \alpha) = 1$$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{8}, \textcircled{9} \text{을 연립하여 풀면} \quad \alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{5}{4}$$

$$\therefore k = \alpha\beta + 1 = \frac{31}{16}$$

$$(i), (ii) \text{에서} \quad k = \frac{31}{16} \quad \text{답} \quad \frac{31}{16}$$

참고 1, α, β 가 직각삼각형의 세 변의 길이이고 $\alpha < \beta$ 일 때 $\alpha + \beta = 20$ 이면

$$2 - \beta < \beta \quad \therefore \beta > 1$$

따라서 빗변의 길이는 β 이다.

26 삼차방정식 $x^3 - x^2 + 5x + 2 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 5, \alpha\beta\gamma = -2$$

$$\therefore (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

$$= (1 - \gamma)(1 - \alpha)(1 - \beta)$$

$$= 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$$

$$= 1 - 1 + 5 - (-2) = 7 \quad \text{답} \quad \textcircled{4}$$

27 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + ax - 4 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a, \alpha\beta\gamma = 4$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{5}{2} \text{에서} \quad \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{5}{2} \quad \therefore a = 10 \quad \text{답} \quad 10$$

28 $\alpha - 1 = \alpha', \beta + 1 = \beta', \gamma + 4 = \gamma'$ 이라 하면 삼차방정식 $x^3 + 4x^2 - 7x + 1 = 0$ 의 세 근이 α', β', γ' 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = -4, \alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' = -7, \alpha'\beta'\gamma' = -1$$

$$\therefore (\alpha - 3)(\beta - 1)(\gamma + 2)$$

$$= (\alpha' - 2)(\beta' - 2)(\gamma' - 2)$$

$$= \alpha'\beta'\gamma' - 2(\alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha') + 4(\alpha' + \beta' + \gamma') - 8$$

$$= -1 - 2 \cdot (-7) + 4 \cdot (-4) - 8 = -11 \quad \text{답} \quad \textcircled{5}$$

29 주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 3, \quad 6\alpha = 3 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

따라서 세 근이 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = a, \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = -b$$

$$\therefore a = \frac{11}{4}, b = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore a - b = \frac{7}{2}$$

$$\text{답} \quad \frac{7}{2}$$

30 주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha, \alpha + 2, \beta$ (α, β 는 정수)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha + 2) + \beta = 2 \quad \therefore \beta = -2\alpha \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\alpha \cdot (\alpha + 2) + (\alpha + 2) \cdot \beta + \beta \cdot \alpha = -5$$

$$\therefore \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta = -5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\alpha \cdot (\alpha + 2) \cdot \beta = -k \quad \therefore k = -\alpha^2\beta - 2\alpha\beta \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{7}$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$\alpha^2 + 2\alpha \cdot (-2\alpha) + 2\alpha + 2 \cdot (-2\alpha) = -5$$

$$3\alpha^2 + 2\alpha - 5 = 0, \quad (3\alpha + 5)(\alpha - 1) = 0$$

$$\therefore \alpha = 1 \quad (\because \alpha \text{는 정수})$$

$$\therefore \beta = -2 \cdot 1 = -2$$

$\alpha = 1, \beta = -2$ 를 $\textcircled{9}$ 에 대입하면

$$k = -1^2 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot (-2) = 6 \quad \text{답} \quad \textcircled{3}$$

31 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 4, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3, \alpha\beta\gamma = -1$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-3}{-1} = 3,$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{4}{-1} = -4,$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = -1$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{답} \quad x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

32 삼차방정식 $x^3 + 7x - 3 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 7, \alpha\beta\gamma = 3$$

$$\therefore (\alpha + 1) + (\beta + 1) + (\gamma + 1) = \alpha + \beta + \gamma + 3 = 3,$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) + (\beta + 1)(\gamma + 1) + (\gamma + 1)(\alpha + 1)$$

$$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 2(\alpha + \beta + \gamma) + 3$$

$$= 7 + 2 \cdot 0 + 3 = 10,$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$$

$$= \alpha\beta\gamma + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1$$

$$= 3 + 7 + 0 + 1 = 11$$

따라서 $\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1$ 을 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3 - 3x^2 + 10x - 11 = 0$ 이므로

$$a=-3, b=10, c=-11$$

$$\therefore a+b-c=18$$

답 18

33 $P(-1)=P(3)=P(5)=-2$ 에서

$$P(-1)+2=P(3)+2=P(5)+2=0$$

이므로 삼차방정식 $P(x)+2=0$ 의 세 근이 $-1, 3, 5$ 이다. ... ①

이때 $-1, 3, 5$ 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3 - (-1+3+5)x^2 + \{-1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-1)\}x$$

$$- (-1) \cdot 3 \cdot 5$$

$$=0$$

$$\therefore x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$$

... ②

즉 $P(x)+2=x^3-7x^2+7x+15$ 이므로

$$P(x)=x^3-7x^2+7x+13$$

... ③

$$\therefore P(1)=14$$

... ④

답 14

채점 기준	비율
① 방정식 $P(x)+2=0$ 의 세 근을 구할 수 있다.	30 %
② $-1, 3, 5$ 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식을 구할 수 있다.	30 %
③ $P(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
④ $P(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

34 주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 $2+\sqrt{3}$ 이 근이면 $2-\sqrt{3}$ 도 근이다. 나머지 한 근을 a 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = -a,$$

$$a(2+\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) + a(2-\sqrt{3}) = b,$$

$$a(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = -2$$

이므로

$$a+4=-a, 4a+1=b, a=-2$$

따라서 $a=-2, b=-7$ 이므로

$$ab=14$$

답 ③

다른 풀이 $x^3+ax^2+bx+2=0$ 의 한 근이 $2+\sqrt{3}$ 이므로

$$(2+\sqrt{3})^3 + a(2+\sqrt{3})^2 + b(2+\sqrt{3}) + 2 = 0$$

$$26 + 15\sqrt{3} + a(7 + 4\sqrt{3}) + 2b + \sqrt{3}b + 2 = 0$$

$$(28 + 7a + 2b) + (15 + 4a + b)\sqrt{3} = 0$$

곱셈 공식
(a+b)³
= a³ + 3a²b + 3ab² + b³
을 이용한다.

무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$28 + 7a + 2b = 0, 15 + 4a + b = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=-7$

▶ B ▶

무리수가 서로 같을 조건

a, b, c, d 가 유리수이고 $\sqrt{m}, \sqrt{n}$ 이 무리수일 때

$$\textcircled{1} a + b\sqrt{m} = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$$

$$\textcircled{2} a + b\sqrt{m} = c + d\sqrt{n} \Rightarrow a = c, b = d$$

$$\textcircled{3} a + \sqrt{m} = b + \sqrt{n} \Rightarrow a = b, m = n$$

35 주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 $1+i$ 가 근이면 $1-i$ 도 근이다. 나머지 한 근을 a 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a(1+i)(1-i)=4 \quad \therefore a=2$$

따라서 2가 주어진 방정식의 근이므로

$$8 + 4a + 2b - 4 = 0, \quad 4a + 2b = -4$$

$$\therefore 2a + b = -2$$

답 -2

36 주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 $1-\sqrt{2}$ 가 근이면 $1+\sqrt{2}$ 도 근이다. ... ①

주어진 방정식의 세 근이 $3, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3 + (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = -\frac{b}{a},$$

$$3 \cdot (1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) \cdot 3 = \frac{c}{a},$$

$$3 \cdot (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -\frac{3}{a}$$

따라서 $-\frac{b}{a}=5, \frac{c}{a}=5, -\frac{3}{a}=-3$ 이므로

$$a=1, b=-5, c=5$$

... ②

$$\therefore a+b+c=1$$

... ③

답 1

채점 기준	비율
① $1+\sqrt{2}$ 도 주어진 방정식의 근임을 알 수 있다.	30 %
② a, b, c 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $a+b+c$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

37 주어진 사차방정식은 계수가 모두 실수이고 두 근이 $-3i, 2+i$ 이므로 나머지 두 근은 $3i, 2-i$ 이다.

이때 $3i, -3i, 2-i, 2+i$ 를 네 근으로 하고 x^4 의 계수가 1인 사차방정식은

$$(x-3i)(x+3i)\{x-(2-i)\}\{x-(2+i)\}=0$$

$$(x^2+9)(x^2-4x+5)=0$$

$$\therefore x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 36x + 45 = 0$$

따라서 $a=-4, b=14, c=-36, d=45$ 이므로

$$a+b+c+d=19$$

답 19

38 주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 $3+2\sqrt{2}i$ 가 근이면 $3-2\sqrt{2}i$ 도 근이다.

이때 $(3+2\sqrt{2}i)(3-2\sqrt{2}i)=17 \neq 12$ 이므로 $3+2\sqrt{2}i, 3-2\sqrt{2}i$ 는 이차방정식 $x^2+ax+12=0$ 의 두 근이 될 수 없다.

이차방정식 $x^2+ax+12=0$ 의 나머지 한 근을 n 이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m+n=-a,$$

$$mn=12$$

..... ①

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3+2\sqrt{2}i) + (3-2\sqrt{2}i) + m = -a$$

$$\therefore 6+m=-a$$

따라서 $m+n=6+m$ 이므로 $n=6$

①에서 $6m=12$ 이므로

$$m=2$$

답 ②

39 $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면

$$-\alpha^2 = -(a+bi)^2 = (b^2 - a^2) - 2abi$$

이때 주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 $a+bi$ 가 근이면 $a-bi$ 도 근이다.

$$\text{즉 } -\alpha^2 = a - bi \text{ 이므로}$$

$$(b^2 - a^2) - 2abi = a - bi$$

복소수가 서로 같은 조건에 의하여

$$b^2 - a^2 = a, 2ab = b$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because b \neq 0), b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

나머지 한 실근을 k 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$k + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 6$$

$$k + 1 = 6 \quad \therefore k = 5$$

따라서

$$5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot 5$$

$$= p,$$

$$5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -q$$

$$\text{이므로 } p = 6, q = -5$$

$$\therefore pq = -30$$

답 -30

40 $x^3 = 1$ 에서 $x^3 - 1 = 0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ 이므로 ω 는 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이고, 방정식의 계수가 모두 실수이므로 ω 의 켤레복소수인 $\bar{\omega}$ 도 $x^2+x+1=0$ 의 근이다.

$$\therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0, \bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0, \omega^3 = 1, \bar{\omega}^3 = 1$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3} + \dots + \frac{1}{\omega^{20}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right) + \frac{1}{\omega^3} \left(1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right) \\ & \quad + \dots + \frac{1}{\omega^{18}} \left(1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore & (1+\bar{\omega})(1+\bar{\omega}^2)(1+\bar{\omega}^3)(1+\bar{\omega}^4)(1+\bar{\omega}^5) \\ &= (1+\bar{\omega})(1+\bar{\omega}^2)(1+1)(1+\bar{\omega})(1+\bar{\omega}^2) \\ &= 2(1+\bar{\omega})^2(1+\bar{\omega}^2)^2 \\ &= 2(-\bar{\omega}^2)^2(-\bar{\omega})^2 \\ &= 2\bar{\omega}^6 = 2(\bar{\omega}^3)^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{1}{\omega+1} + \frac{1}{\omega^2+1} + \frac{1}{\omega^3+1} = \frac{1}{-\omega^2} + \frac{1}{-\omega} + \frac{1}{1+1} \\ &= -\frac{1+\omega}{\omega^2} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{-\omega^2}{\omega^2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1+\omega^2}{\omega} + \frac{1+\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2} = \frac{-\omega}{\omega} + \frac{-\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}^2} = -2$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

41 $x^3 = -1$ 에서 $x^3 + 1 = 0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1) = 0$ 이므로 ω 는 $x^2-x+1=0$ 의 한 허근이다.

따라서 $\omega^2 - \omega + 1 = 0$ 이므로

$$\omega^2 = \omega - 1$$

$$\therefore \frac{\omega}{\omega-1} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega}{\omega-1} - \frac{1}{\omega-1} = \frac{\omega-1}{\omega-1} = 1$$

답 1

$$42 \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{에서} \quad 2\omega + 1 = \sqrt{3}i$$

$$\text{양변을 제곱하면} \quad 4\omega^2 + 4\omega + 1 = -3$$

$$4\omega^2 + 4\omega + 4 = 0 \quad \therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$\text{양변에 } \omega - 1 \text{을 곱하면} \quad (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$$\omega^3 - 1 = 0 \quad \therefore \omega^3 = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \omega^{1000} + \frac{1}{\omega^{1000}} &= (\omega^3)^{333} \cdot \omega + \frac{1}{(\omega^3)^{333} \cdot \omega} = \omega + \frac{1}{\omega} \\ &= \frac{\omega^2 + 1}{\omega} = \frac{-\omega}{\omega} = -1 \end{aligned}$$

답 ②

43 $x^3 + 1 = 0$ 에서 $(x+1)(x^2-x+1) = 0$ 이므로 ω 는 $x^2-x+1=0$ 의 한 허근이고, ω 의 켤레복소수인 $\bar{\omega}$ 도 $x^2-x+1=0$ 의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = 1, \omega\bar{\omega} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{(2\omega-1)(2\bar{\omega}-1)}{(\omega+1)(\bar{\omega}+1)} &= \frac{(2\omega-1)(2\bar{\omega}-1)}{(\omega+1)(\omega+1)} \\ &= \frac{4\omega\bar{\omega} - 2(\omega+\bar{\omega}) + 1}{\omega\bar{\omega} + (\omega+\bar{\omega}) + 1} \\ &= \frac{4-2+1}{1+1+1} = 1 \end{aligned}$$

답 ①

결론 B

켤레복소수의 성질

두 복소수 z_1, z_2 의 켤레복소수를 각각 $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ 라 할 때

$$\textcircled{1} \quad z_1 + z_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\textcircled{2} \quad z_1 - z_2 = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\textcircled{3} \quad z_1 z_2 = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\textcircled{4} \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (\text{단, } z_2 \neq 0)$$

44 $x^3 = 1$ 에서 $x^3 - 1 = 0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ 이므로 ω 는 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이고, ω 의 켤레복소수인 $\bar{\omega}$ 도 $x^2+x+1=0$ 의 근이다.

$$\therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1, \omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1$$

$$(-\omega-1)^n = \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega+\omega}\right)^n \text{에서}$$

$$(-\omega-1)^n = (\omega^2)^n = \omega^{2n},$$

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega+\omega}\right)^n = (-\bar{\omega})^n = \left(-\frac{1}{\omega}\right)^n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\omega^n}$$

$$\text{이므로 } \omega^{2n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{\omega^n} \quad \omega\bar{\omega} = 1 \text{에서 } \bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$$

$$\text{양변에 } \omega^n \text{을 곱하면 } \omega^{3n} = (-1)^n$$

$$(\omega^3)^n = (-1)^n \quad \therefore (-1)^n = 1$$

따라서 자연수 n 은 짝수이어야 하므로 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n 의 개수는 50이다.

답 ③

다른 풀이 $\omega + \bar{\omega} = -1$ 이므로 $(-\omega - 1)^n = \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega + \bar{\omega}}\right)^n$ 에서
 $\bar{\omega}^n = (-\bar{\omega})^n$, $\bar{\omega}^n = (-1)^n \cdot \bar{\omega}^n$
 $\therefore (-1)^n = 1 (\because \bar{\omega} \neq 0)$

45 $x^3=1$ 에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$ 이므로 ω 는 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이다.

$\therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$ → ①
 이때

$$f(1) = \frac{1+\omega}{1+\omega} = 1,$$

$$f(2) = \frac{1+\omega+\omega^2}{1+\omega^2} = 0,$$

$$f(3) = \frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3}{1+\omega^3} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$$f(4) = \frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4}{1+\omega^4} = \frac{1+\omega}{1+\omega} = f(1),$$

$$f(5) = \frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5}{1+\omega^5} = \frac{1+\omega+\omega^2}{1+\omega^2} = f(2),$$

$$f(6) = \frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6}{1+\omega^6} = \frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3}{1+\omega^3}$$

$$= f(3),$$

⋮

이므로

$$f(1) = f(4) = f(7) = \dots = f(34) = 1,$$

$$f(2) = f(5) = f(8) = \dots = f(35) = 0,$$

$$f(3) = f(6) = f(9) = \dots = f(36) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(36)$$

$$= \left(1 + 0 + \frac{1}{2}\right) \cdot 12 = 18$$

→ ②

→ ③

답 18

채점 기준	비율
① $\omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$ 임을 알 수 있다.	20 %
② $f(1), f(2), f(3), \dots, f(36)$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(36)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

46 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$$(x-1)(x+2)^2 = 196$$

$$x^3 + 3x^2 - 200 = 0$$

$$(x-5)(x^2 + 8x + 40) = 0$$

그런데 x 는 실수이므로 $x=5$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 5 cm이다.

답 ④

참고 $x^2 + 8x + 40 = (x+4)^2 + 24 > 0$

즉 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 8x + 40 \neq 0$ 이므로 $(x-5)(x^2 + 8x + 40) = 0$ 의 실근이 $x=5$ 임을 알 수도 있다.

47 그릇 A의 부피가 $\pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 108\pi$ (cm³)이므로

$$\pi x^2(x-3) = 108\pi$$

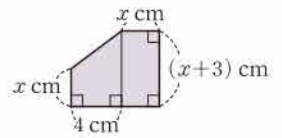
$$x^3 - 3x^2 - 108 = 0$$

$$(x-6)(x^2 + 3x + 18) = 0$$

그런데 x 는 실수이므로 $x=6$

답 6

48 밑면인 오각형은 오른쪽 그림과 같이 직사각형과 사다리꼴로 나눌 수 있으므로



(밑넓이)

$$= x(x+3) + \frac{1}{2} \cdot \{x + (x+3)\} \cdot 4$$

$$= x^2 + 3x + 2(2x+3)$$

$$= x^2 + 7x + 6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

이때 오각기둥의 높이는 $(x+2)$ cm이고, 부피가 180 cm³이므로

$$(x^2 + 7x + 6)(x+2) = 180$$

$$x^3 + 9x^2 + 20x - 168 = 0$$

$$(x-3)(x^2 + 12x + 56) = 0$$

그런데 x 는 실수이므로 $x=3$

답 3

49 $\overline{CD}$ 의 길이가 $\overline{AB}$ 의 길이의 4배이므로 $\overline{CD} = 4x$

오른쪽 그림과 같이 반원 O와 $\overline{AD}$ 의 점

점을 E라 하면

$$\overline{AE} = \overline{AB} = x, \overline{DE} = \overline{CD} = 4x$$

$$\therefore \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{DE} = 5x$$

점 A에서 $\overline{CD}$ 에 내린 수선의 발을 H라

하면

$$\overline{DH} = \overline{CD} - \overline{CH} = \overline{CD} - \overline{AB} = 3x$$

이므로 직각삼각형 AHD에서

$$\overline{AH} = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = 4x (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{AH} = 4x$$

→ ①

$$S = \frac{1}{2} \cdot (x + 4x) \cdot 4x = 10x^2 \text{이므로}$$

$$S^2 = 100x^4$$

→ ②

$$l = x + 4x + 4x + 5x = 14x \text{이므로}$$

$$l^2 = 196x^2$$

→ ③

$$S^2 - 2l^2 = 32 \text{에서}$$

$$100x^4 - 392x^2 = 32, \quad 25x^4 - 98x^2 - 8 = 0$$

이때 $x^2 = X$ 로 놓으면

$$25X^2 - 98X - 8 = 0$$

$$(25X+2)(X-4) = 0$$

$$\therefore X = -\frac{2}{25} \text{ 또는 } X = 4$$

그런데 $X > 0$ 이므로

$$X = 4 \quad \begin{matrix} x > 0 \text{이므로} \\ X = x^2 > 0 \end{matrix}$$

즉 $x^2 = 4$ 에서 $x = \pm 2$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$

→ ④

답 2

채점 기준	비율
① $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}$ 의 길이를 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② S^2 을 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
③ l^2 을 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
④ x 의 값을 구할 수 있다.	30 %

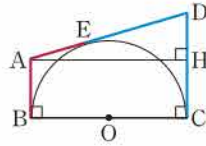
반원에서의 접선

AB, DC, AD가 각각 점 B, C, E에서 반원 O에 접할 때

① $AD = AE + DE = AB + DC$

② 점 A에서 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$BC = AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$



50 $\begin{cases} x-y=4 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$ ㉠
 ㉡
 ㉢

㉠에서 $y=x-4$
 ㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2 + (x-4)^2 = 40, \quad 2x^2 - 8x - 24 = 0$
 $x^2 - 4x - 12 = 0, \quad (x+2)(x-6) = 0$
 $\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 6$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x = -2, y = -6 \text{ 또는 } x = 6, y = 2$

$\therefore \alpha + \beta = -8 \text{ 또는 } \alpha + \beta = 8$

따라서 $\alpha + \beta$ 의 값이 될 수 있는 것은 ㉡이다. 답 ②

51 $\begin{cases} x-2y=1 \\ (x-1)^2+y^2=20 \end{cases}$ ㉠
 ㉡
 ㉢

㉠에서 $x-1=2y$
 ㉢을 ㉠에 대입하면

$4y^2 + y^2 = 20, \quad y^2 = 4$
 $\therefore y = \pm 2$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x = 5, y = 2 \text{ 또는 } x = -3, y = -2$

따라서 $\alpha = 5, \beta = 2$ 이므로

$\alpha\beta = 10$ 답 ③

52 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2+2xy-3y=1 \end{cases}$ ㉠
 ㉡
 ㉢

㉠에서 $y=1-2x$
 ㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2 + 2x(1-2x) - 3(1-2x) = 1$
 $3x^2 - 8x + 4 = 0, \quad (3x-2)(x-2) = 0$
 $\therefore x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x = \frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 2, y = -3$

$\therefore x-y=1 \text{ 또는 } x-y=5$

따라서 $x-y$ 의 최솟값은 1이다. 답 1

53 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-2xy=-8 \end{cases}$ ㉠
 ㉡

을 만족시킨다.

㉠에서 $y=x-1$

..... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2 - 2x(x-1) = -8, \quad x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x+2)(x-4) = 0$
 $\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 4$

이것을 ㉢에 대입하면 앞의 연립방정식의 해는

$x = -2, y = -3 \text{ 또는 } x = 4, y = 3$ → ①

(i) $x = -2, y = -3$ 을 $ax^2 + y^2 = 5, 4x + by = 1$ 에 각각 대입하면

$4a + 9 = 5, \quad -8 - 3b = 1$

$\therefore a = -1, b = -3$

(ii) $x = 4, y = 3$ 을 $ax^2 + y^2 = 5, 4x + by = 1$ 에 각각 대입하면

$16a + 9 = 5, \quad 16 + 3b = 1$

$\therefore a = -\frac{1}{4}, b = -5$

(i), (ii)에서 a, b 는 정수이므로

$a = -1, b = -3$ → ②

$\therefore a^2 + b^2 = 10$ → ③

답 10

채점 기준	비율
① 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-2xy=-8 \end{cases}$ 의 해를 구할 수 있다.	40 %
② 정수 a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a^2 + b^2$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

54 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + xy + 3y^2 = 15 \end{cases}$ ㉠
 ㉡

㉠에서 $(x-y)(x+y) = 0$

$\therefore y = x \text{ 또는 } y = -x$

(i) $y = x$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2 + x^2 + 3x^2 = 15, \quad x^2 = 3$

$\therefore x = \pm\sqrt{3}, y = \pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(ii) $y = -x$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2 - x^2 + 3x^2 = 15, \quad x^2 = 5$

$\therefore x = \pm\sqrt{5}, y = \mp\sqrt{5}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 해가 아닌 것은 ㉤이다. 답 ⑤

55 $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ ㉠
 ㉡

㉠에서 $(x+2y)(x-y) = 0$

$\therefore x = -2y \text{ 또는 } x = y$

(i) $x = -2y$ 를 ㉡에 대입하면

$4y^2 + y^2 = 20, \quad y^2 = 4$

$\therefore x = \pm 4, y = \mp 2$ (복호동순)

(ii) $x = y$ 를 ㉡에 대입하면

$y^2 + y^2 = 20, \quad y^2 = 10$

$\therefore x = \pm\sqrt{10}, y = \pm\sqrt{10}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 x, y 는 정수이므로

$x = \pm 4, y = \mp 2$ (복호동순)

$\therefore xy = -8$ 답 -8

56 $\begin{cases} 4x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ 2x^2 + 3xy + y^2 = 30 \end{cases}$ ㉠
 ㉡
 ㉠에서 $(4x-y)(x-y)=0$
 $\therefore y=4x$ 또는 $y=x$

(i) $y=4x$ 를 ㉡에 대입하면
 $2x^2 + 12x^2 + 16x^2 = 30, \quad x^2 = 1$
 $\therefore x = \pm 1, y = \pm 4$ (복호동순)
 $\therefore \alpha + \beta = 5$ 또는 $\alpha + \beta = -5$

(ii) $y=x$ 를 ㉡에 대입하면
 $2x^2 + 3x^2 + x^2 = 30, \quad x^2 = 5$
 $\therefore x = \pm\sqrt{5}, y = \pm\sqrt{5}$ (복호동순)
 $\therefore \alpha + \beta = 2\sqrt{5}$ 또는 $\alpha + \beta = -2\sqrt{5}$

(i), (ii)에서 $\alpha + \beta$ 의 최댓값은 5이다. 답 5

57 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은
 $\begin{cases} v-u=-1 \\ u^2-v=13 \end{cases}$ ㉠
 ㉡
 ㉠에서 $\frac{u^2-v=13}{v=u-1} \Rightarrow x^2+xy+y^2=\frac{(x+y)^2-xy}{=u^2-v}$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면
 $u^2 - (u-1) = 13, \quad u^2 - u - 12 = 0$
 $(u+3)(u-4) = 0$
 $\therefore u = -3$ 또는 $u = 4$

이것을 ㉡에 대입하면
 $u = -3, v = -4$ 또는 $u = 4, v = 3$
 (i) $u = -3, v = -4$, 즉 $x+y = -3, xy = -4$ 일 때,
 x, y 는 이차방정식 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 의 두 근이므로
 $(t+4)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -4$ 또는 $t = 1$
 $\therefore \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$

(ii) $u = 4, v = 3$, 즉 $x+y = 4, xy = 3$ 일 때,
 x, y 는 이차방정식 $t^2 - 4t + 3 = 0$ 의 두 근이므로
 $(t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 1$ 또는 $t = 3$
 $\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 는
 $(-4, 1), (1, -4), (1, 3), (3, 1)$
답 $(-4, 1), (1, -4), (1, 3), (3, 1)$

58 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은
 $\begin{cases} u^2 - 2v = 41 \\ v = 20 \end{cases}$ ㉠
 ㉡

㉢을 ㉡에 대입하면
 $u^2 - 40 = 41, \quad u^2 = 81 \quad \therefore u = \pm 9$ 1
 (i) $u = 9, v = 20$, 즉 $x+y = 9, xy = 20$ 일 때,
 x, y 는 이차방정식 $t^2 - 9t + 20 = 0$ 의 두 근이므로
 $(t-4)(t-5) = 0 \quad \therefore t = 4$ 또는 $t = 5$
 $\therefore \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ 2

(ii) $u = -9, v = 20$, 즉 $x+y = -9, xy = 20$ 일 때,
 x, y 는 이차방정식 $t^2 + 9t + 20 = 0$ 의 두 근이므로
 $(t+5)(t+4) = 0 \quad \therefore t = -5$ 또는 $t = -4$
 $\therefore \begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases}$ 3

(i), (ii)에서 구하는 해는
 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases}$ 4
 ㉢ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases}$

채점 기준	비율
1 $x+y=u, xy=v$ 로 놓고 u, v 의 값을 구할 수 있다.	30 %
2 $u=9, v=20$ 일 때 해를 구할 수 있다.	30 %
3 $u=-9, v=20$ 일 때 해를 구할 수 있다.	30 %
4 연립방정식의 해를 모두 구할 수 있다.	10 %

59 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은
 $\begin{cases} u+v=14 \\ uv=48 \end{cases}$ ㉠
 ㉡
 u, v 는 이차방정식 $s^2 - 14s + 48 = 0$ 의 두 근이므로
 $(s-6)(s-8) = 0 \quad \therefore s = 6$ 또는 $s = 8$
 $\therefore \begin{cases} u = 6 \\ v = 8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} u = 8 \\ v = 6 \end{cases}$

(i) $u = 6, v = 8$, 즉 $x+y = 6, xy = 8$ 일 때,
 x, y 는 이차방정식 $t^2 - 6t + 8 = 0$ 의 두 근이므로
 $(t-2)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 2$ 또는 $t = 4$
 $\therefore \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$
 $\therefore x-y = -2$ 또는 $x-y = 2$

(ii) $u = 8, v = 6$, 즉 $x+y = 8, xy = 6$ 일 때,
 x, y 는 이차방정식 $t^2 - 8t + 6 = 0$ 의 두 근이므로
 $t = 4 \pm \sqrt{10}$
 $\therefore \begin{cases} x = 4 - \sqrt{10} \\ y = 4 + \sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 4 + \sqrt{10} \\ y = 4 - \sqrt{10} \end{cases}$
 $\therefore x-y = -2\sqrt{10}$ 또는 $x-y = 2\sqrt{10}$

(i), (ii)에서 $x-y$ 의 최댓값은 $2\sqrt{10}$ 이다. 답 $2\sqrt{10}$

60 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 3x + y = k \end{cases}$ ㉠
 ㉡

㉢에서 $y = -3x + k$
 이것을 ㉡에 대입하면 $x^2 + (-3x+k)^2 = 10$
 $\therefore 10x^2 - 6kx + k^2 - 10 = 0$

이를 만족시키는 x 의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (-3k)^2 - 10(k^2 - 10) = 0$
 $9k^2 - 10k^2 + 100 = 0, \quad k^2 = 100$
 $\therefore k = \pm 10$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은
 $10 \cdot (-10) = -100$ 답 -100

61 $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x^2+xy+k=0 \end{cases}$ ㉠
 ㉡

㉠에서 $x=2y-1$

이것을 ㉡에 대입하면 $(2y-1)^2+(2y-1)y+k=0$

$\therefore 6y^2-5y+k+1=0$

이를 만족시키는 실수 y 의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$D=(-5)^2-4\cdot 6\cdot (k+1)\geq 0$

$1-24k\geq 0 \quad \therefore k\leq \frac{1}{24}$

따라서 정수 k 의 최댓값은 0이다.

답 0

62 주어진 연립방정식을 만족시키는 실수 x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2-(2a+1)t+a^2+2a-3=0$ 의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$D=\{-(2a+1)\}^2-4(a^2+2a-3)\geq 0$

$-4a+13\geq 0 \quad \therefore a\leq \frac{13}{4}$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$

답 6

63 처음 땅의 가로, 세로의 길이를 x km, y km라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=45 \\ (x-1)(y+1)=xy+2 \end{cases}$ ㉠
 ㉡

㉡에서 $xy+x-y-1=xy+2 \quad x-1>0$ 에서 $x>1$

$\therefore y=x-3$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(x-3)^2=45, \quad x^2-3x-18=0$

$(x+3)(x-6)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=6$

그런데 $1<x<3\sqrt{5}$ 이므로

$x=6$ x 는 대각선의 길이가 $3\sqrt{5}$ 인 직사각형의 한 변의 길이이므로 $x<3\sqrt{5}$

$x=6$ 을 ㉢에 대입하면 $y=3$

따라서 처음 땅의 넓이는

$6\cdot 3=18(\text{km}^2)$

답 ③

64 처음 수의 십의 자리의 숫자를 x , 일의 자리의 숫자를 y 라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=53 \\ (10y+x)+(10x+y)=99 \end{cases}$ ㉠
 ㉡

㉡에서 $11x+11y=99$ 처음 수

$\therefore y=9-x$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(9-x)^2=53, \quad x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=7$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=2, y=7$ 또는 $x=7, y=2$

그런데 $x>y$ 이므로 $x=7, y=2$

따라서 처음 수는 72이다.

..... ②

..... ③

답 72

채점 기준	비율
① 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
② 연립방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
③ 처음 수를 구할 수 있다.	10 %

65 직사각형의 이웃하는 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 직사각형의 대각선의 길이가 10 cm이고 둘레의 길이가 28 cm이므로

$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ 2(x+y)=28 \end{cases}$ ㉠

㉡에서 $y=14-x$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100, \quad x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0 \quad \therefore x=6$ 또는 $x=8$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=6, y=8$ 또는 $x=8, y=6$

따라서 직사각형의 이웃하는 두 변의 길이의 차는

$8-6=2(\text{cm})$

답 2 cm

66 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$, $\overline{GH}$ 를 각각 연장한 직선의 교점을 K 라 하고, $\overline{ID}=x$, $\overline{DJ}=y$ 라 하면

$\overline{BK}=12-x, \overline{HK}=12-y$

이므로

$\begin{cases} 2(x+y)=12 \\ (12-x)^2+(12-y)^2=164 \end{cases}$ ㉠

㉠에서 $\overline{BK}^2+\overline{HK}^2=\overline{BH}^2$ ㉢

$y=6-x$ ㉣

㉣을 ㉡에 대입하면

$(12-x)^2+\{12-(6-x)\}^2=164$

$x^2-6x+8=0, \quad (x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

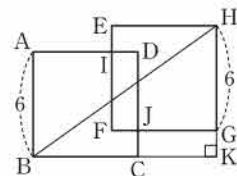
이것을 ㉣에 대입하면

$x=2, y=4$ 또는 $x=4, y=2$

그런데 $x<y$ 이므로 $x=2, y=4$

$\therefore \overline{ID}=2$

답 2



67 $xy-3x+y-12=0$ 에서

$x(y-3)+(y-3)-9=0$

$\therefore (x+1)(y-3)=9$

이때 x, y 가 정수이므로 $x+1, y-3$ 도 정수이다.

(i) $x+1=-9, y-3=-1$ 일 때,

$x=-10, y=2 \quad \therefore xy=-20$

(ii) $x+1=-3, y-3=-3$ 일 때,

$x=-4, y=0 \quad \therefore xy=0$

(iii) $x+1=-1, y-3=-9$ 일 때,

$x=-2, y=-6 \quad \therefore xy=12$

(iv) $x+1=1, y-3=9$ 일 때,

$x=0, y=12 \quad \therefore xy=0$

- (v) $x+1=3, y-3=3$ 일 때,
 $x=2, y=6 \quad \therefore xy=12$
 (vi) $x+1=9, y-3=1$ 일 때,
 $x=8, y=4 \quad \therefore xy=32$
 이상에서 xy 의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

- 68 $xy-2x-y-3=0$ 에서
 $x(y-2)-(y-2)-5=0$
 $\therefore (x-1)(y-2)=5 \quad \cdots ①$

이때 x, y 가 자연수이므로 $x-1, y-2$ 는 $x-1 \geq 0, y-2 \geq -1$ 인 정수이다. $\xrightarrow{x \geq 1, y \geq 1} \cdots ②$

- (i) $x-1=1, y-2=5$ 일 때,
 $x=2, y=7$
 (ii) $x-1=5, y-2=1$ 일 때,
 $x=6, y=3$
 (i), (ii)에서 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는
 $(2, 7), (6, 3) \quad \cdots ③$
 답 (2, 7), (6, 3)

채점 기준	비율
① 주어진 방정식을 $(x-1)(y-2)=5$ 로 변형할 수 있다.	30 %
② $x-1, y-2$ 가 $x-1 \geq 0, y-2 \geq -1$ 인 정수임을 알 수 있다.	20 %
③ 순서쌍 (x, y) 를 모두 구할 수 있다.	50 %

- 69 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a+2=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=-a-1 \quad \cdots ㉠$
 $\alpha\beta=a+2 \quad \cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=1$
 $\alpha(\beta+1)+(\beta+1)-1=1$
 $\therefore (\alpha+1)(\beta+1)=2$

이때 α, β 가 정수이므로 $\alpha+1, \beta+1$ 도 정수이다.

- (i) $\alpha+1=-2, \beta+1=-1$ 일 때,
 $\alpha=-3, \beta=-2$
 (ii) $\alpha+1=-1, \beta+1=-2$ 일 때,
 $\alpha=-2, \beta=-3$
 (iii) $\alpha+1=1, \beta+1=2$ 일 때,
 $\alpha=0, \beta=1$
 (iv) $\alpha+1=2, \beta+1=1$ 일 때,
 $\alpha=1, \beta=0$
 (i), (ii)에서 $\alpha+\beta=-5$ 이므로 ㉠에 대입하면
 $a=4$
 (iii), (iv)에서 $\alpha+\beta=1$ 이므로 ㉠에 대입하면
 $a=-2$
 따라서 모든 a 의 값의 합은 $4+(-2)=2$ 답 2

- 70 $10x^2+12xy+5y^2-4x+6y+13=0$ 에서
 $(9x^2+12xy+4y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=0$
 $\therefore (3x+2y)^2+(x-2)^2+(y+3)^2=0$

- 이때 x, y 가 실수이므로
 $3x+2y=0, x-2=0, y+3=0$
 $\therefore x=2, y=-3$
 $\therefore x^2+y^2=13$

답 ⑤

- 71 $5x^2-4xy+y^2-2x+1=0$ 에서
 $(4x^2-4xy+y^2)+(x^2-2x+1)=0$
 $\therefore (2x-y)^2+(x-1)^2=0$

- 이때 x, y 가 실수이므로
 $2x-y=0, x-1=0 \quad \therefore x=1, y=2$
 $\therefore x+y=3$ 답 ④

- 72 $x^2-2(y-2)x+y^2-5=0$ 을 만족시키는 x, y 가 자연수이므로 주어진 이차방정식이 실근을 가져야 한다.
 x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(y-2)\}^2-(y^2-5) \geq 0$$

$$-4y+9 \geq 0 \quad \therefore y \leq \frac{9}{4}$$

- 그런데 y 는 자연수이므로
 $y=1$ 또는 $y=2 \quad \cdots ①$

- (i) $y=1$ 일 때, $x^2+2x-4=0$ 이므로
 $x=-1 \pm \sqrt{5}$

그런데 x 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다. $\cdots ②$

- (ii) $y=2$ 일 때, $x^2-1=0$ 이므로
 $x=\pm 1$

그런데 x 는 자연수이므로 $x=1 \quad \cdots ③$

- (i), (ii)에서 $x=1, y=2$ 이므로
 $xy=2 \quad \cdots ④$
 답 2

채점 기준	비율
① y 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $y=1$ 일 때 자연수 x 는 존재하지 않음을 알 수 있다.	20 %
③ $y=2$ 일 때 x 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ xy 의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 일차부등식

III. 부등식

개념정리

본책 78쪽

- ① c ② $>$ ③ $<$ ④ $\frac{b}{a}$ ⑤ $\geq$
⑥ $<$ ⑦ $-a < x < a$ ⑧ 0

유형 보개기

본책 79쪽

- 01 ① $a=2, b=1, c=3$ 이면 $c>b, c>a$ 이지만 $b<a$ 이다.
② $ac>bc$ 에서 $c<0$ 이면 $a<b$ 이다.
③ $bc>0$ 이므로 $b<c$ 의 양변을 bc 로 나누면

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{b}$$

$a>0$ 이므로 양변에 a 를 곱하면 $\frac{a}{c} < \frac{a}{b}$

- ④ $c^2>0$ 이므로 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$ 의 양변에 c^2 을 곱하면
 $a>b$

- ⑤ $a=1, b=-1, c=1$ 이면 $\frac{c^2}{a} > \frac{c^2}{b}$ 이지만 $a>b$ 이다.

답 ④

다른 풀이 ③ $\frac{a}{c} - \frac{a}{b} = \frac{ab-ac}{bc} = \frac{a(b-c)}{bc}$

이때 $0<a<b<c$ 에서 $bc>0, b-c<0$ 이므로

$$\frac{a(b-c)}{bc} < 0 \quad \therefore \frac{a}{c} < \frac{a}{b}$$

- 02 $\neg$. $a=1, b=-1, c=-2$ 이면 $a>b>c$ 이지만 $ab<c^2$ 이다.

$\therefore a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}$ 이면 $a>b>0$ 이지만 $ab<b$ 이다.

$\therefore a>b$ 에서 $a-c>b-c$ ㉠

$c<d$ 에서 $-c>-d$

$\therefore b-c>b-d$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a-c>b-d$

이상에서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

답 ③

다른 풀이 $\therefore (a-c)-(b-d)=(a-b)-(c-d)$

이때 $a>b$ 에서 $a-b>0, c<d$ 에서 $c-d<0$ 이므로

$$(a-b)-(c-d)>0 \quad \therefore a-c>b-d$$

- 03 $\neg$. $ab>0$ 이므로 $a<b$ 의 양변을 ab 로 나누면

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$\therefore |a|>|b|$ 이므로 $a^2>b^2$

$ab>0$ 이므로 양변을 ab 로 나누면 $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$

$\therefore a<b<0$ 에서 $a^2<b^2$

$ab>0$ 이므로 양변을 ab 로 나누면 $\frac{a^2}{b} < \frac{b^2}{a}$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \therefore$ 이다.

답 ④

- 04 $(2-a)x>b-a$ 의 해가 $x<-1$ 이므로 $2-a<0$

$$\therefore x < \frac{b-a}{2-a}$$

따라서 $\frac{b-a}{2-a} = -1$ 이므로 $b-a = -2+a$

$$\therefore 2a-b=2$$

이것을 $(2a-b)x \leq 8$ 에 대입하면

$$2x \leq 8 \quad \therefore x \leq 4$$

답 ④

※ B 특강

부등식 $ax>b$ 의 해에 따른 a, b 의 조건

부등식 $ax>b$ 의 해가

① $x>a \Rightarrow a>0, \frac{b}{a}=a$

② $x<a \Rightarrow a<0, \frac{b}{a}=a$

③ 없다. $\Rightarrow a=0, b \geq 0$

④ 모든 실수이다. $\Rightarrow a=0, b<0$

- 05 $ax-3b>bx-3a$ 에서 $(a-b)x>-3(a-b)$

이때 $b>a$ 에서 $a-b<0$ 이므로 양변을 $a-b$ 로 나누면

$$x < -3$$

답 $x < -3$

- 06 $2a+b=0$ 에서

$$b=-2a$$

..... ㉠

㉠을 주어진 부등식에 대입하면

$$(2a+2a)x>3a-4a+7 \quad \therefore 4ax>-a+7$$

이 부등식의 해가 $x<-2$ 이므로 $a<0$

$$\therefore x < \frac{-a+7}{4a}$$

따라서 $\frac{-a+7}{4a} = -2$ 이므로 $-a+7=-8a$

$$7a=-7 \quad \therefore a=-1$$

$a=-1$ 을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$$\therefore ab=-2$$

답 ②

다른 풀이 주어진 부등식의 해가 $x<-2$ 이므로 $2a-b<0$

$$\therefore x < \frac{3a+2b+7}{2a-b}$$

따라서 $\frac{3a+2b+7}{2a-b} = -2$ 이므로 $3a+2b+7=-4a+2b$

$$7a=-7 \quad \therefore a=-1$$

$2a+b=0$ 에서 $b=-2a=2$

$$\therefore ab=-2$$

- 07 $(a+b)x-a+2b \leq 0$ 에서 $(a+b)x \leq a-2b$

이 부등식을 만족시키는 x 가 존재하지 않으려면

$$a+b=0, a-2b<0$$

..... ①

$a+b=0$ 에서 $b=-a$ 이므로

$$a+2a<0, \quad 3a<0$$

$$\therefore a<0$$

..... ②

$b=-a$ 를 $(a-b)x+a+3b>0$ 에 대입하면

$$(a+a)x+a-3a>0 \quad \therefore 2ax>2a$$

이때 $2a<0$ 이므로 $x<1$

..... ③

답 $x<1$

채점 기준	비율
① 부등식 $(a+b)x - a + 2b \leq 0$ 을 만족시키는 x 가 존재하지 않을 조건을 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
③ 부등식 $(a-b)x + a + 3b > 0$ 의 해를 구할 수 있다.	40 %

B 탐색

부등호에 등호가 포함된 부등식의 해가 없거나 모든 실수로 주어지면 다음을 이용한다.

부등식 $ax \leq b$ 의 해가

① 없다. $\Rightarrow a=0, b < 0$

② 모든 실수이다. $\Rightarrow a=0, b \geq 0$

08 $-(3+2x) \leq x-7$ 에서 $-3-2x \leq x-7$

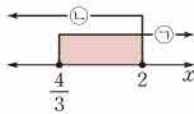
$-3x \leq -4 \quad \therefore x \geq \frac{4}{3}$ ㉠

$5x-6 \leq x+2$ 에서 $4x \leq 8$

$\therefore x \leq 2$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{4}{3} \leq x \leq 2$



따라서 $a = \frac{4}{3}, b = 2$ 이므로

$a+b = \frac{10}{3}$ 10

09 $\frac{3}{2}x - 1.8 \leq x + 0.2$ 에서 $15x - 18 \leq 10x + 2$

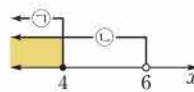
$5x \leq 20 \quad \therefore x \leq 4$ ㉠

$7x < 5(x+4) - 8$ 에서 $7x < 5x + 12$

$2x < 12 \quad \therefore x < 6$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x \leq 4$



따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$ 10

10 $x-4 < 3(x+2)$ 에서 $x-4 < 3x+6$

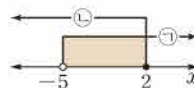
$-2x < 10 \quad \therefore x > -5$ ㉠

$6-2x \geq 5(x-1)-3$ 에서 $6-2x \geq 5x-8$

$-7x \geq -14 \quad \therefore x \leq 2$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5 < x \leq 2$ ①



이때 $-2 \leq -x < 5$ 이므로

$2 \leq -x+4 < 9 \quad \therefore 2 \leq A < 9$ ②

따라서 A 의 최솟값은 2이다. ③

답 2

채점 기준	비율
① 주어진 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
② A 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ A 의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

11 $2(3-x)+5 \leq 3x+6$ 에서 $-2x+11 \leq 3x+6$

$-5x \leq -5 \quad \therefore x \geq 1$ ㉠

$\frac{-3x+5}{4} > \frac{x-9}{6}$ 에서 $3(-3x+5) > 2(x-9)$

양변에 12를 곱한다.

$-9x+15 > 2x-18$

$-11x > -33 \quad \therefore x < 3$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

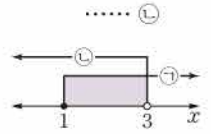
$1 \leq x < 3$

$\therefore a=1, b=3$

이것을 $bx-a < 0$ 에 대입하면

$3x-1 < 0, \quad 3x < 1 \quad \therefore x < \frac{1}{3}$

따라서 해가 아닌 것은 ⑤이다. ⑤



12 $-(x-3)+1 \leq 3x-4$ 에서 $-x+4 \leq 3x-4$

$-4x \leq -8 \quad \therefore x \geq 2$ ㉠

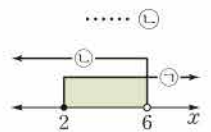
$3x-4 < 4+2(x-1)$ 에서 $3x-4 < 2x+2$

$\therefore x < 6$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2 \leq x < 6$

따라서 정수 x 는 2, 3, 4, 5의 4개이다. 4



13 $3x-5 < 5x-7$ 에서 $-2x < -2$

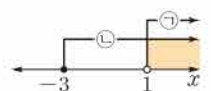
$\therefore x > 1$ ㉠

$5x-7 \leq 10x+8$ 에서 $-5x \leq 15$

$\therefore x \geq -3$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x > 1$ ①



14 $-4 < \frac{1}{3}x+2$ 에서 $-\frac{1}{3}x < 6$

$\therefore x > -18$ ㉠

$\frac{1}{3}x+2 < \frac{1}{4}x+3$ 에서 $4x+24 < 3x+36$

$\therefore x < 12$ ㉡

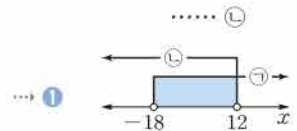
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-18 < x < 12$

따라서 $a=-18, b=12$ 이므로

$b-a=30$ ②

답 30



채점 기준	비율
① 부등식의 해를 구할 수 있다.	80 %
② $b-a$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

15 $-2x+5 \leq 9$ 에서 $-2x \leq 4$

$\therefore x \geq -2$ ㉠

$9 < -3x+10$ 에서 $3x < 1$

$\therefore x < \frac{1}{3}$ ㉡

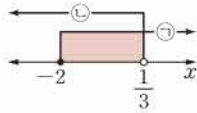
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-2 \leq x < \frac{1}{3}$$

㉠. 정수인 해는 -2, -1, 0의 3개이다.

㉡. $x = \frac{1}{3}$ 은 부등식의 해가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.



답 ③

16 ① 주어진 연립부등식의 해는

$$x=13$$

② $2x \geq -4$ 에서 $x \geq -2$

$$-x < -3$$
에서 $x > 3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$x > 3$$

③ $4x - 2 < -3$ 에서

$$4x < -1 \quad \therefore x < -\frac{1}{4}$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

④ $0.4(x+3) \geq 1.6$ 에서 $x+3 \geq 4$

$$\therefore x \geq 1$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$x=1$$

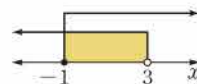
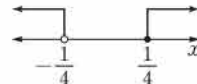
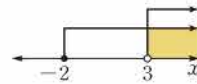
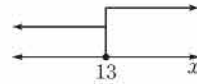
⑤ $9x - 4 < 3x + 14$ 에서 $6x < 18 \quad \therefore x < 3$

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{3} \geq \frac{x-6}{12}$$
에서 $3x - 4 \geq x - 6$

$$2x \geq -2 \quad \therefore x \geq -1$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$-1 \leq x < 3$$



답 ③

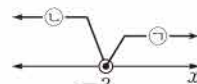
17 $5x - 8 \geq 2x - 17$ 에서 $3x \geq -9$

$$\therefore x \geq -3$$

$4 - 2x > 7 - x$ 에서 $-x > 3$

$$\therefore x < -3$$

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 ⑤

18 $\frac{3(1-x)}{2} \geq -(x+1)$ 에서 $3(1-x) \geq -2(x+1)$

$$3 - 3x \geq -2x - 2, \quad -x \geq -5$$

$$\therefore x \leq 5$$

$0.2(x-3) \leq 0.3x - 1.1$ 에서 $2(x-3) \leq 3x - 11$

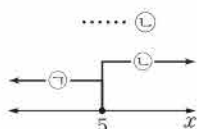
$$2x - 6 \leq 3x - 11, \quad -x \leq -5$$

$$\therefore x \geq 5$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$x=5$$

답 $x=5$



19 $2x - 3 \leq 4x + 1$ 에서 $-2x \leq 4$

$$\therefore x \geq -2$$

$-x + 6 \geq 3x + a$ 에서 $-4x \geq a - 6$

$$\therefore x \leq \frac{-a+6}{4}$$

주어진 연립부등식의 해가 $b \leq x \leq 2$ 이므로

$$\frac{-a+6}{4} = 2, \quad b = -2 \quad \therefore a = -2, \quad b = -2$$

$$\therefore a - b = 0$$

답 0

20 $x - 4a > 0$ 에서 $x > 4a$

$$3x + b \geq 0$$
에서 $x \geq -\frac{b}{3}$

주어진 그림에서 $x > -4, x \geq -1$ 이므로

$$4a = -4, \quad -\frac{b}{3} = -1 \quad \therefore a = -1, \quad b = 3$$

$$\therefore a + b = 2$$

답 2

21 $\frac{x+a}{2} - x \geq \frac{x+1}{3}$ 에서

$$3(x+a) - 6x \geq 2(x+1), \quad -3x + 3a \geq 2x + 2$$

$$-5x \geq 2 - 3a \quad \therefore x \leq \frac{3a-2}{5}$$

$\frac{5}{9}(x+3) < \frac{1}{2}x + 2$ 에서

$$10(x+3) < 9x + 36, \quad 10x + 30 < 9x + 36$$

$$\therefore x < 6$$

주어진 연립부등식의 해가 $x \leq -1$ 이므로

$$\frac{3a-2}{5} = -1, \quad 3a - 2 = -5$$

$$3a = -3 \quad \therefore a = -1$$

→ ①

→ ②

답 -1

채점 기준	비율
① 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	60 %
② a의 값을 구할 수 있다.	40 %

22 $7x - 1 \leq 3x + a$ 에서 $4x \leq a + 1$

$$\therefore x \leq \frac{a+1}{4}$$

$5(2x+1) \geq 8x + b$ 에서 $10x + 5 \geq 8x + b$

$$2x \geq b - 5 \quad \therefore x \geq \frac{b-5}{2}$$

주어진 연립부등식의 해가 $x = -3$ 이므로

$$\frac{a+1}{4} = -3, \quad \frac{b-5}{2} = -3$$

$$a + 1 = -12, \quad b - 5 = -6 \quad \therefore a = -13, \quad b = -1$$

$$\therefore a + b = -14$$

답 ②

23 $2x + a \leq -x + 2$ 에서 $3x \leq 2 - a$

$$\therefore x \leq \frac{2-a}{3}$$

$-x + 2 \leq b(x+2)$ 에서 $-x + 2 \leq bx + 2b$

$$(-1-b)x \leq 2b - 2$$

→ ㉠

→ ㉡

이때 주어진 부등식의 해가 $-1 \leq x \leq 4$ 이므로 부등식 ⑤의 해는 $x \leq 4$, 부등식 ⑥의 해는 $x \geq -1$ 이어야 한다.

$$\text{즉 } -1 - b < 0 \text{이므로 } x \geq \frac{2b-2}{-1-b}$$

$$\text{따라서 } \frac{2-a}{3} = 4, \frac{2b-2}{-1-b} = -1 \text{이므로}$$

$$2-a=12, 2b-2=1+b \quad \therefore a=-10, b=3$$

$$\therefore ab=-30$$

답 ④

24 $3x-4 \leq 8$ 에서 $3x \leq 12$

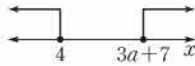
$$\therefore x \leq 4$$

$$x-7 \geq 3a$$
에서 $x \geq 3a+7$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면
오른쪽 그림에서

$$3a+7 > 4, \quad 3a > -3$$

$$\therefore a > -1$$



답 ④

25 $\frac{14-x}{4} < x+1$ 에서 $14-x < 4x+4$

$$-5x < -10 \quad \therefore x > 2$$

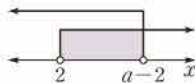
$$x+1 < \frac{x+a}{2}$$
에서 $2x+2 < x+a$

$$\therefore x < a-2$$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽
그림에서

$$a-2 > 2 \quad \therefore a > 4$$

답 ⑤



26 $a+3x < 2a$ 에서 $3x < a$

$$\therefore x < \frac{a}{3}$$

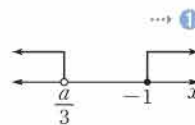
$$4(x-1) \geq x-7$$
에서 $4x-4 \geq x-7$

$$3x \geq -3 \quad \therefore x \geq -1$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면
오른쪽 그림에서

$$\frac{a}{3} \leq -1 \quad \therefore a \leq -3$$

따라서 a의 최댓값은 -3이다.



답 -3

채점 기준	비율
① 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
② a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

27 $-1.5x \geq \frac{1}{5}x - 3.4$ 에서 $-15x \geq 2x - 34$

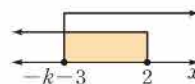
$$-17x \geq -34 \quad \therefore x \leq 2$$

$$0.5(x-6) \leq \frac{3}{2}x + k$$
에서 $x-6 \leq 3x+2k$

$$-2x \leq 2k+6 \quad \therefore x \geq -k-3$$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽
그림에서

$$-k-3 \leq 2$$



$$-k \leq 5 \quad \therefore k \geq -5$$

따라서 음의 정수 k는 -5, -4, -3, -2, -1의 5개이다.

답 ③

28 $4(x-1) > 3x+a$ 에서 $4x-4 > 3x+a$

$$\therefore x > a+4$$

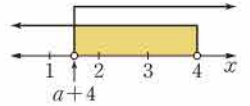
$$10-3(x+2) > -2x$$
에서 $-3x+4 > -2x$

$$-x > -4 \quad \therefore x < 4$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정
수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서

$$1 \leq a+4 < 2$$

$$\therefore -3 \leq a < -2$$



답 ①

29 $0.2x+1 \geq -x+4$ 에서 $2x+10 \geq -10x+40$

$$12x \geq 30 \quad \therefore x \geq \frac{5}{2}$$

$$3x-2 > 4x+a$$
에서 $-x > a+2$

$$\therefore x < -a-2$$

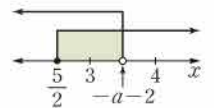
주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x
가 1개이므로 오른쪽 그림에서

$$3 < -a-2 \leq 4$$

$$5 < -a \leq 6 \quad \therefore -6 \leq a < -5$$

따라서 a의 최솟값은 -6이다.

답 -6



30 주어진 부등식을 만족시키는 정수
x가 7과 8뿐이려면 오른쪽 그림에서

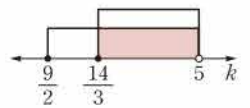
$$6 \leq 2k-3 < 7, 8 \leq 3k-6 < 9$$

$$9 \leq 2k < 10, 14 \leq 3k < 15$$

$$\therefore \frac{9}{2} \leq k < 5, \frac{14}{3} \leq k < 5$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$\frac{14}{3} \leq k < 5 \quad \text{답} \quad \frac{14}{3} \leq k < 5$$



31 $\frac{x}{3} + \frac{a}{6} \geq \frac{x}{6} - \frac{5}{12}$ 에서 $4x+2a \geq 2x-5$

$$2x \geq -2a-5 \quad \therefore x \geq -a-\frac{5}{2}$$

$$-2x+5 \geq 2x-7$$
에서 $-4x \geq -12$

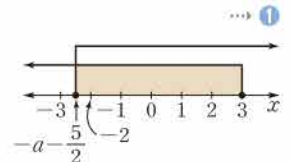
$$\therefore x \leq 3$$

주어진 연립부등식을 만족시키는
음의 정수 x가 2개이므로 오른쪽
그림에서

$$-3 < -a-\frac{5}{2} \leq -2$$

$$-\frac{1}{2} < -a \leq \frac{1}{2} \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$$

$$\text{답} \quad -\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$$



채점 기준	비율
① 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
② a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

32 의자의 개수를 x 라 하면 학생은 $(5x+4)$ 명이므로

$$6(x-3)+1 \leq 5x+4 \leq 6(x-3)+6$$

$6(x-3)+1 \leq 5x+4$ 에서

$$6x-17 \leq 5x+4 \quad \therefore x \leq 21 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$5x+4 \leq 6(x-3)+6$ 에서

$$5x+4 \leq 6x-12 \quad \therefore x \geq 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$16 \leq x \leq 21$$

따라서 의자의 최소 개수는 16이다.

답 ④

예제 B $\frac{1}{5}$

32번과 같이 긴 의자에 여러 명이 앉는 경우 다음을 이용하여 부등식을 세운다.

한 의자에 a 명씩 앉으면 n 개의 의자가 남는다.

→ 의자의 개수를 x 라 하면

(i) 빈 의자의 개수: n

(ii) a 명씩 앉은 의자의 개수: $x-(n+1)$

(iii) 마지막 1개의 의자에는 최소 1명에서 최대 a 명까지 앉을 수 있다.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{최소 인원수: } a\{x-(n+1)\}+1 \\ \text{최대 인원수: } a\{x-(n+1)\}+a \end{cases}$$

33 초콜릿을 x 개 산다고 하면 사탕은 $(12-x)$ 개 살 수 있으므로

$$8400 \leq 500(12-x) + 800x \leq 9300$$

$$84 \leq 60+3x \leq 93, \quad 24 \leq 3x \leq 33$$

$$\therefore 8 \leq x \leq 11$$

따라서 초콜릿은 8개 이상 11개 이하 살 수 있다.

답 ②

34 빵 A를 x 개 만든다고 하면 빵 B는 $(10-x)$ 개 만들 수 있으므로

$$\begin{cases} 90x+120(10-x) \leq 960 \\ 40x+30(10-x) \leq 400 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$90x+120(10-x) \leq 960 \text{에서} \quad -30x+1200 \leq 960$$

$$-30x \leq -240 \quad \therefore x \geq 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$40x+30(10-x) \leq 400 \text{에서} \quad 10x+300 \leq 400$$

$$10x \leq 100 \quad \therefore x \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$8 \leq x \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 빵 A는 최대 10개까지 만들 수 있다.

답 ③

답 10개

채점 기준	비율
① 연립부등식을 세울 수 있다.	40 %
② 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
③ 빵 A는 최대 몇 개 만들 수 있는지 구할 수 있다.	10 %

35 작년 남자 회원 수와 여자 회원 수를 각각 $7a$, $4a$ 라 하고, 올해 새로 가입한 남자 회원 수와 여자 회원 수를 각각 x 라 하면

$$(7a+x):(4a+x)=5:3, \quad 21a+3x=20a+5x$$

$$\therefore a=2x$$

즉 작년 남자 회원 수는 $14x$, 여자 회원 수는 $8x$ 이므로

$$\begin{cases} 14x+8x < 460 \\ (14x+x)+(8x+x) > 460 \end{cases}$$

$$14x+8x < 460 \text{에서} \quad 22x < 460$$

$$\therefore x < \frac{230}{11} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(14x+x)+(8x+x) > 460 \text{에서} \quad 24x > 460$$

$$\therefore x > \frac{115}{6} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$\frac{115}{6} < x < \frac{230}{11}$$

그런데 x 는 자연수이므로 $x=20$

따라서 올해 새로 가입한 남자 회원 수와 여자 회원 수가 각각 20이므로 구하는 합은

$$20+20=40$$

답 40

36 농도가 8 %인 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{8}{100} \cdot 300 = 24 \text{ (g)} \quad \text{[(소금의 양) = } \frac{\text{(소금물의 농도)}}{100} \times \text{(소금물의 양)} \text{]}$$

농도가 14 %인 소금물을 x g 섞는다고 하면

$$\frac{9}{100}(300+x) \leq 24 + \frac{14}{100} \cdot x \leq \frac{11}{100}(300+x)$$

이 식의 각 변에 100을 곱하면

$$9(300+x) \leq 2400+14x \leq 11(300+x)$$

$$9(300+x) \leq 2400+14x \text{에서}$$

$$2700+9x \leq 2400+14x, \quad -5x \leq -300$$

$$\therefore x \geq 60 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2400+14x \leq 11(300+x) \text{에서}$$

$$2400+14x \leq 3300+11x, \quad 3x \leq 900$$

$$\therefore x \leq 300 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$60 \leq x \leq 300$$

따라서 농도가 14 %인 소금물을 60 g 이상 300 g 이하로 섞어야 한다.

답 60 g 이상 300 g 이하

37 $|10-4x| > 8$ 에서 $10-4x < -8$ 또는 $10-4x > 8$

$$\therefore x > \frac{9}{2} \text{ 또는 } x < \frac{1}{2}$$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 5이다.

답 ②

38 $|4x-3| < 7$ 에서 $-7 < 4x-3 < 7$

$$\therefore -1 < x < \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$8-x \geq -3x+10 \text{에서} \quad 2x \geq 2$$

$$\therefore x \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

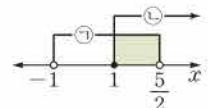
$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$1 \leq x < \frac{5}{2}$$

따라서 정수 x 는 1, 2이므로 구하는 합은

$$1+2=3$$

답 ③



39 $|x+a| < 9$ 에서 $-9 < x+a < 9$

$\therefore -a-9 < x < -a+9$

$-a+9$ 가 정수이고 정수 x 의 최댓값이 3이므로

$-a+9=4 \quad \therefore a=5$

답 5

40 $|3x-a| \leq 5$ 에서 $-5 \leq 3x-a \leq 5$

$\therefore \frac{a-5}{3} \leq x \leq \frac{a+5}{3}$

주어진 부등식의 해가 $-2 \leq x \leq b$ 이므로

$\frac{a-5}{3} = -2, \frac{a+5}{3} = b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=\frac{4}{3}$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

41 $|ax+2| > b$ 에서 $b > 0$ 이므로

$ax+2 < -b$ 또는 $ax+2 > b$

$ax+2 < -b$ 에서 $ax < -b-2$

이때 $a < 0$ 이므로 $x > \frac{-b-2}{a}$ ㉠

$ax+2 > b$ 에서 $ax > b-2$

이때 $a < 0$ 이므로 $x < \frac{b-2}{a}$ ㉡ $\rightarrow$ ①

주어진 부등식의 해가 $x < -1$ 또는 $x > 3$ 이므로 ㉠, ㉡에서

$\frac{b-2}{a} = -1, \frac{-b-2}{a} = 3$

$\therefore a+b=2, 3a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=4$ $\rightarrow$ ②

$\therefore ab=-8$

$\rightarrow$ ③

답 -8

채점 기준	비율
① 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	10 %

42 $2|x-2|-5 \leq -x$ 에서

(i) $x < 2$ 일 때, $x-2 < 0$ 이므로

$-2(x-2)-5 \leq -x, \quad -x \leq 1 \quad \therefore x \geq -1$

그런데 $x < 2$ 이므로 $-1 \leq x < 2$

(ii) $x \geq 2$ 일 때, $x-2 \geq 0$ 이므로

$2(x-2)-5 \leq -x, \quad 3x \leq 9 \quad \therefore x \leq 3$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x \leq 3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1 \leq x \leq 3$

따라서 $a=-1, b=3$ 이므로

$b-a=4$

답 ①

43 $|4-x| < 12-x$ 에서

(i) $x < 4$ 일 때, $4-x > 0$ 이므로

$4-x < 12-x \quad \therefore 0 < x < 8$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $x < 4$ 이므로 $x < 4$

(ii) $x \geq 4$ 일 때, $4-x \leq 0$ 이므로

$-(4-x) < 12-x, \quad 2x < 16$

$\therefore x < 8$

그런데 $x \geq 4$ 이므로 $4 \leq x < 8$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x < 8$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 7의 7개이다.

답 ③

44 $x+2 \leq |2x-6|$ 에서

(i) $x < 3$ 일 때, $2x-6 < 0$ 이므로

$x+2 \leq -(2x-6), \quad 3x \leq 4$

$\therefore x \leq \frac{4}{3}$

그런데 $x < 3$ 이므로 $x \leq \frac{4}{3}$

(ii) $x \geq 3$ 일 때, $2x-6 \geq 0$ 이므로

$x+2 \leq 2x-6, \quad -x \leq -8$

$\therefore x \geq 8$

그런데 $x \geq 3$ 이므로 $x \geq 8$

(i), (ii)에서 부등식 $x+2 \leq |2x-6|$ 의 해는

$x \leq \frac{4}{3}$ 또는 $x \geq 8$ ㉠ $\rightarrow$ ①

$|2x-6| \leq 8$ 에서 $-8 \leq 2x-6 \leq 8$

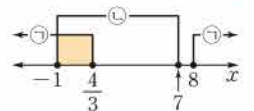
$-2 \leq 2x \leq 14$

$\therefore -1 \leq x \leq 7$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1 \leq x \leq \frac{4}{3}$ $\rightarrow$ ③

답 $-1 \leq x \leq \frac{4}{3}$



채점 기준	비율
① 부등식 $x+2 \leq 2x-6 $ 의 해를 구할 수 있다.	50 %
② 부등식 $ 2x-6 \leq 8$ 의 해를 구할 수 있다.	30 %
③ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

45 $|x-1| < 3x-4$ 에서

(i) $x < 1$ 일 때, $x-1 < 0$ 이므로

$-(x-1) < 3x-4, \quad -4x < -5$

$\therefore x > \frac{5}{4}$

그런데 $x < 1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x \geq 1$ 일 때, $x-1 \geq 0$ 이므로

$x-1 < 3x-4, \quad -2x < -3$

$\therefore x > \frac{3}{2}$

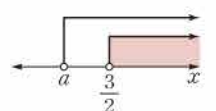
그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x > \frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x > \frac{3}{2}$

따라서 $x > \frac{3}{2}$ 이 $x > a$ 에 포함되려면 오른

쪽 그림에서

$a \leq \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ ② $a \leq \frac{3}{2}$



46 $|x| + |x-2| \geq 4$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때, $x-2 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} -x - (x-2) &\geq 4, & -x - x + 2 &\geq 4 \\ -2x &\geq 2 & \therefore x &\leq -1 \end{aligned}$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x \leq -1$

(ii) $0 \leq x < 2$ 일 때, $x-2 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} x - (x-2) &\geq 4, & x - x + 2 &\geq 4 \\ \therefore 0 &\cdot x &\geq 2 \end{aligned}$$

따라서 해는 없다.

(iii) $x \geq 2$ 일 때, $x-2 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} x + (x-2) &\geq 4, & 2x &\geq 6 \\ \therefore x &\geq 3 \end{aligned}$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $x \geq 3$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$$x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 3$$

따라서 $a = -1$, $b = 3$ 이므로 $ab = -3$

답 ③

47 $|x-4| + 2|x+2| \leq 15$ 에서

(i) $x < -2$ 일 때, $x-4 < 0$, $x+2 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} -(x-4) - 2(x+2) &\leq 15 \\ -x + 4 - 2x - 4 &\leq 15 \\ -3x &\leq 15 & \therefore x &\geq -5 \end{aligned}$$

그런데 $x < -2$ 이므로 $-5 \leq x < -2$

(ii) $-2 \leq x < 4$ 일 때, $x-4 < 0$, $x+2 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} -(x-4) + 2(x+2) &\leq 15 \\ -x + 4 + 2x + 4 &\leq 15 \\ \therefore x &\leq 7 \end{aligned}$$

그런데 $-2 \leq x < 4$ 이므로 $-2 \leq x < 4$

(iii) $x \geq 4$ 일 때, $x-4 \geq 0$, $x+2 > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} x - 4 + 2(x+2) &\leq 15 \\ x - 4 + 2x + 4 &\leq 15 \\ 3x &\leq 15 & \therefore x &\leq 5 \end{aligned}$$

그런데 $x \geq 4$ 이므로 $4 \leq x \leq 5$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$$-5 \leq x \leq 5$$

답 $-5 \leq x \leq 5$

48 $\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ 이므로 주어진 부등식은

$$|x-2| + |x+1| \leq x+3$$

(i) $x < -1$ 일 때, $x-2 < 0$, $x+1 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} -(x-2) - (x+1) &\leq x+3 \\ -x + 2 - x - 1 &\leq x+3 \\ -3x &\leq 2 & \therefore x &\geq -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

그런데 $x < -1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때, $x-2 < 0$, $x+1 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} -(x-2) + x + 1 &\leq x+3 \\ -x + 2 + x + 1 &\leq x+3 \\ \therefore x &\geq 0 \end{aligned}$$

그런데 $-1 \leq x < 2$ 이므로 $0 \leq x < 2$

(iii) $x \geq 2$ 일 때, $x-2 \geq 0$, $x+1 > 0$ 이므로

$$x - 2 + x + 1 \leq x + 3 \quad \therefore x \leq 4$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x \leq 4$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$$0 \leq x \leq 4$$

따라서 $M = 4$, $m = 0$ 이므로

$$M - m = 4$$

답 ④

49 $||x-3|-1| \leq 2$ 에서 $-2 \leq |x-3|-1 \leq 2$

$$\therefore -1 \leq |x-3| \leq 3$$

그런데 $|x-3| \geq 0$ 이므로

$$0 \leq |x-3| \leq 3$$

... ①

$$-3 \leq x-3 \leq 3 \quad \therefore 0 \leq x \leq 6$$

... ②

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, ..., 6의 7개이다.

... ③

답 7

채점 기준	비율
① 주어진 부등식에서 $ x-3 $ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
② 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
③ 정수 x 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 (i) $x < 3$ 일 때, $x-3 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} |-(x-3)-1| &\leq 2, & |-x+2| &\leq 2 \\ -2 &\leq -x+2 \leq 2, & -4 &\leq -x \leq 0 \\ \therefore 0 &\leq x \leq 4 \end{aligned}$$

그런데 $x < 3$ 이므로 $0 \leq x < 3$

(ii) $x \geq 3$ 일 때, $x-3 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} |x-3-1| &\leq 2, & |x-4| &\leq 2 \\ -2 &\leq x-4 \leq 2 & \therefore 2 &\leq x \leq 6 \end{aligned}$$

그런데 $x \geq 3$ 이므로 $3 \leq x \leq 6$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $0 \leq x \leq 6$

50 $|x+3| + |x-1| \leq k$ 에서

(i) $x < -3$ 일 때, $x+3 < 0$, $x-1 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} -(x+3) - (x-1) &\leq k, & -x-3-x+1 &\leq k \\ -2x &\leq k+2 & \therefore x &\geq -\frac{k+2}{2} \end{aligned}$$

그런데 $x < -3$ 이므로 $-\frac{k+2}{2} \leq x < -3$

(ii) $-3 \leq x < 1$ 일 때, $x+3 \geq 0$, $x-1 < 0$ 이므로 $-\frac{k+2}{2} < -3$

$$\begin{aligned} x + 3 - (x-1) &\leq k, & x + 3 - x + 1 &\leq k \\ \therefore 0 &\cdot x &\leq k-4 \end{aligned}$$

따라서 해는 모든 실수이다.

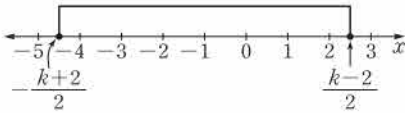
그런데 $-3 \leq x < 1$ 이므로 $-3 \leq x < 1$

(iii) $x \geq 1$ 일 때, $x+3 > 0$, $x-1 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} x + 3 + x - 1 &\leq k, & 2x &\leq k-2 \\ \therefore x &\leq \frac{k-2}{2} \end{aligned}$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x \leq \frac{k-2}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{k+2}{2} \leq x \leq \frac{k-2}{2}$



주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 7이려면 위의 그림에서

$$2 \leq \frac{k-2}{2} < 3, \quad 4 \leq k-2 < 6$$

$$\therefore 6 \leq k < 8$$

답 $6 \leq k < 8$

참고 $-5 < -\frac{k+2}{2} \leq -4$ 에서 k 의 값의 범위를 구하여도 $6 \leq k < 8$ 로 같다.

B 탐구

$-\frac{k+2}{2}$ 는 -1 보다 $\frac{k}{2}$ 만큼 작은 수이고, $\frac{k-2}{2}$ 는 -1 보다 $\frac{k}{2}$ 만큼 큰 수이므로 두 수는 수직선 위에서 -1 로부터 같은 거리에 있다. 따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 7이려면 정수 x 는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ 이어야 하므로 $-5 < -\frac{k+2}{2} \leq -4, 2 \leq \frac{k-2}{2} < 3$ 이어야 한다.

51 $|3x-5|+2 > a$ 에서 $|3x-5| > a-2$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$$a-2 < 0 \quad \therefore a < 2$$

답 ④

52 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$$\frac{1}{2}a+4 < 0, \quad \frac{1}{2}a < -4$$

$$\therefore a < -8$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -9 이다.

답 ②

53 $\left|\frac{1}{5}x+6\right|-k \leq 0$ 에서 $\left|\frac{1}{5}x+6\right| \leq k$

이 부등식이 해를 가지려면

$$k \geq 0$$

답 $k \geq 0$

54 (1) $|x+k| \geq 0$ 이므로 주어진 부등식이 오직 한 개의 해를 가지려면

$$k^2-3k=0, \quad k(k-3)=0$$

$$\therefore k=3 \quad (\because k \neq 0)$$

... ①

(2) 주어진 부등식은 $|x+3| \leq 0$ 이므로 구하는 해는

$$x=-3$$

... ②

답 (1) 3 (2) $x=-3$

채점 기준	비율
① k 의 값을 구할 수 있다.	70 %
② 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %

참고 ① $|ax+b| \leq c$ 의 해가 오직 하나뿐이다. $\Rightarrow c=0$

② $|ax+b| > c$ 에서 $c=0$ 이면 이 부등식의 해는 $ax+b=0$ 이 되는 x 의 값을 제외한 모든 실수, 즉 $x \neq -\frac{b}{a}$ 인 모든 실수이다.

III. 부등식

08 이차부등식

개념정리

본책 88쪽

- ① $a < x < \beta$ ② $x=a$ ③ 모든 실수
 ④ $>$ ⑤ $\leq$ ⑥ $\geq$ ⑦ $<$ ⑧ $>$
 ⑨ $>$

B 유형 뚫개기

본책 89쪽

01 $f(x)g(x) < 0$ 에서

$$f(x) > 0, g(x) < 0 \text{ 또는 } f(x) < 0, g(x) > 0$$

(i) $f(x) > 0, g(x) < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x < a \text{ 또는 } x > d$$

(ii) $f(x) < 0, g(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$a < x < b$$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x) < 0$ 의 해는

$$x < a \text{ 또는 } a < x < b \text{ 또는 } x > d$$

답 ⑤

02 $ax^2+(b-m)x+c-n \geq 0$ 에서

$$ax^2+bx+c-(mx+n) \geq 0$$

$$\therefore ax^2+bx+c \geq mx+n$$

부등식 $ax^2+bx+c \geq mx+n$ 의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에서 직선 $y=mx+n$ 보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$-3 \leq x \leq 5$$

답 $-3 \leq x \leq 5$

03 부등식 $f(x) < g(x) < 0$ 의 해는 $y=g(x)$ 의 그래프에서 x 축보다 아래쪽에 있고 $y=f(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$-1 < x < 0$$

따라서 $a=-1, \beta=0$ 이므로 $\beta-a=1$

답 1

04 $(x+2)(x-1) < 4x+16$ 에서

$$x^2+x-2 < 4x+16, \quad x^2-3x-18 < 0$$

$$(x+3)(x-6) < 0 \quad \therefore -3 < x < 6$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, \dots, 5$ 의 8개이다.

답 8

05 이차방정식 $x^2-8x+4=0$ 의 해는

$$x=4 \pm 2\sqrt{3}$$

이므로 이차부등식 $x^2-8x+4 < 0$ 의 해는

$$4-2\sqrt{3} < x < 4+2\sqrt{3}$$

따라서 $a=4-2\sqrt{3}, \beta=4+2\sqrt{3}$ 이므로

$$a-\beta=-4\sqrt{3}$$

답 $-4\sqrt{3}$

다른 풀이 a, β 가 이차방정식 $x^2-8x+4=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=8, \quad a\beta=4$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 64 - 16 = 48$$

이때 $\alpha < \beta$ 에서 $\alpha - \beta < 0$ 이므로

$$\alpha - \beta = -\sqrt{48} = -4\sqrt{3}$$

06 ① $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 \geq 4$

따라서 $x^2 + 2x + 5 \geq 0$ 의 해는 모든 실수이다.

② $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$

따라서 $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ 의 해는 $x=2$ 이다.

③ $3x^2 + 4x + 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$

따라서 $3x^2 + 4x + 2 \geq 0$ 의 해는 모든 실수이다.

④ $-3x^2 + 3x - 1 < 0$ 에서 $3x^2 - 3x + 1 > 0$

그런데 $3x^2 - 3x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$ 이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

⑤ $-2x^2 + x - 2 > 0$ 에서 $2x^2 - x + 2 < 0$

그런데 $2x^2 - x + 2 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} \geq \frac{15}{8}$ 이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

답 ⑤

07 $x^2 - 2x - 24 \leq 0$ 에서 $(x+4)(x-6) \leq 0$

$$\therefore -4 \leq x \leq 6$$

① $|x-2| \leq 4$ 에서 $-4 \leq x-2 \leq 4 \quad \therefore -2 \leq x \leq 6$

② $|x-1| \leq 5$ 에서 $-5 \leq x-1 \leq 5 \quad \therefore -4 \leq x \leq 6$

③ $|x-1| \leq 6$ 에서 $-6 \leq x-1 \leq 6 \quad \therefore -5 \leq x \leq 7$

④ $|x+1| \leq 5$ 에서 $-5 \leq x+1 \leq 5 \quad \therefore -6 \leq x \leq 4$

⑤ $|x+1| \leq 6$ 에서 $-6 \leq x+1 \leq 6 \quad \therefore -7 \leq x \leq 5$

따라서 주어진 이차부등식과 해가 같은 것은 ②이다. **답 ②**

08 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 두 점 $(-4, 0)$, $(3, 0)$ 에서 만나므로

$$f(x) = a(x+4)(x-3) \quad (a < 0)$$

이라 하자. 이 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$-12a = 4 \quad \therefore a = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{3}(x+4)(x-3) \quad \cdots ①$$

$$f(x) > 2 \text{에서} \quad -\frac{1}{3}(x+4)(x-3) > 2$$

$$(x+4)(x-3) < -6, \quad x^2 + x - 6 < 0$$

$$(x+3)(x-2) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 2 \quad \cdots ②$$

따라서 $\alpha = -3, \beta = 2$ 이므로

$$\alpha - \beta = -5 \quad \cdots ③$$

답 -5

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② 부등식 $f(x) > 2$ 의 해를 구할 수 있다.	50 %
③ $\alpha - \beta$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 $x^2 - 2x - 4 < 2|x-2|$ 에서

(i) $x < 2$ 일 때, $x-2 < 0$ 이므로

$$x^2 - 2x - 4 < -2(x-2), \quad x^2 - 8 < 0$$

$$(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2}) < 0 \quad \therefore -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$$

$$\text{그런데 } x < 2 \text{이므로} \quad -2\sqrt{2} < x < 2$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때, $x-2 \geq 0$ 이므로

$$x^2 - 2x - 4 < 2(x-2), \quad x^2 - 4x < 0$$

$$x(x-4) < 0 \quad \therefore 0 < x < 4$$

$$\text{그런데 } x \geq 2 \text{이므로} \quad 2 \leq x < 4$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2\sqrt{2} < x < 4$

따라서 $\alpha = -2\sqrt{2}, \beta = 4$ 이므로 $\alpha\beta = -8\sqrt{2}$ **답 ①**

10 $x^2 - 5|x| - 6 < 0$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때,

$$x^2 + 5x - 6 < 0, \quad (x+6)(x-1) < 0$$

$$\therefore -6 < x < 1$$

$$\text{그런데 } x < 0 \text{이므로} \quad -6 < x < 0$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$x^2 - 5x - 6 < 0, \quad (x+1)(x-6) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 6$$

$$\text{그런데 } x \geq 0 \text{이므로} \quad 0 \leq x < 6$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-6 < x < 6$

따라서 정수 x 는 $-5, -4, -3, \dots, 5$ 의 11개이다. **답 ②**

다른 풀이 $x^2 = |x|^2$ 이므로 주어진 부등식은

$$|x|^2 - 5|x| - 6 < 0, \quad (|x|+1)(|x|-6) < 0$$

$$\therefore -1 < |x| < 6$$

$$\text{그런데 } |x| \geq 0 \text{이므로} \quad 0 \leq |x| < 6$$

따라서 $-6 < x < 6$ 이므로 정수 x 의 개수는 11이다.

11 $|x^2 - 3| > 6$ 에서

$$x^2 - 3 < -6 \text{ 또는 } x^2 - 3 > 6 \quad \cdots ①$$

(i) $x^2 - 3 < -6$ 에서 $x^2 + 3 < 0$

그런데 $x^2 + 3 \geq 3$ 이므로 $x^2 + 3 < 0$ 의 해는 없다.

(ii) $x^2 - 3 > 6$ 에서 $x^2 - 9 > 0$

$$(x+3)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 3 \quad \cdots ②$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x < -3 \text{ 또는 } x > 3 \quad \cdots ③$$

$$\text{답 } x < -3 \text{ 또는 } x > 3$$

채점 기준	비율
① 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	30 %
② 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
③ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

12 $ax^2 + bx + 1 < 0$ 의 해가 $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ 이므로 $a > 0$

해가 $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0 \quad \therefore x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} < 0$$

양변에 a 를 곱하면

$$ax^2 - \frac{5}{6}ax + \frac{a}{6} < 0 \quad (\because a > 0)$$

이 부등식이 $ax^2 + bx + 1 < 0$ 과 같으므로

$$b = -\frac{5}{6}a, \quad 1 = \frac{a}{6}$$

따라서 $a=6, b=-5$ 이므로 $a-b=11$ 답 ④

다른 풀이 이차방정식 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 의 두 근이 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore a=6, b=-5 \quad \therefore a-b=11$$

13 해가 $x=2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-2)^2 \leq 0 \quad \therefore x^2 - 4x + 4 \leq 0$$

이 부등식이 $x^2 + ax + b \leq 0$ 과 같으므로

$$a=-4, b=4 \quad \cdots ①$$

이것을 $bx^2 + ax - 15 < 0$ 에 대입하면

$$4x^2 - 4x - 15 < 0, \quad (2x+3)(2x-5) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \quad \cdots ②$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다. 답 ④

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 이차부등식 $bx^2 + ax - 15 < 0$ 의 해를 구할 수 있다.	40 %
③ 정수 x 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

14 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $x < -\frac{3}{2}$ 또는 $x > 1$ 이므로

$$a < 0$$

해가 $x < -\frac{3}{2}$ 또는 $x > 1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1) > 0 \quad \therefore x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} > 0$$

양변에 a 를 곱하면

$$ax^2 + \frac{a}{2}x - \frac{3}{2}a < 0 \quad (\because a < 0)$$

이 부등식이 $ax^2 + bx + c < 0$ 과 같으므로

$$b = \frac{a}{2}, \quad c = -\frac{3}{2}a$$

이것을 $bx^2 - cx + a > 0$ 에 대입하면 $\frac{2}{a} < 0$ 이므로 양변에 $\frac{2}{a}$ 를 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.

$$\frac{a}{2}x^2 + \frac{3}{2}ax + a > 0, \quad x^2 + 3x + 2 < 0$$

$$(x+2)(x+1) < 0 \quad \therefore -2 < x < -1 \quad \text{답 ②}$$

15 $f(x) \leq 0$ 의 해가 $-5 \leq x \leq 2$ 이므로

$$f(x) = a(x+5)(x-2) \quad (a > 0)$$

라 하자. 이때 $f(1) = -6$ 이므로

$$-6a = -6 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $f(x) = (x+5)(x-2)$ 이므로

$$f(0) = 5 \cdot (-2) = -10 \quad \text{답 ①}$$

16 $|2x+a| < 7$ 에서 $-7 < 2x+a < 7$

$$\therefore -\frac{7+a}{2} < x < \frac{7-a}{2}$$

해가 $-\frac{7+a}{2} < x < \frac{7-a}{2}$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x + \frac{7+a}{2}\right)\left(x - \frac{7-a}{2}\right) < 0$$

$$\therefore x^2 + ax + \frac{a^2-49}{4} < 0$$

이 부등식이 $x^2 + 5x + b < 0$ 과 같으므로

$$a=5, \quad \frac{a^2-49}{4} = b$$

따라서 $a=5, b=-6$ 이므로

$$ab = -30 \quad \text{답 } -30$$

17 $f(x) < 0$ 의 해가 $3 < x < 8$ 이므로

$$f(x) = a(x-3)(x-8) \quad (a > 0)$$

이라 하면

$$f(2x-1) = a(2x-1-3)(2x-1-8)$$

$$= 2a(x-2)(2x-9)$$

$f(2x-1) < 0$, 즉 $2a(x-2)(2x-9) < 0$ 에서

$$(x-2)(2x-9) < 0 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore 2 < x < \frac{9}{2} \quad \text{답 } 2 < x < \frac{9}{2}$$

18 $f(x) > 0$ 의 해가 $-5 < x < 1$ 이므로

$$f(x) = a(x+5)(x-1) \quad (a < 0) \quad \cdots ①$$

이라 하면

$$f(-x) = a(-x+5)(-x-1) = a(x+1)(x-5)$$

$f(-x) > 0$, 즉 $a(x+1)(x-5) > 0$ 에서

$$(x+1)(x-5) < 0 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore -1 < x < 5 \quad \cdots ②$$

따라서 정수 x 는 $0, 1, 2, 3, 4$ 이므로 구하는 합은

$$0+1+2+3+4=10 \quad \cdots ③$$

답 10

채점 기준	비율
① $f(x)$ 의 식을 세울 수 있다.	40 %
② 부등식 $f(-x) > 0$ 의 해를 구할 수 있다.	40 %
③ 모든 정수 x 의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

19 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 두 점 $(-2, 0), (4, 0)$ 에서 만나므로

$$f(x) = a(x+2)(x-4) \quad (a < 0)$$

라 하면

$$f\left(\frac{2x-k}{3}\right) = a\left(\frac{2x-k}{3}+2\right)\left(\frac{2x-k}{3}-4\right)$$

$$= \frac{a}{9}(2x-k+6)(2x-k-12)$$

$f\left(\frac{2x-k}{3}\right) > 0$, 즉 $\frac{a}{9}(2x-k+6)(2x-k-12) > 0$ 에서

$$(2x-k+6)(2x-k-12) < 0 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore \frac{k-6}{2} < x < \frac{k+12}{2}$$

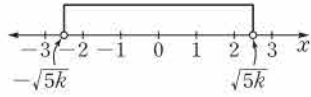
$$\frac{k-6}{2} < x < \frac{k+12}{2} \text{가 } -2 < x < 7 \text{와 같으므로}$$

$$\frac{k-6}{2} = -2, \frac{k+12}{2} = 7 \quad \therefore k=2 \quad \text{답 ④}$$

다른 풀이 $f\left(\frac{2x-k}{3}\right) > 0$ 에서 $\frac{2x-k}{3} = t$ 로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t) > 0$ 을 만족시키는 t 의 값의 범위는 $-2 < t < 4$ 이므로 $-2 < \frac{2x-k}{3} < 4 \quad \therefore \frac{k-6}{2} < x < \frac{k+12}{2}$

20 $x^2 - 5k < 0$ 에서 $(x + \sqrt{5k})(x - \sqrt{5k}) < 0$
 $\therefore -\sqrt{5k} < x < \sqrt{5k}$

이때 $-\sqrt{5k} < x < \sqrt{5k}$ 를 만족시키는 정수 x 가 5개이려면 오른쪽 그림에서

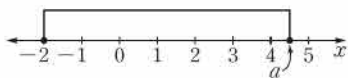


$$2 < \sqrt{5k} \leq 3, \quad 4 < 5k \leq 9 \quad \therefore \frac{4}{5} < k \leq \frac{9}{5}$$

따라서 자연수 k 의 값은 1이다. 답 1

21 $x^2 - (a-2)x - 2a \leq 0$ 에서 $(x+2)(x-a) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq x \leq a$ ($\because a > 0$) ... ①

이때 $-2 \leq x \leq a$ 를 만족시키는 정수 x 가 7개이면 오른쪽 그림에서

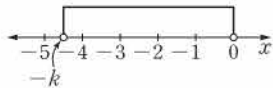


$$4 \leq a < 5 \quad \text{... ②} \quad \text{답 } 4 \leq a < 5$$

채점 기준	비율
① 주어진 부등식의 해를 a 로 나타낼 수 있다.	50 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

22 점 A의 x 좌표는 $-k$ 이고 점 B의 x 좌표는 0이므로 부등식 $f(x) - g(x) < 0$, 즉 $f(x) < g(x)$ 의 해는 $f(x) = (x+k)^2 - k^2 + k$
 $-k < x < 0$ ($\because k > 0$)

이때 $-k < x < 0$ 을 만족시키는 정수 x 가 4개이려면 오른쪽 그림에서

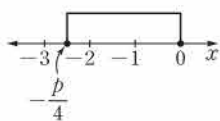


$$-5 \leq -k < -4 \quad \therefore 4 < k \leq 5 \quad \text{답 } 4 < k \leq 5$$

23 $4x^2 + px \leq 0$ 에서 $x(4x+p) \leq 0$... ①
 (i) $p > 0$ 일 때,

①에서 $-\frac{p}{4} \leq x \leq 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x 가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$$-3 < -\frac{p}{4} \leq -2$$

$$\therefore 8 \leq p < 12$$

(ii) $p = 0$ 일 때,

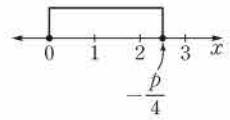
①에서 $4x^2 \leq 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x 는 0뿐이므로 주어진 조건을 만족시키는 p 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $p < 0$ 일 때,

①에서 $0 \leq x \leq -\frac{p}{4}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x 가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$$2 \leq -\frac{p}{4} < 3$$

$$\therefore -12 < p \leq -8$$

이상에서 $-12 < p \leq -8$ 또는 $8 \leq p < 12$

따라서 정수 p 의 최댓값은 11, 최솟값은 -11이므로

$$M=11, m=-11$$

$$\therefore M-m=22 \quad \text{답 ③}$$

24 이차부등식 $(a+1)x^2 + 4x + a + 1 \geq 0$ 이 해를 한 개만 가지려면

$$a+1 < 0 \quad \therefore a < -1 \quad \text{... ①}$$

또 이차방정식 $(a+1)x^2 + 4x + a + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (a+1)^2 = 0$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0, \quad (a+3)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1 \quad \text{... ②}$$

①, ②에서 $a = -3$ 답 ②

25 이차부등식 $x^2 - (k-3)x + k \leq 0$ 의 해가 오직 한 개 존재하려면 이차방정식 $x^2 - (k-3)x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D = \{-(k-3)\}^2 - 4k = 0$$

$$k^2 - 10k + 9 = 0, \quad (k-1)(k-9) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 9$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$1 + 9 = 10 \quad \text{답 10}$$

26 이차부등식 $2kx^2 - 2(k^2 - 3k)x - k + 3 \leq 0$ 이 해를 한 개만 가지려면

$$k > 0 \quad \text{... ①}$$

또 이차방정식 $2kx^2 - 2(k^2 - 3k)x - k + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(k^2 - 3k)\}^2 - 2k(-k + 3) = 0$$

$$(k^2 - 3k)^2 + 2(k^2 - 3k) = 0$$

$$(k^2 - 3k)(k^2 - 3k + 2) = 0$$

$$k(k-3)(k-2)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 1 \text{ 또는 } k = 2 \text{ 또는 } k = 3 \quad \text{... ②}$$

①, ②에서 $k = 1$ 또는 $k = 2$ 또는 $k = 3$

따라서 서로 다른 실수 k 의 개수는 3이다. 답 3

27 이차부등식 $-ax^2 + 10x - a < 0$ 을 만족시키지 않는 x 의 값이 한 개뿐이므로 이차부등식 $-ax^2 + 10x - a \geq 0$ 은 해를 한 개만 갖는다. ... ①

즉 이차부등식 $ax^2 - 10x + a \leq 0$ 이 해를 한 개만 가지므로

$$a > 0 \quad \text{... ②}$$

또 이차방정식 $ax^2-10x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-5)^2-a^2=0$$

$$a^2=25 \quad \therefore a=\pm 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①, ①에서 $a=5$ → ②

따라서 $-5x^2+10x-5<0$, 즉 $-5(x-1)^2<0$ 을 만족시키지 않는 x 의 값은 1뿐이므로

$$k=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore a+k=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

답 6

채점 기준	비율
① 부등식 $-ax^2+10x-a\geq 0$ 이 해를 한 개만 가짐을 알 수 있다.	20 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $a+k$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

28 (i) $a>0$ 일 때,

이차함수 $y=ax^2+4x+a$ 의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$ 일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+4x+a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-a^2>0, \quad a^2-4<0$$

$$(a+2)(a-2)<0 \quad \therefore -2<a<2$$

그런데 $a<0$ 이므로 $-2<a<0$

(i), (ii)에서 구하는 a 의 값의 범위는

$$-2<a<0 \text{ 또는 } a>0 \quad \text{답 } -2<a<0 \text{ 또는 } a>0$$

참고 $a=0$ 이면 주어진 부등식은 이차부등식이 아니므로 $a\neq 0$

29 이차부등식 $3x^2-x+a<0$ 이 해를 가지려면 이차방정식

$3x^2-x+a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-1)^2-4\cdot 3\cdot a>0$$

$$1-12a>0 \quad \therefore a<\frac{1}{12}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 0이다. **답 0**

30 이차부등식 $x^2-2(k-1)x+4\leq 0$ 이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+4=0$ 이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-4\geq 0$$

$$k^2-2k-3\geq 0, \quad (k+1)(k-3)\geq 0$$

$$\therefore k\leq -1 \text{ 또는 } k\geq 3 \quad \text{답 ⑤}$$

31 (i) $a>-1$ 일 때,

이차함수 $y=(a+1)x^2+2(a+1)x-3$ 의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 부등식의 해는 항상 존재한다.

(ii) $a=-1$ 일 때,

$0\cdot x^2+0\cdot x-3=-3<0$ 이므로 주어진 부등식의 해는 존재하지 않는다.

(iii) $a<-1$ 일 때,

주어진 부등식의 해가 존재하려면 이차방정식

$(a+1)x^2+2(a+1)x-3=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a+1)\cdot(-3)>0$$

$$(a+4)(a+1)>0 \quad \therefore a<-4 \text{ 또는 } a>-1$$

그런데 $a<-1$ 이므로 $a<-4$

이상에서 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$a<-4 \text{ 또는 } a>-1$$

따라서 a 의 값이 아닌 것은 ②이다. **답 ②**

32 x 의 값에 관계없이 이차부등식 $ax^2+4ax+3a-5<0$ 이 항상 성립하므로

$$a<0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 이차방정식 $ax^2+4ax+3a-5=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(2a)^2-a(3a-5)<0, \quad a^2+5a<0$$

$$a(a+5)<0 \quad \therefore -5<a<0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면 $-5<a<0$

따라서 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1$ 의 4개이다. **답 4**

33 $x^2+6ax+2a(a-7)\geq 0$ 의 해가 모든 실수이려면 이차방정식 $x^2+6ax+2a(a-7)=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4}=(3a)^2-2a(a-7)\leq 0, \quad 7a^2+14a\leq 0$$

$$7a(a+2)\leq 0 \quad \therefore -2\leq a\leq 0 \quad \text{답 ②}$$

34 모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{x^2+(k-1)x+k+2}$ 가 실수가 되려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+(k-1)x+k+2\geq 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+(k-1)x+k+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(k-1)^2-4(k+2)\leq 0, \quad k^2-6k-7\leq 0$$

$$(k+1)(k-7)\leq 0 \quad \therefore -1\leq k\leq 7$$

따라서 k 의 최댓값은 7, 최솟값은 -1 이므로 구하는 합은

$$7+(-1)=6 \quad \text{답 ③}$$

35 (i) $m=2$ 일 때,

$0\cdot x^2-0\cdot x+4=4>0$ 이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다. → ①

(ii) $m\neq 2$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여 $(m-2)x^2-2(m-2)x+4>0$ 이 성립하려면

$$m-2>0 \quad \therefore m>2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또 이차방정식 $(m-2)x^2-2(m-2)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(m-2)\}^2 - 4(m-2) < 0$$

$$(m-2)(m-6) < 0 \quad \therefore 2 < m < 6 \quad \dots\dots ㉔$$

㉓, ㉔의 공통부분을 구하면 $2 < m < 6$ ㉕

(i), (ii)에서 $2 \leq m < 6$ ㉖

답 $2 \leq m < 6$

채점 기준	비율
① $m=2$ 일 때 주어진 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립함을 알 수 있다.	30 %
② $m \neq 2$ 일 때 조건을 만족시키는 m 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ m 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

36 $-x^2 + 2(a-3)x - 2(a-3) > 0$ 에서

$$x^2 - 2(a-3)x + 2(a-3) < 0$$

이 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 - 2(a-3)x + 2(a-3) \geq 0$$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 - 2(a-3)x + 2(a-3) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(a-3)\}^2 - 2(a-3) \leq 0$$

$$(a-3)(a-5) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq a \leq 5 \quad \text{답 } 3 \leq a \leq 5$$

37 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 - 4ax + 12 > 0$$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 - 4ax + 12 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2a)^2 - 12 < 0$$

$$4a^2 - 12 < 0, \quad a^2 - 3 < 0$$

$$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3}) < 0 \quad \therefore -\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$$

따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다. 답 ①

38 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$(k+1)x^2 + 2(k+1)x - 6 \leq 0 \quad \dots\dots ㉓$$

이 성립해야 한다.

(i) $k=-1$ 일 때,

$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 6 = -6 < 0$ 이므로 ㉓은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $k \neq -1$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여 ㉓이 성립하려면

$$k+1 < 0 \quad \therefore k < -1 \quad \dots\dots ㉔$$

또 이차방정식 $(k+1)x^2 + 2(k+1)x - 6 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k+1)^2 - (k+1) \cdot (-6) \leq 0$$

$$(k+7)(k+1) \leq 0 \quad \therefore -7 \leq k \leq -1 \quad \dots\dots ㉕$$

㉔, ㉕의 공통부분을 구하면

$$-7 \leq k < -1$$

(i), (ii)에서 $-7 \leq k \leq -1$ 답 ①

39 $f(x) = -x^2 + 2x - k$ 라 하면

$$f(x) = -(x-1)^2 - k + 1$$

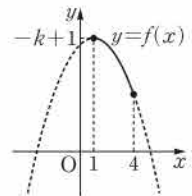
$1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$f(4) \geq 0$ 에서 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값

$$-16 + 8 - k \geq 0, \quad -k \geq 8$$

$$\therefore k \leq -8$$

따라서 k 의 최댓값은 -8 이다.



답 ③

40 $x^2 + 2ax + a^2 \leq 9$ 에서

$$x^2 + 2ax + a^2 - 9 \leq 0$$

$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 9$ 라 하면 $0 \leq x \leq 5$

에서 $f(x) \leq 0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$f(0) \leq 0$ 에서

$$a^2 - 9 \leq 0, \quad (a+3)(a-3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 3$$

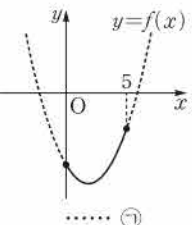
$f(5) \leq 0$ 에서 $25 + 10a + a^2 - 9 \leq 0$

$$a^2 + 10a + 16 \leq 0, \quad (a+8)(a+2) \leq 0$$

$$\therefore -8 \leq a \leq -2$$

㉓, ㉔의 공통부분을 구하면

$$-3 \leq a \leq -2$$



..... ㉓

답 $-3 \leq a \leq -2$

41 $3x^2 - 2x - 1 \leq 0$ 에서 $(3x+1)(x-1) \leq 0$

$$\therefore -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \quad \dots\dots ①$$

$-x^2 + 3x - k \leq x^2 - 5x + 4$ 에서

$$2x^2 - 8x + k + 4 \geq 0$$

$f(x) = 2x^2 - 8x + k + 4$ 라 하면

$$f(x) = 2(x-2)^2 + k - 4$$

$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로

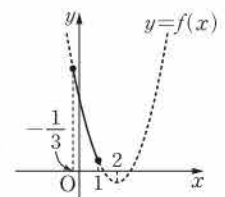
$y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$f(1) \geq 0$ 에서 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값

$$2 - 8 + k + 4 \geq 0$$

$$\therefore k \geq 2$$

따라서 k 의 최솟값은 2이다.



..... ㉓

..... ㉔

답 2

채점 기준	비율
① 부등식 $3x^2 - 2x - 1 \leq 0$ 의 해를 구할 수 있다.	30 %
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
③ k 의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

42 $f(x) > g(x)$ 에서

$$x^2 - 3ax + a^2 - 1 > -2x^2 + 3ax - 2a^2 + 2a$$

$$\therefore 3x^2 - 6ax + 3a^2 - 2a - 1 > 0$$

$h(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2 - 2a - 1$ 이라 하면

$$h(x) = 3(x-a)^2 - 2a - 1 \quad \text{축의 방정식이 } x=a \text{이다.}$$

이고 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $h(x) > 0$ 이다.

(i) $a < 0$ 일 때,

$$0 \leq x \leq 2 \text{에서 } h(x) \text{의 최솟값은 } h(0) = 3a^2 - 2a - 1 \text{이므로}$$

$$3a^2 - 2a - 1 > 0, \quad (3a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -\frac{1}{3} \text{ 또는 } a > 1$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a < -\frac{1}{3}$

(ii) $0 \leq a \leq 2$ 일 때,

$$0 \leq x \leq 2 \text{에서 } h(x) \text{의 최솟값은 } h(a) = -2a - 1 \text{이므로}$$

$$-2a - 1 > 0 \quad \therefore a < -\frac{1}{2}$$

그런데 $0 \leq a \leq 2$ 이므로 조건을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a > 2$ 일 때,

$$0 \leq x \leq 2 \text{에서 } h(x) \text{의 최솟값은 } h(2) = 3a^2 - 14a + 11 \text{이므로}$$

$$3a^2 - 14a + 11 > 0, \quad (a-1)(3a-11) > 0$$

$$\therefore a < 1 \text{ 또는 } a > \frac{11}{3}$$

그런데 $a > 2$ 이므로 $a > \frac{11}{3}$

이상에서 구하는 a 의 값의 범위는

$$a < -\frac{1}{3} \text{ 또는 } a > \frac{11}{3} \quad \text{답 } a < -\frac{1}{3} \text{ 또는 } a > \frac{11}{3}$$

43 $y = -x^2 + ax + b$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - 1$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는

$$-x^2 + ax + b > 2x - 1,$$

$$\text{즉 } x^2 + (2-a)x - 1 - b < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

의 해이다.

해가 $2 < x < 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-2)(x-4) < 0 \quad \therefore x^2 - 6x + 8 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 이 같아야 하므로

$$2-a = -6, \quad -1-b = 8 \quad \therefore a = 8, \quad b = -9$$

$$\therefore a-b = 17 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

44 $y = 2x^2 - 3x - 1$ 의 그래프가 $y = x^2 + 2x + 5$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는

$$2x^2 - 3x - 1 < x^2 + 2x + 5$$

의 해이므로

$$x^2 - 5x - 6 < 0, \quad (x+1)(x-6) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 6 \quad \text{답 } -1 < x < 6$$

45 $y = -x^2 - 4x - a$ 의 그래프가 직선 $y = -x - 3$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는

$$-x^2 - 4x - a < -x - 3,$$

$$\text{즉 } x^2 + 3x + a - 3 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

의 해이다. $\dots\dots \textcircled{1}$

해가 $x < -2$ 또는 $x > b$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)(x-b) > 0$$

$$\therefore x^2 + (2-b)x - 2b > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \text{---} \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 이 같아야 하므로

$$3 = 2 - b, \quad a - 3 = -2b \quad \therefore a = 5, \quad b = -1$$

$$\therefore ab = -5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 -5

채점 기준	비율
① 두 그래프의 위치 관계의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위를 해로 갖는 부등식을 세울 수 있다.	40 %
② 해가 $x < -2$ 또는 $x > b$ 이고 x^2 의 계수가 1인 부등식을 세울 수 있다.	30 %
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	30 %

46 $y = mx^2 + nx + mn + 2$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는

$$mx^2 + nx + mn + 2 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

의 해이다.

$\textcircled{1}$ 의 해가 $-1 < x < 3$ 이므로 $m < 0$

해가 $-1 < x < 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-3) < 0 \quad \therefore x^2 - 2x - 3 < 0$$

양변에 m 을 곱하면

$$mx^2 - 2mx - 3m > 0 \quad (\because m < 0) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 이 같아야 하므로

$$n = -2m, \quad mn + 2 = -3m$$

$n = -2m$ 을 $mn + 2 = -3m$ 에 대입하면

$$m \cdot (-2m) + 2 = -3m, \quad 2m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$(2m+1)(m-2) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } m = 2$$

그런데 $m < 0$ 이므로 $m = -\frac{1}{2}$

따라서 $n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ 이므로

$$m + n = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

47 $y = -2x^2 + 3x + 1$ 의 그래프가 직선 $y = mx + 3$ 보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$-2x^2 + 3x + 1 < mx + 3, \quad \text{즉 } 2x^2 + (m-3)x + 2 > 0$$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $2x^2 + (m-3)x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (m-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0$$

$$m^2 - 6m - 7 < 0, \quad (m+1)(m-7) < 0$$

$$\therefore -1 < m < 7$$

따라서 정수 m 의 최댓값은 6, 최솟값은 0이므로 구하는 합은 6이다. 답 $\textcircled{5}$

예제 B

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 있다는 것은 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) < g(x)$, 즉 $f(x) - g(x) < 0$ 이 성립함을 뜻한다. 따라서 '항상 아래쪽에 있도록'이라는 조건에서 '부등식이 항상 성립하도록'이라는 조건을 떠올릴 수 있어야 한다.

48 $y=mx^2+2(3-m)x+4$ 의 그래프가 x 축보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $mx^2+2(3-m)x+4>0$ 이 성립해야 하므로

$$m>0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또 이차방정식 $mx^2+2(3-m)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(3-m)^2-4m<0$$

$$m^2-10m+9<0, \quad (m-1)(m-9)<0$$

$$\therefore 1<m<9 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 의 공통부분을 구하면 $1<m<9$

$$\text{답 } 1<m<9$$

49 $y=-3x^2+2kx$ 의 그래프가 $y=kx^2-6x+2$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$-3x^2+2kx<kx^2-6x+2,$$

$$\text{즉 } (k+3)x^2-2(k+3)x+2>0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이 성립해야 한다.

(i) $k=-3$ 일 때,

$0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 2 = 2 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{A}$ 이 성립한다.

(ii) $k \neq -3$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{A}$ 이 성립하려면

$$k+3>0 \quad \therefore k>-3 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

또 이차방정식 $(k+3)x^2-2(k+3)x+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k+3)\}^2-2(k+3)<0$$

$$(k+3)(k+1)<0 \quad \therefore -3<k<-1 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}$, $\textcircled{C}$ 의 공통부분을 구하면

$$-3<k<-1$$

(i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$-3 \leq k < -1 \quad \text{답 } -3 \leq k < -1$$

50 새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각

$$(30+x) \text{ cm}, (60-x) \text{ cm}$$

이므로 넓이가 800 cm^2 이상이 되려면

$$(30+x)(60-x) \geq 800, \quad x^2-30x-1000 \leq 0$$

$$(x+20)(x-50) \leq 0 \quad \therefore -20 \leq x \leq 50$$

그런데 $0 \leq x < 60$ 이어야 하므로

$$0 \leq x \leq 50 \quad \text{--- } 60-x>0 \text{ 이어야 하므로 } x<60$$

따라서 x 의 최댓값은 50이다.

$$\text{답 } \textcircled{A}$$

51 축구공의 지면으로부터의 높이가 3 m 이상이라면

$$-5t^2+8t \geq 3, \quad 5t^2-8t+3 \leq 0$$

$$(5t-3)(t-1) \leq 0 \quad \therefore \frac{3}{5} \leq t \leq 1$$

따라서 축구공은 $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ (초) 동안 지면으로부터 3 m 이상의 높이에 있다.

$$\text{답 } \frac{2}{5} \text{ 초}$$

52 가격을 $1000x$ 원 할인한다고 하면 하루 판매량이 $4x$ 장 늘어나므로 하루 판매액은

$$(20000-1000x)(20+4x) \text{ (원)}$$

하루 판매액이 60만 원 이상이라면 $\frac{20000-1000x}{x} > 0$ 이어야 하므로

$$(20000-1000x)(20+4x) \geq 600000 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(20-x)(5+x) \geq 150, \quad x^2-15x+50 \leq 0$$

$$(x-5)(x-10) \leq 0 \quad \therefore 5 \leq x \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $5000 \leq 1000x \leq 10000$ 이므로 할인할 수 있는 최대 금액은 10000원이다.

$$\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } 10000 \text{ 원}$$

채점 기준	비율
① 부등식을 세울 수 있다.	40 %
② 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
③ 할인할 수 있는 최대 금액을 구할 수 있다.	20 %

53 $x^2-x-2>0$ 에서 $(x+1)(x-2)>0$

$$\therefore x<-1 \text{ 또는 } x>2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$x^2-x-6 \leq 0$ 에서 $(x+2)(x-3) \leq 0$

$$\therefore -2 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 의 공통부분을 구하면

$$-2 \leq x < -1 \text{ 또는 } 2 < x \leq 3$$

따라서 정수 x 는 $-2, 3$ 이므로 구하는 합은

$$-2+3=1$$

$$\text{답 } \textcircled{A}$$

54 $|2x+1|>3$ 에서 $2x+1<-3$ 또는 $2x+1>3$

$$\therefore x<-2 \text{ 또는 } x>1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$2x^2-9x+4<0$ 에서 $(2x-1)(x-4)<0$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 의 공통부분을 구하면

$$1 < x < 4$$

$$\text{답 } 1 < x < 4$$

55 $x^2+4x+3<3x^2-x+6$ 에서

$$2x^2-5x+3>0, \quad (x-1)(2x-3)>0$$

$$\therefore x<1 \text{ 또는 } x>\frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{A} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$3x^2-x+6 \leq 2x^2-2x+8$ 에서

$$x^2+x-2 \leq 0, \quad (x+2)(x-1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{B} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 의 공통부분을 구하면

$$-2 \leq x < 1$$

$$\dots\dots \textcircled{3}$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0$ 이므로 구하는 합은

$$-2+(-1)+0=-3$$

$$\dots\dots \textcircled{4}$$

$$\text{답 } -3$$

채점 기준	비율
① 부등식 $x^2+4x+3<3x^2-x+6$ 의 해를 구할 수 있다.	30 %
② 부등식 $3x^2-x+6 \leq 2x^2-2x+8$ 의 해를 구할 수 있다.	30 %
③ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %
④ 모든 정수 x 의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

56 $x^2+x-12 \geq 0$ 에서 $(x+4)(x-3) \geq 0$
 $\therefore x \leq -4$ 또는 $x \geq 3$ ㉠

$x^2+10 \geq 2x^2-3x$ 에서
 $x^2-3x-10 \leq 0$, $(x+2)(x-5) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq x \leq 5$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3 \leq x \leq 5$
 해가 $3 \leq x \leq 5$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-3)(x-5) \leq 0 \therefore x^2-8x+15 \leq 0$
 양변에 -2 를 곱하면 $-2x^2+16x-30 \geq 0$
 이 부등식이 $ax^2+bx-30 \geq 0$ 과 같으므로 상수항이 -30 이 되도록 하는 수를 곱한다.
 $a=-2, b=16$
 $\therefore a+b=14$ ㉢

57 $x^2-4x-5 > 0$ 에서 $(x+1)(x-5) > 0$
 $\therefore x < -1$ 또는 $x > 5$ ㉣

$x^2-3|x|+2 \leq 0$ 에서
 (i) $x \geq 0$ 일 때,
 $x^2-3x+2 \leq 0$, $(x-1)(x-2) \leq 0$
 $\therefore 1 \leq x \leq 2$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$
 (ii) $x < 0$ 일 때,
 $x^2+3x+2 \leq 0$, $(x+2)(x+1) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq x \leq -1$

그런데 $x < 0$ 이므로 $-2 \leq x \leq -1$
 (i), (ii)에서 $x^2-3|x|+2 \leq 0$ 의 해는
 $-2 \leq x \leq -1$ 또는 $1 \leq x \leq 2$ ㉤

㉠, ㉤의 공통부분을 구하면 $-2 \leq x < -1$
 따라서 $\alpha = -2, \beta = -1$ 이므로
 $\alpha\beta = 2$ ㉥

다른 풀이 $x^2 = |x|^2$ 이므로 $x^2-3|x|+2 \leq 0$ 에서
 $|x|^2-3|x|+2 \leq 0$, $(|x|-1)(|x|-2) \leq 0$
 $1 \leq |x| \leq 2 \therefore -2 \leq x \leq -1$ 또는 $1 \leq x \leq 2$

58 $\frac{\sqrt{2x^2+3x-9}}{\sqrt{x^2-6x+5}} = -\sqrt{\frac{2x^2+3x-9}{x^2-6x+5}}$ 이므로
 $2x^2+3x-9 > 0$, $x^2-6x+5 < 0$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면
 또는 $2x^2+3x-9=0$, $x^2-6x+5 \neq 0$ $\frac{a}{b} > 0, b < 0$ 또는 $a < 0, b > 0$

(i) $2x^2+3x-9 > 0$ 에서 $(x+3)(2x-3) > 0$
 $\therefore x < -3$ 또는 $x > \frac{3}{2}$ ㉦

$x^2-6x+5 < 0$ 에서 $(x-1)(x-5) < 0$
 $\therefore 1 < x < 5$ ㉧

㉦, ㉧의 공통부분을 구하면 $\frac{3}{2} < x < 5$

(ii) $2x^2+3x-9=0$ 에서 $(x+3)(2x-3)=0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = \frac{3}{2}$
 $x^2-6x+5 \neq 0$ 을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $x = -3$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x < 5$

따라서 x 의 값이 될 수 없는 것은 ㉡이다. ㉨

59 $x^2-2x-8 < 0$ 에서 $(x+2)(x-4) < 0$
 $\therefore -2 < x < 4$ ㉩

따라서 ㉩와 $(x-1)(x-a) < 0$ 의 해의 공통부분이 $-2 < x < 1$ 이므로 오른쪽 그림에서
 $a \leq -2$
 즉 a 의 최댓값은 -2 이다. ㉪

예제 부등식 문제에서 어떤 범위의 경계가 되는 값의 포함 여부는 그 값을 부등식에 대입하여 주어진 조건을 만족시키는지 확인하여 정한다.
 59번에서 $a = -2$ 이면 $(x-1)(x-a) < 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로 ㉩와의 공통부분이 $-2 < x < 1$ 이 된다. 따라서 -2 는 주어진 조건을 만족시키므로 a 의 값의 범위에 포함된다.

60 $2x^2-3 < x$ 에서 $2x^2-x-3 < 0$
 $(x+1)(2x-3) < 0 \therefore -1 < x < \frac{3}{2}$ ㉫

$x \leq -2x+a$ 에서 $3x \leq a$
 $\therefore x \leq \frac{a}{3}$ ㉬

㉫, ㉬의 공통부분이 $-1 < x < \frac{3}{2}$ 이므로 오른쪽 그림에서
 $\frac{a}{3} \geq \frac{3}{2} \therefore a \geq \frac{9}{2}$ ㉭

61 $a < b$ 이므로 $(x-a)(x-b) > 0$ 에서
 $x < a$ 또는 $x > b$ ㉮

$a < c$ 이므로 $(x-a)(x-c) > 0$ 에서
 $x < a$ 또는 $x > c$ ㉯

㉮, ㉯의 공통부분을 구하면
 $x < a$ 또는 $x > c$ ($\because b < c$)
 $\therefore a = -4, c = 3$

이것을 $x^2-ax+c \leq 0$ 에 대입하면
 $x^2+4x+3 \leq 0$, $(x+3)(x+1) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq x \leq -1$
 따라서 x 의 최댓값은 -1 , 최솟값은 -3 이므로 구하는 합은
 $-1+(-3) = -4$ ㉰

62 $4|x-1| < a$ 에서 $|x-1| < \frac{a}{4}$
 $-\frac{a}{4} < x-1 < \frac{a}{4}$

$\therefore -\frac{a}{4}+1 < x < \frac{a}{4}+1$ ㉱

$x^2-7x+10 < 0$ 에서 $(x-2)(x-5) < 0$
 $\therefore 2 < x < 5$ ㉲

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 ㉱, ㉲의 공통부분이 없어야 한다.

이때 $a > 0$ 에서 $-\frac{a}{4} + 1 < 1$

이므로 오른쪽 그림에서

$$\frac{a}{4} + 1 \leq 2, \quad \frac{a}{4} \leq 1$$

$$\therefore a \leq 4$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $0 < a \leq 4$

답 ② $0 < a \leq 4$

채점 기준	비율
① 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

63 모든 실수 x 에 대하여 $-x^2 + 1 < 4x + a$, 즉 $x^2 + 4x + a - 1 > 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 + 4x + a - 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = 2^2 - (a - 1) < 0$$

$$\therefore a > 5$$

모든 실수 x 에 대하여 $4x + a \leq 2x^2 + 9$, 즉 $2x^2 - 4x + 9 - a \geq 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2 - 4x + 9 - a = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-2)^2 - 2(9 - a) \leq 0$$

$$-14 + 2a \leq 0 \quad \therefore a \leq 7$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$5 < a \leq 7$$

답 ⑤ $5 < a \leq 7$

64 $x^2 - 10x + 21 \leq 0$ 에서 $(x - 3)(x - 7) \leq 0$

$$\therefore 3 \leq x \leq 7$$

$x^2 - (a + 2)x + 2a \leq 0$ 에서

$$(x - 2)(x - a) \leq 0$$

①, ②을 동시에 만족시키는 정수 x 가

4개이므로 오른쪽 그림에서

$$6 < a < 7$$

답 ⑥ $6 < a < 7$

참고 $a \leq 20$ 이면 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 존재하지 않으므로 $a > 20$ 이다. 따라서 부등식 $(x - 2)(x - a) \leq 0$ 의 해는 $2 \leq x \leq a$ 이다.

65 $x^2 - x - 2 > 0$ 에서 $(x + 1)(x - 2) > 0$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 2$$

$x^2 - (a + 1)x + a < 0$ 에서

$$(x - 1)(x - a) < 0$$

①, ②을 동시에 만족시키는 정수

x 의 값이 3뿐이므로 오른쪽 그림에서

$$3 < a \leq 4$$

답 ③

66 $x^2 + x - 6 > 0$ 에서 $(x + 3)(x - 2) > 0$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 2$$

$x^2 - a^2 \leq 0$ 에서 $(x + a)(x - a) \leq 0$

$$\therefore -a \leq x \leq a$$

..... ①

①, ②을 동시에 만족시키는 정수 x 가 3개 이상이라면 오른쪽 그림에서

$$a \geq 4$$

따라서 a 의 최솟값은 4이다.

..... ③

답 4

채점 기준	비율
① 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ a 의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

67 $x^2 - 5|x| < 0$ 에서

(i) $x \geq 0$ 일 때,

$$x^2 - 5x < 0, \quad x(x - 5) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 5$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 < x < 5$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$$x^2 + 5x < 0, \quad x(x + 5) < 0$$

$$\therefore -5 < x < 0$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $-5 < x < 0$

(i), (ii)에서 $x^2 - 5|x| < 0$ 의 해는

$$-5 < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < 5$$

..... ①

$x^2 + (2 - k)x - 2k < 0$ 에서 $(x + 2)(x - k) < 0$

(iii) $k > -2$ 일 때,

$$(x + 2)(x - k) < 0 \text{에서 } -2 < x < k$$

..... ①

①, ②을 동시에 만족시키

는 정수 x 가 1개이므로 오

른쪽 그림에서

$$-1 < k \leq 1$$

(iv) $k < -2$ 일 때,

$$(x + 2)(x - k) < 0 \text{에서 } k < x < -2$$

..... ②

①, ②을 동시에 만족시키

는 정수 x 가 1개이므로 오

른쪽 그림에서

$$-4 \leq k < -3$$

(iii), (iv)에서 $-4 \leq k < -3$ 또는 $-1 < k \leq 1$

따라서 정수 k 는 $-4, 0, 1$ 의 3개이다.

답 ③

68 $x - 1, x + 1, x + 3$ 은 변의 길이이므로

$$x - 1 > 0 \quad \therefore x > 1$$

..... ①

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x + 3$ 이므로 삼각형이 만들어질 조건에 의하여 (가장 긴 변의 길이) < (나머지 두 변의 길이의 합)

$$x + 3 < (x - 1) + (x + 1)$$

$$\therefore x > 3$$

..... ②

둔각삼각형이라면

$$(x + 3)^2 > (x - 1)^2 + (x + 1)^2$$

$$x^2 - 6x - 7 < 0, \quad (x + 1)(x - 7) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 7$$

..... ②

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $3 < x < 7$
따라서 자연수 x 는 4, 5, 6의 3개이다.

답 ①

▶ B 탐구

삼각형의 변과 각 사이의 관계

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c ($a \leq b \leq c$)일 때

① $c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow$ 예각삼각형

② $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

③ $c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow$ 둔각삼각형

69 주어진 그림에서 길의 넓이는

$$(2x+10)(2x+6) - 10 \cdot 6 = 4x^2 + 32x \text{ (m}^2\text{)}$$

길의 넓이가 80 m^2 이상 192 m^2 이하이어야 하므로

$$80 \leq 4x^2 + 32x \leq 192 \quad \therefore 20 \leq x^2 + 8x \leq 48$$

$20 \leq x^2 + 8x$ 에서

$$x^2 + 8x - 20 \geq 0, \quad (x+10)(x-2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -10 \text{ 또는 } x \geq 2$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x \geq 2$

..... ㉠

$x^2 + 8x \leq 48$ 에서

$$x^2 + 8x - 48 \leq 0, \quad (x+12)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -12 \leq x \leq 4$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $0 < x \leq 4$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

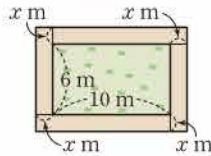
$$2 \leq x \leq 4$$

답 $2 \leq x \leq 4$

참고 오른쪽 그림과 같이 길은 네 개의 직사각형

으로 나누어 넓이를 구할 수도 있다.

$$2(6+x)x + 2(10+x)x \\ = 4x^2 + 32x \text{ (m}^2\text{)}$$



70 직사각형의 둘레의 길이가 40이므로 가로의 길이를 x 라 하면 세로의 길이는 $20-x$ 이다.

이때 $x, 20-x$ 는 변의 길이이고, 가로와 세로의 길이가 같아도 길거나 같으므로

$$x > 0, 20-x > 0, x \geq 20-x$$

$$\therefore 10 \leq x < 20$$

..... ㉠

직사각형의 넓이가 64 이상이므로

$$x(20-x) \geq 64$$

$$x^2 - 20x + 64 \leq 0, \quad (x-4)(x-16) \leq 0$$

$$\therefore 4 \leq x \leq 16$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$10 \leq x \leq 16$$

따라서 가로 길이의 최댓값은 16, 최솟값은 10이므로 구하는 합은

$$16 + 10 = 26$$

..... ㉢

답 26

채점 기준	비율
① 둘레의 길이를 이용한 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
② 넓이를 이용한 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
③ 가로 길이의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

71 이차방정식 $3x^2 - 2(a-3)x - a^2 + 9 = 0$ 이 허근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = \{-(a-3)\}^2 - 3(-a^2+9) < 0$$

$$2a^2 - 3a - 9 < 0, \quad (2a+3)(a-3) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < a < 3$$

따라서 정수 a 는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

답 ③

72 $kx^2 - (k+3)x + k = 0$ 이 이차방정식이므로

$$k \neq 0$$

..... ㉠

이차방정식 $kx^2 - (k+3)x + k = 0$ 이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$D = \{-(k+3)\}^2 - 4 \cdot k \cdot k \geq 0$$

$$-3k^2 + 6k + 9 \geq 0, \quad k^2 - 2k - 3 \leq 0$$

$$(k+1)(k-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq k \leq 3 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-1 \leq k < 0 \text{ 또는 } 0 < k \leq 3$$

답 $-1 \leq k < 0$ 또는 $0 < k \leq 3$

73 이차방정식 $x^2 - 2(k-2)x - k + 8 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 할 때

$$\frac{D_1}{4} = \{-(k-2)\}^2 - (-k+8) > 0$$

$$k^2 - 3k - 4 > 0, \quad (k+1)(k-4) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 4 \quad \text{..... ㉠} \quad \rightarrow ①$$

이차방정식 $x^2 + 4kx + k^2 + 18k = 0$ 이 허근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 할 때

$$\frac{D_2}{4} = (2k)^2 - (k^2 + 18k) < 0$$

$$3k^2 - 18k < 0, \quad 3k(k-6) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 6 \quad \text{..... ㉡} \quad \rightarrow ②$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4 < k < 6$

따라서 $\alpha = 4, \beta = 6$ 이므로

$$\alpha\beta = 24$$

..... ㉢

답 24

채점 기준	비율
① 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
② 허근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ $\alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

74 이차방정식 $x^2 + 2(k-2)x - 3k^2 - ak + 4 = 0$ 이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 할 때

$$\frac{D_1}{4} = (k-2)^2 - (-3k^2 - ak + 4) \geq 0$$

$$4k^2 + (a-4)k \geq 0 \quad \text{..... ㉠}$$

㉠이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 k 에 대한 이차방정식 $4k^2 + (a-4)k = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

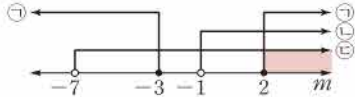
$$D_2 = (a-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0 \leq 0$$

$$(a-4)^2 \leq 0 \quad \therefore a = 4$$

답 4

75 이차방정식 $x^2 + 2(m+1)x + m+7 = 0$ 의 두 근을 α, β , 판별식을 D 라 하면

- (i) $\frac{D}{4} = (m+1)^2 - (m+7) \geq 0$
 $m^2 + m - 6 \geq 0, \quad (m+3)(m-2) \geq 0$
 $\therefore m \leq -3 \text{ 또는 } m \geq 2$ ㉠
- (ii) $\alpha + \beta = -2(m+1) < 0$
 $m+1 > 0 \quad \therefore m > -1$ ㉡
- (iii) $\alpha\beta = m+7 > 0$
 $\therefore m > -7$ ㉢

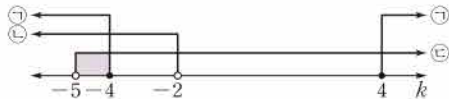


이상에서 공통부분을 구하면

$m \geq 2$ ㉤ $m \geq 2$

76 이차방정식 $x^2 + (k+2)x + k+5 = 0$ 의 두 근을 α, β , 판별식을 D 라 하면

- (i) $D = (k+2)^2 - 4(k+5) \geq 0$
 $k^2 - 16 \geq 0, \quad (k+4)(k-4) \geq 0$
 $\therefore k \leq -4 \text{ 또는 } k \geq 4$ ㉠
- (ii) $\alpha + \beta = -(k+2) > 0$
 $k+2 < 0 \quad \therefore k < -2$ ㉡
- (iii) $\alpha\beta = k+5 > 0$
 $\therefore k > -5$ ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $-5 < k \leq -4$

따라서 k 의 최댓값은 -4 이다. ㉤ $k \leq -4$

77 이차방정식 $3x^2 + (m^2 + 4m - 5)x + m^2 - 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta = \frac{m^2 - 4}{3} < 0, \quad m^2 - 4 < 0$
 $(m+2)(m-2) < 0 \quad \therefore -2 < m < 2$ ㉠

또 두 근의 절댓값이 같으므로

$\alpha + \beta = -\frac{m^2 + 4m - 5}{3} = 0$
 $m^2 + 4m - 5 = 0, \quad (m+5)(m-1) = 0$
 $\therefore m = -5 \text{ 또는 } m = 1$ ㉡

㉠, ㉡에서 $m = 1$ ㉤ 1

예제 B

이차방정식의 두 실근의 절댓값

이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호일 때

- ① 양수인 근 < 음수인 근
 $\Rightarrow$ (두 근의 합) > 0 , (두 근의 곱) < 0
- ② 양수인 근 > 음수인 근
 $\Rightarrow$ (두 근의 합) < 0 , (두 근의 곱) < 0
- ③ 양수인 근 < 음수인 근
 $\Rightarrow$ (두 근의 합) < 0 , (두 근의 곱) < 0

78 이차방정식 $x^2 - (k^2 - 6k + 5)x - 4k + 8 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta = -4k + 8 < 0$
 $\therefore k > 2$ ㉠ $\rightarrow$ ①

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 작으므로

$\alpha + \beta = k^2 - 6k + 5 > 0$
 $(k-1)(k-5) > 0$
 $\therefore k < 1 \text{ 또는 } k > 5$ ㉡ $\rightarrow$ ②

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$k > 5$ ㉢ $\rightarrow$ ③
답 $k > 5$

채점 기준	비율
① 두 근의 부호가 서로 다르도록 하는 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
② 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 작도록 하는 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 조건을 모두 만족시키는 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

79 $f(x) = x^2 - 2kx + 6 - k$ 라 하면 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 작으므로

(i) $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (6 - k) \geq 0$
 $k^2 + k - 6 \geq 0, \quad (k+3)(k-2) \geq 0$
 $\therefore k \leq -3 \text{ 또는 } k \geq 2$

(ii) $f(1) = 1 - 2k + 6 - k > 0$

$-3k + 7 > 0 \quad \therefore k < \frac{7}{3}$

(iii) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = k$ 이므로

$k < 1$

이상에서 공통부분을 구하면 $k \leq -3$ ㉤ $k \leq -3$

80 $f(x) = x^2 + 5px + 5p - 1$ 이라 하면 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 모두 -2 보다 크므로

(i) $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = (5p)^2 - 4(5p - 1) \geq 0$
 $25p^2 - 20p + 4 \geq 0 \quad \therefore (5p - 2)^2 \geq 0$

따라서 p 는 모든 실수이다.

(ii) $f(-2) = 4 - 10p + 5p - 1 > 0$

$-5p + 3 > 0 \quad \therefore p < \frac{3}{5}$

(iii) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = -\frac{5}{2}p$ 이므로

로

$-\frac{5}{2}p > -2 \quad \therefore p < \frac{4}{5}$

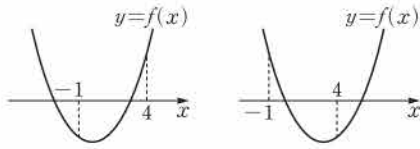
이상에서 공통부분을 구하면 $p < \frac{3}{5}$

따라서 정수 p 의 최댓값은 0이다. ㉤ ③

81 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 에서 $(x+1)(x-4) = 0$

$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$

즉 $x^2+2ax-8=0$ 의 한 근만이 -1 과 4 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2+2ax-8$ 이라 하면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(-1)f(4)<0$ 이므로

$$(1-2a-8)(16+8a-8)<0$$

$$(-2a-7)(8a+8)<0, \quad (2a+7)(a+1)>0$$

$$\therefore a < -\frac{7}{2} \text{ 또는 } a > -1 \quad \text{답 } a < -\frac{7}{2} \text{ 또는 } a > -1$$

82 $f(x)=x^2-(k+2)x-k+1$ 이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 모두 0 과 2 사이에 있으므로

(i) $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=\{-(k+2)\}^2-4(-k+1)\geq 0$$

$$k^2+8k\geq 0, \quad k(k+8)\geq 0$$

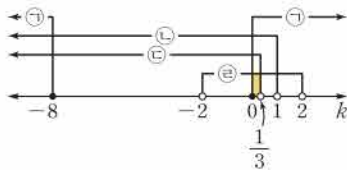
$$\therefore k\leq -8 \text{ 또는 } k\geq 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(ii) $f(0)=-k+1>0 \quad \therefore k<1 \quad \dots\dots \text{㉡}$

(iii) $f(2)=4-2(k+2)-k+1>0$
 $1-3k>0 \quad \therefore k<\frac{1}{3} \quad \dots\dots \text{㉢}$

(iv) 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{k+2}{2}$ 이므로

$$0<\frac{k+2}{2}<2 \quad \therefore -2<k<2 \quad \dots\dots \text{㉣}$$



이상에서 공통부분을 구하면

$$0\leq k<\frac{1}{3} \quad \text{답 } 0\leq k<\frac{1}{3}$$

83 $x^2=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2+2mX-2m+3=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지므로 이차방정식 ㉠의 두 근이 서로 다른 양수이어야 한다.

(i) ㉠의 판별식을 D 라 하면

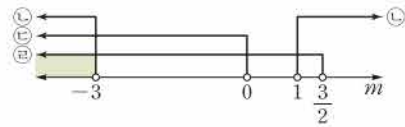
$$\frac{D}{4}=m^2-(-2m+3)>0$$

$$m^2+2m-3>0, \quad (m+3)(m-1)>0$$

$$\therefore m<-3 \text{ 또는 } m>1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

(ii) ㉠의 두 근의 합 $= -2m>0$
 $\therefore m<0 \quad \dots\dots \text{㉢}$

(iii) ㉠의 두 근의 곱 $= -2m+3>0$
 $\therefore m<\frac{3}{2} \quad \dots\dots \text{㉣}$



이상에서 공통부분을 구하면

$$m<-3 \quad \text{답 } m<-3$$

84 $x^2=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2-kX+k^2-3k-18=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 X 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이 서로 다른 부호이어야 하므로

$$k^2-3k-18<0, \quad (k+3)(k-6)<0$$

$$\therefore -3<k<6$$

따라서 정수 k 는 $-2, -1, 0, \dots, 5$ 의 8개이다. 답 ㉢

85 $x^4-2kx^2+k^2-10k=-x^2-16$ 에서

$$x^4+(1-2k)x^2+k^2-10k+16=0$$

$x^2=X$ 로 놓으면 이 방정식은

$$X^2+(1-2k)X+k^2-10k+16=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 주어진 사차방정식이 실근만을 가지므로 X 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이 모두 음이 아닌 실수이어야 한다.

(i) ㉠의 판별식을 D 라 하면

$$D=(1-2k)^2-4(k^2-10k+16)\geq 0$$

$$36k-63\geq 0 \quad \therefore k\geq \frac{7}{4} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

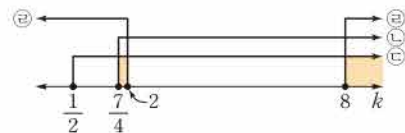
(ii) ㉠의 두 근의 합 $=2k-1\geq 0$

$$\therefore k\geq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

(iii) ㉠의 두 근의 곱 $=k^2-10k+16\geq 0$

$$(k-2)(k-8)\geq 0$$

$$\therefore k\leq 2 \text{ 또는 } k\geq 8 \quad \dots\dots \text{㉣}$$



이상에서 공통부분을 구하면 $\frac{7}{4}\leq k\leq 2$ 또는 $k\geq 8$

따라서 k 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$ 이다. 답 ㉢

09 순열과 조합

IV. 순열과 조합

개념정리

본책 104쪽

- ① $m+n$ ② $m \times n$ ③ 1 ④ $n!$ ⑤ $n-r$
 ⑥ ${}_nC_r$ ⑦ 3! ⑧ $n!$

유형 뽐내기

본책 105쪽

001 서로 다른 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 차가 2가 되는 경우는

(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 6),
 (5, 3), (6, 4)의 8가지

(ii) 눈의 수의 차가 4가 되는 경우는

(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$$8+4=12$$

답 12

002 각 자리의 숫자의 합이 9인 두 자리 자연수를 택하는 경우는

18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90의 9가지

각 자리의 숫자의 합이 14인 두 자리 자연수를 택하는 경우는

59, 68, 77, 86, 95의 5가지

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$$9+5=14$$

답 ③

003 꺼낸 카드에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 세 수의 곱이 2가 되는 경우는

(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3가지 ... ①

(ii) 세 수의 곱이 8이 되는 경우는

(1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (2, 2, 2),
 (2, 4, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1)의 7가지 ... ②

두 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$$3+7=10$$

... ③

답 10

채점 기준	비율
① 세 수의 곱이 2가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
② 세 수의 곱이 8이 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
③ 세 수의 곱이 2 또는 8이 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

004 1부터 105까지의 자연수 중에서

(i) 3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수는

3, 6, 9, ..., 105의 35개

(ii) 7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수는

7, 14, 21, ..., 105의 15개

(iii) 3과 7로 나누어떨어지는 수, 즉 21의 배수는

21, 42, 63, 84, 105의 5개

이상에서 3 또는 7로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$$35+15-5=45$$

이므로 3과 7로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는

$$105-45=60$$

답 ④

005 (i) $x=1$ 일 때, $2y+z=19$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는

(1, 17), (2, 15), (3, 13), (4, 11), (5, 9),
 (6, 7), (7, 5), (8, 3), (9, 1)의 9개

(ii) $x=2$ 일 때, $2y+z=15$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는

(1, 13), (2, 11), (3, 9), (4, 7),
 (5, 5), (6, 3), (7, 1)의 7개

(iii) $x=3$ 일 때, $2y+z=11$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는

(1, 9), (2, 7), (3, 5), (4, 3), (5, 1)의 5개

(iv) $x=4$ 일 때, $2y+z=7$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는

(1, 5), (2, 3), (3, 1)의 3개

(v) $x=5$ 일 때, $2y+z=3$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는

(1, 1)의 1개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$9+7+5+3+1=25$$

답 25

006 x, y 가 자연수이므로 $x+3y \leq 7$ 을 만족시키는 경우는

$$x+3y=4, x+3y=5, x+3y=6, x+3y=7$$

(i) $x+3y=4$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는

(1, 1)의 1개

(ii) $x+3y=5$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는

(2, 1)의 1개

(iii) $x+3y=6$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는

(3, 1)의 1개

(iv) $x+3y=7$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는

(1, 2), (4, 1)의 2개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$1+1+1+2=5$$

답 ③

예제 B

부등식 $ax+by \leq c$ (a, b, c 는 상수)를 만족시키는 경우는 x, y 의 조건에 따라 다음과 같이 구한다.

① x, y 가 자연수일 때 $ax+by$ 의 최솟값은 $x=1, y=1$ 을 대입한 값, 즉 $a+b$ 이므로

$$a+b \leq ax+by \leq c$$

② x, y 가 음이 아닌 정수일 때 $ax+by$ 의 최솟값은 $x=0, y=0$ 을 대입한 값, 즉 0이므로

$$0 \leq ax+by \leq c$$

다른 풀이 (i) $y=1$ 일 때, $x+3 \leq 7$, 즉 $x \leq 4$ 이므로 순서쌍

(x, y) 는

(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)의 4개

(ii) $y=2$ 일 때, $x+6 \leq 7$, 즉 $x \leq 1$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

(1, 2)의 1개

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $4+1=5$

007 x, y 가 음이 아닌 정수이므로 $2x+y<5$ 를 만족시키는 경우는

$$2x+y=0, 2x+y=1, 2x+y=2, \\ 2x+y=3, 2x+y=4$$

(i) $2x+y=0$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(0, 0)$ 의 1개

(ii) $2x+y=1$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(0, 1)$ 의 1개

(iii) $2x+y=2$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(0, 2), (1, 0)$ 의 2개

(iv) $2x+y=3$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(0, 3), (1, 1)$ 의 2개

(v) $2x+y=4$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(0, 4), (1, 2), (2, 0)$ 의 3개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는 $1+1+2+2+3=9$

답 9

008 이차함수 $y=x^2+(a-b)x-ab+9$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+(a-b)x-ab+9=0$ 이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$D=(a-b)^2-4(-ab+9)<0 \\ a^2+2ab+b^2-36<0, \quad (a+b)^2-36<0 \\ \{(a+b)+6\}\{(a+b)-6\}<0 \\ \therefore -6<a+b<6$$

이때 $a+b$ 의 값은 2 이상의 자연수이므로

$$a+b=2, a+b=3, a+b=4, a+b=5$$

(i) $a+b=2$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1)$ 의 1개

(ii) $a+b=3$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (2, 1)$ 의 2개

(iii) $a+b=4$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 3개

(iv) $a+b=5$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ 의 4개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는 $1+2+3+4=10$

답 ⑤

009 백의 자리의 숫자는 소수이므로 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 3, 5, 7의 4개

십의 자리의 숫자는 9의 양의 약수이므로 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 9의 3개

짝수이므로 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 0, 2, 4, 6, 8의 5개

따라서 구하는 짝수의 개수는

$$4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

답 ④

010 $(x+y+z)(p+q+r)$ 에서 x, y, z 에 곱해지는 항이 각각 p, q, r 의 3개이므로 항의 개수는

$$3 \cdot 3 = 9$$

답 ③

예 B 특

항의 개수

두 다항식 A, B 의 각 항의 문자가 모두 다르면 AB 의 전개식에서 항의 개수는

$$(A \text{의 항의 개수}) \times (B \text{의 항의 개수})$$

011 외국어, 컴퓨터 과목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$$5 \cdot 4 = 20$$

컴퓨터, 요리 과목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$$4 \cdot 2 = 8$$

외국어, 요리 과목의 강좌를 수강하는 경우의 수는

$$5 \cdot 2 = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 + 8 + 10 = 38$$

답 38

012 a^2+b^2 이 짝수이려면

a^2, b^2 이 모두 홀수 또는 a^2, b^2 이 모두 짝수 이어야 한다.

(i) a^2, b^2 이 모두 홀수인 경우

a, b 가 모두 홀수인 경우이므로 그 경우의 수는 $5 \cdot 3 = 15$

→ ①

(ii) a^2, b^2 이 모두 짝수인 경우

a, b 가 모두 짝수인 경우이므로 그 경우의 수는 $4 \cdot 3 = 12$

→ ②

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$15 + 12 = 27$$

→ ③

답 27

채점 기준	비율
① a^2, b^2 이 모두 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
② a^2, b^2 이 모두 짝수인 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
③ a^2+b^2 이 짝수인 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

013 54를 소인수분해 하면 $54=2 \cdot 3^3$

54의 양의 약수의 개수는

$$(1+1)(3+1)=8 \quad \therefore a=8$$

180을 소인수분해 하면 $180=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

180의 양의 약수의 개수는

$$(2+1)(2+1)(1+1)=18 \quad \therefore b=18$$

$$\therefore a+b=26$$

답 26

014 360을 소인수분해 하면

$$360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

630을 소인수분해 하면

$$630=2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

즉 360과 630의 최대공약수는 $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ 이다.

따라서 360과 630의 양의 공약수의 개수는 $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ 의 양의 약수의 개수와 같으므로 구하는 개수는

$$(1+1)(2+1)(1+1)=12$$

답 ⑤

015 75를 소인수분해 하면 $75=3 \cdot 5^2$
 $75^n=(3 \cdot 5^2)^n=3^n \cdot 5^{2n}$ 의 양의 약수의 개수는
 $(n+1)(2n+1)$

따라서 $(n+1)(2n+1)=66$ 이므로
 $2n^2+3n-65=0, \quad (2n+13)(n-5)=0$
 $\therefore n=5$ ($\because n$ 은 자연수)

답 5

016 1080을 소인수분해 하면 $1080=2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$... ①
 3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 1080의 양의 약수 중 3의 배
 수의 개수는 $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ 의 양의 약수의 개수와 같다.

$\therefore p=(3+1)(2+1)(1+1)=24$... ②

5의 배수는 5를 소인수로 가지므로 1080의 양의 약수 중 5의 배
 수의 개수는 $2^3 \cdot 3^3$ 의 양의 약수의 개수와 같다.

$\therefore q=(3+1)(3+1)=16$... ③

$\therefore p+q=40$... ④

답 40

채점 기준	비율
① 1080을 소인수분해 할 수 있다.	10 %
② p 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ q 의 값을 구할 수 있다.	40 %
④ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 1080의 양의 약수 중 3의 배수는 $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ 의 양의 약수에 각각 3을 곱한
 것이고, 1080의 양의 약수 중 5의 배수는 $2^3 \cdot 3^3$ 의 양의 약수에 각각 5를 곱한
 것이다.

017 (i) 지불할 수 있는 방법의 수

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은
 0장, 1장, 2장의 3가지

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는
 방법의 수는

$3 \cdot 4 \cdot 4 - 1 = 47 \quad \therefore a = 47$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리
 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 1000원짜리
 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금
 액의 수는 500원짜리 동전 7개, 100원짜리 동전 3개로 지불
 할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
 0원, 500원, 1000원, ..., 3500원의 8가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
 0원, 100원, 200원, 300원의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는
 금액의 수는

$8 \cdot 4 - 1 = 31 \quad \therefore b = 31$

(i), (ii)에서 $a-b=16$

답 ②

018 10000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장의 2가지 ... ①

5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장의 5가지 ... ②

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지 ... ③

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$2 \cdot 5 \cdot 3 - 1 = 29$... ④

답 29

채점 기준	비율
① 10000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
② 5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
③ 1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	20 %
④ 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.	40 %

019 50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동
 전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 3개
 를 50원짜리 동전 6개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500
 원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 9개로 지불할 수 있는 금액의
 수와 같다.

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원의 3가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, ..., 450원의 10가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$3 \cdot 10 - 1 = 29$ **답 ②**

020 (i) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \cdot 3 = 6$

(ii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $4 \cdot 3 = 12$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6 + 12 = 18$ **답 18**

021 (i) 입구 $\rightarrow$ 승터 $\rightarrow$ 정상으로 가는 경우의 수는

$3 \cdot 2 = 6$

(ii) 입구 $\rightarrow$ 약수터 $\rightarrow$ 정상으로 가는 경우의 수는

$2 \cdot 1 = 2$

(iii) 입구 $\rightarrow$ 승터 $\rightarrow$ 약수터 $\rightarrow$ 정상으로 가는 경우의 수는

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

(iv) 입구 $\rightarrow$ 약수터 $\rightarrow$ 승터 $\rightarrow$ 정상으로 가는 경우의 수는

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

이상에서 구하는 경우의 수는

$6 + 2 + 6 + 8 = 22$ **답 22**

022 A 지점과 B 지점을 연결하는 x 개의 도로를 추가한다고 하
 면

(i) 집 $\rightarrow$ A $\rightarrow$ 학교로 가는 경우의 수는

$3 \cdot 4 = 12$

(ii) 집 $\rightarrow B \rightarrow$ 학교로 가는 경우의 수는

$$2 \cdot 2 = 4$$

(iii) 집 $\rightarrow A \rightarrow B \rightarrow$ 학교로 가는 경우의 수는

$$3 \cdot x \cdot 2 = 6x$$

(iv) 집 $\rightarrow B \rightarrow A \rightarrow$ 학교로 가는 경우의 수는

$$2 \cdot x \cdot 4 = 8x$$

이상에서 집에서 학교로 가는 경우의 수는

$$12 + 4 + 6x + 8x = 16 + 14x \quad \cdots ①$$

$$16 + 14x = 72 \text{에서} \quad 14x = 56 \quad \therefore x = 4$$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 4이다. ②

답 4

채점 기준	비율
① 집에서 학교로 가는 경우의 수를 추가해야 하는 도로의 개수를 이용하여 나타낼 수 있다.	70 %
② 추가해야 하는 도로의 개수를 구할 수 있다.	30 %

023 B에 칠할 수 있는 색은 5가지, D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 4가지, E에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 B와 E에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 540 \quad \text{답 540}$$

024 B에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 \quad \text{답 ⑤}$$

025 (i) A와 D에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, C에 칠할 수 있는 색은 A(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$$4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 36 \quad \cdots ①$$

(ii) A와 D에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48 \quad \cdots ②$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$36 + 48 = 84 \quad \cdots ③$$

답 84

채점 기준	비율
① A와 D에 같은 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
② A와 D에 다른 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
③ 색을 칠하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

026 (i) C와 E에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C(E)에 칠한 색을 제외한 3가지, F에 칠할 수 있는 색은 B와 C(E)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 540$$

(ii) C와 E에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C, E에 칠한 색을 제외한 2가지, F에 칠할 수 있는 색은 B, C, E에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 480$$

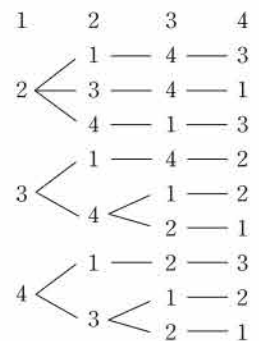
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$540 + 480 = 1020 \quad \text{답 ③}$$

027 1, 2, 3, 4가 적힌 봉투에 주어진 조건을 만족시키도록 카드를 넣는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 9이다.

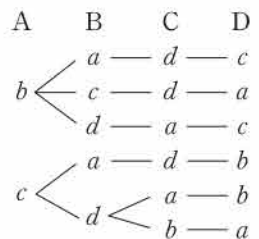
답 ③



028 A, B, C, D의 공책을 각각 a, b, c, d라 하고 주어진 조건을 만족시키도록 공책을 받는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 6이다.

답 6



029 6개의 문자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ 답 ⑤

030 8개의 액자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_8P_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ 답 ④

031 ${}_nP_2 = 132$ 이므로

$$n(n-1) = 132 = 12 \cdot 11 \quad \therefore n = 12 \quad \text{답 12}$$

032 여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$

여학생 3명의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \cdot 6 = 144 \quad \text{답 ⑤}$$

033 1학년 학생 3명을 한 사람, 2학년 학생 2명을 한 사람으로
생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5! = 120$$

1학년 학생 3명의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$3! = 6$$

2학년 학생 2명의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \cdot 6 \cdot 2 = 1440$$

답 1440

034 도넛 2개를 한 묶음으로 생각하여 $(n+1)$ 개를 일렬로 나
열하는 경우의 수는 $(n+1)!$

도넛 2개의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 도넛끼리 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$$(n+1)! \cdot 2$$

... ①

즉 $(n+1)! \cdot 2 = 48$ 이므로

$$(n+1)! = 24 = 4!$$

$$n+1 = 4 \quad \therefore n = 3$$

... ②

답 3

채점 기준	비율
① 도넛끼리 이웃하게 나열하는 경우의 수를 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
② n 의 값을 구할 수 있다.	40 %

035 (i) a, b 를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열
하는 경우의 수는 $4! = 24$

a, b 의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

즉 a, b 를 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$$24 \cdot 2 = 48$$

(ii) b, c, d 를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는
경우의 수는 $3! = 6$

b, c, d 의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$

즉 b, c, d 를 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$$6 \cdot 6 = 36$$

(iii) a, b 와 b, c, d 가 동시에 이웃하는 경우는

$abcd, abdc, cdab, dcba$ 의 4가지

a, b, c, d 를 한 문자로 생각하여 2개의 문자를 일렬로 나열
하는 경우의 수는 $2! = 2$

즉 a, b 와 b, c, d 가 동시에 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$$4 \cdot 2 = 8$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$48 + 36 + 8 = 92$$

답 ④

036 바이올린 연주자 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$4! = 24$$

바이올린 연주자들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 첼로 연주
자 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \cdot 20 = 480$$

답 480

037 5개의 자음 p, r, d, c, t를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$5! = 120$$

... ①

자음의 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리에 2개의 모음 e, i를 나
열하는 경우의 수는 ${}_6P_2 = 30$

... ②

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \cdot 30 = 3600$$

... ③

답 3600

채점 기준	비율
① 자음을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
② 자음의 사이사이 및 양 끝에 모음을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
③ 모음끼리 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

038 접시 4개에만 케이크를 올려 놓으므로 빈 접시는 4개이다.

빈 접시들 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 케이크를 올려 놓
은 접시 4개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_5P_4 = 120$$

답 120

039 A, B, C를 한 사람으로 생각하여 E, F를 제외한 3명을
일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

A, B, C의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$

A, B, C의 묶음과 D, G의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에
E, F를 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \cdot 6 \cdot 12 = 432$$

답 ⑤

040 어른은 5명이므로 양 끝에 어른 2명을 세우는 경우의 수
는 ${}_5P_2 = 20$

양 끝의 어른 2명을 제외한 나머지 5명을 일렬로 세우는 경우의
수는 $5! = 120$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \cdot 120 = 2400$$

답 ④

041 소수는 3, 5, 7의 3개, 합성수는 4, 6, 8, 9의 4개이므로
합성수 4개를 일렬로 나열한 후 그 사이사이에 소수 3개를 나열
하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$$

답 ②

042 3개의 모음 o, u, a를 4개의 짝수 번째 자리 중 3개의 자
리에 나열하는 경우의 수는

$${}_4P_3 = 24$$

... ①

나머지 빈 5개의 자리에 5개의 자음을 나열하는 경우의 수는

$$5! = 120$$

... ②

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \cdot 120 = 2880$$

... ③

답 2880

채점 기준	비율
① 모음을 짝수 번째 자리에 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
② 자음을 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
③ 문자를 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

043 남학생 6명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$$6! = 720$$

남학생이 앉은 사이사이의 5개의 자리에 여학생 2명이 앉는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$720 \cdot 20 = 14400$$

답 14400

044 사과와 귤을 제외한 3개의 과일 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

사과와 귤과 그 사이의 2개의 과일을 한 묶음으로 생각하여 2개의 과일을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$

사과와 귤의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$$

답 24



특정한 두 개 사이에 일부가 있는 순열의 수

특정한 A, B 사이에 일부가 있도록 일렬로 나열하는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

- (i) A, B 사이에 일부를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.
- (ii) A, B와 그 사이의 일부를 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과 나머지를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.
- (iii) A와 B의 자리를 바꾸는 경우의 수를 구한다.
- (iv) (i), (ii), (iii)의 결과를 곱한다.

045 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$6! = 720$$

짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 경우의 수는

$${}_2P_2 \cdot {}_4P_2 = 144$$

따라서 구하는 경우의 수는 일렬로 나열하는 경우의 수

$$720 - 144 = 576$$

답 ④

046 (1) 9명의 학생 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$${}_9P_2 = 72$$

→ ①

(2) 1학년 학생 5명 중에서 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$${}_5P_2 = 20$$

→ ②

(3) 모든 경우의 수에서 회장, 부회장 모두 1학년 학생을 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$$72 - 20 = 52$$

→ ③

답 (1) 72 (2) 20 (3) 52

채점 기준	비율
① 모든 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
② 회장, 부회장 모두 1학년 학생을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
③ 회장, 부회장 중에서 적어도 한 명은 2학년 학생을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %

047 6명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$6! = 720$$

A, B, C 중에서 어느 2명도 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수는 A, B, C를 제외한 3명을 일렬로 세우고 그 3명의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 A, B, C를 세우는 경우의 수와 같으므로

$$3! \cdot {}_4P_3 = 144$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$720 - 144 = 576$$

답 ①

048 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

5개의 숫자 0, 1, 3, 5, 7에서 서로 다른 3개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

$$0, 1, 5 \text{ 또는 } 0, 5, 7 \text{ 또는 } 1, 3, 5 \text{ 또는 } 3, 5, 7$$

(i) 0, 1, 5로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$$\frac{2 \cdot 2!}{2} = 4 \quad \text{백의 자리에는 0이 올 수 없다.}$$

(ii) 0, 5, 7로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$$2 \cdot 2! = 4$$

(iii) 1, 3, 5로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$$3! = 6$$

(iv) 3, 5, 7로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$$3! = 6$$

이상에서 구하는 3의 배수의 개수는

$$4 + 4 + 6 + 6 = 20$$

답 ④

049 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 4의 3개

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개

백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

$${}_4P_2 = 12$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$3 \cdot 4 \cdot 12 = 144$$

답 ⑤

050 7개의 숫자로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$${}_7P_4 = 840$$

천의 자리와 백의 자리의 숫자가 모두 짝수인 네 자리 자연수의 개수는

$$\frac{2 \cdot 2!}{2} \cdot {}_5P_2 = 6 \cdot 20 = 120$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 십의 자리와 일의 자리에는 나머지 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열한다.

$$840 - 120 = 720$$

답 ③

051 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

→ ①

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수는 0을 제외한 6개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6P_3=120$

→ ②

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 5개 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로 ${}_5P_2=20$

따라서 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수는

$$5 \cdot 20 = 100$$

→ ③

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$$120 + 100 = 220$$

→ ④

답 220

채점 기준	비율
① 5의 배수가 되는 경우를 알 수 있다.	20 %
② 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	30 %
③ 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
④ 5의 배수의 개수를 구할 수 있다.	10 %

052 a로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

ba로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bc로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bd로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

bea로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

bec로 시작하는 것의 개수는 $2!=2$

bed로 시작하는 것은 순서대로 $bedac, bedca$ 의 2개

따라서 $bedca$ 까지의 개수는

$$24 + 6 + 6 + 6 + 2 + 2 + 2 = 48$$

이므로 $bedca$ 는 48번째에 온다.

답 48번째

053 3600보다 작은 자연수는 $1000, 2000, 3100,$

$3200, 3400, 3500$ 풀이다.

→ ①

1000 풀인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

2000 풀인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

3100 풀인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

3200 풀인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

3400 풀인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

3500 풀인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

→ ②

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$60 + 60 + 12 + 12 + 12 + 12 = 168$$

→ ③

답 168

채점 기준	비율
① 3600보다 작은 자연수의 풀을 구할 수 있다.	30 %
② 각 풀의 자연수의 개수를 구할 수 있다.	50 %
③ 3600보다 작은 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20 %

054 e로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

m으로 시작하는 것의 개수는 $5!=120$

ne로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

nm으로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

no로 시작하는 것의 개수는 $4!=24$

nre로 시작하는 것의 개수는 $3!=6$

따라서 e로 시작하는 것부터 nre로 시작하는 것까지의 개수는

$$120 + 120 + 24 + 24 + 24 + 6 = 318$$

이므로 319번째에 오는 것은 nrmeot

답 ③

055 970000 풀인 자연수의 개수는 $4!=24$

950000 풀인 자연수의 개수는 $4!=24$

930000 풀인 자연수의 개수는 $4!=24$

917000 풀인 자연수의 개수는 $3!=6$

915000 풀인 자연수의 개수는 $3!=6$

913700 풀인 자연수의 개수는 $2!=2$

따라서 975310 부터 913705 까지의 자연수의 개수는

$$24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 = 86$$

이므로 구하는 수는 $913570, 913507, \dots$ 에서 913507 이다.

답 ②

056 ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$ 이므로 $35 = \frac{210}{r!}$

$$r! = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \therefore r = 3$$

또 ${}_nP_3 = 210 = 7 \cdot 6 \cdot 5$ 에서 $n = 7$

$$\therefore n - r = 4$$

답 ④

예 B $\frac{E_1}{E_2}$

서로 다른 n 개에서 r ($0 < r \leq n$)개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r$ 이고, 그 각각에 대하여 r 개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $r!$ 이다. 이는 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 순열의 수 ${}_nP_r$ 와 같으므로

$${}_nC_r \cdot r! = {}nP_r \quad \therefore {}nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

057 $10 \cdot {}_{n+1}P_3 = 3 \cdot {}_nP_4$ 에서

$$10(n+1)n(n-1) = 3n(n-1)(n-2)(n-3)$$

${}_nP_4$ 에서 $n \geq 4$ 이므로 등식의 양변을 $\frac{n(n-1)}{n \geq 4 \text{이면 } n(n-1) \neq 0}$ 로 나누면

$$10(n+1) = 3(n-2)(n-3)$$

$$3n^2 - 25n + 8 = 0, \quad (3n-1)(n-8) = 0$$

$$\therefore n = 8 \quad (\because n \geq 4)$$

답 8

058 ${}_{11}C_{2r-2} = {}_{11}C_{r^2-2}$ 에서

$$2r-2 = r^2-2 \text{ 또는 } 11-(2r-2) = r^2-2$$

(i) $2r-2 = r^2-2$ 일 때,

$$r^2 - 2r = 0, \quad r(r-2) = 0$$

$$\therefore r = 2 \quad (\because r \geq 2)$$

(ii) $11-(2r-2) = r^2-2$ 일 때,

$$-2r + 13 = r^2 - 2, \quad r^2 + 2r - 15 = 0$$

$$(r+5)(r-3) = 0 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r \geq 2)$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 r 의 값의 곱은

$$2 \cdot 3 = 6$$

답 ①

059 $2 \cdot {}_{n+1}C_3 - {}_nP_2 - 6 \cdot {}_{n-1}C_2 = 0$ 에서

$$2 \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \cdot 2 \cdot 1} - n(n-1) - 6 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1} = 0$$

$$n(n+1)(n-1) - 3n(n-1) - 9(n-1)(n-2) = 0$$

${}_{n-1}C_2$ 에서 $n-1 \geq 2$, 즉 $n \geq 3$ 이므로 등식의 양변을 $n-1$ 로 나누면

$$n(n+1) - 3n - 9(n-2) = 0, \quad n^2 - 11n + 18 = 0$$

$$(n-2)(n-9) = 0$$

$$\therefore n = 9 \quad (\because n \geq 3)$$

답 ④

060 이차방정식 ${}_nC_4x^2 + 2 \cdot {}_nC_5x - 7 \cdot {}_nC_2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{2 \cdot {}_nC_5}{{}_nC_4}, \quad \alpha\beta = \frac{-7 \cdot {}_nC_2}{{}_nC_4}$$

이때 $\alpha + \beta = -2$ 이므로

$$-\frac{2 \cdot {}_nC_5}{{}_nC_4} = -2, \quad {}_nC_5 = {}_nC_4$$

$$n-5=4 \quad \therefore n=9$$

→ ①

$$\therefore \alpha\beta = \frac{-7 \cdot {}_9C_2}{{}_9C_4} = \frac{-7 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1}}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = -2$$

→ ②

답 -2

채점 기준	비율
① n 의 값을 구할 수 있다.	70 %
② $\alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

061 ${}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$

$$= \frac{(n-1)!}{r! \{(n-1)-r\}!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)! \{(n-1)-(r-1)\}!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{r! \{(n-r-1)\}!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)! \{(n-r)\}!}$$

$$= \frac{(n-r) \cdot (n-1)!}{r! (n-r)!} + \frac{r \cdot (n-1)!}{r! (n-r)!}$$

$$= \frac{\{(n-r)+r\} \cdot (n-1)!}{r! (n-r)!}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1)!}{r! (n-r)!} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = {}_nC_r$$

$$\therefore \textcircled{7} (n-r-1)! \quad \textcircled{8} (r-1)! \quad \textcircled{9} n$$

답 ⑦ (n-r-1)! ⑧ (r-1)! ⑨ n

062 ${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \{n-(n-r)\}!}$

$$= \frac{n!}{(n-r)! r!} = {}_nC_r$$

$$\therefore \textcircled{7} n-r \quad \textcircled{8} r!$$

답 ②

063 ${}_{n-1}P_r + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$

$$= \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!} + r \cdot \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(\overline{n-r}) \cdot (n-1)!}{(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{\{(n-r)+r\} \cdot (n-1)!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r$$

$$\therefore \textcircled{7} n-r \quad \textcircled{8} \frac{n!}{(n-r)!}$$

답 ②

064 $n \cdot {}_{n-1}C_{r-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)! \{(n-1)-(r-1)\}!}$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(\overline{r-1})! (n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)! (n-r)!}$$

$$= \frac{r \cdot n!}{r! (n-r)!} = r \cdot {}_nC_r$$

따라서 $f(r) = (r-1)!$, $g(r) = r!$ 이므로

$$\frac{g(10)}{f(10)} = \frac{10!}{9!} = 10$$

답 10

065 배구 선수 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

농구 선수 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 + 5 = 20$$

답 20

066 남학생 n 명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_nC_2$

여학생 7명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7C_2 = 21$

따라서 ${}_nC_2 \cdot 21 = 126$ 이므로 ${}_nC_2 = 6$

$$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} = 6, \quad n(n-1) = 4 \cdot 3$$

$$\therefore n = 4$$

답 4

067 4개의 상표 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

택한 3개의 상표의 모자 중에서 각각 1개씩 뽑는 경우의 수는

$${}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \cdot 27 = 108$$

답 ③

068 세 수의 합이 홀수가 되려면 세 수 모두 홀수이거나 하나는 홀수, 두 수는 짝수이어야 한다.

(i) 세 수 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

→ ①

(ii) 하나는 홀수, 두 수는 짝수인 경우

1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 1장을 꺼내고, 2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 2장을 꺼내는 경우의 수는
 ${}_5C_1 \cdot {}_4C_2 = 5 \cdot 6 = 30$... ②

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10 + 30 = 40$... ③
답 40

채점 기준	비율
① 홀수가 적힌 카드 3장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
② 홀수가 적힌 카드 1장, 짝수가 적힌 카드 2장을 꺼내는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
③ 카드에 적힌 세 수의 합이 홀수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

069 맨 앞 자리에는 0이 올 수 없으므로 1, 3, 5, 7을 일렬로 나열한 후 그 사이사이 및 맨 뒤의 4개의 자리에 3개의 0을 나열하면 된다.

1, 3, 5, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

4개의 자리에 3개의 0을 나열하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $\left\{ \begin{array}{l} 0을\ 나열할\ 3개의\ 자리를\ 택하는\ 경우의\ 수와\ 같고,\ 이때\ 택하는\ 순서를\ 생각하지\ 않으므로\ 조합의\ 수를\ 이용한다. \end{array} \right.$

$$24 \cdot 4 = 96$$
 답 ④

070 1부터 20까지의 짝수 중 4로 나누었을 때

나누어떨어지는 수는

$$4, 8, 12, 16, 20$$
 ㉠

나머지가 2인 수는

$$2, 6, 10, 14, 18$$
 ㉡

두 수의 합이 4의 배수가 되려면 ㉠에서 2개를 택하거나 ㉡에서 2개를 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_5C_2 + {}_5C_2 = 10 + 10 = 20$$
 답 20

예제 B $\frac{E}{F}$

짝수인 자연수를 4로 나누면 나누어떨어지거나 나머지가 2이다. 이때 두 수의 합이 4의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

① 나누어떨어지는 두 수를 더하는 경우

$$4p + 4q = 4(p + q) \quad (p, q \text{는 자연수})$$

② 나머지가 2인 두 수를 더하는 경우

$$(4r + 2) + (4s + 2) = 4(r + s + 1) \quad (r, s \text{는 음이 아닌 정수})$$

071 치즈와 어묵을 제외한 8개의 재료 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_8C_4 = 70$$
 답 70

072 1, 2와 5가 적힌 공을 제외한 5개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_2 = 10$$
 답 10

073 (i) 송이와 미주가 함께 참여하는 체험 활동이 없을 때,

송이가 7개의 체험 활동 중에서 3개를 택하고, 미주가 나머지 4개의 체험 활동 중에서 3개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_7C_3 \cdot {}_4C_3 = 35 \cdot 4 = 140$$

(ii) 송이와 미주가 함께 참여하는 체험 활동이 2개일 때,

송이가 7개의 체험 활동 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_3 = 35$$

미주가 송이가 택한 3개의 체험 활동 중에서 2개를 택하고, 송이가 택하지 않은 4개의 체험 활동 중에서 하나를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 \cdot {}_4C_1 = 3 \cdot 4 = 12$

따라서 송이와 미주가 함께 참여하는 체험 활동이 2개인 경우의 수는 $35 \cdot 12 = 420$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$140 + 420 = 560$$
 답 ⑤

다른 풀이 (ii) 송이와 미주가 함께 참여하는 체험 활동이 2개일 때,

7개의 체험 활동 중에서 송이와 미주가 함께 참여할 체험 활동을 택하는 경우의 수는 ${}_7C_2 = 21$

나머지 5개의 체험 활동 중에서 송이와 미주가 각각 하나씩 참여할 체험 활동을 택하는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$

따라서 송이와 미주가 함께 참여하는 체험 활동이 2개인 경우의 수는 $21 \cdot 20 = 420$

074 짝이 맞는 구두 두 켤레를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

두 켤레를 제외한 구두 8짝 중에서 2짝을 택하는 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

이때 구두 8짝 중에서 짝이 맞는 2짝, 즉 구두 4켤레 중에서 한 켤레를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

이므로 구두 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 경우의 수는 $28 - 4 = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \cdot 24 = 360$$
 답 ③

다른 풀이 짝이 맞는 구두 두 켤레를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

나머지 4켤레 중에서 짝이 맞지 않는 구두 한 짝씩을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$

따라서 구하는 경우의 수는 $15 \cdot 24 = 360$

075 11명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{11}C_3 = 165$$

1반 학생만 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

2반 학생만 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$165 - (10 + 20) = 135$$
 답 ①

다른 풀이 (i) 1반 학생 중에서 1명, 2반 학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_6C_2 = 5 \cdot 15 = 75$$

(ii) 1반 학생 중에서 2명, 2반 학생 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2 \cdot {}_6C_1 = 10 \cdot 6 = 60$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $75 + 60 = 135$

076 (1) 9권 중에서 4권을 고르는 경우의 수는

$${}_9C_4 = 126$$

소설책과 만화책 중에서 4권을 고르는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 구하는 경우의 수는 $126 - 15 = 111$ → ①

(2) 9권 중에서 4권을 고르는 경우의 수는

$${}_9C_4 = 126$$

(i) 소설책이 포함되지 않도록 고르는 경우의 수는 만화책과 잡지책 중에서 4권을 고르는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(ii) 소설책이 1권 포함되도록 고르는 경우의 수는 만화책과 잡지책 중에서 3권을 고르고, 소설책 중에서 1권을 고르는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_3 \cdot {}_4C_1 = {}_5C_2 \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40$$

(i), (ii)에서 소설책이 포함되지 않거나 1권 포함되도록 고르는 경우의 수는 $5 + 40 = 45$

따라서 구하는 경우의 수는 $126 - 45 = 81$ → ②

답 (1) 111 (2) 81

채점 기준	비율
① 잡지책이 적어도 1권 포함되도록 고르는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
② 소설책이 적어도 2권 포함되도록 고르는 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %

다른 풀이 (2)(i) 소설책이 2권 포함되도록 고르는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_5C_2 = 6 \cdot 10 = 60$$

(ii) 소설책이 3권 포함되도록 고르는 경우의 수는

$${}_4C_3 \cdot {}_5C_1 = {}_4C_1 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$$

(iii) 소설책만 4권을 고르는 경우의 수는

$${}_4C_4 = 1$$

이상에서 구하는 경우의 수는 $60 + 20 + 1 = 81$

077 2보다 크고 13보다 작은 10개의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 자연수를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_4 = 210$$

주어진 수 중에서 소수는 3, 5, 7, 11의 4개, 합성수는 4, 6, 8, 9, 10, 12의 6개이므로

(i) 소수만 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_4 = 1$

(ii) 합성수만 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

(i), (ii)에서 소수만 택하거나 합성수만 택하는 경우의 수는 $1 + 15 = 16$

따라서 구하는 경우의 수는

$$210 - 16 = 194$$

답 194

078 12개 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_4 = 495$$

실내에 있는 놀이 기구의 수를 $n(n \geq 4)$ 이라 하면 실내에 있는 놀이 기구만 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_nC_4$

이때 실외에 있는 놀이 기구가 적어도 한 개 포함되도록 택하는 경우의 수가 460이므로

$$495 - {}_nC_4 = 460, \quad {}_nC_4 = 35$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$$\therefore n = 7$$

따라서 실내에 있는 놀이 기구가 7개이므로 실외에 있는 놀이 기구의 수는

$$12 - 7 = 5$$

답 5

해설 B **특이사항**

12개의 놀이 기구 중 실내에 있는 놀이 기구가 4개 미만이면 4개를 택할 때 항상 실외에 있는 놀이 기구가 적어도 한 개 포함되므로 실외에 있는 놀이 기구가 적어도 한 개 포함되도록 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_4 = 495$
즉 주어진 조건에 맞지 않으므로 $n \geq 4$

079 남학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

여학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5! = 120$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \cdot 10 \cdot 120 = 4800$$

답 ⑤

080 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개, 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로

홀수 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

짝수 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

4개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$6 \cdot 3 \cdot 24 = 432$$

답 ③

081 A, B, C를 제외한 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

→ ①

A, B, C를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$ 이고, 이때 A, B, C의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3! = 6$ 이므로 A, B, C가 이웃하도록 세우는 경우의 수는

$$6 \cdot 6 = 36$$

→ ②

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \cdot 36 = 540$$

→ ③

답 540

채점 기준	비율
① A, B, C를 제외한 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
② A, B, C가 이웃하도록 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
③ A, B, C가 모두 포함되고 이들이 이웃하도록 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

082 6개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 직선의 개수는

$${}_6C_2=15 \quad \text{답 ④}$$

083 구하는 대각선의 개수는 7개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 7을 뺀 것과 같으므로

$${}_7C_2-7=21-7=14 \quad \text{답 14}$$

참고 $(n\text{각형의 대각선의 개수})=\frac{n(n-3)}{2}$ 임을 이용하여 다음과 같이 칠각형의 대각선의 개수를 구할 수도 있다.

$$\Rightarrow \frac{7 \cdot 4}{2}=14$$

084 두 직선 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로

$${}_4C_1 \cdot {}_4C_1=4 \cdot 4=16$$

한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 연결한 직선의 개수는 주어진 두 직선

$$2$$

$$16+2=18 \quad \text{답 ②}$$

다른 풀이 8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_2=28$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 주어진 두 직선이므로 구하는 직선의 개수는

$$28-6 \cdot 2+2=18$$

085 12개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_2=66 \quad \dots ①$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6 \quad \dots ②$$

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 6개이므로 구하는 직선의 개수는

$$66-6 \cdot 6+6=36 \quad \dots ③$$

답 36

채점 기준	비율
① 12개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
② 한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
③ 만들 수 있는 직선의 개수를 구할 수 있다.	40 %

086 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_8C_3=56$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3=1$$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 4개이다.

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$56-1 \cdot 4=52 \quad \text{답 52}$$

087 직선 l 위의 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2={}_3C_1=3$$

직선 m 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$$3 \cdot 10=30 \quad \text{답 30}$$

다른 풀이 8개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_4=70$$

직선 l 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 m 위의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 \cdot {}_5C_1=1 \cdot 5=5$$

직선 m 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 l 위의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 \cdot {}_3C_1={}_5C_2 \cdot 3=10 \cdot 3=30$$

직선 m 위의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$$70-(5+30+5)=30$$

088 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_9C_3=84$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=10$$

그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

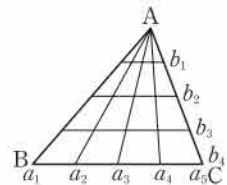
$$84-10=74 \quad \text{답 ⑤}$$

089 오른쪽 그림과 같이 각각의 선을

$a_i, b_j (i=1, 2, 3, 4, 5, j=1, 2, 3, 4)$ 라 하자.

삼각형을 만들려면 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 두 개, b_1, b_2, b_3, b_4 중 한 개를 택해야 하므로 구하는 삼각형의 개수는

$${}_5C_2 \cdot {}_4C_1=10 \cdot 4=40 \quad \text{답 40}$$



090 12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3=220 \quad \dots ①$$

(i) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수

는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이므로

$$4 \cdot 3=12$$



- (ii) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우
3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3=1$$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 8개이므로

$$1 \cdot 8=8$$

- (i), (ii)에서 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$$12+8=20$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$220-20=200$$

→ 2

→ 3

답 200

채점 기준	비율
① 12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
② 한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	60 %
③ 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

- 091 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로 구하는 평행사변형의 개수는

$${}_3C_2 \cdot {}_5C_2 = {}_3C_1 \cdot 10 = 3 \cdot 10 = 30$$

답 ③

- 092 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 l_i, m_j, n_k ($i=1, 2, 3, j=1, 2, 3, 4, k=1, 2, 3, 4$)라 하자.

- (i) l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하고,

m_1, m_2, m_3, m_4 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_4C_2 = {}_3C_1 \cdot 6 \\ = 3 \cdot 6 = 18$$

- (ii) m_1, m_2, m_3, m_4 중에서 2개를 택하고, n_1, n_2, n_3, n_4 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_4C_2 = 6 \cdot 6 = 36$$

- (iii) n_1, n_2, n_3, n_4 중에서 2개를 택하고, l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_3C_2 = 6 \cdot {}_3C_1 \\ = 6 \cdot 3 = 18$$

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$$18+36+18=72$$

답 72

- 093 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 개수는

$${}_4C_2 \cdot {}_5C_2 = 6 \cdot 10 = 60$$

→ 1

한 변의 길이가 1, 2, 3인 정사각형의 개수는 각각 12, 6, 2이므로 정사각형의 개수는

$$12+6+2=20$$

→ 2

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

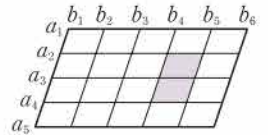
$$60-20=40$$

→ 3

답 40

채점 기준	비율
① 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
② 정사각형의 개수를 구할 수 있다.	40 %
③ 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구할 수 있다.	20 %

- 094 오른쪽 그림과 같이 각각의 평행한 선을 a_i, b_j ($i=1, 2, 3, 4, 5, j=1, 2, 3, 4, 5, 6$)라 하자.



색칠한 부분을 포함하는 평행사변

형을 만들려면 가로 방향의 평행선 2개는 a_1, a_2 중 한 개, a_4, a_5 중 한 개를 택해야 하므로 가로 방향의 평행선을 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \cdot {}_2C_1 = 2 \cdot 2 = 4$$

마찬가지로 세로 방향의 평행선 2개는 b_1, b_2, b_3, b_4 중 한 개,

b_5, b_6 중 한 개를 택해야 하므로 세로 방향의 평행선을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 \cdot {}_2C_1 = 4 \cdot 2 = 8$$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$$4 \cdot 8 = 32$$

답 ⑤

- 095 $(n+1)$ 개의 평행한 직선 중에서 2개, $(n+4)$ 개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어지므로

$${}_{n+1}C_2 \cdot {}_{n+4}C_2 = 126$$

$$\frac{(n+1)n}{2 \cdot 1} \cdot \frac{(n+4)(n+3)}{2 \cdot 1} = 126$$

$$(n+4)(n+3)(n+1)n = 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3$$

$$\therefore n=3$$

답 3

- 096 6자루의 색연필을 똑같은 필통 2개에 빈 필통이 없도록 나누어 담을 때, 각 필통에 담을 수 있는 색연필의 자루 수는

$$1, 5 \text{ 또는 } 2, 4 \text{ 또는 } 3, 3$$

- (i) 1자루, 5자루로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_5 = 6 \cdot 1 = 6$$

- (ii) 2자루, 4자루로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$$

- (iii) 3자루, 3자루로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$6+15+10=31$$

답 31

- 097 윤호와 민주를 제외한 6명 중 2명이 윤호, 민주와 한 조를 이루면 되므로 이 6명을 2명, 4명으로 나누면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$$

답 15

098 10명을 5명, 5명으로 나누는 경우의 수는

$${}_{10}C_5 \cdot {}_5C_5 \cdot \frac{1}{2!} = 252 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 126 \quad \dots \textcircled{1}$$

어린이 6명을 1명, 5명으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_5 = 6 \cdot 1 = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

어린이만 포함된 조가 있도록 나누는 경우

따라서 구하는 경우의 수는

$$126 - 6 = 120 \quad \dots \textcircled{3}$$

답 120

채점 기준	비율
① 10명을 5명, 5명으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
② 어린이 6명을 1명, 5명으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	40 %
③ 각 조에 적어도 한 명의 선생님이 포함되도록 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

099 8개의 아이스크림을 2개, 2개, 4개의 3개의 묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 28 \cdot 15 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 210$$

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$210 \cdot 6 = 1260 \quad \dots \textcircled{5}$$

답 ⑤

100 9명의 선수를 3명, 3명, 3명의 3개의 팀으로 나누는 경우의 수는

$${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 84 \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 280 \quad \dots \textcircled{1}$$

3개의 팀의 출전 순서를 정하는 경우의 수는

$$3! = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$280 \cdot 6 = 1680 \quad \dots \textcircled{3}$$

답 1680

채점 기준	비율
① 9명의 선수를 3명씩 3개의 팀으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	50 %
② 3개의 팀의 출전 순서를 정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
③ 3명씩 팀을 이루어 출전 순서를 정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

101 2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 사람들이 내리는 4개의 층을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

6명을 1명, 1명, 1명, 3명의 4개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

4개의 조를 4개의 층에 배정하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \cdot 20 \cdot 24 = 7200 \quad \dots \textcircled{3}$$

답 ③

다른 풀이 6명을 1명, 1명, 1명, 3명의 4개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

4개의 조가 2층부터 7층까지 6개의 층 중에서 4개의 층에 각각 내려면 되므로 구하는 경우의 수는

$$20 \cdot {}_6P_4 = 20 \cdot 360 = 7200$$

102 운전자를 제외한 나머지 5명을 3개의 조로 나눌 때, 각 승용차에 탑승하는 인원수는

$$1, 1, 3 \text{ 또는 } 1, 2, 2$$

(i) 1명, 1명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

(ii) 1명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

(i), (ii)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$$10 + 15 = 25$$

3개의 조를 3대의 승용차에 배정하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$25 \cdot 6 = 150 \quad \dots \textcircled{150}$$

답 150

103 7개를 3개의 묶음으로 나눌 때, 각 학생에게 줄 수 있는 사탕의 개수는

$$1, 1, 5 \text{ 또는 } 1, 2, 4 \text{ 또는 } 1, 3, 3 \text{ 또는 } 2, 2, 3$$

(i) 1개, 1개, 5개로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_1 \cdot {}_5C_5 \cdot \frac{1}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

(ii) 1개, 2개, 4개로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 7 \cdot 15 \cdot 1 = 105$$

(iii) 1개, 3개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 7 \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 70$$

(iv) 2개, 2개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 21 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 105$$

이상에서 3개의 묶음으로 나누는 경우의 수는

$$21 + 105 + 70 + 105 = 301$$

3개의 묶음을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$301 \cdot 6 = 1806 \quad \dots \textcircled{1806}$$

답 1806

104 구하는 경우의 수는 먼저 5개의 학급을 2개, 3개의 학급으로 나눈 후 3개의 학급 중에서 부전승으로 올라가는 1개의 학급을 택하는 경우의 수와 같으므로

$$({}_5C_2 \cdot {}_3C_3) \cdot {}_3C_1 = (10 \cdot 1) \cdot 3 = 30 \quad \dots \textcircled{1}$$

답 ①

105 8개의 팀을 4개, 4개의 팀으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_4 \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!} = 70 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 35$$

4개의 팀을 다시 2개, 2개의 팀으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

나머지 4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 경우의 수도 3이므로 구하는 경우의 수는

$$35 \cdot 3 \cdot 3 = 315 \quad \text{답 315}$$

다른 풀이 구하는 경우의 수는 8개의 팀을 2개, 2개, 2개, 2개의 4개의 조로 나눈 후, 4개의 조를 다시 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} & \left({}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!} \right) \cdot \left({}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} \right) \\ &= \left(28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{24} \right) \cdot \left(6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= 105 \cdot 3 = 315 \end{aligned}$$

106 7명을 3명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_3 \cdot {}_4C_4 = 35 \cdot 1 = 35 \quad \dots \textcircled{1}$$

3명 중에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

4명을 다시 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$35 \cdot 3 \cdot 3 = 315 \quad \dots \textcircled{4}$$

답 315

채점 기준	비율
① 7명을 3명, 4명으로 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
② 3명의 대진표를 작성하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %
③ 4명의 대진표를 작성하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30 %
④ 대진표를 작성하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20 %

10 행렬과 그 연산

V. 행렬

개념정리

본책 124쪽

- ① b_{12} ② b_{21} ③ $a_{11} + b_{11}$ ④ $a_{22} - b_{22}$
 ⑤ $a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$ ⑥ $a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$

유형 뽀개기

본책 125쪽

01 $a_{11} = 1 \cdot 1 - 1 + 3 = 3$, $a_{12} = 1 \cdot 2 - 1 + 3 = 4$,

$a_{13} = 1 \cdot 3 - 1 + 3 = 5$, $a_{21} = 2 \cdot 1 - 2 + 3 = 3$,

$a_{22} = 2 \cdot 2 - 2 + 3 = 5$, $a_{23} = 2 \cdot 3 - 2 + 3 = 7$

따라서 행렬 A 의 모든 성분의 합은

$$3 + 4 + 5 + 3 + 5 + 7 = 27 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

답 27

02 $a_{21} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$, $a_{22} = 2^2 = 4$,
 $a_{23} = -a_{32} = -(3 + 2 \cdot 2) = -7$

①

따라서 행렬 A 의 제2행의 모든 성분의 곱은

$$4 \cdot 4 \cdot (-7) = -112$$

②

답 -112

채점 기준	비율
① A 의 제2행의 모든 성분을 구할 수 있다.	70 %
② A 의 제2행의 모든 성분의 곱을 구할 수 있다.	30 %

03 (i) $i=j$ 일 때,

$$a_{11} = \frac{1}{a_{11}} \text{에서} \quad a_{11}^2 = 1$$

$$\therefore a_{11} = -1 \text{ 또는 } a_{11} = 1$$

$$a_{22} = \frac{1}{a_{22}} \text{에서} \quad a_{22}^2 = 1$$

$$\therefore a_{22} = -1 \text{ 또는 } a_{22} = 1$$

(ii) $i \neq j$ 일 때, $a_{12} = \frac{1}{a_{21}}$

(i), (ii)에서 행렬 A 가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

04 $b_{11} = a_{11} = (-1)^{1+1} + 2 \cdot 1 - 1 = 2$,

$b_{12} = a_{21} = (-1)^{2+1} + 2 \cdot 2 - 1 = 2$,

$b_{21} = a_{12} = (-1)^{1+2} + 2 \cdot 1 - 2 = -1$,

$b_{22} = a_{22} = (-1)^{2+2} + 2 \cdot 2 - 2 = 3$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

답 ⑤

05 $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = 1$,

$a_{31} = 0$, $a_{32} = 2$, $a_{33} = 0$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

답 ③

- 06 $f(1)=4=2 \cdot 2$, $f(2)=2=2 \cdot 1$, $f(3)=2=2 \cdot 1$ 이므로
 $a_{11}=1$, $a_{12}=2$, $a_{13}=1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=2$, $a_{23}=2$,
 $a_{31}=1$, $a_{32}=3$, $a_{33}=3$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{답} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- 07 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{aligned} 8 &= -x + 2y & \cdots \cdots \text{㉠}, & \quad x + y = a & \cdots \cdots \text{㉡} \\ 2x + 3y &= b & \cdots \cdots \text{㉢}, & \quad -5 = 4x + y & \cdots \cdots \text{㉣} \end{aligned}$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x = -2$, $y = 3$

이것을 ㉡, ㉣에 각각 대입하면

$$\begin{aligned} a &= 1, b = 5 \\ \therefore ax + by &= 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 13 \end{aligned} \quad \text{답} \text{ ㉢}$$

- 08 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\alpha = \beta + 6, \quad \frac{6}{\beta} = 2\alpha$$

이므로 $\alpha - \beta = 6$, $\alpha\beta = 3$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{6^2 + 2 \cdot 3}{3^2} = \frac{14}{3} \end{aligned} \quad \text{답} \text{ ㉣}$$

- 09 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a - b = 2, \quad a^3 = 5\sqrt{2} + 7, \quad b^3 = 5\sqrt{2} - 7, \quad \frac{1}{ab} = k$$

$a^3 - b^3 = (5\sqrt{2} + 7) - (5\sqrt{2} - 7) = 14$ 이므로

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

에서 $14 = 2^3 + 3 \cdot \frac{1}{k} \cdot 2$

$$\frac{6}{k} = 6 \quad \therefore k = 1 \quad \text{답} \text{ 1}$$

- 10 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$ac = c^2 - 3 \quad \cdots \cdots \text{㉠}, \quad \frac{a}{2} + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$b = -2a \quad \cdots \cdots \text{㉢}, \quad 3c^2 - bc = -1 \quad \cdots \cdots \text{㉣}$$

㉡, ㉢에서

$$a = -2, b = 4 \quad \cdots \cdots \text{1}$$

(i) $a = -2$ 를 ㉠에 대입하면 $-2c = c^2 - 3$

$$c^2 + 2c - 3 = 0, \quad (c + 3)(c - 1) = 0$$

$$\therefore c = -3 \text{ 또는 } c = 1$$

(ii) $b = 4$ 를 ㉢에 대입하면 $3c^2 - 4c = -1$

$$3c^2 - 4c + 1 = 0, \quad (3c - 1)(c - 1) = 0$$

$$\therefore c = \frac{1}{3} \text{ 또는 } c = 1$$

(i), (ii)에서 $c = 1$

$$\begin{aligned} \therefore a^2 + b^2 + c^2 &= (-2)^2 + 4^2 + 1^2 \\ &= 21 \end{aligned} \quad \cdots \cdots \text{2} \quad \text{답} \text{ 21}$$

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② c 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

$$11 \quad 4\left(P - \frac{1}{6}Q\right) - (3P - Q)$$

$$= 4P - \frac{2}{3}Q - 3P + Q = P + \frac{1}{3}Q$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{답} \text{ ㉢}$$

- 12 $3(X - A) = 2(2X - B)$ 에서

$$3X - 3A = 4X - 2B$$

$$\therefore X = 2B - 3A$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 곱은

$$3 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-2) = 18$$

답 ㉡

예제 B $\frac{5}{3}$

같은 꼴의 세 행렬 A, B, X 에 대하여

$$X + A = B$$

$$\Rightarrow X + A - A = B - A$$

$$\Rightarrow X = B - A$$

따라서 행렬의 등식에서도 이항을 이용하여 계산할 수 있다.

- 13 $a_{11} = 2 \cdot 1 - 1 - 1 = 0$, $a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 - 1 = -1$,

$$a_{13} = 2 \cdot 1 - 3 - 1 = -2, \quad a_{21} = 2 \cdot 2 - 1 - 1 = 2,$$

$$a_{22} = 2 \cdot 2 - 2 - 1 = 1, \quad a_{23} = 2 \cdot 2 - 3 - 1 = 0$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 5 \cdot 1 - 1^2 = 4, \quad c_{12} = 5 \cdot 1 - 2^2 = 1, \quad c_{13} = 5 \cdot 1 - 3^2 = -4,$$

$$c_{21} = 5 \cdot 2 - 1^2 = 9, \quad c_{22} = 5 \cdot 2 - 2^2 = 6, \quad c_{23} = 5 \cdot 2 - 3^2 = 1$$

$$\therefore 4A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix} - 4A$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{답} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$14 \quad \begin{pmatrix} 2a & 3c \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+b & 3c-2 \\ -b+4 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ a+1 & c-2 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 3c-2=-b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$-b+4=a+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad a-1=c-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③에서 $a+b=3$ 이므로 이 식과 ①을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=5$$

$a=-2$ 를 ④에 대입하면 $b=5$ 를 ②에 대입하여 풀어도 결과는 같다.

$$-2-1=c-2 \quad \therefore c=-1$$

$$\therefore b^2-a^2-c^2=5^2-(-2)^2-(-1)^2=20 \quad \text{답 ④}$$

15 $xA+yB=C$ 에서

$$x \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x & 2x+y \\ 5x+2y & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-2x=2, 2x+y=1, 5x+2y=1, x-y=-4$$

$$-2x=2 \text{에서 } x=-1$$

$x=-1$ 을 $x-y=-4$ 에 대입하면

$$-1-y=-4 \quad \therefore y=3 \quad \text{나머지 세 식 중 계산이 간단한 식에 대입한다.}$$

$$\therefore xy=-3 \quad \text{답 ②}$$

16 직선 $y=2x+5$ 와 이차함수 $y=x^2-x-5$ 의 그래프의 두 교점의 x 좌표는 $2x+5=x^2-x-5$ 에서

$$x^2-3x-10=0, \quad (x+2)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=5$$

즉 두 교점의 좌표는 $(-2, 1), (5, 15)$

$$\therefore a=5, b=15, c=-2, d=1 (\because a>0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 $y=2x+5$ 와 이차함수 $y=3x^2+8x-4$ 의 그래프의 두 교점의 x 좌표는 $2x+5=3x^2+8x-4$ 에서

$$x^2+2x-3=0, \quad (x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

즉 두 교점의 좌표는 $(-3, -1), (1, 7)$

$$\therefore e=1, f=7, g=-3, h=-1 (\because e>0) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} 2(2A+B)-3A &= 4A+2B-3A=A+2B \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$1+17+(-5)+5=18 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \quad \text{답 18}$$

채점 기준	비율
① a, b, c, d 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② e, f, g, h 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $2(2A+B)-3A$ 의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	40 %

$$17 \quad 3X+Y=A \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$X-2Y=B \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① $\times 2 + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} 7X &= 2A+B \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ -14 & 14 \end{pmatrix} \\ \therefore X &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ -14 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + Y &= \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \\ \therefore Y &= \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 $X+Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 이므로

$$p=-2, q=2, r=0, s=2$$

$$\therefore ps+qr=-2\cdot 2+2\cdot 0=-4 \quad \text{답 -4}$$

$$18 \quad 2X+Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3X+2Y = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① $\times 2 - \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} X &= 2 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{답 ②} \end{aligned}$$

$$19 \quad 3A+4B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 9 & -22 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$4A-3B = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① $\times 3 + \textcircled{2} \times 4$ 를 하면

$$\begin{aligned} 25A &= 3 \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 9 & -22 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 27 & -66 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 32 & -40 \\ 48 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -25 \\ 75 & -50 \end{pmatrix} \\ \therefore A &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 50 & -25 \\ 75 & -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ 를 ①에 대입하면

$$3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 4B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 9 & -22 \end{pmatrix}$$

$$4B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 9 & -22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

$$\therefore A+B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \cdots ③$$

$$\text{답 } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

채점 기준	비율
① A를 구할 수 있다.	40 %
② B를 구할 수 있다.	40 %
③ A+B를 구할 수 있다.	20 %

$$20 \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ a & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} -3b+a \\ ab+4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+6 \\ 4a+3 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-3b+a = -2a+6, \quad ab+4a = 4a+3$$

이므로 $a-b=2, \quad ab=3$

$$\therefore a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$= 2^3 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = 26$$

답 26

$$21 \quad AB=O \text{에서} \quad \begin{pmatrix} 4 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12+xy & -4+2x \\ 6+y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$12+xy=0, \quad -4+2x=0, \quad 6+y=0$$

따라서 $x=2, \quad y=-6$ 이므로

$$x-y=8$$

답 ⑤

$$22 \quad AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB-BA = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ -4 & -11 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$11+10+(-4)+(-11)=6$$

답 ④

$$23 \quad \begin{pmatrix} 0 & f(a) \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f(a) & -4f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$f(a)=0, \quad -4f(a)=0$$

$$\therefore f(a)=0$$

이때 주어진 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표가 $-1, 4$ 이므로 $f(a)=0$ 을 만족시키는 a 의 값은 $-1, 4$

따라서 구하는 합은 $-1+4=3$

답 3

$$24 \quad ABC = \begin{pmatrix} -2 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6-x & -4+5x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (-x^2+16x-8)$$

①

$-x^2+16x-8 = -(x-8)^2+56$ 이므로 $x=8$ 일 때 최댓값 56을 갖는다.

따라서 $a=8, \quad b=56$ 이므로

$$a+b=64$$

②

답 64

채점 기준	비율
① ABC를 구할 수 있다.	60 %
② a+b의 값을 구할 수 있다.	40 %

B $\frac{E}{n}$

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$ 에서

- ① $a>0 \Rightarrow x=m$ 일 때 최솟값은 n , 최댓값은 없다.
- ② $a<0 \Rightarrow x=m$ 일 때 최댓값은 n , 최솟값은 없다.

$$25 \quad A^2 = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+2 & 2a+2\beta \\ a+\beta & 2+\beta^2 \end{pmatrix}$$

이차방정식 $x^2-x-3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1, \quad \alpha\beta=-3$$

따라서 행렬 A^2 의 모든 성분의 합은

$$a^2+\beta^2+3(a+\beta)+4$$

$$= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+4$$

$$= 1^2-2 \cdot (-3)+3 \cdot 1+4=14$$

답 ③

$$26 \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3a & 0 \\ 0 & 1-3a \end{pmatrix}$$

이때 행렬 A^2 의 모든 성분의 합이 -4 이므로

$$2-6a=-4 \quad \therefore a=1$$

답 ④

$$27 \quad 2A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

①

$$2A-B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

②

①-②을 하면

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

①

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 을 ①에 대입하면

$$2A + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

$$\begin{aligned} \therefore 4A^2 - B^2 &= (2A)^2 - B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

따라서 행렬 $4A^2 - B^2$ 의 (1, 2) 성분은 -6이다. $\cdots ④$

답 -6

채점 기준	비율
① B를 구할 수 있다.	30 %
② 2A를 구할 수 있다.	30 %
③ $4A^2 - B^2$ 을 구할 수 있다.	30 %
④ $4A^2 - B^2$ 의 (1, 2) 성분을 구할 수 있다.	10 %

28 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 에서

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 \cdot 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} \text{규칙을 찾기 위하여} \\ \text{계산식으로 나타낸다.} \end{array} \right]$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 \cdot 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 \cdot 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 \cdot 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 \cdot 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3n & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 $-3n = -243$ 이므로

$$n = 81$$

답 81

29 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 에서

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로

$$a = 2 \cdot 10 = 20$$

답 ②

30 이차방정식 $2x^2 - 4x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta - 2 = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 + \beta^2 \\ \alpha + \beta - 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$X = X^2 = X^3 = \cdots = X^{15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

$$\begin{aligned} \therefore X + X^2 + X^3 + \cdots + X^{15} &= 15X = 15 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

$$\text{답 } \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

채점 기준	비율
① X를 구할 수 있다.	40 %
② $X = X^2 = X^3 = \cdots = X^{15}$ 임을 알 수 있다.	40 %
③ $X + X^2 + X^3 + \cdots + X^{15}$ 을 구할 수 있다.	20 %

31 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 에서

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & 12 \end{pmatrix} = 4A$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (4A)^2 = 4^2 A^2 = 4^2 \cdot 4A = 4^3 A$$

$$A^8 = (A^4)^2 = (4^3 A)^2 = 4^6 A^2 = 4^6 \cdot 4A = 4^7 A$$

$$A^{16} = (A^8)^2 = (4^7 A)^2 = 4^{14} A^2 = 4^{14} \cdot 4A = 4^{15} A$$

$$\begin{aligned} A^{32} &= (A^{16})^2 = (4^{15} A)^2 = 4^{30} A^2 = 4^{30} \cdot 4A = 4^{31} A \\ &= 4^{31} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 A^{32} 의 모든 성분의 합은

$$4^{31}(1+1+3+3) = 8 \cdot 4^{31} = 2^3 \cdot (2^2)^{31} = 2^3 \cdot 2^{62} = 2^{65}$$

$$\therefore k = 65$$

답 65

32 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 에서

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\therefore A^{1004} = (A^3)^{334} A^2 = E A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$1 + (-1) + 3 + (-2) = 1$$

답 ④

예 B $\frac{E}{2}$

두 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 와 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$$AE = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A,$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

이므로 $AE = EA = A$

$$\begin{aligned}
33 \quad A &= \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{에서} \\
A^2 &= \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \\
A^3 &= A^2 A = (-E)A = -A \\
A^4 &= (A^2)^2 = (-E)^2 = E
\end{aligned}$$

따라서 $A^n = E$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최소값은 4이다. **답 4**

$$34 \quad a_{11}=0, a_{12}=1, a_{21}=-1, a_{22}=0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \\
A^3 &= A^2 A = (-E)A = -A \\
A^4 &= (A^2)^2 = (-E)^2 = E
\end{aligned}$$

따라서 n 이 자연수일 때,

$$A^{4n-3}=A, A^{4n-2}=-E, A^{4n-1}=-A, A^{4n}=E$$

이므로

$$\begin{aligned}
& (A^{21}-A^{23}+A^{25}-A^{27})(A^{22}-A^{24}+A^{26}-A^{28}) \\
&= \{A - (-A) + A - (-A)\} \{-E - E + (-E) - E\} \\
&= 4A \cdot (-4E) \\
&= -16A
\end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
35 \quad A &= \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \text{에서} \\
A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E
\end{aligned}$$

$$A^4 = A^3 A = (-E)A = -A$$

$$A^5 = A^4 A = -AA = -A^2$$

$$A^6 = (A^3)^2 = (-E)^2 = E$$

$$\therefore A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100}$$

$$= (A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6)$$

$$+ A^6(A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6)$$

$$+ \dots + A^{90}(A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6)$$

$$+ A^{97} + A^{98} + A^{99} + A^{100}$$

$$= A^{97} + A^{98} + A^{99} + A^{100}$$

$$(\because A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 = O)$$

$$= (A^6)^{16} \cdot A + (A^6)^{16} \cdot A^2 + (A^6)^{16} \cdot A^3 + (A^6)^{16} \cdot A^4$$

$$= A + A^2 + A^3 + A^4 (\because A^6 = E)$$

$$= A + A^2 - E - A = A^2 - E$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3}$$

따라서 행렬 $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100}$ 의 모든 성분의 합은

$$-3 + (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} + 0 = -3$$

$\dots \textcircled{4}$

답 -3

채점 기준	비율
① A^2 을 구할 수 있다.	20 %
② A^3, A^4, A^5, A^6 을 간단히 할 수 있다.	30 %
③ $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100}$ 을 구할 수 있다.	40 %
④ $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100}$ 의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	10 %

$$36 \quad XY = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \text{이므로 행렬}$$

XY 의 (2, 1) 성분은

$$ce+dg$$

따라서 행렬 XY 의 (2, 1) 성분은 시호가 제과점 B에서 빵과 쿠키를 살 경우 지불해야 하는 금액이다. **답 ③**

참고 • 행렬 XY 의 (1, 1) 성분 $ae+bg$

⇒ 시호가 제과점 A에서 빵과 쿠키를 살 경우 지불해야 하는 금액

• 행렬 XY 의 (1, 2) 성분 $af+bh$

⇒ 연우가 제과점 A에서 빵과 쿠키를 살 경우 지불해야 하는 금액

• 행렬 XY 의 (2, 2) 성분 $cf+dh$

⇒ 연우가 제과점 B에서 빵과 쿠키를 살 경우 지불해야 하는 금액

37 흙을 퍼내어 넣은 후 두 자루 A, B에 들어 있는 흙의 양은

$$a' = \frac{4}{5}a + \frac{2}{3}\left(b + \frac{1}{5}a\right) = \frac{14}{15}a + \frac{2}{3}b$$

$$b' = \frac{1}{3}\left(b + \frac{1}{5}a\right) = \frac{1}{15}a + \frac{1}{3}b$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

따라서 $p=14, q=10, r=1, s=5$ 이므로

$$ps - qr = 14 \cdot 5 - 10 \cdot 1 = 60$$

답 60

38 2025년 두 잡지 A, B를 구독하는 가구 수를 각각 a', b' 이라 하면

$$a' = 182 \times 0.6 + 307 \times 0.7$$

$$b' = 182 \times 0.4 + 307 \times 0.3$$

$\dots \textcircled{1}$

이것을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} = (182 \quad 307) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$= XY$$

$\dots \textcircled{2}$

2026년 두 잡지 A, B를 구독하는 가구 수는

$$a = a' \times 0.6 + b' \times 0.7$$

$$b = a' \times 0.4 + b' \times 0.3$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$= XY \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$= XY^2$$

$\dots \textcircled{3}$

답 XY^2

채점 기준	비율
① 2025년 두 잡지 A, B를 구독하는 가구 수를 구할 수 있다.	30 %
② 2025년 두 잡지 A, B를 구독하는 가구 수를 X, Y로 나타낼 수 있다.	30 %
③ 2026년 두 잡지 A, B를 구독하는 가구 수를 X, Y로 나타낼 수 있다.	40 %

39 가게 X가 A 공장에서 운동화와 구두를 구입하는 데 드는 비용이 338(천 원)이므로

$$8 \cdot 16 + ab = 338 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

가게 X가 B 공장에서 운동화와 구두를 구입하는 데 드는 비용이 382(천 원)이므로

$$8 \cdot 14 + 27b = 382 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

가게 Y가 A 공장에서 운동화와 구두를 구입하는 데 드는 비용이 249(천 원)이므로

$$16c + 5a = 249 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

가게 Y가 B 공장에서 운동화와 구두를 구입하는 데 드는 비용이 d(천 원)이므로

$$14c + 5 \cdot 27 = d \quad \cdots \textcircled{㉣}$$

㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$$a = 21, b = 10, c = 9, d = 261$$

또 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 8 & b \\ c & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 14 \\ a & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 338 & 382 \\ 249 & d \end{pmatrix}$$

이므로 행렬 $[QP]$ 의 (2, 2) 성분인 d의 값은 $[261]$ 이다. $\text{답 } ④$

40 $ABC - ABA = AB(C - A)$

이때

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{aligned} ABC - ABA &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{답 } ②$$

참고 두 행렬 ABC, ABA를 직접 구하여 계산하는 것보다 분배법칙을 이용하는 것이 더 편리하다.

41 $(A - B)C + B(C - A) + A(B - C)$

$$= AC - BC + BC - BA + AB - AC$$

$$= AB - BA$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -13 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$-2 + (-13) + 5 + 2 = -8 \quad \text{답 } -8$$

42 $A^2 - AB + BA - B^2$

$$= A(A - B) + B(A - B)$$

$$= (A + B)(A - B)$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 (1, 2) 성분은 6이다. $\text{답 } ⑤$

43 $(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2$

이므로

$$A^2 + B^2 = (A - B)^2 + (AB + BA)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{답 } \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

44 $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$

이므로

$$AB + BA = (A + B)^2 - (A^2 + B^2) \quad \cdots ①$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$2 + (-2) + (-4) + 0 = -4 \quad \cdots ③$$

$\text{답 } -4$

채점 기준	비율
① $AB + BA$ 를 $A + B$, $A^2 + B^2$ 으로 나타낼 수 있다.	30 %
② $AB + BA$ 를 구할 수 있다.	50 %
③ $AB + BA$ 의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	20 %

45 $(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2$

이므로

$$AB + BA = A^2 + B^2 - (A - B)^2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

$$= A^2 + B^2 + (AB + BA)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{답 } ④$$

46 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 에서

$$A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$$

$$\therefore AB=BA$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} -6+y & -2x-1 \\ 6 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+2x & 3 \\ -2y-2 & y \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-6+y=-6+2x, -2x-1=3, 6=-2y-2, 2x=y$$

따라서 $x=-2, y=-4$ 이므로 $x-y=2$ 답 2

47 $AB=BA$ 에서

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2 & xy+3 \\ 5 & y+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 1+2y \\ 2x+3 & 8 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x+2=x+y, xy+3=1+2y, 5=2x+3, y+6=8$$

따라서 $x=1, y=2$ 이므로 $xy=2$ 답 4

48 $AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로 $AB=BA$

따라서

$$AB^2A = ABBA = ABAB = (AB)^2$$

이고 같은 방법으로 하면

$$A^2B^4A^2 = (AB)^4, A^3B^6A^3 = (AB)^6$$

이때

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^3 = (AB)^2(AB)$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$(AB)^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로

$$AB^2A + A^2B^4A^2 + A^3B^6A^3$$

$$= (AB)^2 + (AB)^4 + (AB)^6$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-3)^4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-3)^6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 819 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

즉 구하는 $(1, 1)$ 성분은 819이다. 답 5

49 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 에서

$$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$$

$$\therefore AB=BA \quad \dots \rightarrow 1$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x^2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 1 \\ 1 & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 1 & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} x^2y+2 & x^2-2y \\ 2y+1 & 2-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y+2 & 2y+1 \\ x^2-2y & 2-y \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2-2y=2y+1, \quad 4y=x^2-1$$

$$\therefore y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}, \text{ 즉 } f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4} \quad \dots \rightarrow 2$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}=0 \text{에서}$$

$$x^2-1=0, \quad (x+1)(x-1)=0$$

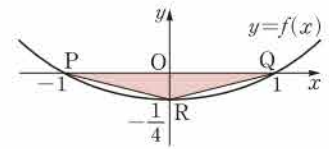
$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$$\therefore P(-1, 0), Q(1, 0) \quad \text{---} P(1, 0), Q(-1, 0) \text{이라 해도 답은 같다.}$$

$$f(0)=-\frac{1}{4} \text{이므로 } R\left(0, -\frac{1}{4}\right)$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \quad \dots \rightarrow 3 \end{aligned}$$



$$\text{답 } \frac{1}{4}$$

채점 기준	비율
① $AB=BA$ 임을 알 수 있다.	30 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ $\triangle PQR$ 의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

50 두 등식을 변끼리 더하면

$$A \begin{pmatrix} -a \\ 3b \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 3a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 2A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{답 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

51 $A \begin{pmatrix} 6a-c \\ 3b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ 에서

$$3A \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 3A \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$2+(-1)=1 \quad \text{답 1}$$

52 $A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ 의 양변의 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$A^2 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } A \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -3p \end{pmatrix} \text{이므로} \\ A \begin{pmatrix} p-r \\ q-s \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q \\ -3p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -q+r \\ 3p+s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

답 ③

53 실수 a, b 에 대하여

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

가 성립한다고 하면 $\left[A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$ 가 주어졌으므로
 $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ 를 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 로 나타낸다.

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a-b=5, a+2b=-4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-3$

$$\therefore \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ ①

위의 등식의 양변의 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} &= 2A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

→ ②

따라서 $p=6, q=-4$ 이므로 $p-q=10$

→ ③

답 10

채점 기준	비율
① $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ 를 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 로 나타낼 수 있다.	50 %
② $A \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $p-q$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

54 $(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^3 + E &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

55 $(A+2E)(A-2E)(A^2+4E)$

$$= (A^2-4E)(A^2+4E)$$

$$= A^4 - 16E$$

→ ①

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^4 - 16E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} - 16 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 16 & -15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

→ ②

따라서 $a=-15, b=0, c=16, d=-15$ 이므로

$$ad-bc = -15 \cdot (-15) - 0 \cdot 16 = 225$$

→ ③

답 225

채점 기준	비율
① $(A+2E)(A-2E)(A^2+4E)$ 를 간단히 할 수 있다.	30 %
② $(A+2E)(A-2E)(A^2+4E)$ 를 구할 수 있다.	50 %
③ $ad-bc$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

56 $(A+3E)^2=5A+8E$ 에서

$$A^2+6A+9E=5A+8E \quad \therefore A^2+A+E=O$$

양변에 행렬 $A-E$ 를 곱하면

$$(A-E)(A^2+A+E)=O, \quad A^3-E=O$$

$$\therefore A^3=E$$

$$\therefore A^{2025} = (A^3)^{675} = E^{675} = E$$

답 ②

57 $A^3-A^5=A^2-E$ 이므로

$$\begin{aligned} A^6-A^8 &= A^3(A^3-A^5) = A^3(A^2-E) \\ &= A^5-A^3 = -(A^3-A^5) \\ &= -(A^2-E) = -A^2+E \end{aligned}$$

이때 행렬 A^2 의 모든 성분의 합이 0이므로 행렬 A^6-A^8 의 모든 성분의 합은 행렬 E 의 모든 성분의 합과 같다.

따라서 구하는 합은

$$1+0+0+1=2$$

답 ⑤

58 $A^2-3A+9E=O$ 의 양변에 행렬 $A+3E$ 를 곱하면

$$(A+3E)(A^2-3A+9E)=O$$

$$A^3+27E=O \quad \therefore A^3=-27E$$

$$\therefore A^{15} = (A^3)^5 = (-27E)^5 = -27^5 E$$

$$\therefore k = -27^5$$

답 ①

다른 풀이 $A^2=3A-9E$ 이므로

$$A^3 = A^2 A = 3A^2 - 9A$$

$$= 3(3A-9E) - 9A = -27E$$

59 $A+B=2E$ 의 양변의 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$A(A+B) = A(2E), \quad A^2+AB=2A$$

$$\therefore A^2=2A \quad (\because AB=O)$$

$$\therefore A^3 = A^2 A = 2A^2 = 2(2A) = 4A$$

$A+B=2E$ 의 양변의 오른쪽에 행렬 B 를 곱하면

$$(A+B)B = (2E)B, \quad AB+B^2=2B$$

$$\therefore B^2=2B \quad (\because AB=O)$$

$$\therefore B^3 = B^2 B = 2B^2 = 2(2B) = 4B$$

$$\begin{aligned}\therefore A^3+B^3 &= 4A+4B=4(A+B) \\ &= 4(2E)=8E=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{답 } \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

60 $A+2B=O$ 의 양변의 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$\begin{aligned}A^2+2AB &= O \\ \therefore A^2 &= -8E \quad (\because AB=4E) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$A+2B=O$ 의 양변의 오른쪽에 행렬 B 를 곱하면

$$\begin{aligned}AB+2B^2 &= O, \quad 4E+2B^2=O \quad (\because AB=4E) \\ \therefore B^2 &= -2E \quad \dots \textcircled{2} \\ \therefore A^4-B^4 &= (A^2)^2-(B^2)^2=(-8E)^2-(-2E)^2 \\ &= 64E-4E=60E=\begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 60 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 행렬 A^4-B^4 의 $(2, 2)$ 성분은 60이다. $\dots \textcircled{3}$

답 60

채점 기준	비율
① A^2 을 E 로 나타낼 수 있다.	30 %
② B^2 을 E 로 나타낼 수 있다.	30 %
③ A^4-B^4 의 $(2, 2)$ 성분을 구할 수 있다.	40 %

61 $A^2-A=E$ 의 양변의 오른쪽에 행렬 B 를 곱하면

$$\begin{aligned}(A^2-A)B &= EB, \quad A^2B-AB=B \\ A(-3E)-(-3E) &= B \quad (\because AB=-3E) \\ \therefore B &= -3A+3E \\ \therefore B^2 &= (-3A+3E)^2=9(-A+E)^2 \\ &= 9(A^2-2A+E)=9(E-A+E) \quad (\because A^2-A=E) \\ &= 9(-A+2E)=-9A+18E \quad \text{답 } \textcircled{3}\end{aligned}$$

다른 풀이 $AB=-3E$ 의 양변의 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$\begin{aligned}A^2B &= -3A \\ A^2-A=E \text{에서 } A^2=A+E \text{를 위의 식에 대입하면} \\ (A+E)B &= -3A, \quad AB+B=-3A \\ -3E+B &= -3A \quad \therefore B=-3A+3E\end{aligned}$$

62 $A-B=E$ 이므로 $A=B+E$ $\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 의 양변의 오른쪽에 행렬 B 를 곱하면

$$AB=(B+E)B=B^2+B \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변의 왼쪽에 행렬 B 를 곱하면

$$\begin{aligned}BA &= B(B+E)=B^2+B \\ \therefore AB &= BA\end{aligned}$$

이때 $\textcircled{2}$ 에서

$$A^3=(B+E)^3=B^3+3B^2+3B+E$$

이고, $A^3=-E, B^3=E$ 이므로

$$\begin{aligned}-E &= E+3B^2+3B+E \\ B^2+B &= -E \quad \therefore AB=-E \quad (\because \textcircled{2})\end{aligned}$$

따라서 $BA=AB=-E$ 이므로

$$AB+BA=-2E=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

다른 풀이 $AB=BA$ 가 성립하므로

$$(A-B)^3=A^3-B^3-3AB(A-B)$$

이때 $A-B=E, A^3=-E, B^3=E$ 이므로

$$\begin{aligned}E^3 &= -E-E-3ABE \\ E &= -2E-3AB \quad \therefore AB=-E \\ \therefore AB+BA &= -2E\end{aligned}$$

63 $\neg, A-B=E$ 의 양변의 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$A^2-AB=AE \quad \therefore AB=A^2-A \quad \dots \textcircled{1}$$

$A-B=E$ 의 양변의 오른쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$A^2-BA=EA \quad \therefore BA=A^2-A \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면 $AB-BA=O$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이면

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 $A^2=A, A \neq O$ 이지만 $A \neq E$ 이다.

$\neg, BA=B$ 의 양변의 오른쪽에 행렬 B 를 곱하면

$$\begin{aligned}BAB &= B^2 \\ AB &= A \text{이므로 } BA=B^2\end{aligned}$$

이때 $BA=B$ 이므로 $B^2=B$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다. $\text{답 } \textcircled{5}$

64 $\neg, (A-E)(A^2+A+E)$

$$\begin{aligned}&= A^3+A^2+AE-EA^2-EA-E^2 \\ &= A^3+A^2+A-A^2-A-E \\ &= A^3-E\end{aligned}$$

$\therefore A^5=A^3A^2$ 이므로

$$E=A^3E \quad \therefore A^3=E$$

$A^3=A^2A$ 이므로

$$E=EA \quad \therefore A=E$$

$\neg, A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이면

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

따라서 $A^2=E$ 이지만 $A \neq -E, A \neq E$ 이다.

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다. $\text{답 } \textcircled{2}$

65 $(A+B)^2=A^2+B^2$ 에서

$$\begin{aligned}A^2+AB+BA+B^2 &= A^2+B^2 \\ \therefore AB+BA &= O\end{aligned}$$

$\neg, AB+BA=O$ 이므로 $AB=-BA$

$\neg, AB+BA=O$ 에서 $BA=-AB$ 이므로

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) &= A^2-AB+BA-B^2 \\ &= A^2-AB-AB-B^2 \\ &= A^2-2AB-B^2\end{aligned}$$

$\neg, AB+BA=O$ 에서 $AB=-BA$ 이므로

$$\begin{aligned}A^2B^2 &= AAB B=A(-BA)B=-ABAB \\ &= -(-BA)(-BA)=-BABA \\ &= -B(-BA)A=BBAA=B^2A^2\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다. $\text{답 } \textcircled{5}$

- 66 ㄱ. $A+B=E$ 의 양변의 오른쪽에 행렬 B 를 곱하면
 $(A+B)B=EB, \quad AB+B^2=B$
 $\therefore B^2=B (\because AB=O)$
 ㄴ. $A+B=E$ 의 양변의 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면
 $A(A+B)=AE, \quad A^2+AB=A$
 $\therefore A^2=A (\because AB=O)$
 이때 $B^2=B$ 이므로 $A^2-B^2=A-B$
 ㄷ. $A+B=E$ 의 양변의 왼쪽에 B 를 곱하면
 $B(A+B)=BE, \quad BA+B^2=B$
 이때 $B^2=B$ 이므로 $BA=O$
 이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 5

- 67 케일리-해밀턴 정리에 의하여
 $A^2 - (-3+1)A + \{-3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2\}E = O$
 $A^2 + 2A - E = O \quad \therefore A^2 = -2A + E$
 위의 식의 양변에 행렬 A 를 곱하면
 $A^3 = -2A^2 + A = -2(-2A + E) + A = 5A - 2E$
 $\therefore A^3 + 4A^2 - A + 2E$
 $= (5A - 2E) + 4(-2A + E) - A + 2E$
 $= -4A + 4E$ 답 4

[참고] 케일리-해밀턴 정리를 이용하지 않고 다음과 같이 행렬 A^2 을 A 와 E 에 대한 식으로 나타낼 수도 있다.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A^2 = mA + nE \quad (m, n \text{은 실수}) \text{라 하면}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3m+n & -m \\ 2m & m+n \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{aligned} m &= -2, n = 1 \\ \therefore A^2 &= -2A + E \end{aligned}$$

[참고] **B** $\frac{E}{\frac{1}{2}}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 일 때, 케일리-해밀턴 정리를 이용하면

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

$$\Rightarrow A^2 = \underbrace{(a+d)A}_{2\text{차식}} - \underbrace{(ad-bc)E}_{1\text{차 이하의 식}}$$

따라서 2×2 행렬 A 에 대한 2차식을 1차 이하의 식으로 변형할 수 있다. 이와 같이 케일리-해밀턴 정리는 행렬 A 에 대한 차수가 높은 식의 차수를 낮추는 데 활용할 수 있다.

- 68 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & -b \end{pmatrix} \neq kE$ (k 는 실수)이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여 $a-b=3$
 또 $-ab+2=-8$ 이므로 $ab=10$
 $\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
 $= 3^2+2 \cdot 10=29$ 답 29

- 69 (i) $A \neq kE$ (k 는 실수)일 때,
 케일리-해밀턴 정리에 의하여
 $a+d=-1$... 1

- (ii) $A=kE$ (k 는 실수)일 때,
 $A=kE$ 를 주어진 식에 대입하면
 $(kE)^2+kE-12E=O$
 $(k^2+k-12)E=O, \quad (k+4)(k-3)E=O$
 $\therefore k=-4$ 또는 $k=3$
 따라서 $A=-4E$ 또는 $A=3E$ 이므로
 $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ 또는 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
 $\therefore a+d=-8$ 또는 $a+d=6$... 2
 (i), (ii)에서 $a+d$ 의 최솟값은 -8 이다. ... 3

답 -8

채점 기준	비율
① $A \neq kE$ 일 때 $a+d$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $A = kE$ 일 때 $a+d$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $a+d$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

[참고] **B** $\frac{E}{\frac{1}{2}}$

(ii)에서 $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ 또는 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 인 경우 $a+d \neq -1$,
 $ad-bc \neq -12$ 임을 알 수 있다.
 이와 같이 $A^2-pA+qE=O$ (p, q 는 실수)를 만족시키는 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 항상 $a+d=p$, $ad-bc=q$ 인 것은 아니다.
 따라서 $A^2-pA+qE=O$ 를 만족시키는 행렬 A 를 구할 때에는 $A \neq kE$ 인 경우와 $A=kE$ (k 는 실수)인 경우로 나누어 생각한다.

ME
MO