

이 품

최고 수준
문제해결서

정답 및 풀이

I 지수함수와 로그함수 2

II 삼각함수 33

III 수열 64

정답을 확인하려고 할 때에는 <빠른 정답 찾기>를 이용하면 편리합니다.

I 지수함수와 로그함수

01 지수

개념 & 핵심 기출

본책 8쪽

01 -8 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -8$ 이므로
 $x^3 + 8 = 0$, $(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$
 즉 -8 의 세제곱근 중 실수인 것은 -2 이므로
 $a = -2$

625 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 625$ 이므로
 $x^4 - 625 = 0$, $(x^2 - 25)(x^2 + 25) = 0$
 $(x+5)(x-5)(x+5i)(x-5i) = 0$
 $\therefore x = \pm 5$ 또는 $x = \pm 5i$
 즉 625 의 네제곱근 중 음수인 것은 -5 이므로
 $b = -5$
 $\therefore ab = 10$

02 $f(n) = 2$ 이라면 $n-6$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수가 2이어야 하므로 $n-6 > 0$ 이고 n 은 짝수이어야 한다. 즉 n 은 $n > 6$ 인 짝수이므로 n 의 최솟값은 8이다.

1등급 비밀노트

n 의 값의 범위에 따라 $f(n)$ 을 구하면 다음과 같다.
 (i) $2 \leq n < 6$ 일 때, $-4 \leq n-6 < 0$ 이므로
 n 이 짝수이면 $f(n) = 0$
 n 이 홀수이면 $f(n) = 1$
 (ii) $n = 6$ 일 때, $n-6 = 0$ 이므로
 $f(n) = 1$
 (iii) $n > 6$ 일 때, $n-6 > 0$ 이므로
 n 이 짝수이면 $f(n) = 2$
 n 이 홀수이면 $f(n) = 1$

03 ① $5^3 = 125$ 이므로 5는 125의 세제곱근이다.
 ② -27 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -27$ 이므로
 $x^3 + 27 = 0$, $(x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$
 따라서 -27 의 세제곱근 중 실수인 것은 -3 뿐이다.
 ③ $(-2)^4 = 16$ 이므로 -2 는 -16 의 네제곱근이 아니다.
 ④ 81 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 81$ 이므로
 $x^4 - 81 = 0$, $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$
 $(x+3)(x-3)(x+3i)(x-3i) = 0$
 $\therefore x = \pm 3$ 또는 $x = \pm 3i$
 따라서 81 의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$ 이다.
 ⑤ 256 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 256$ 이므로
 $x^4 - 256 = 0$, $(x^2 - 16)(x^2 + 16) = 0$
 $(x+4)(x-4)(x+4i)(x-4i) = 0$
 $\therefore x = \pm 4$ 또는 $x = \pm 4i$

$A > 0, B > 0$ 이고 $n \in \mathbb{N}$ 이면
 $A < B \Rightarrow \sqrt[n]{A} < \sqrt[n]{B}$

실수 a 의 n 제곱근 중 실수의 개수

n	짝수	홀수
$a > 0$	2	1
$a = 0$	1	1
$a < 0$	0	1

$(a+b)^3$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 $= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

따라서 256의 네제곱근 중 실수인 것은 $-4, 4$ 의 2개이다.

답 ③

$$\begin{aligned} 04 \quad \sqrt[3]{8^2} + \sqrt[4]{2^4 \sqrt{8}} - \sqrt[3]{\sqrt{64}} &= \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[6]{64} \\ &= \sqrt[3]{4^3} + \sqrt[4]{2^4} - \sqrt[6]{2^6} \\ &= 4 + 2 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 05 \quad \frac{\sqrt{\sqrt{2} \times 3^2} \times \sqrt[4]{2}}{\sqrt{\sqrt{2} \times 3}} &= \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 3^2} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^2 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 3^2 \cdot 2}}{\sqrt[4]{2^2 \cdot 3}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{2^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3}} = \sqrt[4]{3} \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned} 06 \quad \sqrt[3]{3\sqrt{2}} &= \sqrt[3]{3^2 \cdot 2} = \sqrt[6]{18}, \\ \sqrt[3]{2\sqrt{3}} &= \sqrt[3]{2^2 \cdot 3} = \sqrt[6]{12}, \\ \sqrt{2\sqrt[3]{2}} &= \sqrt[6]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[6]{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이므로 } M &= \sqrt[3]{3\sqrt{2}}, m = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} \\ \therefore M^6 - m^6 &= 18 - 12 = 6 \end{aligned}$$

답 6

$$\begin{aligned} 07 \quad a &= \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}} \text{이므로} \\ a^4 \times (a^{-2})^3 \div a^{\frac{1}{2}} &= a^4 \times a^{-6} \div a^{\frac{1}{2}} \\ &= a^{4+(-6)-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{5}{2}} \\ &= (3^{\frac{1}{5}})^{-\frac{5}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 08 \quad x^3 + y^3 - 3x + 3y &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3(x-y) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} x+y &= (2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}) + (2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}) = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}, \\ xy &= (2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}})(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}) = 2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}}, \\ x-y &= (2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}) - (2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}) = 2 \cdot 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

이므로 이것을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 3x + 3y &= (2^{\frac{4}{3}})^3 - 3 \cdot (2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}}) \cdot 2^{\frac{4}{3}} - 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} - 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \\ &= 16 - 12 \\ &= 4 \end{aligned}$$

답 4

다른 풀이 $x^3 = (2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}})^3$

$$\begin{aligned} &= (2^{\frac{1}{3}})^3 + (2^{-\frac{1}{3}})^3 + 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \cdot (2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}) \\ &= 2 + 2^{-1} + 3(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}) \\ &= \frac{5}{2} + 3x \\ \therefore x^3 - 3x &= \frac{5}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

일품 BOX

$$\begin{aligned} y^3 &= (2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})^3 \\ &= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{-\frac{1}{3}})^3 - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \cdot (2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}) \\ &= 2 - 2^{-1} - 3(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}) \\ &= \frac{3}{2} - 3y \\ \therefore y^3 + 3y &= \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{A} \end{aligned}$$

㉠+㉡을 하면

$$x^3 + y^3 - 3x + 3y = 4$$

09 $(3-x^{\frac{2}{3}})(3-x^{-\frac{2}{3}}) = 9 - 3(x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}) + 1$

$$\begin{aligned} &= 10 - 3\{(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})^2 - 2\} \\ &= 10 - 3(3^2 - 2) \\ &= -11 \quad \text{답 ②} \end{aligned}$$

10 $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{x}{2}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{2}} = 3^{2x} = (3^x)^2$

$$= (\sqrt{2})^2 = 2 \quad \text{답 2}$$

11 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} &= \frac{a^x(a^{3x} + a^{-3x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} \\ &= \frac{(a^{2x})^2 + \frac{1}{a^{2x}}}{a^{2x} + 1} = \frac{5^2 + \frac{1}{5}}{5 + 1} \\ &= \frac{21}{5} \quad \text{답 ⑤} \end{aligned}$$

다른 풀이 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{(a^x + a^{-x})(a^{2x} - 1 + a^{-2x})}{a^x + a^{-x}}$

$$\begin{aligned} &= a^{2x} - 1 + a^{-2x} \\ &= 5 - 1 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5} \end{aligned}$$

12 $2^x = 36$ 에서 $2 = 36^{\frac{1}{x}}$ $\dots\dots \textcircled{A}$

$3^{-y} = 36$ 에서 $3 = 36^{-\frac{1}{y}}$ $\dots\dots \textcircled{B}$

㉠×㉡을 하면

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &= 36^{\frac{1}{x}} \cdot 36^{-\frac{1}{y}} \\ \therefore 6 &= 36^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = 6^{2(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})} \end{aligned}$$

따라서 $2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 1$ 이므로

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \quad \text{답 ①}$$

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a > 0, b < 0 \\ \text{또는 } a < 0, b > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} &= x^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} \\ &= x^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a||b| &= |ab| = -ab \\ (\because ab < 0) \end{aligned}$$

$$\frac{126}{5} = \frac{126}{30} = \frac{21}{5}$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

그런데 $\sqrt[n]{a^{2n}} + \sqrt[n]{b^{2n}} \neq \sqrt[n]{a^{3n}} + \sqrt[n]{b^{3n}}$ 이므로 n 은 홀수이다.

즉 $2n$ 은 짝수, $3n$ 은 홀수이므로

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = |a|, \sqrt[n]{b^{2n}} = |b|, \sqrt[n]{a^{3n}} = a, \sqrt[n]{b^{3n}} = b$$

$$\sqrt[n]{a^{2n}} + \sqrt[n]{b^{2n}} = 8 \text{에서}$$

$$|a| + |b| = 8 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\sqrt[n]{a^{3n}} + \sqrt[n]{b^{3n}} = 2 \text{에서}$$

$$a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$ab < 0$ 이므로

(i) $a > 0, b < 0$ 일 때,

$$\textcircled{A} \text{에서 } a - b = 8 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{을 연립하여 풀면 } a = 5, b = -3$$

(ii) $a < 0, b > 0$ 일 때,

$$\textcircled{A} \text{에서 } -a + b = 8 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{을 연립하여 풀면 } a = -3, b = 5$$

(i), (ii)에서 $ab = -15$ **답 ①**

다른 풀이 $|a| + |b| = 8$ 의 양변을 제곱하면 $ab < 0$ 이므로

$$a^2 + 2|a||b| + b^2 = 64, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 64$$

$$(a+b)^2 - 4ab = 64$$

$$\text{이때 } a+b=2 \text{이므로 } 2^2 - 4ab = 64$$

$$4ab = -60 \quad \therefore ab = -15$$

02 $(-4)^2 = 4^2 = 16, (-3)^2 = 3^2 = 9, (-2)^2 = 2^2 = 4$ 이므로

$$B = \{4, 9, 16\} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) y 가 짝수일 때,

$\sqrt[y]{x}$ 가 실수가 되려면 $x \geq 0$ 이어야 하므로 순서쌍 (x, y) 는

$$(2, 4), (3, 4), (4, 4), (2, 16),$$

$$(3, 16), (4, 16) \text{의 6개} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(ii) y 가 홀수일 때,

x 의 값의 부호에 관계없이 $\sqrt[y]{x}$ 는 항상 실수이므로 순서쌍 (x, y) 는

$$(-4, 9), (-3, 9), (-2, 9), (2, 9),$$

$$(3, 9), (4, 9) \text{의 6개} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$6 + 6 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 12

채점 기준	비율
① 집합 B 를 구할 수 있다.	20%
② y 가 짝수일 때, 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구할 수 있다.	30%
③ y 가 홀수일 때, 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구할 수 있다.	30%
④ 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구할 수 있다.	20%

1등급을 위한 고난도 문제

본책 10쪽

01 n 이 짝수이면 $2n$ 과 $3n$ 은 모두 짝수이므로

$$\sqrt[n]{a^{2n}} = \sqrt[n]{a^{3n}} = |a|, \sqrt[n]{b^{2n}} = \sqrt[n]{b^{3n}} = |b|$$

$$\therefore \sqrt[n]{a^{2n}} + \sqrt[n]{b^{2n}} = \sqrt[n]{a^{3n}} + \sqrt[n]{b^{3n}} = |a| + |b|$$

03 ㄱ. 임의의 실수 x 에 대하여 n 이 홀수이면

$$f(n, x) = 1 \text{이므로}$$

$$f(3, a) = f(3, a^2) = 1$$

$$\therefore f(4, x) = \begin{cases} 2 & (x > 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로 } a < b \text{이면}$$

$$f(4, a) \leq f(4, b)$$

ㄷ. 자연수 x 에 대하여 $f(n, x) = \begin{cases} 2 & (n \text{이 짝수}) \\ 1 & (n \text{이 홀수}) \end{cases}$

이때 $f(a, b) \neq f(b, a)$ 이므로 a, b 중 하나는 짝수, 나머지 하나는 홀수이다.

따라서 $a+b$ 는 홀수, ab 는 짝수이므로

$$f(a+b, b) = 1, f(ab, b) = 2$$

$$\therefore f(a+b, b) < f(ab, b)$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답 ⑤**

04 $\sqrt{-x^2+2(a-1)x-16} < 0$ 에서

$$-x^2+2(a-1)x-16 < 0$$

$$\therefore x^2-2(a-1)x+16 > 0$$

위의 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+16=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = \{-(a-1)\}^2 - 16 < 0$$

$$a^2 - 2a - 15 < 0, \quad (a+3)(a-5) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 5 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $\sqrt{ax^2+ax+2} > 0$ 에서 $ax^2+ax+2 > 0$

(i) $a=0$ 일 때,

$2 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax^2+ax+2 > 0$ 이 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax^2+ax+2 > 0$ 이 성립해야 하므로 $a > 0$ 이고, 이차방정식 $ax^2+ax+2=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = a^2 - 8a < 0, \quad a(a-8) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 8$$

(i), (ii)에서 $0 \leq a < 8 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$0 \leq a < 5$$

따라서 $a=0, \beta=5$ 이므로

$$a+\beta=5 \quad \text{답 ⑤}$$

1등급 비밀노트

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c > 0$ 이 성립할 조건은 다음과 같다.

- ① $a=0, b>0, c>0$
- ② $a>0, b^2-4ac < 0$

05 $\neg. A(a, b) = \sqrt[a]{b} = \sqrt[a]{b^c} = A(ac, b^c)$

ㄴ. [반례] $a=3, b=2$ 일 때,

$$A(3, 2) = \sqrt[3]{2}, \quad A(3^2, 2^2) = \sqrt[9]{4} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^2}}$$

$$\therefore A(3, 2) \neq A(3^2, 2^2)$$

(짝수)+(홀수)=(홀수),
(짝수)×(홀수)=(짝수)

- ① n 이 홀수일 때,
 $A > 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{A} > 0$
 $A < 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{A} < 0$
- ② n 이 짝수일 때,
 $A > 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{A} > 0$

$$5.3 \dots < n < 18.9 \dots$$

$a \in (A \cap B)$ 이면
 $a \in A$ 이고 $a \in B$

$$2 \neq \sqrt[3]{2^2}$$

ㄷ. $A(a, b) \cdot A(a, c) = \sqrt[a]{b} \sqrt[a]{c} = \sqrt[a]{bc} = A(a, bc)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답 ③**

참고 ㄴ. $A(a, b) = \sqrt[a]{b} = \sqrt[2a]{b^2} = A(2a, b^2)$

06 직육면체의 부피는

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{128} = \sqrt{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[3]{2^7}$$

$$= \sqrt[3]{2^9} \cdot \sqrt[3]{2^{10}} \cdot \sqrt[3]{2^7}$$

$$= \sqrt[3]{2^9 \cdot 2^{10} \cdot 2^7} = \sqrt[3]{2^{26}} = \sqrt[3]{2^{27} \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$a^3 = \sqrt[3]{2^{13}} \quad \therefore a = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{13}}} = \sqrt[9]{2^{13}}$$

따라서 $m=9, n=13$ 이므로 $m+n=22$ **답 22**

07 $P = \sqrt[6]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{\sqrt{12}} = \sqrt[12]{12}$,

$$Q = \sqrt[8]{3\sqrt[3]{n}} = \sqrt[8]{\sqrt[3]{27n}} = \sqrt[24]{27n},$$

$$R = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{8}} = \sqrt[8]{8}$$

$P < Q < R$ 에서 $\sqrt[12]{12} < \sqrt[24]{27n} < \sqrt[8]{8}$ 이므로

$$\sqrt[24]{12^2} < \sqrt[24]{27n} < \sqrt[24]{8^3}$$

즉 $144 < 27n < 512$ 이므로

$$\frac{16}{3} < n < \frac{512}{27}$$

따라서 자연수 n 은

$$6, 7, 8, \dots, 18 \text{의 } 13 \text{개}$$

답 13

채점 기준	비율
① P, Q, R 를 간단히 할 수 있다.	40%
② n 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ n 의 개수를 구할 수 있다.	20%

08 $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}, \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125},$

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{100},$$

$$\sqrt[3]{12} = \sqrt[6]{12} = \sqrt[12]{12^2} = \sqrt[12]{144} \text{이므로}$$

$$\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{12}$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$A \cap B$$

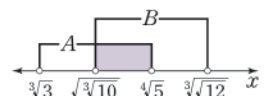
$$= \{x \mid \sqrt[3]{10} < x < \sqrt[4]{5}\}$$

$$= \{x \mid \sqrt[12]{100} < x < \sqrt[12]{125}\}$$

이므로 $\sqrt[12]{n} \in (A \cap B)$ 를 만족시키는 자연수 n 은

$$101, 102, \dots, 124 \text{의 } 24 \text{개}$$

답 24



09 $\sqrt[4]{\frac{2+2^2+2^3}{3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}}} \times \sqrt[4]{\frac{3+3^2+3^3}{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}}}$

$$= \sqrt[4]{\frac{2+2^2+2^3}{3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3+3^2+3^3}{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{2^4(2^{-1}+2^{-2}+2^{-3})}{3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3^4(3^{-1}+3^{-2}+3^{-3})}{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}}}$$

$$= \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{6^4} = 6$$

답 ④

일품 BOX

$a > 0$ 일 때, 2 이상의 자연수 m, n 에 대하여

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = a^{\frac{1}{mn}}$$

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \quad (\text{단, } A \neq B)$$

10 $a^{-2}=2$ 에서 $a=2^{-\frac{1}{2}}$

$b^{-3}=4=2^2$ 에서 $b=2^{-\frac{2}{3}}$

$c^{-6}=8=2^3$ 에서 $c=2^{-\frac{1}{2}}$

$a=c$ 이므로

$$f(n) = \left(\frac{a}{bc} \right)^n = b^{-n} = 2^{\frac{2}{3}n}$$

$$\therefore f(2)f(4)f(6) = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{8}{3}} \cdot 2^4 = 2^8 = 256$$

답 ②

11 $x\sqrt{y^3}=a$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2y^3=a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\sqrt[3]{xy}=b$ 의 양변을 세제곱하면

$$xy^3=b^3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면 $x = \frac{a^2}{b^3} = a^2b^{-3}$ → ①

$x=a^2b^{-3}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a^2b^{-3}y^3=b^3, \quad y^3 = \frac{b^3}{a^2b^{-3}} = a^{-2}b^6$$

$$\therefore y = (a^{-2}b^6)^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{2}{3}}b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $p=2, q=-3, r=-\frac{2}{3}, s=2$ 이므로

$$p+q+r+s = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 1/3

12 $\sqrt[n]{8^k} = \sqrt[n]{2^{3k}} = 2^{\frac{3k}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $\frac{3k}{n}$ 가 자연수이어야 하므로 n 이 $3k$ 의 양의 약수이어야 한다.

이때 n 은 2 이상의 자연수이므로

$$f(k) = (3k \text{의 양의 약수의 개수}) - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$k=9$ 일 때, $3k=3 \cdot 3^2=3^3$ 의 양의 약수의 개수는 $3+1=4$ 이므로

$$f(9) = 4 - 1 = 3$$

$k=27$ 일 때, $3k=3 \cdot 3^3=3^4$ 의 양의 약수의 개수는 $4+1=5$ 이므로

$$f(27) = 5 - 1 = 4$$

$k=81$ 일 때, $3k=3 \cdot 3^4=3^5$ 의 양의 약수의 개수는 $5+1=6$ 이므로

$$f(81) = 6 - 1 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore f(9) + f(27) + f(81) = 12 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 12

채점 기준	비율
① $f(k)$ 를 구할 수 있다.	30%
② $f(9), f(27), f(81)$ 의 값을 구할 수 있다.	60%
③ $f(9) + f(27) + f(81)$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

13
$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} \times \sqrt[5]{\sqrt[4]{2}} \times \dots \times \sqrt[10]{\sqrt[9]{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2 \cdot 3}} \cdot 2^{\frac{1}{3 \cdot 4}} \cdot 2^{\frac{1}{4 \cdot 5}} \cdot \dots \cdot 2^{\frac{1}{9 \cdot 10}} \\ &= 2^{\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10}} \\ &= 2^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)} \\ &= 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}} = 2^{\frac{2}{5}} \\ &= \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4} \end{aligned}$$

답 ③

14 현재 ^{14}C 의 양이 8g이므로 5750년 후의 ^{14}C 의 양은

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ (g)}$$

따라서 m 년 후의 ^{14}C 의 양은

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{m}{5750}} \text{ (g)}$$

이므로 500년 후의 ^{14}C 의 양은

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{500}{5750}} = 2^3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{23}} = 2^{3 - \frac{2}{23}} = 2^{\frac{67}{23}} \text{ (g)}$$

$$\therefore k = \frac{67}{23} \quad \text{답 ⑤}$$

15
$$\begin{aligned} \sqrt{(a^x - a^{-x})^2 + 4} &= \sqrt{a^{2x} - 2 + a^{-2x} + 4} \\ &= \sqrt{a^{2x} + 2 + a^{-2x}} \\ &= \sqrt{(a^x + a^{-x})^2} \end{aligned}$$

이고 $a^x + a^{-x} > 0$ 이므로 주어진 등식은

$$\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

위의 등식의 좌변의 분모, 분자에 a^x 를 곱하면

$$\frac{a^x(a^x - a^{-x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2(a^{2x} - 1) = a^{2x} + 1$$

$$\therefore a^{2x} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore a^{2x} - a^{-2x} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 8/3

채점 기준	비율
① 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	30%
② a^{2x} 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $a^{2x} - a^{-2x}$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

16 $25^x=2$ 에서 $2^{\frac{1}{x}}=25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$a^y=4=2^2$ 에서 $2^{\frac{2}{y}}=a$

$$\therefore 2^{\frac{1}{y}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$200^z=8=2^3$ 에서 $2^{\frac{3}{z}}=200 \quad \dots\dots \textcircled{3}$ → ①

$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \div \textcircled{3}$ 을 하면

$$2^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z}} = \frac{25\sqrt{a}}{200} = \frac{\sqrt{a}}{8} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = 1$ 이므로

$$2 = \frac{\sqrt{a}}{8}, \quad \sqrt{a} = 16$$

$$\therefore a = 16^2 = 256$$

→ ③

답 256

채점 기준	비율
① 주어진 등식을 변형할 수 있다.	40%
② $2^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z}}$ 을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30%

17 $81^a = 64^b = x^c = k$ ($k > 0$)라 하면

$$k^{\frac{1}{a}} = 81, \quad k^{\frac{1}{b}} = 64, \quad k^{\frac{1}{c}} = x$$

$$\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = \frac{24}{c} \text{에서} \quad k^{\frac{3}{a} + \frac{4}{b}} = k^{\frac{24}{c}}$$

$$k^{\frac{3}{a}} \cdot k^{\frac{4}{b}} = k^{\frac{24}{c}}, \quad 81^3 \cdot 64^4 = x^{24}$$

$$(3^4)^3 \cdot (2^6)^4 = x^{24}, \quad 3^{12} \cdot 2^{24} = x^{24}$$

$$\therefore x = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

답 ①

18 $4^{-a} + 4^{-b} = \frac{1}{4^a} + \frac{1}{4^b} = \frac{4^a + 4^b}{4^{a+b}} = \frac{4^a + 4^b}{4}$

이때

$$(4^a + 4^b)^2 = (4^a - 4^b)^2 + 4 \cdot 4^a \cdot 4^b$$

$$= (4^a - 4^b)^2 + 4^{a+b+1}$$

$$= x^2 + 16$$

이므로

$$4^a + 4^b = \sqrt{x^2 + 16} \quad (\because 4^a + 4^b > 0)$$

$$\therefore 4^{-a} + 4^{-b} = \frac{4^a + 4^b}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4}$$

답 ②

19 점 (a, b) 가 $y = x^2 - 4$ 의 그래프 위에 있으므로

$$b = a^2 - 4$$

이때 $3^{a^2+a} > 0$, $2^{a^2+a} > 0$, $2^{a+b} > 0$, $3^{a+b} > 0$ 이므로 산술 평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3^{a^2+a}}{2^{a+b}} + \frac{2^{a^2+a}}{3^{a+b}} \geq 2\sqrt{\frac{3^{a^2+a}}{2^{a+b}} \cdot \frac{2^{a^2+a}}{3^{a+b}}}$$

$$= 2\sqrt{3^4 \cdot 2^4} = 2\sqrt{6^4} = 72$$

(단, 등호는 $a = -2$ 또는 $a = 1$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 72이다.

답 72

1등급 비밀노트

등호는 $\frac{3^{a^2+a}}{2^{a+b}} = \frac{2^{a^2+a}}{3^{a+b}}$ 일 때 성립하므로

$$2^{2a^2+2a-4} = 3^{2a^2+2a-4}$$

따라서 $2a^2 + 2a - 4 = 0$ 이므로

$$2(a+2)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

$f(n)$ 이 짝수일 때, A 의 $f(n)$ 제곱근 중 실수인 것의 개수가 10이려면 $A=0$

$2n+1=30$ 에서 $n=1$
 $2n+1=9$ 에서 $n=4$
 $2n+1=15$ 에서 $n=7$
 $2n+1=21$ 에서 $n=10$

산술평균과 기하평균의 관계
 $a > 0, b > 0$ 일 때,
 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
 (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

내신 + 수능

1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 13쪽

01 $g(n)$ 의 값은 0, 1, 2 중 하나이므로

$$g(a) + g(b) = 3 \text{에서}$$

$$g(a) = 1, g(b) = 2 \text{ 또는 } g(a) = 2, g(b) = 1$$

(i) $g(n) = 1$ 일 때,

$(-1)^n \neq 0$ 이고, $(-1)^n$ 의 $f(n)$ 제곱근 중 실수인 것의 개수가 1이므로 $f(n)$ 은 홀수이다.

즉 n 은 (자연수)² 꼴이므로

$$2^2, 3^2, 4^2, \dots, 9^2$$

(ii) $g(n) = 2$ 일 때,

$(-1)^n$ 의 $f(n)$ 제곱근 중 실수인 것의 개수가 2이므로 $(-1)^n$ 은 양수이고 $f(n)$ 은 짝수이다.

즉 n 은 (자연수)² 꼴이 아닌 짝수이므로

$$2, 6, 8, \dots, 98$$

(i), (ii)에서 $g(n) = 1$ 을 만족시키는 n 의 최댓값은

$9^2 = 81$ 이고, $g(n) = 2$ 를 만족시키는 n 의 최댓값은 98이

므로 $a+b$ 의 최댓값은

$$81 + 98 = 179$$

답 179

02 $2^{\frac{m+1}{n}} \times \sqrt[3]{3^{\frac{2n+1}{n}}} = 2^{\frac{m+1}{n}} \times 3^{\frac{2n+1}{3n}}$ 이 자연수가 되려면

2와 3이 서로소이므로 $\frac{m+1}{n}$ 과 $\frac{2n+1}{3}$ 이 모두 자연수이어야 한다.

$\frac{2n+1}{3}$ 이 자연수이려면 $2n+1$ 이 3의 배수이어야 하므로 n 의 값은

$$1, 4, 7, 10$$

따라서 $\frac{m+1}{n}$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$m+1$ 이 자연수이어야 하므로 m 의 값은

$$1, 2, 3, \dots, 10 \text{의 } 10 \text{개}$$

(ii) $n=4$ 일 때,

$\frac{m+1}{4}$ 이 자연수이려면 $m+1$ 이 4의 배수이어야 하므로 m 의 값은

$$3, 7 \text{의 } 2 \text{개}$$

(iii) $n=7$ 일 때,

$\frac{m+1}{7}$ 이 자연수이려면 $m+1$ 이 7의 배수이어야 하므로 m 의 값은

$$6 \text{의 } 1 \text{개}$$

(iv) $n=10$ 일 때,

$\frac{m+1}{10}$ 이 자연수이려면 $m+1$ 이 10의 배수이어야 하므로 m 의 값은

$$9 \text{의 } 1 \text{개}$$

이상에서 구하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$10 + 2 + 1 + 1 = 14$$

답 ④

03 $a = \sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = (2^8)^{\frac{1}{12}} = 256^{\frac{1}{12}},$

$b = \sqrt{\sqrt{6}} = 6^{\frac{1}{4}} = (6^3)^{\frac{1}{12}} = 216^{\frac{1}{12}},$

$c = \sqrt[3]{\sqrt{15}} = 15^{\frac{1}{6}} = (15^2)^{\frac{1}{12}} = 225^{\frac{1}{12}}$

이므로

$b < c < a$

$\therefore m(a, M(b, c)) = m(a, c) = c$

한편 $a = 2^{\frac{2}{3}}, c = 3^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}, d = 2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}$ 이므로

$\frac{d}{ac} = \frac{2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}}{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}}$

$= 2^{-\frac{1}{15}} \cdot 3^{\frac{1}{30}} \cdot 5^{\frac{1}{30}}$

$= \left(\frac{3 \cdot 5}{2^2}\right)^{\frac{1}{30}} > 1$

즉 $ac < d$ 이므로

$M(ac, d) = d$

$\therefore m(a, M(b, c)) \cdot M(ac, d)$

$= cd = (3^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}) \cdot (2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{5}})$

$= 2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{11}{30}} \cdot 5^{\frac{11}{30}}$

따라서 $p = \frac{3}{5}, q = \frac{11}{30}, r = \frac{11}{30}$ 이므로

$p + q + r = \frac{4}{3}$

답 ③

04 원 $x^2 + y^2 = 16^{\frac{1}{n}}$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$x_1x + y_1y = 16^{\frac{1}{n}}$

따라서 $Q\left(\frac{16^{\frac{1}{n}}}{x_1}, 0\right), R\left(0, \frac{16^{\frac{1}{n}}}{y_1}\right)$ 이므로

$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{16^{\frac{1}{n}}}{|x_1|} \cdot \frac{16^{\frac{1}{n}}}{|y_1|}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{16^{\frac{2}{n}}}{|x_1y_1|}$

$= 2^{-1} \cdot 2^{\frac{8}{n}} \cdot 2^{2n-1}$

$= 2^{2n + \frac{8}{n} - 2}$

이때 $2n > 0, \frac{8}{n} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2n + \frac{8}{n} - 2 \geq 2\sqrt{2n \cdot \frac{8}{n}} - 2$
 $= 8 - 2 = 6$

(단, 등호는 $n=2$ 일 때 성립)

$\therefore S_n = 2^{2n + \frac{8}{n} - 2} \geq 2^6 = 64$

따라서 S_n 의 최솟값은 64이다.

답 ③

05 $30^b = 3$ 에서

$30^{-b} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

위의 식의 양변에 30을 곱하면

$30^{1-b} = 10$

$\therefore 10^{\frac{2a+b}{1-b}} = (30^{1-b})^{\frac{2a+b}{1-b}}$
 $= 30^{2a+b}$
 $= (30^a)^2 \cdot 30^b$
 $= 4^2 \cdot 3$
 $= 48$

답 48

06 $t = ax^by^{1+2b}$ ㉠

염분의 농도가 $4y$, 음식의 양이 $2x$ 일 때, 끓기까지 걸리는 시간은 $6t$ 이므로

$6t = a \cdot (2x)^b \cdot (4y)^{1+2b}$ ㉡

㉡ ÷ ㉠을 하면

$6 = 2^b \cdot 4^{1+2b} \quad \therefore 6 = 2^{5b+2}$

염분의 농도가 $2y$, 음식의 양이 $8x$ 일 때, 끓기까지 걸리는 시간을 kt 라 하면

$kt = a \cdot (8x)^b \cdot (2y)^{1+2b}$ ㉢

㉢ ÷ ㉡을 하면

$k = 8^b \cdot 2^{1+2b} = 2^{5b+1}$

이때 $6 = 2^{5b+2}$ 에서 $3 = 2^{5b+1}$ 이므로

$k = 3$

따라서 끓기까지 걸리는 시간은 3배 증가한다. 답 3배

$d = \sqrt[5]{120} = 120^{\frac{1}{5}}$
 $= (2^3 \cdot 3 \cdot 5)^{\frac{1}{5}}$
 $= 2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}$

$A > 0, B > 0$ 일 때
① $\frac{A}{B} > 1 \Rightarrow A > B$
② $\frac{A}{B} = 1 \Rightarrow A = B$
③ $\frac{A}{B} < 1 \Rightarrow A < B$

$x_1y_1 = 2^{1-2n} > 0$ 이므로
 $|x_1y_1| = x_1y_1$

$2n = \frac{8}{n}$ 에서 $n^2 = 4$
 $\therefore n = 2$
($\because n$ 은 자연수)

02 로그

개념 & 핵심 기출

본책 14쪽

01 $\log_4 \{\log_3 (\log_2 x)\} = \frac{1}{2}$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$\log_3 (\log_2 x) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\log_2 x = 3^2 = 9$$

$$\therefore x = 2^9 = 512$$

답 ④

02 $\log_2 n = m$ (m 은 자연수)이라 하면 로그의 정의에 의하여

$$2^m = n$$

이때 $2^6 = 64$, $2^7 = 128$ 이므로 100 이하의 자연수 n 은

$$2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 \text{의 6개}$$

답 6

03 밑의 조건에서 $9-x > 0$, $9-x \neq 1$

$$\therefore x < 8 \text{ 또는 } 8 < x < 9$$

..... ㉠

진수의 조건에서 $x^2 - 7x + 10 > 0$

$$(x-2)(x-5) > 0$$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 5$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$x < 2 \text{ 또는 } 5 < x < 8 \text{ 또는 } 8 < x < 9$$

따라서 자연수 x 는

$$1, 6, 7 \text{의 3개}$$

답 ①

04 $2\log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \sqrt{18} - \frac{1}{2} \log_3 32$

$$= \log_3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \log_3 \sqrt{18} - \log_3 \sqrt{32}$$

$$= \log_3 \frac{4}{9} + \log_3 3\sqrt{2} - \log_3 4\sqrt{2}$$

$$= \log_3 \left(\frac{4}{9} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} \right)$$

$$= \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

답 -1

다른 풀이 $2\log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \sqrt{18} - \frac{1}{2} \log_3 32$

$$= 2(\log_3 2 - 1) + \log_3 (2^{\frac{1}{2}} \cdot 3) - \frac{1}{2} \log_3 2^5$$

$$= 2\log_3 2 - 2 + \frac{1}{2} \log_3 2 + 1 - \frac{5}{2} \log_3 2$$

$$= -1$$

$$\begin{aligned} \sqrt{18} &= (2 \cdot 3^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3 \end{aligned}$$

05 $\log_5 \sqrt{2.4} = \frac{1}{2} \log_5 2.4$

$$= \frac{1}{2} \log_5 \frac{12}{5}$$

$$= \frac{1}{2} \log_5 \frac{2^2 \cdot 3}{5}$$

$$= \frac{1}{2} (2\log_5 2 + \log_5 3 - 1)$$

$$= \frac{1}{2} (2a + b - 1)$$

답 ①

두 양수 A, B 와 0이 아닌 두 실수 x, y 에 대하여
 $A^x = B^y$
 $\Rightarrow A = B^{\frac{y}{x}}, B = A^{\frac{x}{y}}$

06 $a^2 = b^3$ 에서 $b = a^{\frac{2}{3}}$

또 $b^3 = c^4$ 에서 $c = b^{\frac{3}{4}}$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b c &= \log_a a^{\frac{2}{3}} + \log_b b^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

따라서 $p=12$, $q=17$ 이므로

$$p+q=29$$

답 29

다른 풀이 $a^2 = b^3$ 이므로 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a a^2 = \log_a b^3, \quad 2 = 3\log_a b$$

$$\therefore \log_a b = \frac{2}{3}$$

또 $b^3 = c^4$ 이므로 양변에 b 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_b b^3 = \log_b c^4, \quad 3 = 4\log_b c$$

$$\therefore \log_b c = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \log_a b + \log_b c = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=17$ 이므로

$$p+q=29$$

07 $\log_{12} 14 = \frac{\log_7 14}{\log_7 12} = \frac{\log_7 (2 \cdot 7)}{\log_7 (2^2 \cdot 3)}$

$$= \frac{\log_7 2 + 1}{2\log_7 2 + \log_7 3}$$

$$= \frac{a+1}{2a+b}$$

답 ④

08 $\log_5 7^2 = \frac{b}{a} \log_5 7$ 에서

$$\frac{2}{3} \log_5 7 = \frac{b}{a} \log_5 7$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \text{이므로 } b = \frac{2}{3}a$$

$$b = \frac{2}{3}a \text{를 } a+b=20 \text{에 대입하면}$$

$$a + \frac{2}{3}a = 20, \quad \frac{5}{3}a = 20$$

$$\therefore a = 12$$

따라서 $b=8$ 이므로

$$ab=96$$

답 96

09 $a = \frac{\log_3 10}{\log_9 16} = \frac{\log_3 10}{\log_{3^2} 4^2} = \frac{\log_3 10}{\log_3 4} = \log_4 10$ 이므로

$$4^a = 4^{\log_4 10} = 10$$

답 ⑤

10 $\log 6^5 = 5 \log 6$

$$= 5(\log 2 + \log 3)$$

$$= 5(0.3010 + 0.4771)$$

$$= 3.8905$$

따라서 $3 < \log 6^5 < 4$ 이므로

$$n=3$$

답 ②

11 직육면체의 부피는 $12.6 \times 13.5 \times 14.4$ 이므로

$$a^3 = 12.6 \times 13.5 \times 14.4$$

$$\therefore a = \sqrt[3]{12.6 \times 13.5 \times 14.4}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log a &= \frac{1}{3} (\log 12.6 + \log 13.5 + \log 14.4) \\ &= \frac{1}{3} \{ \log (1.26 \times 10) + \log (1.35 \times 10) \\ &\quad + \log (1.44 \times 10) \} \\ &= \frac{1}{3} (\log 1.26 + 1 + \log 1.35 + 1 + \log 1.44 + 1) \\ &= \frac{1}{3} (3 + 0.1004 + 0.1303 + 0.1584) \\ &= 1.1297 \end{aligned}$$

답 1.1297

12 $\log 10 < \log 30 < \log 100$ 에서

$$1 < \log 30 < 2$$

따라서

$$n=1, \alpha = \log 30 - 1 = \log 30 - \log 10 = \log 3$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{10^n + 10^{2\alpha}}{10^n - 10^\alpha} &= \frac{10 + 10^{2\log 3}}{10 - 10^{\log 3}} \\ &= \frac{10 + 9}{10 - 3} = \frac{19}{7} \end{aligned}$$

답 $\frac{19}{7}$

다른 풀이 ▶ $\log 10 < \log 30 < \log 100$ 에서 $1 < \log 30 < 2$

이므로 $n=1$

즉 $\log 30 = 1 + \alpha$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} 10^{1+\alpha} &= 30, \quad 10 \cdot 10^\alpha = 30 \\ \therefore 10^\alpha &= 3 \\ \therefore \frac{10^n + 10^{2\alpha}}{10^n - 10^\alpha} &= \frac{10 + 3^2}{10 - 3} = \frac{19}{7} \end{aligned}$$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 16쪽

01 밑의 조건에서 $(a-2)^2 > 0, (a-2)^2 \neq 1$

$$\therefore a \neq 1, a \neq 2, a \neq 3 \quad \dots \textcircled{1} \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여

$$ax^2 - ax + 2 > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

이어야 한다.

(i) $a=0$ 일 때,

$2 > 0$ 이므로 $\textcircled{2}$ 은 항상 성립한다.

(ii) $a > 0$ 일 때,

이차방정식 $ax^2 - ax + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} D &= (-a)^2 - 8a < 0 \\ a(a-8) &< 0 \quad \therefore 0 < a < 8 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $0 \leq a < 8 \quad \dots \textcircled{3} \quad \rightarrow \textcircled{2}$

$ax^2 + bx + c > 0$ (a, b, c 는 상수)이 모든 실수 x 에 대하여 성립할 조건은
 $\textcircled{1} a=0, b=0, c>0$
 $\textcircled{2} a>0, b^2-4ac<0$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 정수 a 는 0, 4, 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$$0 + 4 + 5 + 6 + 7 = 22$$

$\rightarrow \textcircled{3}$

답 22

채점 기준	비율
① 밑의 조건을 만족시키는 a 의 조건을 구할 수 있다.	30%
② 진수의 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ a 의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

02 밑의 조건에서 $x-5 > 0, x-5 \neq 1$

$$\therefore 5 < x < 6 \text{ 또는 } x > 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 $10 - |x| - |y| > 0$

$$\therefore |x| + |y| < 10$$

이때 x 는 정수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 $x \geq 7$

(i) $x=7$ 일 때,

$$|y| < 3 \text{ 이므로 } -3 < y < 3$$

따라서 정수 y 는 -2, -1, 0, 1, 2이므로 순서쌍

(x, y) 의 개수는 5이다.

(ii) $x=8$ 일 때,

$$|y| < 2 \text{ 이므로 } -2 < y < 2$$

따라서 정수 y 는 -1, 0, 1이므로 순서쌍 (x, y) 의

개수는 3이다.

(iii) $x=9$ 일 때,

$$|y| < 1 \text{ 이므로 } -1 < y < 1$$

따라서 정수 y 는 0이므로 순서쌍 (x, y) 의 개수는 1이다.

(iv) $x \geq 10$ 일 때,

$|y| < 0$ 이므로 이를 만족시키는 정수 y 는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$5 + 3 + 1 = 9$$

답 ②

03 밑의 조건에서

$$\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} > 0, \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \neq 1$$

$$\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} > 0, \text{ 즉 } \frac{1}{a}x > \frac{b}{a} \text{ 에서}$$

$$\begin{cases} a > 0 \text{ 일 때, } & x > b \\ a < 0 \text{ 일 때, } & x < b \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \neq 1 \text{ 에서}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}x &\neq 1 + \frac{b}{a}, \quad \frac{1}{a}x \neq \frac{a+b}{a} \\ \therefore x &\neq a+b \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

진수의 조건에서

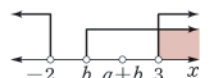
$$x^2 - x - 6 > 0, (x+2)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 의 공통 범위가 $x > 3$

이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$a > 0, -2 \leq b < a+b \leq 3$$



이때 $a > 0$ 이고, b 는 정수이므로

$$-2 \leq b \leq 2$$

(i) $b = -2$ 일 때,

$$a - 2 \leq 3 \text{에서 } a \leq 5 \text{이므로 } 0 < a \leq 5$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3, 4, 5이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 5이다.

(ii) $b = -1$ 일 때,

$$a - 1 \leq 3 \text{에서 } a \leq 4 \text{이므로 } 0 < a \leq 4$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3, 4이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 4이다.

(iii) $b = 0$ 일 때,

$$a \leq 3 \text{이므로 } 0 < a \leq 3$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 3이다.

(iv) $b = 1$ 일 때,

$$a + 1 \leq 3 \text{에서 } a \leq 2 \text{이므로 } 0 < a \leq 2$$

따라서 정수 a 는 1, 2이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 2이다.

(v) $b = 2$ 일 때,

$$a + 2 \leq 3 \text{에서 } a \leq 1 \text{이므로 } 0 < a \leq 1$$

따라서 정수 a 는 1이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 1이다.

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

답 15

04 $ab^2 = 1$ 에서 $a = b^{-2}$ 이므로

$$a^{-5}b^3 = (b^{-2})^{-5}b^3 = b^{10} \cdot b^3 = b^{13}$$

$$\therefore \log_b a^{-5}b^3 = \log_b b^{13} = 13$$

답 ④

다른 풀이 $ab^2 = 1$ 의 양변에 b 를 밑으로 하는 로그를 취하면 $\log_b ab^2 = \log_b 1$

$$\log_b a + 2 = 0 \quad \therefore \log_b a = -2$$

$$\therefore \log_b a^{-5}b^3 = -5 \log_b a + 3$$

$$= -5 \cdot (-2) + 3 = 13$$

05 $a^3 = b^2$ 이므로

$$b^4c^2 = (b^2)^2c^2 = (a^3)^2c^2 = a^6c^2 = 1$$

$a^6c^2 = 1$ 의 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a a^6c^2 = \log_a 1, \quad 6 + 2 \log_a c = 0$$

$$\therefore \log_a c = -3$$

$b^4c^2 = 1$ 의 양변에 b 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_b b^4c^2 = \log_b 1, \quad 4 + 2 \log_b c = 0$$

$$\therefore \log_b c = -2$$

$$\therefore \log_a c + \log_b c = -5$$

답 -5

다른 풀이 $a^3 = b^2$ 에서 $a = b^{\frac{2}{3}}$

$$b^4c^2 = 1 \text{에서 } c^2 = b^{-4} \quad \therefore c = b^{-2}$$

$$\therefore \log_a c + \log_b c = \log_{b^{\frac{2}{3}}} b^{-2} + \log_b b^{-2}$$

$$= \frac{-2}{\frac{2}{3}} - 2 = -3 - 2 = -5$$

양변에 $8y^2$ 을 더하면
 $x^2 - 4xy + 4y^2 = 8y^2$
 $\therefore (x - 2y)^2 = 8y^2$

06 $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$ 에서 $(x - 2y)^2 = 8y^2$

$$\therefore x - 2y = 2\sqrt{2}y \quad (\because x > 2y, y > 0)$$

$$\therefore \log_2(x - 2y) - \log_2 y = \log_2 2\sqrt{2}y - \log_2 y$$

$$= \log_2 \frac{2\sqrt{2}y}{y}$$

$$= \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

답 ③

07 $\log_2 xy = 4$ 에서

$$\log_2 x + \log_2 y = 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$\log_2 yz = 6$ 에서

$$\log_2 y + \log_2 z = 6 \quad \dots\dots ㉡$$

$\log_2 zx = 8$ 에서

$$\log_2 z + \log_2 x = 8 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면

$$2(\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z) = 18$$

$$\therefore \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = 9 \quad \dots\dots ㉣$$

$$㉢ - ㉠ \text{을 하면 } \log_2 z = 5$$

$$㉡ - ㉡ \text{을 하면 } \log_2 x = 3$$

$$㉢ - ㉢ \text{을 하면 } \log_2 y = 1$$

→ ②

$$\therefore \log_2 \frac{x^2 z^3}{y} = 2 \log_2 x + 3 \log_2 z - \log_2 y$$

$$= 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 - 1$$

$$= 20$$

→ ③

답 20

채점 기준	비율
① 주어진 세 등식을 변형할 수 있다.	30%
② $\log_2 x, \log_2 y, \log_2 z$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $\log_2 \frac{x^2 z^3}{y}$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

다른 풀이 $xy = 2^4, zx = 2^8$ 이므로

$$\frac{x^2 z^3}{y} = \frac{(zx)^3}{xy} = \frac{(2^8)^3}{2^4} = 2^{20}$$

$$\therefore \log_2 \frac{x^2 z^3}{y} = \log_2 2^{20} = 20$$

08 $\log_3(2^4 \cdot 5^2) = 2(\log_3 a + \log_3 b)$ 에서

$$\log_3(2^4 \cdot 5^2) = 2 \log_3 ab$$

$$2 \log_3 20 = 2 \log_3 ab$$

$$\log_3 20 = \log_3 ab$$

$$\therefore ab = 20$$

이때 $a \leq b$ 이므로 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 20), (2, 10), (4, 5)$ 의 3개

답 ③

09 $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} = \log_x 2 + \log_x 3 = \log_x 6 = 10$

$$\therefore \frac{1}{\log_6 \sqrt{x}} + \frac{1}{\log_{36} x} = \log_{\sqrt{x}} 6 + \log_x 36$$

$$= 2 \log_x 6 + 2 \log_x 6$$

$$= 4 \log_x 6$$

$$= 4 \cdot 10 = 40$$

답 40

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} = 10$$

이므로

$$\log_2 x \neq 0, \log_3 x \neq 0$$

$$\therefore x \neq 1$$

또 진수의 조건에서

$$x > 0$$

10 $5^a = \frac{1}{2}$ 에서

$$a = \log_5 \frac{1}{2} = -\log_5 2 = \log_{\frac{1}{5}} 2$$

$5^b = \frac{1}{3}$ 에서

$$b = \log_5 \frac{1}{3} = -\log_5 3 = \log_{\frac{1}{5}} 3$$

$$\therefore \log_{0.2} 360 = \log_{\frac{1}{5}} 360$$

$$= \log_{\frac{1}{5}} (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)$$

$$= 3 \log_{\frac{1}{5}} 2 + 2 \log_{\frac{1}{5}} 3 - 1$$

$$= 3a + 2b - 1$$

답 ①

11 $\begin{pmatrix} 4 & \log_a b \\ 2 \log_a 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 4 \log_b 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 에
서

$$\begin{pmatrix} 6 & \log_a b - 8 \\ 2 \log_a 5 - 4 \log_b 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\log_a b - 8 = -5, 2 \log_a 5 - 4 \log_b 5 = 1$$

$\log_a b - 8 = -5$ 에서

$$\log_a b = 3 \quad \therefore b = a^3$$

$2 \log_a 5 - 4 \log_b 5 = 1$ 에서

$$\frac{2}{\log_a 5} - \frac{4}{\log_b 5} = 1$$

$b = a^3$ 을 위의 식에 대입하면

$$\frac{2}{\log_a 5} - \frac{4}{\log_a a^3} = 1$$

$$\frac{2}{\log_a 5} - \frac{4}{3 \log_a 5} = 1$$

$$\frac{2}{3 \log_a 5} = 1, \quad \log_a 5 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a = 5^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $b = a^3 = (5^{\frac{3}{2}})^3 = 5^{\frac{9}{2}}$ 이므로

$$ab = 5^{\frac{8}{2}} = 5^4$$

답 ③

12 $\log_a \beta^2 + \log_\beta a^2 = 2(\log_a \beta + \log_\beta a) = 32$ 이므로

$$\log_a \beta + \log_\beta a = 16$$

한편 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 3n, \log_3 \alpha \cdot \log_3 \beta = 2n$$

$$\therefore \log_a \beta + \log_\beta a$$

$$= \frac{\log_3 \beta}{\log_3 \alpha} + \frac{\log_3 \alpha}{\log_3 \beta}$$

$$= \frac{(\log_3 \alpha)^2 + (\log_3 \beta)^2}{\log_3 \alpha \cdot \log_3 \beta}$$

$$= \frac{(\log_3 \alpha + \log_3 \beta)^2 - 2 \log_3 \alpha \cdot \log_3 \beta}{\log_3 \alpha \cdot \log_3 \beta}$$

$$= \frac{(3n)^2 - 2 \cdot 2n}{2n}$$

$$= \frac{9}{2}n - 2$$

→ ①

$$\log_{\frac{1}{5}} 5 = -\log_5 5 = -1$$

$$\log_{\sqrt{7}} \sqrt{2} = \log_{7^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}} = \log_7 2$$

$\log_3 7 \neq \frac{1}{\log_3 7}$ 이므로 등
호는 성립하지 않는다.

$$\begin{aligned} \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a &= \frac{\log_a b}{\log_a a} \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c} \\ &= 1 \end{aligned}$$

즉 $\frac{9}{2}n - 2 = 16$ 이므로

$$\frac{9}{2}n = 18 \quad \therefore n = 4$$

→ ②

$$\therefore \log_n 8 = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$$

→ ③

$$\text{답 } \frac{3}{2}$$

채점 기준	비율
① $\log_a \beta + \log_\beta a$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
② n 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $\log_n 8$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

13 $A = \log_4 \sqrt{2} + \log_3 27$

$$= \log_{2^2} 2^{\frac{1}{2}} + \log_{3^1} 3^3$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{3}{1} \log_3 3$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$$

$$B = 7^{\log_7 \sqrt{2}} = 7^{\log_7 2} = 2$$

$$C = \log_3 7 + \log_7 3 = \log_3 7 + \frac{1}{\log_3 7}$$

이때 $\log_3 7 > 0$, $\frac{1}{\log_3 7} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균
의 관계에 의하여

$$\log_3 7 + \frac{1}{\log_3 7} > 2\sqrt{\log_3 7 \cdot \frac{1}{\log_3 7}} = 2$$

$$\therefore C > 2$$

$$\therefore A < B < C$$

답 ①

14 $\log_a b = \alpha$, $\log_b c = \beta$, $\log_c a = \gamma$ 라 하자.

조건 (가)에서

$$2(\log_a b + \log_b c + \log_c a) = 7$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 7$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \frac{7}{2}$$

조건 (나)에서

$$2(\log_b a + \log_c b + \log_a c) = 7$$

$$2\left(\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b c} + \frac{1}{\log_c a}\right) = 7$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{7}{2}$$

이때 $\alpha\beta\gamma = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$ 이므로

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{7}{2}$$

$$\therefore (\log_a b)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c a)^2$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{4}$$

$$\text{답 } \frac{21}{4}$$

15 $(\sqrt{8})^a = (\sqrt{32})^b = x^c$ 의 각 변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_2 8^{\frac{a}{2}} = \log_2 32^{\frac{b}{2}} = \log_2 x^c$$

$$\log_2 2^{\frac{3}{2}a} = \log_2 2^{\frac{5}{2}b} = \log_2 x^c$$

$$\frac{3}{2}a = \frac{5}{2}b = c \log_2 x$$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{3}{2c \log_2 x}, \frac{1}{b} = \frac{5}{2c \log_2 x}$$

이때 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{7}{c}$ 이므로

$$\frac{6}{2c \log_2 x} + \frac{15}{2c \log_2 x} = \frac{7}{c}$$

$$\frac{21}{2c \log_2 x} = \frac{7}{c} \quad \therefore \log_2 x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

답 ①

다른 풀이 $(\sqrt{8})^a = (\sqrt{32})^b$ 에서 $2^{\frac{3}{2}a} = 2^{\frac{5}{2}b}$

$$\frac{3}{2}a = \frac{5}{2}b \quad \therefore a = \frac{5}{3}b$$

$a = \frac{5}{3}b$ 를 $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{7}{c}$ 에 대입하면

$$\frac{6}{5b} + \frac{3}{b} = \frac{7}{c}, \quad \frac{21}{5b} = \frac{7}{c}$$

$$21c = 35b \quad \therefore c = \frac{5}{3}b$$

따라서 $(\sqrt{32})^b = x^c$ 에서 $2^{\frac{5}{2}b} = x^{\frac{5}{3}b}$ 이므로

$$2^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} \quad \therefore x = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

16 1000의 양의 약수의 개수는 16이므로

$$n = 16$$

따라서 1000의 양의 약수를 작은 것부터 순서대로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{16}$ 이라 하면

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, \dots, a_{15} = 500, a_{16} = 1000$$

이때 $a_1 a_{16} = a_2 a_{15} = \dots = a_8 a_9 = 1000$ 이므로

$$a_1 a_2 \cdots a_{16} = 1000^8 = 10^{24}$$

$$\therefore n + \log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \dots + \log a_n$$

$$= 16 + \log (a_1 a_2 \cdots a_{16})$$

$$= 16 + \log 10^{24}$$

$$= 16 + 24 = 40$$

답 40

채점 기준	비율
① n 의 값을 구할 수 있다.	20%
② $a_1 a_2 \cdots a_{16}$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $n + \log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \dots + \log a_n$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

1등급 비밀노트

자연수 N 이

$$N = a^m b^n \quad (a, b \text{는 서로 다른 소수}, m, n \text{는 자연수})$$

으로 소인수분해 될 때

① N 의 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)$

② N 의 모든 양의 약수의 곱은 $N^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}a &= c \log_2 x \text{에서} \\ \frac{2}{3a} &= \frac{1}{c \log_2 x} \\ \therefore \frac{1}{a} &= \frac{3}{2c \log_2 x} \\ \frac{5}{2}b &= c \log_2 x \text{에서} \\ \frac{2}{5b} &= \frac{1}{c \log_2 x} \\ \therefore \frac{1}{b} &= \frac{5}{2c \log_2 x} \end{aligned}$$

올해의 양이 10%고 매년 a %씩 증가할 때, k 년 후의 양

$$\Rightarrow A \left(1 + \frac{a}{100}\right)^k$$

$1000 = 2^3 \cdot 5^3$ 이므로 양의 약수의 개수는 $(3+1)(3+1) = 16$

17 $L_1 = 4a, L_2 = a$ 일 때 $W = 30$ 이므로

$$C \log \frac{4a}{a} = 30, \quad 2C \log 2 = 30$$

$$\therefore C = \frac{15}{\log 2}$$

따라서 $W = \frac{15}{\log 2} \cdot \log \frac{L_1}{L_2}$ 이므로 이 식에 $L_1 = ka,$

$L_2 = 2a, W = 45$ 를 대입하면

$$\frac{15}{\log 2} \cdot \log \frac{ka}{2a} = 45, \quad \frac{\log \frac{k}{2}}{\log 2} = 3$$

$$\log_2 \frac{k}{2} = 3, \quad \frac{k}{2} = 2^3 = 8$$

$$\therefore k = 16$$

답 ④

18 10년 전 연 매출액을 A 원이라 하면

$$A \left(1 + \frac{a}{100}\right)^{10} = 3A$$

$$\therefore \left(1 + \frac{a}{100}\right)^{10} = 3$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10 \log \left(1 + \frac{a}{100}\right) = \log 3$$

$$\therefore \log \left(1 + \frac{a}{100}\right) = \frac{1}{10} \log 3$$

$$= \frac{1}{10} \times 0.48 = 0.048$$

이때 $\log 1.117 = 0.048$ 이므로

$$1 + \frac{a}{100} = 1.117$$

$$\therefore a = 11.7$$

답 ③

답 11.7

채점 기준	비율
① 매출액의 증가에 관한 식을 세울 수 있다.	30%
② $\log \left(1 + \frac{a}{100}\right)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30%

내신 + 수능 1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제** 본책 19쪽

01 조건 (가)에서

$$\log_2 a + \log_2 b^2 - \log_2 c$$

$$= \log_2 a + 2 \log_2 b - \log_2 c$$

$$= (\log_2 a + \log_2 b) + (\log_2 b - \log_2 c)$$

이고 $\log_2 a + \log_2 b^2 - \log_2 c$ 와 $\log_2 b - \log_2 c$ 가 모두 정수이므로 $\log_2 a + \log_2 b$ 도 정수이다.

이때 $\log_2 b - \log_2 c = \log_2 \frac{b}{c}, \log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab$ 이

므로

$$\frac{b}{c} = 2^m, ab = 2^n \quad (m, n \text{는 정수})$$

풀이여야 한다.

일품 BOX

a, b 는 자연수이므로 $a=2^p, b=2^q$ (p, q 는 음이 아닌 정수)이라 하면 $\frac{b}{c}=2^m$ 에서

$$c = \frac{b}{2^m} = \frac{2^q}{2^m}$$

c 는 자연수이므로 $q \geq m$ 이어야 한다.

$$\therefore c = \frac{2^q}{2^m} = 2^{q-m}$$

따라서 a, b, c 는 2^r (r 는 음이 아닌 정수) 꼴이고 조건 (나)에서 $a+b+c=21$ 이므로 a, b, c 중 하나만 $2^0=1$ 이고, 나머지 두 수는 $2^2=4, 2^4=16$ 이다.

$$\therefore abc = 1 \cdot 4 \cdot 16 = 64$$

답 64

1등급 비밀노트

세 자연수 a, b, c 의 합이 21, 즉 홀수이고 a, b, c 는 2^r (r 는 음이 아닌 정수) 꼴이므로 a, b, c 중 하나만 $2^0=1$ 이다. 또 나머지 두 수는 $21-1=20$ 보다 작은 2의 거듭제곱이므로 $2^2=4, 2^4=16$ 이다.

02 $-a+b+1 = -\log_2 3 + \log_2 5 + 1$

$$= \log_2 \frac{1}{3} + \log_2 5 + \log_2 2$$

$$= \log_2 \frac{10}{3}$$

이므로

$$2^{-a+b+1} = 2^{\log_2 \frac{10}{3}} = \frac{10}{3}$$

$2a-3 = 2\log_2 3 - 3 = \log_2 9 - \log_2 8 = \log_2 \frac{9}{8}$ 이므로

$$2^{2a-3} = 2^{\log_2 \frac{9}{8}} = \frac{9}{8}$$

$$\therefore A\left(\frac{10}{3}, \frac{9}{8}\right)$$

$b-1 = \log_2 5 - 1 = \log_2 5 - \log_2 2 = \log_2 \frac{5}{2}$ 이므로

$$2^{b-1} = 2^{\log_2 \frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$

$a+b-3 = \log_2 3 + \log_2 5 - 3$

$$= \log_2 3 + \log_2 5 - \log_2 8$$

$$= \log_2 \frac{15}{8}$$

이므로

$$2^{a+b-3} = 2^{\log_2 \frac{15}{8}} = \frac{15}{8}$$

$$\therefore B\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{8}\right)$$

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{15}{8} - \frac{9}{8}}{\frac{5}{2} - \frac{10}{3}} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{5}{6}} = -\frac{9}{10}$$

답 ⑤

03 자연수 n 에 대하여 $3^n > 1$ 이므로 $\log 3^n > 0$

(i) $m=0$ 일 때,

$$\log 3^n = a \text{에서 } 0 < \log 3^n < 1 \text{이므로}$$

$$1 < 3^n < 10$$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 1, 2이므로

$$f(1)=0, f(2)=0$$

(ii) $m=1$ 일 때,

$$\log 3^n = 1+a \text{에서 } 1 \leq \log 3^n < 2 \text{이므로}$$

$$10 \leq 3^n < 100$$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 3, 4이므로

$$f(3)=1, f(4)=1$$

(iii) $m=2$ 일 때,

$$\log 3^n = 2+a \text{에서 } 2 \leq \log 3^n < 3 \text{이므로}$$

$$100 \leq 3^n < 1000$$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 5, 6이므로

$$f(5)=2, f(6)=2$$

(iv) $m=3$ 일 때,

$$\log 3^n = 3+a \text{에서 } 3 \leq \log 3^n < 4 \text{이므로}$$

$$1000 \leq 3^n < 10000$$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 7, 8이므로

$$f(7)=3, f(8)=3$$

⋮

이상에서

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(7)=9 < 10,$$

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)=12 > 10$$

이므로 자연수 k 의 최솟값은 8이다.

답 8

04 $0 \leq a < 1$ 이므로

$$1 \leq 10^a < 10$$

즉 $1 \leq n < 10$ 이고 n 은 정수이므로

$$n=1, 2, 3, \dots, 9$$

$\log x = n+a$ 에서

$$x = 10^{n+a} = 10^n \cdot 10^a = n \cdot 10^n$$

따라서 $M=9 \cdot 10^9, m=10$ 이므로

$$\log \frac{M}{m} = \log \frac{9 \cdot 10^9}{10} = \log (9 \cdot 10^8)$$

$$= 8 + 2 \log 3$$

답 ⑤

05 조건 (가), (나)에 의하여

$$\log x = f(x) + g(x) = f(z) + 2 + g(z)$$

$$= \log z + 2 = \log 100z$$

이므로 $x = 100z$

또

$$\log y = f(y) + g(y) = f(z) + 1 + g(z)$$

$$= \log z + 1 = \log 10z$$

이므로 $y = 10z$

조건 (다)에서 $x+y+z=21312$ 이므로

$$100z + 10z + z = 21312$$

$$111z = 21312$$

$$\therefore z = 192$$

$n=9$ 일 때,
 $M=9 \cdot 10^9$
 $n=1$ 일 때,
 $m=1 \cdot 10^1=10$

$f(y)+1=f(z)+2$ 에서
 $f(y)=f(z)+1$

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
를 지나는 직선의 기울기
는
 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1 \neq x_2$)

따라서 $x=19200$, $y=1920$ 이므로

$$\frac{x}{60} + \frac{y}{20} + z = 320 + 96 + 192 = 608 \quad \text{답 608}$$

06 소리 P, Q의 강도가 기준음의 강도의 각각 K_P 배, K_Q 배라 하면

$$K_P = 25K_Q$$

또 소리 P, Q의 크기를 각각 D_P dB, D_Q dB이라 하면 두 소리의 크기의 차는

$$\begin{aligned} |D_P - D_Q| &= |10 \log K_P - 10 \log K_Q| \\ &= \left| 10 \log \frac{K_P}{K_Q} \right| \\ &= \left| 10 \log \frac{25K_Q}{K_Q} \right| \\ &= 10 \log 25 \\ &= 20 \log 5 \\ &= 20(1 - \log 2) \\ &= 20 \times 0.7 \\ &= 14 \text{ (dB)} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

$$\begin{aligned} \log 5 &= \log \frac{10}{2} \\ &= 1 - \log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 16 \cdot 2^{2x} + 3 \\ &= 4^2 \cdot 4^x + 3 \\ &= 4^{x+2} + 3 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 는 $g(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖고, $g(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

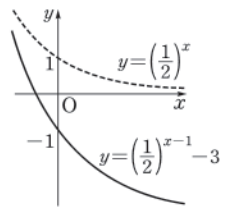
03 지수함수

개념 & 핵심 기출

본책 20쪽

01 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 3$ 의 그래프

는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다. **답 ①**

02 $y = 4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y - n &= 4^{x-m} \\ \therefore y &= 4^{x-m} + n \end{aligned}$$

이 식이 $y = 16 \cdot 2^{2x} + 3 = 4^{x+2} + 3$ 과 일치하므로

$$-m = 2, n = 3$$

따라서 $m = -2$, $n = 3$ 이므로

$$m + n = 1$$

답 1

03 $y = 3^{x-p} + q$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $y = -3$ 이므로

$$q = -3$$

$y = 3^{x-p} - 3$ 의 그래프가 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$3^{-1-p} - 3 = 0 \quad \therefore 3^{-1-p} = 3$$

즉 $-1-p = 1$ 이므로 $p = -2$

따라서 $y = 3^{x+2} - 3$ 의 그래프가 점 $(2, k)$ 를 지나므로

$$k = 3^{2+2} - 3 = 78$$

답 78

04 밑이 1보다 크고 $a > 0$ 이므로 주어진 함수는 $x = 3$ 일 때 최댓값을 갖고, $x = 0$ 일 때 최솟값을 갖는다.

즉 $a \cdot 3^2 + b = 55$ 이므로

$$9a + b = 55 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $a \cdot 3^{-1} + b = 3$ 이므로 $\frac{a}{3} + b = 3$

$$\therefore a + 3b = 9 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 6$, $b = 1$

$$\therefore a + b = 7$$

답 ②

05 $g(x) = x^2 - 2x + 2$ 라 하면

$$g(x) = (x-1)^2 + 1$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $g(0) = 2$, $g(1) = 1$, $g(3) = 5$ 이므로

$$1 \leq g(x) \leq 5$$

이때 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^5 \leq f(x) \leq \left(\frac{1}{5}\right)^1$$

따라서 $M = \frac{1}{5}$, $m = \left(\frac{1}{5}\right)^5$ 이므로

$$\frac{M}{m} = \frac{1}{5} \cdot 5^5 = 625$$

답 625

06 $y = -a^{2x} + 2a^x + 4 = -(a^x)^2 + 2a^x + 4$

$a^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $a > 1$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$ 에서

$$a \leq a^x \leq a^2 \quad \therefore a \leq t \leq a^2$$

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 2t + 4 = -(t-1)^2 + 5$$

이고 $a > 1$ 이므로 $t = a$, 즉 $x = 1$ 일 때 최댓값

$-(a-1)^2 + 5$ 를 갖는다.

즉 $-(a-1)^2 + 5 = 1$ 이므로

$$(a-1)^2 = 4, \quad a-1 = \pm 2$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 1)$$

따라서 주어진 함수는 $t = a^2 = 9$, 즉 $x = 2$ 에서 최소이므로 최솟값은

$$-(9-1)^2 + 5 = -59$$

답 ④

07 $4^{x^2-1} = \left(\frac{1}{64}\right)^{-2x-3}$ 에서

$$4^{x^2-1} = (4^{-3})^{-2x-3}$$

$$\therefore 4^{x^2-1} = 4^{6x+9}$$

즉 $x^2 - 1 = 6x + 9$ 이므로

$$x^2 - 6x - 10 = 0 \quad \dots\dots ①$$

이때 ①은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 x 의 값의 합은 6이다.

답 ③

08 $a^{2x} - 18a^x + 64 = 0$ 에서 $a^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 18t + 64 = 0 \quad \dots\dots ①$$

주어진 방정식의 두 근을 α , β 라 하면 ①의 두 근은 a^α , a^β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a^\alpha \cdot a^\beta = 64 \quad \therefore a^{\alpha+\beta} = 64$$

이때 $\alpha + \beta = 4$ 이므로 $a^4 = 64$

$$\therefore a = \sqrt[4]{64} = 2\sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

답 ①

09 $2^{x^2+ax+1} = 3^{x^2+ax+1}$ 에서

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \dots\dots ①$$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이려면 이차방정식 ①이 중근을 가져야 하므로 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4 = 0$$

$$\therefore a^2 = 4$$

답 4

10 $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-1} < 3\sqrt{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$ 에서

$$(3^{-2})^{2x-1} < 3^{\frac{3}{2}} < (3^{-1})^{x-5}$$

$$\therefore 3^{-4x+2} < 3^{\frac{3}{2}} < 3^{-x+5}$$

이때 밑이 1보다 크므로 $-4x + 2 < \frac{3}{2} < -x + 5$

$$(i) -4x + 2 < \frac{3}{2} \text{에서} \quad -4x < -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x > \frac{1}{8}$$

$$(ii) \frac{3}{2} < -x + 5 \text{에서} \quad x < \frac{7}{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서} \quad \frac{1}{8} < x < \frac{7}{2}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 는

1, 2, 3의 3개

답 ③

11 $2^{x-2} + 3 \leq 16^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$ 에서

$$2^{x-2} + 3 \leq (2^4)^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}, \quad 2^{x-2} + 3 \leq 2^{2x-2}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \cdot 2^{2x} - \frac{1}{4} \cdot 2^x - 3 \geq 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t - 3 \geq 0, \quad t^2 - t - 12 \geq 0$$

$$(t+3)(t-4) \geq 0 \quad \therefore t \geq 4 \quad (\because t > 0)$$

즉 $2^x \geq 2^2$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$x \geq 2$$

답 $x \geq 2$

12 $9^x \geq k \cdot 3^x - 3k - 7$ 에서

$$(3^x)^2 - k \cdot 3^x + 3k + 7 \geq 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - kt + 3k + 7 \geq 0$$

이때 $f(t) = t^2 - kt + 3k + 7$ 이라 하면

$$f(t) = \left(t - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}k^2 + 3k + 7$$

(i) $\frac{k}{2} > 0$, 즉 $k > 0$ 일 때,

$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{k}{2}$ 일 때 최솟값

$-\frac{1}{4}k^2 + 3k + 7$ 을 가지므로 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대

하여 $f(t) \geq 0$ 이려면

$$-\frac{1}{4}k^2 + 3k + 7 \geq 0, \quad k^2 - 12k - 28 \leq 0$$

$$(k+2)(k-14) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq k \leq 14$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 14$

(ii) $\frac{k}{2} \leq 0$, 즉 $k \leq 0$ 일 때,

$t > 0$ 에서 $f(t) > f(0)$ 이므로 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $f(t) \geq 0$ 이려면

$$f(0) \geq 0, \quad 3k + 7 \geq 0 \quad \therefore k \geq -\frac{7}{3}$$

이때 $k \leq 0$ 이므로 $-\frac{7}{3} \leq k \leq 0$

(i), (ii)에서 $-\frac{7}{3} \leq k \leq 14$

따라서 $a = -\frac{7}{3}$, $b = 14$ 이므로

$$\frac{b}{a} = -6$$

답 ④

⑤의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}$$

$$= (-3)^2 - 1 \cdot (-10) = 19 > 0$$

이므로 ⑤은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

함수 $f(t)$ 의 그래프의 축의 방정식은

$$t = \frac{k}{2}$$

$$a = (2^6)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 22쪽

01 $y=2^x$ 의 그래프와 y 축의 교점의 좌표는 $(0, 1)$ 이고, $\overline{BC}$ 의 교점의 좌표는 $(1, 2)$ 이다.

또 $y=2^{x-1}-1$ 의 그래프와 x 축의 교점의 좌표는 $(1, 0)$ 이고, $\overline{AB}$ 의 교점의 좌표는 $(2, 1)$ 이다.

이때 $y=2^{x-1}-1$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같다.

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$3 \cdot (1 \cdot 1) = 3$$

답 3

02 $y=2^{2x+a}+b$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=3$ 이므로

$$b=3$$

$y=2^{2x+a}+3$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=2^{-2x+a}+3$$

이 그래프가 점 $(-2, 11)$ 을 지나므로

$$11=2^{4+a}+3$$

$$\therefore 2^{4+a}=8=2^3$$

따라서 $4+a=3$ 이므로

$$a=-1$$

$$\therefore a+b=2$$

답 2

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	30%
② 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

03 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면

$$\triangle POH \sim \triangle QOH'$$

(AA 닮음)

이고, 닮음비는

$$\overline{OP} : \overline{OQ} = 1 : 4$$

두 점 H, H'의 x 좌표를 각각 $k, 4k$ ($k>0$)라 하면

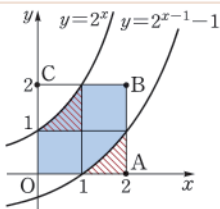
$$\overline{PH}=2^k, \overline{QH'}=2^{4k}$$

이때 $\overline{PH} : \overline{QH'} = 1 : 4$ 이므로

$$2^k : 2^{4k} = 1 : 4, \quad 4 \cdot 2^k = 2^{4k}$$

$$\therefore 2^{2+k} = 2^{4k}$$

$$\text{즉 } 2+k=4k \text{이므로 } k=\frac{2}{3}$$



$$2^x=20 \text{에서 } x=1$$

$$2^{x-1}-1=0 \text{에서 } 2^{x-1}=1$$

$$\text{이므로 } x-1=0$$

$$\therefore x=1$$

$$x=2 \text{를 } y=2^{x-1}-1 \text{에 대}$$

$$\text{입하면}$$

$$y=1$$

$$\text{㉠에서 } a^k=k \text{이므로}$$

$$-a^{-k} = -\frac{1}{a^k} = -\frac{1}{k}$$

$\overline{AC}$ 의 길이

점 B와 $\overline{AC}$ 사이의 거리

m 은 직선 $y=mx$ 의 기울기이므로

$$m = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

답 ⑤

04 점 A의 좌표를 (k, k) ($k>0$)라 하면 점 A는 $y=a^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$a^k=k$$

..... ㉠

$y=a^x$ 의 그래프와 $y=-a^{-x}$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, 직선 $y=x$ 도 원점에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\therefore B(-k, -k)$$

점 C는 $y=-a^{-x}$ 의 그래프와 직선 $x=k$ 의 교점이므로 점 C의 좌표는

$$(k, -a^{-k}), \text{ 즉 } (k, -\frac{1}{k})$$

$\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \left\{ k - \left(-\frac{1}{k} \right) \right\} \cdot \left\{ k - (-k) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(k + \frac{1}{k} \right) \cdot 2k$$

$$= k^2 + 1$$

이므로 $k^2+1=\frac{10}{9}$ 에서

$$k^2=\frac{1}{9} \quad \therefore k=\frac{1}{3} \quad (\because k>0)$$

$$k=\frac{1}{3} \text{을 ㉠에 대입하면 } a^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

답 ④

$a>1$ 일 때,

$$x_1 < x_2 \text{이면 } a^{x_1} < a^{x_2}$$

$0 < a < 1$ 일 때,

$$x_1 < x_2 \text{이면 } a^{x_1} > a^{x_2}$$

$$\text{05 } A = \sqrt[3]{a^3 \sqrt[4]{a^4 \sqrt[5]{a}}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}} = a^{\frac{12+4+1}{24}}$$

$$= a^{\frac{17}{24}}$$

$$B = \sqrt[3]{a^4 \sqrt[4]{a \sqrt[5]{a}}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}} = a^{\frac{8+2+1}{24}}$$

$$= a^{\frac{11}{24}}$$

$$C = \sqrt[4]{a \sqrt[3]{a^3 \sqrt[5]{a}}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24}} = a^{\frac{6+3+1}{24}}$$

$$= a^{\frac{5}{12}}$$

이때 $\frac{5}{12} < \frac{11}{24} < \frac{17}{24}$ 이고 $0 < a < 1$ 이므로

$$a^{\frac{17}{24}} < a^{\frac{11}{24}} < a^{\frac{5}{12}}$$

$$\therefore A < B < C$$

답 A < B < C

$$\text{06 } y = 2^{x-2} \cdot 3^{3-x} = 2^{x-2} \cdot 3^{-(x-2)} \cdot 3 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$$

이때 밑이 1보다 작으므로 $y=2^{x-2} \cdot 3^{3-x}$ 은 $x=2$ 일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 구하는 최솟값은

$$1 \cdot 3 = 3$$

답 ⑤

일품 BOX

07 $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이라 하면 $a < b$ 인 두 실수 a, b 에 대하여

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= 2^b-\left(\frac{1}{2}\right)^b-2^a+\left(\frac{1}{2}\right)^a \\ &= 2^b-2^a+\left(\frac{1}{2}\right)^a-\left(\frac{1}{2}\right)^b \end{aligned}$$

이때 $2^a < 2^b, \left(\frac{1}{2}\right)^b < \left(\frac{1}{2}\right)^a$ 이므로

$$2^b-2^a > 0, \left(\frac{1}{2}\right)^a-\left(\frac{1}{2}\right)^b > 0$$

즉 $f(b)-f(a) > 0$ 이므로

$$f(a) < f(b)$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최대이고, $x=-2$ 일 때 최소이므로

$$M=f(2)=2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$$

$$m=f(-2)=2^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=-\frac{15}{4}$$

$$\therefore M-m=\frac{15}{2}$$

답 ②

08 $2^x+2^{-x}=t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} y &= 4^x+4^{-x}+2(2^x+2^{-x})-1 \\ &= (2^x+2^{-x})^2-2+2(2^x+2^{-x})-1 \\ &= t^2+2t-3 \\ &= (t+1)^2-4 \end{aligned}$$

→ ①

이때 $t=2^x+2^{-x}$ 에서 $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=2^x+2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$$

(단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립)

→ ②

따라서 주어진 함수는 $t=2$ 일 때 최소이므로 구하는 최소값은

$$(2+1)^2-4=5$$

→ ③

답 5

채점 기준	비율
① 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② t 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
③ 최소값을 구할 수 있다.	30%

15분 비밀노트

a^x+a^{-x} 꼴이 반복되는 지수함수의 최대·최소

a^x+a^{-x} 꼴이 반복되면 $a^x+a^{-x}=t$ 로 치환한다.

이때 $a^x > 0, a^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=a^x+a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}}=2 \text{ (등호는 } a^x=a^{-x} \text{일 때 성립)}$$

임에 주의한다.

09 $x \cdot \sqrt[3]{x^x}=x^x \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{2}{3}}}$ 에서

$$x \cdot x^{\frac{x}{3}}=x^x \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore x^{1+\frac{x}{3}}=x^{x+\frac{2}{3}}$$

$a < b$ 일 때, $f(a) < f(b)$ 이므로 $f(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & -1 \\ & & 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

$2^x=2^{-x}$ 에서 $2^{2x}=10$ 이므로
 $2x=0 \quad \therefore x=0$

두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근과 같다.

$\{h(x)\}^{f(x)}=\{h(x)\}^{g(x)}$
($h(x) > 0$) 꼴의 방정식
→ $h(x)=1$ 또는
 $f(x)=g(x)$ 의 해를 구한다.

(i) $x=1$ 일 때,

$$1^{\frac{4}{3}}=1^{\frac{5}{3}} \text{이므로 등식이 성립한다.}$$

(ii) $x \neq 1$ 일 때,

$$1+\frac{x}{3}=x+\frac{2}{3} \text{에서} \quad \frac{2}{3}x=\frac{1}{3}$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ③

10 $4^x-2^{-x}=5(2^x-1)$ 에서

$$2^{2x}-5 \cdot 2^x+5-2^{-x}=0$$

양변에 2^x 을 곱하면

$$2^{3x}-5 \cdot 2^{2x}+5 \cdot 2^x-1=0$$

$2^x=t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^3-5t^2+5t-1=0, \quad (t-1)(t^2-4t+1)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2 \pm \sqrt{3}$$

→ ①

이때 $2-\sqrt{3} < 1 < 2+\sqrt{3}$ 이고 2^x 의 밑은 1보다 크므로

$$2^a=2+\sqrt{3}, \quad 2^b=2-\sqrt{3}$$

→ ②

$$\therefore 4^a+4^b=(2^a)^2+(2^b)^2$$

$$=(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2$$

$$=14$$

→ ③

답 14

채점 기준	비율
① 2^x 의 값을 구할 수 있다.	50%
② $2^a, 2^b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ 4^a+4^b 의 값을 구할 수 있다.	30%

11 $2^{x+2}=-2^{3-x}+33$ 에서 $2^{x+2}+2^{3-x}-33=0$

$$4 \cdot 2^x+8 \cdot 2^{-x}-33=0$$

양변에 2^x 을 곱하면

$$4 \cdot 2^{2x}-33 \cdot 2^x+8=0$$

$2^x=t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$4t^2-33t+8=0, \quad (4t-1)(t-8)=0$$

$$\therefore t=\frac{1}{4} \text{ 또는 } t=8$$

즉 $2^x=\frac{1}{4}$ 또는 $2^x=8$ 이므로

$$x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

$x=-2$ 를 $y=2^{x+2}$ 에 대입하면

$$y=2^0=1$$

또 $x=3$ 을 $y=2^{x+2}$ 에 대입하면

$$y=2^5=32$$

따라서 주어진 두 함수의 그래프의 교점의 좌표는

$(-2, 1), (3, 32)$ 이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의

방정식은

$$y-1=\frac{32-1}{3-(-2)}\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y=\frac{31}{5}x+\frac{67}{5}$$

따라서 $a = \frac{67}{5}$ 이므로

$$5a = 67$$

답 ③

12 방정식 $|3^x - 2| = k$ 가 서로 다른 부호의 두 실근을 가지려면 $y = |3^x - 2|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 2개이고 두 교점의 x 좌표의 부호가 달라야 한다.

오른쪽 그림에서

$$1 < k < 2$$

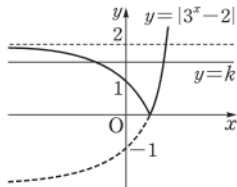
→ ①

따라서 $\alpha = 1, \beta = 2$ 이므로

$$\alpha + \beta = 3$$

→ ②

답 3



채점 기준	비율
① k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	80%
② $\alpha + \beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 방정식 $|3^x - 2| = k$ 가 실근을 가져야 하므로

$$k \geq 0$$

..... ㉠

$|3^x - 2| = k$ 에서

$$3^x - 2 = k \text{ 또는 } 3^x - 2 = -k$$

$$\therefore 3^x = 2 + k \text{ 또는 } 3^x = 2 - k$$

㉠에 의하여 $2 + k \geq 2 - k$ 이고 주어진 방정식이 서로 다른 부호의 두 실근을 가져야 하므로

$$2 + k > 1, 0 < 2 - k < 1$$

$$\therefore 1 < k < 2$$

따라서 $\alpha = 1, \beta = 2$ 이므로

$$\alpha + \beta = 3$$

13 $(x^2 + x + 2)^{x-1} = (2x^2 + 2x + 4)^{x-1}$ 에서

(i) $x - 1 = 0$, 즉 $x = 1$ 일 때,

$$4^0 = 8^0 = 1 \text{ 이므로 등식이 성립한다.}$$

(ii) $x - 1 \neq 0$ 일 때,

$$x^2 + x + 2 = 2x^2 + 2x + 4 \text{ 에서}$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1^2 - 8 = -7 < 0$$

이므로 실근을 갖지 않는다.

(i), (ii)에서 $A = \{1\}$

→ ①

$$(x^2 + x + 2)^{x+5} = (x^2 + x + 2)^{ax} \text{ 에서}$$

$$x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} \text{ 이므로}$$

$$x^2 + 5 = ax \quad \therefore x^2 - ax + 5 = 0$$

이때 $A \subset B$ 이므로 $1 \in B$

즉 이차방정식 $x^2 - ax + 5 = 0$ 의 한 근이 1이므로

$$1 - a + 5 = 0 \quad \therefore a = 6$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ 에서 } (x-1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

$$\therefore B = \{1, 5\}$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$1 + 5 = 6$$

→ ②

→ ③

답 6

$y = |3^x - 2|$ 의 그래프는 $y = 3^x - 2$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$x > 0$ 이면 $3^x > 1$
 $x < 0$ 이면 $0 < 3^x < 1$

$2^{2b} = 4^b$ 이고 $b > 0$ 이므로
 $4^b < 5^b$

지수가 0인 경우

밑이 같은 경우

밑이 1보다 크므로 지수가 같아야 한다.

두 집합 A, B 에 대하여
① $A \cap B = A$ 이면 $A \subset B$
② $A \cup B = A$ 이면 $B \subset A$

채점 기준

비율

① 집합 A 를 구할 수 있다.	30%
② 집합 B 를 구할 수 있다.	50%
③ 집합 B 의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20%

$$\begin{aligned} 14 \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x+1) \\ &= 2^{2x+1} + 1 = 2 \cdot 2^{2x} + 1 \end{aligned}$$

$$\{f(x)\}^2 = (2^x + 1)^2 = 2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1$$

$$(f \circ g)(x) \geq \{f(x)\}^2 \text{ 에서}$$

$$2 \cdot 2^{2x} + 1 \geq 2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x \geq 0$$

$$2^x = t \quad (t > 0) \text{ 로 놓으면 } t^2 - 2t \geq 0$$

$$t(t-2) \geq 0 \quad \therefore t \geq 2 \quad (\because t > 0)$$

즉 $2^x \geq 2$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$x \geq 1$$

답 $x \geq 1$

$$15 \quad \begin{cases} x^2 - (2^{3a} + 1)x + 8^a < 0 & \dots\dots ㉠ \\ x^2 - (2^{2b} + 5^b)x + 20^b < 0 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서

$$x^2 - (2^{3a} + 1)x + 2^{3a} < 0$$

$$(x-1)(x-2^{3a}) < 0$$

$$\therefore 1 < x < 2^{3a} \quad (\because a > 0)$$

㉡에서

$$x^2 - (2^{2b} + 5^b)x + 2^{2b} \cdot 5^b < 0$$

$$(x-2^{2b})(x-5^b) < 0$$

$$\therefore 2^{2b} < x < 5^b \quad (\because b > 0)$$

이때 주어진 연립부등식의 해가 존재하지 않으므로

$$2^{3a} \leq 2^{2b}$$

밑이 1보다 크므로 $3a \leq 2b$

$$\therefore \frac{b}{a} \geq \frac{3}{2}$$

따라서 $\frac{b}{a}$ 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

답 ④

참고 $1 < x < 2^{3a}$ 과 $2^{2b} < x < 5^b$ 의 공통 범위가 존재하지 않으려면 $2^{3a} \leq 2^{2b}$ 또는 $5^b \leq 10$ 이어야 한다.

그런데 $b > 0$ 에서 $5^b > 10$ 이므로 $2^{3a} \leq 2^{2b}$

$$16 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ 에서 밑이 1보다 작으므로}$$

$$x+2 > x^2, \quad x^2 - x - 2 < 0$$

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore -1 < x < 2$$

$$\therefore A = \{x \mid -1 < x < 2\}$$

또 $3^{|x-3|} \leq 3^a$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$|x-3| \leq a, \quad -a \leq x-3 \leq a$$

$$\therefore 3-a \leq x \leq 3+a$$

$$\therefore B = \{x \mid 3-a \leq x \leq 3+a\}$$

$A \cap B = A$ 에서 $A \subset B$

즉 $3-a \leq -1$ 이므로 $a \geq 4$

따라서 a 의 최솟값은 4이다.

답 ④

참고 $A \subset B$ 이면 $3-a \leq -1$, $2 \leq 3+a$ 이어야 한다.
 그런데 $a > 0$ 에서 $2 \leq 3+a$ 는 항상 성립하므로
 $3-a \leq -1$

17 $4^x - (2^m + 2^n) \cdot 2^x + 2^{m+n} < 0$ 에서
 $(2^x)^2 - (2^m + 2^n) \cdot 2^x + 2^m \cdot 2^n < 0$
 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - (2^m + 2^n)t + 2^m \cdot 2^n < 0$
 $(t - 2^m)(t - 2^n) < 0$
 $\therefore 2^m < t < 2^n$ ($\because m < n$)

즉 $2^m < 2^x < 2^n$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$m < x < n$$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 3
 이므로

$$n - m - 1 = 3$$

$$\therefore n - m = 4$$

답 4

1등급 비밀노트

자연수 a, b ($a < b$)에 대하여 각 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 개수는 다음과 같다.

- ① $a \leq x \leq b \Rightarrow b - a + 1$
- ② $a \leq x < b \Rightarrow b - a$
- ③ $a < x \leq b \Rightarrow b - a$
- ④ $a < x < b \Rightarrow b - a - 1$

18 $\neg. a^{x^2+x} \geq a^{2x+6}$ 에서 $0 < a < 1$ 이면
 $x^2 + x \leq 2x + 6, \quad x^2 - x - 6 \leq 0$
 $(x+2)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 3$
 $\therefore A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$

$\neg. (a-1)(b-1) > 0$ 이면
 $a-1 < 0, b-1 < 0$ 또는 $a-1 > 0, b-1 > 0$
 $\therefore 0 < a < 1, 0 < b < 1$ 또는 $a > 1, b > 1$

(i) $0 < a < 1, 0 < b < 1$ 일 때,
 $a^{x^2+x} \geq a^{2x+6}, b^{x^2+x} \geq b^{2x+6}$ 에서
 $x^2 + x \leq 2x + 6$

(ii) $a > 1, b > 1$ 일 때,
 $a^{x^2+x} \geq a^{2x+6}, b^{x^2+x} \geq b^{2x+6}$ 에서
 $x^2 + x \geq 2x + 6$

(i), (ii)의 각 경우에 대하여 같은 부등식을 얻으므로
 $A = B$

$\neg. (a-1)(b-1) < 0$ 이면
 $a-1 < 0, b-1 > 0$ 또는 $a-1 > 0, b-1 < 0$
 $\therefore 0 < a < 1, b > 1$ 또는 $a > 1, 0 < b < 1$

(i) $0 < a < 1, b > 1$ 일 때,
 $\neg$ 에 의하여 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$
 $b^{x^2+x} \geq b^{2x+6}$ 에서

$$\begin{aligned} x^2 + x &\geq 2x + 6, & x^2 - x - 6 &\geq 0 \\ (x+2)(x-3) &\geq 0 \\ \therefore x &\leq -2 \text{ 또는 } x \geq 3 \\ \therefore B &= \{x | x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 3\} \end{aligned}$$

y 좌표가 1인 점으로
 교점의 개수를 구하면
 편리하다.

(ii) $a > 1, 0 < b < 1$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면

$$A = \{x | x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 3\},$$

$$B = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$$

$c \in A, c \in B$ 를 만족시키려면 $c \in (A \cap B)$ 이어야
 하고 (i), (ii)에서 $A \cap B = \{-2, 3\}$ 이므로 조건을
 만족시키는 양수 c 의 값은 3이다.

이상에서 $\neg, \neg, \neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

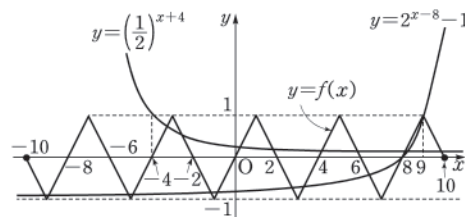
내신+수능

1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 25쪽

01 $\neg, \neg. f(x) = \begin{cases} -x-2 & (-2 \leq x < -1) \\ x & (-1 \leq x < 1) \\ -x+2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 이므로

$y = f(x), y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}, y = 2^{x-8} - 1$ 의 그래프는 다
 음 그림과 같다.



$$\therefore s(2) = 8, t(4) = 11$$

$\neg. n = 1, 2, 3, 4, 5$ 일 때의 $s(n), t(n)$ 의 값을 구하면
 다음 표와 같다.

n	1	2	3	4	5
$s(n)$	6	8	8	10	10
$t(n)$	7	9	9	11	11

$$\therefore t(n) = s(n) + 1$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 $\neg, \neg$

1등급 비밀노트

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2n}$ 의 그래프는 점 $(-2n, 1)$ 을 지나고 그래프의 점근
 선의 방정식은 $y = 0$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프와의 교점의 개수는
 $x > 0$ 에서 6

$$x < 0 \text{에서 } \begin{cases} n-1 & (n=1, 3, 5) \\ n & (n=2, 4) \end{cases}$$

또 $y = 2^{x-2n} - 1$ 의 그래프는 두 점 $(2n, 0), (2n+1, 1)$ 을 지나
 고 그래프의 점근선의 방정식은 $y = -1$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래
 프와의 교점의 개수는

$$x < 0 \text{에서 } 6$$

$$x > 0 \text{에서 } \begin{cases} n & (n=1, 3, 5) \\ n+1 & (n=2, 4) \end{cases}$$

02 $y=a^x$ 의 그래프와 $y=a^{-x}$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고 $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{AD}$ 이므로 $H(k, a^k), D(2k, a^{2k})$ ($k>0$)이라 하면

$$A(-2k, a^{2k}), C(2k, a^{-2k}), \\ E(-k, a^k), G(k, a^{-k})$$

따라서

$$\square ABCD = \{2k - (-2k)\} \cdot (a^{2k} - a^{-2k}) \\ = 4k(a^{2k} - a^{-2k}),$$

$$\square EFGH = \{k - (-k)\} \cdot (a^k - a^{-k}) \\ = 2k(a^k - a^{-k})$$

이고 $\square EFGH$ 의 넓이는 $\square ABCD$ 의 넓이의 $\frac{1}{8}$ 이므로

$$2k(a^k - a^{-k}) = \frac{1}{8} \cdot 4k(a^{2k} - a^{-2k}) \\ 4(a^k - a^{-k}) = (a^k + a^{-k})(a^k - a^{-k}) \\ \therefore a^k + a^{-k} = 4 \quad (\because a^k - a^{-k} \neq 0) \\ \therefore \overline{AD} + \overline{BC} = a^{2k} + a^{-2k} \\ = (a^k + a^{-k})^2 - 2 \cdot a^k \cdot a^{-k} \\ = 4^2 - 2 = 14$$

답 14

03 $y = \left\{2^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\right\}^2 + 2^{x-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

$$= \left\{2^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\right\}^2 + 2\left\{2^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\right\}$$

$$= (2^{x-3} + 2^{-x+1})^2 + 2(2^{x-3} + 2^{-x+1})$$

$2^{x-3} + 2^{-x+1} = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1$$

이때 $t = 2^{x-3} + 2^{-x+1}$ 에서 $2^{x-3} > 0, 2^{-x+1} > 0$ 이므로 산술 평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 2^{x-3} + 2^{-x+1} \geq 2\sqrt{2^{x-3} \cdot 2^{-x+1}} \geq 2\sqrt{2^{-2}} = 1$$

(단, 등호는 $x=2$ 일 때 성립)

따라서 주어진 함수는 $t=1$, 즉 $x=2$ 일 때 최솟값 3을 가지므로

$$a=2, b=3 \\ \therefore a+b=5$$

답 5

04 직사각형의 가로 길이는 1, 세로 길이는 $4^n - 2^{n+1}$ 이므로

$$4^n - 2^{n+1} = 24, \quad 4^n - 2^{n+1} - 24 = 0 \\ (2^n)^2 - 2 \cdot 2^n - 24 = 0$$

$2^n = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 2t - 24 = 0, \quad (t+4)(t-6) = 0 \\ \therefore t = 6 \quad (\because t > 0)$$

즉 $2^n = 6$ 이므로 $n = \log_2 6$

답 2

05 $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + k = 0$ 에서

$$(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + k = 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t + k = 0$$

..... ㉠

주어진 방정식의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면 $\alpha > 0, \beta > 0$ 이고, ㉠의 두 실근이 $3^\alpha, 3^\beta$ 이므로 $3^\alpha > 1, 3^\beta > 1$

AD의 길이

CD의 길이

EH의 길이

HG의 길이

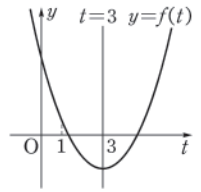
$k \neq 0$ 이므로 $k \neq -k$
이때 $a \neq 10$ 이므로 $a^k \neq a^{-k}$
 $\therefore a^k - a^{-k} \neq 0$

이때 주어진 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 방정식 ㉠은 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t) = t^2 - 6t + k$ 라 하면

$$f(t) = t^2 - 6t + k = (t-3)^2 + k-9$$

$y=f(t)$ 의 그래프는 직선 $t=3$ 에 대하여 대칭이므로 $y=f(t)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(1) > 0, f(3) < 0$ 이어야 하므로

$$k-5 > 0, k-9 < 0 \quad \therefore 5 < k < 9$$

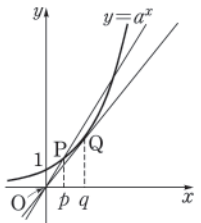
따라서 정수 k 는 6, 7, 8의 3개이다.

답 3

06 $\frac{a^p}{p}$ 은 원점과 점 P를 지나는 직선의 기울기이

고, $\frac{a^q}{q}$ 은 원점과 점 Q를 지나는 직선의 기울기이다.

[반례] 오른쪽 그림과 같이 직선 OQ와 $y=a^x$ 의 그래프가 접하면 직선 OP의 기울기가 직선 OQ의 기울기보다 크므로



$$\frac{a^p}{p} > \frac{a^q}{q}$$

나. $A(0, 1)$ 이라 하면 직선 AQ의 기울기가 직선 AP의 기울기보다 크므로

$$\frac{a^p - 1}{p} < \frac{a^q - 1}{q}$$

$$\therefore q(a^p - 1) < p(a^q - 1) \quad (\because pq > 0)$$

다. $a > 2$ 이고 $q-p > 1$, 즉 $q > p+1$ 이면

$$a^q > a^{p+1} \\ \therefore a^q - a^p > a^{p+1} - a^p \\ = a^p(a-1) > 1$$

이상에서 옳은 것은 나, 다이다.

답 5

04 로그함수

개념 & 핵심 기출

본책 26쪽

01 주어진 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$$y=3^{2-x} \text{에서 } \log_3 y = 2-x$$

$$\therefore x = 2 - \log_3 y = \log_3 \frac{9}{y}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \log_3 \frac{9}{x}$$

이 식이 $y = \log_3 \frac{k}{x}$ 와 일치하므로

$$k=9$$

답 9

02 $y = \log_k(2x-7) + a$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x = \frac{7}{2}$ 이므로

$$b = \frac{7}{2}$$

$y = \log_k(2x-7) + a$ 에서 $2x-7=1$, 즉 $x=4$ 일 때,

$$y = \log_k 1 + a = a$$

따라서 $y = \log_k(2x-7) + a$ 의 그래프는 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(4, a)$ 를 지나므로

$$a=3, c=4$$

$$\therefore a+b+c = \frac{21}{2}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} \text{03 } y &= \log_2 \sqrt{2}(x-1) \\ &= \log_2(x-1) + \log_2 \sqrt{2} \\ &= \log_2(x-1) + \log_2 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_2(x-1) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $y = \log_2 \sqrt{2}(x-1)$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로

$$m=1, n=\frac{1}{2}$$

$$\therefore mn = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{04 } y &= \log_{0.2}(x^2-4x+5) \\ &= \log_{0.2}\{(x-2)^2+1\} \\ f(x) &= (x-2)^2+1 \text{이라 하면 } 0 \leq x \leq 4 \text{에서} \\ f(0) &= f(4) = 5, f(2) = 1 \end{aligned}$$

이므로

$$1 \leq f(x) \leq 5$$

이때 $y = \log_{0.2} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$ 가 최대일 때 y 는 최소이고, $f(x)$ 가 최소일 때 y 는 최대이다.

따라서 $M = \log_{0.2} 1 = 0$, $m = \log_{0.2} 5 = -1$ 이므로

$$M-m=1$$

답 ①

일품 BOX

진수의 조건에서 $x > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \log_3 x^2 &= 2 \log_3 |x| \\ &= 2 \log_3 x \end{aligned}$$

$$2x-7=0 \text{에서 } x = \frac{7}{2}$$

$a > 0$, $a \neq 1$ 일 때

$$\text{① } \log_a 1 = 0$$

$$\text{② } \log_a a = 1$$

$$\begin{aligned} \text{05 } y &= \log_2 x + \log_2(8-x) \\ &= \log_2(-x^2+8x) \\ &= \log_2\{-(x-4)^2+16\} \end{aligned}$$

$f(x) = -(x-4)^2+16$ 이라 하면 $1 \leq x \leq 5$ 에서

$$f(1)=7, f(4)=16, f(5)=15$$

이므로

$$7 \leq f(x) \leq 16$$

이때 $y = \log_2 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최소일 때 y 도 최소이다.

즉 주어진 함수는 $x=1$ 일 때 최솟값 $\log_2 7$ 을 가지므로

$$a=1, b=\log_2 7$$

$$\therefore ab = \log_2 7$$

답 ②

$$\begin{aligned} \text{06 } y &= (\log_3 x)^2 + a \log_3 x^2 + b \\ &= (\log_3 x)^2 + 2a \log_3 x + b \end{aligned}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 + 2at + b$$

$$= (t+a)^2 + b - a^2$$

따라서 주어진 함수는 $t = -a$, 즉 $x = 3^{-a}$ 일 때 최솟값 $b - a^2$ 을 가지므로

$$3^{-a} = \frac{1}{9}, b - a^2 = 2$$

$$\therefore a=2, b=6$$

$$\therefore a+b=8$$

답 8

07 진수의 조건에서

$$x+2 > 0, x+8 > 0$$

$$\therefore x > -2$$

..... ㉠

$$\log_2(x+2) - \log_4(x+8) = \frac{3}{2} \text{에서}$$

$$\log_2(x+2) - \frac{1}{2} \log_2(x+8) = \frac{3}{2}$$

$$2 \log_2(x+2) = \log_2(x+8) + 3$$

$$\therefore \log_2(x+2)^2 = \log_2 8(x+8)$$

즉 $(x+2)^2 = 8(x+8)$ 이므로

$$x^2 - 4x - 60 = 0, (x+6)(x-10) = 0$$

$$\therefore x = -6 \text{ 또는 } x = 10$$

이때 ㉠에 의하여 구하는 해는 $x = 10$

답 $x=10$

$$\begin{aligned} \text{08 } (\log_2 x)^3 &= 3 \log_2 x + 2 \text{에서} \\ (\log_2 x)^3 - 3 \log_2 x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^3 - 3t - 2 = 0, (t+1)^2(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

즉 $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 모든 실근의 합은

$$\frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

09 $x^{\log_3 x} = x^3$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 x^3$$

$$(\log_3 x)^2 = 3 \log_3 x$$

$$(\log_3 x)^2 - 3 \log_3 x = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t = 0, \quad t(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 3$$

즉 $\log_3 x = 0$ 또는 $\log_3 x = 3$ 이므로

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 27$$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$$1 \cdot 27 = 27$$

답 ②

10 진수의 조건에서

$$x - 10 > 0, \quad x > 0$$

$$\therefore x > 10$$

..... ㉠

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-10) > 1 - \log_{\frac{1}{2}} x \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-10) > 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-10) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{2}$$

밑이 1보다 작으므로

$$x - 10 < \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{2} < 10$$

$$\therefore x < 20$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$10 < x < 20$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는

$$20 - 10 - 1 = 9$$

답 ④

11 $(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 < \log_{\frac{1}{3}} x^3 + 4$ 에서

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 < 3 \log_{\frac{1}{3}} x + 4$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 3 \log_{\frac{1}{3}} x - 4 < 0$$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t - 4 < 0, \quad (t+1)(t-4) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 4$$

즉 $-1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 4$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

밑이 1보다 작으므로

$$\frac{1}{81} < x < 3$$

따라서 $\alpha = \frac{1}{81}$, $\beta = 3$ 이므로

$$\alpha\beta = \frac{1}{27}$$

답 ①

12 $x^{\log x} < \frac{x^3}{100}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{\log x} < \log \frac{x^3}{100}$$

$$(\log x)^2 < 3 \log x - 2$$

$$(\log x)^2 - 3 \log x + 2 < 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t + 2 < 0, \quad (t-1)(t-2) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 2$$

즉 $1 < \log x < 2$ 이므로

$$\log 10 < \log x < \log 10^2$$

밑이 1보다 크므로

$$10 < x < 100$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는

$$100 - 10 - 1 = 89$$

답 89

1등급을 위한 고난도 문제

본책 28쪽

01 두 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ 과 $g(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x$ 는 서로

역함수 관계이므로

$$f(a) = d \iff g(d) = a,$$

$$f(b) = e \iff g(e) = b$$

또 $g(b) = d, g(c) = e$ 이므로

$$(g \circ g \circ f)(d) = g(d) = a,$$

$$(g \circ g \circ g)(c) = g(g(g(c)))$$

$$= g(g(e))$$

$$= g(b) = d$$

$$\therefore (g \circ g \circ f)(d) + (g \circ g \circ g)(c) = a + d$$

답 ②

1등급 비밀노트

555

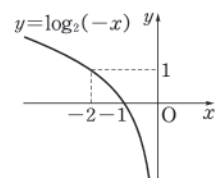
역함수의 그래프가 주어지고 합성함수의 함숫값을 구하는 문제는

$$f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a$$

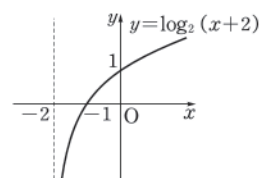
임을 이용한다.

점근선이 y 축이다.

02 ㄱ. $y = \log_2(-x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 y 축, 즉 직선 $x=0$ 과 만나지 않는다.

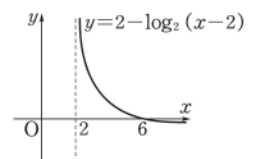


ㄴ. $y = \log_2(x+2)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 원점을 지나는 임의의 직선과 항상 만난다.



점근선의 방정식은 $x=2$

ㄷ. $y = 2 - \log_2(x-2)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $x=0$ 과 만나지 않는다.



이상에서 그래프가 원점을

지나는 임의의 직선과 항상 만나는 함수인 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

03 점 A의 좌표를 (k, k) ($k > 0$)라 하면 $\square$ COBA의 넓이가 16이므로

$$k^2 = 16 \quad \therefore k = 4 \quad (\because k > 0)$$

점 A(4, 4)가 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\begin{aligned} \log_a 5 &= 4 \\ \therefore f(24) &= \log_a 25 \\ &= 2 \log_a 5 \\ &= 2 \cdot 4 = 8 \end{aligned}$$

답 8

04 (i) $\log_3 x \geq 0$, 즉 $x \geq 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \log_3 y &= 2 \log_3 x, & \log_3 y &= \log_3 x^2 \\ \therefore y &= x^2 \end{aligned}$$

(ii) $\log_3 x < 0$, 즉 $0 < x < 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \log_3 y &= -\log_3 x, & \log_3 y &= \log_3 \frac{1}{x} \\ \therefore y &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$(i), (ii) \text{에서} \quad y = \begin{cases} x^2 & (x \geq 1) \\ \frac{1}{x} & (0 < x < 1) \end{cases}$$

따라서 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다. **답 ④**

1등급 **비밀노트**

$\log_3 x$ 와 $\log_3 y$ 사이의 관계식은 다음과 같이 치환을 이용하면 쉽게 찾을 수 있다.

$\log_3 x = X, \log_3 y = Y$ 로 놓으면

$$Y = \begin{cases} 2X & (X \geq 0) \\ -X & (X < 0) \end{cases}$$

05 $y = \log_a x, y = \log_a (-x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고, $y = |x|$ 의 그래프도 y 축에 대하여 대칭이므로 두 점 A와 C, 두 점 B와 D도 각각 y 축에 대하여 대칭이다.

A(p, p), B(q, q) ($0 < p < q$)라 하면

C($-p, p$), D($-q, q$)

이때 $\overline{AC} : \overline{BD} = 1 : 2$ 에서 $\overline{BD} = 2\overline{AC}$ 이므로

$$\begin{aligned} 2q &= 2 \cdot 2p \\ \therefore q &= 2p \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

따라서 두 점 A(p, p), B($2p, 2p$)가 $y = \log_a x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\begin{aligned} p &= \log_a p & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2p &= \log_a 2p & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} p &= \log_a \frac{2p}{p} = \log_a 2 \\ \textcircled{1} \text{에서} \quad \log_a p &= \log_a 2 \\ \therefore p &= 2 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$p = 2$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} 2 &= \log_a 2, & a^2 &= 2 \\ \therefore a &= \sqrt{2} \quad (\because a > 1) \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{3}$$

답 $\sqrt{2}$

$2 \leq x \leq 10$ 에서 x 의 값이 증가하면 $3\sqrt{x+a}$ 의 값도 증가한다.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

진수의 조건에서 $x > 0$

채점 기준	비율
① 두 점 A, B의 x 좌표 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
② 점 A의 x 좌표를 구할 수 있다.	50%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20%

06 $y = \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{x+a}$ 에서 밑이 1보다 작으므로 y 는

$3\sqrt{x+a}$ 가 최대일 때 최솟값을 갖고, $3\sqrt{x+a}$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉 $2 \leq x \leq 10$ 에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{x+a}$ 는 $x=10$ 일 때 최솟값 -2 를 가지므로

$$\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{10+a} = -2$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{10+a} &= 9, & \sqrt{10+a} &= 3 \\ 10+a &= 9 & \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{x-1}$ 은 $x=2$ 일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{2-1} = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1 \quad \text{답 } -1$$

07 $2 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x) = \log_a x$ 의 최솟값이 $f(5)$ 이므로 밑이 1보다 작아야 한다.

$$\therefore 0 < a < 1$$

이때 $a \neq \frac{1}{3}$ 이므로

$$0 < a < \frac{1}{3} \text{ 또는 } \frac{1}{3} < a < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$2 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $g(x) = \log_{3a} x$ 의 최솟값이 $g(2)$ 이므로 밑이 1보다 커야 한다.

$$\text{즉 } 3a > 1 \text{에서} \quad a > \frac{1}{3}$$

이때 $a \neq 1$ 이므로

$$\frac{1}{3} < a < 1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면

$$\frac{1}{3} < a < 1 \quad \text{답 } \frac{1}{3} < a < 1$$

08 $y = ax^{2-\log_3 x}$ 의 양변에 3을 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_3 y = \log_3 a + (2 - \log_3 x) \log_3 x$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \log_3 y &= -t^2 + 2t + \log_3 a \\ &= -(t-1)^2 + 1 + \log_3 a \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 $1 \leq x \leq 27$ 에서 $0 \leq t \leq 3$ 이므로

$$-3 + \log_3 a \leq \log_3 y \leq 1 + \log_3 a \quad \cdots \textcircled{2}$$

즉 $1 + \log_3 a = \log_3 81$ 이므로

$$\begin{aligned} 1 + \log_3 a &= 4, & \log_3 a &= 3 \\ \therefore a &= 27 \end{aligned}$$

따라서 $\log_3 m = -3 + \log_3 27 = 0$ 이므로

$$m = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore am = 27 \quad \cdots \textcircled{4}$$

답 27

채점 기준	비율
① $\log_3 y$ 를 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② $\log_3 y$ 의 값의 범위를 $\log_3 a$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
③ a, m 의 값을 구할 수 있다.	40%
④ am 의 값을 구할 수 있다.	10%

09 $\log_2(2^{x-2} + 2^{-x-1}) = \log_2 \frac{2^x + 2 \cdot 2^{-x}}{4}$
 $= \log_2(2^x + 2 \cdot 2^{-x}) - 2$

이므로 주어진 함수의 식에서 $\log_2(2^x + 2 \cdot 2^{-x}) = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} y &= (t-2)^2 + 2t + 6 \\ &= t^2 - 2t + 10 \\ &= (t-1)^2 + 9 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $2^x > 0, 2 \cdot 2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 2^x + 2 \cdot 2^{-x} &\geq 2\sqrt{2^x \cdot 2 \cdot 2^{-x}} = 2\sqrt{2} \\ &\quad \left(\text{단, 등호는 } x = \frac{1}{2} \text{일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore t = \log_2(2^x + 2 \cdot 2^{-x}) \geq \log_2 2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

즉 $t \geq \frac{3}{2}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서 y 는 $t = \frac{3}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{37}{4}$ 을 갖는다. 답 ②

10 $(\log x - 1) \log x = k$ 에서 $\log x = t$ 로 놓으면
 $(t-1)t = k \quad \therefore t^2 - t - k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 의 두 근이 $\log \alpha, \log \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \log \alpha + \log \beta &= 1, \quad \log \alpha \beta = 1 \\ \therefore \alpha \beta &= 10 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$a > 0, \beta > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &\geq 2\sqrt{\alpha\beta} = 2\sqrt{10} \\ \text{이때 등호는 } \alpha = \beta \text{일 때 성립하므로} \\ \alpha = \beta &= \sqrt{10} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \log \alpha \cdot \log \beta &= -k \text{이므로 구하는 } k \text{의 값은} \\ k &= -\log \sqrt{10} \cdot \log \sqrt{10} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
① 주어진 방정식을 t 에 대한 방정식으로 나타낼 수 있다.	20%
② $\alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ $\alpha + \beta$ 의 값이 최소일 때, α, β 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $\alpha + \beta$ 의 값이 최소일 때, k 의 값을 구할 수 있다.	30%

참고 $\log \alpha, \log \beta$ 의 진수의 조건에서 α, β 는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{2^x + 2 \cdot 2^{-x}}{4} \\ &= \log_2(2^x + 2 \cdot 2^{-x}) \\ &\quad - \log_2 4 \\ &= \log_2(2^x + 2 \cdot 2^{-x}) - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^x &= 2 \cdot 2^{-x} \text{에서} \\ 2^{2x} &= 2 \\ \text{따라서 } 2x &= 1 \text{이므로} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha = \beta &= \alpha\beta = 10 \text{에 대입} \\ \text{하면} \\ \beta^2 &= 10 \\ \therefore \beta &= \sqrt{10} \quad (\because \beta > 0) \\ \therefore \alpha &= \beta = \sqrt{10} \end{aligned}$$

11 $x^{\log 4} = 4^{\log x}$ 이므로 주어진 방정식은
 $(4^{\log x})^2 - 6 \cdot 4^{\log x} + 8 = 0$

$$\begin{aligned} 4^{\log x} &= t \quad (t > 0) \text{로 놓으면} \\ t^2 - 6t + 8 &= 0, \quad (t-2)(t-4) = 0 \\ \therefore t &= 2 \text{ 또는 } t = 4 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 4^{\log x} = 2 = 4^{\frac{1}{2}} \text{ 또는 } 4^{\log x} = 4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{1}{2} \text{ 또는 } \log x = 1 \\ \therefore x &= \sqrt{10} \text{ 또는 } x = 10 \\ \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\sqrt{10})^2 + 10^2 \\ &= 110 \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

12 밑과 진수의 조건에서

$$x > 0, x \neq 1$$

$\left(\frac{x^2}{3}\right)^{\log_3 x} = (9x^5)^{\log_3 3}$ 의 양변에 3을 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log_3 \left(\frac{x^2}{3}\right)^{\log_3 x} &= \log_3 (9x^5)^{\log_3 3} \\ \therefore \log_3 x \cdot (2 \log_3 x - 1) &= \frac{1}{\log_3 x} \cdot (2 + 5 \log_3 x) \end{aligned}$$

양변에 $\log_3 x$ 를 곱하면

$$2(\log_3 x)^3 - (\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x - 2 = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} 2t^3 - t^2 - 5t - 2 &= 0 \\ (t+1)(2t+1)(t-2) &= 0 \\ \therefore t &= -1 \text{ 또는 } t = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \log_3 x = -1 \text{ 또는 } \log_3 x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \log_3 x = 2 \text{이므로}$$

$$x = 3^{-1} \text{ 또는 } x = 3^{-\frac{1}{2}} \text{ 또는 } x = 3^2$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$3^{-1} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^2 = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \text{답 ③}$$

13 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$4 < a < 8$$

$y = 4^{x-2} + 3$ 의 그래프와 직선

$y = a$ 의 교점의 x 좌표는

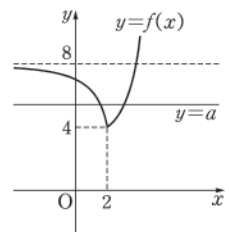
$$\begin{aligned} a &= 4^{x-2} + 3 \text{에서} \\ 4^{x-2} &= a - 3, \quad x - 2 = \log_4(a - 3) \\ \therefore x &= \log_4(a - 3) + 2 \end{aligned}$$

$y = -2^x + 8$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} a &= -2^x + 8 \text{에서} \\ 2^x &= 8 - a \quad \therefore x = \log_2(8 - a) \\ \therefore \overline{AB} &= \log_4(a - 3) + 2 - \log_2(8 - a) \end{aligned}$$

이때 $\overline{AB} = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \log_4(a - 3) + 2 - \log_2(8 - a) &= 3 \\ \log_4(a - 3) &= \log_2(8 - a) + 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \log_2 (a-3) &= \log_2 2(8-a) \\ \log_2 (a-3) &= \log_2 \{2(8-a)\}^2 \\ a-3 &= 4(8-a)^2, \quad 4a^2 - 65a + 259 = 0 \\ (a-7)(4a-37) &= 0 \\ \therefore a &= 7 \quad (\because 4 < a < 8)\end{aligned}$$

답 ⑤

14 진수의 조건에서

$$\begin{aligned}x-2 > 0, \quad -2x+a > 0 \\ \therefore x > 2, \quad x < \frac{a}{2}\end{aligned}$$

이때 실근이 존재하려면 $\frac{a}{2} > 2$ 이어야 하므로

$$a > 4 \quad \dots\dots ㉠$$

이고 x 의 값의 범위는

$$2 < x < \frac{a}{2}$$

$\log_2 (x-2) = \log_2 (-2x+a)$ 에서

$$\log_2 (x-2) = \frac{1}{2} \log_2 (-2x+a)$$

$$\log_2 (x-2)^2 = \log_2 (-2x+a)$$

$$(x-2)^2 = -2x+a$$

$$x^2 - 2x + 4 - a = 0$$

$f(x) = x^2 - 2x + 4 - a$ 라 하면

$$f(x) = (x-1)^2 + 3 - a$$

이므로 $2 < x < \frac{a}{2}$ 에서 실근을 가지려면

$$f(2) < 0, \quad f\left(\frac{a}{2}\right) > 0$$

이어야 한다.

$$f(2) < 0 \text{에서} \quad 4 - a < 0$$

$$\therefore a > 4 \quad \dots\dots ㉡$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) > 0 \text{에서} \quad \frac{a^2}{4} - a + 4 - a > 0$$

$$a^2 - 8a + 16 > 0, \quad (a-4)^2 > 0$$

$$\therefore a \neq 4 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$$a > 4$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 5이다.

답 5

15 진수의 조건에서

$$2-x > 0 \quad \therefore x < 2 \quad \dots\dots ㉠$$

밑의 조건에서 $x^2+x+1 > 0, x^2+x+1 \neq 1$

(i) $0 < x^2+x+1 < 1$ 일 때,

$x^2+x+1 > 0$ 에서 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 이므로 항상 성립한다.

$$x^2+x+1 < 1 \text{에서} \quad x(x+1) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 0 \quad \dots\dots ㉡$$

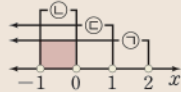
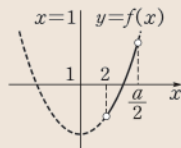
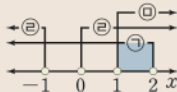
$$\log_{x^2+x+1} (2-x) < 0 \text{에서} \quad 2-x > 1$$

$$\therefore x < 1 \quad \dots\dots ㉢$$

따라서 ㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$$-1 < x < 0$$

진수의 조건에서
 $a-3 > 0, 8-a > 0$
 $\therefore 3 < a < 8$
 따라서 $a=7$ 은 진수의 조건을 만족시킨다.



(ii) $x^2+x+1 > 1$ 일 때,

$$x(x+1) > 0 \text{이므로}$$

$$x < -1 \text{ 또는 } x > 0 \quad \dots\dots ㉣$$

$$\log_{x^2+x+1} (2-x) < 0 \text{에서}$$

$$2-x < 1 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots ㉤$$

따라서 ㉣, ㉤, ㉥의 공통 범위를 구하면

$$1 < x < 2$$

(i), (ii)에서 $-1 < x < 0$ 또는 $1 < x < 2$

$$\text{답 } -1 < x < 0 \text{ 또는 } 1 < x < 2$$

16 $(\log_3 x)^2 - \frac{2}{9} \log_3 x - \frac{2}{3} \leq 0$ 에서

$$\left(\frac{1}{3} \log_3 x\right)^2 - \frac{1}{9} \log_3 x - \frac{2}{3} \leq 0$$

$$\frac{1}{9} (\log_3 x)^2 - \frac{1}{9} \log_3 x - \frac{2}{3} \leq 0$$

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 6 \leq 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 6 \leq 0, \quad (t+2)(t-3) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq t \leq 3$$

즉 $-2 \leq \log_3 x \leq 3$ 이므로

$$\log_3 \frac{1}{4} \leq \log_3 x \leq \log_3 8$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 8$$

따라서 $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = 8$ 이므로

$$\alpha\beta = 2$$

답 ④

17 $2 \log 2x < \log x$ 에서

$$\log (2x)^2 < \log x$$

밑이 1보다 크므로

$$4x^2 < x, \quad 4x^2 - x < 0$$

$$x(4x-1) < 0 \quad \therefore 0 < x < \frac{1}{4}$$

$$\therefore A = \left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{4}\right\}$$

이때 전체집합이 $\{x \mid x > 0\}$ 이므로

$$A^c = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{4}\right\}$$

→ ①

$\log x^2 < \log 2x$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$x^2 < 2x, \quad x^2 - 2x < 0$$

$$x(x-2) < 0 \quad \therefore 0 < x < 2$$

$$\therefore B = \{x \mid 0 < x < 2\}$$

→ ②

$$\therefore A^c \cap B = \left\{x \mid \frac{1}{4} \leq x < 2\right\}$$

→ ③

$$\text{답 } \left\{x \mid \frac{1}{4} \leq x < 2\right\}$$

채점 기준	비율
① A^c 를 구할 수 있다.	50%
② B 를 구할 수 있다.	40%
③ $A^c \cap B$ 를 구할 수 있다.	10%

18 $\log ax \cdot \log a^2 x + 4 > 0$ 에서
 $(\log a + \log x)(3 \log a + \log x) + 4 > 0$
 $(\log x)^2 + 4 \log a \cdot \log x + 3(\log a)^2 + 4 > 0$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + (4 \log a)t + 3(\log a)^2 + 4 > 0 \quad \cdots ①$$

모든 실수 t 에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 t 에 대한 이차방정식 $t^2 + (4 \log a)t + 3(\log a)^2 + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2 \log a)^2 - 3(\log a)^2 - 4 < 0$$

$$(\log a)^2 - 4 < 0, \quad (\log a + 2)(\log a - 2) < 0$$

$$-2 < \log a < 2$$

$$\therefore \frac{1}{100} < a < 100 \quad \cdots ②$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 99, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$$99 + 1 = 100 \quad \cdots ③$$

답 100

채점 기준	비율
① 주어진 부등식을 t 에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30%
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%
③ 자연수 a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10%

내신 + 수능

1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제**

본책 31쪽

01 $1 < x < a$ 의 각 변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면
 $\log_a 1 < \log_a x < \log_a a$
 $\therefore 0 < \log_a x < 1$

$\log_a x = t$ 로 놓으면 $0 < t < 1$ 이고

$$A = \log_a x = t,$$

$$B = \log_a (\log_a x) = \log_a t,$$

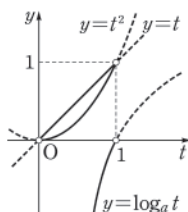
$$C = (\log_a x)^2 = t^2$$

이때 $0 < t < 1$ 에서 $y = t$,
 $y = \log_a t$, $y = t^2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\log_a t < t^2 < t$$

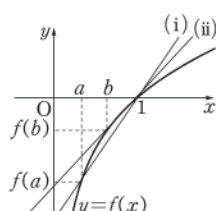
$$\therefore B < C < A$$

답 ④



02 ㄱ. 오른쪽 그림에서 직선 (i)의 기울기가 직선 (ii)의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(a)}{a-1} > \frac{f(b)}{b-1}$$



$\frac{f(a)}{a-1}$ 의 값은 두 점 $(a, f(a))$, $(1, 0)$ 을 지나는 직선 (i)의 기울기이고, $\frac{f(b)}{b-1}$ 의 값은 두 점 $(b, f(b))$, $(1, 0)$ 을 지나는 직선 (ii)의 기울기이다.

ㄴ. 오른쪽 그림에서 직선 (iii)의 기울기가 직선 (iv)의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b}$$

$$\text{이때 } ab > 0 \text{이므로}$$

$$bf(a) < af(b)$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } & \frac{f(a)-f(b)}{f(a)} - \frac{f(b)-f(a)}{f(b)} \\ &= 1 - \frac{f(b)}{f(a)} - 1 + \frac{f(a)}{f(b)} \\ &= \frac{\{f(a)\}^2 - \{f(b)\}^2}{f(a)f(b)} \\ &= \frac{\{f(a)+f(b)\}\{f(a)-f(b)\}}{f(a)f(b)} \end{aligned}$$

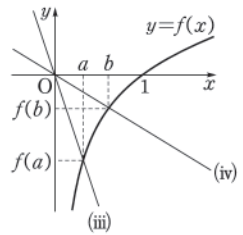
이때 $f(a) < f(b) < 0$ 이므로

$$\frac{\{f(a)+f(b)\}\{f(a)-f(b)\}}{f(a)f(b)} > 0$$

$$\therefore \frac{f(a)-f(b)}{f(a)} > \frac{f(b)-f(a)}{f(b)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②



1등급 비밀노트

858

함수 $f(x)$ 에 대하여 $\frac{f(a)-q}{a-p}$ 의 값은 점 (p, q) 과 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같다.

03 $y = \log_2 8x = \log_2 8 + \log_2 x = 3 + \log_2 x$ 이므로
 $y = \log_2 8x$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\square ACDB$ 는 평행사변형이므로

$$S_1 = 3 \cdot (4 - 2) = 6$$

오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로
 $y = \log_2 x$, $y = \log_2 8x$ 의 그래프와 직선 $x=k$ 의 교점을 각각 E, F라 하면 S_2 는 평행사변형 CEFD의 넓이와 같다.

$$\therefore S_2 = 3(k - 4)$$

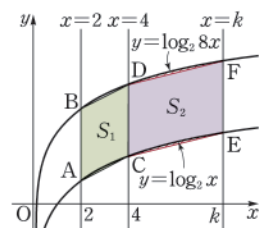
이때 $S_1 : S_2 = 1 : 2$ 이므로

$$6 : 3(k - 4) = 1 : 2$$

$$3(k - 4) = 12, \quad k - 4 = 4$$

$$\therefore k = 8$$

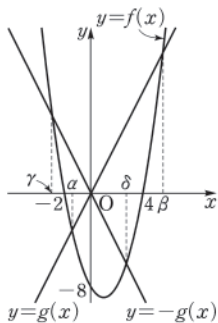
답 8



04 $\log_2 f(x) = \log_2 |g(x)|$ 에서
 $f(x) = |g(x)|$ ㉠

$\log_2 \{-f(x)\} = \log_2 |g(x)|$ 에서
 $-f(x) = |g(x)|$,
 즉 $f(x) = -|g(x)|$ ㉡

$y=f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=g(x)$, $y=-g(x)$ 는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표를 α , β ($\alpha < \beta$), 직선 $y=-g(x)$ 의 교점의 x 좌표를 γ , δ ($\gamma < \delta$)라 하면 방정식 ①의 두 근은 γ , β 이고 방정식 ②의 두 근은 α , δ 이다.



$$\therefore p=\gamma^2+\beta^2, q=\alpha^2+\delta^2$$

이때 α , β 는 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $x^2-(a+2)x-8=0$ 의 두 근이고 γ , δ 는 방정식 $f(x)=-g(x)$, 즉 $x^2+(a-2)x-8=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= a+2, \alpha\beta = -8, \\ \gamma+\delta &= -a+2, \gamma\delta = -8 \end{aligned}$$

따라서 $p+q=50$ 이므로

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 &= 50 \\ (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta &= 50 \\ (a+2)^2-2\cdot(-8)+(-a+2)^2-2\cdot(-8) &= 50 \\ 2a^2+40 &= 50, \quad a^2=5 \\ \therefore a &= \sqrt{5} \quad (\because a>0) \end{aligned}$$

답 5

참고 $\log_2 f(x) = \log_2 |g(x)|$ 의 진수의 조건에서

$$\begin{aligned} f(x) &> 0, g(x) \neq 0 \\ x^2-2x-8 &> 0, ax \neq 0 \\ (x+2)(x-4) &> 0, x \neq 0 \\ \therefore x &< -2 \text{ 또는 } x > 4 \end{aligned}$$

즉 γ , β 는 진수의 조건을 만족시킨다.

또 $\log_2 \{-f(x)\} = \log_2 |g(x)|$ 의 진수의 조건에서

$$\begin{aligned} -f(x) &> 0, g(x) \neq 0 \\ x^2-2x-8 &< 0, ax \neq 0 \\ (x+2)(x-4) &< 0, x \neq 0 \\ \therefore -2 &< x < 4 \text{ 또는 } 0 < x < 4 \end{aligned}$$

즉 α , δ 는 진수의 조건을 만족시킨다.

05 현재 용액에 녹아 있는 두 기체 A, B의 양을 각각 $5a$, a ($a>0$)라 하면 n 시간 후의 두 기체 A, B의 양은 각각

$$\begin{aligned} 5a(1-0.1)^n &= 5a \times 0.9^n, \\ a(1+0.2)^n &= a \times 1.2^n \end{aligned}$$

이므로 기체 B의 양이 기체 A의 양보다 많아지려면

$$\begin{aligned} 5a \times 0.9^n &< a \times 1.2^n \\ 5 \times 0.9^n &< 1.2^n \quad (\because a>0) \end{aligned}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log(5 \times 0.9^n) &< \log 1.2^n \\ \log 5 + n(2 \log 3 - 1) &< n(2 \log 2 + \log 3 - 1) \\ n(2 \log 2 - \log 3) &> 1 - \log 2 \\ \therefore n &> \frac{1 - \log 2}{2 \log 2 - \log 3} \\ &= \frac{1 - 0.30}{2 \times 0.30 - 0.48} = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 1.2^n &= n \log \frac{12}{10} \\ &= n \log \frac{2^2 \times 3}{10} \\ &= n(2 \log 2 + \log 3 - 1) \\ \log 5 &= \log \frac{10}{2} \\ &= 1 - \log 2 \\ 2 \log 2 - \log 3 &= \log 4 - \log 3 > 0 \end{aligned}$$

따라서 5시간에서 6시간 사이에 기체 B의 양이 기체 A의 양보다 많아지기 시작하므로

$$m=5 \quad \text{답 ②}$$

06 $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leq 3$ 에서 m , n 이 자연수이므로

$$\log_2 m^3 \geq 0, \log_3 n^2 \geq 0$$

따라서 $0 \leq \log_2 m^3 \leq 3$ 이므로 $1 \leq m^3 \leq 8$

$$\therefore m=1 \text{ 또는 } m=2$$

(i) $m=1$ 일 때,

$$\log_2 1 + \log_3 n^2 \leq 3 \text{이므로} \quad \log_3 n^2 \leq 3$$

즉 $n^2 \leq 27$ 이므로 자연수 n 은

$$1, 2, 3, 4, 5 \text{의 } 5 \text{개}$$

(ii) $m=2$ 일 때,

$$\log_2 2^3 + \log_3 n^2 \leq 3 \text{이므로} \quad \log_3 n^2 \leq 0$$

즉 $n^2 \leq 1$ 이므로 자연수 n 은

$$1 \text{의 } 1 \text{개}$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$5+1=6 \quad \text{답 6}$$

내신 + 수능

1등급을 굳히는 실전 마무리 문제

본책 32쪽

01 **전략** 세 연산 A, B, C의 결과를 지수가 유리수인 거듭제곱으로 나타낸 후 지수법칙을 이용한다.

$$\text{풀이} \quad m \xrightarrow{A} \sqrt{m} = m^{\frac{1}{2}}, m \xrightarrow{B} \sqrt[4]{m^3} = m^{\frac{3}{4}},$$

$$m \xrightarrow{C} \sqrt{m^4 \sqrt{m^3}} = m^{\frac{7}{8}} \text{이므로}$$

$$a \xrightarrow{A} a^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{B} (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{8}}$$

$$\xrightarrow{C} (a^{\frac{3}{8}})^{\frac{7}{8}} = a^{\frac{21}{64}} = 64\sqrt[21]{a}$$

따라서 (가)에 알맞은 것은 $64\sqrt[21]{a}$ 이다.

답 ④

02 **전략** 먼저 네 점 A_n , B_n , C_n , D_n 의 좌표를 구한 후 $\square A_n B_n D_n C_n$ 이 어떤 사각형인지 생각한다.

$$\text{풀이} \quad A_n((\sqrt{2})^{-n}, (\sqrt{2})^{-n}), B_n((\sqrt{2})^{-n}, 0),$$

$$C_n((\sqrt{2})^n, \frac{1}{(\sqrt{2})^n}), D_n((\sqrt{2})^n, 0)$$

이때 $(\sqrt{2})^{-n} = \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ 이므로 두 점 A_n , C_n 의 y 좌표가

같다.

즉 $\square A_n B_n D_n C_n$ 은 직사각형이므로

$$\begin{aligned} f(n) &= \{(\sqrt{2})^{-n} - (\sqrt{2})^{-n}\} \cdot (\sqrt{2})^{-n} \\ &= 1 - (\sqrt{2})^{-2n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$$f(n) > \frac{7}{8} \text{에서} \quad 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{8}, \quad 2^n > 2^3 \quad \therefore n > 3$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

답 ②

03 [전략] 먼저 지수법칙을 이용하여 $f(a)$ 를 간단히 한다.

[풀이] $f(a) = (a^x + a^y)^2 - (a^x - a^y)^2$
 $= (a^{2x} + 2a^x a^y + a^{2y}) - (a^{2x} - 2a^x a^y + a^{2y})$
 $= 4a^x a^y = 4a^{x+y}$
 $= 4a^2 (\because x+y=2)$
 $\therefore f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{5}) + f(\sqrt{7})$
 $= 4 \cdot (\sqrt{3})^2 + 4 \cdot (\sqrt{5})^2 + 4 \cdot (\sqrt{7})^2$
 $= 60$ [답] ⑤

04 [전략] 로그의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별한다.

[풀이] $\neg. x \circ y = x^{\log_2 y} = y^{\log_2 x} = y \circ x$
 $\neg. x \circ \frac{1}{y} = x^{\log_2 \frac{1}{y}} = x^{-\log_2 y} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\log_2 y} = \frac{1}{x} \circ y$
 $\neg. x \circ yz = x^{\log_2 yz} = x^{\log_2 y + \log_2 z} = x^{\log_2 y} \cdot x^{\log_2 z}$
 $= (x \circ y)(x \circ z)$

이상에서 $\neg, \neg, \neg$ 모두 옳다. [답] ⑤

[다른 풀이] $\neg. x \circ yz = x^{\log_2 yz} = (yz)^{\log_2 x}$
 $= y^{\log_2 x} \cdot z^{\log_2 x} = x^{\log_2 y} \cdot x^{\log_2 z}$
 $= (x \circ y)(x \circ z)$

05 [전략] 먼저 주어진 조건을 이용하여 k 의 값을 구한다.

[풀이] $T_0=95, T_s=5, T=35, t=3$ 을

$\log \frac{T-T_s}{T_0-T_s} = kt$ 에 대입하면
 $\log \frac{35-5}{95-5} = 3k, \quad \log \frac{1}{3} = 3k$
 $\therefore k = \frac{1}{3} \log \frac{1}{3}$

$T_0=35, T_s=5, T=15, k = \frac{1}{3} \log \frac{1}{3}$ 을 주어진 관계식에 대입하면

$\log \frac{15-5}{35-5} = \frac{t}{3} \log \frac{1}{3}$
 $\log \frac{1}{3} = \frac{t}{3} \log \frac{1}{3}$
 $\frac{t}{3} = 1 \quad \therefore t=3$

따라서 앞으로 3분이 더 걸린다. [답] ②

06 [전략] 주어진 조건을 식으로 나타낸 후 로그의 성질을 이용한다.

[풀이] 처음 그래프의 크기를 G 라 하자.
 버튼 A를 한 번 누를 때 처음 그래프의 크기의 a 배만큼 확대된다고 하면

$a^3 G = 3G, \quad a^3 = 3$

양변에 상용로그를 취하면

$\log a^3 = \log 3, \quad 3 \log a = 0.48$
 $\therefore \log a = 0.16$

또 버튼 B를 한 번 누를 때 처음 그래프의 크기의 b 배만큼 확대된다고 하면

$b^5 G = 5G, \quad b^5 = 5$

양변에 상용로그를 취하면

$\log b^5 = \log 5, \quad 5 \log b = 0.70$
 $\therefore \log b = 0.14$

버튼 A를 2번 누르고 버튼 B를 3번 누르면 그래프의 크기는 처음 그래프의 크기의 $a^2 b^3$ 배가 되므로 $a^2 b^3 = k$ 라 하면

$\log k = \log a^2 b^3$
 $= 2 \log a + 3 \log b$
 $= 2 \times 0.16 + 3 \times 0.14$
 $= 0.74$

이때 $\log 5.5 = 0.74$ 이므로

$k = 5.5$

따라서 그래프의 크기는 처음 그래프의 크기의 5.5배가 된다. [답] ④

07 [전략] 지수법칙을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별한다.

[풀이] $\neg. (a, b) \in A$ 에서 $5^a = b$ 이므로

$5^{\frac{a}{2}} = (5^a)^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$
 $\therefore \left(\frac{a}{2}, \sqrt{b}\right) \in A$

$\neg. (-a, b) \in A$ 에서 $5^{-a} = b$ 이므로

$5^a = (5^{-a})^{-1} = b^{-1} = \frac{1}{b}$
 $\therefore \left(a, \frac{1}{b}\right) \in A$

$\neg. [반례] a=1, b=-5$ 이면

$5^{2a} = 5^2 = (-5)^2 = b^2$

이므로 $(2a, b^2) \in A$

그런데 $5^a = 5 \neq b$ 이므로 $(a, b) \notin A$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다. [답] ②

08 [전략] 두 점 A, B의 y 좌표가 같음을 이용하여 x 좌표 사이의 관계식을 구한다.

[풀이] 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 a, b ($a > 0, b < 0$)라 하면

$A(a, 4^a), B\left(b, \left(\frac{1}{2}\right)^b\right)$

이때 두 점 A, B의 y 좌표가 같으므로

$4^a = \left(\frac{1}{2}\right)^b, \quad 2^{2a} = 2^{-b}$
 $\therefore b = -2a$

$\overline{AB} = a - b = a - (-2a) = 3a$ 이므로 $\overline{AB} = n$ 에서
 $3a = n$

즉 $a = \frac{1}{3}n, b = -\frac{2}{3}n$ 이므로

$f(n) = ab = \frac{1}{3}n \cdot \left(-\frac{2}{3}n\right) = -\frac{2}{9}n^2$

$f(n) < -20$ 에서

$-\frac{2}{9}n^2 < -20, \quad n^2 > 90$

$\therefore n > 3\sqrt{10}$ ($\because n$ 은 자연수)

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10이다. [답] ①

$\log 5 = \log \frac{10}{2}$
 $= 1 - \log 2$
 $= 0.70$

$3\sqrt{10} = \sqrt{900}$ 이므로
 $\sqrt{81} < 3\sqrt{10} < \sqrt{100}$
 $\therefore 9 < 3\sqrt{10} < 10$

09 **전략** $2^x + 2^{-x} = X$ 로 치환하여 X 에 대한 방정식으로 나타낸다.

풀이 $2(4^x + 4^{-x}) - 3(2^x + 2^{-x}) - 1 = 0$ 에서

$$2\{(2^x + 2^{-x})^2 - 2\} - 3(2^x + 2^{-x}) - 1 = 0$$

$$2(2^x + 2^{-x})^2 - 3(2^x + 2^{-x}) - 5 = 0$$

$2^x + 2^{-x} = X$ 로 놓으면

$$2X^2 - 3X - 5 = 0, \quad (X+1)(2X-5) = 0$$

$$\therefore X = -1 \text{ 또는 } X = \frac{5}{2}$$

이때 $X = 2^x + 2^{-x}$ 에서 $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$X = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립)

즉 $X = \frac{5}{2}$ 이므로

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}, \quad 2^{2x} + 1 = \frac{5}{2} \cdot 2^x$$

$$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$2t^2 - 5t + 2 = 0, \quad (2t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2$$

즉 $2^x = \frac{1}{2}$ 또는 $2^x = 2$ 이므로

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$$-1 + 1 = 0$$

답 ③

10 **전략** 번식을 시작한 지 n 시간 후 두 세균 A, B의 수를 각각 n 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 번식을 시작한 지 n 시간 후 두 세균 A, B의 수는 각각 $2 \cdot 2^n$, 4^n 이므로

$$|4^n - 2 \cdot 2^n| = 4^n - 2 \cdot 2^n = 960$$

$$2^{2n} - 2 \cdot 2^n - 960 = 0$$

$2^n = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 2t - 960 = 0, \quad (t+30)(t-32) = 0$$

$$\therefore t = 32 \quad (\because t > 0)$$

즉 $2^n = 32 = 2^5$ 이므로 $n = 5$

따라서 두 종류의 세균 A, B의 수의 차가 960이 되는 것은 번식을 시작한 지 5시간 후이다. **답 ③**

11 **전략** $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ 에서 $a > 10$ 이면 $f(x) < g(x)$ 이고, $0 < a < 10$ 이면 $f(x) > g(x)$ 임을 이용한다.

풀이 $(x^2 - 4x + 6)^{2x-11} < 1$ 에서

$$(x^2 - 4x + 6)^{2x-11} < (x^2 - 4x + 6)^0$$

이때 $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \geq 2$ 이므로

$$2x - 11 < 0 \quad \therefore x < \frac{11}{2}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

답 ⑤

$2^x = 2^{-x}$ 에서 $2^{2x} = 1$
따라서 $2x = 0$ 이므로
 $x = 0$

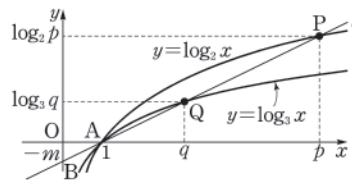
$4^n - 2 \cdot 2^n = 2^{2n} - 2^{n+1}$
 $n \geq 10$ 이면 $2^{2n} \geq 2^{n+10}$ 이므로
 $4^n - 2 \cdot 2^n \geq 0$
 $\therefore |4^n - 2 \cdot 2^n|$
 $= 4^n - 2 \cdot 2^n$

기울기가 -1인 직선은
직선 $y=x$ 에 대하여 대칭
이다.

12 **전략** 두 점을 지나는 직선의 기울기를 이용한다.

풀이 직선 l 의 기울기는 $\frac{-m-0}{0-1} = m$

ㄱ. (i) $p > 1$ 일 때,



위의 그림에서 $p > q$ 이므로

$$\log_2 p > \log_3 q$$

(ii) $0 < p < 1$ 일 때,

오른쪽 그림에서 $p > q$

이므로

$$\log_2 p > \log_3 q$$

(i), (ii)에서

$$\log_2 p > \log_3 q$$

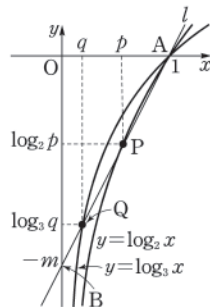
ㄴ. 직선 l 의 기울기는 직선 PQ의 기울기와 같으므로

$$m = \frac{\log_2 p - \log_3 q}{p - q}$$

ㄷ. 직선 l 의 기울기는 두 점 A(1, 0), Q(q, log3 q)를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$$m = \frac{\log_3 q}{q-1} > \frac{\log_3 q}{q}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답 ⑤**



13 **전략** 먼저 두 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = -\frac{1}{2} \log_2 x$ 사이의 관계를 파악한다.

풀이 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 에서

$$x = \log_{\frac{1}{4}} y, \text{ 즉 } x = -\frac{1}{2} \log_2 y$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -\frac{1}{2} \log_2 x$

즉 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = -\frac{1}{2} \log_2 x$ 는 서로 역함수 관계이다.

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x, \quad y = -\frac{1}{2} \log_2 x$$

의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

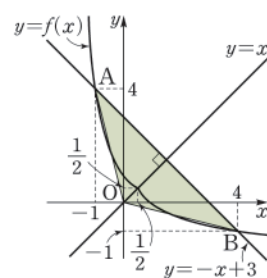
점 A(-1, 4)를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y - 4 = -(x + 1) \quad \therefore y = -x + 3$$

이 직선도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 B(4, -1)이므로

$$AB = \sqrt{(4+1)^2 + (-1-4)^2} = 5\sqrt{2}$$



이고 원점 O와 직선 $y=-x+3$, 즉 $x+y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이므로

$$\triangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{2} \quad \text{답 ③}$$

14 **전략** α, β 를 방정식 $f(x)=0$ 의 두 근으로 나타낸 후 방정식 $f(2^x)=0$ 의 실근의 개수에 따른 방정식 $f(x)=0$ 의 근의 조건을 이용한다.

풀이 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2+ax+b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-4b>0$$

이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 p, q ($p<q$)라 하면 방정식 $f(\log_2 x)=0$ 의 두 근이 α, β ($\alpha<\beta$)이므로

$$\log_2 \alpha = p, \log_2 \beta = q$$

$$\therefore \alpha = 2^p, \beta = 2^q$$

$(2^x)^2 + a \cdot 2^x + b = 0$ 에서 $2^x = t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t^2 + at + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. $k=2$ 이면 방정식 $f(2^x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 방정식 ①의 두 실근 p, q 가 모두 0보다 커야 한다.

$$\therefore 0 < p < q$$

$$2^0 < 2^p \text{이므로} \quad 2^p > 1$$

$$\therefore \alpha > 1$$

ㄴ. $k=0$ 이면 방정식 $f(2^x)=0$ 이 실근을 갖지 않으므로 방정식 ①의 두 실근 p, q 가 모두 0보다 크지 않아야 한다.

$$\therefore p < q \leq 0$$

$$0 < 2^q \leq 2^0 \text{이므로} \quad 0 < 2^q \leq 1$$

$$\therefore 0 < \beta \leq 1$$

ㄷ. $\alpha\beta=1$ 이면 $2^p \cdot 2^q = 1$ 이므로

$$2^{p+q} = 1 \quad \therefore p+q=0$$

$$\text{이때 } p < q \text{이므로} \quad p < 0, q > 0$$

한편 $t>0$ 이므로 방정식 ①의 실근은 q 뿐이다.

따라서 방정식 $f(2^x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로

$$k=1$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답 ⑤**

15 **전략** 판별식을 이용하여 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립할 조건을 구한다.

풀이 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하므로 이차방정식 $x^2 - 2x \log_2 a + \frac{4}{\log_a 2} = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-\log_2 a)^2 - \frac{4}{\log_a 2} < 0$$

$$(\log_2 a)^2 - 4 \log_2 a < 0$$

3과 5의 공배수는

15, 30, 45, ...

1을 빼면

14, 29, 44, ...

$\therefore a=15, 45, \dots$

2와 5의 공배수는

10, 20, 30, 40, ...

1을 빼면

9, 19, 29, 39, ...

$\therefore b=10, 40, \dots$

2와 3의 공배수는

6, 12, ..., 36, ...

1을 빼면

5, 11, ..., 35, ...

$\therefore c=6, 36, \dots$

$\log_2 a = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t < 0, \quad t(t-4) < 0$$

$$\therefore 0 < t < 4$$

즉 $0 < \log_2 a < 4$ 이므로

$$\log_2 1 < \log_2 a < \log_2 16$$

밑이 1보다 크므로 $1 < a < 16$

따라서 정수 a 의 개수는

$$16 - 1 - 1 = 14$$

답 ②

16 **전략** $n=2^a 3^b 5^c$ 이라 하고 주어진 세 수를 변형한다.

풀이 $n=2^a 3^b 5^c$ 이라 하면

$$\sqrt{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{a-1}{2}} 3^{\frac{b}{2}} 5^{\frac{c}{2}}, \quad \sqrt[3]{\frac{n}{3}} = 2^{\frac{a}{3}} 3^{\frac{b-1}{3}} 5^{\frac{c}{3}},$$

$$\sqrt[5]{\frac{n}{5}} = 2^{\frac{a}{5}} 3^{\frac{b}{5}} 5^{\frac{c-1}{5}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

위의 세 수가 모두 자연수가 되려면 a 는 3과 5의 공배수이고 $a-1$ 은 2의 배수이어야 하므로 a 의 최솟값은 15이다.

또 b 는 2와 5의 공배수이고 $b-1$ 은 3의 배수이어야 하므로 b 의 최솟값은 10이다.

c 는 2와 3의 공배수이고 $c-1$ 은 5의 배수이어야 하므로 c 의 최솟값은 6이다. **②**

따라서 $a+b+c$ 의 최솟값은

$$15 + 10 + 6 = 31$$

답 31

채점 기준	비율
① 주어진 세 수를 변형할 수 있다.	30%
② a, b, c 의 최솟값을 구할 수 있다.	60%
③ $a+b+c$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	10%

17 **전략** 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $x \log_6 \sqrt{3} + y \log_{36} \sqrt{2} = z$ 에서

$$x \log_6 3^{\frac{1}{2}} + \frac{y}{2} \log_6 2^{\frac{1}{2}} = z$$

$$\log_6 3^{\frac{x}{2}} + \log_6 2^{\frac{y}{4}} = z$$

$$\log_6 (3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{y}{4}}) = z$$

$$\therefore 3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{y}{4}} = 6^z = 3^z \cdot 2^z$$

이때 x, y, z 가 자연수이고, $2^{\frac{y}{4}}$ 은 3의 배수가 될 수 없고 $3^{\frac{x}{2}}$ 은 2의 배수가 될 수 없으므로

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = z$$

즉 $x=2z, y=4z$ 이므로

$$\frac{xy}{z^2} = \frac{2z \cdot 4z}{z^2} = 8$$

답 8

18 **전략** 주어진 함수의 그래프가 지나는 점의 좌표를 이용한다.

풀이 $y=6^x$ 의 그래프가 세 점 $(a, 2), (b, 9), (c, 12)$ 를 지나므로

일품 BOX

$$6^a=2, 6^b=9, 6^c=12$$

이때 $6^{2b}=9^2, 6^{3c}=12^3$ 이므로

$$6^{a+2b+3c}=6^a \cdot 6^{2b} \cdot 6^{3c}=2 \cdot 9^2 \cdot 12^3$$

$$=2 \cdot (3^2)^2 \cdot (2^2 \cdot 3)^3$$

$$=2^7 \cdot 3^7=6^7$$

$$\therefore a+2b+3c=7$$

답 7

다른 풀이 $y=6^x$ 의 그래프가 세 점 $(a, 2), (b, 9), (c, 12)$ 를 지나므로

$$6^a=2, 6^b=9, 6^c=12$$

따라서 $a=\log_6 2, b=\log_6 9, c=\log_6 12$ 이므로

$$a+2b+3c=\log_6 2+2\log_6 9+3\log_6 12$$

$$=\log_6 2+2\log_6 3^2+3\log_6 (2^2 \cdot 3)$$

$$=\log_6 2+\log_6 (3^2)^2+\log_6 (2^2 \cdot 3)^3$$

$$=\log_6 (2 \cdot 3^4 \cdot 2^6 \cdot 3^3)$$

$$=\log_6 6^7=7$$

19 **전략** $2^x=X, 2^y=Y$ 로 치환하여 주어진 연립방정식을 X, Y 에 대한 연립방정식으로 나타낸다.

풀이 $2^x=X, 2^y=Y (X>0, Y>0)$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$\begin{cases} X+Y=9 \\ \frac{X^2}{Y}=\frac{1}{8} \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} X+Y=9 & \cdots \textcircled{1} \\ Y=8X^2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

①을 ②에 대입하면

$$X+8X^2=9, \quad 8X^2+X-9=0$$

$$(8X+9)(X-1)=0$$

$$\therefore X=1 (\because X>0)$$

$X=1$ 을 ②에 대입하면 $Y=8$

즉 $2^x=1, 2^y=8=2^3$ 이므로

$$x=0, y=3$$

$$\therefore x^2+y^2=9$$

답 9

채점 기준	비율
① X, Y 에 대한 연립방정식으로 나타낼 수 있다.	30%
② X, Y 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ x^2+y^2 의 값을 구할 수 있다.	30%

20 **전략** $2^x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 부등식으로 나타낸다.

풀이 $4^x+a \cdot 2^{x+1}+b \leq 0$ 에서

$$2^{2x}+2a \cdot 2^x+b \leq 0$$

$2^x=t (t>0)$ 로 놓으면

$$t^2+2at+b \leq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $2 \leq t \leq 8$

해가 $2 \leq t \leq 8$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(t-2)(t-8) \leq 0 \quad \therefore t^2-10t+16 \leq 0$$

이 부등식이 ①과 일치하므로

$$2a=-10, b=16 \quad \therefore a=-5, b=16$$

$$\therefore a+b=11$$

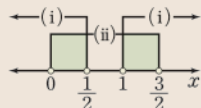
답 11

$$6^b=9 \text{에서 } (6^b)^2=9^2$$

$$\therefore 6^{2b}=9^2$$

$$6^c=12 \text{에서 } (6^c)^3=12^3$$

$$\therefore 6^{3c}=12^3$$



21 **전략** 주어진 명제가 참이 되려면 지수의 밑이 0보다 크고 1보다 작아야 함을 이용한다.

풀이 두 실수 p, q 에 대하여 주어진 명제가 참이 되려면

$$0 < 2x^2-3x+1 < 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(i) 2x^2-3x+1 > 0 \text{에서 } (2x-1)(x-1) > 0$$

$$\therefore x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$(ii) 2x^2-3x+1 < 1 \text{에서}$$

$$2x^2-3x < 0, \quad x(2x-3) < 0$$

$$\therefore 0 < x < \frac{3}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

(i), (ii)에서

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } 1 < x < \frac{3}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\text{답 } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } 1 < x < \frac{3}{2}$$

채점 기준	비율
① 주어진 명제가 참이 될 조건을 알 수 있다.	30%
② $2x^2-3x+1 > 0$ 의 해를 구할 수 있다.	30%
③ $2x^2-3x+1 < 1$ 의 해를 구할 수 있다.	30%
④ x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	10%

22 **전략** 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프의 점근선을 이용한다.

풀이 $y=2^{1-x}+p$ 의 그래프

의 점근선의 방정식은

$$y=p$$

$y=2^{1-x}+p$ 의 그래프와 직선

$y=4$ 가 한 점에서 만나므로

$$p < 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$y=\log_2(2p-4x)+p$ 의 그래프

의 점근선의 방정식은

$$2p-4x=0 \text{에서}$$

$$x=\frac{p}{2}$$

$y=\log_2(2p-4x)+p$ 의 그래프

와 직선 $x=-1$ 이 한 점에서

서 만나므로

$$\frac{p}{2} > -1 \quad \therefore p > -2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통 범위를 구하면

$$-2 < p < 4$$

따라서 정수 p 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

답 5

23 **전략** 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 경계로 범위를 나누어 각각의 함수식을 구한다.

풀이 $y=|\log_2 x|$ 에서

$$y=\begin{cases} \log_2 x & (x \geq 1) \\ -\log_2 x & (x < 1) \end{cases}$$

$A(3, \log_2 3)$ 이고 점 C 의 x 좌표를 $a (0 < a < 1)$ 라 하면

$$C(a, -\log_2 a)$$

두 점 A, C의 y좌표가 같으므로

$$-\log_2 a = \log_2 3, \quad \log_2 a = \log_2 \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

또 B(12, $\log_2 12$)이고 점 D의 x좌표를 $b(0 < b < 1)$ 라 하면

$$D(b, -\log_2 b)$$

두 점 B, D의 y좌표가 같으므로

$$-\log_2 b = \log_2 12, \quad \log_2 b = \log_2 \frac{1}{12}$$

$$\therefore b = \frac{1}{12}$$

따라서 □ABDC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \left[\left(3 - \frac{1}{3} \right) + \left(12 - \frac{1}{12} \right) \right] \cdot (\log_2 12 - \log_2 3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3} + \frac{143}{12} \right) \cdot \log_2 4$$

$$= \frac{175}{12}$$

이므로 $p=12, q=175$

$$\therefore p+q=187$$

답 187

24 [전략] $a > 10$ 이면 $y = \log_a f(x)$ 는 $f(x)$ 가 최소일 때 최소값을 가짐을 이용한다.

[풀이] $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$= \log_a (x^2 - 4x + a^5 + 4)$$

$$= \log_a \{ (x-2)^2 + a^5 \}$$

밑이 1보다 크므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $f(x)$ 가 최소일 때, 즉 $x=2$ 일 때 최소값 $\log_a a^5 = 5$ 를 갖는다.

따라서 $\alpha=2, \beta=5$ 이므로

$$\alpha + \beta = 7$$

답 7

25 [전략] 로그의 성질을 이용하여 주어진 방정식을 정리한다.

[풀이] 진수의 조건에서

$$x \neq a, x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\log_2 |x-a| = \log_4 (x-2) \text{에서}$$

$$\log_2 |x-a| = \frac{1}{2} \log_2 (x-2)$$

$$\therefore \log_2 (x-a)^2 = \log_2 (x-2)$$

즉 $(x-a)^2 = x-2$ 이므로

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{2a+1 \pm \sqrt{\{-(2a+1)\}^2 - 4(a^2+2)}}{2}$$

$$= \frac{2a+1 \pm \sqrt{4a-7}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

따라서 주어진 방정식의 실근이 존재하려면

$$4a-7 \geq 0 \quad \therefore a \geq \frac{7}{4}$$

$$\therefore f(0) = f(1) = 0$$

(i) $a=2$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x > 2$$

$$2 < \sqrt{5} < 3 \text{이므로}$$

$$2 < \frac{7-\sqrt{5}}{2} < \frac{5}{2},$$

$$\frac{9}{2} < \frac{7+\sqrt{5}}{2} < 5$$

□ABDC는 사다리꼴이다.

$$\textcircled{1} \text{에서 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 주어진 방정식의 실근은 3의 1개이므로

$$f(2)=1$$

(ii) $a=3$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2 < x < 3 \text{ 또는 } x > 3$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } x = \frac{7-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$$

따라서 주어진 방정식의 실근은 $\frac{7-\sqrt{5}}{2}, \frac{7+\sqrt{5}}{2}$ 의

2개이므로

$$f(3)=2$$

(iii) $a=4$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2 < x < 4 \text{ 또는 } x > 4$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } x=3 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 주어진 방정식의 실근은 3, 6의 2개이므로

$$f(4)=2$$

이상에서

$$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=5$$

→ ③

답 5

채점 기준	비율
① 진수의 조건을 구할 수 있다.	10%
② 방정식의 해를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
③ $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	70%

26 [전략] 집합 A의 원소를 구한 후 $B \subset A$ 를 만족시키는 경우를 생각한다.

[풀이] $\log_2 f(x) = \log_3 f(x)$ 에서 $f(x)=1$

$$x^2+x+1=1, \quad x(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

$$\therefore A = \{-1, 0\}$$

$$\log_2 f(x) = \log_2 g(x) \text{에서 } f(x)=g(x)$$

진수의 조건에서

$$f(x) > 0, g(x) > 0$$

$$f(x) = x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로 방정식}$$

$$f(x)=g(x) \text{의 해는 항상 진수의 조건을 만족시킨다.}$$

이때 $B \subset A$ 이므로

$$B = \{-1\} \text{ 또는 } B = \{0\} \text{ 또는 } B = \{-1, 0\}$$

(i) $B = \{-1\}$ 일 때,

이차방정식 $f(x)=g(x)$ 는 $x=-1$ 을 중근으로 가지

므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 는 점

$(-1, 1)$ 에서 접한다.

$$g(x) = m(x+1)+1 \quad (m > 0) \text{이라 하고 이차방정식}$$

$$x^2+x+1 = m(x+1)+1,$$

$$\text{즉 } x^2 + (1-m)x - m = 0$$

의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (1-m)^2 + 4m = 0$$

$$(m+1)^2 = 0 \quad \therefore m = -1$$

그런데 m 은 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$f(-1)$$

$$= (-1)^2 + (-1) + 1$$

$$= 1$$

(ii) $B=\{0\}$ 일 때,

이차방정식 $f(x)=g(x)$ 는 $x=0$ 을 중근으로 가지므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 는 점 $(0, 1)$ 에서 접한다.

$g(x)=mx+1$ ($m>0$)이라 하고 이차방정식

$$x^2+x+1=mx+1,$$

$$\text{즉 } x^2+(1-m)x=0$$

의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2=(1-m)^2=0 \quad \therefore m=1$$

$$\therefore g(x)=x+1$$

(iii) $B=\{-1, 0\}$ 일 때,

이차방정식 $f(x)=g(x)$ 의 두 근이 $-1, 0$ 이므로 $y=g(x)$ 는 두 점 $(-1, 1), (0, 1)$ 을 지나는 직선이다.

직선 $y=g(x)$ 의 기울기는

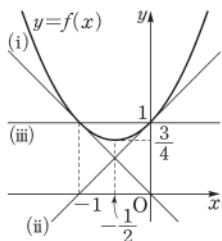
$$\frac{1-1}{0-(-1)}=0$$

그런데 기울기는 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $g(x)=x+1$ 이므로

$$g(5)=5+1=6$$

참고 $y=f(x)$ 의 그래프와 각 경우의 직선 $y=g(x)$ 를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 (ii)의 경우에만 직선 $y=g(x)$ 의 기울기가 양수임을 알 수 있다.



답 6

$$f(0)=1$$

정수 n 에 대하여

$$\theta=360^\circ \times n + \alpha^\circ$$

일 때

$$\textcircled{1} 0^\circ < \alpha^\circ < 90^\circ$$

→ θ 는 제1사분면의 각

$$\textcircled{2} 90^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$$

→ θ 는 제2사분면의 각

$$\textcircled{3} 180^\circ < \alpha^\circ < 270^\circ$$

→ θ 는 제3사분면의 각

$$\textcircled{4} 270^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$$

→ θ 는 제4사분면의 각

$$-600^\circ, -240^\circ, 120^\circ, 480^\circ, 840^\circ, 1200^\circ$$

II 삼각함수

05 삼각함수

개념 & 핵심 기출

본책 38쪽

01 $\because 830^\circ = 360^\circ \times 2 + 110^\circ$ 이므로 830° 의 동경이 나타내는 일반각은

$$360^\circ \times n + 110^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$\therefore -210^\circ = 360^\circ \times (-1) + 150^\circ$ 이므로 -210° 는 제2사분면의 각이다.

$\therefore 410^\circ = 360^\circ \times 1 + 50^\circ,$

$-670^\circ = 360^\circ \times (-2) + 50^\circ$ 이므로 $50^\circ, 410^\circ, -670^\circ$ 를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

이상에서 옳은 것은 $\neg, \text{ㄷ}$ 이다.

답 $\neg, \text{ㄷ}$

02 $\theta = 360^\circ \times n + 120^\circ$ (n 은 정수)이므로

$$-900^\circ < \theta < 1260^\circ \text{에서}$$

$$-900^\circ < 360^\circ \times n + 120^\circ < 1260^\circ$$

$$-1020^\circ < 360^\circ \times n < 1140^\circ$$

$$\therefore -\frac{17}{6} < n < \frac{19}{6}$$

n 은 정수이므로 $n = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

따라서 구하는 각 θ 의 개수는 6이다.

답 6

03 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 360^\circ \times \frac{n}{3} + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times \frac{n}{3} + 90^\circ$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 210^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 300^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 330^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

이상에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다.

답 제2사분면

04 $\angle AOB = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ 이고 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 이므로 $\triangle OAB$ 는 정삼각형이다.

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$$

이때 $\overline{OA} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ 이므로

$$\triangle OAB = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10^2 = 25\sqrt{3} \quad \text{답 } 25\sqrt{3}$$

05 각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 4\theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{5}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\frac{\pi}{2} < \frac{2n}{5}\pi < \pi$ 이므로

$$\frac{5}{4} < n < \frac{5}{2}$$

n 은 정수이므로 $n=2$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\theta = \frac{4}{5}\pi \quad \text{답 } \frac{4}{5}\pi$$

06 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$2\theta + 3\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{2n}{5}\pi + \frac{\pi}{10} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\pi < \theta < 2\pi$ 에서 $\pi < \frac{2n}{5}\pi + \frac{\pi}{10} < 2\pi$ 이므로

$$\frac{9}{10}\pi < \frac{2n}{5}\pi < \frac{19}{10}\pi \quad \therefore \frac{9}{4} < n < \frac{19}{4}$$

n 은 정수이므로 $n=3, 4$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\theta = \frac{13}{10}\pi, \frac{17}{10}\pi$$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$\frac{13}{10}\pi + \frac{17}{10}\pi = 3\pi \quad \text{답 } 3\pi$$

07 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$r \cdot \frac{3}{4}\pi = 9\pi \quad \therefore r = 12$$

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9\pi = 54\pi \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

08 부채꼴의 중심각의 크기는 $320^\circ = \frac{16}{9}\pi$ 이므로 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{16}{9}\pi = 32\pi, \quad r^2 = 36$$

$$\therefore r = 6 \quad (\because r > 0)$$

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$$6 \cdot \frac{16}{9}\pi = \frac{32}{3}\pi$$

이므로 둘레의 길이는

$$2 \cdot 6 + \frac{32}{3}\pi = 12 + \frac{32}{3}\pi \quad \text{답 } 12 + \frac{32}{3}\pi$$

한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\overline{OP} = r$ 인 점 $P(x, y)$ 에 대하여 동경 OP 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면
 $\sin\theta = \frac{y}{r}$,
 $\cos\theta = \frac{x}{r}$,
 $\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$

점 P 는 제4사분면 위의 점이므로 $k < 0$

점 P 는 제2사분면 위의 점이므로 $x < 0$

$$320^\circ = 320 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{16}{9}\pi$$

09 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 24이므로

$$2r + l = 24 \quad \therefore l = 24 - 2r$$

이때 $24 - 2r > 0, r > 0$ 이므로 $0 < r < 12$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(24 - 2r)$$

$$= -r^2 + 12r$$

$$= -(r - 6)^2 + 36 \quad (0 < r < 12)$$

이므로 S 는 $r=6$ 일 때 최댓값 36을 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \theta = 36 \quad \therefore \theta = 2 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

10 $\overline{OP} = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13$ 이므로

$$\sin\theta = -\frac{5}{13}, \cos\theta = -\frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}$$

$$\therefore \frac{13\sin\theta + 24\tan\theta}{26\cos\theta + 4} = \frac{13 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + 24 \cdot \frac{5}{12}}{26 \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + 4} = -\frac{1}{4} \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

11 $\overline{OP} = \sqrt{k^2 + 9}$ 이므로 $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{k^2 + 9}}$

$$\approx \frac{3}{\sqrt{k^2 + 9}} = \frac{1}{3} \text{이므로 } \sqrt{k^2 + 9} = 9$$

$$k^2 + 9 = 81, \quad k^2 = 72$$

$$\therefore k = -6\sqrt{2} \quad (\because k < 0)$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{k}{3} = -2\sqrt{2} \quad \text{답 } -2\sqrt{2}$$

12 $y = -\frac{3}{4}x$ 를 $x^2 + y^2 = 25$ 에 대입하면

$$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x\right)^2 = 25, \quad x^2 = 16$$

$$\therefore x = -4 \quad (\because x < 0)$$

따라서 점 P 의 좌표는 $(-4, 3)$ 이고 $\overline{OP} = 5$ 이므로

$$\sin\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{5}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

13 $\frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta} = 2$ 에서

$$1 - \tan\theta = 2(1 + \tan\theta), \quad 3\tan\theta = -1$$

$$\therefore \tan\theta = -\frac{1}{3}$$

또 $\sin\theta < 0, \tan\theta = -\frac{1}{3} < 0$ 이므로 θ 는 제4사분면의 각이다.

따라서 각 θ 를 나타내는 동경을 OP 라 하면 $\tan\theta = \frac{-1}{3}$ 에서 점 P 의 좌표를 $(3a, -a)$ ($a > 0$)로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{OP} = \sqrt{(3a)^2 + (-a)^2} = \sqrt{10}a$ ($\because a > 0$)이므로
 $\sin \theta = \frac{-a}{\sqrt{10}a} = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \theta = \frac{3a}{\sqrt{10}a} = \frac{3}{\sqrt{10}}$
 $\therefore 10(\sin \theta + \cos \theta) = 10\left(-\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$
 $= 2\sqrt{10}$ [답 ④]

다른 풀이 $\tan \theta = -\frac{1}{3}$ 이므로 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{1}{3}$
 $\therefore \cos \theta = -3 \sin \theta$
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로 $\sin^2 \theta + (-3 \sin \theta)^2 = 1$
 $10 \sin^2 \theta = 1, \sin^2 \theta = \frac{1}{10}$
 이때 $\sin \theta < 0$ 이므로 $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$
 $\therefore \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

14 θ 가 제3사분면의 각이므로
 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$
 $\therefore |\sin \theta| + |\tan \theta| - \sqrt{(\tan \theta - \cos \theta)^2}$
 $+ \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2}$
 $= -\sin \theta + \tan \theta - (\tan \theta - \cos \theta) - (\sin \theta + \cos \theta)$
 $= -2 \sin \theta$ [답 ②]

15 $\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
 또 $\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서 $\cos \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 같으므로 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제2사분면의 각이므로

$2n\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2n\pi + \pi$ (n 은 정수)
 $\therefore n\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < n\pi + \frac{\pi}{2}$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때,

$2k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$2k\pi + \frac{5}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면, 제3사분면이다.

[답] 제1사분면, 제3사분면

16 $2\theta^2 - 5\pi\theta + 3\pi^2 < 0$ 에서
 $(\theta - \pi)(2\theta - 3\pi) < 0 \therefore \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$
 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ 이므로
 $\cos \theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$ ($\because \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$)

$\sin \theta \cos \theta$ 를 한 문자로
 생각하여 근의 공식을 이
 용한다.

$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

$k=0$ 이면
 $5 < n < 7.5$
 $k=10$ 이면
 $105 < n < 107.5$

$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$
 $\therefore \tan \theta - \cos \theta = \frac{31}{20}$ [답 31/20]

17 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = 1 \dots\dots ㉠$
 $(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = k \dots\dots ㉡$

㉠에서 $2 \sin \theta = 1$ 이므로 $\sin \theta = \frac{1}{2}$

㉡에서 $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = k$ 이므로
 $k = \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) = 2 \sin^2 \theta - 1$
 $= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$ [답 ②]

18 $\sin \theta + \cos \theta = \sin \theta \cos \theta$ 의 양변을 제곱하면
 $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \cos^2 \theta$
 $(\sin \theta \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta - 1 = 0$
 $\therefore \sin \theta \cos \theta = 1 - \sqrt{2}$ ($\because \sin \theta \cos \theta < 0$)
 $\therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$
 $= \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = -1 - \sqrt{2}$

따라서 $a = -1, b = -1$ 이므로
 $a - 10b = -1 - 10 \cdot (-1) = 9$ [답 9]

1등급을 위한 **고난도 문제** 본책 41쪽

01 $36^\circ \times n$ 이 제3사분면의 각이 되려면
 $360^\circ \times k + 180^\circ < 36^\circ \times n < 360^\circ \times k + 270^\circ$
 $(k$ 는 정수)
 $\therefore 10k + 5 < n < 10k + 7.5 \dots\dots ㉠ \dots\dots ①$
 이때 n 은 두 자리 자연수이고 k 는 정수이므로 n 은 $k=1$
 일 때 최소이고, $k=9$ 일 때 최대이다.
 $k=1$ 을 ㉠에 대입하면
 $15 < n < 17.5 \therefore m = 16 \dots\dots ②$
 $k=9$ 를 ㉠에 대입하면
 $95 < n < 97.5 \therefore M = 97 \dots\dots ③$
 $\therefore M + m = 113 \dots\dots ④$
 [답 113]

채점 기준	비율
① n 의 값의 범위를 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② m 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ M 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $M + m$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

02 10° 를 나타내는 동경과 $170^\circ \times n + 10^\circ$ 를 나타내는 동경이 일치한다고 하면

$$360^\circ \times m + 10^\circ = 170^\circ \times n + 10^\circ \quad (m \text{은 정수})$$

$$\therefore m = \frac{17}{36}n$$

즉 구하는 서로 다른 동경의 개수는 위의 식을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값과 같으므로 36이다. **답 36**

비밀노트

$\theta_n = 170^\circ \times n + 10^\circ$ 라 하면

$$\theta_0 = 170^\circ \times 0 + 10^\circ = 10^\circ$$

$$\theta_1 = 170^\circ \times 1 + 10^\circ = 180^\circ$$

$$\theta_2 = 170^\circ \times 2 + 10^\circ = 350^\circ$$

$$\theta_3 = 170^\circ \times 3 + 10^\circ = 520^\circ = 360^\circ \times 1 + 160^\circ$$

$$\theta_4 = 170^\circ \times 4 + 10^\circ = 690^\circ = 360^\circ \times 1 + 330^\circ$$

$\vdots$

$$\theta_{36} = 170^\circ \times 36 + 10^\circ = 6130^\circ = 360^\circ \times 17 + 10^\circ$$

$$\theta_{37} = 170^\circ \times 37 + 10^\circ = 6300^\circ = 360^\circ \times 17 + 180^\circ$$

따라서 두 각 θ_0, θ_{36} 을 나타내는 동경이 일치하므로 서로 다른 동경은

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{35}$$

의 36개이다.

$$\begin{aligned} \text{03 } \neg. \alpha + \beta &= \frac{13}{5}\pi + \left(-\frac{28}{5}\pi\right) = -3\pi \\ &= \{2 \cdot (-2) + 1\}\pi \end{aligned}$$

따라서 두 동경 OP, OQ는 y 축에 대하여 대칭이다.

$$\neg. \alpha + \beta = \frac{7}{6}\pi + \frac{7}{3}\pi = \frac{7}{2}\pi = 2\pi + \frac{3}{2}\pi$$

따라서 두 동경 OP, OQ는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned} \text{c. } \alpha - \beta &= \frac{19}{4}\pi - \left(-\frac{9}{4}\pi\right) = 7\pi \\ &= (2 \cdot 3 + 1)\pi \end{aligned}$$

따라서 두 동경 OP, OQ는 원점에 대하여 대칭이다. 이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다. **답 ③**

04 조건 (나)에 의하여

$$8\theta - \theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$7\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{7}\pi$$

$$\text{조건 (가)에 의하여 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

(i) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 일 때,

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2n}{7}\pi < \pi \text{이므로 } \frac{7}{4} < n < \frac{7}{2}$$

n 은 정수이므로 $n = 2, 3$

(ii) $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 일 때,

$$\frac{3}{2}\pi < \frac{2n}{7}\pi < 2\pi \text{이므로 } \frac{21}{4} < n < 7$$

n 은 정수이므로 $n = 6$

(i), (ii)에서 구하는 각 θ 의 개수는 3이다. **답 3**

부채꼴 A의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot r_A \cdot \frac{3}{2}r_A = \frac{3}{4}r_A^2$$

두 각 α, β 를 나타내는 동경이 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

$$60^\circ = 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$$

$$\frac{4}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi, \frac{12}{7}\pi$$

채점 기준

비율

① 조건 (나)를 만족시키는 θ 를 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

30%

② 서로 다른 각 θ 의 개수를 구할 수 있다.

70%

05 두 부채꼴 A, B의 호의 길이는 각각 $\frac{3}{2}r_A, \frac{3}{2}r_B$ 이므로

$$\frac{3}{2}r_A + \frac{3}{2}r_B = 9 \quad \therefore r_A + r_B = 6$$

두 부채꼴 A, B의 넓이는 각각 $\frac{3}{4}r_A^2, \frac{3}{4}r_B^2$ 이므로

$$\frac{3}{4}r_A^2 + \frac{3}{4}r_B^2 = 18 \quad \therefore r_A^2 + r_B^2 = 24$$

따라서 $(r_A + r_B)^2 = r_A^2 + 2r_Ar_B + r_B^2$ 에서

$$6^2 = 24 + 2r_Ar_B \quad \therefore r_Ar_B = 6$$

답 6

06 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ 라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 20이므로

$$2r + r\theta = 20, \quad r\theta = 20 - 2r$$

$$\therefore \theta = \frac{20 - 2r}{r} \quad \dots\dots ①$$

부채꼴의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2}r^2\theta = 16$$

①을 위의 식에 대입하면

$$\frac{1}{2}r(20 - 2r) = 16, \quad r^2 - 10r + 16 = 0$$

$$(r - 2)(r - 8) = 0 \quad \therefore r = 2 \text{ 또는 } r = 8$$

(i) $r = 2$ 를 ①에 대입하면 $\theta = 8$

이때 $\theta < 2\pi$ 이어야 하므로 8은 부채꼴의 중심각의 크기가 될 수 없다.

(ii) $r = 8$ 을 ①에 대입하면 $\theta = \frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{1}{2}$ 이다. **답 ④**

07 오른쪽 그림의 직각삼각형

OPA에서

$$\overline{AP} = \overline{OA} \tan 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

이때 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\overline{BP} = \overline{AP} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \square AOBP = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3}\right) \cdot 2 = 12\sqrt{3}$$

한편 부채꼴 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{\pi}{3} = 6\pi$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

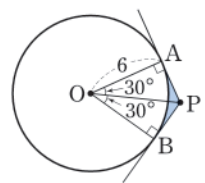
$$12\sqrt{3} - 6\pi$$

답 ④

08 직각삼각형 AOC에서 $\angle AOC = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{AC} = \overline{OC} \tan 30^\circ = 3,$$

답 ①



일품 BOX

$$\overline{OA} = \frac{\overline{OC}}{\cos 30^\circ} = 6$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{OB} - \overline{OC} = 6 - 3\sqrt{3}$$

부채꼴 AOB의 반지름의 길이가 6이므로

$$\widehat{AB} = 6 \cdot \frac{\pi}{6} = \pi$$

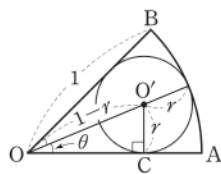
따라서 색칠한 부분의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{BC} + \widehat{AB} &= 3 + (6 - 3\sqrt{3}) + \pi \\ &= 9 - 3\sqrt{3} + \pi \end{aligned}$$

답 9-3√3+π

채점 기준	비율
① AC의 길이를 구할 수 있다.	30%
② BC의 길이를 구할 수 있다.	30%
③ AB의 길이를 구할 수 있다.	30%
④ 색칠한 부분의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	10%

09 오른쪽 그림과 같이 부채꼴 AOB의 중심각의 이등분선은 내접원 O'의 중심 O'를 지나므로



$$\overline{OO'} = 1 - r,$$

$$\angle O'OA = \angle O'OB = \frac{1}{2} \cdot 2\theta = \theta$$

점 O'에서 OA에 내린 수선의 발을 C라 하면 직각삼각형 O'OC에서

$$\sin \theta = \frac{r}{1-r}, \quad (1-r) \sin \theta = r$$

$$(1 + \sin \theta)r = \sin \theta$$

$$\therefore r = \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

답 ③

$$\textbf{10} \quad \overline{OP} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{이므로}$$

$$\overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{OP} = 2$$

이때 점 Q의 좌표는

$$(1+2, \sqrt{3}), \text{ 즉 } (3, \sqrt{3})$$

$$\text{이므로 } \overline{OQ} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

점 R의 좌표는

$$(1-2, \sqrt{3}), \text{ 즉 } (-1, \sqrt{3})$$

$$\text{이므로 } \overline{OR} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\therefore \cos \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin \alpha + \cos \beta = 0$$

답 0

채점 기준	비율
① 두 마름모의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	20%
② sin α의 값을 구할 수 있다.	40%
③ cos β의 값을 구할 수 있다.	30%
④ sin α + cos β의 값을 구할 수 있다.	10%

$$\overline{OB} = \overline{OA} = 6$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{이면} \\ a > 0, b < 0 \\ \text{또는 } a = 0, b \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{이면} \\ a < 0, b < 0 \\ \text{또는 } a = 0 \text{ 또는 } b = 0 \end{aligned}$$

$$\textbf{11} \quad \sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = -\sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \text{에서}$$

$$\cos \theta > 0, \sin \theta < 0 \quad (\because \cos \theta \neq 0)$$

따라서 θ는 제4사분면의 각이므로

$$\tan \theta < 0, \tan \theta - 1 < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\tan^2 \theta} + \sqrt{(\tan \theta - 1)^2} &= -\tan \theta - (\tan \theta - 1) \\ &= 1 - 2\tan \theta \end{aligned}$$

답 ②

$$\textbf{12} \quad \sqrt{\sin x} \sqrt{\cos x} = -\sqrt{\sin x \cos x} \text{에서}$$

$$\sin x < 0, \cos x < 0 \quad (\because \sin x \cos x \neq 0)$$

$$\text{즉 } x \text{는 제3사분면의 각이므로} \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{\frac{\cos y}{\sin y}} = -\sqrt{\frac{\cos y}{\sin y}} \text{에서}$$

$$\sin y < 0, \cos y > 0 \quad (\because \sin y \cos y \neq 0)$$

$$\text{즉 } y \text{는 제4사분면의 각이므로} \quad -\frac{\pi}{2} < y < 0$$

$$\text{ㄱ. } x \sin x + x \sin y + y \sin x + y \sin y$$

$$= x(\sin x + \sin y) + y(\sin x + \sin y)$$

$$= (x+y)(\sin x + \sin y)$$

$$\text{이때 } -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < 0 \text{에서}$$

$$x+y < 0$$

$$-\frac{3}{2}\pi < x+y < -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{이고, } \sin x < 0, \sin y < 0 \text{에서}$$

$$\sin x + \sin y < 0$$

$$\text{이므로 } (x+y)(\sin x + \sin y) > 0$$

$$\therefore x \sin x + x \sin y + y \sin x + y \sin y > 0$$

$$\text{ㄴ. } x \cos x + x \cos y + y \cos x + y \cos y$$

$$= x(\cos x + \cos y) + y(\cos x + \cos y)$$

$$= (x+y)(\cos x + \cos y)$$

$$[\text{반례}] \quad x = -\frac{3}{4}\pi, y = -\frac{\pi}{4} \text{이면}$$

$$\cos x + \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\text{이므로 } (x+y)(\cos x + \cos y) = 0$$

$$\text{ㄷ. } x \sin x - y \sin x - x \cos y + y \cos y$$

$$= (x-y)\sin x - (x-y)\cos y$$

$$= (x-y)(\sin x - \cos y)$$

$$\text{이때 } -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < 0 \text{에서}$$

$$x-y < 0$$

$$-\pi < x-y < 0$$

$$\text{이고, } \sin x < 0, \cos y > 0 \text{에서}$$

$$\sin x - \cos y < 0$$

$$\text{이므로 } (x-y)(\sin x - \cos y) > 0$$

$$\therefore x \sin x - y \sin x - x \cos y + y \cos y > 0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

$$\begin{aligned} \textbf{13} \quad & \frac{1}{1+\sin \theta} + \frac{1}{1+\cos \theta} + \frac{1}{1-\sin \theta} + \frac{1}{1-\cos \theta} \\ &= \frac{2}{1-\sin^2 \theta} + \frac{2}{1-\cos^2 \theta} \\ &= \frac{2}{\cos^2 \theta} + \frac{2}{\sin^2 \theta} \end{aligned}$$

$\tan \theta = \sqrt{2} - 1$ 의 양변을 제곱하면

$$\tan^2 \theta = 3 - 2\sqrt{2}, \quad \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$1 - \cos^2 \theta = (3 - 2\sqrt{2})\cos^2 \theta$$

$$(4 - 2\sqrt{2})\cos^2 \theta = 1 \quad \therefore \frac{1}{\cos^2 \theta} = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{또 } \cos^2 \theta = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \text{ 이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{4}{2 - \sqrt{2}} = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \frac{2}{\cos^2 \theta} + \frac{2}{\sin^2 \theta} \\ &= 2(4 - 2\sqrt{2}) + 2(4 + 2\sqrt{2}) \\ &= 16 \end{aligned}$$

답 16

14 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2\sin^2 \theta + 2\cos^2 \theta = -a, \quad 2\sin^2 \theta \cdot 2\cos^2 \theta = b$$

$$\therefore a = -2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -2,$$

$$b = 4(\sin \theta \cos \theta)^2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\therefore ab = -\frac{1}{8}$$

답 ③

15 오른쪽 그림과 같이 점 P

에서 x축, y축에 내린 수선의
발을 각각 Q, R라 하고,

A(1, 0), B(0, 1)이라 하자.

ㄱ. 직각삼각형 POQ에서

$$\overline{OP} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{PQ} = \overline{OP} \sin \theta = \sin \theta$$

$$\widehat{AP} = 1 \cdot \theta = \theta \text{ 이고, } \overline{PQ} < \widehat{AP} \text{ 이므로 } \sin \theta < \theta$$

ㄴ. 직각삼각형 POQ에서 $\overline{OP} = 1$ 이므로

$$\overline{OQ} = \overline{OP} \cos \theta = \cos \theta$$

$$\therefore \overline{PR} = \overline{OQ} = \cos \theta$$

$$\widehat{AB} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\widehat{BP} = \widehat{AB} - \widehat{AP} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

이때 $\overline{PR} < \widehat{BP}$ 이므로

$$\cos \theta < \frac{\pi}{2} - \theta \quad \therefore \theta + \cos \theta < \frac{\pi}{2}$$

ㄷ. $\overline{PQ} = \sin \theta$, $\overline{AQ} = \overline{OA} - \overline{OQ} = 1 - \cos \theta$ 이므로 직각
삼각형 APQ에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2}$$

$$= \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\cos \theta + 1}$$

$$= \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$$

이때 $\overline{PQ} < \widehat{AP}$ 이므로

$$\sin \theta < \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

16 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{3}{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{8}{25}$$

→ ①

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= 1 + 2\sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + \frac{16}{25} = \frac{41}{25} \end{aligned}$$

이때 θ 가 제1사분면의 각이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

→ ②

$$\begin{aligned} \therefore \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) \\ &= \frac{\sqrt{41}}{5} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{3\sqrt{41}}{25} \end{aligned}$$

→ ③

$$\text{답 } \frac{3\sqrt{41}}{25}$$

채점 기준	비율
① $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
② $\sin \theta + \cos \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

$$\begin{aligned} 17 \quad \tan^2 \theta - \sin^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) \\ &= \sin^2 \theta \cdot \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \sin^2 \theta \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= (\sin \theta \tan \theta)^2 \\ &= \left(-\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} \end{aligned}$$

답 ⑤

18 $\cos \theta = \sin^2 \theta$ 이므로

$$\cos^2 \theta + \cos \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\therefore \sin^8 \theta + 2\sin^6 \theta + 3\sin^4 \theta + 2\sin^2 \theta$$

$$= (\sin^2 \theta)^4 + 2(\sin^2 \theta)^3 + 3(\sin^2 \theta)^2 + 2\sin^2 \theta$$

$$= \cos^4 \theta + 2\cos^3 \theta + 3\cos^2 \theta + 2\cos \theta$$

$$= (\cos^4 \theta + 2\cos^3 \theta + \cos^2 \theta) + 2\cos^2 \theta + 2\cos \theta$$

$$= (\cos^2 \theta + \cos \theta)^2 + 2(\cos^2 \theta + \cos \theta)$$

$$= 1^2 + 2 \cdot 1$$

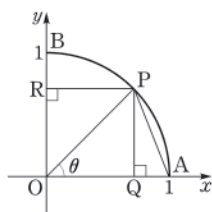
$$= 3$$

답 ③

θ 가 제1사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta > 0$$



일품 BOX

19 점 P의 좌표를 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 라 하면 직선 l의 방정식은

$$y - \sin \theta = -(x - \cos \theta)$$

$$\therefore y = -x + \sin \theta + \cos \theta$$

직선 l과 포물선 $y = x^2 + \frac{3}{4}$ 이 접하므로 이차방정식

$$-x + \sin \theta + \cos \theta = x^2 + \frac{3}{4},$$

$$\text{즉 } x^2 + x + \frac{3}{4} - \sin \theta - \cos \theta = 0$$

의 판별식을 D라 하면

$$D = 1^2 - 4\left(\frac{3}{4} - \sin \theta - \cos \theta\right) = 0$$

$$-2 + 4(\sin \theta + \cos \theta) = 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

답 $-\frac{3}{8}$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 가 접한다.

→ 이차방정식

$f(x)=g(x)$ 의 판별식을 D라 하면

$$D=0$$

$1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6$ 이므로

$$2 \leq a+b \leq 12$$

따라서 색칠한 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \pi$$

$$\text{이므로 } k = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 6k = 9$$

답 9

02 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로

$$2 \leq a+b \leq 12 \quad \therefore \frac{\pi}{3} \leq \frac{a+b}{6} \pi \leq 2\pi$$

이때 $\cos \frac{a+b}{6} \pi < 0$ 에서

$$\frac{\pi}{2} < \frac{a+b}{6} \pi < \frac{3}{2} \pi$$

$$\therefore 3 < a+b < 9$$

(i) $a+b=4$ 일 때, a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 3개

(ii) $a+b=5$ 일 때, a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ 의 4개

(iii) $a+b=6$ 일 때, a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개

(iv) $a+b=7$ 일 때, a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2),$

$(6, 1)$ 의 6개

(v) $a+b=8$ 일 때, a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ 의 5개

이상에서 x 가 음수가 되도록 하는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$3+4+5+6+5=23$$

답 23

03 $\angle POC = \theta$ 라 하면 $P(\cos \theta, \sin \theta)$

∴ $\overline{OC} = \cos \theta$ 이고, 직각삼각형 QOA에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} \text{이므로}$$

$$\overline{OQ} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\therefore \overline{OC} \cdot \overline{OQ} = \cos \theta \cdot \frac{1}{\cos \theta} = 1$$

$$\overline{RD} = \overline{BO} = 1$$

∴ $\overline{PC} = \sin \theta$ 이고, 직각삼각형 ROD에서 $\tan \theta = \frac{\overline{RD}}{\overline{OD}}$

이므로

$$\overline{OD} = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\therefore \overline{PC} \cdot \overline{OD} = \sin \theta \cdot \frac{1}{\tan \theta}$$

$$= \sin \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \cos \theta = \overline{OC}$$

∴ 직각삼각형 QOA에서 $\tan \theta = \frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}}$ 이므로

$$\overline{AQ} = \tan \theta$$

직각삼각형 ROD에서 $\sin \theta = \frac{\overline{RD}}{\overline{OR}}$ 이므로

$$\overline{OR} = \frac{1}{\sin \theta}$$

내신 · 수능

1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 44쪽

01 오른쪽 그림과 같이 직선

OC가 $\widehat{AB}$ 와 만나는 점을 D,

원의 중심 C에서 $\overline{OB}$ 에 내린

수선의 발을 E라 하고, 원 C의

반지름의 길이를 r 라 하자.

부채꼴 AOB의 반지름의 길이

를 R 라 하면 $\widehat{AB} = 3\pi$ 이므로

$$3\pi = R \cdot \frac{\pi}{3} \quad \therefore R = 9$$

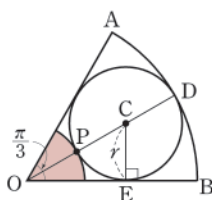
즉 $\overline{OD} = 9$ 이므로 $\overline{OC} = 9 - r$

직각삼각형 COE에서 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{CE}}{\overline{OC}}$ 이므로

$$\frac{1}{2} = \frac{r}{9-r}, \quad 9-r=2r$$

$$\therefore r=3$$

$$\therefore \overline{OP} = \overline{OC} - \overline{CP} = 6 - 3 = 3$$



$$\angle COE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AQ} \cdot \overline{OR} &= \tan \theta \cdot \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} = \overline{OQ}\end{aligned}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

1등급 비밀노트

길이가 1인 변을 포함하는 직각삼각형을 찾아 다른 변의 길이를 삼각함수로 나타낸다. 이때 삼각함수 사이의 관계를 이용하면 주어진 식을 간단히 할 수 있다.

04 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로 θ 는 제3사분면의 각이다.

ㄱ. θ 가 제3사분면의 각이므로 $\tan \theta > 0$

$$\therefore \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} > 0$$

ㄴ. θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 360^\circ \times \frac{n}{2} + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times \frac{n}{2} + 135^\circ$$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 135^\circ$$

즉 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각이므로

$$\cos \frac{\theta}{2} < 0$$

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 315^\circ$$

즉 $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각이므로

$$\cos \frac{\theta}{2} > 0$$

(i), (ii)에서 $\cos \frac{\theta}{2} < 0$ 또는 $\cos \frac{\theta}{2} > 0$

한편 $360^\circ \times 2n + 360^\circ < 2\theta < 360^\circ \times 2n + 540^\circ$, 즉 $360^\circ \times (2n + 1) < 2\theta < 360^\circ \times (2n + 1) + 180^\circ$ 이므로 2θ 는 제1사분면의 각 또는 제2사분면의 각 또는 $360^\circ \times m + 90^\circ$ (m 은 정수)이다.

$$\therefore \sin 2\theta > 0$$

$$\therefore \cos \frac{\theta}{2} \sin 2\theta < 0 \text{ 또는 } \cos \frac{\theta}{2} \sin 2\theta > 0$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan \theta + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta(1 + \sin \theta) + \cos^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} < 0\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

05 원점 O에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \sqrt{(3 \cos \alpha)^2 + (3 \sin \alpha)^2} \\ &= \sqrt{9(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} \\ &= \sqrt{9} = 3, \\ \overline{OQ} &= \sqrt{(5 \cos \beta)^2 + (5 \sin \beta)^2} \\ &= \sqrt{25(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)} \\ &= \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

이므로 두 점 P, Q는 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 각각 3, 5인 원 위의 점이다.

$\overline{PQ}$ 의 길이는 $\overline{PQ}$ 가 원점 O를 지날 때 최대이므로 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최댓값은

$$3 + 5 = 8$$

$\overline{PQ}$ 가 원점 O를 지날 때, 점 R과 직선 PQ 사이의 거리는

$\overline{OR} \perp \overline{PQ}$ 일 때 최대이므로 점 R과 직선 PQ 사이의 거리의 최댓값은 $\overline{OR}$ 의 길이와 같다.

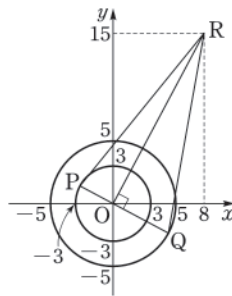
이때

$$\overline{OR} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$$

이므로 $\triangle PQR$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 17 = 68$$

답 68

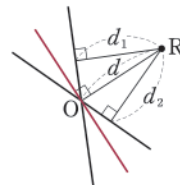


1등급 비밀노트

오른쪽 그림에서

$$d_1 < d, d_2 < d$$

이므로 점 R과 점 O를 지나는 임의의 직선 사이의 거리의 최댓값은 점 R로부터 $\overline{OR}$ 과 수직인 직선에 이르는 거리 d , 즉 두 점 O, R 사이의 거리와 같다.



06 $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$ 라 하면 주어진 등식은

$$y - kx - 3k + 1 = 0, \text{ 즉 } y + 1 = k(x + 3)$$

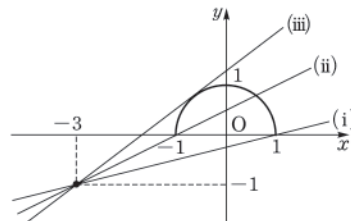
..... ㉠

또 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이고, $0 \leq \theta \leq \pi$ 에서 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ 이므로

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0)$$

..... ㉡

주어진 등식을 만족시키는 서로 다른 θ 의 개수는 직선 ㉠과 곡선 ㉡의 교점의 개수와 같다.



(i) 직선 ㉠이 점 (1, 0)을 지날 때,

$$1 = 4k \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(-1, 0)$ 을 지날 때,

$$1=2k \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

(iii) 직선 ㉠이 곡선 ㉡에 접할 때,

곡선 ㉡과 x 축으로 둘러싸인 반원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 ㉠ 사이의 거리가 반원의 반지름의 길이인 1과 같으므로

$$\frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$$

$$|3k-1|=\sqrt{k^2+1}$$

$$(3k-1)^2=k^2+1, \quad 8k^2-6k=0$$

$$2k(4k-3)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=\frac{3}{4}$$

그런데 $k=0$ 이면 직선 ㉠과 곡선 ㉡은 만나지 않으므로

$$k=\frac{3}{4}$$

이상에서 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{4} \leq k < \frac{1}{2} \text{ 또는 } k=\frac{3}{4}$$

따라서 $a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{3}{4}$ 이므로

$$a+b+c=\frac{3}{2}$$

답 ②

$$\begin{aligned} y-kx-3k+1=0 \text{에서} \\ kx-y+3k-1=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y=\sin x \text{의 그래프는 원점에} \\ \text{대하여 대칭이므로} \\ \sin(-\pi x-4\pi) \\ =\sin\{-(\pi x+4\pi)\} \\ =-\sin(\pi x+4\pi) \end{aligned}$$

06 삼각함수의 그래프

개념 & 핵심 기술

본책 45쪽

01 ③ $y=2\sin(\pi x-4\pi)=2\sin\pi(x-4)$ 의 그래프는 $y=2\sin\pi x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행 이동한 것이다.

④ 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$ 이다.

⑤ $f(x)=2\sin(\pi x-4\pi)$ 라 하면

$$f(-x)=2\sin(-\pi x-4\pi)$$

$$=-2\sin(\pi x+4\pi)$$

$$=-f(x+8)$$

이때 함수 $f(x)$ 의 주기가 2이므로

$$f(x+8)=f(x+6)=f(x+4)$$

$$=f(x+2)=f(x)$$

$$\therefore f(-x)=-f(x+8)=-f(x)$$

따라서 $y=2\sin(\pi x-4\pi)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

답 ③

02 주어진 그림에서 함수의 주기가 $\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$ 이

고 $a>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{a}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore a=4$$

따라서 $y=\cos 4(x+b)+1$ 의 그래프가 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$\cos 4b+1=0 \quad \therefore \cos 4b=-1$$

$0 < b < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < 4b < 2\pi$ 이므로

$$4b=\pi \quad \therefore b=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore ab=\pi$$

답 π

03 ㄱ. $f(-x)=-x\tan(-x)=x\tan x=f(x)$

ㄴ. $f(-x)=\sin(-x)+\tan(-x)=-\sin x-\tan x$

$$=-(\sin x+\tan x)=-f(x)$$

ㄷ. $f(-x)=\cos(-x)|\tan(-x)|=\cos x|-\tan x|$

$$=\cos x|\tan x|=f(x)$$

이상에서 구하는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

1등급 비밀노트

기함수와 우함수

① 기함수: 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키는 함수

→ 그래프가 원점에 대하여 대칭이다.

예 $y=\sin x, y=\tan x, y=x$

② 우함수: 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 를 만족시키는 함수

→ 그래프가 y 축에 대하여 대칭이다.

예 $y=\cos x, y=x^2$

04 주어진 그림에서 함수의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = \pm 2$$

$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$a < 0 \quad \therefore a = -2 \quad \text{답 ②}$$

05 ㄱ. $\sin 203^\circ = \sin(180^\circ + 23^\circ) = -\sin 23^\circ$ 이므로

$$\sin 23^\circ + \sin 203^\circ = \sin 23^\circ - \sin 23^\circ = 0$$

ㄴ. $\cos 337^\circ = \cos(360^\circ - 23^\circ) = \cos 23^\circ$ 이므로

$$\cos 23^\circ + \cos 337^\circ = \cos 23^\circ + \cos 23^\circ = 2\cos 23^\circ$$

ㄷ. $\tan 517^\circ = \tan(540^\circ - 23^\circ) = -\tan 23^\circ$ 이므로

$$\tan 23^\circ + \tan 517^\circ = \tan 23^\circ - \tan 23^\circ = 0$$

이상에서 계산한 값이 0인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 0° < 23° < 90°이므로
0 < cos 23° < 1
540° = 90° × 6 답 ④

06 $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

$$= -\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta) = \frac{32}{15} \quad \text{답 } \frac{32}{15}$$

07 (주어진 식)

$$= -\frac{\sin(\pi + \theta)}{\sin(2\pi - \theta)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos(\pi + \theta)}$$

$$= -\tan\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)\tan(\pi + \theta)$$

$$= -\frac{-\sin \theta}{-\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{-\cos \theta} - \frac{1}{\tan \theta} \cdot \tan \theta$$

$$= -1 + 1 - 1 = -1 \quad \text{답 } -1$$

08 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) + 1$

$$= \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left\{\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\} + 1$$

$$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \quad \text{sin}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi$ 이므로 주어진 함수

는 $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 즉 $x = \frac{3}{4}\pi$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.

따라서 $a = \frac{3}{4}\pi$, $b = 3$ 이므로

$$ab = \frac{9}{4}\pi \quad \text{답 ④}$$

09 $y = (\sin x + a)^2 + \cos^2 x$

$$= \sin^2 x + 2a \sin x + a^2 + 1 - \sin^2 x$$

$$= 2a \sin x + a^2 + 1$$

$\cos x = 0$ 이면 $\sin^2 x = 1$
이므로 주어진 방정식은
 $3 = 1$
이 되어 해가 존재하지 않
는다.

$-1 \leq \sin x \leq 1$, $a > 0$ 이므로

$$a^2 - 2a + 1 \leq 2a \sin x + a^2 + 1 \leq a^2 + 2a + 1$$

주어진 함수의 최댓값이 16이므로

$$a^2 + 2a + 1 = 16, \quad a^2 + 2a - 15 = 0$$

$$(a+5)(a-3) = 0 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

따라서 주어진 함수의 최솟값은

$$a^2 - 2a + 1 = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4 \quad \text{답 4}$$

10 $y = \cos^2 x - 2\sin^2 x + 6\cos(\pi + x)$

$$= \cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) - 6\cos x$$

$$= 3\cos^2 x - 6\cos x - 2$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = 3t^2 - 6t - 2 = 3(t-1)^2 - 5$$

이므로 $t = -1$ 일 때 최댓값 7, $t = 1$ 일 때 최솟값 -5를 갖는다.

따라서 $M = 7$, $m = -5$ 이므로

$$M - m = 12 \quad \text{답 ②}$$

11 $\left|\tan x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} = 0$ 에서

$$\left|\tan x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \quad \tan x - \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan x = 0 \text{ 또는 } \tan x = 1$$

(i) $\tan x = 0$ 일 때,

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } x = 0$$

(ii) $\tan x = 1$ 일 때,

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } x = \frac{\pi}{4}$$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$$0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{답 ④}$$

12 $4\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x = 3$ 에서

$$4\cos^2 x = 3, \quad \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leq x < \pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$2\beta - \alpha = 2 \cdot \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi \quad \text{답 ④}$$

13 $\cos x \neq 0$ 이고 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 이므로

$$2\cos x \tan x + 3\sin^2 x = 1 \text{에서}$$

$$2\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 3\sin^2 x = 1$$

$$3\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x + 1)(3\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{3}$$

그런데 $\sin x = -1$ 이면 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 0$ 에서

$\cos x = 0$ 이므로 $\sin x = \frac{1}{3}$ 이다.

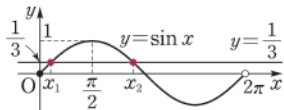
오른쪽 그림과 같이

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{1}{3}$ 의 교점의 x 좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2 라 하면

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore x_1 + x_2 = \pi$$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 π 이다.



답 π

14 $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 \geq 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 \geq 0$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 \leq 0$$

$$\therefore (2\sin x - 1)(\sin x - 2) \leq 0$$

이때 $\sin x - 2 < 0$ 이므로

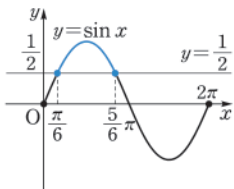
$$2\sin x - 1 \geq 0$$

$$\therefore \sin x \geq \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 x 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{답 } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$



15 $2\cos^4 x - \cos^3 x > 0$ 에서

$$\cos^3 x (2\cos x - 1) > 0$$

이때 $\cos^2 x \geq 0$ 이므로

$$\cos x \neq 0, \cos x (2\cos x - 1) > 0$$

$$\therefore \cos x < 0 \text{ 또는 } \cos x > \frac{1}{2}$$

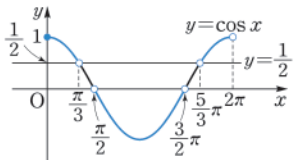
오른쪽 그림에서 x 의 값의 범위는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 }$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ 또는 }$$

$$\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$$

따라서 주어진 부등식의 해가 될 수 없는 것은 ②이다.



답 ②

16 $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서

$-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$ 이고 주어진 부등식은

$$-\frac{1}{2} \leq \sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$y = \sin x$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

$-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $-3 \leq \sin x - 2 \leq -1$

$$\frac{\pi}{3} < \frac{5}{12}\pi < \frac{\pi}{2}$$

$-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로 $-\frac{\pi}{6} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$

오른쪽 그림에서 t 의 값의 범위는

$$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 }$$

$$\frac{2\pi}{3} < t \leq \frac{5\pi}{6}$$

이므로

$$-\frac{\pi}{6} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 }$$

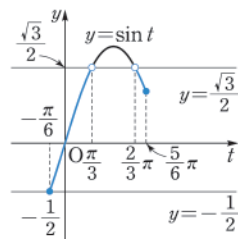
$$\frac{2\pi}{3} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore -\pi \leq x < 0 \text{ 또는 } \frac{2\pi}{3} < x \leq \pi$$

따라서 $a = -\pi, b = 0, c = \frac{2\pi}{3}, d = \pi$ 이므로

$$b - a + d - c = \frac{4}{3}\pi$$

답 ③

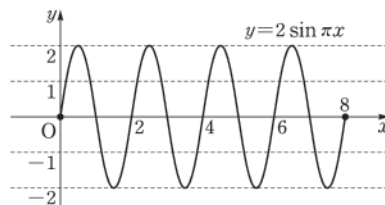


1등급을 위한 고난도 문제

본책 48쪽

01 $-2 \leq 2\sin \pi x \leq 2$ 이므로 함수 $y = 2\sin \pi x$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이고 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이다. ... ①

따라서 $0 \leq x \leq 8$ 에서 $y = 2\sin \pi x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 y 좌표가 정수이므로 y 좌표가 될 수 있는 값은

$$-2, -1, 0, 1, 2$$

$y = 2\sin \pi x$ 의 그래프와 두 직선 $y = 2, y = -2$ 의 교점의 개수는

$$4 \cdot 2 = 8$$

$y = 2\sin \pi x$ 의 그래프와 두 직선 $y = 1, y = -1$ 의 교점의 개수는

$$8 \cdot 2 = 16$$

$y = 2\sin \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = 0$ 의 교점의 개수는

$$9$$

이므로 y 좌표가 정수인 점의 개수는

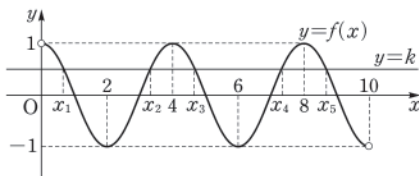
$$8 + 16 + 9 = 33$$

... ③

답 33

채점 기준	비율
① 함수 $y = 2\sin \pi x$ 의 최댓값, 최솟값, 주기를 구할 수 있다.	30%
② 함수 $y = 2\sin \pi x$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	30%
③ y 좌표가 정수인 점의 개수를 구할 수 있다.	40%

02 함수 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 4이므로 $0 < x < 10$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ ($0 < k < 1$)는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표는 위의 그림과 같이 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 이므로
 $n=5$

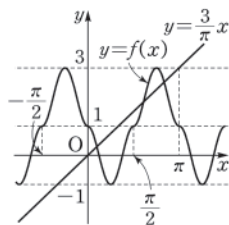
ㄴ. $\frac{x_2+x_3}{2}=4, \frac{x_4+x_5}{2}=8$ 이므로
 $x_2+x_3=8, x_4+x_5=16$
 $\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1+8+16$
 $=x_1+24$
 >24 ($\because x_1>0$)

ㄷ. $\frac{x_1+x_2}{2}=2$ 이므로
 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f(2)=\cos \pi=-1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

03 조건 (가)에서 $f(x)$ 는 주기가 π 인 주기함수이므로 주어진 조건을 만족시키는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{\pi}x$ 는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $y=f(x)$ 의 그래프와



직선 $y=\frac{3}{\pi}x$ 의 교점의 개수는 3이다.

답 3

04 $t=20$ 일 때 $T=120$ 이므로

$$A+k\sin \frac{\pi}{6}=A+\frac{k}{2}=120 \quad \dots\dots ㉠$$

$t=60$ 일 때 $T=140$ 이므로

$$A+k\sin \frac{\pi}{2}=A+k=140 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=100, k=40$

따라서 4시간 40분, 즉 280분 후의 실험실의 밝기는

$$\begin{aligned} 100+40\sin \frac{7}{3}\pi &=100+40\sin \left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right) \\ &=100+40\sin \frac{\pi}{3} \\ &=100+20\sqrt{3} \text{ (lux)} \end{aligned}$$

답 $(100+20\sqrt{3})$ lux

05 $y=\tan \frac{\pi}{2a}x$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$\frac{\pi}{2a}x=n\pi+\frac{\pi}{2} \text{에서}$$

$$x=(2n+1)a \text{ (} n \text{은 정수)}$$

$$x=a, x=3a, x=5a, x=7a, \dots$$

$$\frac{2\pi}{2}=4$$

$y=\cos \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프는 두 직선 $x=4, x=8$ 에 대하여 각각 대칭이다.

$y=\cos \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프는 직선 $x=20$ 에 대하여 대칭이다.

$y>3$ 또는 $y<-10$ 이면 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{\pi}x$ 는 만나지 않는다.

$$\tan \left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan \frac{\pi}{4}=-1$$

즉 $x>0$ 에서 $y=\tan \frac{\pi}{2a}x$ 의 그래프의 점근선 중 원점까지의 거리가 세 번째로 가까운 점근선의 방정식은

$$x=5a \quad \dots\dots ㉠$$

한편 $y=2^{x-1}+2b$ 에서 $y-2b=2^{x-1}$

$$x-1=\log_2(y-2b) \quad \therefore x=\log_2(y-2b)+1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\log_2(x-2b)+1$

$y=\log_2(x-2b)+1$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=2b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 서로 일치하므로

$$5a=2b \quad \therefore \frac{b}{a}=\frac{5}{2}$$

답 ③

06 $a>0$ 이므로 주어진

조건을 모두 만족시키는

$y=f(x)$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같다.

$f(x)$ 는 주기가 2인 주기

함수이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b}=2 \quad \therefore b=\frac{\pi}{2}$$

→ ①

또 $f(1)=0$ 이므로 $a \tan(b+c)=0$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2}+c\right)=0 \quad (\because a>0)$$

이때 $-2< c < -1$ 에서 $\frac{\pi}{2}-2 < \frac{\pi}{2}+c < \frac{\pi}{2}-1$ 이므로

$$\frac{\pi}{2}+c=0 \quad \therefore c=-\frac{\pi}{2}$$

→ ②

따라서 $f(x)=a \tan \left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$ 이고 조건 (다)에서

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-3 \text{이므로}$$

$$a \tan \left(-\frac{\pi}{4}\right)=-3 \quad \therefore a=3$$

→ ③

$$\therefore a+b+c=3$$

→ ④

답 3

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	30%
② c 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20%
④ $a+b+c$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

참고 $\frac{\pi}{2}-2-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi-2>0$ 이므로

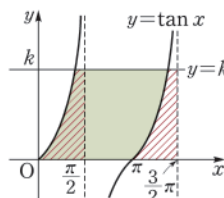
$$\frac{\pi}{2}-2>-\frac{\pi}{2} \quad \therefore -\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-2<\frac{\pi}{2}-1<\frac{\pi}{2}$$

07 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같고 색칠한 부분의 넓이는 3π 이므로

$$\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)k=3\pi$$

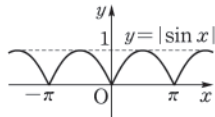
$$k\pi=3\pi \quad \therefore k=3$$

답 3

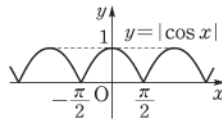


일품 BOX

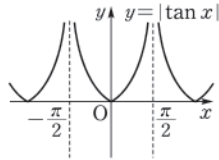
08 ㄱ. $y = |\sin x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기가 π 인 주기함수이다.



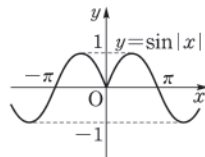
ㄴ. $y = |\cos x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기가 π 인 주기함수이다.



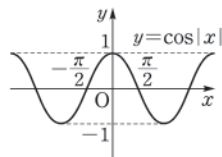
ㄷ. $y = |\tan x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기가 π 인 주기함수이다.



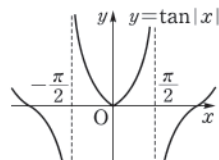
ㄹ. $y = \sin |x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기함수가 아니다.



ㅁ. $y = \cos |x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기가 2π 인 주기함수이다.



ㅂ. $y = \tan |x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기함수가 아니다.



이상에서 주기함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ의 4개이다.

답 ③

1등급 비밀노트

절댓값 기호를 포함한 식의 그래프 그리는 방법

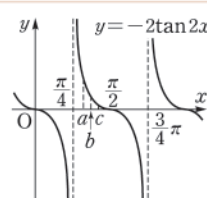
① $y = |f(x)|$ 의 그래프

$y = f(x)$ 의 그래프를 그린 후 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한다.

② $y = f(|x|)$ 의 그래프

$y = f(x)$ 의 그래프를 그린 후 $x \geq 0$ 인 부분만 남기고, $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동한다.

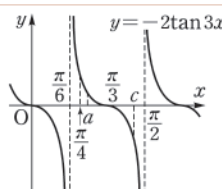
09 ㄱ. $y = -2 \tan 2x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(a) > 0, f(b) > 0, f(c) > 0$ 이므로

$$f(a) + f(b) + f(c) > 0$$

ㄴ. $y = -2 \tan 3x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $f(a) > f(b) > f(c)$ 이므로

$$f(a) + f(b) + f(c) = 0 \text{ 이면}$$

점근선의 방정식은

$$x = \frac{2n+1}{12}\pi$$

(n 은 정수)

$$\frac{b+c}{2} = \frac{5}{12}\pi \text{이고,}$$

$y = -2 \tan 6x$ 의 그래프는 점 $(\frac{5}{12}\pi, 0)$ 에 대하여

여대칭이므로

$$f(b) + f(c) = 0$$

$$\textcircled{1} \sin(-x) = -\sin x$$

$$\textcircled{2} \cos(-x) = \cos x$$

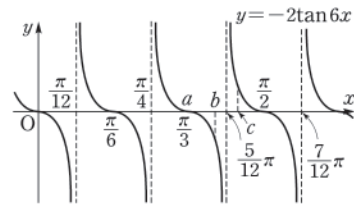
$$\textcircled{3} \tan(-x) = -\tan x$$

$$f(a) > 0, f(b) \geq 0, f(c) < 0 \text{ 또는}$$

$$f(a) > 0, f(b) \leq 0, f(c) < 0$$

$$\therefore f(a) > 0$$

ㄷ. $y = -2 \tan 6x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{6}$ 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$$[\text{반례}] a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{7}{18}\pi, c = \frac{4}{9}\pi \text{이면}$$

$$f(a) + f(b) + f(c) = 0, 2b = a + c$$

이지만 $b \neq \frac{\pi}{3}$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

$$10 \text{ ㄱ. } f(x) = \sin \pi(\pi x - 1) = \sin(\pi^2 x - \pi) \\ = -\sin(\pi - \pi^2 x) = -\sin \pi^2 x$$

이므로

$$f(-x) = -\sin \pi^2(-x) = \sin \pi^2 x \\ = -f(x)$$

$$\text{ㄴ. } f(x) = \cos \pi\left(x - \frac{1}{2}\right) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \\ = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) = \sin \pi x$$

이므로

$$f(-x) = \sin \pi(-x) = -\sin \pi x \\ = -f(x)$$

$$\text{ㄷ. } f(-x) = \left| \tan \frac{\pi}{2}(-x) \right| = \left| -\tan \frac{\pi}{2} x \right| \\ = \left| \tan \frac{\pi}{2} x \right| = f(x)$$

이상에서 구하는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

$$11 \overline{OA} \text{와 } \overline{OD} \text{는 } y \text{축에 대하여 대칭이므로} \\ \theta + \alpha = \pi \quad \therefore \alpha = \pi - \theta$$

직각삼각형 OBC에서

$$\overline{OC} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}$$

이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin \alpha = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta = \frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

12 $\overline{AB}$ 가 반원 O의 지름이므로

$$\angle APB = \frac{\pi}{2}$$

$$\triangle ABP \text{에서 } \alpha + \beta = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

→ ①

$$\begin{aligned}\therefore \sin(4\alpha+3\beta) &= \sin\{3(\alpha+\beta)+\alpha\} \\ &= \sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) \\ &= -\cos\alpha = -\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}} \\ &= -\frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}} \\ &= -\frac{3\sqrt{13}}{13}\end{aligned}$$

$$\text{답} -\frac{3\sqrt{13}}{13} \quad \cdots 2$$

채점 기준	비율
① $\alpha+\beta$ 의 크기를 구할 수 있다.	30%
② $\sin(4\alpha+3\beta)$ 의 값을 구할 수 있다.	70%

13 □ABCD가 정사각형이므로

$$\angle AOB = \angle AOD = \frac{\pi}{2}, \angle AOC = \pi$$

$$\therefore \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha, \gamma = \pi + \alpha, \delta = \frac{3}{2}\pi + \alpha$$

$$\begin{aligned}\neg. \sin\alpha + \sin\gamma &= \sin\alpha + \sin(\pi + \alpha) \\ &= \sin\alpha - \sin\alpha = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg. \cos\beta + \cos\delta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) \\ &= -\sin\alpha + \sin\alpha = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg. \tan\alpha - \tan\delta &= \tan\alpha - \tan\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) \\ &= \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}\end{aligned}$$

이때 $\tan\alpha > 0$, $\frac{1}{\tan\alpha} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} \geq 2\sqrt{\tan\alpha \cdot \frac{1}{\tan\alpha}} = 2$$

(단, 등호는 $\tan\alpha=1$ 일 때 성립)

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ②

14 $y=0$ 을 $y=\log_3(x+3)-2$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}0 &= \log_3(x+3) - 2, \quad \log_3(x+3) = 2 \\ x+3 &= 9 \quad \therefore x=6 \quad \therefore A(6, 0)\end{aligned}$$

$x=0$ 을 $y=\log_3(x+3)-2$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}y &= \log_3 3 - 2 = 1 - 2 = -1 \\ \therefore B(0, -1)\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AB}$ 를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 6}{2+1}, \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{2+1}\right), \text{ 즉 } \left(2, -\frac{2}{3}\right) \cdots 1$$

$$\text{이때 } \overline{OP} = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{3} \text{이므로}$$

$$\sin\theta = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{10}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\frac{2\sqrt{10}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \cdots 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos(\pi - \theta) &+ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin(\pi + \theta) \\ &= \cos\theta(-\cos\theta) - \sin\theta(-\sin\theta) \\ &= -\cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= -\frac{9}{10} + \frac{1}{10} = -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

$\cdots 3$

$$\text{답} -\frac{4}{5}$$

채점 기준	비율
① 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30%
② $\sin\theta, \cos\theta$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40%

15 $y = a^2 \sin x + (a+1) \cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) + b$

$$\begin{aligned}&= a^2 \sin x + (a+1) \sin x + b \\ &= (a^2 + a + 1) \sin x + b\end{aligned}$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ 이고 $a^2 + a + 1 > 0$ 이므로

$$-a^2 - a - 1 + b \leq y \leq a^2 + a + 1 + b$$

주어진 함수의 최댓값이 8, 최솟값이 -6이므로

$$a^2 + a + 1 + b = 8 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-a^2 - a - 1 + b = -6 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $2b = 2$

$$\therefore b = 1$$

$b=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$a^2 + a - 6 = 0, \quad (a+3)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -3 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore a + b = -2$$

답 ③

16 $\overline{OP} = r (r > 0)$ 라 하고 직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$ 라 하면

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

이것을 $4x^2 + y^2 = (x^2 + y^2)^2$ 에 대입하면

$$4(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = \{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2\}^2$$

$$4r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^2$$

$$4r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^4 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2$$

$$4r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^4$$

$$4(1 - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta = r^2$$

$$\therefore r^2 = -3 \sin^2 \theta + 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore y^2 = (r \sin \theta)^2 = r^2 \sin^2 \theta$$

$$= (-3 \sin^2 \theta + 4) \sin^2 \theta$$

$$= -3 \sin^4 \theta + 4 \sin^2 \theta$$

$\sin^2 \theta = t$ 로 놓으면 $0 \leq t \leq 1$ 이고

$$y^2 = -3t^2 + 4t = -3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$

이므로 $t = \frac{2}{3}$, 즉 $\sin^2 \theta = \frac{2}{3}$ 일 때 최댓값 $\frac{4}{3}$ 를 갖는다.

즉 점 P의 y좌표는 $\sin^2 \theta = \frac{2}{3}$ 일 때 최댓값 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 을 가지므로 이때의 $\overline{OP}$ 의 길이는 $\textcircled{1}$ 에서

α 는 제1사분면의 각이므로

$$\tan\alpha > 0$$

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{1}{\tan\alpha} \text{에서} \\ \tan^2\alpha &= 10 \text{이므로} \\ \tan\alpha &= 1\end{aligned}$$

($\because \tan\alpha > 0$)

$r > 0$ 에서 $r^2 \neq 0$ 이므로 양변을 r^2 으로 나눌 수 있다.

일품 BOX

$$r = \sqrt{-3\sin^2\theta + 4} = \sqrt{-3 \cdot \frac{2}{3} + 4} = \sqrt{2} \quad \text{답 ②}$$

참고 $\overline{OP}=0$ 일 때, $P(0, 0)$
즉 점 P의 y좌표가 최대가 아니다.

17 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $\cos x \neq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= \frac{3\cos x + 2\sin x}{2\cos x - \sin x} = \frac{3 + \frac{2\sin x}{\cos x}}{2 - \frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \frac{3 + 2\tan x}{2 - \tan x} = \frac{-2(2 - \tan x) + 7}{2 - \tan x} \\ &= -2 + \frac{7}{2 - \tan x} \end{aligned}$$

$\tan x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -2 + \frac{7}{2-t}$$

오른쪽 그림에서 주어진 함수는

$t=1$ 일 때 최댓값 5,

$t=0$ 일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$

을 가지므로 치역은

$$\left\{ y \mid \frac{3}{2} \leq y \leq 5 \right\}$$

따라서 $a = \frac{3}{2}$, $b = 5$ 이므로

$$2a - b = 2 \cdot \frac{3}{2} - 5 = -2$$

→ ①

→ ②

→ ③

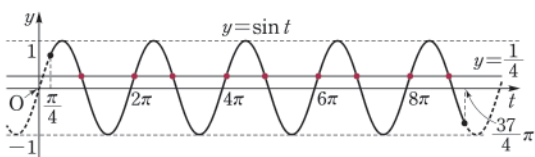
답 -2

채점 기준	비율
① 주어진 함수를 한 종류의 삼각함수의 식으로 변형할 수 있다.	40%
② 주어진 함수의 치역을 구할 수 있다.	40%
③ $2a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

18 $3x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq 3\pi$ 에서 $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{37}{4}\pi$ 이고 주어진 방정식은

$$4\sin t = 1 \quad \therefore \sin t = \frac{1}{4}$$

방정식 $\sin t = \frac{1}{4}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{4}$ 의 교점의 개수와 같다.



위의 그림과 같이 $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{37}{4}\pi$ 에서 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{4}$ 의 교점의 개수는 9이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 9이다. **답 ④**

$$\begin{aligned} r^2 &= -3\sin^2\theta + 4 \text{에서} \\ r &> 0 \text{이므로} \\ r &= \sqrt{-3\sin^2\theta + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{일 때,} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{접근선의 방정식은} \\ t=2, y=-2 \end{aligned}$$

두 함수 $y = \tan x$,
 $y = \sin 2x$ 의 그래프는 모
두 점 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에 대하여
대칭이다.

1등급 비밀노트

- 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.
- 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수와 같다.

19 $\tan x - \sin 2x = 0$ 에서
 $\tan x = \sin 2x$

방정식 $\tan x = \sin 2x$ 의 실근은 $y = \tan x$, $y = \sin 2x$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

오른쪽 그림과 같이 $0 < x < \pi$

에서 두 함수 $y = \tan x$,

$y = \sin 2x$ 의 그래프의 교점

의 x 좌표를 작은 것부터 차례

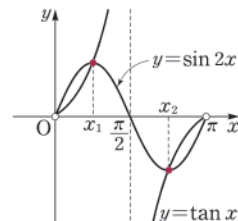
대로 x_1, x_2 라 하면

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \pi$$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 π 이다.

답 ②



20 $2\sin^2 x + \cos x = a$ 에서

$$2(1 - \cos^2 x) + \cos x = a$$

$$\therefore -2\cos^2 x + \cos x + 2 = a$$

→ ①

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 방정식은

$$-2t^2 + t + 2 = a$$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y = -2t^2 + t + 2$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점이 존재해야 한다.

→ ②

이때

$$\begin{aligned} y &= -2t^2 + t + 2 \\ &= -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{8} \end{aligned}$$

이므로 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

$$-1 \leq a \leq \frac{17}{8} \quad \rightarrow ③$$

즉 $M = \frac{17}{8}$, $m = -1$ 이므로

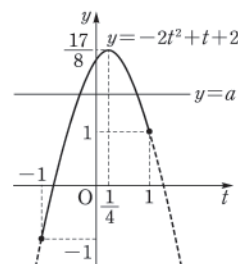
$$M + m = \frac{9}{8}$$

따라서 $p = 8$, $q = 9$ 이므로

$$p + q = 17$$

→ ④

답 17



채점 기준	비율
① 주어진 방정식을 한 종류의 삼각함수의 식으로 변형할 수 있다.	20%
② 주어진 방정식이 실근을 가질 조건을 구할 수 있다.	20%
③ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
④ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

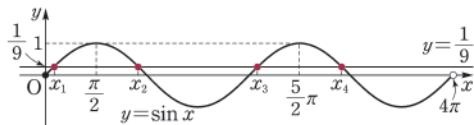
21 $\log_4 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{3}$ 에서

$$\log_4 \sin x = \log_4 \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{9}$$

방정식 $\sin x = \frac{1}{9}$ 의 실근은 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{1}{9}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



위의 그림과 같이 $0 \leq x < 4\pi$ 에서 $y = \sin x$ 의 그래프와

직선 $y = \frac{1}{9}$ 의 교점의 x 좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1 ,

x_2, x_3, x_4 라 하면

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \pi, \quad x_3 + x_4 = 5\pi$$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\pi$$

답 ⑤

22 점 B의 좌표는 $(-\cos \theta, -\sin \theta)$ 이고 두 점 A, B가 포물선 $y = x^2 + ax + b$ 위의 점이면

$$\sin \theta = \cos^2 \theta + a \cos \theta + b \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-\sin \theta = \cos^2 \theta - a \cos \theta + b \quad \dots \textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$2 \sin \theta = 2a \cos \theta \quad \therefore a = \tan \theta$$

①+②을 하면

$$0 = 2 \cos^2 \theta + 2b \quad \therefore b = -\cos^2 \theta$$

$$\therefore y = x^2 + ax + b$$

$$= x^2 + x \tan \theta - \cos^2 \theta$$

$$= \left(x + \frac{1}{2} \tan \theta\right)^2 - \frac{1}{4} \tan^2 \theta - \cos^2 \theta$$

즉 포물선의 꼭짓점의 y 좌표는

$$-\frac{1}{4} \tan^2 \theta - \cos^2 \theta = -\frac{1}{4} (\tan^2 \theta + 4 \cos^2 \theta)$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 4 \cos^2 \theta \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 4 \cos^2 \theta \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} + 4 \cos^2 \theta \right)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\frac{1}{\cos^2 \theta} > 0$, $4 \cos^2 \theta > 0$ 이므로 산술평균

과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} + 4 \cos^2 \theta \right)$$

$$\leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot 4 \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 = -\frac{3}{4}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= \sin x$$

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$\cos^2 \theta = \pm \frac{1}{2}$$

0이때 $\cos^2 \theta > 0$ 이므로

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

이때 등호는 $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 4 \cos^2 \theta$ 일 때 성립하므로

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{4}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

따라서 포물선의 꼭짓점의 y 좌표는 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때 최댓값

$-\frac{3}{4}$ 을 가지므로

$$p = \frac{\pi}{4}, \quad q = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore pq = -\frac{3}{16} \pi$$

답 ③

23 오른쪽 그림에서 $\tan x < 1$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \quad \text{또는}$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{4} \pi \quad \text{또는}$$

$$\frac{3}{2} \pi < x < 2\pi$$

..... ㉠

또 $|\cos x| < \frac{1}{2}$ 에서

$$-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서

$-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$ 을 만

족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3} \pi \quad \text{또는}$$

$$\frac{4}{3} \pi < x < \frac{5}{3} \pi$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3} \pi \quad \text{또는} \quad \frac{3}{2} \pi < x < \frac{5}{3} \pi$$

따라서 주어진 연립부등식의 해가 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

24 주어진 이차방정식의 두 실근을 α, β 라 하면 이차 방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{\sin \theta}{2}, \quad \alpha \beta = \frac{2 \cos \theta + 1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $\alpha + \beta > 0$ 이므로

$$\frac{\sin \theta}{2} > 0, \quad \sin \theta > 0$$

$$\therefore 0 < \theta < \pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi) \quad \dots \textcircled{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

또 $\alpha \beta < 0$ 이므로

$$\frac{2 \cos \theta + 1}{2} < 0, \quad \cos \theta < -\frac{1}{2}$$

점의 대칭이동

점 (x, y) 를 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭 이동한 점의 좌표는 다음과 같다.

① x 축 $\Rightarrow (x, -y)$

② y 축 $\Rightarrow (-x, y)$

③ 원점 $\Rightarrow (-x, -y)$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \theta > 0$

이므로 $2 \sin \theta = 2a \cos \theta$ 에서

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = a$$

$$\therefore a = \tan \theta$$

양수인 근이 음수인 근의

절댓값보다 크므로

(두 근의 합) > 0

두 근의 부호가 다르므로

(두 근의 곱) < 0

$$\therefore \frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi) \quad \cdots \textcircled{C} \quad \rightarrow 3$$

⑦, ⑨의 공통 범위를 구하면

$$\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi \quad \rightarrow 4$$

$$\text{답 } \frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$$

채점 기준	비율
① 주어진 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.	20%
② 두 근의 합의 조건을 만족시키는 θ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
③ 두 근의 곱의 조건을 만족시키는 θ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
④ θ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

내신 + 수능

1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 52쪽

01 $y = \sin \frac{x}{2}$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \text{이므로}$$

$y = \sin \frac{x}{2}$ 의 그래프와 두

직선 $x = \pi$, $y = -1$ 로

둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.

이때 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는

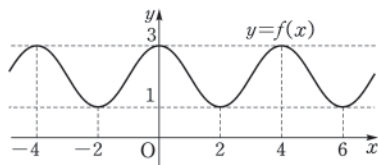
$$\{\pi - (-\pi)\} \cdot 1 = 2\pi$$

답 ②

02 함수 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x + 2$ 의 최댓값은 3, 최솟값은

1이고, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음

그림과 같다.

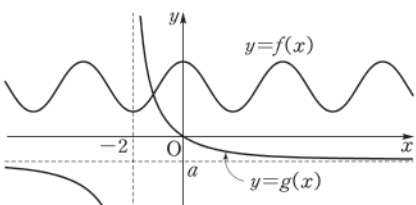


$g(x) = \frac{ax}{x+2} = -\frac{2a}{x+2} + a$ 이므로 $y = g(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -2, y = a$$

(i) $a < 0$ 일 때,

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 한 점에서 만난다.



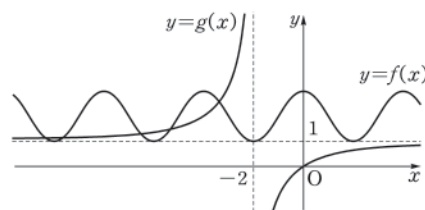
$y = \sin \frac{x}{2}$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned} \frac{ax}{x+2} &= \frac{a(x+2)-2a}{x+2} \\ &= -\frac{2a}{x+2} + a \end{aligned}$$

$1 \leq a \leq 3$ 일 때 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 무수히 많은 점에서 만난다.

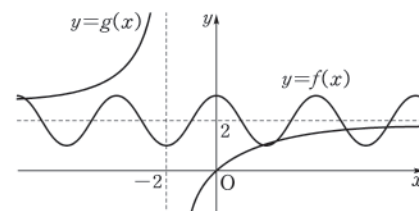
(ii) $a = 1$ 일 때,

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 무수히 많은 점에서 만난다.



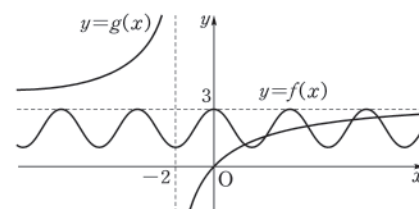
(iii) $a = 2$ 일 때,

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 무수히 많은 점에서 만난다.



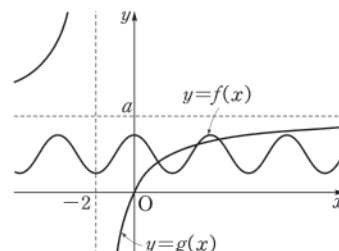
(iv) $a = 3$ 일 때,

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 무수히 많은 점에서 만난다.



(v) $a > 3$ 일 때,

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 유한개의 점에서 만난다.



이상에서 정수 a 는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 3 = 6$$

답 6

03 $a > 0, b > 0$ 이므로 $v = a \sin b\pi t$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$

이고, 최댓값은 a , 최솟값은 $-a$ 이다.

이때 v 의 최댓값이 0.8이므로

$$a = 0.8$$

또 1회의 호흡을 하는 데 걸리는 시간, 즉 호흡의 주기는

$$\frac{60}{12} = 5 \text{ (초)}$$

이므로

$$\frac{2}{b} = 5 \quad \therefore b = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 2$$

답 2

04 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 두 점 $(1, 0)$, $(3, 0)$ 에서 만나므로 두 점 A, C는 점 $(1, 0)$ 에 대하여 대칭이고, 두 점 B, D는 점 $(3, 0)$ 에 대하여 대칭이다.

네 점 A, B, C, D의 x 좌표를 각각 a, b, c, d 라 하면

$$\frac{a+c}{2} = 1, \quad \frac{b+d}{2} = 3$$

$$\therefore c = 2 - a, \quad d = 6 - b$$

이때 $\square ACDB$ 는 사다리꼴이므로

$$\begin{aligned} \square ACDB &= \frac{1}{2} \cdot \{(b-a) + (d-c)\} \cdot 2k \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{b-a+6-b-(2-a)\} \cdot 2k \\ &= 4k \end{aligned}$$

즉 $4k=4$ 이므로 $k=1$

$$\therefore f(k) = f(1) = 2\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

답 0

참고 $2\cos \frac{\pi}{2}x = 0$ 에서 $\cos \frac{\pi}{2}x = 0$

$0 \leq x < 4$ 에서 $0 \leq \frac{\pi}{2}x < 2\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2}x = \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 두 점 $(1, 0)$, $(3, 0)$ 에서 만난다.

05 $\neg$, $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-3 \leq 2\sin x - 1 \leq 1$$

따라서 함수 $f_1(x)$ 의 최솟값은 -3 이다.

$\neg$, $f_2(x) = |2\sin x - 1| - 1$ 이므로 $f_2(x) = 0$ 에서

$$|2\sin x - 1| - 1 = 0$$

$$|2\sin x - 1| = 1$$

$$2\sin x - 1 = -1 \text{ 또는 } 2\sin x - 1 = 1$$

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = 1$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=2\pi \text{ (} \because 0 \leq x \leq 2\pi \text{)}$$

따라서 방정식 $f_2(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\neg$, $-3 \leq f_1(x) \leq 1$ 이므로 $0 \leq |f_1(x)| \leq 3$

$$f_2(x) = |f_1(x)| - 1 \text{에서 } -1 \leq f_2(x) \leq 2 \text{이므로}$$

$$0 \leq |f_2(x)| \leq 2$$

$$f_3(x) = |f_2(x)| - 1 \text{에서 } -1 \leq f_3(x) \leq 1 \text{이므로}$$

$$0 \leq |f_3(x)| \leq 1$$

따라서 $f_4(x) = |f_3(x)| - 1$ 에서 $-1 \leq f_4(x) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} -1 &\leq f_4(x) \leq 0 \text{에서} \\ 0 &\leq |f_4(x)| \leq 1 \\ \therefore -1 &\leq f_5(x) \leq 0 \end{aligned}$$

$$f_5(x) = |f_4(x)| - 1 = -f_4(x) - 1$$

또 $-1 \leq f_5(x) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f_6(x) &= |f_5(x)| - 1 = -f_5(x) - 1 \\ &= -\{-f_4(x) - 1\} - 1 = f_4(x) \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ③

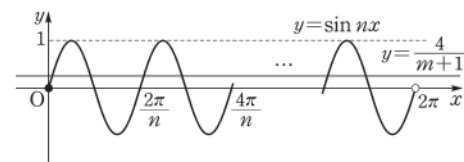
06 $m \sin nx = -\sin nx + 4$ 에서

$$(m+1) \sin nx = 4$$

$$\therefore \sin nx = \frac{4}{m+1}$$

방정식 $\sin nx = \frac{4}{m+1}$ 의 서로 다른 실근의 개수는

$y = \sin nx$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{m+1}$ 의 교점의 개수와 같다.



(i) $\frac{4}{m+1} > 1$, 즉 $0 < m < 3$ 일 때,

$y = \sin nx$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{m+1}$ 가 만나지 않으므로 주어진 방정식의 실근이 존재하지 않는다.

(ii) $\frac{4}{m+1} = 1$, 즉 $m=3$ 일 때,

$0 \leq x < \frac{2\pi}{n}$ 에서 $y = \sin nx$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{4}{m+1}$ 는 한 점에서 만나므로 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

$y = \sin nx$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{m+1}$ 의 교점의 개수는

$$1 \cdot n = n$$

(iii) $0 < \frac{4}{m+1} < 1$, 즉 $m > 3$ 일 때,

$0 \leq x < \frac{2\pi}{n}$ 에서 $y = \sin nx$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{4}{m+1}$ 는 두 점에서 만나므로 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

$y = \sin nx$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{m+1}$ 의 교점의 개수는

$$2 \cdot n = 2n$$

이상에서 n 이 짝수이면 m 의 최솟값은 3, n 이 홀수이면 m 의 최솟값은 4이므로

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(9) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$$

$$= 32$$

답 32

$$f(n) = \begin{cases} 3 & (n \text{이 짝수}) \\ 4 & (n \text{이 홀수}) \end{cases}$$

07 삼각함수의 활용

개념 & 핵심 기출

본책 53쪽

01 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인 법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 120^\circ} = 2 \cdot 4 \quad \therefore a = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

한편 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로

$$B = C = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot 4 \quad \therefore b = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

따라서 $c = b = 4$ 이므로 $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이는

$$4\sqrt{3} + 4 + 4 = 8 + 4\sqrt{3} \quad \text{답 ④}$$

02 $\angle BDC = 90^\circ$ 이므로 직각삼각형 DBC 에서

$$\overline{BD} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

이때 $\triangle ABD$ 의 외접원의 지름의 길이가 13이므로 사인 법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A} = 13, \quad \frac{12}{\sin A} = 13$$

$$\therefore \sin A = \frac{12}{13} \quad \text{답 } \frac{12}{13}$$

03 $\triangle ABC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 40^\circ} = 2 \quad \therefore \overline{AB} = 2 \sin 40^\circ$$

$\angle CBD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ 이므로 $\triangle BCD$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin 50^\circ} = 2 \quad \therefore \overline{CD} = 2 \sin 50^\circ$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4 \sin^2 40^\circ + 4 \sin^2 50^\circ$$

$$= 4(\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) = 4 \quad \text{답 4}$$

04 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C$$

이때 $a + b + c = 18$ 이므로

$$2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C = 18$$

$$R(\sin A + \sin B + \sin C) = 9$$

$$R \cdot \frac{5}{2} = 9 \quad \therefore R = \frac{18}{5}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 외접원의 둘레의 길이는

$$2\pi \cdot \frac{18}{5} = \frac{36}{5}\pi \quad \text{답 } \frac{36}{5}\pi$$

05 $\triangle ABC$ 에서 $A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$\cos \frac{A+B+C}{2} = \cos \frac{180^\circ - 2C}{2}$$

$$= \cos(90^\circ - C) = \sin C,$$

$$\cos \frac{A-B+C}{2} = \cos \frac{180^\circ - 2B}{2}$$

$$= \cos(90^\circ - B) = \sin B$$

즉 주어진 등식은 $c \sin C = b \sin B$

이때 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$c \cdot \frac{c}{2R} = b \cdot \frac{b}{2R}, \quad c^2 = b^2$$

$$\therefore b = c (\because b > 0, c > 0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $b = c$ 인 이등변삼각형이다. **답 ②**

06 $(a+b) : (b+c) : (c+a) = 6 : 9 : 7$ 이므로

$$a+b=6k, \quad b+c=9k, \quad c+a=7k \quad (k > 0)$$

$$\dots\dots \text{㉠}$$

로 놓으면 $(a+b) + (b+c) + (c+a) = 22k$

$$\therefore a+b+c=11k$$

㉠을 위의 식에 각각 대입하면

$$a=2k, \quad b=4k, \quad c=5k$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 2k : 4k : 5k$$

$$= 2 : 4 : 5 \quad \text{답 ③}$$

07 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos B$$

위의 식을 주어진 등식에 대입하면

$$3\overline{AB}^2 + 3\overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

$$= 3\overline{AB}^2 + 3\overline{BC}^2 - 6\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos B$$

이므로 $\cos B = -\frac{1}{3}$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2} \quad \text{답 ①}$$

08 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 19$$

$\angle APC = 180^\circ - B = 60^\circ$ 이므로 $\overline{AP} = x, \overline{CP} = y$ 라 하면 $\triangle ACP$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos 60^\circ$$

$$19 = x^2 + y^2 - xy, \quad (x+y)^2 - 3xy = 19$$

$$8^2 - 3xy = 19 \quad \therefore xy = 15$$

$$\therefore \overline{AP} \cdot \overline{CP} = 15 \quad \text{답 15}$$

09 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{4}{x} \cdot \cos 120^\circ$$

$$= x^2 + \frac{16}{x^2} + 4$$

이때 $x^2 > 0, \frac{16}{x^2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이다.

삼각형의 내각의 크기는 항상 0° 보다 크고 180° 보다 작으므로 $\sin B > 0$

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 이다.

$$x^2 + \frac{16}{x^2} + 4 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{16}{x^2}} + 4 = 2 \cdot 4 + 4 = 12$$

(단, 등호는 $x=2$ 일 때 성립)

따라서 $\overline{BC}$ 의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

답 ⑤

10 정사각형의 한 변의 길이가 3이므로

$$\overline{BE} = \overline{DF} = 1, \overline{EC} = \overline{FC} = 2$$

$$\therefore \overline{AE} = \overline{AF} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\overline{EF} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 $\triangle AEF$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

답 ④

11 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} = 1$ 에서

$$a(c+a) + b(b+c) = (b+c)(c+a)$$

$$ac + a^2 + b^2 + bc = bc + ab + c^2 + ac$$

$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = ab$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$$

답 ④

12 $\angle BOA = \theta$ 라 하면 $\triangle OAB$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 4 \cdot 7} = -\frac{2}{7}$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

이때 $\cos \theta = \frac{a}{7}, \sin \theta = \frac{b}{7}$ 이므로

$$a = -2, b = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore ab = -6\sqrt{5}$$

답 -6√5

다른 풀이 $\angle OAB = \theta$ 라 하면 $\triangle OAB$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABH$ 에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{4-a}{9} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $\frac{2}{3} = \frac{4-a}{9} \quad \therefore a = -2$

이때 $\overline{OB} = 7$ 이므로

$$(-2)^2 + b^2 = 49, \quad b^2 = 45$$

$$\therefore b = 3\sqrt{5} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = -6\sqrt{5}$$

13 $\sin \alpha : \sin \beta = 1 : 2$ 에서

$$\sin \beta = 2 \sin \alpha$$

높이가 같은 두 삼각형의 밑변의 길이의 비는 넓이의 비와 같다.

$$x^2 = \frac{16}{x^2} \text{에서 } x^4 = 16 \text{이}$$

므로

$$x^2 = 4 \quad (\because x^2 > 0)$$

$$\therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

$\triangle ABD$ 의 넓이를 S_1 , $\triangle ADC$ 의 넓이를 S_2 라 하면

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \overline{AD} \cdot \sin \beta}{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \overline{AD} \cdot \sin \alpha}$$

$$= \frac{4 \sin \beta}{5 \sin \alpha} = \frac{4 \cdot 2 \sin \alpha}{5 \sin \alpha} = \frac{8}{5}$$

답 $\frac{8}{5}$

다른 풀이 $\angle ADB = \theta$ 라 하면 $\angle ADC = \pi - \theta$

$\triangle ABD$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{10}{\sin \theta} = \frac{\overline{BD}}{\sin \alpha}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{10}{\overline{BD}} \sin \alpha \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle ADC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{8}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{\overline{CD}}{\sin \beta}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{8}{\overline{CD}} \sin \beta \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{10}{\overline{BD}} \sin \alpha = \frac{8}{\overline{CD}} \sin \beta$$

이때 $\sin \alpha : \sin \beta = 1 : 2$ 에서 $\sin \beta = 2 \sin \alpha$ 이므로

$$\frac{10}{\overline{BD}} \sin \alpha = \frac{8}{\overline{CD}} \cdot 2 \sin \alpha \quad \therefore \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{8}{5}$$

14 $\square ABCD$ 가 원에 내접하므로

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC = 45^\circ$$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = (2\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = 5$$

$\overline{CD} = \overline{DA} = x$ 라 하면 $\triangle ACD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 135^\circ = (2 + \sqrt{2})x^2$$

따라서 $(2 + \sqrt{2})x^2 = 5$ 이므로

$$x^2 = \frac{5}{2 + \sqrt{2}} = \frac{5(2 - \sqrt{2})}{2}$$

$$\therefore \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin 135^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5(2 - \sqrt{2})}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{4} \quad \text{답 } \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{4}$$

15 $\square ABCD$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} n(n+3) \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} n(n+3)$$

이므로 n 또는 $n+3$ 이 4의 배수이어야 한다.

(i) n 이 4의 배수일 때,

n 이 두 자리 자연수이므로 n 의 값은

$$12, 16, 20, \dots, 96$$

(ii) $n+3$ 이 4의 배수일 때,

n 이 두 자리 자연수이므로 $n+3$ 의 값은

$$16, 20, 24, \dots, 100$$

따라서 n 의 값은

$$13, 17, 21, \dots, 97$$

(i), (ii)에서 $M = 97, m = 12$ 이므로

$$M + m = 109$$

답 109

점 $P(m, n)$ 에 대하여
동경 OP 가 나타내는 일
반각의 크기를 θ 라 하면

$$\sin \theta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

$$\cos \theta = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$H(a, 0)$

n 이 짝수이면 $n+3$ 은 홀수, n 이 홀수이면 $n+3$ 은 짝수이다.

$n+3=120$ 이면

$$n=9$$

$n+3=104$ 이면

$$n=101$$

16 길이가 8인 변의 대각의 크기를 θ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = -\frac{1}{7}$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = 6\sqrt{3}$$

답 ⑤

다른 풀이 헤론의 공식에서 $s = \frac{3+7+8}{2} = 9$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\sqrt{9(9-3)(9-7)(9-8)} = 6\sqrt{3}$$

17 주어진 삼각형의 넓이를 S 라 하면 외접원의 반지름의 길이가 R 이므로

$$S = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{4R} = \frac{70}{R}$$

또 내접원의 반지름의 길이가 r 이므로

$$S = \frac{1}{2}r(5+7+8) = 10r$$

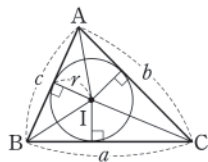
따라서 $\frac{70}{R} = 10r$ 이므로 $Rr = 7$

답 ③

1등급 비밀노트

$\triangle ABC$ 의 내심을 I , 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB \\ &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \end{aligned}$$



18 헤론의 공식에서

$$s = \frac{9+a+b}{2} = \frac{9+15}{2} = 12$$

이므로

$$\sqrt{12(12-9)(12-a)(12-b)} = 12\sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(12-a)(12-b) = 20$$

$a+b=15$ 에서 $b=15-a$ 이므로

$$(12-a)(a-3) = 20, \quad a^2 - 15a + 56 = 0$$

$$(a-7)(a-8) = 0 \quad \therefore a=7 \text{ 또는 } a=8$$

이때 $a < b$ 이므로 $a=7$

답 ④

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이다.

$a=7$ 이면 $b=8$
 $a=8$ 이면 $b=7$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 56쪽

01 $\triangle ABQ$ 에서

$$\angle AQB = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AQ}}{\sin 45^\circ} = \frac{30}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore \overline{AQ} = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{6} \text{ (m)}$$

$\triangle APQ$ 에서 $\angle PQA = 90^\circ$ 이므로

$$\overline{PQ} = \overline{AQ} \tan 30^\circ$$

$$= 10\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{2} \text{ (m)}$$

답 ③

02 $\angle BEC = 90^\circ$,

$\angle CDB = 90^\circ$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 두 점 D, E 는 지름이 $\overline{BC}$ 인 원 O 위의 점이다. $\rightarrow ①$

이때 $\triangle ABD$ 에서

$$\angle DBE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

이고, $\triangle DBE$ 의 외접원 O 의 지름

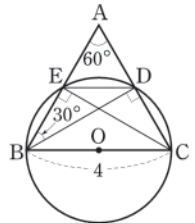
의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DE}}{\sin 30^\circ} = 4$$

$$\therefore \overline{DE} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$\rightarrow ②$

답 2



채점 기준	비율
① 네 점 B, C, D, E가 한 원 위에 있음을 알 수 있다.	40%
② $\overline{DE}$ 의 길이를 구할 수 있다.	60%

03 오른쪽 그림과 같이 원 O 위에 점 P 를 잡고 $\widehat{AB}$ 에 대한 중심각의 크기를 θ 라 하면 $\widehat{APB}$ 에 대한 중심각의 크기는 $2\pi - \theta$ 이므로

$$l_1 = 5\theta, \quad l_2 = 5(2\pi - \theta)$$

이때 $l_1 : l_2 = 1 : (\pi - 1)$ 이므로

$$5(2\pi - \theta) = 5\theta(\pi - 1), \quad 2\pi - \theta = \pi\theta - \theta$$

$$2\pi = \pi\theta \quad \therefore \theta = 2$$

따라서 $\angle APB = \frac{\theta}{2} = 1$ 이고 $\triangle ABP$ 의 외접원 O 의 반지름의 길이가 5이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 1} = 2 \cdot 5 \quad \therefore \overline{AB} = 10 \sin 1$$

답 ②

04 $\angle ABP = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{AP}$ 는 원의 지름이다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$ 의 중점을 O , 원과 $\overline{CD}$ 의 접점을 I 라 하면 점 O 가 원의 중심이므로

$$\overline{OA} = \overline{OI}$$

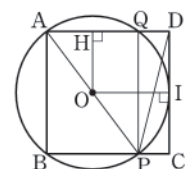
또 점 O 에서 $\overline{AD}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{OH} = \overline{ID}$$

$\overline{AH} = a, \overline{OH} = b$ 라 하면

$$\overline{AD} = \overline{CD} = 2\overline{ID} = 2b$$

이므로



$$\overline{OA} = \overline{OI} = \overline{AD} - \overline{AH} = 2b - a$$

직각삼각형 AOH에서

$$(2b - a)^2 = a^2 + b^2, \quad 3b^2 - 4ab = 0$$

$$b(3b - 4a) = 0 \quad \therefore a = \frac{3}{4}b \quad (\because b > 0)$$

이때 $\overline{OA} = 2b - \frac{3}{4}b = \frac{5}{4}b$ 이므로

$$\overline{AP} = 2 \cdot \frac{5}{4}b = \frac{5}{2}b$$

원이 $\overline{AD}$ 와 만나는 점을 Q라 하면 $\overline{PQ} = \overline{CD} = 2b$ 이므로

직각삼각형 APQ에서

$$\sin(\angle PAQ) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}} = \frac{2b}{\frac{5}{2}b} = \frac{4}{5}$$

또 $\overline{HD} = \overline{OI} = 2b - a$, $\overline{HQ} = \overline{AH} = a$ 이므로

$$\overline{DQ} = \overline{HD} - \overline{HQ} = 2b - a - a$$

$$= 2b - 2 \cdot \frac{3}{4}b = \frac{b}{2}$$

직각삼각형 PDQ에서

$$\overline{PD} = \sqrt{(2b)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}b \quad (\because b > 0)$$

이므로 $\triangle APD$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PD}}{\sin(\angle PAD)} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}b}{\frac{4}{5}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{5\sqrt{17}}{16}b$$

이때 $\triangle APD$ 의 외접원의 둘레의 길이가 $2\sqrt{17}\pi$ 이므로

$$2\pi \cdot \frac{5\sqrt{17}}{16}b = 2\sqrt{17}\pi \quad \therefore b = \frac{16}{5}$$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는

$$2b = 2 \cdot \frac{16}{5} = \frac{32}{5} \quad \text{답 } \frac{32}{5}$$

05 부채꼴 POB의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$3\theta = \pi \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

즉 $\triangle POB$ 는 정삼각형이므로 $\overline{PB} = 3$

직각삼각형 PAB에서 $\overline{PA} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$

이때 $\angle POA = \frac{2}{3}\pi$ 이므로 $\triangle PAO$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PA}}{\sin(\angle POA)} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 2R$$

$$2R = 6 \quad \therefore R = 3$$

따라서 세 점 A, O, P를 지나는 원의 넓이는

$$\pi \cdot 3^2 = 9\pi \quad \text{답 } 9\pi$$

06 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\overline{OI} = \overline{HD}$$

$$R^2 + 2R + 4 = (R+1)^2 + 3 > 0$$

$\overline{AP}$ 가 원의 지름이므로

$$\angle AQP = \frac{\pi}{2}$$

따라서 $\square QPCD$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{PQ} = \overline{CD}$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{\frac{a^3}{8R^3} + \frac{b^3}{8R^3} + \frac{c^3}{8R^3}} = 64$$

$$8R^3 = 64, \quad R^3 - 8 = 0$$

$$(R-2)(R^2 + 2R + 4) = 0$$

$$\therefore R = 2 \quad (\because R^2 + 2R + 4 > 0)$$

그런데 삼각형에서 변의 길이는 외접원의 지름의 길이보다 작거나 같으므로

$$a \leq 2R = 4$$

따라서 a 의 최댓값은 4이다. 답 4

07 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \cos^2 B + (\sin C + \cos A)(\sin C - \cos A) = 0$$

$$\cos^2 B + \sin^2 C - \cos^2 A = 0$$

$$1 - \sin^2 B + \sin^2 C - (1 - \sin^2 A) = 0$$

$$\therefore \sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$\therefore a^2 + c^2 = b^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다. 답 4

08 $\overline{AC} = m$ 이라 하면 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여 $a^2 = 4^2 + m^2 - 2 \cdot 4 \cdot m \cdot \cos 60^\circ$

$$\therefore m^2 - 4m + 16 - a^2 = 0$$

$\overline{AD} = n$ 이라 하면 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 4^2 + n^2 - 2 \cdot 4 \cdot n \cdot \cos 60^\circ$$

$$\therefore n^2 - 4n + 16 - a^2 = 0$$

따라서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 4x + 16 - a^2 = 0$ 은 서로 다른 두 양의 실근 m, n 을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (16 - a^2) > 0, \quad a^2 - 12 > 0$$

$$(a + 2\sqrt{3})(a - 2\sqrt{3}) > 0$$

$$\therefore a > 2\sqrt{3} \quad (\because a > 0) \quad \dots\dots ㉠$$

또 $mn > 0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$16 - a^2 > 0, \quad (a + 4)(a - 4) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4 \quad (\because a > 0) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $2\sqrt{3} < a < 4$ 이므로

$$a = 2\sqrt{3}, \quad \beta = 4$$

$$\therefore a^2 + \beta^2 = (2\sqrt{3})^2 + 4^2 = 28 \quad \text{답 } 28$$

09 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 20^2 + 32^2 - 2 \cdot 20 \cdot 32 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 784 \quad \dots\dots ㉠$$

$\square ABCD$ 가 원에 내접하므로

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$$

△ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= 12^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot 12 \cdot \overline{CD} \cdot \cos 120^\circ \\ &= \overline{CD}^2 + 12\overline{CD} + 144 \quad \dots\dots ㉔\end{aligned}$$

㉔, ㉕에서

$$\overline{CD}^2 + 12\overline{CD} + 144 = 784 \quad \dots\dots ㉖$$

$$\overline{CD}^2 + 12\overline{CD} - 640 = 0$$

$$(\overline{CD} + 32)(\overline{CD} - 20) = 0$$

$$\therefore \overline{CD} = 20 \quad (\because \overline{CD} > 0) \quad \dots\dots ㉗$$

따라서 산책로의 총길이는

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 20 + 32 + 20 + 12 = 84 \text{ (m)}$$

이므로 구하는 시간은

$$\frac{84}{1.5} = 56 \text{ (초)} \quad \dots\dots ㉘$$

답 56초

채점 기준	비율
① $\overline{CD}$ 의 길이에 대한 방정식을 세울 수 있다.	60%
② $\overline{CD}$ 의 길이를 구할 수 있다.	20%
③ 산책로를 한 바퀴 돌아 제자리로 돌아오는 데 걸리는 시간을 구할 수 있다.	20%

10 오른쪽 그림과 같이 점 P를 직선 $y = \sqrt{3}x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 P_1 , x축에 대하여 대칭이동한 점을 P_2 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} \\ &= \overline{P_1Q} + \overline{QR} + \overline{RP_2} \\ &\geq \overline{P_1P_2}\end{aligned}$$

이때 △PQR의 둘레의 길이의 최솟값이 12이므로

$$\overline{P_1P_2} = 12$$

한편 $\overline{OP_1} = \overline{OP} = \overline{OP_2}$ 이므로

$$\overline{OP_1} = \overline{OP_2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\tan(\angle QOR) = \sqrt{3}$ 에서 $\angle QOR = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\angle P_1OP_2 = 2\angle QOR = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 △P₁OP₂에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}12^2 &= (\sqrt{a^2 + b^2})^2 + (\sqrt{a^2 + b^2})^2 \\ &\quad - 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

$$3(a^2 + b^2) = 144$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 48$$

답 48

11 세 원 O_1, O_2, O_3 의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3 ($r_1 < r_2 < r_3$)이라 하면 △O₁O₂O₃의 둘레의 길이가 12이므로

$$2(r_1 + r_2 + r_3) = 12$$

$$\therefore r_1 + r_2 + r_3 = 6 \quad \dots\dots ㉙$$

△O₁O₂O₃의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2)(r_1 + r_3) = 6$$

$r_2 + r_3 = 5, r_2 r_3 = 6$ 이므로 r_2, r_3 은 이차방정식 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근이다.

$$r_1^2 + r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = 12$$

$$r_1(r_1 + r_2 + r_3) + r_2 r_3 = 12$$

$$\therefore 6r_1 + r_2 r_3 = 12 \quad (\because ㉙) \quad \dots\dots ㉚$$

△O₁O₂O₃가 직각삼각형이므로

$$(r_2 + r_3)^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_3)^2$$

$$r_1^2 + r_1 r_2 + r_1 r_3 - r_2 r_3 = 0$$

$$r_1(r_1 + r_2 + r_3) - r_2 r_3 = 0$$

$$\therefore 6r_1 = r_2 r_3 \quad (\because ㉙) \quad \dots\dots ㉛$$

㉚, ㉛을 연립하여 풀면

$$r_1 = 1, r_2 r_3 = 6$$

$r_1 = 1$ 을 ㉙에 대입하면

$$r_2 + r_3 = 5$$

$$\therefore r_2 = 2, r_3 = 3 \quad (\because r_3 > r_2)$$

따라서 △O₁O₂O₃에서

$$\cos(\angle O_1 O_2 O_3) = \frac{\overline{O_1 O_2}}{\overline{O_2 O_3}} = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$$

이므로 △O₁TO₂에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{O_1 T}^2 &= (1+2)^2 + 2^2 - 2 \cdot (1+2) \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{29}{5}\end{aligned}$$

답 ①

12 $\overline{HI} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 이므로

$$\overline{DI} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$$

이때 $\overline{BD} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \overline{BI} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 이므로

△BDI에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos(\angle BDI) &= \frac{(2\sqrt{2})^2 + 3^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

답 ③

13 정오각형의 한 내각의 크기는

$$\frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ$$

오른쪽 그림에서 두 삼각형

ABC, ADE는 이등변삼각형이

므로

$$\angle BAC = \angle DAE$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 108^\circ)$$

$$= 36^\circ$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle CAD &= 108^\circ - (36^\circ + 36^\circ) \\ &= 36^\circ\end{aligned}$$

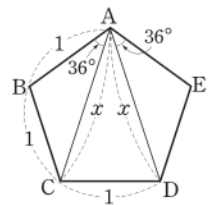
$\overline{AC} = \overline{AD} = x$ 라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 36^\circ = \frac{1^2 + x^2 - 1^2}{2 \cdot 1 \cdot x} = \frac{x}{2} \quad \dots\dots ㉜$$

또 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 36^\circ = \frac{x^2 + x^2 - 1^2}{2 \cdot x \cdot x} = \frac{2x^2 - 1}{2x^2} \quad \dots\dots ㉝$$

㉜, ㉝에서 $\frac{x}{2} = \frac{2x^2 - 1}{2x^2}$ 이므로



$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0, \quad (x-1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 1)$$

따라서 $a = \frac{1}{2}, b = 5$ 이므로 $ab = \frac{5}{2}$ 답 ③

14 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로

$$\angle ABC = \angle ACB$$

$\triangle ABD$ 에서 $\overline{AD} = \overline{BD}$ 이므로

$$\angle DAB = \angle DBA$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DAB$$

$\triangle ABC$ 와 $\triangle DBA$ 에서

$$\angle B \text{는 공통, } \angle ACB = \angle DAB$$

이므로 $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ (AA 닮음) → ①

따라서 $\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{CB} : \overline{AB}$ 이므로 $\overline{AB} = x$ 라 하면

$$x : 2 = (2+x) : x, \quad x^2 = 4+2x$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \therefore x = 1 + \sqrt{5} \quad (\because x > 0) \quad \rightarrow ②$$

이때 $\angle BAC = \angle BDA$ 이므로 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos(\angle BAC) &= \cos(\angle BDA) \\ &= \frac{2^2 + 2^2 - (1 + \sqrt{5})^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \end{aligned} \quad \rightarrow ③$$

답 $\frac{1 - \sqrt{5}}{4}$

채점 기준	비율
① $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ 임을 알 수 있다.	20%
② $\overline{AB}$ 의 길이를 구할 수 있다.	30%
③ $\cos(\angle BAC)$ 의 값을 구할 수 있다.	50%

15 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로 $\overline{AD} = x$ 라 하면

$$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot x \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot x \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ \quad \rightarrow ①$$

$$48\sqrt{3} = 4x + 3x, \quad 7x = 48\sqrt{3}$$

$$\therefore x = \frac{48\sqrt{3}}{7} \quad \rightarrow ②$$

따라서 $p = 7, q = 48$ 이므로

$$p + q = 55 \quad \rightarrow ③$$

답 55

채점 기준	비율
① 삼각형의 넓이를 이용하여 식을 세울 수 있다.	40%
② $\overline{AD}$ 의 길이를 구할 수 있다.	50%
③ $p + q$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

16 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = 12\sqrt{3} \quad \rightarrow ①$$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &= 0 \text{에서} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

이때 $x > 1$ 이므로

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$a^2 = b^2 \text{에서 } a > 0, b > 0$$

$$\text{이므로 } a = b$$

$$\text{이때 } ab = 240 \text{이므로}$$

$$a = b = 2\sqrt{6}$$

즉 $\triangle APQ$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{AP} = a,$

$\overline{AQ} = b$ 라 하면 $\triangle APQ$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \quad \therefore ab = 24$$

$\triangle APQ$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - 24 \quad \rightarrow ②$$

이때 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 24 &\geq 2\sqrt{a^2 b^2} - 24 \\ &= 2ab - 24 = 24 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $a = b = 2\sqrt{6}$ 일 때 성립)

따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{24} = 2\sqrt{6} \quad \rightarrow ③$$

답 $2\sqrt{6}$

채점 기준	비율
① $\triangle ABC$ 의 넓이를 구할 수 있다.	20%
② $\overline{AP} = a, \overline{AQ} = b$ 라 하고 $\overline{PQ}$ 을 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

17 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$\angle AOB = \frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 30^\circ,$$

$$\angle BOC = \frac{2}{12} \cdot 360^\circ = 60^\circ,$$

$$\angle COD = \frac{4}{12} \cdot 360^\circ = 120^\circ,$$

$$\angle DOA = \frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD + \triangle ODA$$

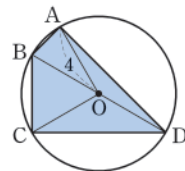
$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 150^\circ$$

$$= 4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4$$

$$= 8 + 8\sqrt{3}$$

답 $8 + 8\sqrt{3}$



18 길이가 8인 변의 대각의 크기를 θ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{13^2 + 15^2 - 8^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{11}{13}$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{13} \quad \rightarrow ①$$

즉 주어진 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 15 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{13} = 30\sqrt{3} \quad \rightarrow ②$$

이때 삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2} r (8 + 13 + 15) = 30\sqrt{3}$$

$$18r=30\sqrt{3} \quad \therefore r=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}\pi$$

→ ③

$$\text{답 } \frac{25}{3}\pi$$

채점 기준	비율
① $\sin\theta$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.	30%
③ 주어진 삼각형에 내접하는 원의 넓이를 구할 수 있다.	30%

다른 풀이 ▶ 헤론의 공식에서

$$s = \frac{8+13+15}{2} = 18$$

주어진 삼각형의 넓이는

$$\sqrt{18(18-8)(18-13)(18-15)} = 30\sqrt{3}$$

19 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ 에서

$$12^2 = 50 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = 47$$

$\triangle ABC$ 의 넓이가 6이고, $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$ 이므로

$$6 = \frac{abc}{4 \cdot \frac{5}{2}} \quad \therefore abc = 60$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc$$

$$= 12 \cdot (50-47) + 3 \cdot 60 = 216$$

답 ④

정사면체에서 두 점을 연결하는 최단 거리는 정사면체의 전개도에서 두 점을 연결한 선분의 길이를 이용하여 구할 수 있다.

외접원의 반지름의 길이가 R 인 $\triangle ABC$ 의 넓이 S 는

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{34} \sin(\angle PAQ)$$

이때 직각삼각형 ABC 에서

$$\sin(\angle PAQ) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{이므로 } \overline{PQ} = \sqrt{34} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3\sqrt{34}}{5}$$

$$\therefore 25\overline{PQ}^2 = 25 \cdot \frac{306}{25} = 306$$

답 306

02 정사면체 $OABC$

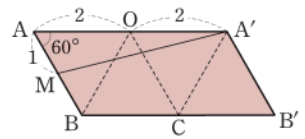
의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로 최단 거리는 $\overline{MA'}$ 의 길이와 같다.

$\triangle A'M$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$d^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 13$$

$$\therefore 10d^2 = 130$$

답 130



03 $\square ABCD$ 가 원에 내접하므로 $B = 180^\circ - D$

$$\therefore \cos B = \cos(180^\circ - D) = -\cos D = -\frac{1}{3}$$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 48$$

$$\therefore \overline{AC} = 4\sqrt{3} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

한편 원 O 의 반지름의 길이를 R 라

하면 $\triangle ACD$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin D} = 2R$$

이때

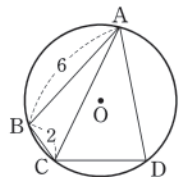
$$\sin D = \sqrt{1 - \cos^2 D} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{이므로 } 4\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{따라서 원 } O \text{의 넓이는 } \pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{27}{2}\pi$$

답 ②



내신 · 수능

1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제**

본책 59쪽

01 $\angle APD = 90^\circ$,

$\angle AQD = 90^\circ$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q 는 지름이

$\overline{AD}$ 인 원 위의 점이다.

또 점 D 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\angle HCD = \angle HDC$ 이므로

$$\overline{DH} = \overline{HC} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 3$$

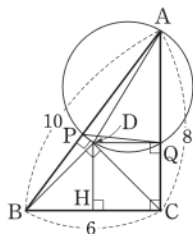
$$\therefore \overline{DQ} = \overline{HC} = 3, \overline{AQ} = 8 - 3 = 5$$

따라서 직각삼각형 ADQ 에서

$$\overline{AD} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

이므로 $\triangle APQ$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle PAQ)} = \sqrt{34}$$



$\triangle DBC$ 는 직각이등변삼각형이므로

$$\angle HCD = 45^\circ$$

$$\therefore \angle HDC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$\overline{AQ} = \overline{AC} - \overline{QC} = \overline{AC} - \overline{DH}$$

04 $\overline{PB} = 340 \cdot 5$ (m), $\overline{PC} = 340 \cdot 7$ (m),

$\overline{BC} = 1020 = 340 \cdot 3$ (m), $\overline{CD} = 680 = 340 \cdot 2$ (m)이므로

$\overline{PD} = 340x$ (m)라 하고 $340 = k$ 로 놓으면

$$\overline{PB} = 5k$$
 (m), $\overline{PC} = 7k$ (m), $\overline{BC} = 3k$ (m),

$$\overline{CD} = 2k$$
 (m), $\overline{PD} = kx$ (m)

오른쪽 그림에서

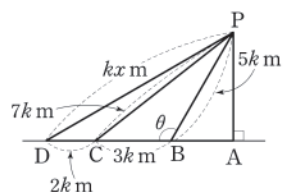
$\angle PBC = \theta$ 라 하면

$\triangle PCB$ 에서 코사인법칙

에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 3k}$$

$$= -\frac{1}{2}$$



따라서 $\triangle PDB$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$(kx)^2 = (5k)^2 + (5k)^2 - 2 \cdot 5k \cdot 5k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 k^2 = 75k^2, \quad x^2 = 75$$

$$\therefore x = 5\sqrt{3} \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{PD} = 340 \cdot 5\sqrt{3} \text{ (m)}$$

즉 D 지점에서는 폭죽이 터지고 $5\sqrt{3}$ 초 후에 처음으로 소리를 들을 수 있다. 답 ③

05 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BP}$

를 그으면

$$\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle PBC$$

이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \overline{PQ} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{PR}$$

$$\therefore 5\overline{PQ} + 2\overline{PR} = 5$$

이때 $\overline{PQ} > 0$, $\overline{PR} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5\overline{PQ} + 2\overline{PR} \geq 2\sqrt{5\overline{PQ} \cdot 2\overline{PR}}$$

$$5 \geq 2\sqrt{10\overline{PQ} \cdot \overline{PR}}, \quad 25 \geq 40\overline{PQ} \cdot \overline{PR}$$

$$\therefore \overline{PQ} \cdot \overline{PR} \leq \frac{5}{8}$$

(단, 등호는 $\overline{PQ} = \frac{1}{2}$, $\overline{PR} = \frac{5}{4}$ 일 때 성립)

따라서 $\overline{PQ} \cdot \overline{PR}$ 의 최댓값은 $\frac{5}{8}$ 이다. 답 ②

06 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{7^2 + 9^2 - 14^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} = -\frac{11}{21}$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{11}{21}\right)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{21}$$

이때 $\triangle ABC$ 의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \frac{8\sqrt{5}}{21} = 12\sqrt{5}$$

한편 $\overline{AP} = \overline{AR} = x$, $\overline{BP} = \overline{BQ} = y$, $\overline{CR} = \overline{CQ} = z$ 라 하면

$$x + y = 7, \quad y + z = 14, \quad z + x = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

위의 세 식을 변끼리 더하면

$$2(x + y + z) = 30 \quad \therefore x + y + z = 15$$

①을 위의 식에 각각 대입하면

$$x = 1, \quad y = 6, \quad z = 8$$

따라서

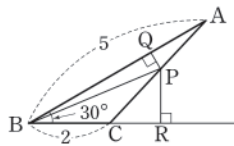
$$\triangle APR = S \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{63} S,$$

$$\triangle BQP = S \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{14} = \frac{18}{49} S,$$

$$\triangle CRQ = S \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{14} = \frac{32}{63} S$$

이므로

$$\begin{aligned} \triangle PQR &= S - \left(\frac{1}{63} S + \frac{18}{49} S + \frac{32}{63} S \right) = \frac{16}{147} S \\ &= \frac{16}{147} \cdot 12\sqrt{5} = \frac{64}{49} \sqrt{5} \end{aligned}$$



$5\overline{PQ} = 2\overline{PR}$ 에서

$$\overline{PQ} = \frac{2}{5} \overline{PR}$$

이때 $5\overline{PQ} + 2\overline{PR} = 5$ 이므로

$$4\overline{PR} = 5$$

$$\therefore \overline{PR} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$$

원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 수직이다.

$$\begin{aligned} \angle ABC &= 90^\circ - \angle ABO \\ &= \angle AOB = \theta \end{aligned}$$

$a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ 일 때,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

즉 $p = 49, q = 64$ 이므로

$$p + q = 113$$

답 113

$$\text{참고 } \overline{AP} = \frac{1}{7} \overline{AB}, \quad \overline{AR} = \frac{1}{9} \overline{AC} \text{이므로}$$

$$\triangle APR = \frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AR} \cdot \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \overline{AB} \cdot \frac{1}{9} \overline{AC} \cdot \sin A$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A \right) \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9}$$

$$= \triangle ABC \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{63} S$$

같은 방법으로 하면

$$\triangle BQP = \frac{18}{49} S, \quad \triangle CRQ = \frac{32}{63} S$$

내신 · 수능

1등급을 굳히는 실전 마무리 문제

본책 60쪽

01 <전략> 반지름의 길이가 r , 호의 길이가 l 인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}rl$ 임을 이용한다.

[풀이] 원 O의 넓이가 36π 이므로 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\pi r^2 = 36\pi \quad \therefore r = 6 \quad (\because r > 0)$$

부채꼴 (가)의 호의 길이는 $6 \cdot \frac{3}{2} = 9$ 이므로 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$$

따라서 부채꼴 (나)의 넓이는 $36\pi - 27$ 답 ③

02 <전략> 삼각함수의 값을 선분의 길이의 비로 나타낸다.

[풀이] $\therefore \triangle AOB$ 에서 $\angle OAB = 90^\circ$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \quad \therefore \overline{AB} = \tan \theta$$

$$\therefore \triangle AOB \text{에서 } \cos \theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

$$\therefore \overline{OB} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$\therefore \triangle ABC$ 에서 $\angle ABC = \theta$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

이때 $\therefore$ 에서 $\overline{AB} = \tan \theta$ 이므로

$$\overline{AC} = \overline{AB} \tan \theta = \tan^2 \theta$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

03 <전략> $\log_{\sin x} \cos x = t$ 로 놓고 주어진 등식을 t 에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] $\log_{\sin x} \cos x = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \log_{\tan x} \sin x &= \frac{1}{\log_{\sin x} \tan x} = \frac{1}{\log_{\sin x} \frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \frac{1}{1 - \log_{\sin x} \cos x} = \frac{1}{1 - t} \end{aligned}$$

이므로 주어진 등식에서

$$t + \frac{1}{1-t} = 1, \quad t - t^2 + 1 = 1 - t$$

$$t^2 - 2t = 0, \quad t(t-2) = 0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

(i) $t=0$ 일 때,

$$\log_{\sin x} \cos x = 0 \text{이므로} \quad \cos x = 1$$

그런데 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ 이므로 조건을 만족시키는 x 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $t=2$ 일 때,

$$\log_{\sin x} \cos x = 2 \text{이므로}$$

$$\cos x = \sin^2 x, \quad \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\therefore \cos x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \left(\because 0 < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

(i), (ii)에서 $\cos x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 답 ①

04 [전략] $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값도 증가하고, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값은 감소함을 이용한다.

[풀이] $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값도 증가한다.

이때 $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값은 감소한다.

이때 $\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{2}{3}\pi$ 이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin 2 < 1$

또 $\frac{3}{4}\pi < 3 < \pi$ 이므로 $0 < \sin 3 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

한편 $\pi < 4 < 2\pi$ 이므로 $\sin 4 < 0$

$$\therefore \sin 4 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2$$
 답 ④

05 [전략] 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용한다.

[풀이] ㄱ. [반례]

$$\pi < \alpha < \beta < 2\pi \text{이고}$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \text{이면 오}$$

른쪽 그림과 같이

$y = \sin x$ 의 그래프가

직선 $x = \frac{3}{2}\pi$ 에 대하

여 대칭이므로 $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}\pi \quad \therefore \alpha + \beta = 3\pi$

ㄴ. 오른쪽 그림과 같이

$0 < x < 2\pi$ 일 때

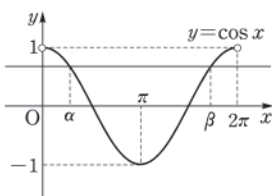
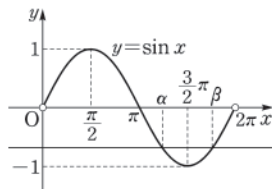
$y = \cos x$ 의 그래프

는 직선 $x = \pi$ 에 대

하여 대칭이므로

$$\cos \alpha = \cos \beta \text{이면}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi \quad \therefore \alpha + \beta = 2\pi$$



반원에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

$$\sin \frac{\pi}{4} < \sin 1 < \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \frac{2}{3}\pi < \sin 2 < \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \pi < \sin 3 < \sin \frac{3}{4}\pi$$

ㄷ. [반례] $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{4}{3}\pi$ 이면 $\tan \frac{\pi}{3} = \tan \frac{4}{3}\pi = \sqrt{3}$

이지만

$$\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

06 [전략] 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 π 임을 이용한다.

[풀이] ㄱ. $\overline{BD} = 2r$ 이면 $\overline{BD}$ 는 지름이므로

$$A = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \cos A = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

ㄴ. $A = \pi - C, B = \pi - D$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin A \sin B &= \sin(\pi - C) \sin(\pi - D) \\ &= \sin C \sin D \end{aligned}$$

ㄷ. $C = \pi - A, D = \pi - B$ 이므로

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D$$

$$= \cos A + \cos B + \cos(\pi - A) + \cos(\pi - B)$$

$$= \cos A + \cos B - \cos A - \cos B = 0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

07 [전략] 두 점 B, C'을 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 이용하여 점 C'의 x좌표와 y좌표를 구한다.

[풀이] 오른쪽 그림에서 점 C'의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

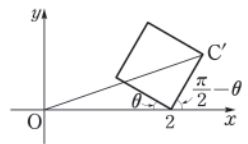
$$= 2 + \sin \theta,$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \{f(\theta)\}^2 &= \overline{OC'}^2 = x^2 + y^2 \\ &= (2 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta \\ &= 4 + 4 \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &= 4 \sin \theta + 5 \end{aligned}$$

따라서 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y = \{f(\theta)\}^2$, 즉

$y = 4 \sin \theta + 5$ 의 그래프의 개형은 ②와 같다. 답 ②



08 [전략] 주어진 함수를 한 종류의 삼각함수로 변형한 후 삼각함수를 t 로 치환한다.

[풀이] $y = \left\{1 + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right\} \{1 + \sin^2(\pi - x)\}$

$$= (1 + 2 \cos^2 x)(1 + \sin^2 x)$$

$$= (1 + 2 \cos^2 x)(2 - \cos^2 x)$$

$$= -2 \cos^4 x + 3 \cos^2 x + 2$$

$\cos^2 x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -2t^2 + 3t + 2 = -2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$$

따라서 y 는 $t = \frac{3}{4}$ 일 때 최댓값 $\frac{25}{8}$ 를 가지므로 주어진 함수의 최댓값은 $\frac{25}{8}$ 이다. 답 ④

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는}$$

$$x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는}$$

$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는}$$

$$x = \frac{11}{6}\pi$$

09 **전략** $f(-x) = -f(x)$ 이면 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭임을 이용하고 $\sin x = t$ 로 치환하여 그래프를 그려 본다.

풀이 $\neg$. $f(x+2\pi) = \frac{2\sin(x+2\pi)+1}{\sin(x+2\pi)}$
 $= \frac{2\sin x+1}{\sin x} = f(x)$
 $\therefore f(-x) = \frac{2\sin(-x)+1}{\sin(-x)} = \frac{-2\sin x+1}{-\sin x}$,
 $-f(x) = \frac{-2\sin x-1}{\sin x}$ 이므로
 $f(-x) \neq -f(x)$
 따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다.
 $\therefore \sin x = t$ 로 놓으면 $-\pi < x < 0$ 에서 $-1 \leq t < 0$ 이고
 $f(x) = \frac{2\sin x+1}{\sin x} = \frac{2t+1}{t}$
 $= \frac{1}{t} + 2$

$-1 < t < 0$ 인 실수 t 에 대하여 $-\pi < x < 0$ 에서 방정식 $\sin x = t$ 는 항상 서로 다른 두 실근을 가지므로 $-\pi < x < 0$ 에서 방정식 $|f(x)| = k$ 가 서로 다른 네 실근을 가지려면 $-1 < t < 0$ 에서 방정식 $\left| \frac{1}{t} + 2 \right| = k$ 가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉 $-1 < t < 0$ 에서 $y = \left| \frac{1}{t} + 2 \right|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 오른쪽 그림에서 $0 < k < 1$

따라서 $-\pi < x < 0$ 에서 방정식 $|f(x)| = k$ 가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 양수 k 의 값이 존재한다.

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\therefore$ 이다.

답 ④

10 **전략** 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c > 0$ 이 성립할 조건 $\Rightarrow a > 0, b^2-4ac < 0$

풀이 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 x 에 대한 이차방정식 $x^2-2x\cos\theta+\sin^2\theta=0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-\cos\theta)^2 - \sin^2\theta < 0$$

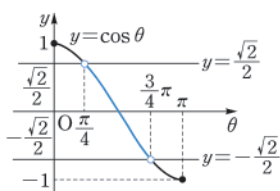
$$\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) < 0, \quad \cos^2\theta < \frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

오른쪽 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

답 ③



11 **전략** 조건 (가)에서 $2\theta - \frac{5}{4}\pi = t$ 로 놓고 부등식을 풀어 θ 의 값의 범위를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $2\theta - \frac{5}{4}\pi = t$ 로 놓으면 $0 \leq \theta < \pi$ 에서 $-\frac{5}{4}\pi \leq t < \frac{3}{4}\pi$ 이고 주어진 부등식은

$$0 \leq \theta < \pi \text{에서}$$

$$0 \leq 2\theta < 2\pi$$

$$\therefore -\frac{5}{4}\pi \leq 2\theta - \frac{5}{4}\pi < \frac{3}{4}\pi$$

$$2\cos t < -\sqrt{2} \quad \therefore \cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

오른쪽 그림에서 t 의 값의 범위는

$$-\frac{5}{4}\pi < t < -\frac{3}{4}\pi$$

이므로

$$-\frac{5}{4}\pi < 2\theta - \frac{5}{4}\pi < -\frac{3}{4}\pi$$

$$0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \quad \therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

조건 (나)에서 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{4}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{16}{9}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{16}{9}$$

$$\therefore 2\sin\theta\cos\theta = \frac{7}{9}$$

$$\therefore (\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$= 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 에서 $\sin\theta < \cos\theta$ 이므로

$$\sin\theta - \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

답 ②

12 **전략** $f(x) \geq 0$ 과 $f(x) < 0$ 으로 나누어 $g(x)$ 를 구한 후 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

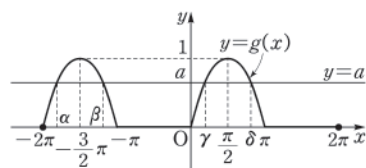
풀이 $\neg$. $g(-x) = \frac{f(-x) + |f(-x)|}{2}$
 $= \frac{\sin(-x) + |\sin(-x)|}{2}$
 $= \frac{-\sin x + |\sin x|}{2}$
 $= \frac{-f(x) + |f(x)|}{2} \neq g(x)$

$$\therefore f(x) \geq 0 \text{이면 } g(x) = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$$

$$f(x) < 0 \text{이면 } g(x) = \frac{f(x) - f(x)}{2} = 0$$

$$\therefore g(x)$$

$$= \begin{cases} \sin x & (-2\pi \leq x \leq -\pi \text{ 또는 } 0 \leq x \leq \pi \\ & \text{또는 } x = 2\pi) \\ 0 & (-\pi < x < 0 \text{ 또는 } \pi < x < 2\pi) \end{cases}$$



방정식 $g(x)=a$ 의 실근은 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 앞의 그림에서 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 이다. 이때

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{3}{2}\pi, \quad \frac{\gamma+\delta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

이므로 방정식 $g(x)=a$ 의 모든 실근의 합은

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = -3\pi+\pi = -2\pi$$

ㄷ. ㄴ의 $y=g(x)$ 의 그래프에서 부등식 $g(x) \leq 0$ 의 해는

$$x = -2\pi \text{ 또는 } -\pi \leq x \leq 0 \text{ 또는 } \pi \leq x \leq 2\pi$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. **답 ②**

13 **전략** $\sin A, \sin \frac{A+B+C}{2}, \sin C$ 를 각각 a, b, c 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $A+B+C=\pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \frac{A+B+C}{2} &= \sin \frac{\pi-2B}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right) \\ &= \cos B \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$\sin A = 2 \cos B \sin C$ 에서

$$\frac{a}{2R} = 2 \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \cdot \frac{c}{2R}$$

$$a^2 = c^2 + a^2 - b^2, \quad b^2 = c^2$$

$$\therefore b=c \quad (\because b>0, c>0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다. **답 ②**

14 **전략** $\triangle ABC$ 의 넓이를 이용하여 세 변의 길이의 비를 구한다.

풀이 $\overline{AD}=3n, \overline{BE}=\overline{CF}=2n \ (n>0)$ 이라 하면

$\triangle ABC$ 의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot 3n = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 2n = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 2n$$

$$\therefore 3a=2b=2c$$

$$\therefore a:b:c=2:3:3$$

$a=2k, b=3k, c=3k \ (k>0)$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle BAC) = \frac{(3k)^2 + (3k)^2 - (2k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 3k} = \frac{7}{9}$$

따라서 $p=9, q=7$ 이므로 $p+q=16$ **답 ②**

15 **전략** 사인법칙을 이용하여 $\overline{AB}$ 의 길이를 a, θ_1, θ_2 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \theta_2} = \frac{a}{\sin\{\pi-(\theta_1+\theta_2)\}}$$

$$\therefore \overline{AB} = \frac{a \sin \theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot a \sin \theta_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin \theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \cdot a \sin \theta_1 \\ &= \frac{a^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{2 \sin(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

답 ③

$\angle ABE$ 와 $\angle BED$ 는 엇각이다.

길이가 같은 현에 대한 원주각의 크기는 같다.

16 **전략** 이웃하는 두 변의 길이가 a, b 이고 그 끼인각의 크기가 θ 인 평행사변형의 넓이는 $ab \sin \theta$ 임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 B 를 지나고 직선 AC 에 평행한 직선이 직선 m 과 만나는 점을 E 라 하면

$\square ACEB$ 는 평행사변형이므로

$$\overline{CE}=\overline{BE}=5, \quad \overline{ED}=9-5=4$$

$\angle ABE=\theta$ 라 하면 $\angle BED=\theta$ 이므로 $\triangle BED$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{5^2+4^2-7^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1-\cos^2 \theta} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

따라서 평행사변형 $ACEB$ 의 넓이는

$$5 \cdot 5 \cdot \sin \theta = 5 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 10\sqrt{6}$$

이고 $\triangle BED$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$$

이므로 $\square ACDB$ 의 넓이는

$$10\sqrt{6}+4\sqrt{6}=14\sqrt{6}$$

답 ③

17 **전략** 원주각의 성질을 이용하여 서로 합동인 삼각형을 찾아 육각형의 넓이를 구한다.

풀이 $\overline{AB}=\overline{AF}=\overline{EF}, \overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$ 이므로

$$\angle BCA=\angle ACF=\angle ADF=\angle FDE,$$

$$\angle BAC=\angle CAD=\angle CFD=\angle DFE$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}, \overline{CF}$ 의 교점을 G 라 하면 $\triangle ABC$ 와 $\triangle AGC$ 에서

$\overline{AC}$ 는 공통,

$$\angle BCA=\angle GCA,$$

$$\angle BAC=\angle GAC$$

이므로

$$\triangle ABC \equiv \triangle AGC \text{ (ASA 합동)}$$

같은 방법으로 하면

$$\triangle FED \equiv \triangle FGD \text{ (ASA 합동)}$$

$$\therefore \overline{AG}=\overline{AB}=1, \quad \overline{FG}=\overline{FE}=1,$$

$$\overline{GC}=\overline{BC}=a, \quad \overline{DG}=\overline{DE}=a$$

즉 $\triangle GFA$ 와 $\triangle GCD$ 는 각각 한 변의 길이가 1, a 인 정삼각형이다.

또 $\triangle AGC$ 와 $\triangle FGD$ 에서

$$\angle AGC=\angle FGD \text{ (맞꼭지각)},$$

$$\overline{AG}=\overline{FG}=1, \quad \overline{GC}=\overline{GD}=a$$

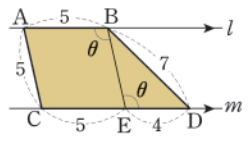
이므로

$$\triangle AGC \equiv \triangle FGD \text{ (SAS 합동)}$$

따라서

$$\triangle ABC=\triangle AGC=\triangle FGD=\triangle FED,$$

$$\angle AGC = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - 60^\circ - 60^\circ) = 120^\circ$$



이므로 육각형 ABCDEF의 넓이는

$$\begin{aligned} & 4\triangle AGC + \triangle GFA + \triangle GCD \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a \cdot \sin 120^\circ \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \\ &= \sqrt{3}a + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \\ &\text{즉 } \sqrt{3}a + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{47\sqrt{3}}{18} \text{ 이므로} \\ & 9a^2 + 36a - 85 = 0, \quad (3a+17)(3a-5)=0 \\ & \therefore a = \frac{5}{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

18 [전략] 두 각 α, β 를 나타내는 두 동경이 일치하면 $\alpha - \beta = 2n\pi$ (n 은 정수)임을 이용한다.

[풀이] 각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$\begin{aligned} 4\theta - \theta &= 2n\pi \quad (n \text{은 정수}) \quad \cdots \textcircled{1} \\ 3\theta &= 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{3}\pi \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \pi < \frac{2n}{3}\pi < \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{3}{2} < n < \frac{9}{4}$$

$$n \text{은 정수이므로 } n=2$$

$$\text{이것을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \theta = \frac{4}{3}\pi \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin(\theta - \pi) &= \sin\left(\frac{4}{3}\pi - \pi\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

채점 기준	비율
① 두 각 $\theta, 4\theta$ 를 나타내는 동경이 일치할 조건을 알 수 있다.	30%
② 각 θ 의 크기를 구할 수 있다.	40%
③ $\sin(\theta - \pi)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

19 [전략] 세 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$ 이다.

[풀이] $B(p, \sin p)$ 라 하면 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 x 좌표가 $\frac{29}{18}\pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\pi}{2} + p + \frac{7}{2}\pi}{3} &= \frac{29}{18}\pi, \quad 4\pi + p = \frac{29}{6}\pi \\ \therefore p &= \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \sin p = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$B\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2}\right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

한편 $\overline{AC}$ 의 중점이 점 $(2\pi, 0)$ 이므로 $\overline{BD}$ 의 중점도 점 $(2\pi, 0)$ 이다.

$y=f(x+1)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

평행사변형 ABCD의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점은 같다.

$D(q, \sin q)$ 라 하면

$$\frac{\frac{5}{6}\pi + q}{2} = 2\pi, \quad \frac{\frac{1}{2} + \sin q}{2} = 0$$

$$\frac{5}{6}\pi + q = 4\pi, \quad \frac{1}{2} + \sin q = 0$$

$$\therefore q = \frac{19}{6}\pi, \quad \sin q = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore D\left(\frac{19}{6}\pi, -\frac{1}{2}\right) \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $\triangle BCD$ 의 무게중심의 좌표는

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\frac{5}{6}\pi + \frac{7}{2}\pi + \frac{19}{6}\pi}{3}, \frac{\frac{1}{2} + (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)}{3} \right), \\ & \text{즉 } \left(\frac{5}{2}\pi, -\frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } a = \frac{5}{2}\pi, \quad b = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore ab = -\frac{5}{6}\pi \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } -\frac{5}{6}\pi$$

채점 기준	비율
① 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30%
② 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	30%
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	40%

20 [전략] $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나기 위한 조건을 생각한다.

[풀이] 조건 ①에서 $f(x-1)=f(x)-1$ 이므로 x 대신 $x+1$ 을 대입하면

$$f(x) = f(x+1) - 1$$

$$\therefore f(x+1) = f(x) + 1$$

오른쪽 그림과 같이

$$0 \leq x \leq n \quad (n \text{은 자연수})$$

에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 보다

아래쪽에 있거나 x 가 자연수일 때 직선 $y=x$

와 만난다.

한편 $g(x) \geq x$ 이므로 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 보다

위쪽에 있거나 $\sin \frac{\pi}{l}x = 0$ 일 때 직선 $y=x$ 와 만난다.

$x > 0$ 일 때, $\sin \frac{\pi}{l}x = 0$ 에서

$$\frac{\pi}{l}x = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

$$\therefore x = l, 2l, 3l, \dots$$

즉 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표는

$$(l, l), (2l, 2l), (3l, 3l), (4l, 4l), \dots$$

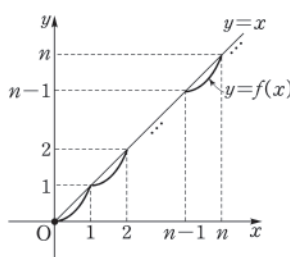
이므로 $P_3(3l, 3l)$

$$\overline{OP_3} = 9\sqrt{2} \text{에서}$$

$$\sqrt{(3l)^2 + (3l)^2} = 9\sqrt{2}, \quad 18l^2 = 162$$

$$l^2 = 9 \quad \therefore l = 3 \quad (\because l \text{은 자연수})$$

$$\text{답 } 3$$



21 [전략] 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 이 중근을 가질 조건
 $\Rightarrow b^2-4ac=0$

[풀이] 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2\sin\theta)^2 - 3 \cdot 2(1 - \cos\theta) = 0$$

$$4\sin^2\theta - 6 + 6\cos\theta = 0$$

$$4(1 - \cos^2\theta) - 6 + 6\cos\theta = 0$$

$$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos\theta = 1 \quad \cdots \rightarrow 1$$

(i) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 일 때,

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ 이므로 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{3}\pi$$

(ii) $\cos\theta = 1$ 일 때,

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ 이므로 } \theta = 0 \quad \cdots \rightarrow 2$$

(i), (ii)에서 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi + 0 = 2\pi \quad \cdots \rightarrow 3$$

답 2π

채점 기준	비율
① $\cos\theta$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
② θ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ 모든 θ 의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

22 [전략] 사인법칙을 이용하여 $\overline{AC}$ 의 길이를 구한다.

[풀이] $\triangle ADC$ 에서 $\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 이므로

$$\angle DCA = \angle DAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

$\triangle ABC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore \overline{AC} = 6 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \quad \text{답 } 6\sqrt{2}$$

[다른 풀이] $\triangle ABD$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore \overline{AD} = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$$

따라서 $\overline{CD} = \overline{AD} = 2\sqrt{6}$ 이므로 $\triangle ACD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = (2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \cos 120^\circ$$

$$= 72$$

$$\therefore \overline{AC} = 6\sqrt{2} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

$\triangle ADC$ 는 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 인
 이등변삼각형이므로
 $\angle DCA = \angle DAC$

$$\begin{aligned} \cos 120^\circ &= \cos(180^\circ - 60^\circ) \\ &= -\cos 60^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

23 [전략] 코사인법칙을 이용하여 $\overline{PQ}$ 의 길이를 $\overline{BQ}$ 의 길이에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] 점 P 의 속력이 점 Q 의 속력의 2배이므로 점 P 가 움직인 거리는 점 Q 가 움직인 거리의 2배이다.

즉 오른쪽 그림에서

$\overline{BQ} = x$ ($0 \leq x \leq 7$)라 하면

$$\overline{AP} = 2x,$$

$$\overline{BP} = 14 - 2x \quad \cdots \rightarrow 1$$

이때 $\triangle BQP$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= x^2 + (14 - 2x)^2 - 2x(14 - 2x)\cos 60^\circ \\ &= 7x^2 - 70x + 196 \end{aligned}$$

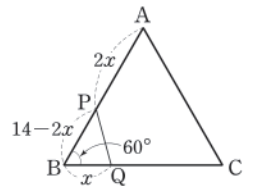
$$= 7(x - 5)^2 + 21$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{7(x - 5)^2 + 21} \quad (0 \leq x \leq 7) \quad \cdots \rightarrow 2$$

따라서 $x = 5$ 일 때 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은 $\sqrt{21}$ 이다.

$\cdots \rightarrow 3$

답 $\sqrt{21}$



채점 기준	비율
① $\overline{BQ} = x$ 라 하고 $\overline{BP}$ 의 길이를 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
② $\overline{PQ}$ 의 길이를 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
③ $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

24 [전략] 두 변의 길이가 a, b 이고 그 끼인각의 크기가 θ 인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$ 를 이용한다.

[풀이] $\overline{BD} = \frac{8}{3}\overline{AB}$, $\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이므로

$$\triangle DBE = \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot \overline{BE} \cdot \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \overline{AB} \cdot \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \sin B$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin B \right)$$

$$= \frac{4}{3} \triangle ABC$$

$$\therefore k = \frac{4}{3} \quad \text{답 } \frac{4}{3}$$

25 [전략] 코사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$ 의 길이를 구한 후 삼각형의 넓이를 이용한다.

[풀이] $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 49$$

$$\therefore \overline{BC} = 7 \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \overline{AH}$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{2} \overline{AH} \quad \therefore \overline{AH} = \frac{15\sqrt{3}}{14}$$

$$\therefore k = 15\sqrt{3} \quad \text{답 } 15\sqrt{3}$$

III 수열

08 등차수열과 등비수열

개념 & 핵심 기출

본책 66쪽

01 $a_n = 30 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 34$

$-4n + 34 < 0$ 에서 $n > \frac{17}{2} = 8.5$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제 9 항이다. **답 ②**

02 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_6 = a_1 + 10$ 에서

$$a_1 + 5d = a_1 + 10, \quad 5d = 10 \quad \therefore d = 2$$

따라서 $a_2 = a_1 + 2$, $a_3 = a_1 + 4$ 이므로 $a_2 a_3 = 24$ 에서

$$(a_1 + 2)(a_1 + 4) = 24$$

$$a_1^2 + 6a_1 - 16 = 0, \quad (a_1 + 8)(a_1 - 2) = 0$$

$$\therefore a_1 = 2 \quad (\because a_1 > 0)$$

$$\therefore a_8 = a_1 + 7d = 2 + 7 \cdot 2 = 16 \quad \text{답 16}$$

03 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{10} - a_3 = 28 \text{에서}$$

$$(a + 9d) - (a + 2d) = 28$$

$$7d = 28 \quad \therefore d = 4$$

$$a_{11} = a + 10 \cdot 4 = a + 40, \quad a_3 = a + 2 \cdot 4 = a + 8 \text{이므로}$$

$$|a_{11}| - |a_3| = 4 \text{에서}$$

$$|a + 40| - |a + 8| = 4$$

(i) $a < -40$ 일 때,

$$-(a + 40) + (a + 8) = 4 \quad \therefore 0 \cdot a = 36$$

이 방정식을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $-40 \leq a < -8$ 일 때,

$$(a + 40) + (a + 8) = 4, \quad 2a = -44$$

$$\therefore a = -22$$

(iii) $a \geq -8$ 일 때,

$$(a + 40) - (a + 8) = 4 \quad \therefore 0 \cdot a = -28$$

이 방정식을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 $a = -22$ 이므로

$$a_{15} = a + 14d = -22 + 14 \cdot 4 = 34 \quad \text{답 34}$$

04 세 수 a_1, a_3, a_5 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a_3 = a_1 + a_5 = 12 \quad \therefore a_3 = 6$$

또 세 수 a_2, a_3, a_4 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$12 = a_2 + a_4$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_4 = 18 \quad \text{답 ③}$$

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_5 = a_1 + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 4d = 12$$

$$\therefore a_1 + 2d = 6$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d)$$

$$= 3a_1 + 6d = 3(a_1 + 2d)$$

$$= 3 \cdot 6 = 18$$

$n > \frac{17}{2}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구한다.

절댓값 기호를 포함한 방정식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 경계로 하여 x 의 값의 범위를 나누어 본다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_k - a_m = \{a + (k-1)d\} - \{a + (m-1)d\} = (k-m)d$$

05 세 수 $\log_3 a, \log_3 b, 1$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 \log_3 b = \log_3 a + 1, \quad \log_3 b^2 = \log_3 3a$$

$$\therefore b^2 = 3a \quad \dots\dots ㉠$$

또 세 수 $\log_3 b, 1, \log_3 c$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 = \log_3 b + \log_3 c, \quad \log_3 bc = 2$$

$$\therefore bc = 9 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 $abc = 81$ 에 대입하면

$$9a = 81 \quad \therefore a = 9$$

$a = 9$ 를 ㉠에 대입하면 $b^2 = 27$

$$\therefore b = 3\sqrt{3} \quad (\because b > 0)$$

$b = 3\sqrt{3}$ 을 ㉡에 대입하면

$$3\sqrt{3}c = 9 \quad \therefore c = \sqrt{3}$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 9^2 + 27 + (\sqrt{3})^2$$

$$= 111 \quad \text{답 111}$$

06 조건 ㉠에서 세 수 $b, 0, c$ 가 이 순서대로 공차가 음수인 등차수열을 이루므로

$$c < 0 < b$$

또 $b + c = 0$ 이므로 $c = -b$

조건 ㉡에서 네 수 a, b, c, d 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + c, \quad 2c = b + d$$

$$\therefore a = 2b - c, \quad d = 2c - b$$

$c = -b$ 를 위의 두 식에 각각 대입하면

$$a = 3b, \quad d = -3b$$

$$\therefore |a| + |b| + |c| + |d|$$

$$= |3b| + |b| + |-b| + |-3b|$$

$$= 3b + b - (-b) - (-3b) \quad (\because b > 0)$$

$$= 8b$$

$$\text{즉 } 8b = 4 \text{이므로 } b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = 3b = \frac{3}{2} \quad \text{답 ③}$$

07 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 첫째항부터 제 9 항까지의 합이 90이므로

$$\frac{9\{2 \cdot (-30) + 8d\}}{2} = 90$$

$$-30 + 4d = 10 \quad \therefore d = 10$$

따라서 $a_{10} = -30 + 9 \cdot 10 = 60$, $a_6 = -30 + 5 \cdot 10 = 20$ 이므로

$$a_{10} - a_6 = 40 \quad \text{답 ④}$$

다른 풀이 $a_{10} - a_6 = (-30 + 9d) - (-30 + 5d) = 4d = 4 \cdot 10 = 40$

08 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} = 16 + 9d = -11 \quad \therefore d = -3$$

$$\therefore a_n = 16 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 19$$

$$a_n < 0 \text{에서 } -3n + 19 < 0$$

$$\therefore n > \frac{19}{3} = 6.3 \dots$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제 6 항까지 양수이고, 제 7 항부터 음수이다.

$$\begin{aligned} \therefore |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{10}| &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - (a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) \\ &= \frac{6(16+1)}{2} - \frac{4(-2-11)}{2} \\ &= 51 + 26 = 77 \end{aligned}$$

답 ②

09 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20 \text{에서}$$

$$\frac{5(2a_1 + 4d)}{2} = 20$$

$$\therefore a_1 + 2d = 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 20 + 120 = 140 \text{이므로}$$

$$\frac{10(2a_1 + 9d)}{2} = 140$$

$$\therefore 2a_1 + 9d = 28 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$a_1 = -4, d = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} &= \frac{5(a_{11} + a_{15})}{2} \\ &= \frac{5(36 + 52)}{2} \\ &= 220 \end{aligned}$$

답 220

다른 풀이 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = A,$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = B, \quad a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = C$$

라 하면

$$a_6 = a_1 + 5d, \quad a_7 = a_2 + 5d, \quad a_8 = a_3 + 5d,$$

$$a_9 = a_4 + 5d, \quad a_{10} = a_5 + 5d$$

$$\text{이므로 } B = A + 25d$$

$$\text{같은 방법으로 하면 } C = A + 50d$$

따라서 세 수 A, B, C 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2B = A + C, \quad 2 \cdot 120 = 20 + C$$

$$\therefore C = 220$$

$$\therefore a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 220$$

$$\mathbf{10} \quad a_6 = S_6 - S_5 = 6p + 2^6 - (5p + 2^5) = p + 32$$

$$\text{즉 } p + 32 = 34 \text{이므로 } p = 2$$

$$S_n = pn + 2^n = 2n + 2^n \text{에서}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 4$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n + 2^n - \{2(n-1) + 2^{n-1}\} \\ &= 2 + 2^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $a_1=4$ 는 $n=1$ 을 ⑦에 대입한 것과 다르므로

$$a_1 = 4, \quad a_n = 2 + 2^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

따라서 $a_2 = 2 + 2 = 4, \quad a_3 = 2 + 2^2 = 6, \quad a_4 = 2 + 2^3 = 10$ 이므로

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = 960$$

답 ②

$$\mathbf{11} \quad S_n = 2n^2 + 3n \text{에서 } a_1 = S_1 = 5 \text{이므로 } k \neq 1$$

$$\begin{aligned} \therefore a_k &= S_k - S_{k-1} \\ &= 2k^2 + 3k - \{2(k-1)^2 + 3(k-1)\} \\ &= 4k + 1 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 4k + 1 = 61 \text{이므로}$$

$$k = 15$$

답 ③

$$\mathbf{12} \quad S_n = 3n^2 - 4n + 1 \text{에서}$$

$$(i) \quad n=1 \text{일 때, } a_1 = S_1 = 0$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3n^2 - 4n + 1 - \{3(n-1)^2 - 4(n-1) + 1\} \\ &= 6n - 7 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $a_1=0$ 은 $n=1$ 을 ⑦에 대입한 것과 다르므로

$$a_1 = 0, \quad a_n = 6n - 7 \quad (n \geq 2)$$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} &= 0 + 11 + 23 + \dots + 107 \\ &= \frac{9(11 + 107)}{2} \\ &= 531 \end{aligned}$$

답 531

13 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r \neq 0, r \neq 1$)라 하면

$$a_8 - a_7 = -8(a_5 - a_4) \text{에서}$$

$$r^7 - r^6 = -8(r^4 - r^3)$$

$$r^6(r-1) = -8r^3(r-1)$$

이때 $r \neq 0, r \neq 1$ 이므로

$$r^3 = -8 \quad \therefore r = -2$$

$$\therefore a_6 = (-2)^5 = -32$$

답 -32

14 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 + a_6 = 14 \text{에서 } ar^2 + ar^5 = 14$$

$$\therefore ar^2(1 + r^3) = 14 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_2 a_4 - \log_2 a_2 = 1 + \log_2 a_5 \text{에서}$$

$$\log_2 \frac{a_4}{a_2} = \log_2 2a_5, \quad \frac{a_4}{a_2} = 2a_5$$

$$\frac{ar^3}{ar} = 2ar^4, \quad r^2 = 2ar^4$$

$$\therefore ar^2 = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$\frac{1}{2}(1 + r^3) = 14$$

$$r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

$r=3$ 을 ⑧에 대입하면

$$9a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{18}$$

$$\therefore a_4 + a_5 = \frac{1}{18} \cdot 3^3 + \frac{1}{18} \cdot 3^4 = 6$$

답 ③

15 등비수열 $\{2a_n\}$ 의 첫째항을 $2a$ 라 하면

$$2a_5 = 2a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad 2a_{10} = 2a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$\therefore a_5 = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad a_{10} = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$\therefore \frac{a_{10}}{a_5} = \frac{a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9}{a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

답 ⑤

다른 풀이 등비수열 $\{2a_n\}$ 의 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$2a_{10} = 2a_5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\therefore \frac{a_{10}}{a_5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

16 세 수 $x, y, 30$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2y = x + 30 \quad \dots\dots ㉠$$

또 세 수 $2, x, y$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$x^2 = 2y \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x^2 = x + 30, \quad x^2 - x - 30 = 0$$

$$(x+5)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = 6 \quad (\because x > 0)$$

$x = 6$ 을 ㉡에 대입하면

$$2y = 36 \quad \therefore y = 18$$

$$\therefore x + y = 24$$

답 ④

17 세 수 a_1, a_2, a_3 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_2^2 = a_1 a_3 = 16$$

또 세 수 a_2, a_3, a_4 도 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_3^2 = a_2 a_4 = 64 \quad \dots\dots ㉠$$

한편 ㉠에서 $a_4 = \frac{a_3^2}{a_2}$ 이므로

$$a_4^2 = \left(\frac{a_3^2}{a_2}\right)^2 = \frac{64^2}{16} = 256$$

$$\therefore a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 336$$

답 ⑤

다른 풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_1 a_3 = 16 \text{에서} \quad a_1^2 r^2 = 16 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_2 a_4 = 64 \text{에서} \quad a_1^2 r^4 = 64 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠÷㉡을 하면 $r^2 = 4$

$$\begin{aligned} \therefore a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 &= (a_1 r)^2 + (a_1 r^2)^2 + (a_1 r^3)^2 \\ &= a_1^2 r^2 (1 + r^2 + r^4) \\ &= 16(1 + 4 + 4^2) \\ &= 336 \end{aligned}$$

$b_n = 2a_n$ 이라 하면 수열 $\{b_n\}$ 의 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$b_{10} = b_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= b_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= b_5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\therefore 2a_{10} = 2a_5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

수열 $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$ 의 제 n 항은

$$a_n \cdot (-1)^{n-1}$$

$$= a_1 r^{n-1} \cdot (-1)^{n-1}$$

$$= a_1 \cdot (-r)^{n-1}$$

이므로 첫째항이 a_1 , 공비가 $-r$ 인 등비수열이다.

19 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$S_6 = \sqrt{3} + 1 \text{에서}$$

$$\frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1} = \sqrt{3} + 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_8 = 10S_4 \text{에서}$$

$$\frac{a_1(r^8 - 1)}{r - 1} = 10 \cdot \frac{a_1(r^4 - 1)}{r - 1}$$

$$\frac{a_1(r^4 - 1)(r^4 + 1)}{r - 1} = 10 \cdot \frac{a_1(r^4 - 1)}{r - 1}$$

$$r^4 + 1 = 10, \quad r^4 = 9$$

$$\therefore r = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3} \quad (\because r > 0)$$

$r = \sqrt{3}$ 을 ㉠에 대입하면

$$\frac{a_1\{(\sqrt{3})^6 - 1\}}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1, \quad 26a_1 = 2$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{13}$$

답 ④

20 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{10} = 20 \text{에서}$$

$$\frac{a_1(1 - r^{10})}{1 - r} = 20 \quad \dots\dots ㉠$$

수열 $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$ 는 공비가 $-r$ 인 등비수열이

므로 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{10} = -30$ 에서

$$\frac{a_1\{1 - (-r)^{10}\}}{1 - (-r)} = -30$$

$$\therefore \frac{a_1(1 - r^{10})}{1 + r} = -30 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠÷㉡을 하면

$$\frac{1+r}{1-r} = -\frac{2}{3}, \quad 3+3r = -2+2r$$

$$\therefore r = -5$$

$$\therefore \frac{a_3}{a_4} = \frac{1}{r} = -\frac{1}{5}$$

답 ②

21 주어진 수열은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$|S_n - 1| < 0.001 \text{에서}$$

$$\left|1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right| < \frac{1}{1000}$$

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \quad \therefore 2^n > 1000$$

이때 $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 10이다. 답 10

22 첫날 걸러 낸 오염 물질의 양을 a 라 하면 10일 동안 걸러 낸 오염 물질의 양의 합은

$$a + a \times 0.9 + a \times 0.9^2 + \dots + a \times 0.9^9$$

$$= \frac{a(1 - 0.9^{10})}{1 - 0.9} = \frac{a(1 - 0.3)}{0.1}$$

$$= 7a$$

18 세 수 $2a, \sqrt{\log_2 a^a}, 3$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(\sqrt{\log_2 a^a})^2 = 2a \cdot 3$$

$$a \log_2 a = 6a$$

$$\log_2 a = 6 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore a = 2^6 = 64$$

답 64

일품 BOX

따라서 $7a=ka$ 이므로
 $k=7$

답 7

23 원금 130만 원을 연이율 5%의 복리로 10년 동안
 예금했을 때의 원리합계는

$$130 \times (1+0.05)^{10} = 130 \times 1.6 = 208 \text{ (만 원)}$$

원금 a 만 원을 연이율 10%의 복리로 10년 동안 예금했
 을 때의 원리합계는

$$a(1+0.1)^{10} = a \times 2.6 = 2.6a \text{ (만 원)}$$

따라서 $208=2.6a$ 이므로

$$a = \frac{208}{2.6} = 80$$

답 80

24 매년 초에 적립하는 금액을 a 만 원이라 하면 2045
 년 말의 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & a(1+0.04) + a(1+0.04)^2 + a(1+0.04)^3 \\ & + \cdots + a(1+0.04)^{20} \\ & = \frac{a \times 1.04 \times (1.04^{20} - 1)}{1.04 - 1} \\ & = \frac{a \times 1.04 \times (2.2 - 1)}{0.04} \\ & = 31.2a \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

즉 $31.2a=2340$ 이므로

$$a=75$$

따라서 매년 초에 75만 원씩 적립해야 한다.

답 ②



1등급을 위한 **고난도 문제**

본책 70쪽

01 $a_{10}=10+9d$ 가 자연수가 되도록 하는 d 의 값은

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \dots, \frac{8}{9}$$

그런데 $d = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 또는 $d = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 이면 $a_4=10+3d$ 와
 $a_7=10+6d$ 가 자연수가 되므로 조건을 만족시키는 d 의
 값은

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + \frac{7}{9} + \frac{8}{9} = 3$$

답 ③

02 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_3 + a_6 = -\frac{7}{2}, a_3 a_6 = \frac{p}{2}$$

→ ①

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 2d, a_6 = 5d$$

이므로 $a_3 + a_6 = -\frac{7}{2}$ 에서

$$2d + 5d = -\frac{7}{2} \quad \therefore d = -\frac{1}{2}$$

→ ②

$0 < d < 10$ 에서
 $0 < 9d < 90$
 이때 $9d$ 가 자연수이어야
 하므로

$$\begin{aligned} 9d &= 1, 2, 3, \dots, 8 \\ \therefore d &= \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \\ &\dots, \frac{8}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2m-13}{2m-9} \\ &= \frac{2m-9-4}{2m-9} \\ &= 1 - \frac{4}{2m-9} \end{aligned}$$

$\frac{4}{2m-9}$ 의 값이 될 수 있
 는 수는 $-4, -2, 2, 40$
 이므로

$$2m-9 = -1, -2, 2, 1$$

$$\frac{a_4}{a_6} = 5 = a_9$$

$$\frac{a_5}{a_7} = -3 = a_5$$

따라서 $a_3 = -1, a_6 = -\frac{5}{2}$ 이므로

→ ③

$$p = 2a_3 a_6 = 5$$

→ ④

답 5

채점 기준	비율
① 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a_3, a_6 에 대한 식을 구할 수 있다.	30%
② 공차를 구할 수 있다.	30%
③ a_3, a_6 의 값을 구할 수 있다.	20%
④ p 의 값을 구할 수 있다.	20%

03 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$\frac{1}{a_n} = a + (n-1) \cdot \frac{1}{12} = \frac{n+12a-1}{12}$$

$$\therefore a_n = \frac{12}{n+12a-1}$$

이때 $a_3 : a_5 = 5 : 3$ 이므로

$$\frac{12}{12a+2} : \frac{12}{12a+4} = 5 : 3$$

$$\frac{3}{12a+2} = \frac{5}{12a+4}$$

$$36a+12=60a+10$$

$$24a=2 \quad \therefore a = \frac{1}{12}$$

따라서 $a_n = \frac{12}{n}$ 이므로

$$a_1 + a_2 = 12 + 6 = 18$$

답 ③

04 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d ($d \neq 0$)라
 하면 $a_{10}=7$ 에서

$$a + 9d = 7 \quad \dots\dots ㉑$$

$$a_5^2 + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2 \text{에서}$$

$$(a+4d)^2 + (a+5d)^2 = (a+6d)^2 + (a+7d)^2$$

$$2a^2 + 18ad + 41d^2 = 2a^2 + 26ad + 85d^2$$

$$8ad + 44d^2 = 0$$

$$\therefore 2a + 11d = 0 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a = -11, d = 2$$

따라서 $a_n = -11 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 13$ 이므로

→ ①

$$\frac{a_m}{a_{m+2}} = \frac{2m-13}{2(m+2)-13}$$

$$= \frac{2m-13}{2m-9}$$

$$= 1 - \frac{4}{2m-9}$$

→ ②

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 $2k+1$ (k 는 정수) 꼴이므로
 $\frac{a_m}{a_{m+2}}$ 이 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 되려면 $\frac{4}{2m-9}$ 가 $2l$ (l 은 정
 수) 꼴이어야 한다.

그런데 m 이 자연수이므로

$$2m-9 = -1 \text{ 또는 } 2m-9 = 1$$

$$\therefore m = 4 \text{ 또는 } m = 5$$

따라서 구하는 합은

$$4+5=9$$

→ ③

답 9

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40%
② $\frac{a_m}{a_{m+2}}$ 을 m 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
③ m 의 값의 합을 구할 수 있다.	40%

05 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1+a_2+a_3=b_4+b_5+b_6 \text{에서}$$

$$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)$$

$$=(b_1+3d)+(b_1+4d)+(b_1+5d)$$

$$3a_1+3d=3b_1+12d, \quad 9d=3(a_1-b_1)$$

$$9d=18 \quad \therefore d=2$$

$$\therefore a_6-b_8=(a_1+5d)-(b_1+7d)$$

$$=a_1-b_1-2d$$

$$=6-2 \cdot 2=2$$

답 ④

다른 풀이 세 수 a_1, a_2, a_3 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_1+a_3=2a_2$$

또 세 수 b_4, b_5, b_6 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b_4+b_6=2b_5$$

따라서 $a_1+a_2+a_3=b_4+b_5+b_6$ 에서

$$a_2+2a_2=b_5+2b_5 \quad \therefore a_2=b_5$$

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1+d=b_1+4d \quad \therefore a_1-b_1=3d$$

이때 $a_1-b_1=6$ 이므로

$$3d=6 \quad \therefore d=2$$

$$\therefore a_6-b_8=(a_1+5d)-(b_1+7d)$$

$$=a_1-b_1-2d$$

$$=6-2 \cdot 2=2$$

06 $n \geq 2$ 일 때, 세 수 a_{n-1}, a_n, a_{n+1} 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = 2n+1$$

$n=2$ 를 $a_{n-1}+a_{n+1}=4n+2$ 에 대입하면

$$a_1+a_3=10$$

이때 $a_3=2 \cdot 3+1=7$ 이므로 $a_1=3$

또 $a_{10}=2 \cdot 10+1=21$ 이므로

$$a_1+a_{10}=24$$

답 ③

07 $\overline{AB}=c, \overline{BC}=a, \overline{CA}=b$ 라 하면 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이므로

$$a^2=b^2+c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\triangle ABC \sim \triangle DAC \sim \triangle DBA$ (AA 닮음)이고, 닮음비는

$$\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{BA} = a : b : c$$

이므로

닮음비가 $m:n:l$ 인 세 평면도형의 넓이의 비는 $m^2:n^2:l^2$

$$\triangle ABC : \triangle DAC : \triangle DBA = a^2 : b^2 : c^2$$

$\triangle ABC = a^2k, \triangle DAC = b^2k, \triangle DBA = c^2k$ ($k>0$)라 하면 세 수 a^2k, b^2k, c^2k 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b^2k = a^2k + c^2k$$

$$\therefore 2b^2 = a^2 + c^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$a^2 - 2b^2 = b^2 - a^2, \quad 2a^2 = 3b^2$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{6}}{3}a \quad (\because a>0, b>0)$$

$$\therefore \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

답 ④

08 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 이차방정식 $ax^2 - 2bx + c = 0$ 에 대입하면

$$ax^2 - (a+c)x + c = 0$$

$$(ax-c)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{c}{a} \text{ 또는 } x = 1$$

→ ①

따라서 $\frac{c}{a} = 5, k=1$ 이므로

$$c = 5a, k=1$$

$c=5a$ 를 ①에 대입하면

$$2b = 6a \quad \therefore b = 3a$$

→ ②

$$\therefore k + \frac{bc}{a^2} = 1 + \frac{3a \cdot 5a}{a^2} = 16$$

→ ③

답 16

채점 기준	비율
① 주어진 이차방정식의 근을 구할 수 있다.	40%
② b, c 를 a 에 대한 식으로 나타내고 k 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $k + \frac{bc}{a^2}$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

09 $(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10})+(b_1+b_2+b_3+\dots+b_{10})$

$$= \frac{10(a_1+a_{10})}{2} + \frac{10(b_1+b_{10})}{2}$$

$$= 5(a_1+b_1+a_{10}+b_{10})$$

$$= 5(4+24)$$

$$= 140$$

답 140

다른 풀이 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 등차수열이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$ 도 등차수열이다.

$$\therefore (a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10})+(b_1+b_2+b_3+\dots+b_{10})$$

$$= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)$$

$$+\dots+(a_{10}+b_{10})$$

$$= \frac{10\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}}{2}$$

$$= \frac{10(4+24)}{2} = 140$$

10 도형 A_n 을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수를 a_n 이라 하면

일품 BOX

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_2 &= a_1 + 3 \cdot 4 = 16 \\ a_3 &= a_2 + 3 \cdot 4 = 28 \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공차가 12인 등차수열
이므로 구하는 합은

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_8 &= \frac{8(2 \cdot 4 + 7 \cdot 12)}{2} \\ &= 368 \end{aligned}$$

답 368

11 $a_1 = 3 + 6 + 9 = 18$

$$a_2 = 3 + 6 + 12 = 21$$

$$a_3 = 3 + 6 + 15 = 24$$

$\vdots$

$$a_k = 24 + 27 + 30 = 81$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 18, 공차가 3인 등차수열
이므로 $a_k = 81$ 에서

$$18 + (k-1) \cdot 3 = 81, \quad 3k + 15 = 81$$

$$3k = 66 \quad \therefore k = 22$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \frac{22(18 + 81)}{2} = 1089$$

답 1089

12 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$|a_{10}| = 4 |a_{13}| \text{에서}$$

$$|a + 9 \cdot (-5)| = 4 |a + 12 \cdot (-5)|$$

$$|a - 45| = 4 |a - 60|$$

$$a - 45 = -4(a - 60) \text{ 또는 } a - 45 = 4(a - 60)$$

$$\therefore a = 57 \text{ 또는 } a = 65$$

$$a = 57 \text{일 때, } a_{13} = 57 + 12 \cdot (-5) = -3$$

$$a = 65 \text{일 때, } a_{13} = 65 + 12 \cdot (-5) = 5$$

이때 $S_{12} > S_{13}$ 에서 $a_{13} < 0$ 이므로

$$a = 57$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{n\{2 \cdot 57 + (n-1) \cdot (-5)\}}{2} \\ &= \frac{-n(5n-119)}{2} \end{aligned}$$

$$S_k < 0 \text{에서 } \frac{-k(5k-119)}{2} < 0$$

$$k(5k-119) > 0$$

$$\therefore k > \frac{119}{5} = 23.8 \quad (\because k > 0)$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 24이다.

답 ②

13 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = n^2 + 2n$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 3$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned} \quad \cdots \cdots ①$$

$$\begin{aligned} a_{4n} &= 2 \cdot 4n + 1 = 8n + 1 \\ &= 9 + (n-1) \cdot 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + (n-1) \cdot 12 \\ &= 12n - 8 \end{aligned}$$

서로 다른 세 수의 합의 최
솟값

서로 다른 세 수의 합의 최
댓값

$$\begin{aligned} S_{13} &= S_{12} + a_{13} < 0 \text{이고} \\ S_{12} &> S_{13} > 0 \text{이므로} \\ a_{13} &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \text{은} \\ a_n &= 2pn - p + q, \text{ 즉} \\ a_n &= 6n - 5 \text{에 } n=1 \text{을 대} \\ &\text{입한 값과 다르다.} \end{aligned}$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

이때 $a_1 = 3$ 은 $n=1$ 을 ①에 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n + 1 \quad \cdots \cdots ①$$

따라서 수열 $\{a_{4n}\}$ 은 첫째항이 9, 공차가 8인 등차수열
이므로

$$\begin{aligned} a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} + a_{20} &= \frac{5(2 \cdot 9 + 4 \cdot 8)}{2} \\ &= 125 \end{aligned} \quad \cdots \cdots ②$$

답 125

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	60%
② $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} + a_{20}$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

14 $n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = S_n - S_{n-1}$$

$$\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = (\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})$$

이때 $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = a_n > 0$ 이므로

$$\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = 1 \quad (n \geq 2)$$

즉 수열 $\{\sqrt{S_n}\}$ 은 첫째항이 $\sqrt{S_1} = 1$, 공차가 1인 등차수
열이므로

$$\sqrt{S_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$$

따라서 $S_n = n^2$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= 10^2 - 9^2 = 19 \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

15 $S_n = pn^2 + qn + 5$ 에서 $a_1 = S_1 = p + q + 5$ 이므로

$$p + q + 5 = 6 \quad \therefore p + q = 1 \quad \cdots \cdots ①$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= pn^2 + qn + 5 - \{p(n-1)^2 + q(n-1) + 5\} \\ &= 2pn - p + q \end{aligned}$$

이므로 $a_{20} + a_{21} = 236$ 에서

$$(39p + q) + (41p + q) = 236$$

$$\therefore 40p + q = 118 \quad \cdots \cdots ②$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$p = 3, q = -2$$

따라서 $a_n = 6n - 5 \quad (n \geq 2)$ 이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 = 7 + 19 + 31 = 57 \quad \text{답 ④}$$

16 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ 이므로 수열 $\{pa_n + qa_{n+1}\}$ 의 첫째항은

$$pa_1 + qa_2 = 3p + 6q = 12 \quad \cdots \cdots ①$$

수열 $\{qa_n + pa_{n+1}\}$ 의 첫째항은

$$qa_1 + pa_2 = 6p + 3q = 15 \quad \cdots \cdots ②$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$p = 2, q = 1$$

따라서 수열 $\{2a_n + a_{n+1}\}$ 의 공비는

$$r = \frac{2a_2 + a_3}{2a_1 + a_2} = \frac{2 \cdot 6 + 12}{12} = 2$$

$$\therefore p + q + r = 5 \quad \text{답 ①}$$

17 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_4a_6 = a_3r \cdot a_5r = a_3a_5r^2 = 5r^2,$$

$$a_4a_7 = a_3r \cdot a_5r^2 = a_3a_5r^3 = 5r^3$$

$a_4a_6 = a_4a_7 - 20$ 에서

$$5r^2 = 5r^3 - 20, \quad r^3 - r^2 - 4 = 0$$

$$(r-2)(r^2+r+2) = 0$$

$$\therefore r = 2 \quad (\because r^2+r+2 > 0)$$

$$\therefore a_2a_8 = \frac{a_3}{r} \cdot a_5r^3 = a_3a_5r^2$$

$$= 5r^2 = 5 \cdot 2^2 = 20$$

답 ③

18 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{2k}{5-k}$$

$a_6 = a_4 \cdot r^2$ 이므로

$$8k+30 = 2k \cdot \left(\frac{2k}{5-k}\right)^2$$

$$(8k+30)(5-k)^2 = 8k^3$$

$$50k^2 + 100k - 750 = 0$$

$$k^2 + 2k - 15 = 0$$

$$(k+5)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 3 \quad (\because k > 0)$$

따라서 $r = \frac{6}{5-3} = 3$ 이므로

$$\frac{a_7+a_8}{a_6} = \frac{a_6(r+r^2)}{a_6} = r+r^2$$

$$= 3+3^2 = 12$$

답 ③

19 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 조건 ㉠에서

$$b_n = (a_1r^n)^2 - (a_1r^{n-1})^2$$

$$= a_1^2 r^{2n-2} (r^2 - 1)$$

$$= a_1^2 (r^2 - 1) (r^2)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이다. $\rightarrow 1$

이때 조건 ㉡에서 $\frac{b_4}{b_2} = 4$ 이므로

$$\frac{b_4(r^2)^3}{b_2r^2} = 4, \quad r^4 = 4$$

$$\therefore r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \quad (\because r > 1) \quad \rightarrow 2$$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1r}{a_1} + \frac{a_1r^3}{a_1r} = r + r^2$$

$$= 2 + \sqrt{2} \quad \rightarrow 3$$

답 $2 + \sqrt{2}$

채점 기준	비율
① 수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② r 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_4}{a_2}$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

20 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 한 변의 길이를 $2a$ 라 하면

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1D_2} = a \text{이므로}$$

$$\overline{A_2D_2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

따라서 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓음비가 $2 : \sqrt{2}$ 이므로 넓이의 비는

$$2^2 : (\sqrt{2})^2 = 2 : 1$$

같은 방법으로 하면 두 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$,

$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 넓이의 비는 $2 : 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$

은 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore a_n = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{a_m}{a_1} < \frac{1}{100} \text{에서} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} < \frac{1}{100}$$

$$\therefore 2^{m-1} > 100$$

이때 $2^6 = 64$, $2^7 = 128$ 이므로 자연수 m 의 최솟값은 8이다. $\rightarrow 8$

21 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 조건 ㉠에서

$$\frac{ar^{l-1}}{ar^{m-1}} = \left(\frac{ar^{10}}{ar^4}\right)^2, \quad r^{l-m} = r^{12}$$

$$\therefore l-m = 12 \quad (\because r \neq 1) \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \rightarrow 1$$

조건 ㉡에서 세 수 m , $m+l$, $m+6l$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(m+l)^2 = m(m+6l)$$

$$m^2 + 2ml + l^2 = m^2 + 6ml$$

$$l^2 = 4ml$$

$$\therefore l = 4m \quad (\because l \text{은 자연수}) \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \rightarrow 2$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$m = 4, \quad l = 16$$

$$\therefore l + 10m = 16 + 40 = 56 \quad \rightarrow 3$$

답 56

채점 기준	비율
① 조건 ㉠을 이용하여 l , m 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
② 조건 ㉡을 이용하여 l , m 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
③ $l+10m$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

22 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta = a, \quad a\beta = b \quad \rightarrow 1$$

세 수 a , β , a , 즉 a , β , $a + \beta$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\beta = a + (a + \beta)$$

$$\therefore \beta = 2a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수 a , a , b , 즉 a , $a + \beta$, $a\beta$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a + \beta)^2 = a \cdot a\beta \quad \rightarrow 2$$

㉠을 위의 식에 대입하면

$$(3a)^2 = a^2 \cdot 2a, \quad 9a^2 = 2a^3$$

$$a^2(2a - 9) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{9}{2}$$

일품 BOX

그런데 $\alpha=0$ 이면 $\beta=0$ 이므로 α, β 가 서로 다른 두 실근이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $\alpha = \frac{9}{2}$ 이므로

$$\beta - \alpha = 2\alpha - \alpha = \alpha = \frac{9}{2}$$

→ ③

$$\text{답 } \frac{9}{2}$$

채점 기준	비율
① 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 에 대한 식을 구할 수 있다.	20%
② 등차중항과 등비중항을 이용하여 α, β 에 대한 식을 구할 수 있다.	50%
③ $\beta - \alpha$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

23 세 수 $a, b, 8$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$b^2 = 8a = 2^2 \cdot 2a$$

a, b 는 자연수이므로 $a = 2m^2$ (m 은 자연수)이라 하면

$$b^2 = 2^2 \cdot 2^2 m^2 = (4m)^2 \quad \therefore b = 4m$$

이때 $1 \leq a \leq 100$ 이므로

$$1 \leq 2m^2 \leq 100 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq m^2 \leq 50$$

즉 m 의 값이 될 수 있는 수는

$$1, 2, 3, \dots, 7$$

이때 $m=2$ 이면 $a=b=8$ 이므로 a, b 가 서로 다른 두 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$7 - 1 = 6$$

답 ①

24 $\log_2(S_n + 2) = 1 - n$ 에서 $S_n + 2 = 2^{1-n}$

$$\therefore S_n = 2^{1-n} - 2$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = -1$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^{1-n} - 2 - (2^{2-n} - 2) \\ &= -2^{1-n} \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1 = -1$ 은 $n=1$ 을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$a_n = -2^{1-n}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = -(2^{1-n})^{-1} = -2^{n-1}$$

→ ①

따라서 수열 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 은 첫째항이 -1 , 공비가 2 인 등비수열이므로 첫째항부터 제 8 항까지의 합은

$$\frac{-(2^8 - 1)}{2 - 1} = -255$$

→ ②

답 -255

채점 기준	비율
① $\frac{1}{a_n}$ 을 구할 수 있다.	70%
② 수열 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 의 첫째항부터 제 8 항까지의 합을 구할 수 있다.	30%

$$\begin{aligned} r^{12} - 1 \\ &= (r^4)^3 - 1^3 \\ &= (r^4 - 1)(r^8 + r^4 + 1) \end{aligned}$$

첫째항이 a_1^4 이고 공비가 r^4 인 등비수열의 첫째항부터 제 5 항까지의 합

25 $3S_{12} = 7S_8$ 에서

$$\frac{3\sqrt{2}(r^{12} - 1)}{r - 1} = \frac{7\sqrt{2}(r^8 - 1)}{r - 1}$$

$$\frac{3\sqrt{2}(r^4 - 1)(r^8 + r^4 + 1)}{r - 1} = \frac{7\sqrt{2}(r^4 - 1)(r^4 + 1)}{r - 1}$$

$$3(r^8 + r^4 + 1) = 7(r^4 + 1), \quad 3r^8 - 4r^4 - 4 = 0$$

$r^4 = x$ 로 놓으면

$$3x^2 - 4x - 4 = 0, \quad (3x + 2)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

즉 $r^4 = -\frac{2}{3}$ 또는 $r^4 = 2$ 이고 $r^4 > 0$ 이므로

$$r^4 = 2$$

$$\therefore a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 + a_5^4 = \frac{a_1^4 \{ (r^4)^5 - 1 \}}{r^4 - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^4 (2^5 - 1)}{2 - 1}$$

$$= 124$$

답 ②

26 n 회 시행에서 색칠한 조각의 넓이의 합을 a_n 이라 하면

$$a_1 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4$$

$$a_2 = 3 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot 4^2 \right\} = 3$$

$$a_3 = 3^2 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^3 \cdot 4^2 \right\} = \frac{9}{4}$$

⋮

$$\therefore a_n = 3^{n-1} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^n \cdot 4^2 \right\} = 4 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4 , 공비가 $\frac{3}{4}$ 인 등비수열이므로 구하는 합은

$$\frac{4 \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{10} \right\}}{1 - \frac{3}{4}} = 16 \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{10} \right\}$$

답 ①

다른 풀이 n 회 시행 후 색칠하지 않은 조각들의 넓이의 합을 b_n 이라 하면

$$b_1 = \frac{3}{4} \cdot 4^2 = 12$$

$$b_2 = \frac{3}{4} \cdot b_1 = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$$

$$b_3 = \frac{3}{4} \cdot b_2 = \frac{3}{4} \cdot 9 = \frac{27}{4}$$

⋮

$$\therefore b_n = 12 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 12 , 공비가 $\frac{3}{4}$ 인 등비수열이므로 구하는 합은

$$\begin{aligned} 4^2 - b_{10} &= 16 - 12 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^9 \\ &= 16 - 16 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{10} \\ &= 16 \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{10} \right\} \end{aligned}$$

$$27 \quad S_n = \frac{-1 \cdot \{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)} = \frac{(-2)^n - 1}{3}$$

$S_n < -200$ 에서

$$\frac{(-2)^n - 1}{3} < -200$$

$$\therefore (-2)^n < -599$$

이때 $(-2)^9 = -512$, $(-2)^{10} = 1024$, $(-2)^{11} = -2048$

이므로 자연수 n 의 최솟값은 11이다. **답 ③**

참고 $\frac{(-2)^n - 1}{3} < -200$ 에서 n 이 짝수이면

$$\frac{2^n - 1}{3} < -200 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $2^n - 1 > 0$ 이므로 $\frac{2^n - 1}{3} > 0$

따라서 n 이 짝수이면 부등식 ㉠을 만족시키지 않으므로 n 은 홀수이다.

28 최초의 보험료가 100만 원이므로 보험에 가입한 후 n ($1 \leq n \leq 8$)번째 납입한 보험료는

$$100 \times (1 - 0.05)^{n-1} = 100 \times 0.95^{n-1} \text{ (만 원)}$$

따라서 8번 납입한 보험료의 총합은

$$\frac{100 \times (1 - 0.95^8)}{1 - 0.95} = \frac{100 \times (1 - 0.7 \times 0.95)}{0.05} = 670 \text{ (만 원)} \quad \dots\dots 1$$

이때 8번째 납입한 보험료가

$$100 \times 0.95^7 = 70 \text{ (만 원)}$$

이므로 9번째 납입한 보험료는

$$70 \times (1 + 0.1) = 77 \text{ (만 원)}$$

10번째 납입한 보험료는

$$77 \times (1 + 0.1) = 84.7 \text{ (만 원)} \quad \dots\dots 2$$

따라서 10번 납입한 보험료의 합은

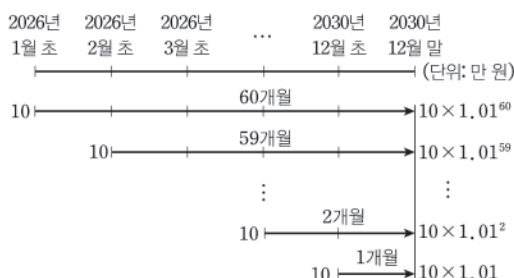
$$670 + 77 + 84.7 = 831.7 \text{ (만 원)}$$

즉 8317000원이다. **답 ③**

답 8317000원

채점 기준	비율
① 8번 납입한 보험료의 총합을 구할 수 있다.	50%
② 9, 10번째 납입한 보험료를 구할 수 있다.	40%
③ 10번 납입한 보험료의 총합을 구할 수 있다.	10%

29 매월 초 적립금의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



처음의 양을 a , 매년 일정한 감소율을 r 라 하면 n 년 후의 양은 $a(1-r)^n$

따라서 2030년 12월 말의 적립금의 원리합계는

$$10 \times 1.01 + 10 \times 1.01^2 + 10 \times 1.01^3 + \dots + 10 \times 1.01^{60} = \frac{10 \times 1.01 \times (1.01^{60} - 1)}{1.01 - 1}$$

$$= \frac{10 \times 1.01 \times (1.8 - 1)}{0.01}$$

$$= 808 \text{ (만 원)} \quad \dots\dots 1$$

또 808만 원에 대한 2031년 1월 초부터 2037년 12월 말까지의 원리합계는

$$808 \times (1 + 0.1)^7 = 808 \times 1.9 = 1535.2 \text{ (만 원)}$$

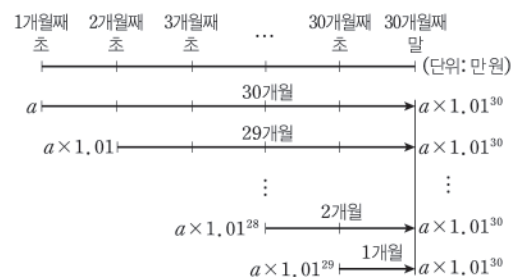
따라서 2037년 12월 말에 같이 인출하는 금액은

$$15352000 \text{ 원이다.} \quad \dots\dots 2$$

답 15352000원

채점 기준	비율
① 2030년 12월 말의 적립금의 원리합계를 구할 수 있다.	50%
② 2037년 12월 말에 같이 인출하는 금액을 구할 수 있다.	50%

30 매월 초 적립금의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 30개월째 말의 적립금의 원리합계는

$$a \times 1.01^{30} \times 30 = 30a \times 1.35 = 40.5a \text{ (만 원)}$$

즉 $40.5a = 2430$ 이므로

$$a = 60 \quad \dots\dots 60$$

내신 + 수능
1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제** 본책 75쪽

01 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d (d 는 자연수)라 하면 두 원 C_n , C_{n+1} 의 중심의 좌표가 각각 $(a_n, 0)$, $(a_{n+1}, 0)$ 이므로 중심 사이의 거리는

$$a_{n+1} - a_n = d$$

이때 두 원 C_n , C_{n+1} 이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$0 < d < 6$$

d 는 자연수이므로

$$d = 1, 2, 3, 4, 5$$

$a_{10} = 1 + 9d$ 이므로 a_{10} 은 $d = 5$ 일 때 최대이고 최댓값은

$$1 + 9 \cdot 5 = 46 \quad \dots\dots 46$$

일품 BOX

1등급 비밀노트

두 원의 위치 관계

두 원 O, O' 의 반지름의 길이를 각각 $r, r' (r > r')$, 중심 사이의 거리를 d 라 할 때, 두 원의 위치 관계에 따른 r, r', d 사이의 관계는 다음과 같다.

- ① 두 원이 서로 외부에서 접한다. $\Rightarrow d = r + r'$
- ② 두 원이 서로 다른 두 점에서 만난다. $\Rightarrow r - r' < d < r + r'$
- ③ 한 원이 다른 원의 내부에서 접한다. $\Rightarrow d = r - r'$

02 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 $1 - b_1$ 은 제 $(m+1)$ 항이므로

$$1 - b_1 = 1 + a_1 + md$$

이때 $a_1 = 1, b_1 = 24$ 이므로

$$-23 = 2 + md, \quad md = -25$$

$$\therefore d = -\frac{25}{m} \quad \dots\dots ①$$

m 은 자연수이고 d 는 정수이므로 ①을 만족시키는 m, d 의 순서쌍 (m, d) 는

$$(1, -25), (5, -5), (25, -1)$$

(i) $m=1, d=-25$ 일 때,

주어진 등차수열에서 $5 - b_5$ 는 제6항이므로

$$5 - b_5 = 2 + 5 \cdot (-25) = -123$$

$$\therefore b_5 = 128$$

$$\therefore m + b_5 = 129$$

(ii) $m=5, d=-5$ 일 때,

주어진 등차수열에서 $5 - b_5$ 는 제10항이므로

$$5 - b_5 = 2 + 9 \cdot (-5) = -43$$

$$\therefore b_5 = 48$$

$$\therefore m + b_5 = 53$$

(iii) $m=25, d=-1$ 일 때,

주어진 등차수열에서 $5 - b_5$ 는 제30항이므로

$$5 - b_5 = 2 + 29 \cdot (-1) = -27$$

$$\therefore b_5 = 32$$

$$\therefore m + b_5 = 57$$

이상에서 $m + b_5$ 의 최솟값은 53이다. ②

03 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d > 0$)라 하면

$|a_5 - 2k| = |a_9 - 2k|$ 에서

$$a_5 - 2k = -(a_9 - 2k), \quad a_5 + a_9 = 4k$$

$$2a_1 + 12d = 4k \quad \therefore k = \frac{a_1 + 6d}{2} \quad \dots\dots ①$$

같은 방법으로 하면 $|a_6 - \frac{5}{2}k| = |a_{12} - \frac{5}{2}k|$ 에서

$$a_6 + a_{12} = 5k, \quad 2a_1 + 16d = 5k$$

$$\therefore k = \frac{2a_1 + 16d}{5} \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서

$$\frac{a_1 + 6d}{2} = \frac{2a_1 + 16d}{5}$$

$$5a_1 + 30d = 4a_1 + 32d$$

$$\therefore d = \frac{1}{2}a_1$$

$$d = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$A_1 - A_2 = \emptyset$$

$$A_1 - A_2 = \{1\}$$

$$n(A_3) = a_3 = 7$$

$$A_2 - A_3 = \{3, 4\}$$

$$1 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$n(A_5) = a_5 = 11$$

$$\begin{aligned} &\text{첫째항이 } 59, \text{ 공차가 } 1\text{인} \\ &\text{등차수열의 제61항이므로} \\ &59 + (61-1) \cdot 1 \\ &= 119 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_5 - 2k = a_9 - 2k \text{이면} \\ &a_5 = a_9 \\ &\text{따라서 } d = 0 \text{이므로 공차} \\ &\text{가 양수라는 조건을 만족} \\ &\text{시키지 않는다.} \end{aligned}$$

따라서 $a_{10} = 11$ 에서

$$a_1 + \frac{9}{2}a_1 = 11, \quad \frac{11}{2}a_1 = 11$$

$$\therefore a_1 = 2$$

②

04 조건 ㉗에서 $A_1 = \{1, 2, 3\}$ 이므로

$$a_1 = 3$$

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

$n(A_2) = a_2 = 5$ 이므로

$$1 \in A_2 \text{ 이면 } A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$1 \notin A_2, 2 \in A_2 \text{ 이면 } A_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

위의 두 경우 모두 $n(A_1 - A_2) = 2$ 를 만족시키지 않으므로 집합 A_2 는 1, 2를 원소로 갖지 않고 3을 반드시 원소로 가져야 한다.

$$\therefore A_2 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

같은 방법으로 하면

$$A_3 = \{5, 6, 7, \dots, 11\}$$

한편 $n(A_4) = a_4 = 9$ 이고 $n(A_3 - A_4) = 2$ 이므로

$$A_4 = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$\text{또는 } A_4 = \{7, 8, 9, \dots, 15\}$$

그런데 조건 ㉘에서 $(A_2 - A_3) \cap A_4 = \emptyset$ 이므로

$$A_4 = \{7, 8, 9, \dots, 15\}$$

같은 방법으로 하면

$$A_5 = \{9, 10, 11, \dots, 19\}$$

$\vdots$

집합 A_n 의 원소 중 가장 작은 수를 b_n 이라 하면

$$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 5, b_4 = 7, \dots$$

즉 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$b_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$$

$$\therefore b_{30} = 2 \cdot 30 - 1 = 59$$

이때 $a_{30} = 2 \cdot 30 + 1 = 61$ 이므로

$$A_{30} = \{59, 60, 61, \dots, 119\}$$

$n > 30$ 인 자연수 n 에 대하여 $A_{30} \cap A_n = \emptyset$ 이라면 $b_n > 119$ 이어야 하므로

$$2n - 1 > 119 \quad \therefore n > 60$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 61이다. ⑥1

참고 $b_{61} = 2 \cdot 61 - 1 = 121, a_{61} = 2 \cdot 61 + 1 = 123$ 이므로

$$A_{61} = \{121, 122, 123, \dots, 243\}$$

$$\therefore A_{30} \cap A_{61} = \emptyset$$

05 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 a_1 이므로

$$a_n = a_1 + (n-1)a_1 = a_1 n$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(a_1 + a_1 n)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}a_1(n+1)$$

$S_n = a_n b_n$ 에서

$$S_n = a_1 n \cdot \frac{1}{2}a_1(n+1) = \frac{1}{2}a_1^2 n(n+1)$$

이므로 $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} c_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}a_1^2 n(n+1) - \frac{1}{2}a_1^2 n(n-1) \\ &= a_1^2 n \end{aligned}$$

$$c_5 - c_2 = 48 \text{에서} \quad 5a_1^2 - 2a_1^2 = 48$$

$$3a_1^2 = 48, \quad a_1^2 = 16$$

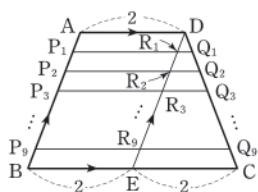
$$\therefore a_1 = 4 \quad (\because a_1 > 0)$$

$$\text{따라서 } a_1 = 4, b_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4, c_{10} = 4^2 \cdot 10 = 160 \text{이므로}$$

$$a_1 + b_1 + c_{10} = 168$$

답 ②

06 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 위에 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ 인 점 E 를 잡고, $\overline{P_k Q_k}$ ($k=1, 2, 3, \dots, 9$)와 $\overline{DE}$ 의 교점을 R_k 라 하면



$$\triangle DEC \sim \triangle DR_k Q_k \quad (\text{AA 답음})$$

이고, 답음비는 $10 : k$ 이다.

즉 $\overline{EC} : \overline{R_k Q_k} = 10 : k$ 이므로

$$2 : \overline{R_k Q_k} = 10 : k \quad \therefore \overline{R_k Q_k} = \frac{k}{5}$$

$$\therefore \overline{P_k Q_k} = \overline{P_k R_k} + \overline{R_k Q_k} = 2 + \frac{k}{5}$$

따라서 $\overline{P_1 Q_1}, \overline{P_2 Q_2}, \overline{P_3 Q_3}, \dots, \overline{P_9 Q_9}$ 의 길이는 첫째항이 $\frac{11}{5}$, 공차가 $\frac{1}{5}$ 인 등차수열을 이루고

$$\overline{P_9 Q_9} = 2 + \frac{9}{5} = \frac{19}{5} \text{이므로}$$

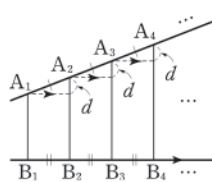
$$\begin{aligned} \overline{P_1 Q_1} + \overline{P_2 Q_2} + \overline{P_3 Q_3} + \dots + \overline{P_9 Q_9} &= \frac{9\left(\frac{11}{5} + \frac{19}{5}\right)}{2} \\ &= \frac{9 \cdot 6}{2} = 27 \end{aligned}$$

답 27

1등급 비밀노트

오른쪽 그림과 같이 두 직선 사이에 일정한 간격으로 평행하게 놓여진 선분

$A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, A_4 B_4, \dots$ 의 길이는 이 순서대로 공차가 d 인 등차수열을 이룬다.



07 $a_n = b_n - 1$ ($n=1, 2, 3, 4, 5$)이므로

$$\{a_n | n=1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$= \{-54, -24, 16, 36, 81\}$$

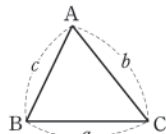
이때 $|r| > 1$ 이므로 $r < -1$

즉 $a_1 = 16, a_2 = -24, a_3 = 36, a_4 = -54, a_5 = 81$ 이므로

$$r = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore a_3 + 6r = 36 + 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 27$$

답 27



$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{에서} \\ b^2 &= c^2 + a^2 \\ &\quad - 2ca \cos B \end{aligned}$$

08 조건 (가)에 의하여

$$2B = A + C$$

이때 $A + B + C = \pi$ 이므로

$$3B = \pi \quad \therefore B = \frac{\pi}{3}$$

조건 (나)에 의하여

$$b^2 = a(a+c) = a^2 + ac \quad \dots\dots ㉠$$

한편 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \frac{\pi}{3} \\ &= c^2 + a^2 - ca \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$a^2 + ac = c^2 + a^2 - ca$$

$$c(c-2a) = 0 \quad \therefore c = 2a \quad (\because c > 0)$$

$c = 2a$ 를 ㉠에 대입하면

$$b^2 = 3a^2$$

$$c^2 = 4a^2 \text{이고 } a^2 + b^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \text{이므로}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이므로

$$C = \frac{\pi}{2} \quad \text{답 ②}$$

09 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면 첫째항부터 제 m 항까지의 합이 4095이므로

$$\frac{a\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 4095$$

$$\therefore 2a - a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = 4095 \quad \dots\dots ㉠$$

한편 $a_m = 1$ 이므로

$$a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$2a - 1 = 4095 \quad \therefore a = 2048$$

$a = 2048$ 을 ㉡에 대입하면

$$2048 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = 1 \quad \therefore 2^{12-m} = 1$$

즉 $12 - m = 0$ 이므로

$$m = 12 \quad \text{답 ③}$$

$$\begin{aligned} 2048 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} &= 2^{11} \cdot 2^{-m+1} \\ &= 2^{12-m} \end{aligned}$$

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

10 원 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4^n}$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은

$$y = 2x + \frac{\sqrt{5}}{2^n}, y = 2x - \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

직선 $y = 2x + \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ 의 x 절편과 y 절편은 각각

$$-\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}, \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

이고 직선 $y = 2x - \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ 의 x 절편과 y 절편은 각각

$$\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}}, -\frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}} \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{5}}{2^n} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\sqrt{5}}{2^{n+1}} \right| \cdot \left| -\frac{\sqrt{5}}{2^n} \right| \\ &= \frac{5}{2^{2n+2}} + \frac{5}{2^{2n+2}} \\ &= \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{5}{8}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} &= \frac{\frac{5}{8} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{6} \left(1 - \frac{1}{2^{20}} \right) \quad \text{답 ③} \end{aligned}$$

11 2026년의 연매출액을 a 원이라 하면 2035년의 연매출액은 ar^9 원이므로

$$\begin{aligned} ar^9 &= 8a, \quad r^9 = 8 \\ \therefore r &= \sqrt[9]{8} = \sqrt[3]{2} = 1.26 \end{aligned}$$

따라서 2026년부터 2035년까지의 연매출액의 합은

$$\begin{aligned} \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} &= \frac{a(8 \times 1.26 - 1)}{1.26 - 1} \\ &= \frac{9.08}{0.26}a = \frac{454}{13}a \end{aligned}$$

이므로 $p=13, q=454$

$$\therefore p+q=467 \quad \text{답 467}$$

12 2018년까지의 피해량의 합을 a 라 하면 2019년부터 2024년까지의 피해량은 다음 표와 같다.

년도	2019	2020	2021	2022	2023	2024
피해량	a	$2a$	$4a$	$8a$	$16a$	$32a$

2025년의 피해량은 2024년의 피해량과 같고, 2026년부터는 피해량이 전년도 $\frac{1}{2}$ 이므로 2025년부터 2030년까지의 피해량은 다음 표와 같다.

년도	2025	2026	2027	2028	2029	2030
피해량	$32a$	$16a$	$8a$	$4a$	$2a$	a

따라서 2030년까지의 농작물의 피해량의 합은

$$\begin{aligned} &(a + a + 2a + 4a + 8a + 16a + 32a) \\ &+ (32a + 16a + 8a + 4a + 2a + a) \\ &= a + 2(a + 2a + 4a + 8a + 16a + 32a) \\ &= a + 2 \cdot \frac{a(2^6 - 1)}{2 - 1} \\ &= a + 126a \\ &= 127a \end{aligned}$$

이므로 2030년까지의 농작물의 피해량의 합은 2018년까지의 농작물의 피해량의 합의 127배이다. **답 ①**

$$\begin{aligned} &\frac{5}{2^{2n+2}} + \frac{5}{2^{2n+2}} \\ &= \frac{10}{4 \cdot 4^n} = \frac{10}{16 \cdot 4^{n-1}} \\ &= \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^{10} &= r^9 \cdot r \\ &= 8 \times 1.26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} 1 - \sum_{k=1}^n 1 &= 2n - n \\ &= n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{수열 } 40, 38, 36, 34, \\ &32, \dots \text{의 첫째항이 } 40, \\ &\text{공차가 } -2 \text{인 등차수열이} \\ &\text{므로 일반항은} \\ &40 + (n-1) \cdot (-2) \\ &= 42 - 2n \end{aligned}$$

첫째항이 a , 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 6항까지의 합

09 수열의 합

개념 & 핵심 기술

본책 77쪽

01 $\sum_{k=1}^{19} a_{k+1} - \sum_{i=2}^{20} a_{i-1}$

$$\begin{aligned} &= (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19}) \\ &= a_{20} - a_1 = a_1 + 19 \cdot 3 - a_1 \\ &= 57 \quad \text{답 57} \end{aligned}$$

02 $\sum_{k=1}^{12} (a_k + 2)(b_k + 4) = \sum_{k=1}^{12} (a_k b_k + 4a_k + 2b_k + 8)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{12} a_k b_k + 2 \sum_{k=1}^{12} (2a_k + b_k) + \sum_{k=1}^{12} 8 \\ &= 15 + 2 \cdot 21 + 8 \cdot 12 \\ &= 153 \quad \text{답 153} \end{aligned}$$

03 $\sum_{k=n+1}^{2n} (2a_k + 1) = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} a_k + \sum_{k=n+1}^{2n} 1$

$$\begin{aligned} &= 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{2n} 1 - \sum_{k=1}^n 1 \right) \\ &= 2 \cdot (10 - 4) + n = n + 12 \end{aligned}$$

따라서 $n + 12 = 27$ 이므로 $n = 15$ **답 ①**

04 주어진 수열의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(42 - 2n) = -2n^2 + 42n$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (-2k^2 + 42k) = -2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 42 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= -2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 42 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 1540 \quad \text{답 ②} \end{aligned}$$

05 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -3, \quad \alpha\beta = -2$$

$$\begin{aligned} &\therefore \sum_{k=1}^{20} (k + \alpha)(k + \beta) \\ &= \sum_{k=1}^{20} \{k^2 + (\alpha + \beta)k + \alpha\beta\} \\ &= \sum_{k=1}^{20} (k^2 - 3k - 2) \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 2 \\ &= \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} - 3 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - 2 \cdot 20 \\ &= 2200 \quad \text{답 ①} \end{aligned}$$

06 $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \sum_{k=3}^{10} k + \cdots + \sum_{k=10}^{10} k$

$$\begin{aligned} &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 10) + (2 + 3 + 4 + \cdots + 10) \\ &\quad + (3 + 4 + 5 + \cdots + 10) + \cdots + 10 \\ &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 10 \cdot 10 \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385 \quad \text{답 385} \end{aligned}$$

07 $a_n = -5 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 8$ 이므로
 $a_{n+2} = 3(n+2) - 8 = 3n - 2$
 $\therefore \sum_{k=1}^{15} (a_k + a_{k+2}) = \sum_{k=1}^{15} (3k - 8 + 3k - 2)$
 $= \sum_{k=1}^{15} (6k - 10)$
 $= 6 \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} - 10 \cdot 15$
 $= 570$

답 570

08 $2^{2k-1} = \frac{1}{2} \cdot 4^k$ 이므로
 $\sum_{k=1}^{10} 2^{2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} 4^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{4(4^{10}-1)}{4-1}$
 $= \frac{2(2^{20}-1)}{3} = \frac{2^{21}-2}{3}$
 $\therefore p = 21$

답 21

09 $\sqrt{n} + a_n = b_n$ 이라 하면 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = n^2 + 1$$

(i) $n=1$ 일 때, $b_1 = S_1 = 2$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 1 - \{(n-1)^2 + 1\} \\ &= 2n - 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $b_1 = 2$ 는 $n=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입한 것과 다르므로

$$b_1 = 2, b_n = 2n - 1 \quad (n \geq 2)$$

$a_n = b_n - \sqrt{n}$ 이므로

$$a_1 = b_1 - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1,$$

$$a_n = 2n - 1 - \sqrt{n} \quad (n \geq 2)$$

따라서 $a_{25} = 2 \cdot 25 - 1 - \sqrt{25} = 44$ 이므로

$$a_1 + a_{25} = 45$$

답 4

10 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1,$
 $b_n = 2 + (n-1) \cdot 1 = n + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right) \\ &= \left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} \right) + \left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} \right) + \dots + \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) \\ &= \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{-3n}{2n+4} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right) < -1 \text{에서}$$

$$\frac{-3n}{2n+4} < -1, \quad -3n < -2n-4$$

$$\therefore n > 4$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

답 5

11 $S_n = n^2 + 2n$ 에서

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 3$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})}{(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

항이 연달아 소거될 때,
앞에서 첫 번째 수가 남으
면 뒤에서도 첫 번째 수가
남는다.

$2n+4 > 0$ 이므로 양변에
 $2n+4$ 를 곱해도 부등호
의 방향은 변하지 않는다.

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $a_1 = 3$ 은 $n=1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n + 1$$

$$\therefore a_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{27} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right)$$

$$= \frac{4}{27}$$

답 4

12 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$ 이므로

$$a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{60} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$$

$$= \sum_{k=1}^{60} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{60} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{121} - \sqrt{119}) \}$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{121} - 1)$$

$$= 5$$

답 5

1등급을 위한 고난도 문제

본책 79쪽

01 $\sum_{k=1}^m k(a_k - a_{k+1})$

$$= 1 \cdot (a_1 - a_2) + 2 \cdot (a_2 - a_3) + \dots + m \cdot (a_m - a_{m+1})$$

$$= a_1 + (2-1)a_2 + (3-2)a_3 + \dots + \{m - (m-1)\}a_m - ma_{m+1}$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m - ma_{m+1}$$

$$= \sum_{k=1}^m a_k - ma_{m+1}$$

$$= 50 - ma_{m+1}$$

따라서 $50 - ma_{m+1} = 100$ 이므로

$$ma_{m+1} = -50$$

답 -50

02 점 (x_n, y_n) 이 $y = 2(x-1)^2$ 의 그래프 위의 점이므로

$$y_n = 2(x_n - 1)^2 = 2x_n^2 - 4x_n + 2$$

→ 1

일품 BOX

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^9 y_k &= \sum_{k=1}^9 (2x_k^2 - 4x_k + 2) \\ &= 2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 - 4 \sum_{k=1}^9 x_k + \sum_{k=1}^9 2 \\ &= 2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 - 4 \cdot 36 + 2 \cdot 9 \\ &= 2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 - 126\end{aligned}$$

→ 2

따라서 $2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 - 126 = 192$ 이므로

$$2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 = 318 \quad \therefore \sum_{k=1}^9 x_k^2 = 159$$

→ 3

답 159

채점 기준	비율
① y_n 을 x_n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
② $\sum_{k=1}^9 y_k$ 를 $\sum_{k=1}^9 x_k^2$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
③ $\sum_{k=1}^9 x_k^2$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

03 $\sum_{k=1}^{10} (x - a_k)^2$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{10} (x^2 - 2a_k x + a_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} x^2 - \sum_{k=1}^{10} 2a_k x + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 \\ &= 10x^2 - 2x \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 \\ &= 10 \left(x^2 - \frac{1}{5} x \sum_{k=1}^{10} a_k \right) + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 \\ &= 10 \left(x - \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} a_k \right)^2 + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \frac{1}{10} \left(\sum_{k=1}^{10} a_k \right)^2\end{aligned}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{10} (x - a_k)^2$ 은 $x = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} a_k$ 일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 28$ 이므로

$$\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{1}{10} \cdot 28 = \frac{14}{5}$$

따라서 $p=5, q=14$ 이므로 $p+q=19$

답 ④

04 $A_n = \sum_{k=1}^n (a_k + a_{k+1})$

$$\begin{aligned}&= (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) \\ &\quad + \cdots + (a_n + a_{n+1}) \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} \\ &\quad + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_n &= \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) \\ &\quad + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n}\end{aligned}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 2인 등차수열이므로

$$\begin{aligned}B_n - A_n &= (a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots + a_{2n}) \\ &\quad - (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n) \\ &= (a_{n+2} - a_2) + (a_{n+3} - a_3) + (a_{n+4} - a_4) \\ &\quad + \cdots + (a_{2n} - a_n) \\ &= 2n + 2n + 2n + \cdots + 2n = 2n(n-1)\end{aligned}$$

→ 1

공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
 $a_{n+k} = a_n + kd$
 $\Leftrightarrow a_{n+k} - a_n = kd$

i 는 상수로 생각한다.

$2n0 \mid (n-1)$ 개

따라서 $B_m - A_m = 220$ 에서

$$2m(m-1) = 220, \quad m^2 - m - 110 = 0$$

$$(m+10)(m-11) = 0$$

$$\therefore m = 11 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

→ 2

답 11

채점 기준	비율
① $B_n - A_n$ 을 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	70%
② m 의 값을 구할 수 있다.	30%

05 $|\log_2 x - n^2| < 1$ 에서

$$-1 < \log_2 x - n^2 < 1$$

$$n^2 - 1 < \log_2 x < n^2 + 1$$

$$\therefore 2^{n^2-1} < x < 2^{n^2+1}$$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 개수 a_n 은

$$a_n = 2^{n^2+1} - 2^{n^2-1} - 1 = 3 \cdot 2^{n^2-1} - 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \log_2 (a_k + 1) = \sum_{k=1}^{10} \log_2 (3 \cdot 2^{k^2-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (\log_2 3 + k^2 - 1)$$

$$= 10 \log_2 3 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 10$$

$$= 375 + 10 \log_2 3$$

따라서 $p=375, q=10$ 이므로

$$p+q=385$$

답 ③

06 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = n+1, \quad \alpha_n \beta_n = -(n+2)$$

$$\therefore \alpha_n^2 + \beta_n^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n \beta_n$$

$$= (n+1)^2 + 2(n+2)$$

$$= n^2 + 4n + 5$$

→ 1

$$\therefore \sum_{k=1}^7 (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \sum_{k=1}^7 (k^2 + 4k + 5)$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} + 4 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} + 5 \cdot 7$$

$$= 287$$

→ 2

답 287

채점 기준	비율
① $\alpha_n^2 + \beta_n^2$ 을 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
② $\sum_{k=1}^7 (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ 의 값을 구할 수 있다.	50%

07 $\sum_{i=1}^8 \left\{ \sum_{j=1}^i \frac{j(i^3 - i^2 + 4)}{i(i+1)} \right\}$

$$= \sum_{i=1}^8 \left\{ \frac{i^3 - i^2 + 4}{i(i+1)} \sum_{j=1}^i j \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^8 \left\{ \frac{i^3 - i^2 + 4}{i(i+1)} \cdot \frac{i(i+1)}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 (i^3 - i^2 + 4)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{8 \cdot 9}{2} \right)^2 - \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 4 \cdot 8 \right]$$

$$= 562$$

답 ⑤

08 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 2, 공비가 3이므로

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

이때 a_n 의 양의 약수의 개수 b_n 은

$$b_n = (1+1)(n-1+1) = 2n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{40} b_k = \sum_{k=1}^{40} 2k = 2 \cdot \frac{40 \cdot 41}{2} = 1640$$

답 ③

$p^m q^n$ (p, q 는 서로 다른 소수, m, n 은 자연수)으로 소인수분해 되는 자연수의 양의 약수의 개수
 $\Rightarrow (m+1)(n+1)$

첫째항이 2^2 , 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 7항까지의 합과 같다.

09 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} a_{k+2} - \sum_{k=2}^{21} a_k &= (a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{22}) \\ &\quad - (a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{21}) \\ &= a_{22} - a_2 \\ &= (1 + 21d) - (1 + d) \\ &= 20d \end{aligned}$$

따라서 $20d = 40$ 이므로

$$d = 2$$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

$$a_{3n} = 6n-1, a_{3n+1} = 6n+1, a_{3n+2} = 6n+3 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^8 (a_{3k} + a_{3k+1} + a_{3k+2}) \\ &= \sum_{k=1}^8 (6k-1 + 6k+1 + 6k+3) \\ &= \sum_{k=1}^8 (18k+3) \\ &= 18 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} + 3 \cdot 8 \\ &= 672 \end{aligned}$$

답 672

$$\begin{aligned} a_{3n} &= 2 \cdot 3n - 1 \\ &= 6n - 1, \\ a_{3n+1} &= 2(3n+1) - 1 \\ &= 6n + 1, \\ a_{3n+2} &= 2(3n+2) - 1 \\ &= 6n + 3 \end{aligned}$$

다른 풀이 ▶ 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$\sum_{k=1}^{20} a_{k+2} - \sum_{k=2}^{21} a_k = a_{22} - a_2 = 20d$$

따라서 $20d = 40$ 이므로 $d = 2$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

$$\begin{aligned} &\therefore \sum_{k=1}^8 (a_{3k} + a_{3k+1} + a_{3k+2}) \\ &= \sum_{k=1}^8 a_k - \sum_{k=1}^2 a_k \\ &= \sum_{k=1}^{26} (2k-1) - (a_1 + a_2) \\ &= 2 \cdot \frac{26 \cdot 27}{2} - 26 - (1 + 3) \\ &= 672 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^8 (a_{3k} + a_{3k+1} + a_{3k+2}) \\ &= (a_3 + a_4 + a_5) \\ &\quad + (a_6 + a_7 + a_8) + \dots \\ &\quad + (a_{24} + a_{25} + a_{26}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \leq n \leq 20 \text{ 일 때,} \\ a_n &= 4n-2 \\ &= 2 + (n-1) \cdot 4 \end{aligned}$$

이므로 $a_2, a_3, a_4, \dots, a_{20}$ 은 공차가 4인 등차수열을 이루고, $a_3, a_5, a_7, \dots, a_{19}$ 은 공차가 8인 등차수열을 이룬다.

$$\begin{aligned} a_3 &= 4 \cdot 3 - 2 = 10, \\ a_{19} &= 4 \cdot 19 - 2 = 74 \end{aligned}$$

10 $S_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$ 에서

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 0$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} - \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = 0$ 은 $n=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입한 것과 다르므로

$$a_1 = 0, a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geq 2)$$

→ ①

$$\text{따라서 } k \geq 2 \text{ 일 때 } \frac{a_k}{a_{2k}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}} = 2^k \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 \frac{a_k}{a_{2k}} &= \frac{a_1}{a_2} + \sum_{k=2}^8 2^k \\ &= 0 + \frac{2^2(2^7-1)}{2-1} \\ &= 508 \end{aligned}$$

→ ②

답 508

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	60%
② $\sum_{k=1}^8 \frac{a_k}{a_{2k}}$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

11 $na_n = b_n$ 이라 하면 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 $S_n = 2n^3 + 2n^2$

(i) $n=1$ 일 때, $b_1 = S_1 = 4$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^3 + 2n^2 - \{2(n-1)^3 + 2(n-1)^2\} \\ &= 6n^2 - 2n \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $b_1 = 4$ 는 $n=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입한 것과 같으므로

$$b_n = 6n^2 - 2n$$

즉 $na_n = 6n^2 - 2n$ 이므로 $a_n = 6n - 2$

따라서 $a_{2n} = 12n - 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 a_{2k} &= \sum_{k=1}^6 (12k - 2) \\ &= 12 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} - 2 \cdot 6 \\ &= 240 \end{aligned}$$

답 ②

12 $S_n = \begin{cases} 2n^2 - 1 & (1 \leq n \leq 20) \\ 1 & (n \geq 21) \end{cases}$ 에서

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1$

(ii) $2 \leq n \leq 20$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 1 - \{2(n-1)^2 - 1\} \\ &= 4n - 2 \end{aligned}$$

(iii) $n=21$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_{21} &= S_{21} - S_{20} \\ &= 1 - (2 \cdot 20^2 - 1) \\ &= -798 \end{aligned}$$

(iv) $n \geq 22$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} a_{2k-1} &= a_1 + (a_3 + a_5 + \dots + a_{19}) \\ &\quad + a_{21} + (a_{23} + a_{25} + \dots + a_{39}) \\ &= 1 + \frac{9(a_3 + a_{19})}{2} - 798 + 0 \\ &= \frac{9(10 + 74)}{2} - 797 \\ &= -419 \end{aligned}$$

답 ①

13 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = 4^{n+1} - 4$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 12$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 4^{n+1} - 4 - (4^n - 4) \\ &= 3 \cdot 4^n \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1=12$ 는 $n=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 3 \cdot 4^n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^m \frac{a_{k+3} - a_{k+2}}{a_{k+1} - a_k} &= \sum_{k=1}^m \frac{3 \cdot 4^{k+3} - 3 \cdot 4^{k+2}}{3 \cdot 4^{k+1} - 3 \cdot 4^k} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{4^2(3 \cdot 4^{k+1} - 3 \cdot 4^k)}{3 \cdot 4^{k+1} - 3 \cdot 4^k} \\ &= \sum_{k=1}^m 16 = 16m \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $16m=160$ 이므로 $m=10$ $\dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	50%
② $\sum_{k=1}^m \frac{a_{k+3} - a_{k+2}}{a_{k+1} - a_k}$ 를 m 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
③ m 의 값을 구할 수 있다.	20%

14 $\sum_{k=1}^{2n} a_k = n^2 + 2$ 에서

(i) $n=1$ 일 때, $\sum_{k=1}^2 a_k = a_1 + a_2 = 3$

이때 $a_{2n}=4n$ 에서 $a_2=4$ 이므로

$$a_1 = 3 - a_2 = -1$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_{2n} + a_{2n-1} &= \sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^{2n-2} a_k \\ &= n^2 + 2 - \{(n-1)^2 + 2\} \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= 2n - 1 - a_{2n} = 2n - 1 - 4n \\ &= -2n - 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = -1$ 은 $n=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입한 것과 다르므로

$$a_1 = -1, a_{2n-1} = -2n - 1 (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= a_1 + \sum_{k=2}^{10} a_{2k-1} \\ &= -1 + \sum_{k=2}^{10} (-2k - 1) \\ &= -1 + 3 + \sum_{k=1}^{10} (-2k - 1) \\ &= 2 - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 10 = -118 \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$

15 $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+1} - a_n)$$

$$= a_{n+1} - a_1 = a_{n+1} - 10$$

따라서 $a_{n+1} - 10 = 4n - 1$ 이므로

$$a_{n+1} = 4n + 9$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= a_1 + \sum_{k=1}^9 a_{k+1} \\ &= 10 + \sum_{k=1}^9 (4k + 9) \\ &= 10 + 4 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} + 9 \cdot 9 \\ &= 271 \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

16 $\frac{a_n}{n} = b_n$ 이라 하면 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = 3n^2 + 9n$$

(i) $n=1$ 일 때, $b_1 = S_1 = 12$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3n^2 + 9n - \{3(n-1)^2 + 9(n-1)\} \\ &= 6n + 6 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $b_1=12$ 는 $n=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입한 것과 같으므로

$$b_n = 6n + 6$$

즉 $\frac{a_n}{n} = 6n + 6$ 이므로

$$a_n = 6n(n+1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{6n(n+1)}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{6k(k+1)} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{13}\right) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{13}\right) \\ &= \frac{2}{13} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \textcircled{2}$

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	60%
② $\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k}$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

17 $f\left(\frac{1}{k+1}\right) = \log_2(k+2) - \log_2(k+1)$,

$f(k+1) = \log_2(k+2)$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} \frac{f\left(\frac{1}{k+1}\right)}{f(k)f(k+1)} &= \sum_{k=1}^{30} \frac{\log_2(k+2) - \log_2(k+1)}{\log_2(k+1) \log_2(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^{30} \left\{ \frac{1}{\log_2(k+1)} - \frac{1}{\log_2(k+2)} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{\log_2 2} - \frac{1}{\log_2 3} \right) + \left(\frac{1}{\log_2 3} - \frac{1}{\log_2 4} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{\log_2 31} - \frac{1}{\log_2 32} \right) \\ &= \frac{1}{\log_2 2} - \frac{1}{\log_2 32} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \end{aligned} \quad \textcircled{4} \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k+1}\right) &= \log_2\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \log_2 \frac{k+2}{k+1} \\ &= \log_2(k+2) - \log_2(k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{10} (-2k-1) &= \sum_{k=1}^{10} (-2k-1) - (-2 \cdot 1 - 1) \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{10} (-2k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18 \quad f(n) &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\
 \therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{f(k)} &= 3 \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{10} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{10 \cdot 11} - \frac{1}{11 \cdot 12} \right) \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{132} \right) \\
 &= \frac{65}{88} \quad \text{답 } \frac{65}{88}
 \end{aligned}$$

1등급 비밀노트

부분분수로의 변형

상수 k 와 세 다항식 A, B, C 에 대하여

$$\textcircled{1} \quad \frac{k}{AB} = \frac{k}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \quad (\text{단, } A \neq B)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{k}{ABC} = \frac{k}{C-A} \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{BC} \right) \quad (\text{단, } A \neq C)$$

이때 $\frac{1}{AB}, \frac{1}{BC}$ 은 $\textcircled{1}$ 을 이용하여 다시 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 19 \quad \overline{P_k Q_k} &= \sqrt{k}, \quad \overline{P_{k+1} Q_{k+1}} = \sqrt{k+1}, \quad \overline{Q_k Q_{k+1}} = 1 \text{ 이므로} \\
 \square P_k Q_k Q_{k+1} P_{k+1} \text{의 넓이 } S_k &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_k &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{P_k Q_k} + \overline{P_{k+1} Q_{k+1}}) \cdot \overline{Q_k Q_{k+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) \cdot 1 \\
 &= \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^8 \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^8 \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\
 &= 2 \sum_{k=1}^8 (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
 &= 2 \{ (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{9} - \sqrt{8}) \} \\
 &= 2(\sqrt{9} - 1) \\
 &= 4 \quad \text{답 } \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

내신 + 수능

1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 82쪽

$$\begin{aligned}
 01 \quad \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} S_k &= S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \cdots + S_{2m-1} - S_{2m} \\
 &= -(S_2 - S_1) - (S_4 - S_3) - \cdots - (S_{2m} - S_{2m-1}) \\
 &= -(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}) \\
 &= -\sum_{k=1}^m a_{2k}
 \end{aligned}$$

ㄴ에서 구한 $a_n = (n-10)d$ 에 $d = -2$ 를 대입하여 $a_n = -2n + 20$ 을 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned}
 \text{한편 } S_n &= 2n^2 - n \text{에서 } n \geq 2 \text{일 때,} \\
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= 2n^2 - n - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\
 &= 4n - 3
 \end{aligned}$$

따라서 $a_{2k} = 4 \cdot 2k - 3 = 8k - 3$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} S_k &= -\sum_{k=1}^m a_{2k} \\
 &= -\sum_{k=1}^m (8k - 3) \\
 &= -8 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + 3m \\
 &= -4m^2 - m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -4m^2 - m &> -105 \text{에서} \quad 4m^2 + m - 105 < 0 \\
 (4m+21)(m-5) &< 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore 0 < m < 5 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

따라서 자연수 m 의 최댓값은 4이다.

답 4

$$\begin{aligned}
 02 \quad \neg. a_1 \leq 0 \text{이라 하면 공차가 음수이므로} \\
 a_n &\leq 0
 \end{aligned}$$

따라서 $|a_1| < |a_1 + a_2| < |a_1 + a_2 + a_3| < \cdots$ 이므로

$$T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$$

즉 $T_n \neq T_{19-n}$ 이므로 $a_1 > 0$

ㄴ. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d < 0$)라 하면 $T_1 = T_{18}$ 이므로

$$|a_1| = \left| \frac{18(2a_1 + 17d)}{2} \right|$$

$$|a_1| = |18a_1 + 153d|$$

$$a_1 = -(18a_1 + 153d) \text{ 또는 } a_1 = 18a_1 + 153d$$

$$\therefore a_1 = -\frac{153}{19}d \text{ 또는 } a_1 = -9d \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $T_2 = T_{17}$ 이므로

$$\left| \frac{2(2a_1 + d)}{2} \right| = \left| \frac{17(2a_1 + 16d)}{2} \right|$$

$$2a_1 + d = -(17a_1 + 136d)$$

$$\text{또는 } 2a_1 + d = 17a_1 + 136d$$

$$\therefore a_1 = -\frac{137}{19}d \text{ 또는 } a_1 = -9d \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a_1 = -9d$

따라서 $a_n = -9d + (n-1)d = (n-10)d$ 이므로

$$a_{10} = 0$$

$$\text{또 } T_{19} = \left| \frac{19\{2 \cdot (-9d) + 18d\}}{2} \right| = 0 \text{이므로}$$

$$a_{10} = T_{19}$$

ㄴ. ㄴ에서 $a_1 = -9d$ 이므로

$$T_{25} = \left| \frac{25\{2 \cdot (-9d) + 24d\}}{2} \right|$$

$$= |75d| = -75d \quad (\because d < 0)$$

즉 $-75d = 150$ 이므로

$$d = -2$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 $-9 \cdot (-2) = 18$,

공차는 -2 이므로

$$a_n = 18 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 20$$

일품 BOX

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20} |a_k| &= \sum_{k=1}^{20} |-2k+20| \\ &= \sum_{k=1}^{10} (-2k+20) + \sum_{k=11}^{20} (2k-20) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (-2k+20) + \sum_{k=1}^{10} (2k-20) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{10} (2k-20) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} (-2k+20) + \sum_{k=1}^{20} (2k-20) \\ &= 2 \left(-2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 20 \cdot 10 \right) \\ &\quad + 2 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - 20 \cdot 20 \\ &= 200\end{aligned}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

03 조건 (가)에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+1} - a_1\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_1 &= 2n^2 - n \\ \therefore a_{n+1} &= 2n^2 - n + a_1\end{aligned}$$

이때 조건 (나)에서 $a_1 - b_1 = 5$ 이고 $b_1 = 10$ 이므로

$$\begin{aligned}a_1 - b_1 &= 5 = 15 - 10 \\ \therefore a_{n+1} &= 2n^2 - n + 15\end{aligned} \quad \cdots \cdots ㉠$$

조건 (나)에서 $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n - b_n &= \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) - \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - b_k) \\ &= 3n + 2 - \{3(n-1) + 2\} \\ &= 3\end{aligned}$$

이므로 $a_{11} - b_{11} = 3$

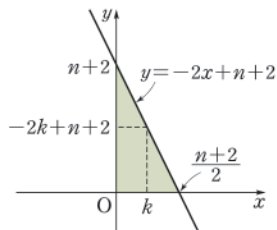
㉠에서 $a_{11} = 2 \cdot 10^2 - 10 + 15 = 205$ 이므로

$$b_{11} = a_{11} - 3 = 202$$

답 ③

04 직선

$y = -2x + n + 2$ 와 x 축,
 y 축으로 둘러싸인 부
분은 오른쪽 그림의 색칠한
부분과 같다.



(i) $n = 2l$ (l 은 자연수)

일 때,

직선 $y = -2x + n + 2$, 즉 $y = -2x + 2l + 2$ 의 x 절편은

$$\frac{2l+2}{2} = l+1$$

따라서 $x = k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, l$)일 때

$y = -2k + 2l + 2$ 이므로

$$\begin{aligned}a_{2l} &= \sum_{k=1}^l (-2k + 2l + 2) \\ &= -2 \cdot \frac{l(l+1)}{2} + l(2l+2) \\ &= l^2 + l\end{aligned}$$

$-2k+20 < 0$ 에서
 $k > 10$
즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제11항부
터 음수이다.

2를 1 또는 2로 나누었을
때의 나머지는 모두 0이
다.

점 A_2 의 y 좌표가
 $4^2 = (3+1)^2$
이므로 x 좌표는 3이다.

x 좌표가 k 일 때, y 좌표가
자연수인 점은
 $(k, 1), (k, 2), \dots,$
 $(k, -2k + 2l + 2)$
의 $(-2k + 2l + 2)$ 개이
다.

(ii) $n = 2l - 1$ (l 은 자연수)일 때,

직선 $y = -2x + n + 2$, 즉 $y = -2x + 2l + 1$ 의 x 절편은

$$\frac{2l+1}{2} = l + \frac{1}{2}$$

따라서 $x = k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, l$)일 때

$y = -2k + 2l + 1$ 이므로

$$\begin{aligned}a_{2l-1} &= \sum_{k=1}^l (-2k + 2l + 1) \\ &= -2 \cdot \frac{l(l+1)}{2} + l(2l+1) \\ &= l^2\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $a_{2l-1} + a_{2l} = 2l^2 + l$ 이므로

$$2l^2 + l = 55, \quad 2l^2 + l - 55 = 0$$

$$(2l+11)(l-5) = 0 \quad \therefore l = 5 \quad (\because l \text{은 자연수})$$

즉 $a_9 + a_{10} = 55$ 이므로 $m = 9$

답 ④

05 $m = 1$ 일 때, $k = 1$ 이므로 $A_1 = \{0\}$

$m = 2$ 일 때, $1 \leq k \leq 2$ 이므로 $A_2 = \{0\}$

$m = 3$ 일 때, $1 \leq k \leq 3$ 이므로 $A_3 = \{0, 1\}$

$m = 4$ 일 때, $1 \leq k \leq 4$ 이므로 $A_4 = \{0, 1\}$

$m = 5$ 일 때, $1 \leq k \leq 5$ 이므로 $A_5 = \{0, 1, 2\}$

$m = 6$ 일 때, $1 \leq k \leq 6$ 이므로 $A_6 = \{0, 1, 2\}$

$\vdots$

즉 자연수 l 에 대하여

$$A_{2l-1} = A_{2l} = \{0, 1, 2, \dots, l-1\}$$

따라서 $n(A_{2l-1}) = n(A_{2l}) = l$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{10} \sum_{m=1}^{100} n(A_m) &= \frac{1}{10} \sum_{l=1}^{50} \{n(A_{2l-1}) + n(A_{2l})\} \\ &= \frac{1}{10} \sum_{l=1}^{50} 2l \\ &= \frac{1}{10} \cdot 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} \\ &= 255\end{aligned}$$

답 255

06 $A_1(1, 2^2), B_1(1, 4^2)$

점 B_1 을 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은 $y = 4^2$ 이므

로 $A_2(3, 4^2)$

점 A_2 를 지나고 y 축에 평행한 직선의 방정식은 $x = 3$ 이므

로 $B_2(3, 6^2)$

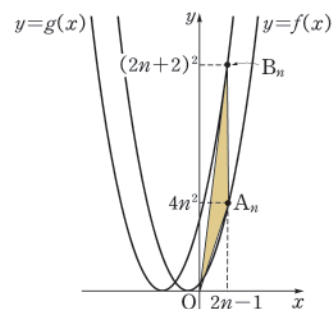
같은 방법으로 하면

$$A_3(5, 6^2), B_3(5, 8^2), \dots$$

이므로 두 점 A_n, B_n 의 x 좌표를 x_n 이라 하면 수열 $\{x_n\}$

은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이다.

$$\therefore x_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$



따라서 $A_n(2n-1, 4n^2)$, $B_n(2n-1, (2n+2)^2)$ 이므로 앞의 그림에서 $\triangle OA_nB_n$ 의 넓이 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \cdot \{(2n+2)^2 - 4n^2\} \cdot (2n-1) \\ &= 2(2n+1)(2n-1) \\ \therefore \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{2(2k+1)(2k-1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{39} - \frac{1}{41}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{41}\right) \\ &= \frac{10}{41} \end{aligned}$$

답 $\frac{10}{41}$

$x=2n-1$ 을
 $y=(x+1)^2$ 에 대입하면
 $(2n-1+1)^2=4n^2$
 $y=(x+3)^2$ 에 대입하면
 $(2n-1+3)^2$
 $= (2n+2)^2$

$a_4=a_10$ 이므로
 $a_5=a_2$
 $a_6=a_3$
 $\vdots$

$a_1=10$ 은 1의 배수이다.

$a_3=5$ 는 3의 배수가 아니다.

10 수학적 귀납법

개념 & 핵심 기출

본책 83쪽

01 $a_{n+1} + \frac{1}{a_n+1} = 0$, 즉 $a_{n+1} = -\frac{1}{a_n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = -\frac{1}{a_1+1} = -\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

$$a_3 = -\frac{1}{a_2+1} = -\frac{1}{-\frac{1}{3}+1} = -\frac{3}{2}$$

$$a_4 = -\frac{1}{a_3+1} = -\frac{1}{-\frac{3}{2}+1} = 2$$

$$a_5 = -\frac{1}{a_4+1} = -\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 2, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{2}$ 이 이 순서대로 반복되므로

$$a_n = a_{n+3}$$

$$\textcircled{3} a_{11} = a_{14}$$

답 ③

02 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, ..., 8을 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{1} = 10$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$a_4 = 3a_3 = 3 \cdot 5 = 15$$

$$a_5 = 4a_4 = 4 \cdot 15 = 60$$

$$a_6 = \frac{a_5}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

$$a_7 = \frac{a_6}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$a_8 = 7a_7 = 7 \cdot 2 = 14$$

$$\therefore a_9 = 8a_8 = 8 \cdot 14 = 112$$

답 112

03 $a_{n+1} + a_n = 2n + 3$, 즉 $a_{n+1} = -a_n + 2n + 3$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = -a_1 + 5 = -3 + 5 = 2$$

$$a_3 = -a_2 + 7 = 3 - 5 + 7 = 3 + 2$$

$$a_4 = -a_3 + 9 = -3 + 5 - 7 + 9 = 2 \cdot 2$$

$$a_5 = -a_4 + 11 = 3 - 5 + 7 - 9 + 11 = 3 + 2 \cdot 2$$

$$a_6 = -a_5 + 13 = -3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 = 2 \cdot 3$$

$$\begin{aligned} a_7 &= -a_6 + 15 = 3 - 5 + 7 - 9 + 11 - 13 + 15 \\ &= 3 + 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

$\vdots$

수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이고, 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_{2n-1} = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1,$$

$$a_{2n} = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$$

- (i) $m=2k-1$ (k 는 자연수)일 때,
 $a_m > 100$, 즉 $a_{2k-1} > 100$ 에서
 $2k+1 > 100 \quad \therefore k > \frac{99}{2}$
 따라서 자연수 k 의 최솟값은 50이므로 자연수 m 의 최솟값은
 $2 \cdot 50 - 1 = 99$
- (ii) $m=2k$ (k 는 자연수)일 때,
 $a_m > 100$, 즉 $a_{2k} > 100$ 에서
 $2k > 100 \quad \therefore k > 50$
 따라서 자연수 k 의 최솟값은 51이므로 자연수 m 의 최솟값은
 $2 \cdot 51 = 102$
- (i), (ii)에서 자연수 m 의 최솟값은 99이다. **답 ②**

- 04** 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이므로
 $a_{2n} - a_n = 4n$
 $\therefore \sum_{n=1}^{20} (a_{2n} - a_n) = \sum_{n=1}^{20} 4n = 4 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 840$

답 ②

- 05** 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 $a_2 - a_1 = 3$ 인 등차수열이므로
 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$
 $a_m = 250$ 에서 $3m - 2 = 250$
 $3m = 252 \quad \therefore m = 84$

답 84

- 06** $a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}$ 의 양변을 제곱하면
 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$
 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = 2$ 인 등비수열이므로
 $a_n = 2^{n-1}$
 $\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} 2^{k-1} = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023$

답 1023

- 07** $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ 에서
 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
 위의 식의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면
 $a_2 = a_1 + 1 - \frac{1}{2}$
 $a_3 = a_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = a_1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
 $= a_1 + 1 - \frac{1}{3}$
 $a_4 = a_3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = a_1 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$
 $= a_1 + 1 - \frac{1}{4}$
 $\vdots$
 $\therefore a_n = a_1 + 1 - \frac{1}{n} = 4 - \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{n}{n+1} a_{2n-1} \\ &= \frac{1}{n+1} a_1 \\ &= \frac{4}{n+1} \end{aligned}$$

공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
 $a_{n+k} = a_n + kd$
 $\Leftrightarrow a_{n+k} - a_n = kd$

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열
 $\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$
 $\Leftrightarrow 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$
 $\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= \frac{2n-1}{2n+1} a_{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} a_2 \\ &= \frac{4}{2n+1} \end{aligned}$$

a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등비중항이다.

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{71}{18} \text{에서} \\ 4 - \frac{1}{m} &= \frac{71}{18}, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{18} \\ \therefore m &= 18 \end{aligned}$$

답 18

- 08** $a_{2n+1} = \frac{n}{n+1} a_{2n-1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 7을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2} a_1 \\ a_5 &= \frac{2}{3} a_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{3} a_1 \\ a_7 &= \frac{3}{4} a_5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} a_1 = \frac{1}{4} a_1 \\ &\vdots \\ \therefore a_{15} &= \frac{7}{8} a_{13} = \frac{1}{8} a_1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 또 $a_{2n+2} = \frac{2n-1}{2n+1} a_{2n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 14를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{3} a_2 \\ a_6 &= \frac{3}{5} a_4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{5} a_2 \\ a_8 &= \frac{5}{7} a_6 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5} a_2 = \frac{1}{7} a_2 \\ &\vdots \\ \therefore a_{30} &= \frac{27}{29} a_{28} = \frac{1}{29} a_2 = \frac{4}{29} \\ \therefore a_{15} a_{30} &= \frac{2}{29} \end{aligned}$$

답 ④

- 09** $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \\ a_4 &= 2a_3 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31 \\ a_5 &= 2a_4 + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63 \\ &\vdots \end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 차례대로 나열하면

$$3, 7, 15, 31, 63, \dots$$

즉 $2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^4 - 1, 2^5 - 1, 2^6 - 1, \dots$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= 2^{11} - 1, \quad a_{11} = 2^{12} - 1 \\ \therefore (a_{10} + 1)(a_{11} + 1) &= 2^{11} \cdot 2^{12} = 2^{23} \end{aligned}$$

답 ⑤

- 10** (ii) $n=k$ 일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot 2^{k-1} = (k-1) \cdot 2^k + 1$$

양변에 $[(k+1) \cdot 2^k]$ 을 더하면

$$\begin{aligned} &1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot 2^{k-1} + (k+1) \cdot 2^k \\ &= (k-1) \cdot 2^k + 1 + (k+1) \cdot 2^k \\ &= 2^k(k-1+k+1) + 1 \\ &= 2^k \cdot 2k + 1 = [k \cdot 2^{k+1} + 1] \end{aligned}$$

$$\therefore \textcircled{7} (k+1) \cdot 2^k \quad \textcircled{4} k \cdot 2^{k+1} + 1$$

따라서 $f(k) = (k+1) \cdot 2^k$, $g(k) = k \cdot 2^{k+1} + 1$ 이므로
 $f(4) - g(3) = 5 \cdot 2^4 - (3 \cdot 2^4 + 1)$
 $= 31$ 답 ③

11 $3n+2 < 2^n$ ㉠

(i) $n=4$ 일 때,

(좌변) $= 3 \cdot 4 + 2 = 14$, (우변) $= 2^4 = 16$

따라서 $n=4$ 일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 4$)일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$3k+2 < 2^k$$

양변에 3을 더하면

$$3k+2+3 < 2^k+3$$

$$\therefore 3(k+1)+2 < 2^k+3$$

이때 $k \geq 4$ 인 자연수 k 에 대하여 $2^{k+1} - 2^k > 3$, 즉
 $2^k + 3 < 2^{k+1}$ 이므로

$$3(k+1)+2 < 2^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다. 답 풀이 참조

$k \geq 4$ 일 때,
 $2^{k+1} - 2^k = 2^k(2-1)$
 $= 2^k$
 $\geq 2^4 = 16$
 $\therefore 2^{k+1} - 2^k > 3$

$n=k+1$ 일 때 주어진 부
 등식의 우변은 2^{k+1} 이므로
 $2^k + 3$ 과 2^{k+1} 의 대소를
 비교한다.

1등급을 위한 고난도 문제

본책 85쪽

01 $a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 즉 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_3 = a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 4 = -2$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -2 - 2 = -4$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -4 - (-2) = -2$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-4) = 2$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = 2 - (-2) = 4$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 2, 4, 2, -2, -4, -2가 이 순서대로 반복된다.

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$ 은 6개의 수가 순서대로 반복되므로

$$a_{n+6} = a_n$$

ㄴ. $100 = 6 \cdot 16 + 4$ 이므로

$$a_{100} = a_4 = -2$$

$$\text{ㄷ. } \sum_{k=1}^{30} (a_{2k} + a_{2k+2})$$

$$= \sum_{k=1}^{30} a_{2k} + \sum_{k=1}^{30} a_{2k+2}$$

$$= (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{60}) + (a_4 + a_6 + a_8 + \dots + a_{62})$$

$$= 10(a_2 + a_4 + a_6) + 10(a_4 + a_6 + a_8)$$

$$= 10(4 - 2 - 2) + 10(-2 - 2 + 4)$$

$$= 0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

$45 = 2 \cdot 23 - 10$ 이므로
 $a_{45} = a_{23}$
 $23 = 2 \cdot 12 - 10$ 이므로
 $a_{23} = a_{12}$
 $3 = 2 \cdot 2 - 10$ 이므로
 $a_3 = a_2$

$a_2 + a_4 + a_6$
 $= a_8 + a_{10} + a_{12}$
 $= \dots = a_{56} + a_{58} + a_{60}$
 $a_4 + a_6 + a_8$
 $= a_{10} + a_{12} + a_{14}$
 $= \dots = a_{58} + a_{60} + a_{62}$

02 $a_{n+1} = \begin{cases} 3-a_n & (n \text{이 홀수}) \\ 5-a_n & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을

차례대로 대입하면

$$a_2 = 3 - a_1 = 3 - 1 = 2$$

$$a_3 = 5 - a_2 = 5 - 3 + 1 = 2 + 1$$

$$a_4 = 3 - a_3 = 3 - 5 + 3 - 1 = -2 + 2$$

$$a_5 = 5 - a_4 = 5 - 3 + 5 - 3 + 1 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$a_6 = 3 - a_5 = 3 - 5 + 3 - 5 + 3 - 1 = -2 \cdot 2 + 2$$

$$a_7 = 5 - a_6 = 5 - 3 + 5 - 3 + 5 - 3 + 1 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$a_8 = 3 - a_7 = 3 - 5 + 3 - 5 + 3 - 5 + 3 - 1$$

$$= -2 \cdot 3 + 2$$

⋮

⋯ ①

수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_{2n-1} = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

$$\therefore a_{25} = 25$$

⋯ ②

수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -2인 등차수열이므로

$$a_{2n} = 2 + (n-1) \cdot (-2) = -2n+4$$

$$\therefore a_{50} = a_{2 \cdot 25} = -2 \cdot 25 + 4 = -46$$

⋯ ③

$$\therefore a_{25} + a_{50} = -21$$

⋯ ④

답 -21

채점 기준	비율
① $a_2, a_3, a_4, \dots$ 를 구할 수 있다.	30%
② a_{25} 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ a_{50} 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $a_{25} + a_{50}$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

03 $a_{2n-1} = a_n + p$ 에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_1 = a_1 + p \quad \therefore p=0$$

따라서 $a_{2n-1} = a_n$, $a_{2n} = a_n + n$ 이므로

$$a_{90} = a_{45} + 45 = a_{23} + 45$$

$$= a_{12} + 45 = (a_6 + 6) + 45$$

$$= (a_3 + 3) + 51 = a_2 + 54$$

$$= (a_1 + 1) + 54 = a_1 + 55$$

즉 $a_1 + 55 = 90$ 이므로

$$a_1 = 35$$

답 ④

04 조건 ㄴ에 의하여 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -6인 등차수열이므로 조건 ㄱ에서

$$a_1 + 2(a_1 - 6) = 9, \quad 3a_1 = 21$$

$$\therefore a_1 = 7$$

$$\therefore a_n = 7 + (n-1) \cdot (-6)$$

$$= -6n + 13$$

⋯ ①

$$\therefore \sum_{k=1}^8 (a_k + p) = \sum_{k=1}^8 (-6k + 13 + p)$$

$$= -6 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} + 13 \cdot 8 + p \cdot 8$$

$$= 8p - 112$$

⋯ ②

$$8p - 112 > 200 \text{에서} \quad 8p > 312$$

$$\therefore p > 39$$

일품 BOX

따라서 정수 p 의 최솟값은 40이다.

→ ③

답 40

채점 기준	비율
① a_n 을 구할 수 있다.	40%
② $\sum_{k=1}^8 (a_k + p)$ 를 p 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
③ p 의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

05 $\log_2 a_{n+1} = -1 + \log_2 a_n$ 에서

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 \frac{a_n}{2} \quad \therefore a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$b_{n+1} = a_n b_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$b_2 = a_1 b_1 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$b_3 = a_2 b_2 = 2 \cdot 16 = 32$$

$$b_4 = a_3 b_3 = 1 \cdot 32 = 32$$

$$b_5 = a_4 b_4 = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$$

$$b_6 = a_5 b_5 = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$$

$$b_7 = a_6 b_6 = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

⋮

따라서 $b_k < 1$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 7이다.

답 ②

06 $a_1 = 20$ 이므로 $n = 1, 2, 3, \dots, m$ 일 때 $a_n \geq 2$ 라면

$$a_{n+1} = a_n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots, m)$$

즉 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m+1}$ 은 첫째항이 20, 공차가 -2 인 등차수열이므로

$$a_n = 20 + (n-1) \cdot (-2)$$

$$= -2n + 22 \quad (n = 1, 2, 3, \dots, m+1)$$

이때 $a_n \geq 2$ 에서 $-2n + 22 \geq 2$

$$2n \leq 20 \quad \therefore n \leq 10$$

즉 $n = 1, 2, 3, \dots, 11$ 일 때 $a_n = -2n + 22$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{11} a_k = \sum_{k=1}^{11} (-2k + 22)$$

$$= -2 \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} + 22 \cdot 11$$

$$= 110$$

$a_{n+1} = |a_n - 2|$ 의 n 에 11, 12, 13, ...을 차례대로 대입하면

$$a_{12} = |a_{11} - 2| = |0 - 2| = 2$$

$$a_{13} = |a_{12} - 2| = |2 - 2| = 0$$

$$a_{14} = |a_{13} - 2| = |0 - 2| = 2$$

$$a_{15} = |a_{14} - 2| = |2 - 2| = 0$$

⋮

이므로

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n}{2n-1} \text{에서}$$

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{2n-1}\right) a_n$$

$$= \frac{2n+1}{2n-1} a_n$$

$$m = 10$$

$$a_{11} = -2 \cdot 11 + 22 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{13} a_k = 110 + 2 = 112$$

$$\sum_{k=1}^{14} a_k = \sum_{k=1}^{15} a_k = 110 + 2 \cdot 2 = 114$$

$$\sum_{k=1}^{16} a_k = \sum_{k=1}^{17} a_k = 110 + 2 \cdot 3 = 116$$

⋮

$$\therefore \sum_{k=1}^{2l} a_k = \sum_{k=1}^{2l+1} a_k = 100 + 2l \quad (l = 6, 7, 8, \dots)$$

$$110 + 2(l-5)$$

$$= 110 + 2l - 10$$

$$= 100 + 2l$$

$$100 + 2l \leq 150 \text{에서} \quad 2l \leq 50$$

$$\therefore l \leq 25$$

따라서 $l = 25$ 일 때 $\sum_{k=1}^{50} a_k = \sum_{k=1}^{51} a_k = 150$ 이므로

$\sum_{k=1}^n a_k \leq 150$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는 51이다.

답 ③

07 조건 (가)에서

$$a_{2n+1} - a_{2n} < 0, \quad a_{2n} - a_{2n-1} > 0$$

이므로 조건 (나)에서

$$|a_{2n+1} - a_{2n}| = a_{2n} - a_{2n+1} = 4n \quad \dots\dots ㉠$$

$$|a_{2n} - a_{2n-1}| = a_{2n} - a_{2n-1} = 4n - 2 \quad \dots\dots ㉡$$

$n = 2$ 를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$$a_4 - a_5 = 8, \quad a_4 - a_3 = 6$$

이때 $a_4 = 0$ 이므로 $a_5 = -8, a_3 = -6$

$n = 1$ 을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$$a_2 - a_3 = 4, \quad a_2 - a_1 = 2$$

$a_2 - a_3 = 4$ 에서 $a_2 = a_3 + 4 = -6 + 4 = -2$ 이므로

$$a_1 = a_2 - 2 = -2 - 2 = -4$$

$n = 3$ 을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$$a_6 - a_7 = 12, \quad a_6 - a_5 = 10$$

$a_6 - a_5 = 10$ 에서 $a_6 = a_5 + 10 = -8 + 10 = 2$ 이므로

$$a_7 = a_6 - 12 = 2 - 12 = -10$$

$$\therefore a_1 + a_7 = -14$$

답 ②

08 $a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n}{2n-1}$, 즉 $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n-1} a_n$ 의 n 에 1,

2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = 3a_1$$

$$a_3 = \frac{5}{3} a_2 = \frac{5}{3} \cdot 3a_1 = 5a_1$$

$$a_4 = \frac{7}{5} a_3 = \frac{7}{5} \cdot 5a_1 = 7a_1$$

$$a_5 = \frac{9}{7} a_4 = \frac{9}{7} \cdot 7a_1 = 9a_1$$

⋮

$$\therefore a_n = (2n-1)a_1$$

→ ①

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2k-1)a_1$$

$$= a_1 \left(2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 10 \right) = 100a_1$$

→ ②

즉 $100a_1 = 40$ 이므로 $a_1 = \frac{2}{5}$

→ ③

답 $\frac{2}{5}$

채점 기준	비율
① a_n 을 n , a_1 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
② $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 를 a_1 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
③ a_1 의 값을 구할 수 있다.	10%

09 조건 (가)에서 $a_1 > 0$ 이므로 조건 (나)에서

$$a_2 = a_1 - 3 \quad \therefore a_1 = a_2 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $a_2 < 0$ 일 때,

$a_4 = 7$ 이므로 조건 (나)에서

$$a_4 = -a_2 + 3 = 7 \quad \therefore a_2 = -4$$

$$\textcircled{1} \text{에서} \quad a_1 = -4 + 3 = -1$$

그런데 $a_1 > 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2 \geq 0$ 일 때,

$a_4 = 7$ 이므로 조건 (나)에서

$$a_4 = a_2 - 3 = 7 \quad \therefore a_2 = 10$$

$$\textcircled{1} \text{에서} \quad a_1 = 10 + 3 = 13$$

(i), (ii)에서 $a_1 = 13$ 이므로 조건 (나)의 식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례대로 대입하면

$$a_2 = a_3 = 13 - 3 = 10$$

$$a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 10 - 3 = 7$$

$$a_8 = a_9 = a_{10} = \dots = a_{15} = 7 - 3 = 4$$

$$a_{16} = a_{17} = a_{18} = \dots = a_{31} = 4 - 3 = 1$$

$$a_{32} = a_{33} = a_{34} = \dots = a_{63} = 1 - 3 = -2$$

⋮

따라서 $a_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 32이므로 $m = 32$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^{32} a_k \\ &= 13 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 7 + 8 \cdot 4 + 16 \cdot 1 - 2 \\ &= 107 \end{aligned}$$

답 107

10 (ii) $n=m$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k} + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} \\ &= \sum_{k=2}^m \frac{1}{m+k} + \frac{1}{m+1} + \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2} \right) \\ &= \sum_{k=2}^m \frac{1}{m+k} + \frac{1}{2m+1} + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{2m+2} \right) \\ &= \sum_{k=2}^m \frac{1}{m+k} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2} \\ &= \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \frac{1}{m+4} \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{m+1+k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-3(m+1) - 4 \\ &= -3m - 7 \\ &a_2 = a_3 = 10 > 0 \text{이므로} \\ &a_4 = a_5 = a_6 = 7 - 3 = 4 \\ &= 10 - 3, \\ &a_8 = a_9 = a_{10} = 4 - 3 = 1 \\ &= 10 - 3 \\ &4^{m+2} = (2^2)^{m+2} = 2^{2m+4} \end{aligned}$$

$$\therefore \textcircled{1} \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} \quad \textcircled{2} \frac{1}{2m+2}$$

$$\text{따라서 } f(m) = \frac{1}{(2m+1)(2m+2)}, g(m) = \frac{1}{2m+2}$$

이므로

$$\frac{1}{f(7)} + \frac{1}{g(7)} = 15 \cdot 16 + 16 = 256 \quad \text{답 ⑤}$$

$$11 \sum_{k=1}^n \frac{k(2^{k+2} - 3k - 4)}{4^{k+1}} = \left(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right)^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{2^3 - 3 - 4}{4^2} = \frac{1}{16},$$

$$(\text{우변}) = \left(1 - \frac{3}{2^2}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

따라서 $n=1$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \frac{k(2^{k+2} - 3k - 4)}{4^{k+1}} = \left(1 - \frac{m+2}{2^{m+1}}\right)^2$$

이므로

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m+1} \frac{k(2^{k+2} - 3k - 4)}{4^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{k(2^{k+2} - 3k - 4)}{4^{k+1}} \\ &\quad + \frac{(m+1)(2^{m+3} - 3m - 7)}{4^{m+2}} \\ &= \left(1 - \frac{m+2}{2^{m+1}}\right)^2 + \frac{(m+1)(2^{m+3} - 3m - 7)}{4^{m+2}} \\ &= 1 - \frac{m+2}{2^m} + \frac{(m+2)^2}{4^{m+1}} + \frac{(m+1) \cdot 2^{m+3}}{4^{m+2}} \\ &\quad - \frac{(m+1)(3m+7)}{4^{m+2}} \\ &= 1 - \frac{m+2}{2^m} + \frac{(m+2)^2}{4^{m+1}} + \frac{m+1}{2^{m+1}} \\ &\quad - \frac{(m+1)(3m+7)}{4^{m+2}} \\ &= 1 - \frac{2(m+2) - (m+1)}{2^{m+1}} \\ &\quad + \frac{4(m+2)^2 - (m+1)(3m+7)}{4^{m+2}} \\ &= 1 - \frac{m+3}{2^{m+1}} + \frac{m^2 + 6m + 9}{4^{m+2}} \\ &= 1 - \frac{m+3}{2^{m+1}} + \frac{(m+3)^2}{4^{m+2}} \\ &= \left(1 - \frac{m+3}{2^{m+2}}\right)^2 \end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

답 풀이 참조

내신 · 수능 1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제** 본책 87쪽

01 $\neg$. $a_n + a_{n+1} = 4n + 6$, 즉 $a_{n+1} = -a_n + 4n + 6$ 의 n 에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_1 + 10 = -1 + 10 = 9 \\ a_3 &= -a_2 + 14 = -9 + 14 = 5 \\ \therefore a_4 &= -a_3 + 18 = -5 + 18 = 13 \\ \text{ㄴ. } a_{2n-1} + a_{2n} &= 4(2n-1) + 6 \\ &= 8n + 2 \quad \dots\dots \textcircled{ㄱ} \\ a_{2n+1} + a_{2n+2} &= 4(2n+1) + 6 \\ &= 8n + 10 \quad \dots\dots \textcircled{ㄴ} \end{aligned}$$

ㄴ-ㄱ을 하면

$$\begin{aligned} -(a_{2n-1} + a_{2n}) + (a_{2n+1} + a_{2n+2}) &= 8 \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} (-1)^k (a_{2k-1} + a_{2k}) & \\ = -(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) - (a_5 + a_6) & \\ + \dots + (a_{19} + a_{20}) & \\ = 5 \cdot 8 & \\ = 40 & \end{aligned}$$

ㄷ. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= a + (n-1)d, \quad a_{n+1} = a + nd \\ a_n + a_{n+1} &= 4n + 6 \text{이므로} \\ 2dn + 2a - d &= 4n + 6 \\ \text{따라서 } 2d &= 4, \quad 2a - d = 6 \text{이므로} \\ a &= 4, \quad d = 2 \\ \therefore a_n &= 4 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 2 \\ a_{2k-1} &= 2(2k-1) + 2 = 4k \text{이므로} \\ \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{10} 4k = 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 220 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

02 조건 ㉠에서 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 은 공차가 2인 등차수열을 이루므로

$$a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 9, a_6 = 11$$

조건 ㉡에서

$$\begin{aligned} a_{6n-5} &= a_1 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 4 \\ a_{6n-4} &= a_2 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 2 \\ a_{6n-3} &= a_3 + (n-1) \cdot 5 = 5n \\ a_{6n-2} &= a_4 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 2 \\ a_{6n-1} &= a_5 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 4 \\ a_{6n} &= a_6 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 6 \\ \therefore \sum_{k=1}^{30} a_k & \\ &= \sum_{k=1}^5 (a_{6k-5} + a_{6k-4} + a_{6k-3} + a_{6k-2} + a_{6k-1} + a_{6k}) \\ &= \sum_{k=1}^5 (5k - 4 + 5k - 2 + 5k + 5k + 2 + 5k + 4 + 5k + 6) \\ &= \sum_{k=1}^5 (30k + 6) \\ &= 30 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + 6 \cdot 5 \\ &= 480 \end{aligned}$$

답 480

다른 풀이 ▶ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열을 이루고, $a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ 는 첫째항이 6, 공차가 2인 등차수열을 이룬다. 같은 방법으로 6개의 항씩 등차수열을 이루므로

수열 $a_1, a_7, a_{13}, \dots$,
수열 $a_2, a_8, a_{14}, \dots$,
수열 $a_3, a_9, a_{15}, \dots$,
수열 $a_4, a_{10}, a_{16}, \dots$,
수열 $a_5, a_{11}, a_{17}, \dots$,
수열 $a_6, a_{12}, a_{18}, \dots$
은 모두 공차가 5인 등차수열이다.

첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 제 n 항은
 $1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$

첫째항이 6, 공차가 2인 등차수열의 제 n 항은
 $6 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 4$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} a_k &= \sum_{k=1}^6 (2k-1) + \sum_{k=1}^6 (2k+4) + \sum_{k=1}^6 (2k+9) \\ &\quad + \sum_{k=1}^6 (2k+14) + \sum_{k=1}^6 (2k+19) \\ &= \sum_{k=1}^6 (10k + 45) \\ &= 10 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 45 \cdot 6 = 480 \end{aligned}$$

03 (i) $a_3 \geq 0$ 일 때,

$$a_4 = a_1 + 3 = -3 \text{이므로} \quad a_1 = -6$$

주어진 식의 n 에 1, 2를 차례대로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 4 = -6 + 4 = -2,$$

$$a_3 = a_2 + 4 = -2 + 4 = 2$$

이므로 $a_3 \geq 0$ 을 만족시킨다.

주어진 식의 n 에 4, 5, 6, 7을 차례대로 대입하면

$$a_5 = a_4 + 4 = -3 + 4 = 1$$

$$a_6 = a_1 + 5 = -6 + 5 = -1$$

$$a_7 = a_6 + 4 = -1 + 4 = 3$$

$$\therefore a_8 = a_1 + 7 = -6 + 7 = 1$$

(ii) $a_3 < 0$ 일 때,

$$a_4 = a_3 + 4 = -3 \text{이므로} \quad a_3 = -7$$

① $a_2 \geq 0$ 일 때,

$$a_3 = a_1 + 2 = -7 \text{이므로} \quad a_1 = -9$$

$$\therefore a_2 = a_1 + 4 = -9 + 4 = -5$$

그런데 $a_2 \geq 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a_2 < 0$ 일 때,

$$a_3 = a_2 + 4 = -7 \text{이므로} \quad a_2 = -11$$

이때 $a_1 \geq 0$ 이면 $a_2 = a_1 + 1 = -11$ 에서 $a_1 = -12$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\text{즉 } a_1 < 0 \text{이므로} \quad a_2 = a_1 + 4 = -11$$

$$\therefore a_1 = -15$$

주어진 식의 n 에 4, 5, 6, 7을 차례대로 대입하면

$$a_5 = a_4 + 4 = -3 + 4 = 1$$

$$a_6 = a_1 + 5 = -15 + 5 = -10$$

$$a_7 = a_6 + 4 = -10 + 4 = -6$$

$$\therefore a_8 = a_7 + 4 = -6 + 4 = -2$$

(i), (ii)에서 $a_8 = 1$ 또는 $a_8 = -2$ 이므로 구하는 합은

$$1 + (-2) = -1$$

답 ②

04 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot a_1 = a_1 n$ 이므로

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n + 2a_1 n & (n \text{이 홀수}) \\ b_n - 1 & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., 7을 차례대로 대입하면

$$b_2 = b_1 + 2a_1 = a_1 + 2a_1 = 3a_1$$

$$b_3 = b_2 - 1 = 3a_1 - 1$$

$$b_4 = b_3 + 6a_1 = (3a_1 - 1) + 6a_1 = 9a_1 - 1$$

$$b_5 = b_4 - 1 = 9a_1 - 2$$

$$b_6 = b_5 + 10a_1 = (9a_1 - 2) + 10a_1 = 19a_1 - 2$$

$$b_7 = b_6 - 1 = 19a_1 - 3$$

$$b_8 = b_7 + 14a_1 = (19a_1 - 3) + 14a_1 = 33a_1 - 3$$

이때 $a_{16}+b_8=4$ 이므로 $16a_1+(33a_1-3)=4$

$$49a_1=7 \quad \therefore a_1=\frac{1}{7} \quad \text{답 ①}$$

05 (i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변})=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}, (\text{우변})=2$$

이때

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}>1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}}=2+\frac{1}{\sqrt{2}}>2$$

이므로 $n=2$ 일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=m$ ($m \geq 2$)일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m^2}}>m$$

이므로

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(m+1)^2}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m^2}}+\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{1}{\sqrt{m^2+k}}>m+\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{1}{\sqrt{m^2+k}}$$

이때

$$\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{1}{\sqrt{m^2+k}}>\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{1}{\sqrt{m^2+2m+1}}=\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{1}{m+1}=\frac{1}{m+1}\cdot(2m+1)=\frac{2m+1}{m+1}>1$$

이므로

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(m+1)^2}}>m+1$$

$$\therefore \text{(가) } 2 \quad \text{(나) } 2m+1 \quad \text{(다) } \frac{2m+1}{m+1}$$

따라서 $a=2, f(m)=2m+1, g(m)=\frac{2m+1}{m+1}$ 이므로

$$a+f(10)g(6)=2+21\cdot\frac{13}{7}=41 \quad \text{답 41}$$

내신 + 수능

1등급을 굳히는 **실전 마무리 문제**

본책 88쪽

01 [전략] 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하고 A_m-B_m 을 m 과 d 에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$A_m-B_m=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2m}-a_{2m-1})=d+d+\cdots+d=md$$

이때 $A_m-B_m=273-234=39$ 이므로

$$md=39$$

등차수열 $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$ 의 공차는 $2d=2\cdot 3=6$

d 는 10 이하의 소수이므로

$$d=3, m=13$$

따라서 $B_{13}=234$ 에서

$$\frac{13(2a_1+12\cdot 6)}{2}=234$$

$$13(a_1+36)=234, \quad a_1+36=18$$

$$\therefore a_1=-18$$

$$\therefore a_{13}=-18+12\cdot 3=18 \quad \text{답 ②}$$

02 [전략] $a_n+2n=b_n$ 이라 하고 $b_1=S_1, b_n=S_n-S_{n-1}$ ($n \geq 2$)임을 이용한다.

[풀이] $a_n+2n=b_n$ 이라 하면 $S_n=4n^2+kn$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$b_1=S_1=4+k$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$b_n=S_n-S_{n-1}=4n^2+kn-\{4(n-1)^2+k(n-1)\}=8n+k-4 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $b_1=4+k$ 는 $n=1$ 을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$b_n=8n+k-4$$

즉 $a_n+2n=8n+k-4$ 이므로

$$a_n=6n+k-4$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고, $a_1=2+k, a_{10}=56+k$

이므로 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=250$ 에서

$$\frac{10\{(2+k)+(56+k)\}}{2}=250$$

$$2k+58=50, \quad 2k=-8$$

$$\therefore k=-4 \quad \text{답 ②}$$

[다른 풀이] $S_{10}=(a_1+2)+(a_2+4)+(a_3+6)+\cdots+(a_{10}+20)$

$$+ \cdots + (a_{10}+20)$$

$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$$

$$+(2+4+6+\cdots+20)$$

$$=250+\frac{10(2+20)}{2}$$

$$=360$$

이때 $S_{10}=4\cdot 10^2+k\cdot 10=10k+400$ 이므로

$$10k+400=360, \quad 10k=-40$$

$$\therefore k=-4$$

03 [전략] [매듭 n]을 만드는 데 필요한 검정 구슬의 개수를 구한다.

[풀이] [매듭 n]을 만드는 데 필요한 검정 구슬의 개수를 a_n 이라 하면

$$a_1=4, a_2=6, a_3=8, \dots$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이므로 [매듭 1]부터 [매듭 m]까지 만드는 데 필요한 검정 구슬의 개수는

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m=\frac{m\{2\cdot 4+(m-1)\cdot 2\}}{2}=m^2+3m$$

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{m^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{m^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m^2+2m+1}}$$

$a_n=6n+k-4=2+k+(n-1)\cdot 6$
이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $2+k$, 공차가 6인 등차수열이다.

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{m^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m^2+2m+1}}>\frac{1}{\sqrt{m^2+2m+1}}+\frac{1}{\sqrt{m^2+2m+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m^2+2m+1}}$$

첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합

일품 BOX

$$m^2+3m \leq 100 \text{에서} \quad m^2+3m-100 \leq 0$$

$$\therefore 0 < m \leq \frac{-3+\sqrt{409}}{2} \quad (\because m \text{은 자연수})$$

따라서 자연수 m 의 최댓값은 8이다.

답 ①

04 [전략] 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하고 주어진 조건을 a 와 r 에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하자.

$$a_3=1 \text{에서}$$

$$ar^2=1$$

..... ㉠

$$a_9-a_7=12(a_6-a_5) \text{에서}$$

$$ar^8-ar^6=12(ar^5-ar^4)$$

$$ar^6(r^2-1)=12ar^4(r-1)$$

$$r^2(r+1)=12, \quad r^3+r^2-12=0$$

$$(r-2)(r^2+3r+6)=0$$

$$\therefore r=2 \quad (\because r^2+3r+6 > 0)$$

$r=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$4a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}=2^{n-3}$$

$$a_m > 1000 \text{에서} \quad 2^{m-3} > 1000$$

$$\text{이때 } 2^9=512, 2^{10}=1024 \text{이므로}$$

$$m-3 \geq 10 \quad \therefore m \geq 13$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 13이다.

답 ⑤

05 [전략] 첫째항이 a , 공비가 r ($r \neq 1$)인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ 임을 이용한다.

[풀이] 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r \neq 1$)라 하자.

조건 (가)에서

$$\frac{a_1(r^p-1)}{r-1}=30$$

..... ㉠

조건 (나)에서

$$(\text{좌변}) = \frac{a_1(r^{2p}-1)}{r-1}$$

$$= \frac{a_1(r^p-1)(r^p+1)}{r-1}$$

$$= 30(r^p+1) \quad (\because \text{㉠})$$

$$\text{즉 } 30(r^p+1)=510 \text{이므로}$$

$$r^p+1=17 \quad \therefore r^p=16$$

..... ㉡

$$\text{㉡을 ㉠에 대입하면} \quad \frac{15a_1}{r-1}=30$$

$$\therefore \frac{a_1}{r-1}=2$$

..... ㉢

조건 (다)에서

$$(\text{좌변}) = \frac{a_1^2\{(r^2)^p-1\}}{r^2-1}$$

$$= \frac{a_1^2(r^{2p}-1)}{(r+1)(r-1)} = \frac{a_1}{r+1} \cdot \frac{a_1(r^{2p}-1)}{r-1}$$

$$= \frac{510a_1}{r+1} \quad (\because \text{㉢})$$

$$\sqrt{400} < \sqrt{409} < \sqrt{441}, \text{ 즉}$$

$$20 < \sqrt{409} < 21 \text{이므로}$$

$$17 < -3 + \sqrt{409} < 18$$

$$\therefore 8.5 < \frac{-3 + \sqrt{409}}{2} < 9$$

$$\text{㉢에서 } a_1=2(r-1)$$

$$\text{㉢에서 } a_1=\frac{2}{3}(r+1)$$

$$2(r-1)=\frac{2}{3}(r+1) \text{이}$$

므로

$$6r-6=2r+2$$

$$4r=8 \quad \therefore r=2$$

$$\therefore a_1=2 \cdot (2-1)=2$$

㉢에서 $a \neq 0, r \neq 0$ 이고 $r \neq 1$ 이므로 양변을 $ar^4(r-1)$ 로 나눌 수 있다.

$$r^2+3r+6$$

$$= \left(r + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$$

첫째항이 160이고 공비가 $\frac{3}{4}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 5항까지의 합

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a_1^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이다.

$$\text{즉 } \frac{510a_1}{r+1}=340 \text{이므로}$$

$$\frac{a_1}{r+1}=\frac{2}{3}$$

..... ㉣

㉣, ㉢을 연립하여 풀면

$$a_1=2, r=2$$

$$r=2 \text{를 ㉣에 대입하면} \quad 2^p=2^4$$

$$\therefore p=4$$

답 ①

06 [전략] A 원이 $k\%$ 상승 $\rightarrow A\left(1+\frac{k}{100}\right)$ 원

B 개가 $k\%$ 감소 $\rightarrow B\left(1-\frac{k}{100}\right)$ 개

[풀이] 올해 구입한 휴대용 저장 장치의 1개당 가격과 개수를 용량별로 나타내면 다음 표와 같다.

용량	8 GB	16 GB	32 GB	64 GB	128 GB
가격 (원)	$a \times 1.2$	$\frac{3}{2}a \times 1.2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 a \times 1.2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 a \times 1.2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 a \times 1.2$
개수	$16b \times 0.5$	$8b \times 0.5$	$4b \times 0.5$	$2b \times 0.5$	$b \times 0.5$

따라서 구하는 금액의 합은

$$(a \times 1.2) \times (16b \times 0.5) + \left(\frac{3}{2}a \times 1.2\right) \times (8b \times 0.5)$$

$$+ \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 a \times 1.2\right\} \times (4b \times 0.5)$$

$$+ \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3 a \times 1.2\right\} \times (2b \times 0.5)$$

$$+ \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^4 a \times 1.2\right\} \times (b \times 0.5)$$

$$= \left[1 \times 16 + \frac{3}{2} \times \left(16 \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left\{16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right]$$

$$+ \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left\{16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} + \left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \left\{16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}]$$

$$\times 1.2 \times 0.5 \times ab$$

$$= \frac{3}{5}ab \left[16 + 16 \cdot \frac{3}{4} + 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3\right]$$

$$+ 16 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4]$$

$$= \frac{3}{5}ab \cdot \frac{16 \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{192}{5}ab \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right\} \text{ (원)}$$

답 ⑤

07 [전략] 월이율 $r\%$ 의 복리로 매월 초에 a 원씩 n 개월 동안 적립할 때, n 개월째 말에 받는 적립금의 원리합계는

$$\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r} \text{ 원임을 이용한다.}$$

$$[\text{풀이}] S=50(1+0.005)+50(1+0.005)^2$$

$$+\cdots+50(1+0.005)^{30}$$

$$= \frac{50 \times 1.005 \times (1.005^{30}-1)}{1.005-1}$$

$$= \frac{50 \times 1.005 \times (1.16-1)}{0.005}$$

$$= 1608 \text{ (만 원)}$$

$$\begin{aligned}
 T &= 100(1+0.01) + 100(1+0.01)^2 \\
 &\quad + \cdots + 100(1+0.01)^{60} \\
 &= \frac{100 \times 1.01 \times (1.01^{60} - 1)}{1.01 - 1} \\
 &= \frac{100 \times 1.01 \times (1.82 - 1)}{0.01} \\
 &= 8282 \text{ (만 원)} \\
 \therefore T - 5S &= 242 \text{ (만 원)}
 \end{aligned}$$

답 ④

08 [전략] $n=2m-1$ 일 때와 $n=2m$ 일 때로 나누어 생각한다.

[풀이] $a_n = (-1)^{n+1}(3n+1)$ 에서
 $a_{2n-1} = (-1)^{2n}\{3(2n-1)+1\} = 6n-2$,
 $a_{2n} = (-1)^{2n+1}\{3 \cdot 2n+1\} = -6n-1$
 $\therefore a_{2n-1} + a_{2n} = -3$

(i) $n=2m-1$ (m 은 자연수)일 때,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^{2m-1} a_k \\
 &= \sum_{k=1}^m (a_{2k-1} + a_{2k}) - a_{2m} \\
 &= \sum_{k=1}^m (-3) - (-6m-1) \\
 &= -3m + 6m + 1 \\
 &= 3m + 1
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k > 100 \text{에서} \quad 3m+1 > 100$$

$$3m > 99 \quad \therefore m > 33$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 34이므로 자연수 n 의 최솟값은 $2 \cdot 34 - 1 = 67$

(ii) $n=2m$ (m 은 자연수)일 때,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^{2m} a_k = \sum_{k=1}^m (a_{2k-1} + a_{2k}) \\
 &= \sum_{k=1}^m (-3) \\
 &= -3m < 0 \quad (\because m \text{은 자연수})
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 자연수 n 의 최솟값은 67이다.

답 ②

[다른 풀이] $\sum_{k=1}^n a_k = S_n$ 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_1 &= a_1 = 4 \\
 S_2 &= S_1 + a_2 = 4 - 7 = -3 \\
 S_3 &= S_2 + a_3 = -3 + 10 = 7 \\
 S_4 &= S_3 + a_4 = 7 - 13 = -6 \\
 S_5 &= S_4 + a_5 = -6 + 16 = 10 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

즉 자연수 m 에 대하여

$$S_{2m-1} = 3m+1, \quad S_{2m} = -3m$$

이때 $\sum_{k=1}^n a_k > 100$, 즉 $S_n > 100$ 에서 $n=2m-1$ 꼴이어야 하므로

$$3m+1 > 100, \quad 3m > 99 \quad \therefore m > 33$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 34이므로 n 의 최솟값은 $2 \cdot 34 - 1 = 67$

09 [전략] $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 를 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

[풀이] $a_1=1, a_2=5, a_3=7, a_4=11, a_5=13, a_6=17, \dots$
 즉 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 6인 등차수열이고,
 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열이므로

$$a_{2n-1} = 1 + (n-1) \cdot 6 = 6n-5,$$

$$a_{2n} = 5 + (n-1) \cdot 6 = 6n-1$$

$$\therefore a_{2n-1} + a_{2n} = 12n-6$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{25} a_k = \sum_{k=1}^{12} (a_{2k-1} + a_{2k}) + a_{25}$$

$$= \sum_{k=1}^{12} (12k-6) + 6 \cdot 13 - 5$$

$$= 12 \cdot \frac{12 \cdot 13}{2} - 6 \cdot 12 + 73$$

$$= 937$$

답 ③

10 [전략] 주어진 조건을 이용하여 $a_n + b_n, a_n b_n$ 을 구한다.

[풀이] $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = n^2 + 3n$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 + b_1 = 4$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 a_n + b_n &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) - \sum_{k=1}^{n-1} (a_k + b_k) \\
 &= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\
 &= 2n + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

이때 $a_1 + b_1 = 4$ 는 $n=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입한 것과 같으므로

$$a_n + b_n = 2n + 2$$

또 $\sum_{k=1}^n a_k b_k = 2n^2 + 2n$ 에서

① $n=1$ 일 때,

$$a_1 b_1 = 4$$

② $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 a_n b_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \\
 &= 2n^2 + 2n - \{2(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\
 &= 4n \quad \dots\dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

이때 $a_1 b_1 = 4$ 는 $n=1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입한 것과 같으므로

$$a_n b_n = 4n$$

$$\begin{aligned}
 \therefore a_n^2 + b_n^2 &= (a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n \\
 &= (2n+2)^2 - 2 \cdot 4n \\
 &= 4n^2 + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^6 (a_k^2 + b_k^2) &= \sum_{k=1}^6 (4k^2 + 4) \\
 &= 4 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} + 4 \cdot 6 \\
 &= 388
 \end{aligned}$$

답 ④

11 [전략] 첫째항과 공차를 모두 a 라 하고 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한 후 $\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+2}}}$ 의 분모를 유리화한다.

[풀이] 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차를 모두 a 라 하면

$$a_n = a + (n-1) \cdot a = an$$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+2}}} &= \frac{\sqrt{a(n+1)}}{\sqrt{an} + \sqrt{a(n+2)}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})} \\ &= \frac{1}{2} \{ \sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{n(n+1)} \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_{k+1}}}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+2}}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{ \sqrt{(k+1)(k+2)} - \sqrt{k(k+1)} \} \\ &= \frac{1}{2} [(\sqrt{2 \cdot 3} - \sqrt{1 \cdot 2}) + (\sqrt{3 \cdot 4} - \sqrt{2 \cdot 3}) \\ &\quad + \cdots + \{ \sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{n(n+1)} \}] \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{2})\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2} (\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2 + 3n + 2} &= 6\sqrt{2}, & n^2 + 3n + 2 &= 72 \\ n^2 + 3n - 70 &= 0, & (n+10)(n-7) &= 0\end{aligned}$$

$\therefore n=7$ ($\because n$ 은 자연수) 답 ②

12 [전략] $|a_{n+1}| = |a_n| + 3$ 에서 수열 $\{|a_n|\}$ 이 공차가 3인 등차수열임을 이용한다.

[풀이] 수열 $\{|a_n|\}$ 은 첫째항이 $|a_1| = 2$, 공차가 3인 등차수열이므로

$$|a_n| = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n-1$$

$$\therefore |a_{2n-1}| = 3(2n-1) - 1 = 6n-4,$$

$$|a_{2n}| = 3 \cdot 2n - 1 = 6n-1$$

$|a_{n+1}| > |a_n|$ 이므로 $a_{n+1}a_n > 0$ 이면

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1}| - |a_n| = 3$$

그런데 $|a_{n+1} - a_n| \neq 3$ 이므로

$$a_{n+1}a_n < 0$$

이때 $a_1 = -2 < 0$ 이므로

$$a_{2n-1} < 0, a_{2n} > 0$$

$$\therefore a_{2n-1} = -6n+4, a_{2n} = 6n-1$$

따라서 $a_{2n-1} + a_{2n} = 3$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=10}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^9 a_k \\ &= \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) - \sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} + a_{2k}) + a_{10} \\ &= \sum_{k=1}^{10} 3 - \sum_{k=1}^5 3 + 6 \cdot 5 - 1 \\ &= 3 \cdot 10 - 3 \cdot 5 + 29 \\ &= 44\end{aligned}$$

답 ②

13 [전략] 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례대로 대입한다.

[풀이] $\log_2 a_1 = \log_2 4 = 2$ 에서 $\log_2 a_1 \in N$ 이므로

$$a_2 = 1 + \log_2 a_1 = 1 + 2 = 3$$

$\log_2 a_2 = \log_2 3$ 에서 $\log_2 a_2 \notin N$ 이므로

$$a_3 = 2 + a_2 = 2 + 3 = 5$$

$\log_2 a_3 = \log_2 5$ 에서 $\log_2 a_3 \notin N$ 이므로

$$a_4 = 3 + a_3 = 3 + 5 = 8$$

$\log_2 a_4 = \log_2 8 = 3$ 에서 $\log_2 a_4 \in N$ 이므로

$$a_5 = 1 + \log_2 a_4 = 1 + 3 = 4$$

$\log_2 a_5 = \log_2 4 = 2$ 에서 $\log_2 a_5 \in N$ 이므로

$$a_6 = 1 + \log_2 a_5 = 1 + 2 = 3$$

$\log_2 a_6 = \log_2 3$ 에서 $\log_2 a_6 \notin N$ 이므로

$$a_7 = 6 + a_6 = 6 + 3 = 9$$

$$\therefore \sum_{n=1}^7 a_n = 4 + 3 + 5 + 8 + 4 + 3 + 9 = 36 \quad \text{답 ⑤}$$

14 [전략] 먼저 주어진 식을 이용하여 a_{n+1} 의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 a_n 을 구한다.

[풀이] $a_n \leq 0$ 이면 $a_{n+1} = -a_n \geq 0$

$0 < a_n \leq 1$ 이면 $a_{n+1} = \log_3 a_n \leq 0$

$a_n > 1$ 이면 $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \therefore 0 < a_{n+1} < 1$

따라서 a_{n+1} 의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 a_n 을 구하면 다음과 같다.

$a_{n+1} < 0$ 일 때,

$$a_{n+1} = \log_3 a_n \therefore a_n = 3^{a_{n+1}}$$

$a_{n+1} = 0$ 일 때,

$$a_{n+1} = -a_n \text{ 또는 } a_{n+1} = \log_3 a_n$$

$$\therefore a_n = 0 \text{ 또는 } a_n = 1$$

$0 < a_{n+1} < 1$ 일 때,

$$a_{n+1} = -a_n \text{ 또는 } a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$$

$$\therefore a_n = -a_{n+1} \text{ 또는 } a_n = \frac{1}{a_{n+1}}$$

$a_{n+1} \geq 1$ 일 때,

$$a_{n+1} = -a_n \therefore a_n = -a_{n+1}$$

이때 $a_6 = 0$ 이므로 $a_5 = 0$ 또는 $a_5 = 1$

(i) $a_5 = 0$ 일 때,

$$a_4 = 0 \text{ 또는 } a_4 = 1$$

① $a_4 = 0$ 일 때,

$$a_3 = 0 \text{ 또는 } a_3 = 1$$

$$a_3 = 0 \text{에서 } a_2 = 0 \text{ 또는 } a_2 = 1 \text{이므로}$$

$$a_2 = 0 \text{이면 } a_1 = 0 \text{ 또는 } a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 \text{이면 } a_1 = -1$$

$$a_3 = 1 \text{에서 } a_2 = -1 \text{이므로}$$

$$a_1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

② $a_4 = 1$ 일 때,

$$a_3 = -1 \text{이므로 } a_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a_1 = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } a_1 = 3$$

(ii) $a_5 = 1$ 일 때, $a_4 = -1$

$$a_3 = 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$a_2 = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } a_2 = 3$$

$$|a_{n+1}| = |a_n| + 3 > |a_n|$$

$$\begin{aligned}|a_{2n-1}| &= 6n-4, \\ |a_{2n}| &= 6n-1 \text{에서} \\ |a_{2n-1}| &= 0, |a_{2n}| = 0 \text{을} \\ &\text{만족시키는 자연수 } n \text{의} \\ &\text{값이 존재하지 않으므로} \\ a_{n+1}a_n &< 0\end{aligned}$$

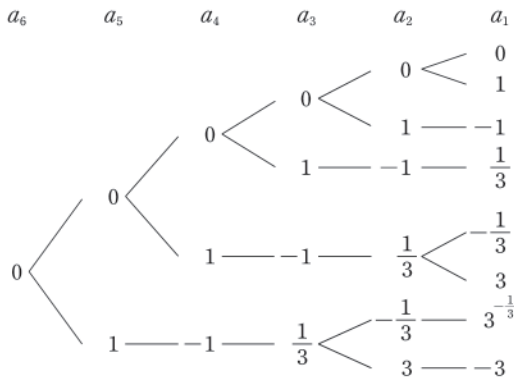
$$\begin{aligned}\text{밑이 } 20 \text{이므로 } a_n &= 2^k \\ (k \text{는 자연수}) \text{ 풀이면} \\ \log_2 a_n &\in N \text{이다.}\end{aligned}$$

$$a_2 = -\frac{1}{3} \text{ 이면 } a_1 = 3^{-\frac{1}{3}}$$

$$a_2 = 3 \text{ 이면 } a_1 = -3$$

(i), (ii)에서 a_1 의 값이 될 수 있는 수는 $0, 1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, 3^{-\frac{1}{3}}, -3$ 의 8개이다. 답 ④

참고 $a_6=0$ 을 이용하여 a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 의 값을 구한 후 수형도로 나타내면 다음과 같다.



15 **전략** $n=m$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정한 후 $n=m+1$ 일 때 주어진 등식이 성립하도록 하는 식을 등식의 양변에 더한다.

풀이 (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+\sqrt{0}} = 1, (\text{우변}) = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

따라서 $n=1$ 일 때 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}+\cdots+\sqrt{m}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \frac{m(m+1)}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}+\cdots+\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}+\cdots+\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} + \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}+\cdots+\sqrt{m}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} + \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + \sqrt{m+1} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \\ & \quad + \frac{\sqrt{m+1}(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})}{(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})(\sqrt{m+1}-\sqrt{m})} \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + \sqrt{m+1} \sum_{k=1}^m (\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) \\ & \quad + \sqrt{m+1}(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}) \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + \sqrt{m+1}\sqrt{m} + m+1 \\ & \quad - \sqrt{m+1}\sqrt{m} \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + m+1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{17}+a_{19} &= 2a_{18} \\ a_{k+5}+a_{k+1} &= 2a_{k+3} \\ a_{k+4}+a_{k+2} &= 2a_{k+3} \\ \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} &= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{k-(k-1)} \\ &= \sqrt{k}-\sqrt{k-1} \\ \sum_{k=1}^m (\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) &= (\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1}) \\ & \quad +(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots \\ & \quad +(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}) \\ &= \sqrt{m} \end{aligned}$$

$$\therefore (가) 1 \quad (나) \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} \quad (다) \sqrt{m+1}$$

$$\text{따라서 } p=1, f(m) = \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}},$$

$$g(m) = \sqrt{m+1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} p+f(3)+g(11) &= 1 + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \sqrt{12} \\ &= 1 + 2(2-\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} \\ &= 5 \end{aligned}$$

답 ⑤

16 **전략** 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하고 주어진 조건을 a_1 과 d 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1+a_2+a_6+a_7=2a_4 \text{ 에서}$$

$$a_1+(a_1+d)+(a_1+5d)+(a_1+6d)=2(a_1+3d)$$

$$4a_1+12d=2a_1+6d, \quad 2a_1+6d=0$$

$$\therefore a_1+3d=0 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$\text{또 } a_8+a_9+a_{10}+\cdots+a_{15}=120 \text{ 에서}$$

$$\frac{8(a_8+a_{15})}{2}=120, \quad a_8+a_{15}=30$$

$$(a_1+7d)+(a_1+14d)=30$$

$$\therefore 2a_1+21d=30 \quad \cdots \cdots ㉡ \quad \cdots \cdots ①$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a_1=-6, d=2 \quad \cdots \cdots ②$$

$$\therefore a_{20}=-6+19 \cdot 2=32 \quad \cdots \cdots ③$$

답 32

채점 기준	비율
① a_1, d 에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	50%
② a_1, d 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ a_{20} 의 값을 구할 수 있다.	30%

17 **전략** 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2b=a+c$ 임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_6=7a_{12}$ 에서

$$a_1+5d=7(a_1+11d), \quad 6a_1=-72d$$

$$\therefore a_1=-12d \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$S_k+a_{17}+a_{18}+a_{19}=S_{k+5} \text{ 에서}$$

$$a_{17}+a_{18}+a_{19}=S_{k+5}-S_k$$

$$3a_{18}=a_{k+5}+a_{k+4}+a_{k+3}+a_{k+2}+a_{k+1}$$

$$3a_{18}=5a_{k+3}$$

$$3(a_1+17d)=5(a_1+(k+2)d)$$

$$2a_1=(-5k+41)d$$

$$\therefore a_1=\frac{-5k+41}{2}d \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$-12=\frac{-5k+41}{2}$$

$$-5k+41=-24, \quad 5k=65$$

$$\therefore k=13$$

답 13

일품 BOX

18 [전략] $a_1a_n=a_2a_{n-1}=a_3a_{n-2}=\dots$ 임을 이용한다.

[풀이] 조건 (가), (나)에서

$$a_1a_2a_3 \cdot a_{k-2}a_{k-1}a_k = \frac{1}{2} \cdot 128$$

$$a_1a_k \cdot a_2a_{k-1} \cdot a_3a_{k-2} = 64$$

이때 $a_1a_k=a_2a_{k-1}=a_3a_{k-2}$ 이므로

$$(a_1a_k)^3=64$$

$$\therefore a_1a_k=4 \quad (\because a_1>0, a_k>0)$$

(i) k 가 짝수일 때,

조건 (다)에서

$$a_1a_2a_3 \cdots a_{k-2}a_{k-1}a_k$$

$$=a_1a_k \cdot a_2a_{k-1} \cdot a_3a_{k-2} \cdots a_{\frac{k}{2}}a_{\frac{k}{2}+1}$$

이때 $a_1a_k=a_2a_{k-1}=a_3a_{k-2}=\dots=a_{\frac{k}{2}}a_{\frac{k}{2}+1}$ 이므로

$$(a_1a_k)^{\frac{k}{2}}=512, \quad 4^{\frac{k}{2}}=512$$

$$2^k=2^9 \quad \therefore k=9$$

그런데 k 는 짝수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) k 가 홀수일 때,

조건 (다)에서

$$a_1a_2a_3 \cdots a_{k-2}a_{k-1}a_k$$

$$=a_1a_k \cdot a_2a_{k-1} \cdot a_3a_{k-2} \cdots a_{\frac{k-1}{2}}a_{\frac{k+3}{2}} \cdot a_{\frac{k+1}{2}}$$

이때 $a_1a_k=a_2a_{k-1}=a_3a_{k-2}=\dots=a_{\frac{k-1}{2}}a_{\frac{k+3}{2}}$ 이므로

$$(a_1a_k)^{\frac{k-1}{2}} \cdot a_{\frac{k+1}{2}}=512$$

$$4^{\frac{k-1}{2}} \cdot a_{\frac{k+1}{2}}=512 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수 $a_{\frac{k-1}{2}}, a_{\frac{k+1}{2}}, a_{\frac{k+3}{2}}$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a_{\frac{k+1}{2}})^2=a_{\frac{k-1}{2}}a_{\frac{k+3}{2}}=a_1a_k=4$$

$$\therefore a_{\frac{k+1}{2}}=2 \quad (\because a_{\frac{k+1}{2}}>0)$$

따라서 이것을 ①에 대입하면

$$4^{\frac{k-1}{2}} \cdot 2=512$$

$$2^k=2^9 \quad \therefore k=9$$

(i), (ii)에서

$$k=9$$

답 9

비밀노트

공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} a_1a_n &= a_1 \cdot a_1r^{n-1} \\ &= a_1r \cdot a_1r^{n-2} \\ &= a_2a_{n-1} \end{aligned}$$

같은 방법으로 하면

$$a_1a_n=a_2a_{n-1}=a_3a_{n-2}=\dots$$

19 [전략] $2 \leq n \leq 8$ 인 자연수 n 에 대하여 $j=n$ 일 때의 모든 ij 의 값의 합을 구한다.

[풀이] $2 \leq n \leq 8$ 인 자연수 n 에 대하여 $j=n$ 일 때 i 의 값이 될 수 있는 수는

$$1, 2, 3, \dots, n-1$$

이므로 i, j 의 순서쌍 (i, j) 에 대하여 모든 ij 의 값의 합은

$$k=1\text{일 때, } \frac{k^3-k^2}{2}=0$$

이므로

$$\sum_{k=2}^8 \frac{k^3-k^2}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^8 \frac{k^3-k^2}{2}$$

$$\begin{aligned} n\{1+2+3+\dots+(n-1)\} &= n \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= n \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} \\ &= \frac{n^3-n^2}{2} \end{aligned}$$

이때 $n=2, 3, 4, \dots, 8$ 이므로 구하는 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^8 \frac{k^3-k^2}{2} &= \sum_{k=1}^8 \frac{k^3-k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{8 \cdot 9}{2} \right)^2 - \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} \right\} \\ &= 546 \end{aligned}$$

답 546

20 [전략] m 을 n 에 대한 식으로 나타내어 n 의 값에 따른 b_n 을 구한다.

$$[풀이] a_n = -\frac{13}{5} + (n-1) \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}n - 3$$

$$a_m = n \text{에서 } \frac{2}{5}m - 3 = n$$

$$\therefore m = \frac{5}{2}(n+3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 자연수 k 에 대하여 $n=2k-1$ 이면 자연수 m 이 존재하고, $n=2k$ 이면 자연수 m 이 존재하지 않으므로

$$b_{2k-1} = \frac{5}{2}(2k-1+3) = 5k+5, \quad b_{2k} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} b_k &= \sum_{k=1}^{10} (b_{2k-1} + b_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (5k+6) \\ &= 5 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 6 \cdot 10 \\ &= 335 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 335

채점 기준	비율
① m 을 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② b_{2k-1}, b_{2k} 를 구할 수 있다.	50%
③ $\sum_{k=1}^{20} b_k$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

21 [전략] 먼저 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 항을 각각 나열하여 $a_m=b_l$ 인 항을 구한다.

[풀이] p 가 자연수이므로 수열 $\{a_n\}$ 은

$$p, p - \frac{1}{4}, \dots, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, \dots$$

수열 $\{b_n\}$ 은

$$\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

따라서 $a_m=b_l$ 을 만족시키는 두 자연수 m, l 의 순서쌍 (m, l) 의 개수가 8이 되려면 $a_m=b_l$ 인 항은 작은 것부터 차례대로

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32$$

이어야 하므로

$$32 \leq p < 64, \quad 4 \leq l \leq 11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 p , 공차가 $-\frac{1}{4}$ 인 등차수열
이므로

$$\begin{aligned} a_n &= p + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{4}n + \frac{1}{4} + p \end{aligned}$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{32}$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$b_n = \frac{1}{32} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-6}$$

$a_m = b_l$ 에서

$$-\frac{1}{4}m + \frac{1}{4} + p = 2^{l-6}, \quad \frac{1}{4}m = \frac{1}{4} + p - 2^{l-6}$$

$$\therefore m = 1 + 4p - 2^{l-4}$$

$$\therefore m + l = 1 + 4p + l - 2^{l-4}$$

㉠의 범위에서 $l - 2^{l-4}$ 의 값은 $l=4$ 또는 $l=5$ 일 때 최
대이므로 $m+l$ 의 값도 $l=4$ 또는 $l=5$ 일 때 최대이다.

즉 $m+l$ 의 최댓값이 $4p+4$ 이므로

$$4p+4=156, \quad 4p=152$$

$$\therefore p=38$$

답 38

22 [전략] $S_n - S_{n-1} = a_n (n \geq 2)$ 임을 이용하여 수열 $\{a_n\}$
의 일반항을 구한다.

[풀이] $S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + 1)$ 에서

$$S_{n+1} - S_n = S_n - S_{n-1} + 2$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 2 \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = 1, a_2 = 3$ 에서 $a_2 = a_1 + 2$

이것은 $n=1$ 을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이
므로

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=5}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^4 a_k \\ &= \sum_{k=1}^{10} (2k-1) - \sum_{k=1}^4 (2k-1) \\ &= \left(2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 10\right) - \left(2 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} - 4\right) \\ &= 100 - 16 = 84 \end{aligned}$$

답 84

23 [전략] 두 점 $(a, b), (c, d)$ 를 지나는 직선의 방정식은
 $y-b = \frac{d-b}{c-a}(x-a)$ 임을 이용한다. (단, $a \neq c$)

[풀이] 두 점 $A(0, 4), P_n(x_n, 1)$ 을 지나는 직선의 방
정식은

$$y = -\frac{3}{x_n}x + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선의 x 절편이 x_{n+1} 이므로

$$0 = -\frac{3}{x_n} \cdot x_{n+1} + 4 \quad \therefore x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n$$

따라서 수열 $\{x_n\}$ 은 공비가 $\frac{4}{3}$ 인 등비수열이다.

이때 x_1 은 두 점 A, B를 지나는 직선 $y = -3x+4$ 의 x
절편이므로 $-3x_1+4=0$ 에서

$$x_1 = \frac{4}{3}$$

따라서 $x_n = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 이므로 $\dots\dots \textcircled{2}$

$$x_{20} = \left(\frac{4}{3}\right)^{20} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{답} \left(\frac{4}{3}\right)^{20}$$

채점 기준	비율
① 두 점 A, P _n 을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
② x _n 을 구할 수 있다.	60%
③ x ₂₀ 의 값을 구할 수 있다.	10%

24 [전략] $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대
입하여 규칙을 찾는다.

[풀이] $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대
입하면

$$a_2 = \frac{1}{2-a_1} = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{2-a_2} = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{1}{2-a_3} = \frac{1}{2-\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = \frac{n}{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\frac{10a_n}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n}} = 171 \text{에서}$$

$$\frac{10 \cdot \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{2n+1}} = 171, \quad \frac{10n(2n+1)}{n+1} = 171$$

$$20n^2 - 161n - 171 = 0, \quad (20n+19)(n-9) = 0$$

$$\therefore n=9 \quad (\because n \text{은 자연수}) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 9

채점 기준	비율
① a _n 을 구할 수 있다.	40%
② a ₁ a ₂ a ₃ ⋯a _{2n} 을 구할 수 있다.	30%
③ n의 값을 구할 수 있다.	30%





ME
MO

A series of horizontal dashed lines for writing, spanning the width of the page.