



정답 및 풀이

I 도형의 방정식 2

II 집합과 명제 40

III 함수 66

I 도형의 방정식

01 평면좌표와 직선의 방정식

개념 & 핵심 기출

본책 8쪽

01 △OAB의 외심을 P라 하면

$$\overline{OP} = \overline{AP} = \overline{BP}$$

$$\overline{OP} = \overline{AP} \text{에서 } \overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 \text{이므로}$$

$$2^2 + (-1)^2 = (2-1)^2 + (-1-a)^2$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0, \quad (a+3)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0)$$

$$\overline{OP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{OP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$2^2 + (-1)^2 = (2-b)^2 + (-1)^2$$

$$b^2 - 4b = 0, \quad b(b-4) = 0$$

$$\therefore b = 4 (\because b > 0)$$

$$\therefore a + b = 5$$

답 5

02 점 P(a, b)가 직선 y=x+2 위의 점이므로

$$b = a + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(a-2)^2 + (b+3)^2 = (a-4)^2 + (b-1)^2$$

$$\therefore a + 2b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -1, b = 1$$

$$\therefore ab = -1$$

답 2

03 오른쪽 그림의 두 삼각형 ABC, ACD에서

$$\overline{PQ} = \overline{SR} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

또 두 삼각형 ABD, BCD에서

$$\overline{PS} = \overline{QR} = \frac{1}{2} \overline{BD}$$

이때

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-4-3)^2} = 5\sqrt{2},$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(5+1)^2 + (3+3)^2} = 6\sqrt{2}$$

이므로 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{SR} + \overline{PS} &= (\overline{PQ} + \overline{SR}) + (\overline{PS} + \overline{QR}) \\ &= \overline{AC} + \overline{BD} \\ &= 11\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 4

04 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$$\frac{3+b}{2} = 0 \quad \therefore b = -3$$

AB를 3:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot a}{3+2}, \frac{3 \cdot b + 2 \cdot 3}{3+2}\right)$$

삼각형의 외심

- ① 삼각형의 세 변의 수직 이등분선의 교점이다.
- ② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

$$\therefore \left(\frac{6+2a}{5}, \frac{3b+6}{5}\right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로

$$\frac{6+2a}{5} = 0 \quad \therefore a = -3$$

$$\therefore a + b = -6$$

답 -6

05 AB를 k:(1-k)로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{k \cdot 2 + (1-k) \cdot (-4)}{k + (1-k)}, \frac{k \cdot (-5) + (1-k) \cdot 3}{k + (1-k)}\right)$$

$$\therefore (6k-4, -8k+3)$$

이 점이 제3사분면 위에 있으려면

$$6k-4 < 0, -8k+3 < 0$$

$$\therefore \frac{3}{8} < k < \frac{2}{3}$$

$$\text{답 } \frac{3}{8} < k < \frac{2}{3}$$

06 AB=3BC에서 AB:BC=3:1

(i) 점 C가 AB 위의 점일 때,

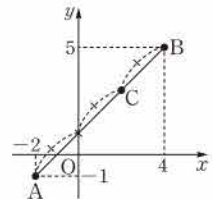
점 C는 오른쪽 그림과 같이

AB를 2:1로 내분하는 점

이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)}{2+1}, \frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1)}{2+1}\right)$$

$$\therefore C(2, 3)$$



(ii) 점 C가 AB의 연장선 위의 점일 때,

점 B는 오른쪽 그림과 같이

AC를 3:1로 내분하

는 점이므로 C(a, b)라

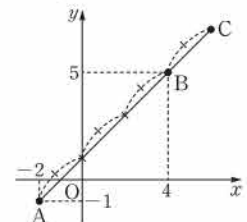
하면

$$\frac{3 \cdot a + 1 \cdot (-2)}{3+1} = 4,$$

$$\frac{3 \cdot b + 1 \cdot (-1)}{3+1} = 5$$

$$\therefore a = 6, b = 7$$

$$\therefore C(6, 7)$$



(i), (ii)에서 점 C의 좌표는 (2, 3), (6, 7)이다.

답 (2, 3), (6, 7)

등급 비밀노트

858

두 점 A, B를 지나는 직선 위의 점 C에 대하여

$$\overline{AB} : \overline{BC} = m : n$$

을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

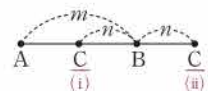
① m > n일 때

(i) 점 C는 AB를 (m-n):n

으로 내분하는 점

(ii) 점 B는 AC를 m:n으로 내

분하는 점



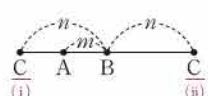
② m < n일 때

(i) 점 A는 CB를 (n-m):m

으로 내분하는 점

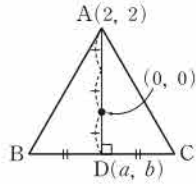
(ii) 점 B는 AC를 m:n으로 내

분하는 점



일품 BOX

07 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 의 중점을 $D(a, b)$ 라 하면 $\overline{AD}$ 를 2:1로 내분하는 점은 $\triangle ABC$ 의 무게중심 $(0, 0)$ 과 일치한다. 즉



$$\frac{2 \cdot a + 1 \cdot 2}{2+1} = 0, \quad \frac{2 \cdot b + 1 \cdot 2}{2+1} = 0$$

이므로 $2a+2=0, 2b+2=0$

$$\therefore a=-1, b=-1$$

$$\therefore D(-1, -1)$$

이때 $\overline{AD}$ 의 길이는 정삼각형 ABC의 높이이고

$$\overline{AD} = \sqrt{(2+1)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}$$

이므로 정삼각형의 한 변의 길이를 k 라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}k = 3\sqrt{2} \quad \therefore k = 2\sqrt{6}$$

따라서 정삼각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{6}$ 이다. **답** $2\sqrt{6}$

다른 풀이 위의 그림에서 점 $(0, 0)$ 을 점 O라 하면 $\overline{AO} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{AD} = \frac{3}{2}\overline{AO} = 3\sqrt{2}$$

08 점 P가 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(p, p+3)$ 이라 하자.

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(p-2)^2 + (p+3-3)^2 = (p+2)^2 + (p+3+1)^2$$

$$2p^2 - 4p + 4 = 2p^2 + 12p + 20$$

$$16p = -16 \quad \therefore p = -1$$

$$\therefore P(-1, 2)$$

따라서 점 G의 좌표는

$$\left(\frac{2-2-1}{3}, \frac{3-1+2}{3} \right), \text{ 즉 } \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

이므로 $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$

$$\therefore a+4b = -\frac{1}{3} + \frac{16}{3} = 5$$

답 5

09 $\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{1+ab}{2} \right) \quad \therefore \left(3, \frac{1+ab}{2} \right)$$

$\overline{BD}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{2+7}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{a+b}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

$\square ABCD$ 가 평행사변형이므로

$$3 = \frac{a+b}{2}, \quad \frac{1+ab}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore a+b=6, ab=8$$

$$\therefore a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= 6^3 - 3 \cdot 8 \cdot 6$$

$$= 72$$

답 ⑤

10 세 점이 한 직선 위에 있으려면 두 직선 AB, BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{k-2}{3-(-3)} = \frac{k+1-k}{2k-3}$$

$$2k^2 - 7k = 0 \text{에서}$$

$$k(2k-7) = 0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=\frac{7}{2}$$

$\triangle ABP$ 의 넓이가 $2S_1$ 이므로

$$\overline{BP} : \overline{PC} = 2 : 1$$

따라서 점 P는 $\overline{BC}$ 를

2:1로 내분하는 점이다.

$$(k-2)(2k-3)=6$$

$$\therefore 2k^2 - 7k = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k 의 값의 합은 $\frac{7}{2}$ 이다. **답** $\frac{7}{2}$

11 직선 l 이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 P라 하면 $S=3S_1$ 이므로 점 P는 $\overline{BC}$ 를 2:1로 내분하는 점이다.

즉 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-7)}{2+1}, \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{2+1} \right)$$

$$\therefore (-1, 1)$$

따라서 두 점 $A(1, 5), P(-1, 1)$ 을 지나는 직선 l 의 방정식은

$$y-5 = \frac{1-5}{-1-1}(x-1)$$

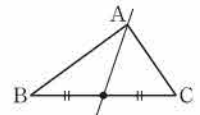
$$\therefore y=2x+3$$

$$\text{답 } y=2x+3$$

1등급 비밀노트

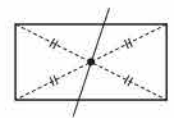
(1) 점 A를 지나는 직선이 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분한다.

→ 직선이 변 BC의 중점을 지난다.



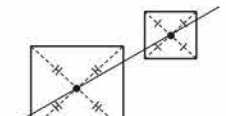
(2) 직선이 직사각형의 넓이를 이등분한다.

→ 직선이 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.



(3) 직선이 두 직사각형의 넓이를 각각 이등분한다.

→ 직선이 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지난다.



12 $3x+4y=k$

..... ㉠

$$x-y=-1$$

..... ㉡

$y=0$ 을 ㉠에 대입하면

$$3x=k \quad \therefore x=\frac{k}{3}$$

즉 직선 ㉠의 x 절편은 $\frac{k}{3}$ 이다.

$$\text{㉠} - \text{㉡} \times 3 \text{을 하면} \quad 7y=k+3 \quad \therefore y=\frac{k+3}{7}$$

즉 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 y 좌표는 $\frac{k+3}{7}$ 이다.

오른쪽 그림에서 두 직선 ㉠, ㉡과 x 축으로 둘러싸인 부분

의 넓이가 $\frac{14}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{3} + 1 \right) \cdot \frac{k+3}{7} = \frac{14}{3}$$

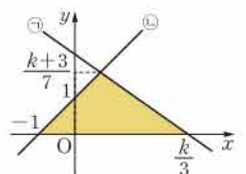
$$\frac{(k+3)^2}{42} = \frac{14}{3}$$

$$(k+3)^2 = 14^2, \quad k+3 = \pm 14$$

$$\therefore k = -17 \text{ 또는 } k = 11$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k=11$

답 11



13 두 직선 $x-y-1=0$, $x+ay=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x-y-1+k(x+ay)=0 \quad (k \text{는 실수})$$

으로 놓으면

$$(k+1)x+(ak-1)y-1=0$$

이 직선이 직선 $2x+y-1=0$ 과 같으므로

$$k+1=2, ak-1=1$$

$$k+1=2 \text{에서} \quad k=1$$

$k=1$ 을 $ak-1=1$ 에 대입하면

$$a-1=1$$

$$\therefore a=2$$

답 2

다른 풀이 $2x+y-1=0$, 즉 $2x+y=1$ 과 $x-y=1$ 을 연립하여 풀면

$$x=\frac{2}{3}, y=-\frac{1}{3}$$

따라서 두 직선 $2x+y-1=0$, $x-y=1$ 의 교점의 좌표가 $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ 이고, 직선 $x+ay=0$ 이 이 점을 지나므로

$$\frac{2}{3}+a\left(-\frac{1}{3}\right)=0 \quad \therefore a=2$$

14 두 직선 $2x-2y+3=0$, $2x+3y+a=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$2x-2y+3+k(2x+3y+a)=0 \quad (k \text{는 실수})$$

으로 놓으면

$$(2k+2)x+(3k-2)y+ak+3=0$$

이 직선의 기울기는 $-\frac{2k+2}{3k-2}$ 이므로

$$-\frac{2k+2}{3k-2}=-\frac{3}{2}$$

$$2(2k+2)=3(3k-2)$$

$$5k=10 \quad \therefore k=2$$

따라서 직선 l 의 방정식은

$$6x+4y+2a+3=0$$

이 직선이 점 $(3, b)$ 를 지나므로

$$18+4b+2a+3=0$$

$$\therefore 2a+4b=-21$$

답 5

15 $(3k+1)x+2(2k-1)y-11k+3=0$ 에서

$$(3x+4y-11)k+(x-2y+3)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$3x+4y-11=0$, $x-2y+3=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=1, y=2$$

즉 직선 $\textcircled{1}$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $A(1, 2)$ 를 지난다.

따라서 직선 $\textcircled{1}$ 이 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하려면 직선 $\textcircled{1}$ 이 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나야 한다.

이때 $\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-4+4}{2}\right) \quad \therefore (4, 0)$$

$x=4, y=0$ 을 직선 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$k+7=0 \quad \therefore k=-7$$

답 2

$$\begin{aligned} x-y=1 \text{에서} \\ x-y-1=0 \end{aligned}$$

선분 AB의 수직이등분선을 l 이라 하면

① 직선 l 과 직선 AB의 기울기의 곱은 -1 이다.

② 직선 l 은 선분 AB의 중점을 지난다.

16 직선 $2x+3y-6=0$ 의 기울기는 $-\frac{2}{3}$ 이므로 두 점 $(-3, a)$, $(3, b)$ 를 지나는 직선의 기울기도 $-\frac{2}{3}$ 이다.

$$\text{따라서} \quad \frac{b-a}{3+3}=-\frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$b-a=-4 \quad \therefore a-b=4$$

답 2

17 두 점 $A(a, -2)$, $B(b, -3)$ 을 지나는 직선 AB가 직선 $x+y+1=0$, 즉 $y=-x-1$ 과 수직이므로

$$\frac{-3+2}{b-a}=1$$

$$\therefore a-b=1$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

또 두 점 A, B의 중점 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{-2-3}{2}\right)$, 즉

$\left(\frac{a+b}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 가 직선 $x+y+1=0$ 위에 있으므로

$$\frac{a+b}{2}-\frac{5}{2}+1=0$$

$$\therefore a+b=3$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$$\therefore a-3b=-1$$

답 2

18 직선 $x+ay+2=0$ 이 직선 $2x-by-3=0$ 과 수직이므로

$$1 \cdot 2 + a \cdot (-b) = 0 \quad \therefore ab = 2$$

직선 $x+ay+2=0$ 이 직선 $x-(b-3)y+4=0$ 과 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{-(b-3)} \neq \frac{2}{4}$$

$$-b+3=a \quad \therefore a+b=3$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= 3^2 - 2 \cdot 2 = 5 \end{aligned}$$

답 5

19 오른쪽 그림과 같이 $O(0, 0)$, $A(0, 4)$ 라 하고 직선 l 과 x 축의 교점을 B라 하면 $\triangle OAB$ 의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OA} = 6$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot 4 = 6 \quad \therefore \overline{OB} = 3$$

즉 $B(3, 0)$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \quad \therefore 4x+3y-12=0$$

따라서 원점과 직선 l 사이의 거리는

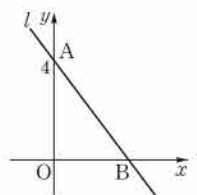
$$\frac{|-12|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{12}{5}$$

답 3

다른 풀이 직각삼각형 OAB에서 $\overline{AB} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ 원점과 직선 l 사이의 거리를 d 라 하면 $\triangle OAB$ 의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \cdot d \cdot \overline{AB} = 6, \quad \frac{1}{2} \cdot d \cdot 5 = 6$$

$$\therefore d = \frac{12}{5}$$



20 점 P가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 (a, a) 라 하자.

점 P에서 두 직선 $3x-y-1=0$, $x+3y-3=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3a-a-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|a+3a-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$|2a-1| = |4a-3|, \quad 2a-1 = \pm(4a-3)$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(1, 1), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ 이다.

답 $(1, 1), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$$y=3x-1 \text{에서}$$

$$3x-y-1=0$$

$$y=-\frac{1}{3}x+1 \text{에서}$$

$$\frac{1}{3}x+y-1=0$$

$$\therefore x+3y-3=0$$

$(x-2)^2 \geq 0, (y-3)^2 \geq 0$
이므로 주어진 식의 값이
최소인 경우는
 $(x-2)^2=0, (y-3)^2=0$,
즉 $x=2, y=3$ 일 때이다.

21 직선 $x+y-2=0$ 위의 점 $(2, 0)$ 과 직선 $x+y+m=0$ 사이의 거리가 $5\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|2+m|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 5\sqrt{2}, \quad |m+2| = 10$$

$$m+2 = \pm 10 \quad \therefore m = -12 \text{ 또는 } m = 8$$

그런데 $m > 0$ 이므로 $m = 8$

답 ④

평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

22 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = x^2 + (y-3)^2$$

$$8x + 4y - 32 = 0 \quad \therefore 2x + y - 8 = 0$$

답 ④

23 점 B의 좌표를 (a, b) , 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 P는 $\overline{AB}$ 를 2:1로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{2 \cdot a + 1 \cdot 3}{2+1} = \frac{2a+3}{3},$$

$$y = \frac{2 \cdot b + 1 \cdot 1}{2+1} = \frac{2b+1}{3}$$

$$\therefore a = \frac{3x-3}{2}, b = \frac{3y-1}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

또 점 B(a, b)가 직선 $2x+y-5=0$ 위의 점이므로

$$2a+b-5=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2 \cdot \frac{3x-3}{2} + \frac{3y-1}{2} - 5 = 0$$

$$\therefore 6x + 3y - 17 = 0$$

따라서 $p=6, q=-17$ 이므로

$$p+q = -11$$

답 -11

24 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 한 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선 $2x+5y+3=0$, $5x-2y-3=0$ 에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|2x+5y+3|}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{|5x-2y-3|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}$$

$$|2x+5y+3| = |5x-2y-3|$$

$$2x+5y+3 = \pm(5x-2y-3)$$

$$\therefore 3x-7y-6=0 \text{ 또는 } 7x+3y=0$$

이때 원점을 지나지 않아야 하므로 구하는 직선의 방정식은 $3x-7y-6=0$

답 ①

1등급을 위한 고난도 문제

본책 12쪽

01 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= \{(x-3)^2 + (y-4)^2\} + \{(x+4)^2 + (y-2)^2\}$$

$$+ \{(x-7)^2 + (y-3)^2\}$$

$$= 3x^2 - 12x + 3y^2 - 18y + 103$$

$$= 3(x-2)^2 + 3(y-3)^2 + 64$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 은 $x=2, y=3$ 일 때 최솟값 64를 가지므로 구하는 점 P의 좌표는 $(2, 3)$ 이다.

답 ③

비밀노트

세 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 과 임의의 점 $P(x, y)$ 에 대하여

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= \{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\} + \{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2\}$$

$$+ \{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2\}$$

$$= 3\left(x - \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$+ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - \frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3} - \frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값은

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

일 때 최소이므로 점 P는 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이다.

02 가장 작은 정사각형의 한 꼭짓점 C의 y좌표가 3이므로 한 변의 길이는 3이다.

$$\therefore A(3, 0) \quad \dots\dots ㉠$$

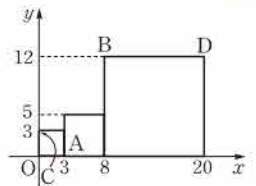
오른쪽 그림에서 가장 큰 정사각형의 한 꼭짓점 D의 y좌표가 12이므로 한 변의 길이는 12이다.

$$\therefore B(8, 12) \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\sqrt{(8-3)^2 + 12^2} = 13 \quad \dots\dots ㉢$$

답 13



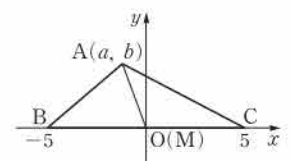
채점 기준	비율
① 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	30%
② 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	40%
③ 두 점 A, B 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%

03 오른쪽 그림과 같이

직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이다.

이때 1 km를 1로 생각하면

$$B(-5, 0), C(5, 0), \overline{AB}=5, \overline{CA}=7$$



A(a, b)라 하면 $\overline{AB}^2=25$ 에서

$$(-5-a)^2+(-b)^2=25$$

$$\therefore a^2+10a+b^2=0 \quad \dots\dots ㉠$$

$\overline{CA}^2=49$ 에서

$$(a-5)^2+b^2=49$$

$$\therefore a^2-10a+b^2=24 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 입구 A에서 매점까지의 거리는

$$\overline{AM}=\sqrt{a^2+b^2}$$

㉠+㉡을 하면

$$2(a^2+b^2)=24 \quad \therefore a^2+b^2=12$$

따라서 구하는 거리는

$$\overline{AM}=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \text{ (km)}$$

답 ②

💡 비밀노트

△ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,
 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$
 이 성립한다.
 이 내용을 기억해 두면 위와 같은 문제를 쉽게 해결할 수 있다.
 즉 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로
 $5^2+7^2=2(\overline{AM}^2+5^2), \quad \overline{AM}^2=12$
 $\therefore \overline{AM}=2\sqrt{3}$

04 점 A·D의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot a + 2 \cdot (-3)}{1+2}, \frac{1 \cdot b + 2 \cdot 1}{1+2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-6}{3}, \frac{b+2}{3} \right)$$

점 A·B의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{1+2}, \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{1+2} \right)$$

$$\therefore (-1, 2)$$

점 (A·B)·C의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1)}{1+2}, \frac{1 \cdot (-4) + 2 \cdot 2}{1+2} \right)$$

$$\therefore (1, 0)$$

이때 두 점 A·D, (A·B)·C가 일치하므로

$$\frac{a-6}{3}=1, \quad \frac{b+2}{3}=0$$

$$\therefore a=9, b=-2$$

$$\therefore ab=-18$$

답 ④

05 $\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$$

이때

$$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-5-7)^2}=13,$$

$$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(4-7)^2}=5$$

이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$$

즉 점 D는 $\overline{BC}$ 를 13 : 5로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{13 \cdot 4 + 5 \cdot (-5)}{13+5}, \frac{13 \cdot 4 + 5 \cdot (-5)}{13+5} \right)$$

한 변의 길이가 x인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

x는 길이이므로 양수이다.

$$\therefore \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

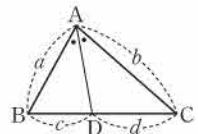
따라서 $a=\frac{3}{2}, b=\frac{3}{2}$ 이므로

$$a+b=3$$

답 3

채점 기준	비율
① BD : DC를 구할 수 있다.	40%
② 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40%
③ a+b의 값을 구할 수 있다.	20%

참고 △ABC에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 즉 $\angle BAD=\angle CAD$ 일 때,
 $a:b=c:d$



$$06 \overline{AP}=\sqrt{(3-5)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2},$$

$$\overline{BP}=\sqrt{(3-2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}\text{이므로}$$

$$\overline{AP} : \overline{BP}=2 : 1$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$ 를 그으면 △OAP의 넓이는 △OAB

의 넓이의 $\frac{2}{3}$ 이다.

$$\text{즉 } \triangle OAP = \frac{2}{3} \triangle OAB,$$

$$\triangle PQA = \frac{1}{2} \triangle OAB \text{이므로}$$

$$2\triangle PQA = \triangle OAB = \frac{3}{2} \triangle OAP$$

$$\therefore \triangle PQA = \frac{3}{4} \triangle OAP$$

$$\therefore \overline{OQ} : \overline{QA} = 1 : 3$$

따라서 점 Q는 $\overline{OA}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점이므로 점 Q

의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 0}{1+3}, \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{1+3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

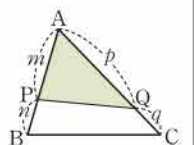
답 $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4} \right)$

💡 비밀노트

오른쪽 그림에서

△APQ

$$= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{p}{p+q} \cdot \triangle ABC$$



07 △AOB의 한 변의 길이를 x라 하면 조건 ㉠에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=6\sqrt{3}, \quad x^2=24$$

$$\therefore x=2\sqrt{6} (\because x>0)$$

원점 O에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 △AOB가 정삼각형이므로

$$\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{6}=3\sqrt{2}$$

일품 BOX

한편 조건 ④에 의하여 무게중심 G의 좌표를 (k, k) ($k > 0$)라 하면

$$\overline{OG} = \frac{2}{3} \overline{OH} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{이므로 } \sqrt{k^2 + k^2} = 2\sqrt{2}, \quad k^2 = 4$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because k > 0) \quad \therefore G(2, 2)$$

이때 $\triangle AOB$ 의 무게중심의 좌표는 $(\frac{a+c}{3}, \frac{b+d}{3})$ 이

므로

$$\frac{a+c}{3} = 2, \quad \frac{b+d}{3} = 2 \quad \therefore a+c=6, b+d=6$$

$$\therefore a+b+c+d=12$$

답 12

08 오른쪽 그림과 같이 두 점

A, B에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면

$\triangle APS \cong \triangle BPT$ (ASA 합동)

이므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$

같은 방법으로 하면

$$\overline{AQ} = \overline{CQ}$$

따라서 세 점 P, Q, R은 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CA}$, $\overline{BC}$ 의 중점이므로

$$P\left(\frac{2-3}{2}, \frac{5+0}{2}\right), Q\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-4+5}{2}\right),$$

$$R\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{0-4}{2}\right)$$

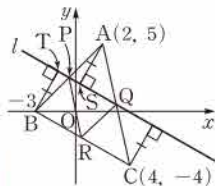
$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), Q\left(3, \frac{1}{2}\right), R\left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2}\right) = 1, \quad y = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{1}{3}$$

이므로

$$x+y = \frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$



두 점 A, B가 제1사분면 위에 있으므로 $\triangle AOB$ 의 무게중심 G는 제1사분면 위에 있다.

$x+1$	$y-2$
1	3
3	1
-1	-3
-3	-1

$\triangle APS, \triangle BPT$ 에서
 $\angle ASP = \angle BTP = 90^\circ$,
 $\angle PAS = \angle PBT$,
 $\overline{AS} = \overline{BT}$
 $\therefore \triangle APS \cong \triangle BPT$ (ASA 합동)

대각선 BD의 중점의 좌표를 이용하여 구할 수도 있다.

이때

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2 - 2(ac+bd)$$

이므로 ①, ②에서

$$25 + 10 = 6^2 + 3^2 - 2(ac+bd)$$

$$35 = 45 - 2(ac+bd)$$

$$\therefore ac+bd=5$$

따라서 ③에서

$$\overline{AB} = \sqrt{35 - 2 \cdot 5} = 5$$

답 ④

10 $xy - 2x + y = 5$ 에서

$$x(y-2) + (y-2) = 3$$

$$\therefore (x+1)(y-2) = 3$$

..... ①

x, y 는 정수이므로 ①을 만족시키는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$$(0, 5), (2, 3), (-2, -1), (-4, -1)$$

..... ②

$A(2, 3), B(0, 5),$

$C(-4, 1), D(-2, -1)$ 이라

하면 $\square ABCD$ 는 오른쪽 그림

과 같고,

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-4)^2 + (1-5)^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(-2+4)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\overline{DA} = \sqrt{(2+2)^2 + (3+1)^2} = 4\sqrt{2}$$

이므로 $\square ABCD$ 는 평행사변형이다.

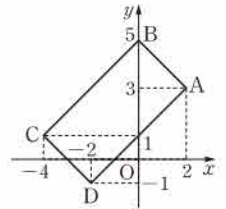
..... ③

따라서 $\square ABCD$ 의 두 대각선의 교점은 대각선 AC의 중점과 같으므로 그 좌표는

$$\left(\frac{2-4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \therefore (-1, 2)$$

..... ④

답 $(-1, 2)$



15점 비밀노트

$\triangle PRQ$ 는 $\triangle ABC$ 의 세 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이므로 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 $\triangle PRQ$ 의 무게중심은 일치한다. 이것을 이용하면 세 점 P, Q, R의 좌표를 구하지 않고 세 점 A, B, C의 좌표를 이용하여 답을 구할 수 있다.

09 $A(a, b), B(c, d)$ 라 하면 $\overline{OA}=5, \overline{OB}=\sqrt{10}$ 이므로

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 5, \quad \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 25, \quad c^2 + d^2 = 10 \quad \dots\dots ①$$

또 $\triangle OAB$ 의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$ 이므로

$$\frac{a+c}{3} = 2, \quad \frac{b+d}{3} = 1$$

$$\therefore a+c=6, b+d=3 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

$$= \sqrt{(c^2 - 2ac + a^2) + (d^2 - 2bd + b^2)}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ac+bd)}$$

$$= \sqrt{25 + 10 - 2(ac+bd)} \quad (\because ①)$$

$$= \sqrt{35 - 2(ac+bd)} \quad \dots\dots ③$$

마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

11 직선 $3x + ay = b$ 는 AC의 수직이등분선이다.

직선 AC의 기울기는

$$\frac{-1-7}{7-1} = -\frac{4}{3}$$

AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{7-1}{2}\right) \therefore (4, 3)$$

기울기가 $\frac{3}{4}$ 이고 점 $(4, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{3}{4}(x-4)$$

$$\therefore 3x-4y=0$$

이 직선이 직선 $3x + ay = b$ 와 같으므로

$$a = -4, b = 0$$

$$\therefore a+b = -4$$

답 -4

12 직선 $\frac{x}{6} + \frac{y}{10} = 1$ 과 x 축, y 축의 교점을 각각 A, B라 하면

$$A(6, 0), B(0, 10)$$

직선 l 이 직선 $\frac{x}{6} + \frac{y}{10} = 1$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 이등분하므로 $\overline{AB}$ 의 중점을 지나야 한다. 이때 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는 (3, 5)이고, 직선 l 이 원점을 지나므로 직선 l 의 방정식은

$$y = \frac{5}{3}x$$

한편 직선 $\frac{x}{4} + \frac{y}{20} = 1$ 과 x 축, y 축의 교점을 각각 C, D라 하면

$$C(4, 0), D(0, 20)$$

두 직선 $y = \frac{5}{3}x$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{20} = 1$ 의 교점을 E라 하면

$$E(3, 5)$$

따라서

$$\triangle OCE = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10,$$

$$\triangle OED = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 3 = 30$$

이므로

$$S : T = 10 : 30 = 1 : 3$$

답 ②

다른 풀이 점 E에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\triangle DOC \sim \triangle EHC \text{ (AA 답음)}$$

이므로 $\overline{DC} : \overline{EC} = \overline{OC} : \overline{HC}$

$$\overline{OC} = 4, \overline{HC} = 4 - 3 = 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{DC} : \overline{EC} = 4 : 1$$

따라서 점 E는 $\overline{CD}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점이므로

$$S : T = 1 : 3$$

13 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \quad \therefore y = -2x + 4$$

$P(a, -2a+4)$ 라 하면 직선 OP의 기울기는 $\frac{-2a+4}{a}$

이므로 직선 OQ의 방정식은

$$y = \frac{a}{2a-4}x$$

직선 AC의 방정식은

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{4} = 1 \quad \therefore y = x + 4$$

두 직선 $y = x + 4$, $y = \frac{a}{2a-4}x$ 의 교점 Q의 y 좌표는

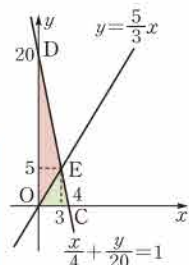
$$y = \frac{a}{2a-4}(y-4) \text{ 에서 } (2a-4)y = a(y-4)$$

$$\therefore y = \frac{4a}{4-a}$$

$\triangle COQ$ 의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left| \frac{4a}{4-a} \right| = 2, \quad \left| \frac{4a}{4-a} \right| = 1$$

$$\frac{4a}{4-a} = \pm 1, \quad 4a = \pm(4-a)$$



$$y = \frac{5}{3}x \text{ 를 } \frac{x}{4} + \frac{y}{20} = 1$$

에 대입하면

$$\frac{x}{4} + \frac{1}{20} \cdot \frac{5}{3}x = 1$$

$$\frac{1}{3}x = 1 \quad \therefore x = 3$$

$$\therefore y = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5$$

$$4a = 4 - a \text{ 에서 } a = \frac{4}{5}$$

$$4a = -(4 - a) \text{ 에서 } a = -\frac{4}{3}$$

따라서 구하는 점 P의 모든 x 좌표의 합은

$$\frac{4}{5} + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{15}$$

답 ①

참고 점 P의 x 좌표가 0 또는 2이면 점 Q는 점 C 또는 점 A가 되므로 삼각형 COQ의 넓이는 2가 될 수 없다.

따라서 $a \neq 0$, $a \neq 2$ 이다.

14 $\triangle ABC$, $\triangle AOP$ 의 넓이가 같으므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \overline{OP}$$

$$\therefore \overline{OP} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

답 ①

즉 직선 l 의 x 절편이 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, y 절편이 3이므로 직선 l 의 방정식은

$$\frac{3x}{8\sqrt{3}} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore 3\sqrt{3}x + 8y = 24$$

답 ②

따라서 $a = 3\sqrt{3}$, $b = 8$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (3\sqrt{3})^2 + 8^2 = 91$$

답 ③

답 91

채점 기준	비율
① $\overline{OP}$ 의 길이를 구할 수 있다.	40%
② 직선 l 의 방정식을 구할 수 있다.	40%
③ $a^2 + b^2$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

15 직선 $kx - y - 2k + 3 = 0$ 이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 대각선 AC의 중점을 지나야 한다.

$$kx - y - 2k + 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x-2)k - (y-3) = 0$$

즉 주어진 직선은 k 의 값에 관계없이 항상 점 (2, 3)을 지나므로 이 점이 대각선 AC의 중점이어야 한다.

$C(a, b)$ 라 하면 $\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right) \text{ 이므로}$$

$$\frac{-3+a}{2} = 2, \quad \frac{-2+b}{2} = 3$$

$$\therefore a = 7, b = 8$$

따라서 점 C의 좌표는 (7, 8)이다.

답 (7, 8)

다른 풀이 $C(a, b)$ 라 하면 $\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right) \text{ 이므로}$$

$$k \cdot \frac{-3+a}{2} - \frac{-2+b}{2} - 2k + 3 = 0$$

$$-3k + ak + 2 - b - 4k + 6 = 0$$

$$\therefore (a-7)k - (b-8) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$a-7=0, b-8=0$$

$$\therefore a = 7, b = 8$$

따라서 점 C의 좌표는 (7, 8)이다.

일품 BOX

16 ㄱ. 주어진 직선은 k 의 값에 관계없이 항상 두 직선

$$x+y+1=0, x-y-5=0$$

의 교점 $(2, -3)$ 을 지난다.

ㄴ. $k=-1$ 일 때, 주어진 직선의 방정식은

$$x+y+1-(x-y-5)=0 \quad \therefore y=-3$$

따라서 x 축에 평행한 직선이다.

ㄷ. $x+y+1+k(x-y-5)=0$ 에서

$$(k-1)y=(k+1)x+1-5k$$

(i) $k=1$ 이면 $x=2$

(ii) $k \neq 1$ 이면 $y=\frac{k+1}{k-1}x+\frac{1-5k}{k-1}$

이때 기울기가 1이면 $\frac{k+1}{k-1}=1$ 에서

$$k+1=k-1 \quad \therefore 0 \cdot k=-2$$

위의 식을 만족시키는 k 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 기울기가 1인 직선은 나타낼 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

$$\begin{aligned} x+y+1 &= 0 & \cdots \textcircled{1} \\ x-y-5 &= 0 & \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면} & & \\ 2x-4 &= 0 & \therefore x=2 \\ x=2 \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면} & & \\ 2+y+1 &= 0 & \\ \therefore y &= -3 \end{aligned}$$

17 직선 AC의 기울기는

$$\frac{0-6}{4-0} = -\frac{3}{2}$$

이므로 직선 BH의 기울기는 $\frac{2}{3}$ 이다.

직선 BH의 방정식은

$$y+1=\frac{2}{3}(x-1) \quad \therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

$y=0$ 을 이 식에 대입하면

$$0=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \quad \therefore x=\frac{5}{2}$$

따라서 선분 BH와 x 축의 교점의 x 좌표는 $\frac{5}{2}$ 이다.

답 ③

18 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

(i) 두 직선 $2x+y-4=0$, $mx+2y+4=0$ 이 평행할 때,

$$\frac{m}{2}=\frac{2}{1} \neq \frac{4}{-4} \text{이므로}$$

$$m=4$$

(ii) 두 직선 $3x+y-8=0$, $mx+2y+4=0$ 이 평행할 때,

$$\frac{m}{3}=\frac{2}{1} \neq \frac{4}{-8} \text{이므로}$$

$$m=6$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

$$2x+y-4=0, 3x+y-8=0 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$x=4, y=-4$$

이므로 두 직선 $2x+y-4=0$, $3x+y-8=0$ 의 교점의 좌표는 $(4, -4)$ 이다.

따라서 직선 $mx+2y+4=0$ 이 점 $(4, -4)$ 를 지나므로

$$4m+2 \cdot (-4)+4=0$$

$$\therefore m=1$$

답 ③

직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)일 때, 직선의 기울기는 $\tan \theta$ 이다.

(직선 AB의 기울기)
 $\times$ (직선 OA의 기울기)
 $= 1 \cdot (-1) = -1$
이므로 $AB \perp OA$

두 직선 $2x+y-4=0$,
 $3x+y-8=0$ 의 기울기가 다르므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

이상에서 모든 실수 m 의 값의 합은

$$4+6+1=11$$

답 ④

답 11

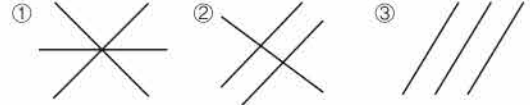
채점 기준	비율
① 두 직선 $2x+y-4=0$, $mx+2y+4=0$ 이 평행할 때의 m 의 값을 구할 수 있다.	30%
② 두 직선 $3x+y-8=0$, $mx+2y+4=0$ 이 평행할 때의 m 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ 세 직선이 한 점에서 만날 때의 m 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ 조건을 만족시키는 모든 실수 m 의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

참고 세 직선이 삼각형을 이루지 않을 조건

① 세 직선이 한 점에서 만난다.

② 두 직선이 서로 평행하다.

③ 세 직선이 모두 평행하다.



19 기울기가 $\tan 45^\circ=1$ 이고 점 $A(-1, 1)$ 을 지나는

직선 l 의 방정식은

$$y-1=x+1 \quad \therefore y=x+2$$

직선 OA의 기울기가 -1 이므로 $\triangle AOB$ 는 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$OA=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$, $AB=\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}$ 이고, $\triangle AOB$ 의 넓이가 5이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}=5$$

$$\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}=5\sqrt{2}$$

$$\therefore (a+1)^2+(b-1)^2=50 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편 점 $B(a, b)$ 는 직선 l 위의 점이므로

$$b=a+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(a+1)^2+(a+1)^2=50, \quad (a+1)^2=25$$

$$a^2+2a-24=0, \quad (a+6)(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

$$a=4 \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면} \quad b=6$$

$$\therefore a+b=10$$

답 10

20 $MN \parallel BC$ 이므로 구하는 거리는 점 N과 직선 BC 사이의 거리와 같다.

$$\text{점 N의 좌표는 } \left(\frac{0+2}{2}, \frac{6+0}{2} \right)$$

$$\therefore (1, 3)$$

직선 BC의 방정식은

$$y=\frac{0+3}{2+2}(x-2), \quad y=\frac{3}{4}(x-2)$$

$$\therefore 3x-4y-6=0$$

따라서 두 직선 MN, BC 사이의 거리는

$$\frac{|3-12-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$$

답 ②

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이

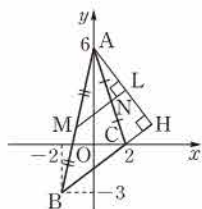
점 A에서 변 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H, 두 직선 AH와 MN의 교점을 L이라 하면 구하는 거리는 LH의 길이이다.

직선 BC의 방정식은

$$3x - 4y - 6 = 0 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AH} = \frac{|0 - 24 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 6$$

$$\therefore \overline{LH} = \frac{1}{2} \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$



21 점 P(a, b)가 두 직선 $3x + 2y - 5 = 0$ 과 $2x - 3y + 5 = 0$ 으로부터 같은 거리에 있으므로

$$\frac{|3a + 2b - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|2a - 3b + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

$$3a + 2b - 5 = \pm(2a - 3b + 5)$$

$$\therefore a + 5b = 10 \text{ 또는 } 5a - b = 0$$

(i) $a + 5b = 10$ 일 때,

조건 ㉞에서 a, b가 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는 (5, 1)이고 조건 ㉝를 만족시킨다.

따라서 순서쌍 (a, b)는 (5, 1)의 1개이다.

(ii) $5a - b = 0$ 일 때,

$$b = 5a$$

조건 ㉞에서 a, b가 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는

(1, 5), (2, 10), (3, 15),

(4, 20), (5, 25), ...

그런데 조건 ㉝에서 $ab \leq 100$ 이므로 순서쌍 (a, b)는 (1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)의 4개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$1 + 4 = 5$$

△ABH에서
 $\overline{AM} = \overline{MB}$,
 $\overline{ML} \parallel \overline{BH}$
 이므로 $\overline{AL} = \overline{LH}$
 $\therefore \overline{LH} = \frac{1}{2} \overline{AH}$

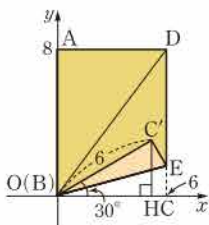
채점 기준	비율
① a, b 사이의 두 관계식을 구할 수 있다.	30%
② $a + 5b = 10$ 일 때의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	30%
③ $5a - b = 0$ 일 때의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	30%
④ 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구할 수 있다.	10%

22 오른쪽 그림과 같이 두 직선 BC, AB를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.

$\angle EBC = \angle EBC' = 15^\circ$ 이므로

$$\angle C'BC = 30^\circ$$

점 C'에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 △C'BH에서 $\overline{BH} = 3\sqrt{3}$, $\overline{C'H} = 3$ 이므로 점 C'의 좌표는 $(3\sqrt{3}, 3)$



직각삼각형 C'BH에서
 $\overline{BH} = \overline{BC'} \cos 30^\circ$
 $= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$,
 $\overline{C'H} = \overline{BC'} \sin 30^\circ$
 $= 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

직선 BD의 방정식은

$$y = \frac{4}{3}x \quad \therefore 4x - 3y = 0$$

점 C'(3√3, 3)과 직선 BD 사이의 거리는

$$\frac{|12\sqrt{3} - 9|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{12\sqrt{3} - 9}{5}$$

따라서 $p = \frac{12}{5}$, $q = -\frac{9}{5}$ 이므로

$$p + q = \frac{3}{5}$$

답 ③

23 $2x + 4y + kx - ky = 4k + 2$ 에서

$$(k+2)x - (k-4)y - 4k - 2 = 0$$

이므로

$$f(k) = \frac{|5(k+2) - (k-4) - 4k - 2|}{\sqrt{(k+2)^2 + \{-(k-4)\}^2}} = \frac{12}{\sqrt{2k^2 - 4k + 20}}$$

$f(k)$ 는 $\sqrt{2k^2 - 4k + 20}$ 의 값이 최소일 때 최대이고

$$\sqrt{2k^2 - 4k + 20} = \sqrt{2(k-1)^2 + 18}$$

이므로 $f(k)$ 의 최댓값은

$$f(1) = \frac{12}{\sqrt{18}} = 2\sqrt{2}$$

답 ①

다른 풀이 $2x + 4y + kx - ky = 4k + 2$ ㉞

에서 $2(x + 2y - 1) + k(x - y - 4) = 0$

$x + 2y - 1 = 0$, $x - y - 4 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = 3, y = -1$$

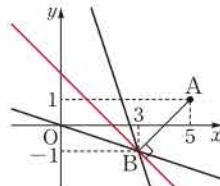
이므로 직선 ㉞은 k의 값에 관계없이 항상 점 (3, -1)을 지난다.

이때 A(5, 1), B(3, -1)이라 하면 점 A(5, 1)과 직선 ㉞ 사이의 거리가 최댓값이 될 때는 오른쪽 그림에서 직선 ㉞이 직선 AB와 수직일 때이다.

따라서 직선 ㉞과 점 A(5, 1)

사이의 거리의 최댓값은 두 점 A(5, 1), B(3, -1) 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(5-3)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

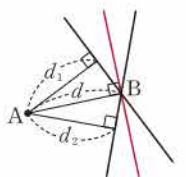


1등급 비밀노트

오른쪽 그림에서

$$d_1 < d, d_2 < d$$

이므로 점 B를 지나는 임의의 직선과 점 A 사이의 거리는 점 A에서 직선에 내린 수선의 발이 점 B일 때 최대이고, 이때 그 최댓값은 $\overline{AB}$ 이다.



24 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\overline{AP}^2 + 3\overline{BP}^2 = 4\overline{CP}^2 \text{에서}$$

$$\{(x+1)^2 + (y-1)^2\} + 3\{(x-1)^2 + (y+3)^2\} = 4\{(x-5)^2 + (y-3)^2\}$$

$$4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y + 32$$

$$= 4x^2 + 4y^2 - 40x - 24y + 136$$

$$36x + 40y = 104$$

$$\therefore 9x + 10y = 26 \quad \rightarrow ②$$

따라서 $a=9$, $b=10$ 이므로

$$ab=90 \quad \rightarrow ③$$

답 90

채점 기준	비율
① 주어진 등식을 x, y 에 대한 등식으로 나타낼 수 있다.	40%
② 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	40%
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	20%

25 점 P($a+b$, $a-b$)가 직선 $2x+y=1$ 위에 있으므로

$$2(a+b) + (a-b) = 1$$

$$\therefore 3a+b=1 \quad \dots\dots ①$$

$a-b=x$, $a+b=y$ 로 놓으면

$$a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{y-x}{2}$$

이것을 ①에 대입하면 점 Q의 자취의 방정식은

$$3 \cdot \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2} = 1$$

$$\therefore x+2y=1 \quad \text{답 ②}$$

26 $\overline{BD}$ 위의 점을 P(x, y)라 하면 $\overline{BD}$ 는 $\angle ABC$ 를 이등분한다. 즉 점 P에서 두 직선 AB, BC에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x-y+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|ax+by+3|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{|3x-y+2|}{\sqrt{10}} = \frac{|ax+by+3|}{2\sqrt{10}}$$

$$2|3x-y+2| = |ax+by+3|$$

$$6x-2y+4 = \pm(ax+by+3)$$

$$\therefore (6-a)x - (2+b)y + 1 = 0$$

$$\text{또는 } (a+6)x + (b-2)y + 7 = 0$$

(i) 직선 $(6-a)x - (2+b)y + 1 = 0$ 이 직선

$$8x-8y+7=0$$
일 때,

$8x-8y+7=0$ 의 양변을 7로 나누면

$$\frac{8}{7}x - \frac{8}{7}y + 1 = 0$$
이므로

$$6-a = \frac{8}{7}, 2+b = \frac{8}{7}$$

$$\therefore a = \frac{34}{7}, b = -\frac{6}{7}$$

그런데 $a^2+b^2 \neq 40$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 직선 $(a+6)x + (b-2)y + 7 = 0$ 이 직선

$$8x-8y+7=0$$
일 때,

$$a+6=8, b-2=-8$$

$$\therefore a=2, b=-6$$

(i), (ii)에서 $a=2$, $b=-6$ 이므로

$$a+b=-4$$

답 -4

이등변삼각형의 꼭짓점의 꼭짓점과 밑변의 중점을 지나는 직선은 밑변의 수직이등분선과 같다.

$$a^2+b^2=2^2+(-6)^2=40$$

이므로 조건을 만족시킨다.

대신 · 수능

1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 16쪽

01 출발한 지 t 초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$(-2+t, 0), (0, 3-2t)$$

이므로 t 초 후의 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\sqrt{(2-t)^2 + (3-2t)^2} = \sqrt{5t^2 - 16t + 13}$$

$$= \sqrt{5\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}}$$

따라서 출발한 지 $\frac{8}{5}$ 초 후에 두 점 A, B 사이의 거리가

$$\text{최소가 되므로 } a = \frac{8}{5} \quad \text{답 ④}$$

02 점 G의 y 좌표를 p 라 하면 $\triangle GOB$ 의 넓이가 32이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot p = 32, \quad \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot p = 32$$

$$\therefore p=8$$

이때 점 G는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이므로

$$\frac{4+0+b}{3} = 8 \quad \therefore b=20$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + (20-4)^2 = (a-8)^2 + 20^2$$

$$a^2 + 256 = a^2 - 16a + 464$$

$$16a = 208 \quad \therefore a=13$$

오른쪽 그림에서

$$\triangle ABC$$

$$= \triangle CAO + \triangle COB - \triangle AOB$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 13 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4$$

$$= 90 \quad \text{답 90}$$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이

$\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면

$$M(4, 2)$$

$\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이므로

$$\overline{AB} \perp \overline{CM}$$

이때 직선 AB의 기울기가

$$-\frac{1}{2} \text{이므로 직선 CM의 기울기는 2이고, 점 M}(4, 2)$$

를 지나므로 직선 CM의 방정식은

$$y-2=2(x-4) \quad \therefore y=2x-6$$

한편 점 G는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이므로 $\overline{CM}$ 을 2:1로 내분하는 점이다.

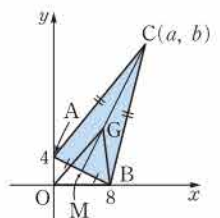
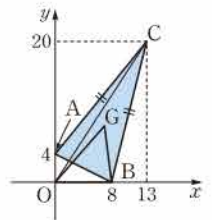
점 G의 y 좌표를 p 라 하면

$$p = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot b}{2+1} = \frac{4+b}{3}$$

그런데 $\triangle GOB$ 의 넓이가 32이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot p = 32, \quad \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{4+b}{3} = 32$$

$$\frac{4+b}{3} = 8 \quad \therefore b=20$$



점 $C(a, 20)$ 은 직선 $y=2x-6$ 위의 점이므로

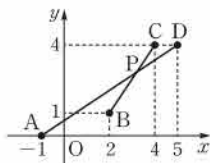
$$20=2a-6 \quad \therefore a=13$$

따라서 $\overline{CM}=\sqrt{(4-13)^2+(2-20)^2}=9\sqrt{5}$,

$\overline{AB}=\sqrt{8^2+(-4)^2}=4\sqrt{5}$ 이므로

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CM} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 9\sqrt{5} = 90\end{aligned}$$

03 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 의 값이 최소가 되려면 오른쪽 그림과 같이 점 P는 $\overline{AD}$ 위에 있고, 동시에 $\overline{BC}$ 위에 있어야 한다. 즉 $\overline{AD}$ 와 $\overline{BC}$ 의 교점이 P이어야 한다.



두 점 A, D를 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned}y &= \frac{4-1}{5+1}(x+1) \\ \therefore y &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

두 점 B, C를 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned}y-1 &= \frac{4-1}{4-2}(x-2) \\ \therefore y &= \frac{3}{2}x-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

두 직선 ①, ②의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} &= \frac{3}{2}x - 2 \\ 4x + 4 &= 9x - 12 \quad \therefore x = \frac{16}{5}\end{aligned}$$

이것을 ①에 대입하면 $y = \frac{14}{5}$

$$\therefore a = \frac{16}{5}, b = \frac{14}{5}$$

한편 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 의 최솟값은 $\overline{AD}+\overline{BC}$ 의 값이므로

$$\begin{aligned}k &= \sqrt{(5+1)^2+4^2} + \sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2} \\ &= 3\sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore a+b+k^2 &= \frac{16}{5} + \frac{14}{5} + (3\sqrt{13})^2 \\ &= 6+117=123\end{aligned}$$

답 123

04 ㄱ. 직선 l 의 방정식을 a 에 대하여 정리하면

$$a(x+2y) + (6-3y) = 0$$

이 직선이 a 의 값에 관계없이 항상 두 직선

$$x+2y=0, 6-3y=0$$

의 교점을 지나므로 위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=-4, y=2$$

따라서 직선 l 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(-4, 2)$ 를 지난다.

ㄴ. 직선 $x+2y-1=0$ 과 직선

$l: ax+(2a-3)y+6=0$ 이 평행하려면

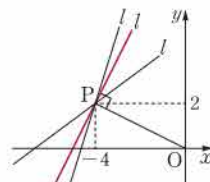
$$\frac{a}{1} = \frac{2a-3}{2} \neq \frac{6}{-1}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{2a-3}{2} \text{에서 } 2a=2a-3 \quad \therefore 0 \cdot a = -3$$

이 식을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않으므로 직선 $x+2y-1=0$ 과 평행한 직선 l 은 존재하지 않는다.

ㄷ. $P(-4, 2)$ 라 하면 직선 l 은

점 P를 지나는 직선이고, 원점 O와 직선 l 사이의 거리가 최대가 될 때는 오른쪽 그림에서 직선 l 이 직선 OP와 수직일 때이다.



즉 직선 OP의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 직선 l 의 기울기가 2일 때 원점 O와 직선 l 사이의 거리가 최대이다.

$ax+(2a-3)y+6=0$ 에서

$$(2a-3)y = -ax-6$$

(i) $2a-3=0$, 즉 $a=\frac{3}{2}$ 일 때,

$$x=-4$$

이 직선의 방정식은 기울기가 2가 될 수 없다.

(ii) $2a-3 \neq 0$, 즉 $a \neq \frac{3}{2}$ 일 때,

$$\text{기울기가 2이어야 하므로 } -\frac{a}{2a-3} = 2$$

$$-a=4a-6 \quad \therefore a=\frac{6}{5}$$

(i), (ii)에서 원점 O와 직선 l 사이의 거리는 $a=\frac{6}{5}$ 일 때 최대이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

참고 ㄴ에서 원점과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|6|}{\sqrt{a^2+(2a-3)^2}}$ 이므로 $a^2+(2a-3)^2$ 의 값이 최소일 때의 a 의 값을 구해도 된다.

직선 $y=m(x+2)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 0)$ 을 지난다.

05 오른쪽 그림과 같이

$P(a, a^2)$ ($a>0$), $Q(\beta, \beta^2)$ ($-2<\beta<0$)이라 하면 두 직선 OP, OQ의 기울기는 각각

$$\frac{a^2}{a}=a, \frac{\beta^2}{\beta}=\beta$$

(i) $\angle POQ=90^\circ$ 일 때,

두 직선 OP, OQ가 서로 수직이므로

$$a\beta=-1$$

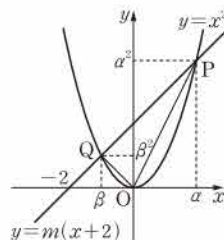
이때 이차방정식 $x^2=m(x+2)$, 즉

$x^2-mx-2m=0$ 의 두 실근이 a, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a\beta=-2m$$

따라서 $-2m=-1$ 이므로

$$m=\frac{1}{2}$$



(ii) $\angle OQP = 90^\circ$ 일 때,

직선 $y = m(x+2)$ 가 x 축과 만나는 점을 R라 하면

R(-2, 0)이므로 직선 QR의 기울기는

$$\frac{\beta^2}{\beta - (-2)} = \frac{\beta^2}{\beta + 2}$$

두 직선 QR, OQ가 서로 수직이므로

$$\frac{\beta^2}{\beta + 2} \cdot \beta = -1, \quad \beta^3 + \beta + 2 = 0$$

$$(\beta + 1)(\beta^2 - \beta + 2) = 0$$

이때 β 는 실수이므로

$$\beta = -1$$

따라서 Q(-1, 1)이고 점 Q는 직선 $y = m(x+2)$ 위에 있으므로

$$1 = m(-1+2) \quad \therefore m = 1$$

(i), (ii)에서 모든 양수 m 의 값의 합은

$$\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

답 ②

06 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 10$ 의 그래프에 접하고 직선 $y = 2x - 4a$ 와 평행한 직선의 방정식을

$y = 2x + k$ (k 는 실수)라 하자.

이차방정식 $x^2 - 2ax + 10 = 2x + k$, 즉

$x^2 - 2(a+1)x + 10 - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - (10-k) = 0$$

$$a^2 + 2a - 9 + k = 0$$

$$\therefore k = -a^2 - 2a + 9$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = 2x - a^2 - 2a + 9$$

이고 $f(a)$ 는 평행한 두 직선 $y = 2x - 4a$,

$y = 2x - a^2 - 2a + 9$ 사이의 거리와 같다.

즉 직선 $y = 2x - 4a$ 위의 점 (0, -4a)와 직선

$2x - y - a^2 - 2a + 9 = 0$ 사이의 거리가 $f(a)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{|-(-4a) - a^2 - 2a + 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|-a^2 + 2a + 9|}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

따라서 $f(a)$ 는 $-a^2 + 2a + 9$ 의 값이 최대일 때 최대이고

$$-a^2 + 2a + 9 = -(a-1)^2 + 10$$

이므로 $-1 \leq a \leq 3$ 에서 $f(a)$ 의 최댓값은

$$f(1) = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

답 ⑤

참고 이차방정식 $x^2 - 2ax + 10 = 2x - 4a$, 즉

$x^2 - 2(a+1)x + 4a + 10 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - (4a+10)$$

$$= a^2 - 2a - 9$$

$$= (a-1)^2 - 10$$

이므로 $-1 \leq a \leq 3$ 일 때 $\frac{D_1}{4} < 0$ 이다.

따라서 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 10$ 의 그래프와 직선 $y = 2x - 4a$ 는 서로 만나지 않는다.

$\beta^2 - \beta + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$$

이므로 서로 다른 두 해근을 갖는다.

두 점 A, C의 x 좌표는 -1로 같다.

02 원의 방정식

개념 & 핵심 기술

본책 17쪽

01 원의 중심이 직선 $y = 2x$ 위에 있으므로 원의 중심을 C(a, 2a)라 하자.

$\overline{AC} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(a+1)^2 + (2a-3)^2 = (a-4)^2 + (2a+2)^2$$

$$5a^2 - 10a + 10 = 5a^2 + 20, \quad 10a = -10$$

$$\therefore a = -1$$

따라서 C(-1, -2)이고 원의 반지름의 길이는 $\overline{AC}$ 의 길이와 같으므로

$$\overline{AC} = |3+2| = 5$$

답 ③

02 $x^2 + y^2 - 2x + 2ay + b = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y+a)^2 = a^2 - b + 1$$

이 원의 반지름의 길이가 2이므로

$$\sqrt{a^2 - b + 1} = 2, \quad a^2 - b + 1 = 4$$

$$\therefore b = a^2 - 3 \quad \dots\dots ①$$

직선 $2x + 3y + 4 = 0$ 이 원 $(x-1)^2 + (y+a)^2 = a^2 - b + 1$ 의 넓이를 이등분하므로 직선 $2x + 3y + 4 = 0$ 이 원의 중심 (1, -a)를 지난다.

즉 $2 - 3a + 4 = 0$ 이므로

$$a = 2$$

①에서 $b = 1$

$$\therefore a + b = 3$$

답 3

03 직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 중점이므로 외접원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+5}{2}\right), \text{ 즉 } (4, 3)$$

또 외접원의 반지름의 길이는 두 점 (2, 1), (4, 3) 사이의 거리이므로

$$\sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 외접원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 8$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0 \quad \dots\dots ①$$

$(x-2)(x-6) + (y+a)(y+b) = 0$ 에서

$$x^2 + y^2 - 8x + (a+b)y + 12 + ab = 0 \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서 $a+b = -6$, $ab = 5$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$= (-6)^2 - 2 \cdot 5$$

$$= 26$$

답 26

04 주어진 원이 점 (2, 0)에서 x 축에 접하므로 원의 중심의 x 좌표는 2이고, 원의 중심의 좌표를 (2, a) ($a > 0$)라 하면 원의 반지름의 길이는 a 이다.

또 이 원이 직선 $x - 2y + 2 = 0$ 에 접하므로 원의 중심 (2, a)와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.

① x 축에 접하는 원에서 (반지름의 길이) = |(중심의 y 좌표)|

② y 축에 접하는 원에서 (반지름의 길이) = |(중심의 x 좌표)|

③ x 축, y 축에 동시에 접하는 원에서 (반지름의 길이) = |(중심의 x 좌표)|

= |(중심의 y 좌표)|

= |(중심의 x 좌표)|

= |(중심의 y 좌표)|

$$\text{즉 } \frac{|2-2a+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=a \text{ 이므로}$$

$$|-2a+4|=\sqrt{5}a, \quad 4a^2-16a+16=5a^2$$

$$a^2+16a-16=0$$

$$\therefore a=-8+4\sqrt{5} \quad (\because a>0)$$

따라서 $m=-8, n=4$ 이므로

$$|m|+|n|=8+4=12$$

답 12

05 원의 중심의 좌표를 $(a, a-1)$ 이라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+\{y-(a-1)\}^2=a^2$$

이 원이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$(2-a)^2+(4-a)^2=a^2$$

$$a^2-12a+20=0, \quad (a-2)(a-10)=0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=10$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(2, 1), (10, 9)$ 이므로

두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(10-2)^2+(9-1)^2}=8\sqrt{2}$$

답 ②

06 x 축, y 축에 동시에 접하면서 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 원의 중심은 제2사분면 위에 있으므로 주어진 원의 중심의 좌표를 $(-k, k) \ (k>1)$ 라 하면 원의 방정식은

$$(x+k)^2+(y-k)^2=k^2$$

이 원이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$(-1+k)^2+(2-k)^2=k^2$$

$$k^2-6k+5=0, \quad (k-1)(k-5)=0$$

$$\therefore k=5 \quad (\because k>1)$$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$(x+5)^2+(y-5)^2=25$$

즉 $x^2+y^2+10x-10y+25=0$ 이므로

$$a=10, b=-10, c=25$$

$$\therefore a+b+c=25$$

답 ⑤

07 $(x-4)^2+(y+2)^2=26$ 에서

$$x^2+y^2-8x+4y-6=0$$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-8x+4y-6)=0 \quad (k \neq -1)$$

..... ㉠

이라 하면 이 원이 점 $(5, 0)$ 을 지나므로

$$21-21k=0 \quad \therefore k=1$$

$k=1$ 을 ㉠에 대입한 후 정리하면

$$2x^2+2y^2-8x+4y-10=0$$

$$x^2+y^2-4x+2y-5=0$$

$$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=10$$

따라서 구하는 원의 넓이는 10π 이다.

답 ①

08 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2+y^2-5-(x^2+y^2-3x-4y)=0$$

원의 반지름의 길이가 k 이고
원의 반지름의 길이는
1보다 크므로
 $k>1$

중심이 원점인 원의 방정식은
 $x^2+y^2=r^2$ 꼴이므로
 x, y 의 계수는 모두 0이다.

반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로
원의 넓이는 10π 이다.

$$\therefore 3x+4y-5=0$$

오른쪽 그림과 같이 원

$x^2+y^2=5$ 의 중심 $O(0, 0)$

에서 직선 $3x+4y-5=0$ 에

내린 수선의 발을 H 라 하고,

원 $x^2+y^2=5$ 와 직선

$3x+4y-5=0$ 의 한 교점을

P 라 하자.

이때

$$\overline{OH}=\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

이므로 직각삼각형 POH 에서

$$\overline{PH}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$$

따라서 공통인 현의 길이는

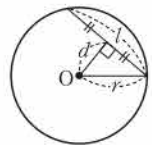
$$2\overline{PH}=2 \cdot 2=4$$

답 ③

참고 현의 길이는 원의 중심에서 현에 수선을 그어 직각삼각형을 만든 후 피타고라스 정리를 이용하여 구한다.

즉 반지름의 길이가 r 인 원의 중심에서 d 만큼 떨어진 현의 길이를 l 이라 하면

$$l=2\sqrt{r^2-d^2}$$



09 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+4x-8+k(x^2+y^2-4x-8)=0 \quad (k \neq -1)$$

이라 하면

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(4-4k)x-8-8k=0$$

이 원의 중심이 원점이라면 x 의 계수가 0이어야 하므로

$$4-4k=0 \quad \therefore k=1$$

따라서 원의 방정식은

$$2x^2+2y^2-16=0, \text{ 즉 } x^2+y^2=8$$

이므로 원의 넓이는 8π 이다.

답 ④

10 (i) 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$ 과 원

$x^2+y^2=1$ 이 만나지 않으려면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 커야

하므로

$$\frac{|2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>1, \quad \sqrt{m^2+1}<2$$

$$m^2+1<4, \quad m^2<3$$

$$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$$

(ii) 직선 $mx-y+2=0$ 과 원 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$,

즉 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ 가 만나지 않으려면 원의

중심 $(3, 2)$ 와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길

이인 2보다 커야 하므로

$$\frac{|3m-2+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>2, \quad |3m|>2\sqrt{m^2+1}$$

$$9m^2>4m^2+4, \quad m^2>\frac{4}{5}$$

$$\therefore m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } m>\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(i), (ii)에서

$$-\sqrt{3} < m < -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \frac{2\sqrt{5}}{5} < m < \sqrt{3}$$

$$\text{㉔ } -\sqrt{3} < m < -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \frac{2\sqrt{5}}{5} < m < \sqrt{3}$$

다른 풀이 (i) $y=mx+2$ 를 $x^2+y^2=1$ 에 대입하면

$$x^2+(mx+2)^2=1$$

$$\therefore (1+m^2)x^2+4mx+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(2m)^2-(1+m^2)\cdot 3<0$$

$$m^2<3$$

$$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$$

(ii) $y=mx+2$ 를 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ 에 대입하면

$$x^2+(mx+2)^2-6x-4(mx+2)+9=0$$

$$\therefore (1+m^2)x^2-6x+5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-(1+m^2)\cdot 5<0$$

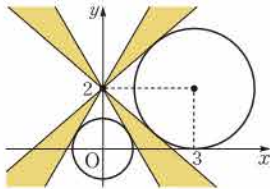
$$m^2>\frac{4}{5}$$

$$\therefore m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } m>\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(i), (ii)에서

$$-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$$

참고 직선 $y=mx+2$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$ 를 지나므로 직선이 두 원과 모두 만나지 않을 때는 오른쪽 그림에서 직선이 색칠한 부분에 있을 때이다.



11 $x^2+y^2-4x-2y=m$ 에서

$$(x-2)^2+(y-1)^2=m+5$$

이 원의 중심을 C라 하면 점 C(2, 1)과 직선

$x-y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{m+5}$ 이고 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\sqrt{m+5}>\sqrt{2}, \quad m+5>2$$

$$\therefore m>-3$$

따라서 정수 m 의 최솟값은 -2 이므로

$$a=-2$$

한편 $\overline{AB}=6$ 일 때 점 C에서

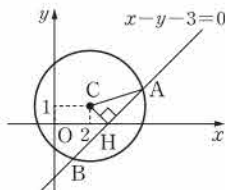
직선 $x-y-3=0$ 에 내린 수

선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

직각삼각형 CHA에서

$$(\sqrt{m+5})^2=(\sqrt{2})^2+3^2$$



원의 방정식과 직선의 방정식에서 한 문자를 소개하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선의 위치 관계는

- ① $D>0$ $\Rightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
- ② $D=0$ $\Rightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)
- ③ $D<0$ $\Rightarrow$ 만나지 않는다.

이차방정식

$4m^2+9m+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=9^2-4\cdot 4\cdot 4=17>0$$

이므로 이차방정식

$4m^2+9m+4=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$b=2a+5$ 를 ㉔에 대입하면

$$a^2+(2a+5)^2=5$$

$$a^2+4a+4=0$$

$$(a+2)^2=0$$

$$\therefore a=-2$$

$$\therefore b=2\cdot (-2)+5=1$$

$b=2a-5$ 를 ㉔에 대입하면

$$a^2+(2a-5)^2=5$$

$$a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0$$

$$\therefore a=2$$

$$\therefore b=2\cdot 2-5=-1$$

$$m+5=11 \quad \therefore m=6$$

즉 $\overline{AB}=6$ 을 만족시키는 m 의 값은 6이므로

$$b=6$$

$$\therefore a+b=4$$

㉔ 4

12 $x^2+y^2+2x=0$ 에서 $(x+1)^2+y^2=1$

$x^2+y^2-4x+6y+12=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y+3)^2=1$$

원 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ 의 넓이를 이등분하는 직선은 이 원의 중심 $(2, -3)$ 을 지나므로 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$y=m(x-2)-3$$

이 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 에 접하므로 이 원의 중심 $(-1, 0)$ 과 직선 $y=m(x-2)-3$, 즉

$mx-y-2m-3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같다

$$\text{즉 } \frac{|-m-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \text{ 이므로}$$

$$|3m+3|=\sqrt{m^2+1}, \quad 8m^2+18m+8=0$$

$$\therefore 4m^2+9m+4=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 직선의 기울기의 합은 $-\frac{9}{4}$ 이다. ㉔ ①

13 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=5 \quad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{5}{b}$$

이 직선과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 이 수직이므로

$$-\frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$$\therefore a=-2b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (a, b) 는 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$(-2b)^2+b^2=5, \quad 5b^2=5$$

$$\therefore b^2=1$$

따라서 $a^2=4b^2=4$ 이므로

$$a^2b^2=4$$

㉔ ④

다른 풀이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 과 수직인 직선의 기울기는 2이고, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 원의 접선의 방정식은

$$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1} \quad \therefore y=2x\pm 5$$

이 직선이 점 (a, b) 를 지나므로

$$b=2a\pm 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (a, b) 는 원 위의 점이므로

$$a^2+b^2=5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉔, ㉔을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=1 \text{ 또는 } a=2, b=-1$$

$$\therefore a^2b^2=4\cdot 1=4$$

14 직선 $y=3x-1$ 과 평행한 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=3x \pm \sqrt{10} \cdot \sqrt{3^2+1}$$

$$\therefore y=3x \pm 10$$

그런데 직선 l 은 제2사분면에서 원에 접하므로 직선 l 의 방정식은

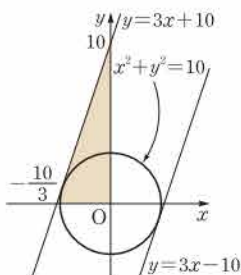
$$y=3x+10$$

따라서 직선 l 이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$\left(-\frac{10}{3}, 0\right), (0, 10)$$

직선 l 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot 10 = \frac{50}{3}$$



답 ③

15 접점의 좌표를 (a, b) 라 하면 접선의 방정식은

$$ax+by=25$$

이 직선이 점 $(7, -1)$ 을 지나므로

$$7a-b=25 \quad \therefore b=7a-25 \quad \dots\dots ㉠$$

또 점 (a, b) 는 원 위의 점이므로

$$a^2+b^2=25 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-4 \text{ 또는 } a=4, b=3$$

따라서 접선의 방정식은 $3x-4y=25$ 또는 $4x+3y=25$ 이므로

$$m_1 m_2 = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 \quad \text{답 } -1$$

다른 풀이 접선의 기울기를 m 이라 하면 기울기가 m 이고 점 $(7, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=m(x-7) \quad \therefore mx-y-7m-1=0$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|-7m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = 5, \quad |7m+1| = 5\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$12m^2+7m-12=0, \quad (3m+4)(4m-3)=0$$

$$\therefore m=-\frac{4}{3} \text{ 또는 } m=\frac{3}{4}$$

$$\therefore m_1 m_2 = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = -1$$

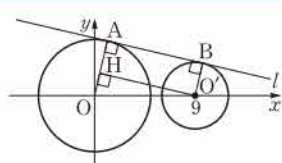
16 두 원 O, O' 의 중심의 좌표는 각각

$$O(0, 0), O'(9, 0)$$

$$\therefore OO'=9$$

오른쪽 그림과 같이 점 O' 에서 OA 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$OH=5-3=2$$



두 원 O, O' 의 반지름의 길이가 각각 5, 3이므로

$$OH=OA-HA$$

$$=OA-O'B$$

$$=5-3=2$$

따라서 직각삼각형 $OO'H$ 에서

$$AB=O'H$$

$$=\sqrt{9^2-2^2}=\sqrt{77}$$

답 $\sqrt{77}$

17 두 원 C_1, C_2 의 중심의 좌표는 각각

$$C_1(0, 2), C_2(0, -4)$$

$$\therefore C_1 C_2 = |2 - (-4)| = 6$$

오른쪽 그림과 같이 점 C_2 에서 $C_1 A$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 H 라 하면

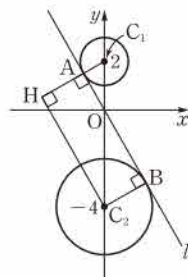
$$C_1 H = 1 + 2 = 3$$

따라서 직각삼각형 $C_1 H C_2$ 에서

$$AB=H C_2$$

$$=\sqrt{6^2-3^2}$$

$$=3\sqrt{3}$$



답 $3\sqrt{3}$

18 두 원 O, O' 의 중심의 좌표는 각각

$$O(0, 0), O'(8, 6)$$

$$\therefore OO'=\sqrt{8^2+6^2}=10$$

오른쪽 그림과 같이 점 O' 에서 OA 의 연장선에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$OH=1+r,$$

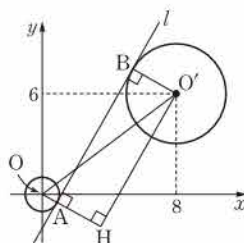
$$HO'=\overline{AB}=2\sqrt{21}$$

따라서 직각삼각형 OHO' 에서

$$10^2=(1+r)^2+(2\sqrt{21})^2, \quad (1+r)^2=16$$

$$1+r=\pm 4$$

$$\therefore r=3 (\because r>0)$$



답 3

1등급을 위한 고난도 문제

본책 20쪽

01 $x^2+y^2+4x-6y+k=0$ 에서

$$(x+2)^2+(y-3)^2=13-k \quad (k<13)$$

이므로 이 원은 중심이 점 $(-2, 3)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13-k}$ 이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C 라 하고 점 C 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

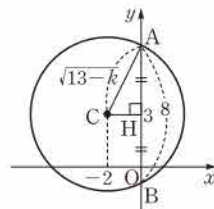
$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4, \overline{CH}=2$$

이므로 직각삼각형 ACH 에서

$$(\sqrt{13-k})^2=4^2+2^2$$

$$13-k=20 \quad \therefore k=-7$$

다른 풀이 $x=0$ 을 $x^2+y^2+4x-6y+k=0$ 에 대입하면

$$y^2-6y+k=0$$


답 -7

이때 두 점 A, B는 y축 위의 점이므로 A(0, α), B(0, β)라 하면 이차방정식 $y^2 - 6y + k = 0$ 의 두 근은 α, β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = k$$

이고, $\overline{AB} = |\alpha - \beta| = 8$ 이므로

$$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$64 = 36 - 4k \quad \therefore k = -7$$

02 $x^2 + y^2 - 2(a+1)x + 2ay + 3a^2 - 2 = 0$ 에서

$$\{x - (a+1)\}^2 + (y+a)^2 = -a^2 + 2a + 3$$

이므로 반지름의 길이

$$\sqrt{-a^2 + 2a + 3} = \sqrt{-(a-1)^2 + 4}$$

가 최대일 때 원의 넓이가 최대이다.

따라서 $a=1$ 일 때 원의 넓이가 최대이고, 이때 원의 중심의 좌표는 (2, -1)이다. **답 ①**

$$(a+1, -a)$$

03 $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3k + 4 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 3k+9$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$3k+9 > 0 \quad \therefore k > -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 원 위의 모든 점이 제3사분면 위에 있으려면 원의 반지름의 길이가 2보다 작아야 하므로

$$\sqrt{3k+9} < 2, \quad 3k+9 < 4$$

$$\therefore k < -\frac{5}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$-3 < k < -\frac{5}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } -3 < k < -\frac{5}{3}$$

중심의 좌표가 (-2, -3)인 원의 반지름의 길이가 2이면 이 원은 y축에 접한다.

채점 기준	비율
① 주어진 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20%
② 원의 방정식이 되기 위한 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
③ 원 위의 모든 점이 제3사분면 위에 있도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
④ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

04 오른쪽 그림과 같이 원

$(x-5)^2 + (y-4)^2 = r^2$ 의 중심

(5, 4)를 지나고 직선 AB에

수직인 직선이 원과 만나는 두

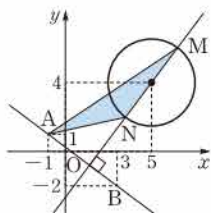
점이 M, N이다.

직선 AB의 기울기는

$$\frac{-2-1}{3+1} = -\frac{3}{4}$$

이므로 직선 MN의 방정식은

$$y-4 = \frac{4}{3}(x-5) \quad \therefore 4x-3y-8=0$$



점 P가 (3, 2) 또는 (3, -2)일 때 △PAB의 넓이가 최대이다.

점 A(-1, 1)과 직선 $4x-3y-8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4-3-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 3$$

이므로 △AMN의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 3 = 3r$

따라서 $3r=10$ 에서 $r = \frac{10}{3}$

답 ③

1등급 비밀노트

AB의 길이는 정해져 있으므로 △ABP의 넓이가 최대, 최소일 때는 점 P에서 직선 AB에 이르는 거리가 각각 최대, 최소일 때임을 이용하여 두 점 M, N의 위치를 찾는다.

05 $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 12 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 32 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 ①의 중심을 C라 하면 C(-2, 4)

두 직선 l, m의 교점을 P라 하면 두

직선 l, m은 수직이므로 점 P가 나

타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이

중심이 C이고 반지름이 CP인 원이

다.

두 직선 l, m과 원 ①의 접점을 각각 A, B라 하면 사각형 PACB는 정사각형이므로

$$\overline{CP} = \sqrt{2} \cdot \overline{AC} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = 8$$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는

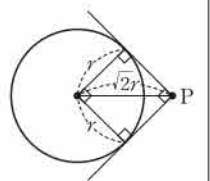
$$2\pi \cdot 8 = 16\pi$$

답 ④

1등급 비밀노트

반지름의 길이가 r인 원 밖의 한 점 P에서 이 원에 그은 두 접선이 수직일 때, 점 P의 자취

→ 주어진 원과 중심의 좌표가 같고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}r$ 인 원이다.



06 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}, \quad \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4\{(x-2)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + y^2 = 4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 (3, 0)이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

∴ 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 2인 원이므로 그 둘레의 길이는

$$2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

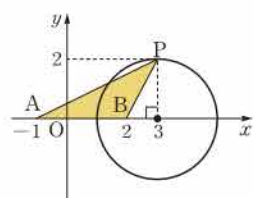
∴ 오른쪽 그림에서

△PAB의 넓이의 최댓

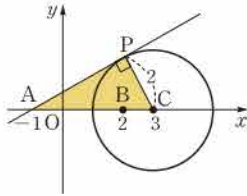
값은

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot 2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$$



ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때 $\angle PAB$ 의 크기가 최대이고, 원의 중심을 C라 하면 $\angle APC=90^\circ$ 이므로



$$AP = \sqrt{AC^2 - PC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

07 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

(i) 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있을 때,

중심의 좌표를 (a, a) 라 하면

$$(a-1)^2 + (a+2)^2 = 17 \text{에서}$$

$$a^2 + a - 6 = 0, \quad (a+3)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 2$$

(ii) 원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있을 때,

중심의 좌표를 $(a, -a)$ 라 하면

$$(a-1)^2 + (-a+2)^2 = 17 \text{에서}$$

$$a^2 - 3a - 6 = 0$$

$$\therefore a = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \text{ 또는 } a = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$$

(i), (ii)에서 모든 원의 반지름의 길이의 합은

$$|-3| + |2| + \left| \frac{3+\sqrt{33}}{2} \right| + \left| \frac{3-\sqrt{33}}{2} \right| \\ = 3 + 2 + \frac{3+\sqrt{33}}{2} + \frac{-3+\sqrt{33}}{2} \\ = 5 + \sqrt{33}$$

따라서 $m=5$, $n=33$ 이므로

$$m+n=38$$

답 38

08 점 R는 두 점 $(-3, 0)$, $(3, 0)$ 을 잇는 선분을

1:2로 내분하므로 점 R의 좌표는

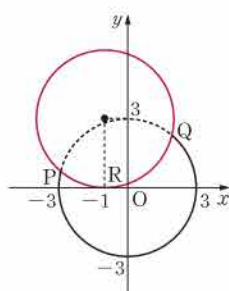
$$\left(\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{1+2}, \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{1+2} \right), \text{ 즉 } (-1, 0) \dots ①$$

이때 세 점 P, Q, R를 지나는 원은 주어진 원과 같은 호를 가지므로 주어진 원과 반지름의 길이가 같고 점 R에서 x 축에 접한다.

따라서 구하는 원은 중심이 점 $(-1, 3)$, 반지름의 길이가 3인 원이므로 그 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$\text{답 } (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$$



$$\begin{aligned} \overline{CA} &= \overline{CB}, \overline{CR} = \overline{CQ}, \\ \angle ACR &= \angle BCQ \text{이므로} \\ \triangle ACR &\equiv \triangle BCQ \\ &\text{(SAS 합동)} \end{aligned}$$

원 C가 x 축에 접하고 점 C의 y 좌표가 4이므로 원 C의 반지름의 길이는 4이다.

이차방정식

$$p^2 + 2p - 22 = 0 \text{의 판별} \\ \text{식을 D라 하면}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 1^2 - 1 \cdot (-22) \\ &= 23 > 0 \end{aligned}$$

이므로 이차방정식

$$p^2 + 2p - 22 = 0 \text{은 서로} \\ \text{다른 두 실근을 갖는다.}$$

x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표가 (k, k) 또는 $(k, -k)$ 일 때, 반지름의 길이는 $|k|$ 이다.

09 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CP}$ 와 원 C의 교점을 R라 하면 $\triangle ACR$ 과 $\triangle BCQ$ 는 서로 합동이므로 넓이가 서로 같다.

따라서 $\triangle ACP$ 의 넓이가

$\triangle BCQ$ 의 넓이의 2배가 되려면 두 삼각형 ACR, ARP의 넓이가 서로 같아야 한다.

$$\overline{PR} = \overline{CR} = 4 \text{이므로}$$

$$\overline{CP} = 2 \cdot 4 = 8$$

이때 점 P의 좌표를 $(p, -p)$ 라 하면

$$\overline{CP} = \sqrt{(p-2)^2 + (-p-4)^2}$$

이므로

$$\sqrt{(p-2)^2 + (-p-4)^2} = 8$$

$$2p^2 + 4p + 20 = 64$$

$$\therefore p^2 + 2p - 22 = 0 \dots\dots ⑦$$

한편 $P_1(p_1, -p_1)$, $P_2(p_2, -p_2)$ 라 하면 p_1, p_2 는 이차방정식 ⑦의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$p_1 + p_2 = -2, \quad p_1 p_2 = -22$$

이때

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(p_2 - p_1)^2 + (-p_2 + p_1)^2}$$

$$= \sqrt{2} |p_1 - p_2| \dots\dots ⑧$$

이고,

$$\begin{aligned} |p_1 - p_2|^2 &= (p_1 + p_2)^2 - 4p_1 p_2 \\ &= (-2)^2 - 4 \cdot (-22) = 92 \end{aligned}$$

이므로

$$|p_1 - p_2| = 2\sqrt{23}$$

따라서 ⑧에서

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{2} |p_1 - p_2| = 2\sqrt{46}$$

답 ①

10 오른쪽 그림과 같이 점 P(4, 2)에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 접점을 각각 A, B라 하면

$$\angle OAP = \angle OBP$$

$$= 90^\circ$$

이므로 위의 그림과 같이 두 점 A, B는 $\overline{OP}$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다.

$\overline{OP}$ 를 지름으로 하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \dots\dots ①$$

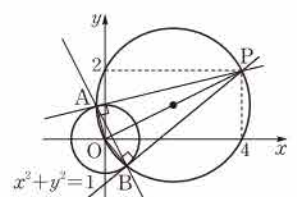
따라서 $\overline{AB}$ 는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 원 ①의 공통인 현이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 1 - (x^2 + y^2 - 4x - 2y) = 0$$

$$\therefore 4x + 2y - 1 = 0$$

$$\text{답 } 4x + 2y - 1 = 0$$

다른 풀이 한 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은



채점 기준	비율
① 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	20%
② 세 점 P, Q, R를 지나는 원이 어떤 원인지 알 수 있다.	40%
③ 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 방정식을 구할 수 있다.	40%

$$x_1x + y_1y = 1$$

이 직선이 점 P(4, 2)를 지나므로

$$4x_1 + 2y_1 = 1$$

이때 또 다른 점점의 좌표를 (x_2, y_2) 라 하면

$4x_2 + 2y_2 = 1$ 을 만족시키므로 두 점점을 지나는 직선의 방정식은

$$4x + 2y - 1 = 0$$

11 $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 16$ 에서

$$x^2 + y^2 + 10x - 10y + 34 = 0$$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 36 - (x^2 + y^2 + 10x - 10y + 34) = 0$$

$$\therefore x - y + 7 = 0$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}$ 와 $\overline{PQ}$

의 교점을 H라 하면 직선

$x - y + 7 = 0$ 과 점 O 사이의 거리는

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \frac{|7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

직각삼각형 POH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{46}}{2}$$

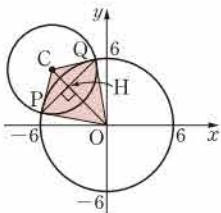
한편 C(-5, 5)이므로

$$\overline{OC} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

따라서 사각형 POQC의 넓이는

$$\begin{aligned} 2\triangle OCP &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{PH} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{46}}{2} \\ &= 5\sqrt{23} \end{aligned}$$

답 ⑤



원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 이등분하므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

13 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$x^2 + y^2 - 6x - y + k = 0$ 에서

$$(x-3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{37}{4} - k$$

오른쪽 그림과 같이 두 원

의 중심을 각각 C, C',

두 원의 교점을 각각 A,

B라 하고, $\overline{CC'}$ 과 $\overline{AB}$ 의

교점을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{4}{5}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

한편 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 - (x^2 + y^2 - 6x - y + k) = 0$$

$$\therefore 4x - 3y + 4 - k = 0$$

점 C(1, 2)에서 직선 AB에 이르는 거리는 $\overline{CH}$ 의 길이와 같으므로

$$\frac{|4 - 6 + 4 - k|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{5}$$

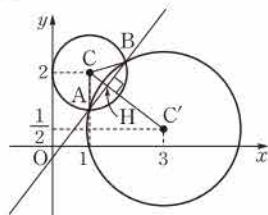
$$|2 - k| = 3, \quad 2 - k = \pm 3$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 5$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$$-1 + 5 = 4$$

답 ④



12 원 $x^2 + y^2 + ax - 3ay + 4 = 0$ 이 원

$x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 16 = 0$ 의 둘레의 길이를 이등분하

므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원

$x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 16 = 0$ 의 중심을 지나야 한다.

①

주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax - 3ay + 4 \\ - (x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 16) \end{aligned}$$

$$= 0$$

$$-ax + ay - 12 = 0$$

$$\therefore ax - ay + 12 = 0 \quad \dots\dots ①$$

②

$x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 16 = 0$ 에서

$$(x+a)^2 + (y-2a)^2 = 5a^2 - 16 \quad \dots\dots ②$$

즉 직선 ①이 원 ②의 중심 $(-a, 2a)$ 를 지나므로

$$a \cdot (-a) - a \cdot 2a + 12 = 0$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

③

답 2

14 오른쪽 그림과 같이

$\angle OAP$ 의 크기가 최대일 때

는 직선 AP가 원에 접할 때

이므로 점 P'은 점 A에서 원

에 그은 접선 중에서 기울기

가 양수인 접선의 접점이다.

점 A(-2, 0)을 지나고 기

울기가 m (m > 0)인 직선의 방정식은

$$y = m(x+2) \quad \therefore mx - y + 2m = 0$$

원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 중심 (0, 1)과 직선

$mx - y + 2m = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과

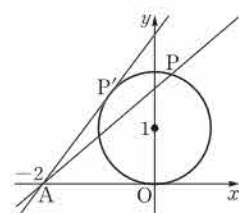
같아야 하므로

$$\frac{|-1 + 2m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1, \quad |2m - 1| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$4m^2 - 4m + 1 = m^2 + 1, \quad m(3m - 4) = 0$$

$$\therefore m = \frac{4}{3} \quad (\because m > 0)$$



따라서 직선 AP'의 방정식은 $y = \frac{4}{3}(x+2)$ 이므로 구하는 y절편은 $\frac{8}{3}$ 이다. [답] ④

15 원 $x^2 + (y+a)^2 = 20$ 의 중심의 좌표는 $(0, -a)$, 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이다.

(i) 점 $(0, -a)$ 와 직선 $x-2y-7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2a-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|2a-7|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선 $x-2y-7=0$ 이 서로 다른 두 점에
서 만나려면

$$\frac{|2a-7|}{\sqrt{5}} < 2\sqrt{5}, \quad |2a-7| < 10$$

$$-10 < 2a-7 < 10$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < a < \frac{17}{2}$$

(ii) 점 $(0, -a)$ 와 직선 $2x-y-14=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-14|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|a-14|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선 $2x-y-14=0$ 이 만나지 않으려면

$$\frac{|a-14|}{\sqrt{5}} > 2\sqrt{5}, \quad |a-14| > 10$$

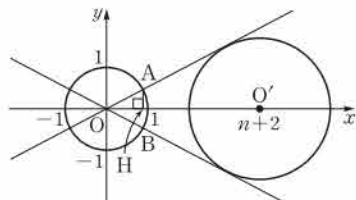
$$a-14 < -10 \text{ 또는 } a-14 > 10$$

$$\therefore a < 4 \text{ 또는 } a > 24$$

(i), (ii)에서 $-\frac{3}{2} < a < 4$ 이므로 조건을 만족시키는 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다. [답] 5

채점 기준	비율
① 원과 직선 $x-2y-7=0$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
② 원과 직선 $2x-y-14=0$ 이 만나지 않도록 하는 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ 정수 a 의 개수를 구할 수 있다.	20%

16



위의 그림과 같이 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AB} = \frac{3}{2}$ 이므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{3}{4}$$

즉 점 A의 y좌표가 $\frac{3}{4}$ 이므로 $y = \frac{3}{4}$ 을 $x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하면

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1, \quad x^2 = \frac{7}{16}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (\because x > 0)$$

점 B의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

$x=0$ 을 $y = \frac{4}{3}(x+2)$ 에

대입하면

$$y = \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}$$

$$n+2 > 0$$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ 이고 원점과 점 A를
지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{3}{\sqrt{7}}x, \text{ 즉 } 3x - \sqrt{7}y = 0$$

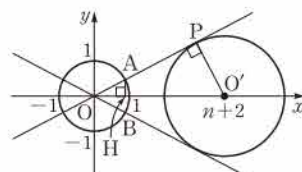
점 $(n+2, 0)$ 과 이 직선 사이의 거리는 원 O'의 반지름
의 길이 n 과 같으므로

$$\frac{|3(n+2)|}{\sqrt{3^2+(-\sqrt{7})^2}} = n, \quad 3n+6=4n$$

$$\therefore n=6$$

[답] 6

다른 풀이



위의 그림과 같이 직선 OA와 원 O'의 교점을 P라 하면
 $\triangle AOH \sim \triangle O'OP$ (AA 답음)이므로

$$\overline{OA} : \overline{OO'} = \overline{AH} : \overline{O'P}$$

$$1 : (n+2) = \frac{3}{4} : n$$

$$n = \frac{3}{4}(n+2) \quad \therefore n=6$$

17 원 O: $x^2 + y^2 = a$ 의 중심 O(0, 0)과 두 직선
 $l_1: 2x+y-8=0$, $l_2: x-2y+6=0$ 사이의 거리는 각
각

$$\frac{|-8|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}, \quad \frac{|6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

이고 두 직선 l_1 , l_2 의 교점의 좌표는 $(2, 4)$ 이다.

(i) 원 O가 직선 l_1 과 접할 때,

오른쪽 그림과 같이

$$a = \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{64}{5} \text{ 일 때, 원}$$

O는 직선 l_1 과 한 점에서
만나고 직선 l_2 와 두 점에
서 만난다.

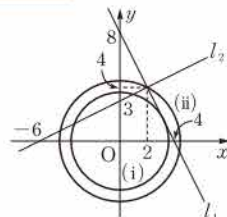
(ii) 원 O가 점 $(2, 4)$ 를 지날 때,

위의 그림과 같이 $a = 2^2 + 4^2 = 20$ 일 때, 원 O는 두 직
선 l_1 , l_2 와 점 $(2, 4)$ 에서 동시에 만나고 각각 다른
한 점에서 또 만난다.

(i), (ii)에서 구하는 모든 양수 a 의 값의 곱은

$$\frac{64}{5} \cdot 20 = 256$$

[답] 256



18 두 원에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y = ax + b$,
즉 $ax - y + b = 0$ 이라 하자.

직선 $ax - y + b = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하므로 원의
중심 $(0, 0)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 4
와 같아야 한다.

$$\text{즉 } \frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = 4 \text{ 이므로}$$

$$|b| = 4\sqrt{a^2 + 1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 직선 $ax - y + b = 0$ 이 원 $x^2 + (y - 6)^2 = 4$ 에 접하므로 원의 중심 (0, 6)과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 한다.

$$\text{즉 } \frac{|-6 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2 \text{이므로}$$

$$|b - 6| = 2\sqrt{a^2 + 1} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } |b| = 2|b - 6|$$

$$b = \pm 2(b - 6) \quad \therefore b = 4 \text{ 또는 } b = 12$$

$$(i) b = 4 \text{일 때, } \textcircled{7} \text{에서 } 4 = 4\sqrt{a^2 + 1}$$

$$a^2 = 0 \quad \therefore a = 0$$

$$\text{따라서 직선의 방정식은 } y = 4$$

$$(ii) b = 12 \text{일 때, } \textcircled{7} \text{에서 } 12 = 4\sqrt{a^2 + 1}$$

$$a^2 = 8 \quad \therefore a = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 직선의 방정식은}$$

$$y = -2\sqrt{2}x + 12 \text{ 또는 } y = 2\sqrt{2}x + 12$$

(i), (ii)에서 접선의 방정식은

$$y = 4 \text{ 또는}$$

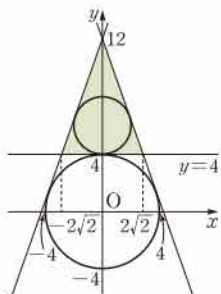
$$y = -2\sqrt{2}x + 12 \text{ 또는}$$

$$y = 2\sqrt{2}x + 12$$

따라서 세 접선의 교점의 좌표

는 (0, 12), $(-2\sqrt{2}, 4)$, $(2\sqrt{2}, 4)$ 이므로 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot (12 - 4) \cdot \{2\sqrt{2} - (-2\sqrt{2})\} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \quad \text{답 } \textcircled{3}$$



19 원의 중심 (0, 0)과 접선 $4x + 3y - 15 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-15|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 3$$

이므로 원의 반지름의 길이는 3이고, 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = 9$ 이다. $\rightarrow \textcircled{1}$

원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$$ax + by = 9 \quad \therefore y = -\frac{a}{b}x + \frac{9}{b}$$

이 방정식이 $4x + 3y = 15$, 즉 $y = -\frac{4}{3}x + 5$ 와 같으므로

$$-\frac{a}{b} = -\frac{4}{3}, \frac{9}{b} = 5$$

$$\therefore a = \frac{12}{5}, b = \frac{9}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{21}{5} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } \frac{21}{5}$$

채점 기준	비율
① 중심이 원점이고 직선 $4x + 3y = 15$ 에 접하는 원의 방정식을 구할 수 있다.	40%
② a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
③ a+b의 값을 구할 수 있다.	10%

$y = -3x + 10$ 이므로 기울기는 -3이다.

접선의 방정식이

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \text{이면 원과}$$

제4사분면에서 접한다.

20 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 (3, 1)에서의 접선의 방정식은 $3x + y = 10$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이다.

원 $x^2 + y^2 = 10$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이므로 기울기가 $\frac{1}{3}$ 인 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{10} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x \pm \frac{10}{3}$$

이때 직선이 원과 제2사분면에서 접해야 하므로

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \quad \therefore -\frac{x}{10} + \frac{3}{10}y = 1$$

따라서 $a = -10, b = \frac{10}{3}$ 이므로

$$a + b = -\frac{20}{3} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

21 원 위의 점 P(a, b)에서의 접선의 방정식은

$$ax + by = 36$$

이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$\left(\frac{36}{a}, 0\right), \left(0, \frac{36}{b}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{AB} = 12 \text{이므로 } \sqrt{\left(-\frac{36}{a}\right)^2 + \left(\frac{36}{b}\right)^2} = 12$$

$$\left(-\frac{36}{a}\right)^2 + \left(\frac{36}{b}\right)^2 = 144, \quad \frac{9}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$$

$$\therefore 9(a^2 + b^2) = a^2b^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 점 P(a, b)가 원 $x^2 + y^2 = 36$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 36 \quad \dots\dots \textcircled{8} \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에 대입하면

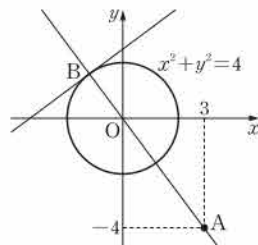
$$9 \cdot 36 = a^2b^2, \quad (ab)^2 = (3 \cdot 6)^2$$

$$\therefore ab = 18 (\because ab > 0) \quad \dots\dots \textcircled{3} \quad \text{답 } 18$$

채점 기준	비율
① 두 점 A, B의 좌표를 a, b를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
② a, b에 대한 두 식을 세울 수 있다.	40%
③ ab의 값을 구할 수 있다.	30%

22 오른쪽 그림과 같이

A(3, -4)라 하고 직선 OA와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 가 만나는 점 중 제2사분면 위의 점을 B라 하면 구하는 직선의 방정식은 점 B에서의 접선의 방정식이다.



직선 OA의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로 구하는 접선의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

기울기가 $\frac{3}{4}$ 인 접선의 방정식은

y절편이 양수이다.

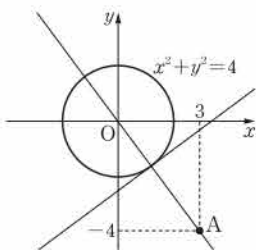
직선 OA와 수직이다.

$$y = \frac{3}{4}x \pm 2\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} \quad \therefore y = \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \quad \text{④} \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

참고 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선 중에서 점 $(3, -4)$ 와의 거리가 최소인 직선은 오른쪽 그림과 같이 직선 OA와 원이 만나는 점 중 제4사분면 위의 점에서의 접선이다.



23 두 원의 중심은 각각 $C(-3, 0)$, $D(9, 5)$ 이므로

$$CD = \sqrt{(9+3)^2 + 5^2} = 13$$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{BD}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

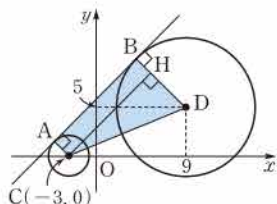
$$\overline{DH} = 7 - 2 = 5$$

직각삼각형 CDH에서

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{CH} \\ &= \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \end{aligned}$$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot (7+2) \cdot 12 = 54$$



⑤ 54

사각형 ACDB는 사다리꼴이다.

24 두 원 O , O' 의 중심을 각각 O , O' 이라 하면

$$O(0, 0), O'(b, 0)$$

점 O 와 직선 $2x + \sqrt{5}y + a = 0$ 사이의 거리는 원 O 의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$$\begin{aligned} \frac{|a|}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2}} &= 2, \quad |a| = 6 \\ \therefore a &= 6 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

또 점 O' 과 직선 $2x + \sqrt{5}y + 6 = 0$ 사이의 거리는 원 O' 의 반지름의 길이인 3과 같으므로

$$\begin{aligned} \frac{|2b+6|}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2}} &= 3, \quad |2b+6| = 9 \\ \therefore b &= \frac{3}{2} \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

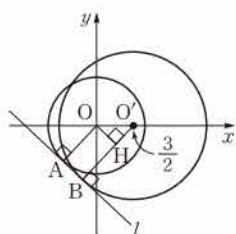
$$\therefore \overline{OO'} = \frac{3}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 점 O 에서 $O'B$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{O'H} = 3 - 2 = 1$$

직각삼각형 OHO'에서

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{OH} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$



⑥ ④

$$(\text{속력}) = \frac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{29} &= \sqrt{116} \text{에서} \\ \sqrt{100} &< \sqrt{116} < \sqrt{121} \\ \therefore 10 &< 2\sqrt{29} < 11 \end{aligned}$$

내신 수학

1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제**

본책 24쪽

01 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 에서 $AB = BA$ 이때

$$AB = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2+1 & x^2+y^2 \\ 3+2y & 1+2y^3 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2+1 & 3+2y \\ x^2+y^2 & 1+2y^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{이므로 } x^2 + y^2 = 3 + 2y$$

$$\therefore x^2 + (y-1)^2 = 4$$

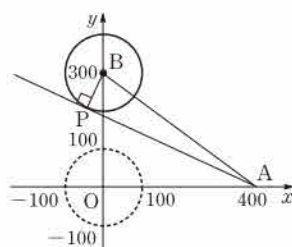
따라서 점 (x, y) 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(0, 1)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

⑦ ④

02 태풍의 눈의 처음 위치를 O라 하고 1시간 30분 후의 태풍의 눈의 위치를 B, 헬기의 처음 위치를 A라 하자.

오른쪽 그림과 같이 점 O를 원점으로 하고 두 직선 OA, OB를 각각 x 축, y 축으로 하는 좌표평면을 잡고, 1 km를 1로 생각하면



$$A(400, 0),$$

$$B(0, 300)$$

1시간 30분 후의 태풍의 영향권의 경계선을 나타내는 방정식은

$$x^2 + (y-300)^2 = 100^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 A에서 원 ①에 그른 접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{BP} = 100, \overline{AB} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500$$

직각삼각형 BPA에서

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{500^2 - 100^2} \\ &= 200\sqrt{6} \\ &= 200 \times 2.4 \\ &= 480 \end{aligned}$$

즉 헬기는 점 A의 위치에서 1시간 30분 동안 480 km를 이동하였으므로 헬기의 속력은 시속 $\frac{480}{1.5}$ km, 즉 시속 320 km이다.

$$\therefore a = 320$$

⑧ 320

03 원 $C_1: x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점은 $(1, 3)$, $(3, 1)$ 의 2개이다.

(i) 점 P의 좌표가 $(1, 3)$ 일 때,

점 $(1, 3)$ 과 원 C_2 의 중심 $(11, 7)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(11-1)^2 + (7-3)^2} = 2\sqrt{29}$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$2\sqrt{29} - 3 \leq \overline{PQ} \leq 2\sqrt{29} + 3$$

$$\therefore 7. \times \times \times \leq \overline{PQ} \leq 13. \times \times \times$$

$\overline{PQ}$ 의 길이는 자연수이므로 8, 9, 10, 11, 12, 13의 6개이고 점 Q는 각 길이마다 2개씩 있으므로 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$$6 \cdot 2 = 12$$

(ii) 점 P의 좌표가 (3, 1)일 때,

점 (3, 1)과 원 C_2 의 중심 (11, 7) 사이의 거리는

$$\sqrt{(11-3)^2 + (7-1)^2} = 10$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$10 - 3 \leq \overline{PQ} \leq 10 + 3$$

$$\therefore 7 \leq \overline{PQ} \leq 13$$

$\overline{PQ}$ 의 길이는 자연수이므로 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13의 7개이다.

이때 $\overline{PQ}$ 의 길이가 7, 13인 점 Q는 각각 1개이고, $\overline{PQ}$ 의 길이가 8, 9, 10, 11, 12인 점 Q는 각 길이마다 2개씩 있으므로 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$$2 + 5 \cdot 2 = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$$12 + 12 = 24$$

답 ③

04 조건 (가)에서 두 직선 AP, BP의 기울기의 곱이 -1이므로

$$\angle APB = 90^\circ$$

즉 점 P는 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다.

이때 $\overline{AB}$ 의 중점은 원

점 O이고, 조건 (나)에서 점 Q는 $\overline{BP}$ 의 중점이므로 두 삼각형 BQO, BPA는 닮음비가 1 : 2인 닮은 도형이다.

$$\therefore \angle OQB = 90^\circ$$

즉 점 Q는 $\overline{OB}$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다.

$\overline{OB}$ 의 중점을 M이라 하면 점 M은 $\overline{OB}$ 를 지름으로 하는 원의 중심이므로

$$M\left(\frac{4}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{2}\right), \text{ 즉 } M(2, -\sqrt{5})$$

따라서 $\overline{CQ}$ 의 길이는 점 Q가 직선 CM과 원이 만나는 두 점 중 선분 CM 위에 있지 않은 점일 때 최대이고

$$\begin{aligned} \overline{CM} &= \sqrt{(2-8)^2 + (-\sqrt{5}-3\sqrt{5})^2} \\ &= 2\sqrt{29}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{QM} &= \overline{OM} = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

이므로 $\overline{CQ}$ 의 길이의 최댓값은

$$2\sqrt{29} + 3$$

답 ⑤

05 m 이 0이 아닌 실수일 때, 이차방정식

$(x-y+2)+m(x^2+y^2-4)=0$ 이 나타내는 도형은 직선 $x-y+2=0$ 과 원 $x^2+y^2-4=0$ 의 교점을 지나는 원이다.

$$x-y+2=0 \text{에서 } y=x+2$$

$y=x+2$ 를 $x^2+y^2-4=0$ 에 대입하면

$$x^2+(x+2)^2-4=0, \quad x^2+2x=0$$

$$x(x+2)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

즉 직선 $x-y+2=0$ 과 원 $x^2+y^2-4=0$ 의 교점의 좌표는

$$(-2, 0), (0, 2)$$

주어진 이차방정식이 나타내는 도형은 두 점 $(-2, 0), (0, 2)$ 를 지름의 양 끝 점으로 하는 원일 때, 그 넓이가 최소이다.

두 점 $(-2, 0), (0, 2)$ 를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 중심이 점 $(-1, 1)$ 이고 반지름의 길이가

$$\sqrt{1^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$$

이므로 이 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2$$

$$\therefore x^2+y^2+2x-2y=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(x-y+2)+m(x^2+y^2-4)=0 \text{에서}$$

$$mx^2+my^2+x-y-4m+2=0$$

$$2mx^2+2my^2+2x-2y-8m+4=0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

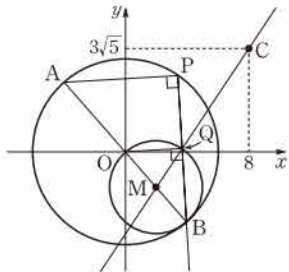
$$\textcircled{7} \text{과 } \textcircled{8} \text{이 같으려면 } 2m=1, -8m+4=0$$

$$\therefore m=\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}, b=2\pi$ 이므로

$$\frac{b}{a}=4\pi$$

답 ④



점 P(3, 1)과 원 C_2 의 중심 (11, 7)을 이은 직선이 원 C_2 와 만나는 두 점이 각각 $\overline{PQ}$ 의 길이가 7, 13인 점 Q이다.

반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 넓이는 2π 이다.

$\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{2}\right)$, 즉 (0, 0)

비밀노트

주어진 이차방정식을 정리하면

$$x^2+y^2+px+qy+r=0$$

꼴로 나타낼 수 있으므로 주어진 이차방정식이 나타내는 도형은 원이다.

또 $m \neq 0$ 일 때, m 의 값에 관계없이 $x-y+2=0, x^2+y^2-4=0$ 을 만족시키는 x, y 의 값이 존재하므로 주어진 원은 위의 두 방정식을 연립하여 푼 해, 즉 직선 $x-y+2=0$ 과 원 $x^2+y^2-4=0$ 의 교점을 항상 지낸다.

06 $\overline{OQ} \perp \overline{BQ}$, 즉 $\angle OQB = 90^\circ$ 이므로 점 Q는 $\overline{OB}$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OB}$

를 지름으로 하는 원을 S

라 하면 점 P가 제3사분

면 또는 x 축 또는 y 축 위

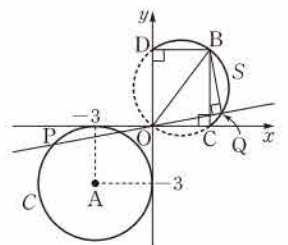
에 있으므로 점 Q는 원 S

위의 제1사분면 또는 x

축 또는 y 축 위에 있다.

점 B에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면 사각형 OCB D는 직사각형이므로 $\overline{CD}$ 는 원 S의 지름이다.

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 길이는 원 S의 둘레의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이다.



점 P를 지나는 점선의 방정식은 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{6}}{2}$, 즉 $\sqrt{2}x - 2y - 3\sqrt{6} = 0$ 이고 점 A(-3, 0)과 직선 $\sqrt{2}x - 2y - 3\sqrt{6} = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-2)^2}} = \sqrt{3} + 3$$

이때 $\overline{AB} = \sqrt{(1+3)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$ 이므로 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 3) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6} \quad \text{답 } 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$$

다른 풀이 직선 AB의 방정식은

$$y - 0 = \frac{2\sqrt{2} - 0}{1 + 3}(x + 3)$$

$$\therefore \sqrt{2}x - 2y + 3\sqrt{2} = 0$$

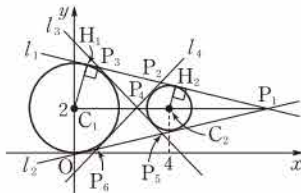
원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심 (0, 0)과 직선 $\sqrt{2}x - 2y + 3\sqrt{2} = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3\sqrt{2}|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-2)^2}} = \sqrt{3}$$

이때 $\overline{AB} = \sqrt{(1+3)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$ 이므로 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값은

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot (r + d) &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot (3 + \sqrt{3}) \\ &= 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

11 다음 그림과 같이 두 원 C_1, C_2 에 모두 접하는 직선은 l_1, l_2, l_3, l_4 가 있다.



따라서 l_1, l_2, l_3, l_4 중에서 두 직선을 l, m 이라 하면 두 직선 l, m 의 교점은 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 의 6개가 존재하고, $\overline{OP}$ 의 길이가 최대일 때는 위의 그림에서 점 P가 접선 l_1, l_2 의 교점인 P_1 일 때이다.

두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 C_1, C_2 라 하고 두 점 C_1, C_2 에서 직선 l_1 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하면 $\triangle C_1H_1P_1 \sim \triangle C_2H_2P_1$ 이고 그 닮음비는 2 : 1이다.

이때 $\overline{C_1P_1} = 2\overline{C_2P_1}$ 이고 $\overline{C_1C_2} = 4$ 이므로

$$\overline{C_1P_1} = 8$$

따라서 직각삼각형 C_1OP_1 에서

$$\overline{OP_1} = \sqrt{8^2 + 2^2} = 2\sqrt{17} \quad \text{답 } ①$$

점 A(-1, 2)를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -6만큼 평행이동하면 점 B(3, -4)로 옮겨진다.

두 원에 동시에 접하는 두 직선 l_1, l_2 의 교점이 P_1 이므로 점 C_2 는 $\overline{C_1P_1}$ 위의 점이다.

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이므로 $-2 \cdot a = -1$
 $\therefore a = \frac{1}{2}$

03 도형의 이동

개념 & 핵심 기술

본책 26쪽

01 점 (0, 2)를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(0+2, 2-1) \quad \therefore (2, 1)$$

이때 원점을 지나는 직선 l 의 방정식을 $y = mx$ 라 하면 이 직선이 점 (2, 1)을 지나므로

$$2m = 1 \quad \therefore m = \frac{1}{2}$$

따라서 직선 l 의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{답 } y = \frac{1}{2}x$$

02 주어진 평행이동을 $(x, y) \rightarrow (x+a, x+b)$ 라 하면

$$-1+a=3, 2+b=-4$$

$$\therefore a=4, b=-6$$

한편 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2-4}{2}\right) \quad \therefore (1, -1)$$

이때 구하는 점의 좌표를 (m, n) 이라 하면 주어진 평행이동에 의하여 점 (m, n) 이 점 (1, -1)로 옮겨지므로

$$m+4=1, n-6=-1$$

$$\therefore m=-3, n=5$$

따라서 구하는 점의 좌표는

$$(-3, 5) \quad \text{답 } (-3, 5)$$

03 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+a+5}{3}, \frac{3+7+b}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+4}{3}, \frac{b+10}{3}\right)$$

이때 주어진 평행이동에 의하여 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 원점으로 옮겨지므로

$$\frac{a+4}{3} - 2 = 0, \frac{b+10}{3} - 3 = 0$$

따라서 $a=2, b=-1$ 이므로

$$a+b=1$$

답 ①

04 직선 $y = ax + b$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+1=a(x-2)+b$$

$$\therefore y=ax-2a+b-1$$

..... ⑦

직선 ⑦이 직선 $y = -2x + 1$ 과 y 축 위에서 수직으로 만나므로 직선 ⑦의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이고, y 절편은 1이다.

따라서 $a = \frac{1}{2}, -2a + b - 1 = 1$ 이므로

$$a = \frac{1}{2}, b = 3 \quad \therefore ab = \frac{3}{2}$$

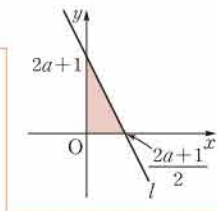
답 ③

05 직선 $2x+y-2=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 직선 l 의 방정식은

$$2(x-a)+(y+1)-2=0$$

$$\therefore 2x+y-(2a+1)=0$$

직선 l 의 x 절편은 $\frac{2a+1}{2}$, y 절편은 $2a+1$ 이므로 오른쪽 그림에서 직선 l 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2a+1}{2} \cdot (2a+1)$$

$$= \frac{(2a+1)^2}{4}$$

따라서 $\frac{(2a+1)^2}{4}=25$ 이므로

$$(2a+1)^2=100, \quad 2a+1=\pm 10$$

$$\therefore a=\frac{9}{2} \quad (\because a>0)$$

답 ②

06 포물선 $y=x^2-2x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-n=(x-m)^2-2(x-m)$$

$$\therefore y=x^2-2(m+1)x+m^2+2m+n$$

이 포물선이 $y=x^2-10x+20$ 과 일치하므로

$$2(m+1)=10 \text{에서} \quad m+1=5 \quad \therefore m=4$$

$$m^2+2m+n=20 \text{에서} \quad 4^2+2 \cdot 4+n=20$$

$$n+24=20 \quad \therefore n=-4$$

직선 $x-2y+a=0$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 직선 l 의 방정식은

$$(x-4)-2(y+4)+a=0$$

$$\therefore x-2y-12+a=0$$

직선 l 이 원점을 지나므로

$$-12+a=0 \quad \therefore a=12$$

답 12

참고 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$,

$y=x^2-10x+20=(x-5)^2-5$ 이므로 주어진 평행이동은 점 $(1, -1)$ 을 점 $(5, -5)$ 로 옮기는 평행이동, 즉 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다.

07 원 $x^2+y^2+10x-8y+25=0$ 에서

$$(x+5)^2+(y-4)^2=16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $x^2+y^2+10y+c=0$ 에서

$$x^2+(y+5)^2=25-c \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 원 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 중심의 좌표가 각각 $(-5, 4)$, $(0, -5)$ 이므로 원 $\textcircled{1}$ 을 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 -9 만큼 평행이동하면 원 $\textcircled{2}$ 과 겹쳐진다.

$$\therefore a=5, b=-9$$

또 원을 평행이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$16=25-c \quad \therefore c=9$$

$$\therefore a+b+c=5$$

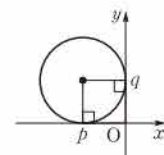
답 5

원과 직선의 위치 관계
원의 중심과 직선 사이의 거리를 d , 원의 반지름의 길이를 r 라 할 때
① 원과 직선이 두 점에서 만나면 $\Rightarrow d < r$
② 원과 직선이 접하면 $\Rightarrow d = r$
③ 원과 직선이 만나지 않으면 $\Rightarrow d > r$

a 의 값은 양수이므로

$$\frac{2a+1}{2} > 0,$$

$$2a+1 > 0$$



x 축, y 축에 동시에 접하고 원의 중심 (p, q) 가 제2사분면 위에 있으면
 $|p|=q \quad \therefore -p=q$

포물선의 평행이동은 포물선의 꼭지점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

08 원 $x^2+y^2=4$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+y^2=4$$

이 원이 직선 $3x-4y-2=0$ 에 접하면 원의 중심 $(a, 0)$ 과 직선 $3x-4y-2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$$\frac{|3a-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$$

$$|3a-2|=10, \quad 3a-2=\pm 10$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

답 ③

09 $x^2+y^2+6x-2y+a=0$ 에서

$$(x+3)^2+(y-1)^2=10-a$$

이 원을 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 $-2b$ 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-b+3)^2+(y+2b-1)^2=10-a$$

이므로 이 원은 중심이 점 $(b-3, -2b+1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10-a}$ 인 원이다.

이 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로

$$-(b-3)=-2b+1 \quad \therefore b=-2$$

즉 평행이동한 원의 중심의 좌표는 $(-5, 5)$ 이므로 반지름의 길이는 5이다.

따라서 $\sqrt{10-a}=5$ 에서

$$10-a=25 \quad \therefore a=-15$$

$$\therefore b-a=13$$

답 ③

10 두 점 $A(2, 3)$, $B(p, 6)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점은

$$A'(-2, 3), B'(-p, 6)$$

따라서 삼각형 $OA'B'$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0-2-p}{3}, \frac{0+3+6}{3} \right)$$

$$\therefore \left(-\frac{p+2}{3}, 3 \right)$$

이때 직선 OA 의 방정식은 $y=\frac{3}{2}x$ 이고, 이 직선이 점

$$\left(-\frac{p+2}{3}, 3 \right)$$
을 지나므로

$$3=\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{p+2}{3} \right), \quad 6=-p-2$$

$$\therefore p=-8$$

답 -8

11 $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때, 점 P_n 의 좌표를 차례대로 구하면 다음과 같다.

$$P_1(3, 2), P_2(3, -2), P_3(-3, 2),$$

$$P_4(-3, -2), P_5(3, 2), P_6(3, -2),$$

$$P_7(-3, 2), P_8(-3, -2), \dots$$

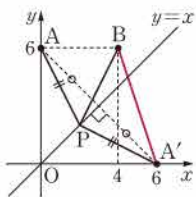
즉 점 P_n 의 좌표는 $(3, 2)$, $(3, -2)$, $(-3, 2)$,

$(-3, -2)$ 가 이 순서대로 반복된다.

따라서 $49=4 \cdot 12+1$ 에서 점 P_{49} 의 좌표는 점 P_1 의 좌표와 같으므로 점 P_{49} 의 좌표는 $(3, 2)$ 이다.

답 ⑤

12 오른쪽 그림과 같이 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 A'(6, 0)이므로



두 점 A(a, b), B(-1, 2)를 지나는 직선의 기울기

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$$\overline{A'B} = \sqrt{(4-6)^2 + 6^2} = 2\sqrt{10} \quad \text{답 ⑤}$$

13 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은 $y=m(x+1)$

이 직선을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-1=m(x+1) \quad \therefore y=m(x+1)+1$$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=m(x+1)+1 \quad \therefore y=-m(x+1)-1$$

이 직선이 점 (1, 3)을 지나므로

$$3=-2m-1 \quad \therefore m=-2 \quad \text{답 -2}$$

14 원 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

이 원을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-m+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

이 원의 중심은 (m-1, 2)이고 반지름의 길이는 3이므로 y축에 접하려면

$$|m-1|=3, \quad m-1=\pm 3$$

$$\therefore m=-2 \text{ 또는 } m=4$$

따라서 모든 실수 m의 값의 곱은

$$-2 \cdot 4 = -8 \quad \text{답 ③}$$

15 원 C_1 의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$a=b$$

원 $C_1: x^2 + y^2 + ax + ay = 0$ 에서

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

이므로 원 C_1 을 원점에 대하여 대칭이동한 원 C_2 의 방정식은

$$\left(-x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-y + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

두 원 C_1, C_2 의 중심의 좌표는 각각 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right),$

$\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ 이고, 두 원의 중심 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2a^2} = 2\sqrt{2}, \quad a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0)$$

$$\therefore a+b = a+a = 4 \quad \text{답 4}$$

원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 중심의 x좌표와 y좌표가 같다. 따라서 주어진 원의 방정식에서 x항과 y항의 계수가 서로 같다.

원을 직선에 대하여 대칭이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

16 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 직선 AB는 직선 $2x-y-2=0$, 즉 $y=2x-2$ 와 수직이므로

$$\frac{2-b}{-1-a} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a+2b-3=0 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $\overline{AB}$ 의 중점 $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ 는 직선 $2x-y-2=0$ 위의 점이므로

$$2 \cdot \frac{a-1}{2} - \frac{b+2}{2} - 2 = 0$$

$$\therefore 2a-b-8=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{19}{5}, \quad b = -\frac{2}{5}$$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{19}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ 이다.

$$\text{답 } \left(\frac{19}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

17 직선 AB의 기울기는 $\frac{-1-3}{4-2} = -2$ 이고 직선

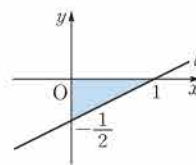
AB와 직선 l은 서로 수직이므로 직선 l의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

또 직선 l은 $\overline{AB}$ 의 중점 (3, 1)을 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y-1 = \frac{1}{2}(x-3) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{답 ①}$$



18 원 $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 1$ 의 중심을 C(-4, 2)라 하고 점 C를 직선 $y=3x+4$ 에 대하여 대칭이동한 점을 D(a, b)라 하면 직선 CD는 직선 $y=3x+4$ 와 수직이므로

$$\frac{b-2}{a+4} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore a+3b=2 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $\overline{CD}$ 의 중점 $\left(\frac{a-4}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ 는 직선 $y=3x+4$ 위의 점이므로

$$\frac{b+2}{2} = 3 \cdot \frac{a-4}{2} + 4$$

$$\therefore 3a-b=6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2, \quad b=0$$

원 $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 직선 $y=3x+4$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

이 원을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-2)^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore (x+2)^2 + y^2 = 1 \quad \text{답 ①}$$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 29쪽

01 주어진 평행이동을 $(x, y) \rightarrow (x+m, y+n)$ 이라 하면

$$1+m=-2, -1+n=3 \quad \therefore m=-3, n=4$$

이 평행이동에 의하여 점 A(a, b)가 점 B(2, 1)로 옮겨지므로

$$a-3=2, b+4=1 \quad \therefore a=5, b=-3$$

또 점 B(2, 1)이 점 C(c, d)로 옮겨지므로

$$2-3=c, 1+4=d \quad \therefore c=-1, d=5$$

따라서 A(5, -3), C(-1, 5)이므로

$$AC = \sqrt{(-1-5)^2 + (5+3)^2} = 10 \quad \text{답 ⑤}$$

02 사각형 OA'CB'이 평행사변형이므로 OC의 중점과 A'B'의 중점이 일치한다.

OC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4}{2}, \frac{-16}{2}\right) \quad \therefore (2, -8)$$

A'(-2+2m, 7-m), B'(10+2m, a-m)이므로

A'B'의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4m+8}{2}, \frac{-2m+a+7}{2}\right) \\ \therefore (2m+4, \frac{-2m+a+7}{2})$$

따라서 $2m+4=2, \frac{-2m+a+7}{2}=-8$ 이므로

$$m=-1, a=-25$$

$$\therefore a+m=-26 \quad \text{답 ①}$$

참고 원점과 점 C(4, -16)을 각각 x축의 방향으로 -2m만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점을 O', C'이라 하면 사각형 O'AC'B도 평행사변형이므로 이를 이용하여 a, m의 값을 구할 수도 있다.

03 점 P가 원점에서 출발하여 x축의 방향으로 a번, y축의 방향으로 b번 이동하였다고 하면 점 P의 좌표는 (a, b)이고, $n=a+b$ 이다.

점 P(a, b)가 원 $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 8$ 위에 있으므로

$$(a-6)^2 + (b-8)^2 = 8$$

이때 a, b는 자연수이므로

$$(a-6)^2 = 4, (b-8)^2 = 4$$

$$a-6 = \pm 2, b-8 = \pm 2$$

$$\therefore a=4 \text{ 또는 } a=8, b=6 \text{ 또는 } b=10$$

즉 원 $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 8$ 위에 놓일 수 있는 점 P는 (4, 6), (4, 10), (8, 6), (8, 10)이므로 서로 다른 n의 값은 10, 14, 18

따라서 구하는 n의 값의 합은

$$10+14+18=42 \quad \text{답 42}$$

04 직선 $x+2y+4=0$ 을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2a-1만큼 평행이동한 직선 m의 방정식은

점 (1, -1)을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 점 (-2, 3)으로 옮겨진다.

마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 두 대각선의 교점은 PR의 중점 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+3}{2}\right)$, 즉 (4, 3)이다.

$$y = |x| \\ = \begin{cases} -x & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$y = |x-p| \\ = \begin{cases} -x+p & (x < p) \\ x-p & (x \geq p) \end{cases} \\ y = |x-q|+1 \\ = \begin{cases} -x+q+1 & (x < q) \\ x-q+1 & (x \geq q) \end{cases} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2} + \frac{p+q+1}{2}\right) \\ = \frac{2p+q+1}{4} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2} + \frac{-p+q+1}{2}\right) \\ = \frac{q+1}{4}$$

$$4+6=10, 4+10=14, \\ 8+6=14, 8+10=18$$

$$(x-a)+2(y-2a+1)+4=0$$

$$\therefore x+2y-5a+6=0$$

직선 $x+2y+4=0$ 위의 점 (-4, 0)과 직선 m 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|-4-5a+6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 4\sqrt{5}, \quad |-5a+2|=20$$

$$-5a+2 = \pm 20 \quad \therefore a = \frac{22}{5} (\because a > 0) \quad \text{답 ④}$$

05 직선 $2x+3y-7=0$ 을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x-a)+3(y-b)-7=0$$

$$\therefore 2x+3y-2a-3b-7=0 \quad \rightarrow ①$$

이 직선이 마름모 PQRS의 넓이를 이등분하므로 마름모의 두 대각선의 교점 (4, 3)을 지난다. $\rightarrow ②$

따라서 $8+9-2a-3b-7=0$ 이므로

$$2a+3b=10 \quad \rightarrow ③$$

답 10

채점 기준	비율
① 직선 $2x+3y-7=0$ 을 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
② ①에서 구한 직선이 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
③ $2a+3b$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

06 $y=|x|$ 의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=|x-p|$ 이고, x축의 방향으로 q만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=|x-q|+1$ 이다.

이때 $0 < p < q$ 이므로 두 교점 A, B가 존재

하려면 $y=|x|$,

$$y=|x-p|,$$

$$y=|x-q|+1 \text{의 그}$$

래프는 위의 그림과 같아야 한다.

점 A는 두 직선 $y=x, y=-x+p$ 의 교점이므로

$$x=-x+p \text{에서}$$

$$2x=p \quad \therefore x=\frac{p}{2}$$

$$\therefore A\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$$

점 B는 두 직선 $y=x-p, y=-x+q+1$ 의 교점이므로 $x-p=-x+q+1$ 에서

$$2x=p+q+1 \quad \therefore x=\frac{p+q+1}{2}$$

$$\therefore B\left(\frac{p+q+1}{2}, \frac{-p+q+1}{2}\right)$$

따라서 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{2p+q+1}{4}, \frac{q+1}{4}\right)$ 이므로

$$\frac{2p+q+1}{4}=2, \frac{q+1}{4}=\frac{9}{8}$$

$$\therefore p = \frac{7}{4}, q = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \frac{q}{p} = \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{7} = 2$$

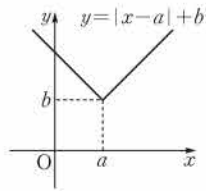
답 2

비밀노트

$$y = |x-a| + b$$

$$= \begin{cases} -x+a+b & (x < a) \\ x-a+b & (x \geq a) \end{cases}$$

이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=a$ 인 점에서 꺾인 모양이고, $y = |x-a| + b$ 는 $x=a$ 일 때 최솟값 b 를 갖는다.



07 $x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0$ 에서

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - 1$$

원의 중심 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$\left(-\frac{a}{2} + 2, -\frac{b}{2} - 3\right)$$

따라서 $-\frac{a}{2} + 2 = 1, -\frac{b}{2} - 3 = -1$ 이므로

$$a = 2, b = -4$$

이때 원을 평행이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$$r = \sqrt{\frac{2^2}{4} + \frac{(-4)^2}{4} - 1} = 2$$

$$\therefore a + b + r = 0$$

답 0

채점 기준	비율
1 평행이동한 원의 중심의 좌표를 a, b 를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
2 a, b 의 값을 구할 수 있다.	30%
3 r 의 값을 구할 수 있다.	30%
4 $a + b + r$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

08 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \quad \dots\dots ①$$

이 원이 두 직선 $y = -x + 4, y = -x + 8$ 에 동시에 접하고, 두 직선은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 원의 지름의 길이와 같다.

즉 직선 $y = -x + 4$ 위의 점 $(0, 4)$ 와 직선 $x + y - 8 = 0$ 사이의 거리가 원의 지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2r \quad \therefore r = \sqrt{2}$$

또 원 ①의 중심 $(a, 0)$ 과 직선 $x + y - 8 = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$ 와 같으므로

$$\frac{|a-8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}, \quad |a-8| = 2$$

$$a-8 = \pm 2 \quad \therefore a = 6 \text{ 또는 } a = 10$$

이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점에서 밑변에 그은 수선은 밑변의 중점을 지낸다.

두 원 C, C_1 의 두 교점을 R, S라 하면 RS는 PQ와 y 축에 대하여 대칭이므로 사각형 RSQP는 직사각형이다.

중심의 좌표: $(a, 0)$, 반지름의 길이: r

$$y = -x + 8 \text{에서}$$

$$x + y - 8 = 0$$

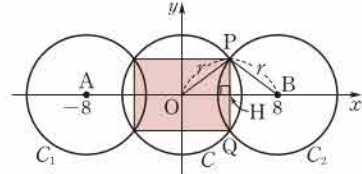
$a = -2, a = 2$ 를 $b = a^2 - 3a - 4$ 에 각각 대입하여 b 의 값을 구한다.

이때 두 직선 $y = -x + 4, y = -x + 8$ 의 x 절편은 각각 4, 8이고 원 ①이 두 직선에 동시에 접하려면 $4 < a < 8$ 이어야 하므로 $a = 6$

$$\therefore ar = 6\sqrt{2}$$

답 ③

09 두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 A, B라 하면 $A(-8, 0), B(8, 0)$ 이고 세 원 C, C_1, C_2 의 반지름의 길이는 모두 r 이다.



위의 그림과 같이 두 원 C, C_2 의 두 교점을 P, Q라 하고 PQ가 x 축과 만나는 점을 H라 하면

$$\overline{OH} \perp \overline{PQ}, \overline{PH} = \overline{QH}$$

이때 $\triangle POB$ 는 $\overline{OP} = \overline{BP} = r$ 인 이등변삼각형이므로 점 H는 $\overline{OB}$ 의 중점이다.

따라서 $\overline{OH} = \overline{BH} = 4$ 이므로 색칠한 직사각형의 넓이는

$$2\overline{OH} \cdot \overline{PQ} = 2 \cdot 4 \cdot \overline{PQ} = 48 \quad \therefore \overline{PQ} = 6$$

한편 점 H는 $\overline{PQ}$ 의 중점이므로

$$\overline{PH} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

따라서 직사각형 POH에서

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

답 ④

다른 풀이 원 C_1 의 방정식은 $(x+8)^2 + y^2 = r^2$

원 C_2 의 방정식은 $(x-8)^2 + y^2 = r^2$

두 원 C, C_1 의 교점의 좌표는

$$(x+8)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \text{에서}$$

$$16x + 64 = 0 \quad \therefore x = -4$$

$$\therefore (-4, \sqrt{r^2 - 16}), (-4, -\sqrt{r^2 - 16})$$

두 원 C, C_2 의 교점의 좌표는

$$(x-8)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \text{에서}$$

$$-16x + 64 = 0 \quad \therefore x = 4$$

$$\therefore (4, \sqrt{r^2 - 16}), (4, -\sqrt{r^2 - 16})$$

이때 직사각형의 넓이가 48이므로

$$8 \cdot 2\sqrt{r^2 - 16} = 48, \quad r^2 = 25 \quad \therefore r = 5 (\because r > 0)$$

10 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는 $(-a, -b)$

이때 두 점 $P(a, b), Q(-a, -b)$ 는 모두 포물선

$$y = x^2 - 3x - 4 \text{ 위의 점이므로}$$

$$b = a^2 - 3a - 4, -b = a^2 + 3a - 4$$

답 ①

즉 $a^2 - 3a - 4 = -a^2 - 3a + 4$ 이므로

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = \pm 2$$

따라서 $a = -2, b = 6$ 또는 $a = 2, b = -6$ 이므로

$$P(-2, 6), Q(2, -6)$$

$$\text{또는 } P(2, -6), Q(-2, 6)$$

답 ②

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(2+2)^2 + (-6-6)^2} = 4\sqrt{10}$$

답 ③

답 4√10

채점 기준	비율
① a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
② 두 점 P, Q의 좌표를 구할 수 있다.	40%
③ PQ의 길이를 구할 수 있다.	20%

- 11** 점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a, -b)$
 이 점을 다시 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(b, -a)$
 이 점이 제2사분면 위의 점 (c, d) 와 일치하므로
 $b < 0, -a > 0, b=c, -a=d$
 $\therefore a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$
 $\therefore a, b$ 는 모두 음수이다.
 $\therefore a < 0, d > 0$ 이므로 $ad < 0$
 $\therefore a+c < 0, bd < 0$ 이므로 점 $(a+c, bd)$ 는 제3사분면 위의 점이다.
 이상에서 옳은 것은 $\neg, \supset$ 이다. 답 ⑤

- 12** $R(p, q)$ 라 하고 점 R를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 R_1 , 점 R를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 R_2 라 하면

$$R_1(-p, q), R_2(q, p)$$

$$\overline{PR} = \overline{PR_1}, \overline{QR} = \overline{QR_2}$$

므로

$$\begin{aligned} \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{PR} &= \overline{PQ} + \overline{QR_2} + \overline{PR_1} \\ &\geq \overline{R_1R_2} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \overline{R_1R_2} &= \sqrt{(q+p)^2 + (p-q)^2} \\ &= \sqrt{2(p^2 + q^2)} \\ &= \sqrt{2} \overline{OR} \end{aligned}$$

..... ㉠

이므로 $\overline{OR}$ 의 길이가 최소일 때 $\triangle PQR$ 의 둘레의 길이도 최소이다.

원 $(x-4)^2 + (y-8)^2 = 5$ 의 중심을 $C(4, 8)$ 이라 하면 $\overline{OC}$ 와 원의 교점이 R일 때 $\overline{OR}$ 의 길이가 최소이다.

따라서 $\overline{OR}$ 의 길이의 최솟값은

$$\overline{OR} = \overline{OC} - \sqrt{5} = \sqrt{4^2 + 8^2} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

이므로 $\triangle PQR$ 의 둘레의 길이의 최솟값은 ㉠에서

$$\sqrt{2} \overline{OR} = 3\sqrt{10} \quad \text{답 } 3\sqrt{10}$$

참고 직선 OC의 방정식은 $y=2x$ 이므로 $y=2x$ 를

$$(x-4)^2 + (y-8)^2 = 5 \text{에 대입하면}$$

$$(x-4)^2 + (2x-8)^2 = 5, \quad (x-4)^2 = 1$$

$$x-4 = \pm 1 \quad \therefore x=3 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 $\overline{OR}$ 의 길이가 최소일 때 점 R의 좌표는 $(3, 6)$ 이다.

- 13** 함수 $y=x^2+2x+k$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-1=x^2+2x+k$$

$$\therefore y=x^2+2x+k+1$$

..... ①

이 그래프를 다시 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=x^2+2x+k+1$$

$$\therefore y=-x^2-2x-k-1$$

$$\therefore f(x)=-x^2-2x-k-1$$

$$=-(x+1)^2-k$$

..... ②

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최댓값 $-k$ 를 가지므로

$$-k=5 \quad \therefore k=-5$$

..... ③

답 -5

채점 기준	비율
① 함수 $y=x^2+2x+k$ 의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40%
② ①에서 구한 그래프를 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40%
③ k 의 값을 구할 수 있다.	20%

- 14** 원 $x^2+y^2+2x-4y-5=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2+y^2-2x+4y-5=0$$

이 원을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2+y^2+4x-2y-5=0$$

$y=0$ 을 이 식에 대입하면

$$x^2+4x-5=0, \quad (x+5)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(-5, 0), (1, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = |1 - (-5)| = 6$$

..... ⑥

- 15** 점 D의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면

$$A(-a, b), B(-a, -b), C(a, -b)$$

$$\overline{AD}=2a, \overline{AB}=2b \text{이므로 조건 (가)에서}$$

$$2b > 2a > 4 \quad \therefore b > a > 2$$

방정식 $f(x-3, y)=0$ 이 나타내는 도형은 직사각형

ABCD를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

네 점 A, B, C, D를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점을 각각 A', B', C', D' 이라 하면

$$A'(-a+3, b), B'(-a+3, -b),$$

$$C'(a+3, -b), D'(a+3, b)$$

이때 $\overline{AD}=2a > 4$ 이므로 오른

쪽 그림에서

$$\overline{A'D} = \overline{AD} - 3 = 2a - 3$$

따라서 두 직사각형 ABCD,

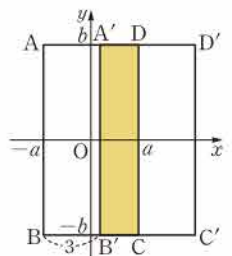
$A'B'C'D'$ 의 내부의 공통부

분의 넓이는 조건 (나)에서

$$(2a-3) \cdot 2b = 20$$

$$\therefore b(2a-3) = 10$$

..... ㉡



또 방정식 $f(y, x)=0$ 이 나타내는 도형은 직사각형 ABCD를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것이므로 네 점 A, B, C, D를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A'', B'', C'', D'' 이라 하면

$$A''(b, -a), B''(-b, -a),$$

$$C''(-b, a), D''(b, a)$$

따라서 두 직사각형

ABCD, $A''B''C''D''$ 의 내부의 공통부분은 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2a인 정사각형이므로 조건 (타)에서

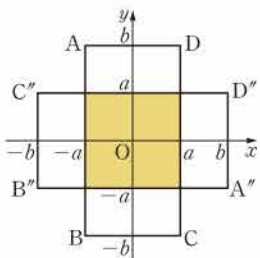
$$(2a)^2=25$$

$$a^2=\frac{25}{4} \quad \therefore a=\frac{5}{2} (\because a>0)$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } 2b=10 \quad \therefore b=5$$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$4(a+b)=4\left(\frac{5}{2}+5\right)=30 \quad \text{답 ②}$$



①-③을 하면

$$2b=2 \quad \therefore b=1$$

$b=1$ 을 ①에 대입하면

$$a-1+c=1$$

$$\therefore c=2-a$$

또 PQ의 중점 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right)$ 는 직선 $x+y=2$ 위의 점 이므로

$$\frac{a+b}{2} + \frac{1+c}{2} = 2$$

$$\therefore a+b+c=3$$

..... ①

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } b=1, c=2-a$$

$$\therefore Q(1, 2-a)$$

..... ②

한편 점 R의 좌표를 (d, e) 라 하면 PR의 중점은 점 $(1, 1)$ 이므로

$$\frac{a+d}{2}=1, \frac{1+e}{2}=1 \quad \therefore d=2-a, e=1$$

$$\therefore R(2-a, 1)$$

..... ③

오른쪽 그림에서 $\triangle PQR$ 의

넓이는

$$\frac{1}{2}(2-a-a)(2-a-1)$$

$$=(a-1)^2$$

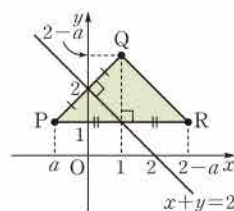
이므로

$$(a-1)^2=4, \quad a-1=\pm 2$$

$$\therefore a=-1 (\because a<0)$$

..... ④

답 -1



16 직선 l의 방정식은 $y+2=m(x-5)$

$$\therefore y=mx-5m-2 \quad \text{..... } \textcircled{1}$$

직선 l 위의 점 (x, y) 를 점 $(2, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 (x', y') 이라 하면

$$\frac{x+x'}{2}=2, \frac{y+y'}{2}=1$$

$$\therefore x=4-x', y=2-y'$$

이것을 ①에 대입하면

$$2-y'=m(4-x')-5m-2$$

$$\therefore y'=mx'+m+4$$

따라서 점 (x', y') 은 직선 $y=mx+m+4$ 위의 점이므로 직선 l을 점 $(2, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=mx+m+4$ 이다.

이 직선을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l'의 방정식은

$$-y=mx+m+4$$

$$\therefore y=-mx-m-4$$

이때 직선 l'이 점 A(5, -2)를 지나려면

$$-2=-5m-m-4 \quad \therefore m=-\frac{1}{3}$$

또 두 직선 l, l'이 서로 수직이려면

$$m \cdot (-m)=-1 \quad \therefore m=-1 (\because m<0)$$

따라서 $p=-\frac{1}{3}, q=-1$ 이므로

$$p+q=-\frac{4}{3} \quad \text{답 - } \frac{4}{3}$$

17 점 Q의 좌표를 (b, c) 라 하면 직선 PQ는 직선

$x+y=2$, 즉 $y=-x+2$ 와 수직이므로

$$\frac{c-1}{b-a}=1 \quad \therefore a-b+c=1 \quad \text{..... } \textcircled{1}$$

두 점 $(x, y), (x', y')$ 이 점 $(2, 1)$ 에 대하여 대칭이므로 두 점을 잇는 선분의 중점의 좌표는 $(2, 1)$ 이다.

점 A'의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{a+2}{2}=-1,$$

$$\frac{b+0}{2}=0$$

$$\therefore a=-4, b=0$$

원의 반지름의 길이

$$=\sqrt{(2+4)^2+8^2}-2$$

$$=10-2=8$$

따라서 $\overline{AQ}+\overline{QP}$ 의 최솟값은 8이다.

답 ③

18 오른쪽 그림과 같이 점 A를 직선 $x=-1$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하고 원의 중심을 C라 하면

$$A'(-4, 0), C(2, 8)$$

$$\overline{AQ}+\overline{QP}=\overline{A'Q}+\overline{QP} \text{이므로}$$

$\overline{AQ}+\overline{QP}$ 의 값이 최소일 때는

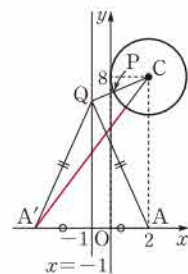
$\overline{A'C}$ 가 직선 $x=-1$ 과 만나는 점

이 Q, 원과 만나는 점이 P일 때이다.

$$\therefore \overline{AQ}+\overline{QP} \geq \overline{A'C}-2$$

$$=\sqrt{(2+4)^2+8^2}-2$$

$$=10-2=8$$



내신 + 수능 1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 32쪽

01 점 P가 점 A(7, 7)에서 출발하여 이동한 점을 차례대로 나열하면

$$(6, 7), (5, 7), (4, 7), (3, 7), (3, 6)$$

따라서 점 B의 좌표는 (3, 6)이고, 점 P가 이동한 횟수는 5이다.

답 ②

02 점 B의 좌표는 (0, 4)이므로 점 A의 y좌표는 2이다.

점 A의 좌표를 (a, 2) (a > 0)라 하면 점 C의 좌표는 (2, a)

이때 점 C(2, a)는 직선 y=kx 위의 점이므로

$$a=2k$$

즉 A(2k, 2)에서 $\overline{OA}=4$ 이므로

$$\sqrt{(2k)^2+2^2}=4$$

$$\sqrt{k^2+1}=2, \quad k^2=3$$

$$\therefore k=\sqrt{3} \quad (\because k>1)$$

따라서 A(2√3, 2)이므로 직선 AB의 방정식은

$$y=\frac{4-2}{0-2\sqrt{3}}x+4$$

$$\therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+4$$

선분 AB와 직선 y=√3x의 교점의 x좌표를 구하면

$$\sqrt{3}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+4$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}x=4 \quad \therefore x=\sqrt{3}$$

$$\therefore y=\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}=3$$

답 3

03 원 C₁의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-7)^2=8$$

원 C₁을 직선 y=-x에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-y-3)^2+(-x-7)^2=8$$

$$\therefore (x+7)^2+(y+3)^2=8$$

이 원을 다시 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 C₂의 방정식은

$$(x-a+7)^2+(y-a+3)^2=8$$

오른쪽 그림과 같이 두 원 C₁, C₂

의 중심을 각각 C₁, C₂라 하고 두 직선 AB, C₁C₂의 교점을 H라 하면 직선 C₁C₂는 $\overline{AB}$ 를 수직이등분한다.

$$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{6} \text{ 이므로}$$

직각삼각형 AHC₁에서

$$\overline{C_1H}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}$$

마찬가지로 직각삼각형 AHC₂에서

$$\overline{C_2H}=\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{C_1C_2}=2\sqrt{2}$ 이고 C₁(3, 7), C₂(a-7, a-3)이므로

$$\sqrt{(a-7-3)^2+(a-3-7)^2}=2\sqrt{2}$$

$$2(a-10)^2=8, \quad (a-10)^2=4$$

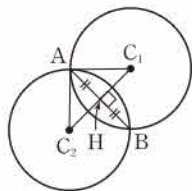
$$a-10=\pm 2$$

$$\therefore a=8 \text{ 또는 } a=12$$

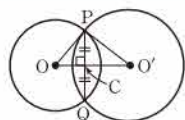
따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$$8+12=20$$

답 20

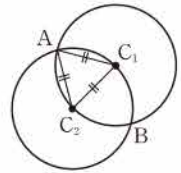


$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$$

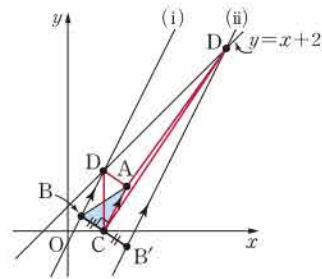


두 원 O, O'의 두 교점을 P, Q라 할 때,
 $\overline{PQ} \perp \overline{OO'}$,
 $\overline{PC}=\overline{QC}$

참고 $\overline{C_1C_2}=2\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{C_1C_2}$ 의 길이가 두 원 C₁, C₂의 반지름의 길이와 같다. 즉 두 원 C₁, C₂는 오른쪽 그림과 같이 서로의 중심을 지난다.



04 두 삼각형 ABC, ADC의 넓이가 같으려면 삼각형 ABC에서 밑변을 변 AC라 할 때의 높이, 즉 점 B와 직선 AC 사이의 거리와 점 D와 직선 AC 사이의 거리가 같아야 하므로 점 D의 위치는 다음의 두 가지 경우가 있다.



(i) 점 D가 두 직선 AC, BD가 평행하도록 하는 직선 y=x+2 위의 점인 경우

직선 AC의 기울기는 $\frac{0-4}{3-5}=2$ 이므로 점 B(1, 1)을

지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-1=2(x-1)$$

$$\therefore y=2x-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 직선 ①과 직선 y=x+2의 교점 D의 x좌표는 2x-1=x+2에서

$$x=3$$

(ii) 점 B를 직선 AC에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 점 D가 두 직선 AC, B'D가 평행하도록 하는 직선 y=x+2 위의 점인 경우

점 B(1, 1)을 직선 AC에 대하여 대칭이동한 점을 B'(a, b)라 하면 $\overline{AC} \perp \overline{BB'}$ 에서

$$\frac{b-1}{a-1} \cdot 2 = -1$$

$$\therefore a+2b=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 직선 AC의 방정식은 y=2(x-3), 즉 y=2x-6 이고 $\overline{BB'}$ 의 중점은 직선 AC 위의 점이므로

$$\frac{1+b}{2}=2 \cdot \frac{1+a}{2}-6$$

$$\therefore 2a-b=11 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②, ③을 연립하여 풀면

$$a=5, b=-1$$

점 B'(5, -1)을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-(-1)=2(x-5)$$

$$\therefore y=2x-11 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

따라서 직선 ④과 직선 y=x+2의 교점 D의 x좌표는 2x-11=x+2에서

$$x=13$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 점 D의 x좌표의 합은

$$3+13=16$$

답 16

05 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$ 가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\overline{OA}=\overline{OD}, \overline{OB}=\overline{OC}$$

또 원점 O가 $\overline{AC}$ 를 2:1로 내분하는 점이므로 $\overline{OC}=t$ 라 하면

$$\overline{OA}=2t$$

□ADCB의 넓이가 18이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 3t \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 3t \cdot 2t = 18$$

$$t^2=4 \quad \therefore t=2 (\because t>0)$$

따라서 $A(-4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$, $D(0, -4)$ 이

므로 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$ 의 방정식은 각각

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1, \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 2, y = 2x - 4$$

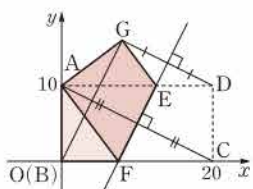
따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 2$, $d = -4$ 이므로

$$a+b+c+d = \frac{1}{2}$$

답 ①

06 오른쪽 그림과 같이 두

직선 BF, AB를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이고, 두 점 $A(0, 10)$, $C(20, 0)$ 은 직선 EF에 대하여 대칭이다.



직선 AC의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 직선 AC와 직선 EF는 서로 수직이므로 직선 EF의 기울기는 2이다.

또 $\overline{AC}$ 의 중점 $(10, 5)$ 는 직선 EF 위의 점이므로 직선 EF의 방정식은

$$y-5=2(x-10) \quad \therefore y=2x-15$$

이때 $G(a, b)$ 라 하면 두 점 $D(20, 10)$, $G(a, b)$ 는 직선 $y=2x-15$ 에 대하여 대칭이므로 직선 DG의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore \frac{b-10}{a-20} = -\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$a+2b=40 \quad \dots\dots ㉑$$

또 $\overline{DG}$ 의 중점 $(\frac{20+a}{2}, \frac{10+b}{2})$ 는 직선 $y=2x-15$ 위의 점이므로

$$\frac{10+b}{2} = 2 \cdot \frac{20+a}{2} - 15$$

$$\therefore 2a-b=0 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a=8, b=16$$

따라서 $G(8, 16)$ 이므로

$$\overline{BG} = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5}$$

답 ④

직선 $y=2x-1$ 과 직선 AC의 교점을 M이라 하면

$$\triangle APM \cong \triangle CPM \quad (\text{SAS 합동})$$

이므로 $\overline{PA}=\overline{PC}$

마찬가지 방법으로

$$\overline{PB}=\overline{PD}$$

$$\overline{OD}=\overline{OA}=2t,$$

$$\overline{OB}=\overline{OC}=t$$

$$\triangle ABC + \triangle ACD = \square ADCB$$

이등변삼각형의 밑변의 수직이등분선은 이등변삼각형의 꼭지각을 지난다.

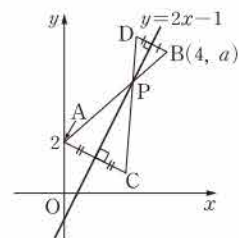
내신+수능

1등급을 굳히는 실전 마무리 문제

본책 33쪽

01 [전략] 두 점 S, T가 직선 l에 대하여 대칭이면 직선 l이 $\overline{ST}$ 의 수직이등분선임을 이용한다.

풀이 두 삼각형 APC, BPD는 각각 $\overline{PA}=\overline{PC}$, $\overline{PB}=\overline{PD}$ 인 이등변삼각형이고 직선 $y=2x-1$ 이 이 두 삼각형의 밑변의 수직이등분선이므로 직선 $y=2x-1$ 은 점 P를 지난다.



이때 두 직선 AC, BD는 직선 $y=2x-1$ 과 각각 수직이므로 두 직선 AC, BD는 평행하다.

따라서 $\triangle APC \sim \triangle BPD$ 이고 두 삼각형 APC, BPD의 넓이의 비가 4:1이므로 두 삼각형의 닮음비는 2:1이다.

$$\therefore \overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

즉 점 P는 $\overline{AB}$ 를 2:1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 0}{2+1}, \frac{2 \cdot a + 1 \cdot 2}{2+1} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{8}{3}, \frac{2a+2}{3} \right)$$

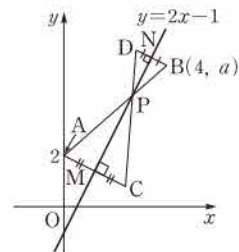
이때 점 P는 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{2a+2}{3} = 2 \cdot \frac{8}{3} - 1$$

$$\therefore a = \frac{11}{2}$$

답 ④

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2x-1$ 과 두 직선 AC, BD의 교점을 각각 M, N이라 하면



$\triangle APM \sim \triangle BPN$ 이고 두 삼각형 APM, BPN의 넓이의 비가 4:1이므로 두 삼각형의 닮음비는 2:1이다.

따라서 $\overline{AM} : \overline{BN} = 2 : 1$ 이고, $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ 의 길이는 각각 두 점 A, B와 직선 $y=2x-1$, 즉 $2x-y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-2-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} : \frac{|8-a-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 2 : 1$$

$$\frac{2|7-a|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$|7-a| = \frac{3}{2}$$

그런데 $a < 7$ 에서 $7-a > 0$ 이므로

$$7-a = \frac{3}{2} \quad \therefore a = \frac{11}{2}$$

02 [전략] 직선 l이 x축, y축과 만나는 두 점과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$ 임을 이용한다.

풀이 직선 l 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ 라 하면 $\triangle OAB$ 의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$ 이므로

$$\frac{0+a+0}{3}=2, \frac{0+0+b}{3}=1$$

$$\therefore a=6, b=3$$

따라서 직선 l 의 기울기는

$$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$$

답 ①

03 **전략** 점 A 를 지나고 직선 l 과 수직인 직선의 방정식을 k 를 이용하여 나타낸다.

풀이 $kx+y-2k+1=0$ 에서

$$y = -kx + 2k - 1$$

$x=0$ 일 때 $y=2k-1$ 이므로

$$A(0, 2k-1)$$

또 직선 l 의 기울기는 $-k$ 이므로 점 A 를 지나고 직선 l 과 수직인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{k}x + 2k - 1 \quad \dots\dots ①$$

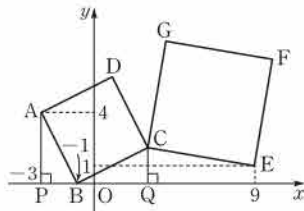
①에서 $y=0$ 일 때 $0 = \frac{1}{k}x + 2k - 1$ 이므로 직선 ①의 x 절편은

$$\begin{aligned} x &= -k(2k-1) \\ &= -2k^2 + k \\ &= -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

따라서 $k = \frac{1}{4}$ 일 때 직선 ①의 x 절편은 최댓값 $\frac{1}{8}$ 을 갖는다. 답 ②

04 **전략** 먼저 두 점 A, C 에서 x 축에 수선의 발을 내려 합동인 두 삼각형을 찾은 후 점 C 의 좌표를 구한다.

풀이



위의 그림과 같이 두 점 A, C 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q 라 하면

$$\triangle APB \cong \triangle CQC \text{ (RHA 합동)}$$

이므로

$$\overline{BQ} = \overline{AP} = 4, \overline{CQ} = \overline{BP} = 2$$

따라서 점 C 의 좌표는 $(3, 2)$

점 D 의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치하므로

$$\frac{-3+3}{2} = \frac{-1+a}{2}, \frac{4+2}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\therefore a=1, b=6$$

$$\therefore D(1, 6)$$

한 변의 길이가 a 인 정삼각형에서

$$\textcircled{1} \text{ 높이: } \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\textcircled{2} \text{ 넓이: } \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\begin{aligned} \angle APB &= \angle CQC = 90^\circ, \\ \overline{AB} &= \overline{BC}, \\ \angle PAB &= 90^\circ - \angle ABP \\ &= \angle QCB \end{aligned}$$

이므로

$$\triangle APB \cong \triangle CQC \text{ (RHA 합동)}$$

이때 점 G 의 좌표를 (c, d) 라 하면 두 직선 CE, CG 는 서로 수직이고, 직선 CE 의 기울기는 $\frac{1-2}{9-3} = -\frac{1}{6}$ 이므로 직선 CG 의 기울기는 6이다.

$$\text{즉 } \frac{d-2}{c-3} = 6 \text{ 이므로}$$

$$d = 6c - 16 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{한편 } \overline{CG} = \overline{CE} = \sqrt{(9-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{37} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{(c-3)^2 + (d-2)^2} = \sqrt{37}$$

①을 위의 식에 대입하여 정리하면

$$(c-3)^2 + 36(c-3)^2 = 37$$

$$(c-3)^2 = 1, \quad c-3 = \pm 1$$

$$\therefore c=4 \quad (\because c>3)$$

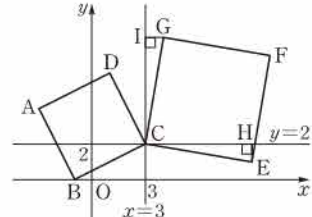
①에서 $d=8$ 이므로 $G(4, 8)$

따라서 직선 DG 의 기울기는

$$\frac{8-6}{4-1} = \frac{2}{3}$$

답 ②

다른 풀이



위의 그림과 같이 점 E 에서 직선 $y=2$ 에 내린 수선의 발을 H , 점 G 에서 직선 $x=3$ 에 내린 수선의 발을 I 라 하면

$$\triangle CEH \cong \triangle CGI \text{ (RHA 합동)}$$

이때 $\overline{CI} = \overline{CH} = 6$, $\overline{GI} = \overline{EH} = 1$ 이므로 점 G 의 좌표는 $(3+1, 2+6)$, 즉 $(4, 8)$

05 **전략** 정삼각형의 넓이가 최소일 때는 한 변의 길이가 최소일 때임을 이용한다.

풀이 정삼각형 ABC 의 넓이가 최소이려면 $\overline{AB}$ 의 길이가 최소이어야 한다.

두 직선 $y=x+3, y=x-1$ 은 평행하고 두 점 A, B 는 각각 두 직선 위의 점이므로 $\overline{AB}$ 의 길이의 최솟값은 두 직선 $y=x+3, y=x-1$ 사이의 거리와 같다.

직선 $y=x+3$ 위의 한 점 $(0, 3)$ 과 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이의 최솟값은

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$$

답 ③

06 **전략** 직선 l 이 두 원의 중심을 잇는 선분의 중점을 지남을 이용한다.

풀이 원 C_2 의 중심을 D 라 하고 $\overline{OD}$ 의 중점을 M 이라 하면 점 M 의 좌표는

$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0-2}{2}\right) \therefore (1, -1)$$

직선 $y=3x-4$ 는 점 M을 지나므로 구하는 넓이는 오른쪽 그림에서 $\overline{OD}$ 와 두 호 $\overline{AO}$, $\overline{AD}$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

이때 두 원 C_1, C_2 는 서로의 중심을 지나므로 삼각형 AOD는 정삼각형이다.
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & (\text{부채꼴 AOD의 넓이}) + (\text{부채꼴 ADO의 넓이}) \\ & \quad - \triangle AOD \\ &= 2 \left[\pi \cdot (\sqrt{8})^2 \cdot \frac{60}{360} \right] - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sqrt{8})^2 \\ &= \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

07 [전략] 주어진 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 꼴로 변형한 후 반지름의 길이를 k 에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] $x^2 + y^2 + 2kx + 2(k-1)y + k = 0$ 에서
 $(x+k)^2 + \{y+(k-1)\}^2 = 2k^2 - 3k + 1$
..... ㉠

원의 반지름의 길이는 0보다 커야 하므로

$$\begin{aligned} 2k^2 - 3k + 1 > 0, \quad (2k-1)(k-1) > 0 \\ \therefore k < \frac{1}{2} \text{ 또는 } k > 1 \end{aligned} \quad \text{..... ㉡}$$

원 ㉠이 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 보다 작은 원을 나타내려면

$$\begin{aligned} 2k^2 - 3k + 1 < 10, \quad 2k^2 - 3k - 9 < 0 \\ (2k+3)(k-3) < 0 \\ \therefore -\frac{3}{2} < k < 3 \end{aligned} \quad \text{..... ㉢}$$

따라서 ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$-\frac{3}{2} < k < \frac{1}{2} \text{ 또는 } 1 < k < 3$$

이므로 구하는 정수 k 는 -1, 0, 2의 3개이다. **답 ②**

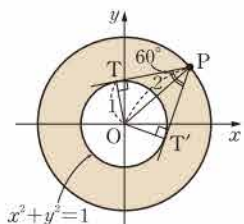
08 [전략] $\angle TPT' = 60^\circ$ 일 때의 점 P의 자취를 그려 본다.

[풀이] 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심을 O라 할 때, 점 P에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 60° 이면 $\triangle PTO$ 는 $\angle OTP = 90^\circ$, $\angle OPT = 30^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때 $\sin 30^\circ = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP}}$ 이므로

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\overline{OP}} \quad \therefore \overline{OP} = 2$$

즉 $\angle TPT' = 60^\circ$ 일 때, 점 P는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있으므로 $\angle TPT'$ 의 크기가 60° 이상일 때, 점 P가 존재하는 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



$x=1, y=-1$ 을
 $y=3x-4$ 에 대입하면 등
식이 성립하므로 직선
 $y=3x-4$ 는 점 $(1, -1)$
을 지난다.

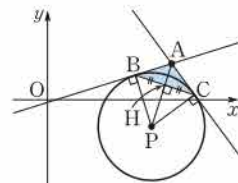
따라서 구하는 넓이는

$$4\pi - \pi = 3\pi$$

답 ②

09 [전략] 원의 중심을 P라 하고 $\overline{AP}$ 를 그은 후 닮음인 두 직각삼각형을 찾아 닮음비를 이용한다.

[풀이] 오른쪽 그림과 같이
원 $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$ 의
중심을 P라 하고 $\overline{AP}$, $\overline{BC}$ 의
교점을 H라 하면 $\overline{BH} = \overline{CH}$
이므로



$$\overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$\overline{BP} = 3$ 이므로 직각삼각형 BPH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$$

이때 $\triangle BPH \sim \triangle ABH$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{BH} : \overline{AH} = \overline{PH} : \overline{BH}$$

$$\sqrt{2} : \overline{AH} = \sqrt{7} : \sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{AH} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{2\sqrt{14}}{7} \quad \text{답 ②}$$

10 [전략] 공의 그림자가 나타내는 도형은 원임을 이용한다.

[풀이] 전등을 점 A, 공이 바닥과 닿은 점을 점 O라 하고, 공의 그림자인 원의 한 지름의 양 끝 점을 B, C라 하자.

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축으로 하고 점 O를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 O는 원점이고, 점 A는 y 축 위의 점이다. 1m를 1로 생각하면 $A(0, 10)$ 이고 공의 중심의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 직선 AB의 방정식을



$$y = mx + 10 \quad (m > 0)$$

이라 하면 점 $(0, 1)$ 에서 직선 $y = mx + 10$, 즉 $mx - y + 10 = 0$ 까지의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 한다.

$$\text{즉 } \frac{|-1+10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{m^2+1} = 9, \quad m^2 = 80$$

$$\therefore m = 4\sqrt{5} \quad (\because m > 0)$$

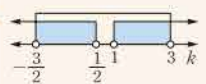
따라서 직선 AB의 방정식은 $y = 4\sqrt{5}x + 10$ 이므로 점 B의 x 좌표는

$$0 = 4\sqrt{5}x + 10 \quad \therefore x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

따라서 공의 그림자는 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m인 원이므로 구하는 넓이는

$$\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}\pi \text{ (m}^2\text{)} \quad \text{답 ②}$$

빛이 수직으로 공의 중심을 지나므로 그림자는 원이다.



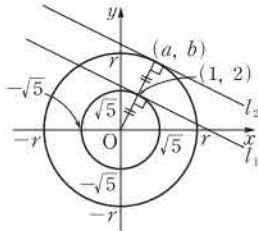
$\angle TPT' = 60^\circ$ 이므로
 $\angle OPT = \angle OPT' = 30^\circ$

1등 비밀노트

좌표를 이용하여 활용 문제를 해결할 때는 먼저 도형의 한 변이 좌표축 위에 오도록 좌표평면을 잡은 후 도형의 꼭지점에 해당하는 점의 좌표를 구하거나 미지수를 사용하여 점의 좌표를 나타내면 쉽게 해결할 수 있다.

11 **전략** 원점을 중심으로 하는 두 원의 접선 l_1, l_2 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 임을 이용하여 r 의 값을 구한다.

풀이 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 점 (a, b) 는 제1사분면 위에 있고 $r = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ 이다.



따라서 점 (a, b) 는 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 20 \quad \dots\dots ㉠$$

한편 두 직선 l_1, l_2 의 방정식은 각각

$$x + 2y = 5, \quad ax + by = 20$$

이고, 두 직선이 평행하므로

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{b} \neq \frac{5}{20} \\ \therefore b = 2a \quad (\text{단, } a \neq 0) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2 + 4a^2 = 20$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

따라서 ㉡에서 $b = 4$ 이므로

$$a + b = 6 \quad \text{답 ㉡}$$

12 **전략** 원을 대칭이동한 후 평행이동한 원의 방정식을 구하고, 그 원이 x 축과 y 축에 접할 때의 중심의 좌표의 조건을 이용한다.

풀이 원 $(x-a)^2 + (y+3)^2 = 4$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x-a)^2 + (-y+3)^2 = 4$
 $\therefore (x-a)^2 + (y-3)^2 = 4$

이 원을 다시 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x-a)^2 + (y+1-3)^2 = 4$
 $\therefore (x-a)^2 + (y-2)^2 = 4$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 이 원이 x 축과 y 축에 모두 접하려면

$$|a| = 2 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0) \quad \text{답 ㉡}$$

13 **전략** 보기에 주어진 식이 원 $f(x, y) = 0$ 을 어떻게 이동한 원의 방정식인지 알아본다.

풀이 주어진 원이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 이 원은 세 점 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ 을 지난다. 이때 $\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 원 $f(x, y) = 0$ 은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

ㄱ. 주어진 원을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하므로

$$f(y, x) = 0$$

원 $f(x, y) = 0$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $f(x+1, y+1) = 0$
 이 원을 다시 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $f(-y+1, -x+1) = 0$

$x+y=4$ 에 x 대신 y, y 대신 x 를 대입하면
 $y+x=4$

점 (a, b) 는 제1사분면 위의 점이므로
 $a > 0, b > 0$

$y=x$ 를 $x+y=4$ 에 대입하면
 $2x=4 \quad \therefore x=2$
 따라서 점 D의 좌표는 $(2, 2)$

지름의 양 끝 점과 원 위의 한 점을 꼭지점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이다.

ㄴ. 주어진 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하지 않으므로

$$f(-x, -y) \neq 0$$

ㄷ. 주어진 원을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 후 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하므로

$$f(1-y, 1-x) = 0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㉢

14 **전략** 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x) = 0$ 임을 이용한다.

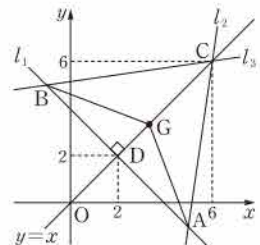
풀이 직선 $l_1: x+y=4$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, 두 직선 $l_2: px+qy=6$, $l_3: qx+py=6$ 도 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

또 직선 $l_2: px+qy=6$ 의

x 절편, y 절편은 각각 $\frac{6}{p}$,

$\frac{6}{q}$ 이고 $\frac{6}{p} > 0, \frac{6}{q} < 0$ 이므로

두 직선 l_2, l_3 은 오른쪽 그림과 같다.



한편 점 C는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $C(k, k)$ 라 하면

$$pk + qk = 6, \quad k(p+q) = 6$$

$$\therefore k = 6 \quad (\because p+q=1)$$

$$\therefore C(6, 6)$$

두 직선 $x+y=4, y=x$ 의 교점을 D라 하면 점 D의 좌표는 $(2, 2)$ 이고 점 D는 $\overline{AB}$ 의 중점이다.

이때 $CD = \sqrt{(6-2)^2 + (6-2)^2} = 4\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{CD} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$\triangle GAB$ 의 넓이가 8이므로 $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{GD} = 8$

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} = 8 \quad \therefore \overline{AB} = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 3\sqrt{2}$$

$A(a, 4-a)$ ($a > 2$)라 하면 두 점 A, D 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(2-a)^2 + \{2-(4-a)\}^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}|a-2| = 3\sqrt{2}, \quad |a-2| = 3$$

$$a-2 = \pm 3 \quad \therefore a = 5 \quad (\because a > 2)$$

$$\therefore A(5, -1)$$

따라서 직선 $px+qy=6$ 은 점 $A(5, -1)$ 을 지나므로

$$5p - q = 6$$

즉 $5p - q = 6, p + q = 1$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$p = \frac{7}{6}, \quad q = -\frac{1}{6}$$

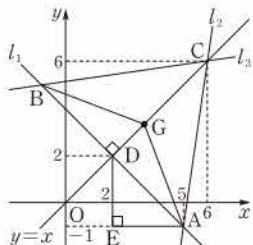
$$\therefore \frac{q}{p} = -\frac{1}{7}$$

답 ㉡

일품 BOX

다른 풀이 직선 AD의 기울기가 -1이고 $\overline{AD}=3\sqrt{2}$ 이므로 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 점 D를 지나고 y축에 평행한 직선의 교점을 E라 하면 $\triangle ADE$ 는 빗변의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{AE}=\overline{DE}=3$ 이므로 점 A의 좌표는 $(2+3, 2-3)$, 즉 $(5, -1)$



두 점 A, D의 x좌표와 y좌표의 차는 모두 3이다.

1등 비밀노트

직선 l_2 의 기울기는 $-\frac{p}{q}$ 이고 $-\frac{p}{q}=1$ 인 경우 $p+q=0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore -\frac{p}{q} \neq 1$$

따라서 두 직선 l_2, l_3 의 교점 C는 반드시 존재하고, 두 직선 l_2, l_3 은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 점 C는 직선 $y=x$ 위에 있다.

15 **전략** AB의 길이가 정해져 있으므로 점 P가 어느 직선 위에 있어야 하는지 생각해 본다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(-2-1)^2}=5$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABP$ 의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \overline{PH}=15$$

$$\therefore \overline{PH}=6$$

따라서 점 P는 직선 AB와 평행하고 직선 AB로부터의 거리가 6인 직선 l 위의 점이다.

점 B를 직선 l 에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 $\triangle ABP$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{B'P} \geq \overline{AB}+\overline{AB'}$$

이므로 점 P가 $\overline{AB'}$ 과 직선 l 의 교점일 때 최소이다.

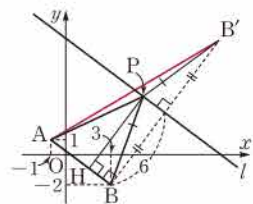
이때 $\overline{BB'}=12$ 이므로 직각삼각형 ABB' 에서

$$\overline{AB'}=\sqrt{5^2+12^2}=13$$

따라서 구하는 값은

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB'}=13$$

답 ③



16 **전략** $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표를 $y=px$ 에 대입하면 등식이 성립함을 이용한다.

풀이 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{p-7}{3}, \frac{3-p^2}{3} \right)$$

이 점이 직선 $y=px$ 위에 있으므로

$$\frac{3-p^2}{3}=p \cdot \frac{p-7}{3}, \quad 3-p^2=p^2-7p$$

$$\therefore 2p^2-7p-3=0$$

$\triangle ABC$ 에서
 $\angle BAD=\angle CAD$ 이면
 $a:b=c:d$

이차방정식의 판별식을 D라 하면
 $D=(-7)^2-4 \cdot 2 \cdot (-3)=73>0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=\frac{7}{2}, b=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore a+b=2$$

답 2

17 **전략** 직선 l 에 의하여 이등분된 부분 중에서 사다리꼴의 넓이를 k 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$6 \cdot 8 + 2 \cdot 3 = 54$$

이므로 $\square OABC$ 의 넓이는 27이다.

직선 l 의 방정식은 $y=kx$ 이므로 점 A의 좌표는 $(6, 6k)$

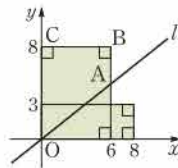
$\square OABC$ 의 넓이가 27이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \{8 + (8-6k)\} \cdot 6 = 27$$

$$16-6k=9 \quad \therefore k=\frac{7}{6}$$

$$\therefore 30k=30 \cdot \frac{7}{6}=35$$

답 35



채점 기준	비율
① 색칠한 부분의 넓이를 이등분한 넓이를 구할 수 있다.	30%
② k의 값을 구할 수 있다.	60%
③ 30k의 값을 구할 수 있다.	10%

참고 D(6, 3)이라 하면

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 < 27,$$

$$\square ODBC = \frac{1}{2} \cdot (5+8) \cdot 6 = 39 > 27$$

이므로 직선 l 이 색칠한 부분의 넓이를 이등분하려면 직선 l 은 $\overline{BD}$ 위를 지나야 한다.

18 **전략** 두 조건을 모두 만족시키는 두 직선 l_1, l_2 를 그리고, 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용한다.

풀이 두 직선 l_1 과 l_2 를

$$l_1: y=3mx,$$

$$l_2: y=mx \quad (m>0)$$

라 하고, x축 위의 원점이 아닌 한 점을 $A(a, 0)$ ($a>0$)이라 하자. 점 A를 지나고 x축에 수

직인 직선이 두 직선 l_1, l_2 와 만나는 점을 각각 P, Q라 하면

$$P(a, 3am), Q(a, am)$$

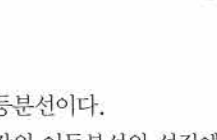
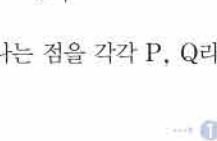
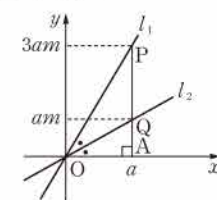
조건 (a)에 의하여

$$\angle POA=2\angle QOA$$

이므로 직선 OQ는 $\angle POA$ 의 이등분선이다.

따라서 $\triangle OAP$ 에서 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$$OA:OP=AQ:QP$$



$$a : \sqrt{a^2 + (3am)^2} = 1 : 2$$

$$\sqrt{a^2 + (3am)^2} = 2a$$

$$a^2 + 9a^2m^2 = 4a^2 \quad \therefore m^2 = \frac{1}{3} \quad (\because a \neq 0)$$

$$\therefore m = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because m > 0)$$

따라서 직선 l_1 의 기울기는

$$3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
① 조건 (가)를 이용하여 x좌표가 같은 두 직선 l_1, l_2 위의 점을 각각 잡을 수 있다.	30%
② 조건 (나)를 이용하여 비례식을 세울 수 있다.	40%
③ 직선 l_1 의 기울기를 구할 수 있다.	30%

19 **전략** 주어진 방정식을 (일차식) $\times$ (일차식) = 0 꼴로 변형하여 방정식이 나타내는 두 직선을 구한다.

풀이 $x^2 + 4y^2 - 4xy + x - 2y - 6 = 0$ 에서

$$x^2 + (1 - 4y)x + 4y^2 - 2y - 6 = 0$$

$$x^2 - (4y - 1)x + (2y + 2)(2y - 3) = 0$$

$$(x - 2y - 2)(x - 2y + 3) = 0$$

$$\therefore x - 2y - 2 = 0 \text{ 또는 } x - 2y + 3 = 0$$

따라서 방정식 $x^2 + 4y^2 - 4xy + x - 2y - 6 = 0$ 이 나타내는 두 직선은 $x - 2y - 2 = 0$ 과 $x - 2y + 3 = 0$ 이다.

이때 두 직선 $x - 2y - 2 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ 은 서로 평행하므로 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은 직선 $x - 2y - 2 = 0$ 위의 한 점 $(0, -1)$ 과 직선 $x - 2y + 3 = 0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 최솟값은

$$\frac{|2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

20 **전략** 두 점을 지나는 원의 반지름의 길이가 최소일 때의 원의 중심의 위치를 생각해 본다.

풀이 두 점 A, B를 지나는 원을 C라 하고 그 중심을 C라 하자.

$\overline{AB}$ 는 원 C의 현이고, 점 C에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로 $\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면 점 C는 점 M을 지나고 $\overline{AB}$ 에 수직인 직선 위에 존재한다.

이때 $\overline{AM} \leq \overline{AC}$ 이므로 $\overline{AM} = \overline{AC}$ 일 때, 즉 점 M이 원의 중심 C일 때, 원 C의 반지름의 길이가 최소이다.

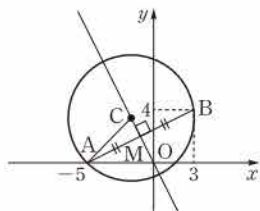
따라서 반지름의 길이의 최솟값 k 는

$$k = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(3+5)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

이므로

$$k^2 = 20$$

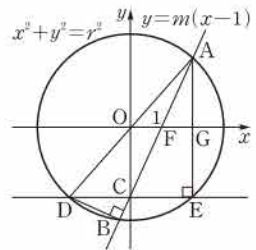
답 20



원 C가 두 점 A, B를 지나는 원의 양 끝 점으로 하는 원일 때

21 **전략** 한 원 위의 세 점 P, Q, R에 대하여 $\overline{PQ} \perp \overline{QR}$ 이면 $\overline{PR}$ 가 원의 지름임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 CD와 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 이 제 4사분면에서 만나는 점을 E, 직선 $y = m(x-1)$ 과 x축의 교점을 F(1, 0), $\overline{AE}$ 와 x축의 교점을 G라 하자.



주어진 조건에서 $\overline{BC} \perp \overline{BD}$, 즉 $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ 이므로 $\overline{AD}$ 는 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 의 지름이다.

$$\therefore \overline{AE} \perp \overline{DE}$$

이때 $\overline{DE}$ 는 x축에 평행하므로 $\overline{AE}$ 는 y축에 평행하고, 두 점 A, E는 x축에 대하여 대칭이므로

$$\overline{AG} = \overline{GE} = \overline{OC}$$

$$\therefore \triangle OCF \cong \triangle GAF \quad (\text{ASA 합동})$$

따라서 $\overline{FG} = \overline{FO} = 1$ 이므로

$$\overline{OG} = 2$$

즉 A(2, m)이므로 E(2, -m)

$$\therefore \overline{AE} = m + m = 2m$$

또 C(0, -m)이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + (m+m)^2} = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

$\overline{AC} : \overline{BC} = 6 : 1$ 에서

$$2\sqrt{m^2 + 1} : \overline{BC} = 6 : 1$$

$$6\overline{BC} = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\therefore \overline{BC} = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{3}$$

한편 두 점 D, E는 y축에 대하여 대칭이므로

$\overline{DC} = \overline{CE} = 2$ 이고 $\triangle BCD \sim \triangle ECA$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{DC} : \overline{AC} = \overline{BC} : \overline{EC}$$

$$2 : 2\sqrt{m^2 + 1} = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{3} : 2$$

$$4 = \frac{2}{3}(m^2 + 1), \quad m^2 = 5$$

$$\therefore m = \sqrt{5} \quad (\because m > 0)$$

따라서 점 A의 좌표는 $(2, \sqrt{5})$ 이고 점 A는 원

$x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점이므로

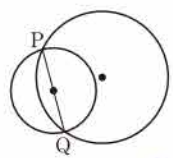
$$r^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9$$

$$\therefore m^2 + r^2 = 5 + 9 = 14$$

답 14

22 **전략** $\overline{PQ}$ 가 원 $x^2 + y^2 = 5$ 의 지름일 때 $\overline{PQ}$ 의 길이가 최대임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 원의 공통인 현 PQ가 원 $x^2 + y^2 = 5$ 의 지름일 때 $\overline{PQ}$ 의 길이가 최대이므로 직선 PQ가 원 $x^2 + y^2 = 5$ 의 중심 (0, 0)을 지나야 한다.



직선 PQ의 방정식은

$$(x-k)^2 + (y+2)^2 - 10 - (x^2 + y^2 - 5) = 0$$

$$\therefore -2kx + 4y + k^2 - 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 ㉠이 점 $(0, 0)$ 을 지나야 하므로

$$k^2 - 1 = 0, \quad k^2 = 1$$

$$\therefore k = \pm 1$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-1 \cdot 1 = -1$$

답 -2

답 -3

답 -1

채점 기준	비율
① 직선 PQ가 원 $x^2 + y^2 = 5$ 의 중심을 지남을 알 수 있다.	30%
② k 의 값을 모두 구할 수 있다.	60%
③ 모든 실수 k 의 값의 곱을 구할 수 있다.	10%

23 [전략] 도형 $f(x+3, y-1)=0$ 을 도형 $f(x, y)=0$ 으로 옮기는 평행이동을 구한다.

[풀이] 도형 $f(x+3, y-1)=0$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 도형 $f(x, y)=0$ 으로 옮겨진다.

따라서 점 $(-1, 3)$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 점 (a, b) 로 옮겨지므로

$$-1+3=a, \quad 3-1=b$$

$$\therefore a=2, \quad b=2$$

$$\therefore a+b=4$$

답 4

24 [전략] 직선 $y=mx$ 가 원 C 의 넓이를 이등분하므로 직선 $y=mx$ 가 원 C 의 중심을 지남을 이용한다.

[풀이] 원 $x^2 + (y-7)^2 = 9$ 의 중심의 좌표가 $(0, 7)$ 이므로 원 C 의 중심의 좌표는

$$(n, n+12)$$

직선 $y=mx$ 가 원 C 의 중심 $(n, n+12)$ 를 지나므로

$$n+12=mn \quad \therefore (m-1)n=12$$

$$m=5일 때, 4n=12에서 \quad n=3$$

$$m=4일 때, 3n=12에서 \quad n=4$$

$$m=3일 때, 2n=12에서 \quad n=6$$

$$m=2일 때, \quad n=12$$

$$m=1일 때, 0 \cdot n=12를 만족시키는 n의 값은 없다.$$

따라서 구하는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$3+4+6+12=25$$

답 25

25 [전략] 도형 $f(x, y)=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, y)=0$ 에 x 대신 $-x$ 를 대입한 식임을 이용한다.

[풀이] 두 점 $O(0, 0)$, $A(\sqrt{3}, 3)$ 을 지나는 직선 l 의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$ 이므로 직선 m 의 방정식은

$$y=-\sqrt{3}x$$

$P(a, b)$ ($a>0, b>0, a \neq \sqrt{3}, b \neq 3$)라 하면

$$PL = \frac{|\sqrt{3}a-b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}} = \frac{|\sqrt{3}a-b|}{2},$$

$$PM = \frac{|\sqrt{3}a+b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}} = \frac{|\sqrt{3}a+b|}{2},$$

$$PN=b$$

점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 12$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 12$$

이때 $a^2 + b^2 = 12$ 이므로

$$PL^2 + PM^2 + PN^2 = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18$$

답 18

채점 기준	비율
① 두 직선 l, m 의 방정식을 구할 수 있다.	30%
② $PL^2 + PM^2 + PN^2$ 의 값을 점 P 의 좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	50%
③ $PL^2 + PM^2 + PN^2$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

점 $P(a, b)$ 와 직선 $y=\sqrt{3}x$, 즉 $\sqrt{3}x-y=0$ 사이의 거리

점 $P(a, b)$ 와 직선 $y=-\sqrt{3}x$, 즉 $\sqrt{3}x+y=0$ 사이의 거리

II 집합과 명제

04 집합의 뜻과 표현

개념 & 핵심 기출

본책 38쪽

01 ④ ‘가까운’은 그 기준이 명확하지 않으므로 100에 가까운 수의 모임은 집합이 아니다.

답 ④

02 ⑤ 10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7이므로 $9 \notin A$ 이다.

답 ⑤

03 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이므로

$$1 \in A, 2 \in A, 4 \in A, 8 \in A, 16 \in A$$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$$1+2+4+8+16=31$$

답 31

04 $-2 \leq x \leq 8$ 이므로

$$-6 \leq 3x \leq 24, \quad -8 \leq 3x-2 \leq 22$$

$$\therefore -8 \leq y \leq 22$$

따라서 $M=22, m=-8$ 이므로

$$M+m=14$$

답 14

05 $a \in A, b \in B$ 인 a,

b에 대하여 $2a+b$ 의 값을

구하면 오른쪽 표와 같으

므로

a \ b	-1	0	2
-1	-3	-2	0
0	-1	0	2

$$C = \{-3, -2, -1, 0, 2\}$$

따라서 집합 C의 모든 원소의 합은

$$-3+(-2)+(-1)+0+2=-4$$

답 ②

집합을 원소나열법으로 나타낼 때, 같은 원소는 중복하여 쓰지 않는다.

06 $\frac{6}{n+1}$ 이 자연수가 되려면 $n+1$ 이 6의 양의 약수이어야 한다.

6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이고 n 은 자연수이므로

$$n+1=2, n+1=3, n+1=6$$

따라서 집합 A의 원소 중에서 자연수인 원소는

$$\frac{6}{2}=3, \frac{6}{3}=2, \frac{6}{6}=1$$

답 1, 2, 3

$n+1=1$ 에서 $n=0$ 이때 n 은 자연수가 아니다.

07 ①, ② 무한집합

③ $\emptyset \Rightarrow$ 유한집합

④ $\{15, 20, 25, 30, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

⑤ $\{2, 3, 5, 7, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

답 ③

원소의 개수가 0이다.

08 $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 이므로 $n(A)=6$

$B=\{3, 4, 5, \dots, 22\}$ 이므로 $n(B)=20$

$$\therefore n(A)+n(B)=26$$

답 26

09 $n(A)=33$ 에서 집합 A의 원소는 33개, 즉 0보다 크고 k보다 작은 3의 배수가 33개이어야 하므로

$$A=\{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 33\}$$

따라서 $3 \cdot 33 < k \leq 3 \cdot 34$ 이므로

$$99 < k \leq 102$$

즉 자연수 k의 최댓값은 102, 최솟값은 100이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$102+100=202$$

답 ③

10 집합 A의 원소는 $\emptyset, \{\emptyset\}$ 이므로

$$\emptyset \in A, \{\emptyset\} \in A$$

또 $\emptyset \in A, \{\emptyset\} \in A$ 이므로

$$\{\emptyset\} \subset A, \{\{\emptyset\}\} \subset A$$

$\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$

이상에서 옳은 것은 ①, ②, ③, ④, ⑤의 5개이다.

답 ⑤

11 $A \subset B$ 를 만족시키려면 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속해야 한다.

집합 B의 원소는 2, 3, 5이고 집합 A는 공집합이 아니므로

$$2 \in A \text{ 또는 } 3 \in A \text{ 또는 } 5 \in A$$

(i) $2 \in A$ 일 때,

$$2^2-4 \cdot 2+a=0, \quad -4+a=0 \quad \therefore a=4$$

$$\text{즉 } x^2-4x+4=0 \text{이므로 } (x-2)^2=0$$

$$\therefore x=2$$

따라서 $A=\{2\}$ 이므로 $A \subset B$ 이다.

(ii) $3 \in A$ 일 때,

$$3^2-4 \cdot 3+a=0, \quad -3+a=0 \quad \therefore a=3$$

$$\text{즉 } x^2-4x+3=0 \text{이므로 } (x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 $A=\{1, 3\}$ 이므로 $A \not\subset B$ 이다.

(iii) $5 \in A$ 일 때,

$$5^2-4 \cdot 5+a=0, \quad 5+a=0 \quad \therefore a=-5$$

$$\text{즉 } x^2-4x-5=0 \text{이므로 } (x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 $A=\{-1, 5\}$ 이므로 $A \not\subset B$ 이다.

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 집합 A는

$$\{2\}$$

답 {2}

참고 이차방정식 $x^2-4x+a=0$ 의 두 근의 합이 4임을 이용하여 A의 원소를 구할 수도 있다.

12 $x^2-3x=0$ 에서 $x(x-3)=0$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore A=\{0, 3\}$$

$$x^2-9 \leq 0 \text{에서 } (x+3)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 3$$

$$\therefore B=\{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$$

$|x| \leq 3$ 에서 $-3 \leq x \leq 3$ 이고 x 는 정수이므로

$$x = \pm 3 \text{ 또는 } x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm 1 \text{ 또는 } x = 0$$

$$\therefore C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$\therefore A \subset C \subset B \quad \text{답 ②}$$

13 $4 \in A$ 이므로 $4 \in B$ 이어야 한다.

(i) $a+1=4$, 즉 $a=3$ 일 때,

$$A = \{4, 6, 9\}, B = \{4, 6, 9\} \text{이므로 } A=B \text{이다.}$$

(ii) $3a=4$, 즉 $a=\frac{4}{3}$ 일 때,

$$A = \left\{ \frac{16}{9}, \frac{8}{3}, 4 \right\}, B = \left\{ \frac{7}{3}, 4, 6 \right\} \text{이므로 } A \neq B \text{이다.}$$

(i), (ii)에서 $a=3 \quad \text{답 3}$

14 $A \subset B$ 이면 $n(A) \leq n(B)$ 이고 주어진 조건에서

$$n(B) \leq n(A) \text{이므로 } n(A) = n(B)$$

즉 $A \subset B$ 이고 $n(A) = n(B)$ 이므로

$$A=B$$

이때 $8 \in A$ 에서 $8 \in B$ 이어야 하므로 $ab=8$

(i) $a+b=4$, $4a-b=6$ 일 때,

$$a=2, b=2 \text{이므로 } ab=8 \text{을 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $a+b=6$, $4a-b=4$ 일 때,

$$a=2, b=4 \text{이므로 } ab=8 \text{을 만족시킨다.}$$

(i), (ii)에서 $a=2, b=4$

$$\therefore b-a=2 \quad \text{답 ⑤}$$

다른 풀이 $A=B$ 이면 두 집합 A, B 의 모든 원소의 합이 같아야 하므로

$$(a+b) + (4a-b) + 8 = 8 + 4 + 6$$

$$5a=10 \quad \therefore a=2$$

$ab=8$ 에서 $b=4$

$$\therefore b-a=2$$

15 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로 진부분집합 중에서 원소의 개수가 가장 큰 것은 집합 A 의 부분집합 중에서 원소의 개수가 4인 것이다.

이때 모든 원소의 합이 최소인 집합은 $\{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 구하는 최솟값은

$$2+4+6+8=20 \quad \text{답 ①}$$

16 $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, B = \{1, 3, 9\}$ 이므로 집합 X 는 1, 3, 9를 반드시 원소로 갖는 집합 A 의 부분집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는

$$2^{6-3}=2^3=8 \quad \text{답 8}$$

17 $A = \{11, 12, 13, \dots, 20\}$ 이고 집합 A 의 원소 중에서 소수는 11, 13, 17, 19이므로 11, 13, 17, 19를 원소로 갖지 않는 집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^{10-4}=2^6=64$$

따라서 구하는 진부분집합의 개수는

$$(2^{10}-1)-64=959 \quad \text{답 959}$$

점 $(0, 0)$ 은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이 아니다.

(진부분집합의 개수)
-(소수를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수)

18 집합 A 의 원소의 개수는 n 이므로 2를 반드시 원소로 갖고 $2n$ 을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{n-1-1}=2^{n-2}$$

$$2^{n-2}=32=2^5 \text{에서 } n-2=5 \quad \therefore n=7$$

따라서 $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ 이므로 집합 A 의 모든 원소의 합은

$$2+4+6+8+10+12+14=56 \quad \text{답 ④}$$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 41쪽

01 $\sqrt{2}x^2-4x+\sqrt{2}=0$ 에서

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \pm 1$$

이므로 $A = \{\sqrt{2}-1, 1, \sqrt{2}+1\}$

$\alpha = \sqrt{2}+1, \beta = \sqrt{2}-1$ 이라 하면

$$1+\alpha=2+\sqrt{2} \notin A$$

$$1-\alpha=-\sqrt{2} \notin A$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3+2\sqrt{2} \notin A$$

이므로 덧셈, 뺄셈, 나눗셈은 주어진 조건을 만족시키지 않는다. 이때

$$\alpha \cdot 1 = \alpha, \beta \cdot 1 = \beta, \alpha\beta = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$$

이므로 집합 A 에 대하여 주어진 조건을 만족시키는 연산은 곱셈이다. **답 ③**

02 $\neg, m=0$ 일 때,

직선 $y=mx$ 와 원 $x^2+y^2=1$ 의 교점의 좌표는

$$(1, 0), (-1, 0) \text{이므로 } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M$$

$\therefore A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in M$ 이라 하면 점 (p, q) 가 직선

$y=mx$ 와 원 $x^2+y^2=1$ 의 교점이므로

$$q=mp, p^2+q^2=1$$

$$\therefore -q=m \cdot (-p), (-p)^2+(-q)^2=1$$

따라서 점 $(-p, -q)$ 도 직선 $y=mx$ 와 원

$x^2+y^2=1$ 의 교점이므로

$$r=-p, s=-q$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} p & q \\ -p & -q \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A 의 모든 성분의 합은

$$p+q+(-p)+(-q)=0$$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이면 $A \in M, B \in M$

이지만

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin M$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \cup$ 이다. **답 $\neg, \cup$**

03 $x \in A, y \in B$ 인 x, y 에 대하여 $|x+y|$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$x \setminus y$	-1	2
-3	4	1
-1	2	1
2	1	4
4	3	6
a	$ a-1 $	$ a+2 $

$X = \{1, 2, 3, 4, 6, |a-1|, |a+2|\}$
이때 집합 X 의 원소의 최댓값이 7이므로

$$|a-1|=7 \text{ 또는 } |a+2|=7$$

(i) $|a-1|=7$ 일 때, $a-1=-7, a-1=7$

$$\therefore a=-6, a=8$$

그런데 $a=8$ 이면 $|a+2|=10$ 이므로 집합 X 의 원소의 최댓값이 10이다.

$$\therefore a=-6$$

(ii) $|a+2|=7$ 일 때, $a+2=-7, a+2=7$

$$\therefore a=-9, a=5$$

그런데 $a=-9$ 이면 $|a-1|=10$ 이므로 집합 X 의 원소의 최댓값이 10이다.

$$\therefore a=5$$

(i), (ii)에서 집합 X 의 원소의 최댓값이 7이 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은

$$-6+5=-1$$

답 ②

04 $\neg, z \in S$ 이면 z^2-2z 는 실수이므로 $\overline{z^2-2z}$ 도 실수이다.

$$\text{즉 } \overline{z^2-2z} = \overline{z^2} - 2\overline{z} = (\overline{z})^2 - 2\overline{z} \text{가 실수이므로}$$

$$\overline{z} \in S$$

$\therefore z=1+i$ 이면

$$z^2-2z = (1+i)^2 - 2(1+i) = -2$$

이므로 $z \in S$ 이지만

$$(2z)^2 - 2 \cdot 2z = (2+2i)^2 - 2(2+2i) = -4+4i$$

이므로 $2z \notin S$

$\therefore z_1=2, z_2=1+i$ 이면

$$z_1^2-2z_1=2^2-4=0$$

이므로 $z_1 \in S$

$\therefore z_2 \in S$

그러나 $\neg$ 에서 $z_1 z_2 = 2(1+i) \notin S$ 이다.

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

답 ①

다른 풀이 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} z^2-2z &= (a+bi)^2 - 2(a+bi) \\ &= a^2-2a-b^2+2b(a-1)i \end{aligned}$$

이때 z^2-2z 가 실수이므로 $2b(a-1)=0$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } b=0$$

즉 집합 S 의 원소는 복소수 중에서 실수부분이 1인 수 또는 실수이다.

실수 x, y ($x \neq 0$)에 대하여

$\neg$. (i) $z=1+xi$ 이면 $\overline{z}=1-xi=1+(-x)i \in S$

(ii) $z=y$ 이면 $\overline{z}=y \in S$

(i), (ii)에서 $z \in S$ 이면 $\overline{z} \in S$ 이다.

$\therefore z=1+xi$ 이면 $2z=2+2xi \notin S$

$ax^2+bx+c \leq 0$ (a, b, c 는 상수)이 모든 실수 x 에 대하여 성립할 조건
① $a=0, b=0, c \leq 0$
② $a < 0, b^2-4ac \leq 0$

켈레복소수의 성질

두 복소수 z_1, z_2 의 켈레복소수를 각각 $\overline{z_1}, \overline{z_2}$ 라 할 때

- ① $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$
- ② $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ (복호동순)
- ③ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- ④ $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2 \neq 0$)

$\therefore z_1=1+xi, z_2=y$ ($y \neq 0$)이면

$$z_1 z_2 = (1+xi)y = y + xyi$$

이때 $y \neq 1$ 이면 $y + xyi \notin S$

05 조건 (가), (나)에서

(i) $5 \in A$ 이므로 $\frac{1}{1-5} \in A \therefore -\frac{1}{4} \in A$

(ii) $-\frac{1}{4} \in A$ 이므로 $\frac{1}{1-(-\frac{1}{4})} \in A \therefore \frac{4}{5} \in A$

(iii) $\frac{4}{5} \in A$ 이므로 $\frac{1}{1-\frac{4}{5}} \in A \therefore 5 \in A$

:

이상에서 집합 A 는 $-\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, 5$ 를 반드시 원소로 가지므로 원소의 개수가 가장 적은 집합은

$$A = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, 5 \right\}$$

따라서 $n(A)$ 의 최솟값은 3이다.

답 ③

06 주어진 집합이 공집합이려면 부등식

$a(x^2-2x+2) > -2x$ 의 해가 존재하지 않아야 한다.

즉 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$ax^2-2(a-1)x+2a \leq 0 \dots\dots ①$$

이 성립해야 한다.

→ ①

(i) $a=0$ 일 때,

①에서 $2x \leq 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a < 0$ 일 때,

이차방정식 $ax^2-2(a-1)x+2a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 2a^2 \leq 0$$

$$-a^2-2a+1 \leq 0, \text{ 즉 } a^2+2a-1 \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1-\sqrt{2} \text{ 또는 } a \geq -1+\sqrt{2}$$

이때 $a < 0$ 이므로 $a \leq -1-\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 구하는 a 의 값의 범위는

$$a \leq -1-\sqrt{2}$$

→ ②

$$\text{답 } a \leq -1-\sqrt{2}$$

채점 기준	비율
① 주어진 집합이 공집합일 조건을 알 수 있다.	30%
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	70%

07 $\neg, a \in A, b \in A$ 에서 a^2, b^2 은 모두 유리수이므로 $a^2 b^2$ 은 유리수이다.

이때 $a^2 b^2 = (ab)^2$ 이므로 $ab \in A$

$\therefore \sqrt{2} \in A, \sqrt{3} \in A$ 이지만 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$ 은 유리수가 아니므로 $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin A$

$\therefore (\sqrt{2})^2=2$ 이므로 $\sqrt{2} \in A$

그런데 $\sqrt{2}$ 는 무리수이므로 집합 A 는 유리수 전체의 집합의 부분집합이 아니다.

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

답 ①

실수부분이 1이 아니다.

일품 BOX

08 $1-\sqrt{3}i \in A$ 이므로 $1-\sqrt{3}i$ 는 방정식

$$x^2+ax+b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

의 근이고, a, b 가 실수이므로 방정식 $\textcircled{1}$ 의 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}i$ 이다. 즉 $1+\sqrt{3}i \in A$ 이다.

이때 $A \subset B$ 이므로 $1 \pm \sqrt{3}i \in B$

따라서 $1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i$ 는 방정식

$$x^3+cx^2+dx+4=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

의 근이다.

$\textcircled{1}$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)=-a,$$

$$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)=b$$

$$\therefore a=-2, b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 의 나머지 한 근을 α 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)+\alpha=-c,$$

$$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\alpha+(1-\sqrt{3}i)\alpha=d,$$

$$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)\alpha=-4$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$a=-1, c=-1, d=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\therefore a+b+c+d=-2+4+(-1)+2=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

답 3

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
② c, d 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $a+b+c+d$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

09 집합 $A=\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ 의 원소들 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 k ($k=0, 1, 2, \dots, 6$)인 수의 집합을 A_k 라 하면

$$A_0=\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\},$$

$$A_1=\{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50\},$$

$$A_2=\{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44\},$$

$$A_3=\{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\},$$

$$A_4=\{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\},$$

$$A_5=\{5, 12, 19, 26, 33, 40, 47\},$$

$$A_6=\{6, 13, 20, 27, 34, 41, 48\}$$

이때 집합 X 의 어떤 서로 다른 두 원소의 합도 7의 배수가 아닐 때의 집합 X 의 원소의 개수가 최대가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) A_0 의 원소 1개와 A_1, A_2, A_3 의 모든 원소를 가질 때

(ii) A_0 의 원소 1개와 A_1, A_2, A_4 의 모든 원소를 가질 때

(iii) A_0 의 원소 1개와 A_1, A_3, A_5 의 모든 원소를 가질 때

(iv) A_0 의 원소 1개와 A_1, A_4, A_5 의 모든 원소를 가질 때

이상에서 각 경우의 집합 X 의 원소의 개수는 모두

$$1+8+7+7=23$$

이므로 구하는 원소의 개수의 최댓값은 23이다. 답 23

10 $A \subset B, B \subset A$ 이면 $A=B$

$$\begin{aligned} a+b &\neq a+b+2, \\ a-b &\neq a-b-3 \end{aligned}$$

이차방정식

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a, b, c \text{는 실수}) \text{의 한 근이}$$

$$p+qi \text{이면 다른 한 근은 } p-qi \text{이다.}$$

(단, p, q 는 실수, $q \neq 0$)

(i) $a+b=a-b-3, a-b=4$ 일 때,

$a+b=a-b-3$ 이면 $2b=-3$ 이므로 이를 만족시키는 정수 b 는 존재하지 않는다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+b=4, a-b=a+b+2$ 일 때,

$$a-b=a+b+2 \text{에서 } 2b=-2$$

$$\therefore b=-1$$

$$b=-1 \text{을 } a+b=4 \text{에 대입하면 } a=5$$

이때 $A=B=\{2, 3, 4, 6\}$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=5, b=-1$ 답 $a=5, b=-1$

11 조건 (가), (나)에서 1과 11, 3과 9, 5와 7은 어느 하나가 집합 A 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A 의 원소이다.

또 6은 반드시 A 의 원소이어야 한다.

(i) $n(A)=3$ 인 경우

$$\{1, 6, 11\}, \{3, 6, 9\}, \{5, 6, 7\} \text{의 3개}$$

(ii) $n(A)=5$ 인 경우

$$\{1, 3, 6, 9, 11\}, \{1, 5, 6, 7, 11\},$$

$$\{3, 5, 6, 7, 9\} \text{의 3개}$$

(iii) $n(A)=7$ 인 경우

$$\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11\} \text{의 1개}$$

이상에서 집합 A 의 개수는 7이다. 답 ④

12 집합 A 의 원소 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로 $N(B)=2$ 를 만족시키는 집합 B 는 2, 3, 5, 7 중에서 2개의 원소를 가져야 한다.

2, 3, 5, 7 중에서 2개의 원소를 갖는 경우의 수는

$${}_4C_2=\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}=6$$

이때 2, 3을 반드시 원소로 갖고 5, 7을 원소로 갖지 않는 집합 A 의 부분집합 B 의 개수는

$$2^{7-2-2}=2^3=8$$

마찬가지로 $N(B)=2$ 를 만족시키는 각 경우에 대하여 집합 B 의 개수는 각각 8이므로 구하는 집합 B 의 개수는

$$6 \cdot 8=48 \quad \text{답 48}$$

13 조건 (가)에서 집합 A 의 모든 원소는 홀수이어야 한다. 이때 조건 (나)에서 집합 A 의 원소의 개수는 짝수이어야 한다.

즉 구하는 집합 A 는 집합 $X=\{1, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중에서 원소의 개수가 짝수인 집합이다. 답 ①

X 의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 집합은

$$\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}$$

의 6개

원소의 개수가 4인 집합은

$$\{1, 3, 5, 7\} \text{의 1개}$$

따라서 구하는 집합 A 의 개수는

$$6+1=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

답 7

채점 기준	비율
① 조건을 모두 만족시키는 집합 A를 알 수 있다.	40%
② 집합 A의 개수를 구할 수 있다.	60%

1등급 비밀노트

자연수 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 에 대하여

- ① $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ 의 값이 홀수이려면 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 이 모두 홀수이어야 한다.
- ② $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ 의 값이 짝수이려면 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 중에서 적어도 하나는 짝수이어야 한다.
- ③ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 의 값이 홀수이려면 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 중에서 홀수인 것이 홀수 개이어야 한다.
- ④ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 의 값이 짝수이려면 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 중에서 홀수인 것이 짝수 개이거나 없어야 한다.

- 14** (i) 집합 A의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 것의 개수는 $2^3=8$ 이고, 이들 집합에서 최소인 원소는 2이다. 즉 이 경우의 합은

$$2 \cdot 8 = 16$$

- (ii) 집합 A의 부분집합 중에서 3을 반드시 원소로 갖고 2를 원소로 갖지 않는 것의 개수는 $2^2=4$ 이고, 이들 집합에서 최소인 원소는 3이다. 즉 이 경우의 합은

$$3 \cdot 4 = 12$$

- (iii) 집합 A의 부분집합 중에서 5를 반드시 원소로 갖고 2, 3을 원소로 갖지 않는 것의 개수는 $2^1=2$ 이고, 이들 집합에서 최소인 원소는 5이다. 즉 이 경우의 합은

$$5 \cdot 2 = 10$$

- (iv) 집합 A의 부분집합 중에서 7을 반드시 원소로 갖고 2, 3, 5를 원소로 갖지 않는 것은 1개뿐이고, 이 집합에서 최소인 원소는 7이다. 즉 이 경우의 합은

$$7 \cdot 1 = 7$$

이상에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15} = 16 + 12 + 10 + 7 = 45$$

답 45

참고 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합을 모두 구하면

- (i) $\{2\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}$

→ 원소 중에서 가장 작은 것은 2이다.

- (ii) $\{3\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 5, 7\}$

→ 원소 중에서 가장 작은 것은 3이다.

- (iii) $\{5\}, \{5, 7\}$

→ 원소 중에서 가장 작은 것은 5이다.

- (iv) $\{7\}$

→ 원소 중에서 가장 작은 것은 7이다.

- 15** $n(X) \geq 2, S(X) = 9$ 를 만족시키는 집합 X는 다음과 같다.

집합 X의 원소 중에서

- (i) 가장 큰 수가 8, 가장 작은 수가 1일 때,

X의 개수는 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^6 = 64$$

$$\begin{aligned} &9 = 8 + 1 \\ &= 7 + 2 \\ &= 6 + 3 \\ &= 5 + 4 \end{aligned}$$

- (ii) 가장 큰 수가 7, 가장 작은 수가 2일 때,

X의 개수는 $\{3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^4 = 16$$

- (iii) 가장 큰 수가 6, 가장 작은 수가 3일 때,

X의 개수는 $\{4, 5\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^2 = 4$$

- (iv) 가장 큰 수가 5, 가장 작은 수가 4일 때,

$X = \{4, 5\}$ 이므로 X의 개수는 1이다.

이상에서 집합 X의 개수는

$$64 + 16 + 4 + 1 = 85$$

답 85

내신 수능

1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 43쪽

- 01** 집합 A는 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점들의 집합이고, 집합 B는 집합 A가 나타내는 점들을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동시킨 점들의 집합이므로

$$B = \{(x, y) \mid (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4\}$$

즉 점 (a, b) 는 중심이 $(3, -4)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

이때 원점 $(0, 0)$ 과 원의 중심 $(3, -4)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

이므로 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 의 최댓값은

$$5 + 2 = 7$$

답 7

- 02** $a \in A_1, b \in A_1$ 일 때, ab 의 값을 구하면

$a \backslash b$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

$$\therefore A_2 = \{0, 1, 2, 4\}$$

$a \in A_1, b \in A_2$ 일 때, ab 의 값을 구하면

$a \backslash b$	0	1	2	4
0	0	0	0	0
1	0	1	2	4
2	0	2	4	8

$$\therefore A_3 = \{0, 1, 2, 4, 8\}$$

$a \in A_1, b \in A_3$ 일 때, ab 의 값을 구하면

$a \backslash b$	0	1	2	4	8
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	4	8
2	0	2	4	8	16

$$\therefore A_4 = \{0, 1, 2, 4, 8, 16\}$$

따라서 집합 A_4 의 모든 원소의 합은

$$0 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

답 4

03 (i) $a=1$ 일 때,

$\frac{bc}{a}$ 는 자연수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$ 일 때,

bc 는 홀수이어야 하므로

$$b=3, c=5$$

(iii) $a=3$ 일 때,

bc 는 3의 배수가 아니어야 하므로

$$b=4, c=5$$

(iv) $a=4$ 일 때,

bc 는 4의 배수가 아니어야 하므로

$$b=5, c=6$$

이상에서 집합 B 의 원소가 될 수 있는 것은

$$(2, 3, 5), (3, 4, 5), (4, 5, 6)$$

이므로 $n(B)$ 의 최댓값은 3이다.

답 ①

(홀수) $\times$ (홀수) = (홀수)
이므로 b, c 는 모두 홀수
이다.

04 $A=\{1, 3, 9, 27\}$ 이므로 집합 A 의 공집합이 아닌
부분집합의 개수는

$$n=2^4-1=15$$

집합 $A=\{1, 3, 9, 27\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1을 포
함하는 부분집합의 개수는

$$2^{4-1}=8$$

이므로 $p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdots p(A_{15})$ 에는 1이 8번
곱해져 있다.

마찬가지로 $p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdots p(A_{15})$ 에는 3,
9, 27이 각각 8번씩 곱해져 있으므로

$$\begin{aligned} & p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdots p(A_{15}) \\ &= 1^8 \cdot 3^8 \cdot 9^8 \cdot 27^8 \\ &= 3^8 \cdot 3^{16} \cdot 3^{24} \\ &= 3^{48} \end{aligned}$$

즉 $3^k=3^{48}$ 이므로

$$k=48$$

$$\therefore n+k=63$$

답 63

05 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 의 부분집합 A 의
원소의 개수가 k ($0 \leq k < 9$)일 때, $A \subset X \subset U$ 를 만족시
키는 집합 X 의 개수는 2^{9-k} 이므로

$$f(A)=2^{9-k}=16=2^4$$

$$\therefore k=5$$

따라서 집합 A 의 원소의 개수가 5이므로 집합 A 의 진부
분집합의 개수는

$$2^5-1=31$$

답 31

06 $\neg$. S 의 부분집합 중에서 가장 큰 원소가 3인 부분집
합은

$$\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

의 4개이므로

$$M(3)=4$$

$\neg$. S 의 부분집합 중에서 가장 큰 원소가 n ($n=2, 3, \dots, 10$)인 부분집합은 집합 $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ 의
부분집합에 원소 n 을 추가한 집합과 같으므로

$$M(n)=2^{n-1}$$

또 $M(1)=1$ 이므로 $a > b$ 이면 $M(a) > M(b)$ 이다.

$\neg$. $M(4)=8, M(3)=4$ 이므로 $M(4) \neq \{M(3)\}^2$ 이
다.

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ②

05 집합의 연산

개념 & 핵심 기출

본책 44쪽

01 $\{1, 2\} \subset X \subset A$ 이므로 집합 X 는 집합 A 의 부분 집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합이다.
이때 $\{3\} \cap X = \emptyset$ 이므로 집합 X 는 3을 원소로 갖지 않는다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{7-2-1} = 2^4 = 16$$

답 16

02 $\neg. A_3 = \{1, 3\}, A_4 = \{1, 2, 4\}$ 이므로

$$A_3 \cap A_4 = \{1\}$$

$\neg. A_6 = \{1, 2, 3, 6\}, A_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로

$$A_6 \cup A_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$\therefore A_6 \cup A_{12} = A_{12}$$

$\neg. A_3 = \{1, 3\}, A_4 = \{1, 2, 4\}$ 이므로

$$A_3 \cup A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

그런데 $A_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로

$$(A_3 \cup A_4) \not\subset A_6$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

답 2

03 $3 \in (A \cap B)$ 이고 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소는 집합 B 에 속하므로 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합이 8이 되는 경우는

$$3+5=8 \text{ 또는 } 3+5+2a=8 \quad (\because a \text{는 정수})$$

(i) $3+5=8$ 일 때,

① $a=5$ 이면

$$A = \{1, 3, 5, 10\}, B = \{3, 5, 10\}$$

이므로

$$A \cap B = \{3, 5, 10\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

② $a+5=5$, 즉 $a=0$ 이면

$$A = \{0, 1, 3, 5\}, B = \{0, 3, 5\}$$

이므로

$$A \cap B = \{0, 3, 5\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $3+5+2a=8$ 일 때,

$a=0$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=0$

답 0

04 $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}, B = \{1, 3, 5, 15\}$ 이므로

$$A^c - B = \{2, 4, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$$

따라서 집합 $A^c - B$ 의 원소의 개수는 8이다.

답 3

05 $B^c = \{x \mid -4 \leq x \leq 0 \text{ 또는 } 3 < x \leq 4\}$

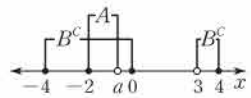
$$A \subset B^c \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

오른쪽 그림에서 $A \subset B^c$ 가 성립하도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-2 < a \leq 0$$

이므로 a 의 최댓값은 0이다.

답 0



두 집합 A, B 에 대하여

① $A \cap B = A$ 이면

$$A \subset B$$

② $A \cup B = A$ 이면

$$B \subset A$$

06 $A \cap X = X$ 이므로 $X \subset A$

$$(A - B) \cup X = X \text{이므로 } (A - B) \subset X$$

$$\therefore (A - B) \subset X \subset A$$

즉 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중에서 집합 $A - B$ 를 포함하는 집합이다.

이때 $n(A - B) = m$ 이라 하면 집합 X 의 개수는 2^{5-m} 이므로

$$2^{5-m} = 8 = 2^3 \quad \therefore m = 2$$

즉 $n(A - B) = 2$ 이므로

$$n(A \cap B) = 3$$

이때 a 가 자연수이므로 집합 B 의 원소는 연속하는 네 자연수이다.

따라서 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 이므로 $a+1=3$ 에서

$$a = 2$$

답 2

07 A, B^c 가 서로소이므로 $A \cap B^c = \emptyset$ 이다.

즉 $A - B = \emptyset$ 이므로 $A \subset B$

① $A \cap B = A$

② $A \cup B = B$

③ $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 이므로

$$B - A \neq \emptyset$$

④ $A \subset B$ 이므로

$$(A^c \cup A) \subset (A^c \cup B)$$

$$\text{이때 } A^c \cup A = U \text{이므로 } U \subset (A^c \cup B)$$

$$\therefore A^c \cup B = U$$

⑤ $A \subset B$ 이고 $B \not\subset A$ 이므로 $A^c \not\subset B^c$

답 4

08 $A - (A - B^c)^c = A - (A \cap B)^c$

$$= A \cap (A \cap B)$$

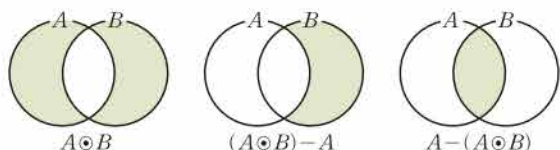
$$= A \cap B$$

즉 $A \cap B = B$ 이므로

$$B \subset A$$

답 1

09 $(A \odot B) \odot A = \{(A \odot B) - A\} \cup \{A - (A \odot B)\}$
이므로 $A \odot B, (A \odot B) - A, A - (A \odot B)$ 를 각각 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



$$\begin{aligned} \therefore (A \odot B) \odot A \\ &= [(A \odot B) - A] \cup \{A - (A \odot B)\} \\ &= B \end{aligned}$$

답 ②

1등급 비밀노트

대칭차집합

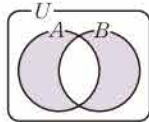
전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A-B$ 와 $B-A$ 의 합집합, 즉

$$(A-B) \cup (B-A)$$

를 대칭차집합이라 한다.

대칭차집합은 집합의 연산에서 자주 출제되는 유형으로 다음과 같이 여러 가지 방법으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} (A-B) \cup (B-A) &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \end{aligned}$$



10 $\neg$. $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이므로

$$A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B = A$$

$\therefore A \cap (A \cup B^c) = (A \cap A) \cup (A \cap B^c) = A \cup \emptyset = A$

$\therefore A - (A - B) = A - \emptyset = A$

이상에서 $\neg, \therefore, \therefore$ 모두 옳다.

답 ⑤

11 $A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\},$

$C = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로

$$\begin{aligned} &(A \cup B) \cap (B \cup C^c) \\ &= (A \cup B) \cap (C^c \cup B) \\ &= (A \cap C^c) \cup B \\ &= (A - C) \cup B \\ &= \{5, 7\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\} \\ &= \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\} \end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$$2+4+5+6+7+8+10=42$$

답 42

$$\begin{aligned} 12 \{ &((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) \cup \{(A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c)\} \\ &= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cup \{A^c \cup (B \cap B^c)\} \\ &= (A \cap U) \cup (A^c \cup \emptyset) \\ &= A \cup A^c \\ &= U \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 13 (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{4, 8, 12, 16\} \end{aligned}$$

이므로 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.

그런데 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로

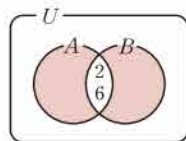
$$A \cap B = \{2, 6\}$$

$$\therefore B = \{2, 6, 12, 16\}$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$2+6+12+16=36$$

답 36



$$\begin{aligned} &(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= \{4, 8, 12, 16\} \\ &\text{에서} \\ &\{4, 8\} \subset A, \\ &\{12, 16\} \subset B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14 (A \cup B)^c \cup (A^c \cap B) &= (\overline{A \cap B}) \cup (A^c \cap B) \\ &= A^c \cap (\overline{B^c \cup B}) \\ &= A^c \cap \overline{U} \\ &= \overline{A^c} \end{aligned}$$

$$\therefore \textcircled{a} A^c \cap B^c \quad \textcircled{b} B^c \cup B \quad \textcircled{c} U \quad \textcircled{d} A^c$$

답 ④

$$\begin{aligned} 15 \textcircled{1} (A \cup B) \cap (A^c \cap C^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cup C) \end{aligned}$$

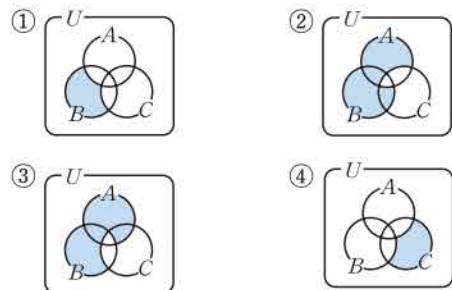
$$\begin{aligned} \textcircled{2} (A \cup B) \cap (A^c \cup C^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap C)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} (A \cup B) \cap (B^c \cup C^c) &= (A \cup B) \cap (B \cap C)^c \\ &= (A \cup B) - (B \cap C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} (A^c \cap B^c) \cap (A \cup C) &= (A \cup B)^c \cap (A \cup C) \\ &= (A \cup C) - (A \cup B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} (A^c \cup B^c) \cap (A \cup C) &= (A \cap B)^c \cap (A \cup C) \\ &= (A \cup C) - (A \cap B) \end{aligned}$$

이므로 각 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합과 같은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

$$\begin{aligned} 16 n(A-B) &= n(A) - n(A \cap B) \text{이므로} \\ n(A) - n(A \cap B) &= n(A) - n(B) \\ \therefore n(A \cap B) &= n(B) \end{aligned}$$

$n(A \cup B) = 20$ 에서

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20$$

$$\therefore n(A) = 20$$

$n(A-B) = 7$ 에서

$$n(A) - n(A \cap B) = 7, \quad 20 - n(A \cap B) = 7$$

$$\therefore n(A \cap B) = 13$$

답 ③

17 A 지역을 선호하는 학생의 집합을 A , B 지역을 선호하는 학생의 집합을 B 라 하면 만 전체 학생이 40명이므로 조건 ㉠에서

$$n(A \cup B) = 40$$

조건 ㉡에서 $n(B) = x$ (x 는 자연수)라 하면

$$n(A) = 2x$$

또 두 지역 A, B 를 모두 선호하는 학생이 5명이므로

$$n(A \cap B) = 5$$

이때 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로

$$40 = 2x + x - 5, \quad 3x = 45$$

$$\therefore x = 15$$

따라서 $n(A) = 30$ 이므로 A 지역만을 선호하는 학생 수는

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$= 30 - 5 = 25$$

답 25

다른 풀이 A 지역을 선호하는 학생의 집합을 A, B 지역을 선호하는 학생의 집합을 B라 하면 두 지역 A, B를 모두 선호하는 학생이 5명이므로

$$n(A \cap B) = 5$$

$$n(A - B) = x \text{라 하면}$$

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) = x + 5$$

또 조건 ㉞에서 $n(A \cup B) = 40$ 이므로

$$n(B) = n(A \cup B) - n(A - B) = 40 - x$$

이때 조건 ㉝에서

$$x + 5 = 2(40 - x), \quad 3x = 75$$

$$\therefore x = 25$$

따라서 A 지역만을 선호하는 학생 수는 25이다.

$$18 \quad n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 7 + 5 - 10 = 2,$$

$$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C)$$

$$= 5 + 3 - 6 = 2$$

그런데 $A \cap C = \emptyset$ 에서 $A \cap B \cap C = \emptyset$ 이므로

$$n(A \cap C) = n(A \cap B \cap C) = 0$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

$$- n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 7 + 5 + 3 - 2 - 2 - 0 + 0$$

$$= 11$$

답 ①

$$B - A \\ = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$A_2 = \{2, 4, 6, \dots\}, \\ A_3 = \{3, 6, 9, \dots\}$$

이므로

$$A_3^c \\ = \{1, 2, 4, 5, 7, \dots\} \\ \therefore 6 \notin A_3^c$$



1등급을 위한 고난도 문제

본책 47쪽

$$01 \quad X * Y = \{-4, -2, 2, 4\},$$

$$Z * Y = \{-16, -8, -4\} \text{이므로}$$

$$(X * Y) \cup (Z * Y)$$

$$= \{-4, -2, 2, 4\} \cup \{-16, -8, -4\}$$

$$= \{-16, -8, -4, -2, 2, 4\}$$

따라서 집합 $(X * Y) \cup (Z * Y)$ 의 원소의 개수는 6이므로 부분집합의 개수는

$$2^6 = 64$$

답 ③

02 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 주어진 조건을 모두 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 집합이 각각 $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}$ 일 때,

$$s(A) \times s(B) = 15 \times 10 = 150$$

(ii) 두 집합이 각각 $\{1, 2, 3, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$ 일 때,

$$s(A) \times s(B) = 11 \times 14 = 154$$

→ ①

(i), (ii)에서 $s(A) \times s(B)$ 의 최댓값은 154이다.

→ ②

답 154

채점 기준	비율
① 주어진 조건을 모두 만족시키는 각 경우에서 $s(A) \times s(B)$ 의 값을 구할 수 있다.	80%
② $s(A) \times s(B)$ 의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

03 조건 ㉞에서 $A \cap B$ 의 원소의 개수가 3이고, 조건 ㉝에서 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합이 26이므로 26을 세 자연수의 제곱의 합으로 나타내면

$$26 = 1^2 + 3^2 + 4^2$$

따라서 1, 3, 4는 집합 A의 원소이다. 또

$$A \cap B = \{1^2, 3^2, 4^2\} = \{1, 9, 16\}$$

$$\text{이므로 } A = \{1, 3, 4, 9, 16\}$$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$$1^2 + 3^2 + 4^2 + 9^2 + 16^2 = 363$$

답 363

1등급 비밀노트

856

세 자연수를 각각 제곱하여 더한 값이 260이므로 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ 중에서 합이 260이 되는 세 수를 찾으면 된다.

04 조건 ㉞에서 두 집합 X, Y는 각각 두 집합 A, B의 부분집합이고 $X - Y = X$ 이므로 $X \cap Y = \emptyset$ 이다.

조건 ㉝에서 $A \cap B = \{5, 7, 9\}$ 이므로

$$\{5, 7, 9\} \subset (X \cup Y)$$

두 집합 A, B - A의 부분집합을 각각 P, Q라 하면 P, Q의 개수는 각각 $2^5, 2^6$ 이다. 이때

$$X = P,$$

$$Y = Q \cup \{(A \cap B) - P\} = Q \cup (\{5, 7, 9\} - P)$$

이므로 구하는 순서쌍 (X, Y)의 개수는

$$2^5 \cdot 2^6 = 2^{11} = 2048$$

답 2048

05 $\neg, 6 \in A_2$ 이지만 $6 \notin A_3^c$ 이다.

$$\therefore A_2 \not\subset A_3^c$$

ㄴ, 3과 4의 최소공배수는 12이므로 $A_3 \cap A_4 = A_{12}$

ㄷ, $A_{12} - A_k = \emptyset$ 이라면 $A_{12} \subset A_k$ 이어야 한다.

즉 k는 12의 양의 약수이어야 하므로

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

의 6개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

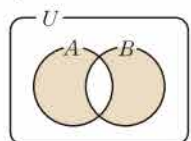
답 ④

06 조건 ㉞에서 $A = \{2, 3, 5, 7\}$

이때 집합 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 를

벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같고, 조건 ㉝에서 이 집합의 원소는 연속

하는 네 자연수이다.



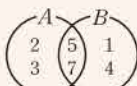
일품 BOX

(i) $n=1$ 일 때,

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4\} \text{이므로}$$

$$B = \{1, 4, 5, 7\}$$

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^4=16$ 이다.



(ii) $n=2$ 일 때,

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{2, 3, 4, 5\} \text{이므로}$$

$$B = \{4, 7\}$$

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^2=4$ 이다.

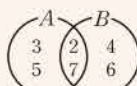


(iii) $n=3$ 일 때,

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{3, 4, 5, 6\} \text{이므로}$$

$$B = \{2, 4, 6, 7\}$$

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^4=16$ 이다.

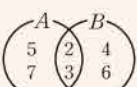


(iv) $n=4$ 일 때,

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{4, 5, 6, 7\} \text{이므로}$$

$$B = \{2, 3, 4, 6\}$$

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^4=16$ 이다.



(v) $n=5$ 일 때,

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{5, 6, 7, 8\} \text{이므로}$$

$$B = \{2, 3, 6, 8\}$$

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^4=16$ 이다.



(vi) $n=6$ 일 때,

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{6, 7, 8, 9\} \text{이므로}$$

$$B = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$$

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^6=64$ 이다.

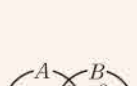


(vii) $n=7$ 일 때,

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{7, 8, 9, 10\} \text{이므로}$$

$$B = \{2, 3, 5, 8, 9, 10\}$$

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^6=64$ 이다.



이상에서 조건 ②를 만족시키는 n 의 값은

$$1, 3, 4, 5$$

따라서 구하는 n 의 값의 합은

$$1+3+4+5=13$$

답 ②

07 $(A \cap B) \cup B = B$ 이므로

$$A = B$$

② $A \cap B = A$ (또는 B)

③ $A^c \cap B = B - A = \emptyset$

④ $A \cup B = A$ (또는 B)

⑤ $A \cup B^c = A \cup A^c = U$

답 ①

08 임의의 두 집합 A, B 에 대하여

$$(A \cap B) \subset (A \cup B) \quad \dots\dots ㉠$$

이고, 주어진 조건에서 $(A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset$ 이므로

$$(A \cup B) \subset (A \cap B) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$A \cap B = A \cup B$$

$$\therefore A = B$$

답 ①

두 집합 X, Y 에 대하여
 $X \subset Y$ 이고 $Y \subset X$ 일 때
 $\Rightarrow X = Y$

09 $A \cap B = B$ 를 만족시키려면 $B \subset A$ 이어야 한다.

→ ①

(i) $B = \{-1\}$ 일 때,

$$(x+1)^2=0 \text{에서} \quad x^2+2x+1=0$$

$$\therefore a=-1, b=1$$

(ii) $B = \{1\}$ 일 때,

$$(x-1)^2=0 \text{에서} \quad x^2-2x+1=0$$

$$\therefore a=1, b=1$$

(iii) $B = \{-1, 1\}$ 일 때,

$$(x+1)(x-1)=0 \text{에서} \quad x^2-1=0$$

$$\therefore a=0, b=-1$$

→ ②

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$(-1, 1), (1, 1), (0, -1)$$

의 3이다.

→ ③

답 3

채점 기준	비율
① $A \cap B = B$ 에서 $B \subset A$ 임을 알 수 있다.	30%
② 각각의 집합 B 에 대하여 a, b 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구할 수 있다.	20%

10 $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

조건 ㉠에서

$$A = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

조건 ㉡에서

$$A \cap B = \emptyset$$

따라서 집합 B 의 개수는 집합 $\{1, 9, 15\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 그 개수는

$$2^3=8$$

답 8

11 $A^c - B^c = \emptyset$ 에서 $A^c \cap (B^c)^c = \emptyset$

$$\therefore A^c \cap B = \emptyset$$

$$A = \{x \mid |x+1| > 2\} \text{이므로}$$

$$A^c = \{x \mid |x+1| \leq 2\}$$

$$|x+1| \leq 2 \text{에서} \quad -2 \leq x+1 \leq 2$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 1$$

$$\therefore A^c = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$$

(i) $a > 0$ 일 때,

$$|x-2a| < a \text{에서} \quad -a < x-2a < a$$

$$\therefore a < x < 3a$$

$$\therefore B = \{x \mid a < x < 3a\}$$

오른쪽 그림에서

$$A^c \cap B = \emptyset \text{이 되도록 하}$$

는 실수 a 의 값의 범위는

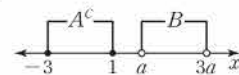
$$a \geq 1$$

(ii) $a=0$ 일 때,

$$|x| < 0 \text{을 만족시키는 실수 } x \text{는 존재하지 않으므로}$$

$$B = \emptyset$$

따라서 $A^c \cap B = \emptyset$ 이므로 $a=0$ 은 주어진 조건을 만족시킨다.



(iii) $a < 0$ 일 때,

$$|x-2a| < -a \text{에서 } a < x-2a < -a$$

$$\therefore 3a < x < a$$

$$\therefore B = \{x | 3a < x < a\}$$

오른쪽 그림에서

$A^c \cap B = \emptyset$ 이 되도록 하

는 실수 a 의 값의 범위는

$$a \leq -3$$

이상에서 $A^c - B^c = \emptyset$ 이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$a \leq -3 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a \geq 1$$

$$\text{답 } a \leq -3 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a \geq 1$$

참고 $A^c - B^c = \emptyset$ 이면 $A^c \subset B^c$ 이므로

$$B \subset A$$

12 $(A-B) \cup (B-A) = \emptyset$ 에서

$$A-B = \emptyset, B-A = \emptyset$$

즉 $A \subset B, B \subset A$ 이므로

$$A=B$$

이때 $A = \left\{ (1-i)^2, \frac{1}{i}, 2 \right\} = \{-2i, -i, 2\}$ 이므로

$$\{-2i, -i, 2\} = \{a+bi, (a-2)i, 2\}$$

(i) $a+bi = -2i, (a-2)i = -i$ 일 때,

$a+bi = -2i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=0, b=-2$$

이때 $a=0$ 을 $(a-2)i = -i$ 에 대입하면 등식이 성립하지 않는다.

(ii) $a+bi = -i, (a-2)i = -2i$ 일 때,

$a+bi = -i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=0, b=-1$$

이때 $a=0$ 을 $(a-2)i = -2i$ 에 대입하면 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $a=0, b=-1$

$$\therefore a^2 + b^2 = 1$$

$$(1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i,$$

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$$

채점 기준	비율
① 집합의 연산의 성질을 이용하여 $A=B$ 임을 알 수 있다.	50%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $a^2 + b^2$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

13 $(A-C) \cap (B-C) = (A \cap C^c) \cap (B \cap C^c)$

$$= (A \cap B) \cap C^c$$

이때 $A \cap B = \{x | x \text{는 유리수}\}$ 이고

$C^c = \{x | x \text{는 무리수 또는 } 0\}$ 이므로

$$(A-C) \cap (B-C) = (A \cap B) \cap C^c = \{0\}$$

따라서 집합 $(A-C) \cap (B-C)$ 의 모든 원소의 합은 0이다.

$b=0, d=0$ 인 경우

$(X \cup Y) \subset Z$ 이므로
 $(X \cap Y) \subset Z$

14 2와 서로소가 아닌 자연수는 2를 약수로 가지므로 A_2 는 2의 배수의 집합이다.

6과 서로소가 아닌 자연수는 2 또는 3을 약수로 가지므로 A_6 은 2의 배수 또는 3의 배수의 집합이다. 즉

$$A_6 = A_2 \cup A_3$$

4와 서로소가 아닌 자연수는 2를 약수로 가지므로 A_4 는 2의 배수의 집합이다. 즉

$$A_4 = A_2$$

9와 서로소가 아닌 자연수는 3을 약수로 가지므로 A_9 는 3의 배수의 집합이다. 즉

$$A_9 = A_3$$

$$\therefore (A_2 \cup A_6) \cap (A_4 \cup A_9)$$

$$= \{A_2 \cup (A_2 \cup A_3)\} \cap (A_2 \cup A_3)$$

$$= (A_2 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_3)$$

$$= A_2 \cup A_3$$

→ ①

집합 A_k 는 2의 배수 또는 3의 배수의 집합이므로 6과 서로소가 아닌 자연수들의 집합이다.

따라서 구하는 자연수 k 의 최솟값은 6이다.

→ ②

답 6

채점 기준	비율
① $(A_2 \cup A_6) \cap (A_4 \cup A_9)$ 를 간단히 할 수 있다.	70%
② 자연수 k 의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

참고 자연수 k 의 값은 $2^a \cdot 3^b$ (a, b 는 자연수) 꼴의 수이다.

15 $(X \cup Y) \subset Z$ 이면

$$X \subset Z, Y \subset Z$$

$$\therefore (Z-X)^c \cap Y = (Z \cap X^c)^c \cap Y$$

$$= (Z^c \cup X) \cap Y$$

$$= (Z^c \cap Y) \cup (X \cap Y)$$

$$= (Y-Z) \cup (X \cap Y)$$

$$= \emptyset \cup (X \cap Y)$$

$$= X \cap Y$$

① $X \subset Z, Y \subset Z$ 이면

$$Z \cap X = X, Z \cap Y = Y$$

$$\therefore (Z \cap X) \cup (Z \cap Y) = X \cup Y$$

② $X \subset Z, Y \subset Z$ 이면

$$Z \cup X = Z, Z \cup Y = Z$$

$$\therefore (Z \cup X)^c \cap (Z \cup Y)^c = Z^c \cap Z^c = Z^c$$

③ $(Z-X) \cap (Z-Y) = (Z \cap X^c) \cap (Z \cap Y^c)$

$$= Z \cap (X^c \cap Y^c)$$

$$= Z \cap (X \cup Y)^c$$

$$= Z - (X \cup Y)$$

④ $(X-Z^c) \cap (Y-Z^c) = (X \cap Z) \cap (Y \cap Z)$

$$= (X \cap Y) \cap Z$$

$$= X \cap Y$$

⑤ $Y \subset Z$ 이면 $Z^c \subset Y^c$ 이므로

$$Z^c \cap Y^c = Z^c$$

$$\therefore (Z \cap X) \cup (Z^c \cap Y^c) = X \cup Z^c$$

답 ④

다른 풀이 ① $(Z \cap X) \cup (Z \cap Y) = Z \cap (X \cup Y)$
 $= X \cup Y$

② $(Z \cup X)^c \cap (Z \cup Y)^c = (Z^c \cap X^c) \cap (Z^c \cap Y^c)$
 $= Z^c \cap (X^c \cap Y^c)$
 $= Z^c \cap (X \cup Y)^c$
 $= Z^c$

$(X \cup Y) \subset Z$ 이므로
 $Z^c \subset (X \cup Y)^c$

16 조건 (가)에서

$$(A \cap B^c) \cup (B^c \cup A)^c = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

$$= (A - B) \cup (B - A)$$

이므로

$$(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4, 5\}$$

조건 (나)에서

$$(A^c \cup B^c) \cap C = (A \cap B)^c \cap C$$

$$= C - (A \cap B)$$

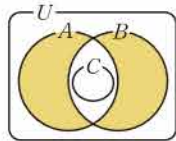
이므로

$$C - (A \cap B) = \emptyset$$

$$\therefore C \subset (A \cap B)$$

이를 벤 다이어그램으로 나타내면
 오른쪽 그림과 같다.

이때 집합 $(A - B) \cup (B - A)$ 는
 색칠한 부분과 같고 이 집합의 원소
 는 2, 3, 4, 5이다.



한편 조건 (나)에서 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이고 집합
 $A^c \cap B^c$ 의 모든 원소의 합이 9이므로

$$(A \cup B)^c = \{9\} \text{ 또는 } (A \cup B)^c = \{1, 8\}$$

$$\therefore A \cap B = \{1, 6, 7, 8\} \text{ 또는 } A \cap B = \{6, 7, 9\}$$

따라서 $A \cap B = \{1, 6, 7, 8\}$ 일 때 $n(A \cap B)$ 가 최대이
 고, 집합 C 는 집합 $A \cap B$ 의 부분집합 중에서 공집합을
 제외해야 하므로 구하는 집합 C 의 개수는

$$2^4 - 1 = 15 \quad \text{답 15}$$

참고 $A \cap B = \{6, 7, 9\}$ 일 때, 집합 C 의 개수는

$$2^3 - 1 = 7$$

17 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 15 + 12 - n(A \cup B)$$

$$= 27 - n(A \cup B)$$

즉 $3 \leq 27 - n(A \cup B) \leq 6$ 이므로

$$-24 \leq -n(A \cup B) \leq -21$$

$$\therefore 21 \leq n(A \cup B) \leq 24$$

따라서 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 24, 최솟값은 21이므로
 구하는 합은 45이다.

①

②

답 45

채점 기준	비율
① $n(A \cap B)$ 를 $n(A \cup B)$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
② $n(A \cup B)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	50%

18 벤 다이어그램의 각 부분에
 속하는 원소의 개수를 오른쪽 그림
 과 같이 나타내자.

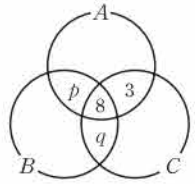
이때 $n(B - (A \cup C))$ 가 최소이
 려면 $n(A \cup C)$, 즉 $p + q$ 가 최대
 이어야 한다.

$$n(A) - n(A \cap C) = 15 - (8 + 3) = 4 \text{이므로 } p \text{의 최댓값은 } 4$$

$$n(C) - n(A \cap C) = 19 - (8 + 3) = 8 \text{이므로 } q \text{의 최댓값은 } 8$$

따라서 $n(B - (A \cup C))$ 의 최솟값은

$$23 - (4 + 8 + 8) = 3$$



답 3

19 $(A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$

$$= \{(A^c \cup B) \cap A\} \cup \{(A^c \cup B) \cap B^c\}$$

$$= \{(A^c \cap A) \cup (B \cap A)\} \cup \{(A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c)\}$$

$$= (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$$

이므로 $A \Delta B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$

벤 다이어그램의 각 부분에 속하
 는 원소의 개수를 오른쪽 그림과
 같이 나타내면

$$n(A \Delta B) = b + c + g + h,$$

$$n(B \Delta C) = c + f + a + h,$$

$$n(C \Delta A) = c + d + e + h$$

이고 조건 (나)에서

$$b + g = f + a = d + e$$

이때 $c = 5, h = 50 - 44 = 6$ 이므로

$$n(U) = a + b + c + d + e + f + g + h$$

$$= (a + f) + (b + g) + (d + e) + 5 + 6$$

$$= 3(a + f) + 11$$

즉 $3(a + f) + 11 = 50$ 이므로

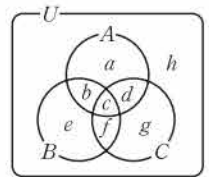
$$a + f = 13$$

$$\therefore n((A - C) \cup (C - A)) = (a + b) + (g + f)$$

$$= (a + f) + (b + g)$$

$$= 2(a + f)$$

$$= 26 \quad \text{답 ③}$$



20 80명의 학생 전체의 집합을 U , 세 권의 책 $A, B,$
 C 를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하면

$$n(U) = n(A \cup B \cup C) = 80,$$

$$n(A) = 42, n(B) = 35, n(C) = 44,$$

$$n(A \cap B \cap C) = 16$$

이때

$$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C)$$

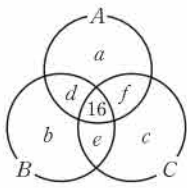
$$- n(A \cup B \cup C)$$

$$= 42 + 35 + 44 + 16 - 80$$

$$= 57$$

이므로 세 권의 책 중에서 한 권만 읽은 학생 수는
 $80 - \{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} + 2n(A \cap B \cap C)$
 $= 80 - 57 + 2 \cdot 16$
 $= 55$

다른 풀이 세 권의 책 A, B, C를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하고 벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내자.



$n(A \cup B \cup C) = 80$, $n(A) = 42$,
 $n(B) = 35$, $n(C) = 44$ 이므로

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f &= 64 & \text{..... ㉠} \\ a+d+f &= 26 & \text{..... ㉡} \\ b+d+e &= 19 & \text{..... ㉢} \\ c+e+f &= 28 & \text{..... ㉣} \end{aligned}$$

㉠+㉡+㉢-㉣을 하면

$$d+e+f=9 \quad \text{..... ㉤}$$

㉤을 ㉠에 대입하면

$$a+b+c=55$$

따라서 세 권의 책 중에서 한 권만 읽은 학생 수는 55이다.

모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로 $P \subset P$

따라서 집합 R의 부분집합의 개수는
 $2^3=8$

ㄴ. $Q - \{2, 6, 8\} = R$ 이므로 $\neg$ 에서

$$1 \in Q, 3 \in Q, 4 \in Q$$

한편 $P^c \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} = Q$ 에서

$$Q \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$\therefore \{1, 3, 4\} \subset Q \subset \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

따라서 2는 집합 Q의 원소일 수도 있고 아닐 수도 있다.

ㄷ. $Q = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ 이면

$$P^c \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

이므로

$$\{1, 2, 3, 4, 6\} \subset P^c$$

이때 $P^c = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ 이면

$$P = \{5, 7, 8, 9, 10\}$$

따라서 원소의 개수가 5인 부분집합을 갖는 집합 P가 존재한다.

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

정답 ①

03 조건 (가), (나)에서

$$\begin{aligned} A \cap B^c &= \{x | x \text{는 } 3 \text{의 배수이고 } 4 \text{의 배수인 수}\} \\ &= \{x | x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \text{는 } 3 \text{의 배수이고 } 4 \text{의 배수가 아닌 수}\} \\ &= \{x | x \text{는 } 3 \text{의 배수 중 } 12 \text{의 배수가 아닌 수}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^c \cap B &= \{x | x \text{는 } 4 \text{의 배수이고 } 3 \text{의 배수가 아닌 수}\} \\ &= \{x | x \text{는 } 4 \text{의 배수 중 } 12 \text{의 배수가 아닌 수}\} \end{aligned}$$

한편 200 이하의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 66, 4의 배수의 개수는 50, 12의 배수의 개수는 16이므로

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= 66 - 16 = 50, \\ n(A^c \cap B) &= 50 - 16 = 34 \\ \therefore n(B) &= n(A \cap B) + n(A^c \cap B) \\ &= 50 + 34 = 84 \end{aligned}$$

정답 84

04 조건 (가)에서

$$\begin{aligned} (B-A)^c \cap \{A \cap (A \cap B)^c\} \\ &= (B \cap A^c)^c \cap \{A \cap (A^c \cup B^c)\} \\ &= (B^c \cup A) \cap \{(A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)\} \\ &= (B^c \cup A) \cap \{\emptyset \cup (A \cap B^c)\} \\ &= (B^c \cup A) \cap (A \cap B^c) \\ &= A \cap B^c \quad (\because (A \cap B^c) \subset (B^c \cup A)) \\ &= A - B \end{aligned}$$

즉 $A - B = \emptyset$ 이므로

$$A \subset B$$

조건 (가)에서 $n(B) \leq 5$ 이고, 조건 (나)에서 $n(A), n(B)$ 는 모두 홀수이므로

$$n(B) = 1 \text{ 또는 } n(B) = 3 \text{ 또는 } n(B) = 5$$

(i) $n(B) = 1$ 일 때,

$n(A) = 1$, 즉 $A = B$ 이므로 순서쌍 (A, B) 의 개수는 5이다.

$(\{1\}, \{1\}), (\{2\}, \{2\}),$
 $(\{5\}, \{5\}), (\{7\}, \{7\}),$
 $(\{10\}, \{10\})$

내신 + 수능

1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제**

본책 50쪽

01 $A \cap X = B \cup X$ 에서

$$X \subset (B \cup X) \subset A$$

$$\therefore X \subset A \quad \text{..... ㉠}$$

마찬가지로 $A \cap X = B \cup X$ 에서

$$B \subset (B \cup X) \subset X$$

$$\therefore B \subset X \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$B \subset X \subset A$$

따라서 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 집합 B의 원소인 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$$2^{6-2} = 2^4 = 16 \quad \text{정답 ③}$$

02 $\neg$. $R \cup \{2, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로

$$1 \in R, 3 \in R, 4 \in R$$

$$\therefore \{1, 3, 4\} \subset R \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

이때 $Q - \{2, 6, 8\} = R$ 에서

$$2 \notin R$$

또 $P^c \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} = Q$ 에서 $5 \notin Q$ 이므로

$$5 \notin R$$

$$\therefore R = \{1, 3, 4\}$$

(ii) $n(B)=3$ 일 때,

$$n(A)=1 \text{ 또는 } n(A)=3$$

① $n(A)=1$ 인 경우

$n(B)=3$ 을 만족시키는 집합 B 의 개수는

$${}_5C_3=10$$

이 각각의 집합 B 에 대하여 $n(A)=1$ 인 경우는 3가지씩이므로 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$$10 \cdot 3=30$$

② $n(A)=3$ 인 경우

$A=B$ 이므로 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$${}_5C_3=10$$

①, ②에서 $30+10=40$

(iii) $n(B)=5$ 일 때,

$$n(A)=1 \text{ 또는 } n(A)=3 \text{ 또는 } n(A)=5$$

① $n(A)=1$ 인 경우

$n(B)=5$ 를 만족시키는 집합 B 의 개수는 1이고 집합 A 의 개수는 5이므로 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $1 \cdot 5=5$

② $n(A)=3$ 인 경우

$n(B)=5$ 를 만족시키는 집합 B 의 개수는 1이고 집합 A 의 개수는

$${}_5C_3=10$$

이므로 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $1 \cdot 10=10$

③ $n(A)=5$ 인 경우

$A=B$ 이므로 순서쌍 (A, B) 의 개수는 1이다.

①, ②, ③에서 $5+10+1=16$

이상에서 구하는 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$$5+40+16=61$$

답 ④

1, 2, 5, 7, 10의 5개 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같다.

이므로

$$300=450-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(C \cap A)+20$$

$$\therefore n(A \cap B)+n(B \cap C)+n(C \cap A)=170$$

따라서 두 종목 이상을 해 본 학생 수는

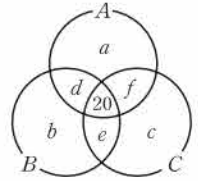
$$n(A \cap B)+n(B \cap C)+n(C \cap A)-2n(A \cap B \cap C)$$

$$=170-2 \cdot 20$$

$$=130$$

답 130

다른 풀이 야구, 축구, 농구를 해 본 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하고 벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내자.



조건 (가)에서

$$a+b+c+d+e+f+20=300 \quad \cdots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$a=e+20, b=f+20, c=d+20$$

$$\therefore a+b+c=e+f+d+60 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$2(d+e+f)=220$$

$$\therefore d+e+f=110$$

따라서 두 종목 이상을 해 본 학생 수는

$$d+e+f+20=110+20=130$$

05 300명의 학생 전체의 집합을 U , 야구, 축구, 농구를 해 본 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하면 조건 (가), (나)에서

$$n(A \cup B \cup C)=300, n(A \cap B \cap C)=20$$

조건 (나)에서 야구만 해 본 학생 수는 축구, 농구를 모두 해 본 학생 수와 같으므로

$$n(A-(B \cup C))=n(B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C)-n(B \cup C)=n(B \cap C)$$

$$300-n(B)-n(C)+n(B \cap C)=n(B \cap C)$$

$$\therefore n(B)+n(C)=300 \quad \cdots \textcircled{1}$$

같은 방법으로

$$n(C)+n(A)=300 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$n(A)+n(B)=300 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①+②+③을 하면

$$2\{n(A)+n(B)+n(C)\}=900$$

$$\therefore n(A)+n(B)+n(C)=450$$

이때

$$n(A \cup B \cup C)$$

$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(C \cap A)+n(A \cap B \cap C)$$

06 명제

개념 & 핵심 기출

본책 51쪽

01 $|x-3| \leq 2$ 에서 $-2 \leq x-3 \leq 2$
 $\therefore 1 \leq x \leq 5 \quad \therefore P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$x^2 - 4x > 0$ 에서 $x(x-4) > 0$
 $\therefore x < 0$ 또는 $x > 4 \quad \therefore Q = \{5, 6, 7\}$

따라서

$$P^c \cap Q = \{6, 7\} \cap \{5, 6, 7\} = \{6, 7\}$$

이므로 집합 $P^c \cap Q$ 의 원소의 개수는 2이다. 답 2

다른 풀이 $P^c \cap Q = Q - P$
 $= \{5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $= \{6, 7\}$

02 $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이고
 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 에서 $(x-2)(x-4) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 4$

즉 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{2, 4\}$$

이때 조건 $\sim p$ 의 진리집합은 P^c 이므로

$$P^c = \{1, 3, 6, 12\}$$

따라서 집합 P^c 의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 + 6 + 12 = 22$$

답 22

03 $\neg$. ' $-2 < a < 3$ ', 즉 ' $a > -2$ 이고 $a < 3$ '의 부정은
' $a \leq -2$ 또는 $a \geq 3$ '이다.

$\perp$. ' $|a| = |b|$ ', 즉 ' $a = b$ 또는 $a = -b$ '의 부정은 ' $a \neq b$
이고 $a \neq -b$ '이다.

$\sqsubset$. ' $a^2 + b^2 = 0$ ', 즉 ' $a = 0$ 이고 $b = 0$ '의 부정은 ' $a \neq 0$ 또는
 $b \neq 0$ '이다.

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\perp$ 이다. 답 ②

참고 $\sqsubset$. $ab \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$

04 $|x+a| < 6$ 에서 $-6 < x+a < 6$
 $\therefore -a-6 < x < -a+6$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | a-2 \leq x \leq a+2\},$$

$$Q = \{x | -a-6 < x < -a+6\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려

면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

오른쪽 그림에서

$$-a-6 < a-2, a+2 < -a+6$$

$$\therefore -2 < a < 2$$

따라서 정수 a 의 개수는 $-1, 0, 1$ 의 3이다. 답 3

05 $\neg$. [반례] $a = \sqrt{2}$ 이면 $a+b = \sqrt{2}$ 에서 $b=0$ 이므로
 b 는 유리수이다.

$\perp$. a 가 무리수이면 $a \neq 0$ 이므로 $ab=1$ 에서 $b = \frac{1}{a}$ 은 무
리수이다.

$\sqsubset$. [반례] $a=0$ 이면 $b^2 = a^2 + 1 = 1$ 이므로

$$b = \pm 1$$

이때 b 는 유리수이다.

이상에서 참인 명제는 $\perp$ 뿐이다. 답 ②

06 주어진 명제가 참이 되려면 그 대우

$$'x-a=0 \text{ 이면 } x^4 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \text{ 이다.}'$$

도 참이 되어야 한다.

$x-a=0$, 즉 $x=a$ 를 $x^4 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$ 에 대입하면

$$a^4 - 2a^2 + 3a - 2 = 0$$

이때 $P(a) = a^4 - 2a^2 + 3a - 2$ 라 하면

$$P(1) = 0, P(-2) = 0$$

조립제법을 이용하여 $P(a)$ 를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ & & 1 & 1 & -1 & 2 \\ \hline -2 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ & & -2 & 2 & -2 & \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore P(a) = (a-1)(a+2)(a^2 - a + 1)$$

따라서 방정식 $P(a) = 0$ 의 실근은

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

이므로 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-2 + 1 = -1$$

답 -1

이차방정식 $a^2 - a + 1 = 0$

의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= -3 < 0$$

이므로 이차방정식

$$a^2 - a + 1 = 0 \text{ 은 서로 다}$$

른 두 허근을 갖는다.

여러 가지 부정

① 크다. $\Rightarrow$ 작거나 같다.

② 작다. $\Rightarrow$ 크거나 같다.

③ 같다. $\Rightarrow$ 같지 않다.

④ 그리고 $\Rightarrow$ 또는

⑤ 또는 $\Rightarrow$ 그리고

$$x^2 - 3x = 0 \text{ 에서}$$

$$x(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore Q = \{0, 3\}$$

07 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명
제 $p \rightarrow q$ 의 역 $q \rightarrow p$ 가 거짓이라면 $Q \not\subset P$ 이어야 한
다.

$\neg$. $P = \{x | x > 0\}$, $Q = \{0, 3\}$ 이므로 $Q \not\subset P$ 이다. 즉
명제 $q \rightarrow p$ 는 거짓이다.

$\perp$. $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이면 $x+y > 2$ 이므로 $Q \subset P$ 이다. 즉
명제 $q \rightarrow p$ 는 참이다.

$\sqsubset$. $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로
 $Q \not\subset P$ 이다. 즉 명제 $q \rightarrow p$ 는 거짓이다.

이상에서 명제 $p \rightarrow q$ 의 역이 거짓인 것은 $\neg$, $\sqsubset$ 이다. 답 ③

08 명제 $p \rightarrow q$ 의 역이 참이므로 명제 $q \rightarrow p$ 가 참
이다.

$$\therefore Q \subset P$$

명제 $p \rightarrow q$ 의 대우가 참이므로 그 명제도 참이다.

$$\therefore P \subset Q$$

따라서 $P = Q$ 이다.

(i) $4-a=2$, 즉 $a=2$ 일 때,

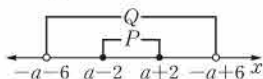
$$P = \{2, 4\}, Q = \{2, 5\} \text{ 이므로 } P \neq Q$$

(ii) $3a-1=2$, 즉 $a=1$ 일 때,

$$P = \{2, 3\}, Q = \{2, 3\} \text{ 이므로 } P = Q$$

(i), (ii)에서 $a=1$

답 ④



09 조건 $|x-1|=1$ 의 진리집합을 A 라 하면

$$A=\{x \mid |x-1|=1\}=\{0, 2\}$$

ㄱ. 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P=\{x \mid (x-2)^2=0\}=\{2\}$$

즉 $P \subset A$ 이므로 조건 p 는 $|x-1|=1$ 이기 위한 **충분조건**이다.

ㄴ. 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q=\{x \mid x^2-2x=0\}=\{0, 2\}$$

즉 $A=Q$ 이므로 조건 q 는 $|x-1|=1$ 이기 위한 **필요충분조건**이다.

ㄷ. 조건 r 의 진리집합을 R 라 하면

$$R=\{x \mid 2x-5 < 0\}=\left\{x \mid x < \frac{5}{2}\right\}$$

즉 $A \subset R$ 이므로 조건 r 는 $|x-1|=1$ 이기 위한 **필요조건**이다.

이상에서 $|x-1|=1$ 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 **ㄷ**뿐이다. **답 ③**

10 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P=\{x \mid x^2-4x-5 < 0\}=\{x \mid -1 < x < 5\}$$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q=\{x \mid |x-a| < 3\}=\{x \mid a-3 < x < a+3\}$$

따라서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건이 되려면 $P=Q$ 이어야 하므로

$$a-3=-1, a+3=5$$

$$\therefore a=2$$

답 2

11 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하자.

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset R$

q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $R \subset Q$

$$\therefore P \subset R \subset Q$$

이때 $P=\{1, 2, 3, 6\}$, $Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ 이므로

$$R=P \text{ 또는 } R=\{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 양의 약수}\}$$

$$\text{또는 } R=Q$$

따라서 n 의 값은 6 또는 12 또는 24이므로 구하는 합은

$$6+12+24=42$$

답 42

12 주어진 명제의 대우는

‘ a 가 3의 배수가 아니면 a^2+3a 도 3의 배수가 아니다.’이다.

a 가 3의 배수가 아니면 $a=3k+1$ 또는 $a=3k+2$

($k=0, 1, 2, \dots$)로 나타낼 수 있다.

(i) $a=3k+1$ 이면

$$a^2+3a=(3k+1)^2+3(3k+1)$$

$$=9k^2+15k+4$$

$$=3(3k^2+5k+1)+1$$

이므로 a^2+3a 는 3의 배수가 아니다.

(ii) $a=3k+2$ 이면

$$a^2+3a=(3k+2)^2+3(3k+2)$$

$$=9k^2+21k+10$$

$$=3(3k^2+7k+3)+1$$

이므로 a^2+3a 는 3의 배수가 아니다.

(i), (ii)에서 a^2+3a 는 3의 배수가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. **답 풀이 참조**

13 이때 $p > \sqrt{n}$ 이고 $q > \sqrt{n}$ 이면 $pq > \sqrt{n}\sqrt{n}=n$ 이므로 $pq \leq n$ 이라는 가정에 모순이다.

따라서 $p \leq \sqrt{n}$ 이거나 $q \leq \sqrt{n}$ 이다. **답 ①**

14 $2a^2+2a(2-3b)+9b^2+4$

$$=2a^2+4a-6ab+9b^2+4$$

$$=(a^2+4a+4)+(a^2-6ab+9b^2)$$

$$=(a+2)^2+(a-3b)^2 \geq 0$$

이때 $a+2, a-3b$ 는 실수이므로

$$a+2=0, a-3b=0$$

$$\therefore a=-2, b=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore 9ab=12$$

답 12

15 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)$

$$=1+\frac{9a}{b}+\frac{b}{a}+9$$

$$=10+\frac{9a}{b}+\frac{b}{a}$$

$$\geq 10+2\sqrt{\frac{9a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \left(\because \frac{9a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0 \right)$$

$$=10+2 \cdot 3=16 \text{ (단, 등호는 } 3a=b \text{ 일 때 성립)}$$

따라서 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)$ 는 $a=\alpha, b=\beta=3\alpha$ 일 때 최솟값 16을 가지므로

$$k+\frac{\beta}{\alpha}=16+\frac{3\alpha}{\alpha}=19$$

답 19

비밀노트

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad \dots \textcircled{1}, \quad \frac{1}{a}+\frac{9}{b} \geq 2\sqrt{\frac{9}{ab}} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②를 변끼리 곱하면

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{9}{ab}}=12 \quad \dots \textcircled{3}$$

이때 ①, ②의 등호가 동시에 성립하도록 하는 양수 a, b 의 값이 존재하지 않으므로 ③은 성립하지 않는다. 즉 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)$ 의 최솟값은 12가 아니다.

16 $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)^2 \leq (1^2+1^2)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{d}\right)^2\right]$

(단, 등호는 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 일 때 성립)

$$\therefore \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)^2 \leq 2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}\right)$$

따라서 $k \geq 2$ 이므로 실수 k 의 최솟값은 2이다. **답 2**

1등급을 위한 고난도 문제

본책 54쪽

01 $|x-a| < 1$ 에서 $-1 < x-a < 1$

$$\therefore a-1 < x < a+1$$

$$\therefore P = \{x | a-1 < x < a+1\}$$

$|x-b| \leq 2$ 에서 $-2 \leq x-b \leq 2$

$$\therefore b-2 \leq x \leq b+2$$

$$\therefore Q = \{x | b-2 \leq x \leq b+2\}$$

$P \subset Q$ 가 성립하려면 오른쪽

그림에서

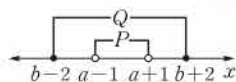
$$b-2 \leq a-1,$$

$$a+1 \leq b+2$$

$$\therefore -1 \leq a-b \leq 1$$

따라서 $a-b$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -1



채점 기준	비율
① 두 집합 P, Q 를 각각 구할 수 있다.	40%
② $a-b$ 의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	60%

02 조건 ' p 또는 $\sim q$ '의 부정은 ' $\sim p$ 이고 q '이다.

이때 $p: 1 < x \leq 4$ 에서

$$\sim p: x \leq 1 \text{ 또는 } x > 4$$

이고, $q: -1 \leq x < 7$ 이므로 조건 ' $\sim p$ 이고 q '는

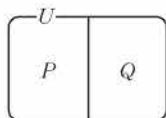
$$-1 \leq x \leq 1 \text{ 또는 } 4 < x < 7$$

답 ④

03 $P \cap Q = \emptyset, P \cup Q = U$ 를 만족시키는 두 집합 P, Q 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $P = Q^c, P^c = Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $\sim p \rightarrow q$ 는 참이다.

이상에서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.



답 ④

04 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 명제 ' $(p$ 이고 $q) \rightarrow r$ '가 참이려면 $(P \cap Q) \subset R$ 이어야 한다.

오른쪽 그림에서

$(P \cap Q) \subset R$ 이려면

$$a \geq 3$$

$$\therefore m = 3$$

또 명제 $r \rightarrow (p \text{ 또는 } q)$ 가 참이려면 $R \subset (P \cup Q)$ 이어야 한다.

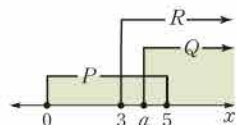
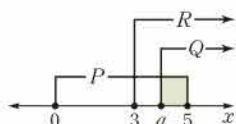
오른쪽 그림에서

$R \subset (P \cup Q)$ 이려면

$$a \leq 5$$

$$\therefore n = 5$$

$$\therefore m+n=8$$



답 8

$$\begin{aligned} (3k+1)^2 &= 9k^2 + 6k + 1 \\ &= 3(3k^2 + 2k) + 1 \\ &= 3(3k+2)^2 \\ &= 9k^2 + 12k + 4 \\ &= 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \end{aligned}$$

05 $\neg, x \in P - Q$ 이면 $x \notin Q$ 이다.

즉 $x \in P$ 인 어떤 x 에 대하여 $x \notin Q$ 이다.

ㄴ, $P \cap R = \emptyset$ 이므로 $P \subset R^c$

즉 $x \in P$ 인 모든 x 에 대하여 $x \notin R$ 이다.

ㄷ, $(Q - P) \cap R \neq \emptyset$ 이므로 $x \in Q - P$ 인 어떤 x 에 대하여 $x \in R$ 이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

06 ㄱ, (i) $a^3 = b^3$ 이면 $a = b$ 이므로 $a^2 = b^2$ 이다. 즉 주어진 명제의 역 ' $a^3 = b^3$ 이면 $a^2 = b^2$ 이다.'는 참이다.

(ii) [반례] $a=1, b=-1$ 이면 $a^2 = b^2$ 이지만 $a^3 \neq b^3$ 이다. 즉 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

ㄴ, (i) $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $a = b = 0$ 이므로 $|a| + |b| = 0$ 이다. 즉 주어진 명제의 역 ' $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $|a| + |b| = 0$ 이다.'는 참이다.

(ii) $|a| + |b| = 0$ 이면 $a = b = 0$ 이므로 $a^2 + b^2 = 0$ 이다. 즉 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄷ, (i) $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이므로 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다. 즉 주어진 명제의 역 ' $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.'는 참이다.

(ii) [반례] $a=0, b=1$ 이면 $ab=0$ 이지만 $b \neq 0$ 이다. 즉 주어진 명제의 대우 ' $ab=0$ 이면 $a=0$ 이고 $b=0$ 이다.'는 거짓이다.

이상에서 역은 참이고, 대우는 거짓인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

1등급 비밀노트

888

실수 a, b 에 대하여

① $a=b$ 는 $a^2=b^2$ 이기 위한 충분조건이다.

② $a=b$ 는 $a^3=b^3$ 이기 위한 필요충분조건이다.

③ $a^2=b^2$ 은 $a^3=b^3$ 이기 위한 필요조건이다.

07 ㄱ, a, b, c 가 모두 홀수이면 a^2, b^2, c^2 은 모두 홀수이고, $a^2 + b^2$ 은 짝수이므로

$$a^2 + b^2 \neq c^2$$

즉 주어진 명제의 대우 ' a, b, c 가 모두 홀수이면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ 이다.'가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

ㄴ, [반례] $a=6, b=8, c=10$ 이면 $a^2 + b^2 = c^2$ 이지만 a, b, c 는 모두 소수가 아니다. 즉 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ, a, b, c 가 모두 3의 배수가 아니면 a, b, c 를 각각 $3k+1$ 또는 $3k+2$ ($k=0, 1, 2, \dots$)로 나타낼 수 있다.

이때 a^2, b^2, c^2 은 모두 $3l+1$ ($l=0, 1, 2, \dots$) 꼴이고, $a^2 + b^2$ 은 $3m+2$ ($m=0, 1, 2, \dots$) 꼴이므로 $a^2 + b^2 \neq c^2$

즉 주어진 명제의 대우 'a, b, c가 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2 \neq c^2$ '이다.'가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

이상에서 참인 명제인 것은 $\neg$, $\supset$ 이다. 답 ④

08 $\neg$. 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow p$ 도 참이다.

$\neg$. 명제 $r \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 그 대우 $p \rightarrow \sim r$ 는 참이지만 명제 $p \rightarrow r$ 의 참, 거짓은 추론할 수 없다.

$\supset$. 두 명제 $q \rightarrow p$, $p \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 명제 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이다.

이상에서 항상 참인 명제인 것은 $\neg$, $\supset$ 이다. 답 ③

09 $\neg$. [반례] $A=\emptyset$, $B \neq \emptyset$ 이면 $A \subset B$ 이지만

$$n(A \cup B) \neq 0, n(A) = 0 \text{이므로}$$

$$n(A \cup B) > n(A)$$

따라서 $n(A \cup B) \leq n(A)$ 는 $A \subset B$ 이기 위한 필요조건이 아니다.

$$\neg. n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B)$$

$$\text{이므로 } n(A) + n(B) \leq n(A)$$

$$n(B) \leq 0 \quad \therefore n(B) = 0$$

$$\text{즉 } B = \emptyset \text{이므로 } A \cap B = \emptyset$$

따라서 $n(A \cup B) + n(A \cap B) \leq n(A)$ 는 $A \cap B = \emptyset$ 이기 위한 충분조건이다.

$$\supset. n(A) + n(B) \leq n(A \cap B) \text{에서}$$

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leq 0$$

$$n(A \cup B) \leq 0 \quad \therefore n(A \cup B) = 0$$

$$\therefore A \cup B = \emptyset$$

$$\text{또 } A \cup B = \emptyset \text{이면 } A = \emptyset, B = \emptyset \text{ 이므로}$$

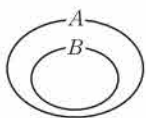
$$n(A) + n(B) \leq n(A \cap B)$$

따라서 $n(A) + n(B) \leq n(A \cap B)$ 는 $A \cup B = \emptyset$ 이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\supset$ 이다. 답 ④

참고 $\neg$. $n(A \cup B) \leq n(A)$ 에서 두 집합 A, B의 포함관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $B \subset A$

따라서 $n(A \cup B) \leq n(A)$ 는 $A \subset B$ 이기 위한 충분조건도 아니다.



10 p 가 r 이기 위한 충분조건이므로 명제 $p \rightarrow r$ 가 참이고, 그 대우인 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

$$\text{즉 } 2x+b=0 \text{이면 } x^2+x-2=0 \text{이다.}$$

따라서 $x = -\frac{b}{2}$ 를 $x^2+x-2=0$ 에 대입하면 성립해야 하므로

$$\left(-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right) - 2 = 0, \quad b^2 - 2b - 8 = 0$$

$$(b+2)(b-4) = 0 \quad \therefore b = -2 \text{ 또는 } b = 4$$

$A = \emptyset, B \neq \emptyset$ 이면
 $A \cap B = \emptyset$ 이지만
 $n(A \cup B) + n(A \cap B)$
 $> n(A)$
이므로 필요조건은 아니다.

$$\begin{aligned} a > 0, b \geq 0 \text{ 일 때,} \\ a > b &\iff a^2 > b^2 \\ &\iff \sqrt{a} > \sqrt{b} \end{aligned}$$

한편 q 가 r 이기 위한 충분조건이므로 명제 $q \rightarrow r$ 가 참이고, 그 대우인 $\sim r \rightarrow \sim q$ 도 참이다.

$$\text{즉 } 2x+b=0 \text{ 이면 } x^2-2x+a=0 \text{이다.}$$

따라서 $x = -\frac{b}{2}$ 를 $x^2-2x+a=0$ 에 대입하면 성립해야 한다.

(i) $b = -2$ 일 때,

$$x = -\frac{-2}{2} = 1 \text{을 } x^2-2x+a=0 \text{에 대입하면}$$

$$1-2+a=0 \quad \therefore a=1$$

이때 방정식 $x^2-2x+1=0$ 에서 $(x-1)^2=0$ 의 근은 $x=1$ 이므로 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$ 와 $\sim q \rightarrow \sim r$ 가 모두 참이 되어 q 는 r 이기 위한 필요충분조건이 된다.

(ii) $b = 4$ 일 때,

$$x = -\frac{4}{2} = -2 \text{를 } x^2-2x+a=0 \text{에 대입하면}$$

$$4+4+a=0 \quad \therefore a=-8$$

이때 방정식 $x^2-2x-8=0$ 에서 $(x+2)(x-4)=0$ 의 근은 $x=-2$ 또는 $x=4$ 이므로 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 참이 되어 q 는 r 이기 위한 충분조건이 된다.

(i), (ii)에서 $a = -8, b = 4$ 이므로

$$a+b = -4$$

답 -4

11 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

$$\neg. P = \{x \mid -1 < x < 1\}, Q = \{x \mid x < 1\} \text{이므로}$$

$$P \subset Q$$

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

$$\neg. |x| > |y| \geq 0 \text{이므로 } |x|^2 > |y|^2, \text{ 즉 } x^2 > y^2$$

$$\text{또 } x^2 > y^2 \text{에서 } x^2 - y^2 > 0$$

$$(x-y)(x+y) > 0$$

$$\therefore x-y > 0, x+y > 0 \text{ 또는}$$

$$x-y < 0, x+y < 0$$

$$\text{즉 } -x < y < x \text{ 또는 } x < y < -x \text{이므로}$$

$$|x| > |y|$$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

$$\supset. x^2-x-2 \leq 0 \text{에서 } (x+1)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2$$

$$\therefore P = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$$

$$x^2 = |x|^2 \text{이므로 } x^2 - |x| - 2 \leq 0 \text{에서}$$

$$|x|^2 - |x| - 2 \leq 0$$

$$(|x|+1)(|x|-2) \leq 0, \quad 0 \leq |x| \leq 2$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 2$$

$$\therefore Q = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

$$\therefore P \subset Q$$

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

이상에서 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 $\neg$, $\supset$ 이다. 답 ③

12 주어진 명제의 대우는

‘ $x > 1$ 이고 $y > 1$ ’이면 $xy + 1 > x + y$ 이다.’

이다.

$x > 1$ 이고 $y > 1$ 이면 $x - 1 > 0$, $y - 1 > 0$ 이므로

$$(x-1)(y-1) \geq 0$$

$$xy - x - y + 1 > 0$$

$$\therefore xy + 1 > x + y$$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$$\therefore (가) x > 1 \text{이고 } y > 1 \quad (나) > \quad \text{답 ②}$$

13 이차방정식 $x^2 + (ab+1)x = a+b$ 의 홀수인 해를 m 이라 하면

$$m^2 + (ab+1)m = a+b \quad \dots\dots ①$$

이고, a, b 가 모두 짝수가 아닌 경우는 다음과 같다.

(i) a, b 가 모두 홀수인 경우

$m^2 + (ab+1)m$ 은 홀수, $a+b$ 는 짝수이므로 ①이 성립하지 않는다.

(ii) a, b 중 하나는 홀수, 하나는 짝수인 경우

$m^2 + (ab+1)m$ 은 짝수, $a+b$ 는 홀수이므로 ①이 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 a, b 는 모두 짝수이다.

$\therefore$ (가) 홀수 (나) 홀수 (다) 짝수 (라) 짝수 (마) 홀수

답 ⑤

14 $\neg$. [반례] $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ 이면 $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$,

$$a+b=1 \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 < a+b$$

$$\begin{aligned} \neg. a^3 + ab^2 - (a^2b + b^3) &= (a^3 - a^2b) + (ab^2 - b^3) \\ &= a^2(a-b) + b^2(a-b) \\ &= (a-b)(a^2 + b^2) > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a^3 + ab^2 > a^2b + b^3$$

$$\neg. a+b = |a+b| \iff a+b \geq 0 \quad \dots\dots ①$$

$$|a+b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0 \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서 $a \geq 0, b \geq 0$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다. 답 $\neg, \neg$

15 $\frac{y^2}{x} > 0$, $\frac{x^2}{y} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y^2}{x} \cdot \frac{x^2}{y}} = 2\sqrt{xy} \quad \dots\dots ①$$

이때 등호는 $\frac{y^2}{x} = \frac{x^2}{y}$ 일 때 성립하므로

$$y^3 = x^3, \quad x^3 - y^3 = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0$$

그런데 $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$ 이므로

$$x-y=0 \quad \therefore y=x$$

$y=x$ 를 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ 에 대입하면

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1, \quad \frac{2}{x} = 1$$

$$\therefore x=2, y=2 \quad \dots\dots ②$$

따라서 $\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y}$ 의 최솟값은

$$2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2 \cdot 2} = 4 \quad \dots\dots ③$$

답 4

채점 기준	비율
① 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30%
② $\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y}$ 이 최솟값을 가질 때의 x, y 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y}$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

16 직사각형 모양의 입구의 가로 길이를 x m, 세로 길이를 y m라 하면

$$4x + 8y + 6 = 30 \quad \therefore x + 2y = 6 \quad \dots\dots ①$$

이때 $x > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x+2y}{2} \geq \sqrt{x \cdot 2y}, \quad \frac{6}{2} \geq \sqrt{2xy}$$

$$3 \geq \sqrt{2xy}, \quad 9 \geq 2xy$$

$$\therefore xy \leq \frac{9}{2} \quad (\text{단, 등호는 } x=2y \text{일 때 성립}) \quad \dots\dots ②$$

따라서 입구 1개의 넓이의 최댓값은 $\frac{9}{2} \text{ m}^2$ 이다. 답 $\frac{9}{2} \text{ m}^2$

채점 기준	비율
① 입구의 가로, 세로 길이를 각각 x m, y m라 하고 x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
② xy 의 최댓값을 구할 수 있다.	50%
③ 입구 1개의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

17 점 P의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면

$$3a + 2b = 12$$

$A(4, 0), B(0, 6)$ 이므로

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot b = 2b, \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot a = 3a$$

$$\therefore S_1 + S_2 = 3a + 2b = 12$$

이때 $S_1 > 0, S_2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$12 = S_1 + S_2$$

$$\geq 2\sqrt{S_1 S_2} \quad (\text{단, 등호는 } S_1 = S_2 \text{일 때 성립})$$

$$\text{즉 } \sqrt{S_1 S_2} \leq 6 \text{이므로}$$

$$S_1 S_2 \leq 36$$

따라서 $S_1 S_2$ 의 최댓값은 36이다. 답 36

18 $\overline{ED}=a$, $\overline{FC}=b$ 라 하면 $a+b=1$ 이고

$$S_1 = \frac{1}{2}a^2, S_2 = \frac{1}{2}b^2$$

$$\begin{aligned} \therefore 2(S_1 + S_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right) + 4 \\ &= 2\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}\right) + 4 \\ &= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) + 4 \\ &= \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2} + 2\right) \\ &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \\ \therefore \left\{\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right)\right\}^2 \\ &\leq (1^2 + 1^2)\left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2\right\} \\ &= 2\left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

(단, 등호는 $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}$ 일 때 성립)

한편 $a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} = 1 + \frac{a+b}{ab} = 1 + \frac{1}{ab}$ 이고 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{1}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{1}{4} \geq ab$$

$$\therefore \frac{1}{ab} \geq 4 \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

따라서 $1 + \frac{1}{ab} \geq 5$ 이므로

$$\begin{aligned} 25 &\leq 2\left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2\right\} \\ \therefore 2(S_1 + S_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right) + 4 \\ &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \\ &\geq \frac{25}{2} \quad (\text{단, 등호는 } a=b=\frac{1}{2} \text{ 일 때 성립}) \quad \text{답 ⑤} \end{aligned}$$

참고 주어진 식이 최솟값을 갖는 경우는 $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}$ 이고 $a=b$ 일 때이므로 $a=b$

그런데 $a+b=1$ 이므로 $a=b=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 2 &< \sqrt{5} < 3 \text{에서} \\ 1 &< -1 + \sqrt{5} < 2 \\ \therefore \frac{1}{2} &< \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1 \end{aligned}$$

이때 명제 $q \rightarrow \sim p$ 의 역이 참이 되려면 $P^C \subset Q$ 이어야 한다.

(i) $a \geq 1$ 일 때,

$$(x-1)(x-a) \leq 0 \text{에서} \quad 1 \leq x \leq a$$

$$\therefore P^C = \{x \mid 1 \leq x \leq a\}$$

$$ax < 1-a \text{에서} \quad x < \frac{1-a}{a}$$

$$\therefore Q = \left\{x \mid x < \frac{1-a}{a}\right\}$$

오른쪽 그림에서 $P^C \subset Q$

이려면 $a < \frac{1-a}{a}$ 이어야

하므로

$$a^2 + a - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

그런데 $a \geq 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < 1$ 일 때,

$$(x-1)(x-a) \leq 0 \text{에서} \quad a \leq x \leq 1$$

$$\therefore P^C = \{x \mid a \leq x \leq 1\}$$

$$ax < 1-a \text{에서} \quad x < \frac{1-a}{a}$$

$$\therefore Q = \left\{x \mid x < \frac{1-a}{a}\right\}$$

오른쪽 그림에서 $P^C \subset Q$

이려면 $1 < \frac{1-a}{a}$ 이어야

하므로

$$a < 1-a \quad \therefore a < \frac{1}{2}$$

따라서 $0 < a < 1$ 이므로 $0 < a < \frac{1}{2}$

(iii) $a=0$ 일 때,

$$(x-1)(x-a) \leq 0 \text{에서} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$ax < 1-a$ 에서 $0 < 1$ 이므로 x 는 모든 실수이다.

따라서 $a=0$ 이면 $P^C \subset Q$ 이다.

(iv) $a < 0$ 일 때,

$$(x-1)(x-a) \leq 0 \text{에서} \quad a \leq x \leq 1$$

$$\therefore P^C = \{x \mid a \leq x \leq 1\}$$

$$ax < 1-a \text{에서} \quad x > \frac{1-a}{a}$$

$$\therefore Q = \left\{x \mid x > \frac{1-a}{a}\right\}$$

오른쪽 그림에서 $P^C \subset Q$

이려면 $\frac{1-a}{a} < a$ 이어야

하므로

$$1-a > a^2, \quad a^2 + a - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

따라서 $a < 0$ 이므로 $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < a < 0$

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 실수 a 의 값의 범위는

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < a < \frac{1}{2}$$

내신 수능 1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제** 본책 57쪽

01 $x^2 - ax > x - a$ 에서 $x^2 - (a+1)x + a > 0$

$$\therefore (x-1)(x-a) > 0$$

$$ax + a - 1 < 0 \text{에서} \quad ax < 1-a$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid (x-1)(x-a) > 0\},$$

$$Q = \{x \mid ax < 1-a\}$$

명제 $q \rightarrow \sim p$ 의 역은 $\sim p \rightarrow q$ 이고 조건 $\sim p$ 의 진리 집합은 P^C 이므로

$$P^C = \{x \mid (x-1)(x-a) \leq 0\}$$

$$\text{즉 } a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$a + \beta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

답 ⑤

02 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

조건 (가)에서 $|x-1| < 2$ 이므로

$$-2 < x-1 < 2, \quad -1 < x < 3$$

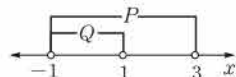
$$\therefore P = \{x \mid -1 < x < 3\}$$

$$|x| < 1 \text{에서} \quad -1 < x < 1$$

$$\therefore Q = \{x \mid -1 < x < 1\}$$

즉 $Q \subset P$ 에서 $q \Rightarrow p$ 이므로

p 는 q 이기 위한 필요조건이지
만 충분조건은 아니다.



따라서 (가)에 대한 점수가 10점이므로 (나), (다)에 대한 점수의 합은 101점이다.

(i) (나), (다)에 대한 점수가 각각 100점, 1점인 경우

(나)에서 p 는 q 이기 위한 필요
충분조건이어야 하므로

오른쪽 그림에서

$$P = Q$$

$$\text{즉 } 4 = a, a+4 = 2a \text{이므로}$$

$$a = 4$$

(다)에서 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은
아니어야 하므로 방정식 $3x-b=0$ 의 근 $x = \frac{b}{3}$ 는 방
정식 $x^2-6x+b=0$ 의 서로 다른 두 근 중 하나이어
야 한다.

$$\text{따라서 } \frac{b^2}{9} - 2b + b = 0 \text{에서}$$

$$b^2 - 9b = 0, \quad b(b-9) = 0$$

$$\therefore b = 0 \text{ 또는 } b = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 방정식 $x^2-6x+b=0$ 이 서로 다른 두 실근을
가지려면 $b=0$ 이어야 한다.

$$\therefore a+b=4+0=4$$

(ii) (나), (다)에 대한 점수가 각각 1점, 100점인 경우

(나)에서 p 는 q 이기 위한 충
분조건이지만 필요조건은
아니어야 하므로 오른쪽

그림에서

$$P \subset Q, P \neq Q$$

$$\text{즉 } 4 \leq a \text{이고 } a+4 \neq 2a \text{이므로} \quad a > 4$$

이때 a 는 정수이므로

$$a \geq 5$$

(다)에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이어야 하므로 방
정식 $3x-b=0$ 의 근 $x = \frac{b}{3}$ 는 방정식 $x^2-6x+b=0$
의 중근이어야 한다.

$$\text{따라서 } \textcircled{1} \text{에서} \quad b = 9$$

$$\therefore a+b \geq 5+9=14$$

(i), (ii)에서 $a+b$ 의 최솟값은 4이다.

답 4

참고 $b=9$ 이면

$$p: 3x-b=0 \Leftrightarrow 3x-9=0$$

$$\Leftrightarrow x=3$$

$$q: x^2-6x+b=0 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=3$$

즉 $P=Q=\{3\}$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

03 p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$ 이고, r 는 p
이기 위한 필요조건이므로 $P \subset R$ 이다.

$$P \subset Q \text{에서} \quad a^2-7=2 \text{ 또는 } b=2$$

(i) $a^2-7=2$, 즉 $a=-3$ 또는 $a=3$ 일 때,

$P \subset R$ 에서 $a+b=2$ 이어야 한다.

① $a=-3$ 이면 $b=2-a=5$ 이므로

$$a^2+b^2=(-3)^2+5^2=34$$

② $a=3$ 이면 $b=2-a=-1$ 이므로

$$a^2+b^2=3^2+(-1)^2=10$$

(ii) $b=2$ 일 때,

$P \subset R$ 에서 $a=2$ 또는 $a+b=2$ 이어야 한다.

① $a=2$ 이면

$$a^2+b^2=2^2+2^2=8$$

② $a+b=2$ 이면 $a=2-b=0$ 이므로

$$a^2+b^2=0^2+2^2=4$$

(i), (ii)에서 a^2+b^2 의 최댓값은 34이다.

답 ②

04 $x^2-ax-a=ax^2+ax$ 에서

$$(a-1)x^2+2ax+a=0 \quad (a>1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관
계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{2a}{a-1}, \quad \alpha\beta = \frac{a}{a-1}$$

두 점 P, Q의 좌표를

$$P(\alpha, \alpha^2-a\alpha-a), Q(\beta, \beta^2-a\beta-a)$$

라 하면 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{(\beta^2-a\beta-a) - (\alpha^2-a\alpha-a)}{\beta-\alpha}$$

$$= (\alpha+\beta) - a = -\frac{2a}{a-1} - a$$

$$= -2 - \frac{2}{a-1} - a$$

$$= -3 - \left(\frac{2}{a-1} + a - 1\right)$$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2}{a-1} + a - 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{a-1} \cdot (a-1)} = 2\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $a=1+\sqrt{2}$ 일 때 성립)

이므로

$$-3 - \left(\frac{2}{a-1} + a - 1\right) \leq -3 - 2\sqrt{2}$$

따라서 직선 PQ의 기울기의 최댓값은

$$-3 - 2\sqrt{2}$$

답 ①

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
를 지나는 직선의 기울기

$$\Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{단, } x_1 \neq x_2)$$

$$\frac{2}{a-1} = a-1 \text{에서}$$

$$(a-1)^2 = 2$$

$$\therefore a = 1 + \sqrt{2}$$

($\because a > 1$)

05 $\neg. (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)$
 $+ (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)$
 $= (a_1x_1 + b_1x_1 + c_1x_1) + (a_2x_2 + b_2x_2 + c_2x_2)$
 $+ (a_3x_3 + b_3x_3 + c_3x_3)$
 $= (a_1 + b_1 + c_1)x_1 + (a_2 + b_2 + c_2)x_2$
 $+ (a_3 + b_3 + c_3)x_3$
 $= x_1 + x_2 + x_3$
 $\therefore x_1 \leq x_2 \leq x_3$ 이고 $a_i \geq 0$ 이므로
 $a_2x_1 \leq a_2x_2, a_3x_1 \leq a_3x_3$
 $\therefore a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq a_1x_1 + a_2x_1 + a_3x_1$
 $= (a_1 + a_2 + a_3)x_1$
 $= x_1$
 $\therefore$ $\neg$ 에서
 $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)$
 $= x_1 + x_2 + x_3 - (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)$
 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ 이고 $c_i \geq 0$ 이므로
 $c_1x_1 \leq c_1x_3, c_2x_2 \leq c_2x_3$
 $\therefore c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \leq c_1x_3 + c_2x_3 + c_3x_3$
 $= (c_1 + c_2 + c_3)x_3$
 $= x_3$
 $\therefore (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)$
 $\geq x_1 + x_2 + x_3 - x_3$
 $= x_1 + x_2$
 이상에서 $\neg, \perp, \sqsubset$ 모두 옳다. ㉔ ⑤
다른 풀이 $\perp. a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - x_1$
 $= (a_1 - 1)x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$
 이때 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ 이고 $a_i \geq 0$ 이므로
 $a_2x_2 + a_3x_3 \geq a_2x_1 + a_3x_1$
 $\therefore a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - x_1$
 $\geq (a_1 - 1)x_1 + a_2x_1 + a_3x_1$
 $= (a_1 + a_2 + a_3 - 1)x_1$
 $= 0$
06 우리의 가로의 길이를 a m, 세로의 길이를 b m라
 하면 우리의 넓이는
 $ab = 35 \text{ (m}^2\text{)} \dots\dots \textcircled{1}$
 또 벽을 쌓는 데 $2(5a + 5b)$ (만 원), 칸막이를 설치하는
 데 $2 \cdot 2b$ (만 원)이 필요하므로 우리를 만드는 데 필요한
 비용은
 $10a + 14b$ (만 원)
 따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $10a + 14b \geq 2\sqrt{10a \cdot 14b}$
 $= 4\sqrt{35ab} \dots\dots \textcircled{2}$
 ①을 ②에 대입하면
 $10a + 14b \geq 4\sqrt{35 \cdot 35} = 140$
 (단, 등호는 $10a = 14b$ 일 때 성립)
 따라서 우리를 만드는 데 드는 비용의 최솟값은 140만 원
 이다. ㉔ ⑤

$a_i + b_i + c_i = 1$
 $(i = 1, 2, 3)$
 이므로
 $a_1 + b_1 + c_1 = 1,$
 $a_2 + b_2 + c_2 = 1,$
 $a_3 + b_3 + c_3 = 1$

집합 A 의 원소는
 (정수) $\div 2$ 꼴이다.

집합 D 의 원소는
 (정수) $\cdot \sqrt{2}$ 꼴이다.

$\{1, 18\}, \{2, 9\}, \{3, 6\}$
 의 3개

$\{1, 2, 9, 18\},$
 $\{1, 3, 6, 18\},$
 $\{2, 3, 6, 9\}$ 의 3개

$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 의 1
 개

$A \cap B = \emptyset$
 $\iff A - B = A$
 $\iff B - A = B$
 $\iff A^c \cup B = A^c$
 $\iff B^c \cup A = B^c$

내신 + 수능
 1등급을 굳히는 **실전 마무리 문제** 본책 58쪽

01 ▶ 전략 반례를 찾아 조건을 만족시키는 집합이 될 수 없음을 보인다.
풀이 $\neg. [반례] a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ 이면 $a \in A, b \in A$ 이지만
 $ab = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \div 2 \notin A$
 이므로 집합 A 는 조건을 만족시키지 않는다.
 $\perp. a = 2^m, b = 2^n$ (m, n 은 자연수)이라 하면
 $ab = 2^m \cdot 2^n = 2^{m+n}$
 이때 $m+n$ 은 자연수이므로 $ab \in B$ 이다.
 따라서 집합 B 는 조건을 만족시킨다.
 $\sqsubset. a = 2m+1, b = 2n+1$ (m, n 은 정수)이라 하면
 $ab = (2m+1)(2n+1)$
 $= 2(2mn+m+n)+1$
 이때 $2mn+m+n$ 은 정수이므로 $ab \in C$ 이다.
 따라서 집합 C 는 조건을 만족시킨다.
 $\therefore [반례] a = \sqrt{2}, b = 2\sqrt{2}$ 이면 $a \in D, b \in D$ 이지만
 $ab = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \notin D$
 이므로 집합 D 는 조건을 만족시키지 않는다.
 이상에서 집합 X 가 될 수 있는 것은 $\perp, \sqsubset$ 이다. ㉔ ②

02 ▶ 전략 $x \in A$ 이면 $\frac{18}{x} \in A$ 임을 이용한다.
풀이 $U = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
 조건 (나)에서 1과 18, 2와 9, 3과 6은 어느 하나가 집합
 A 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A 의 원소이다.
 (i) A 의 원소의 개수가 2일 때,
 조건 (다)에서 B 는 전체집합 U 에서 A 의 원소가 아닌
 4개의 원소를 반드시 포함하는 부분집합이므로 순서
 쌍 (A, B) 의 개수는
 $3 \cdot 2^{6-4} = 12$
 (ii) A 의 원소의 개수가 4일 때,
 조건 (다)에서 B 는 전체집합 U 에서 A 의 원소가 아닌
 2개의 원소를 반드시 포함하는 부분집합이므로 순서
 쌍 (A, B) 의 개수는
 $3 \cdot 2^{6-2} = 48$
 (iii) A 의 원소의 개수가 6일 때,
 조건 (다)에서 B 는 공집합이 아닌 U 의 부분집합이므로
 순서쌍 (A, B) 의 개수는
 $1 \cdot (2^6 - 1) = 63$
 이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
 $12 + 48 + 63 = 123$ ㉔ ③

03 ▶ 전략 $A - B = A \iff A \cap B = \emptyset$ 임을 이용한다.

풀이 $A-B=A \iff A \cap B = \emptyset$

$x^2-2ax+a^2-4 < 0$ 에서 $x^2-2ax+(a+2)(a-2) < 0$
이므로

$$\{x-(a-2)\}\{x-(a+2)\} < 0$$

이때 $a-2 < a+2$ 이므로

$$a-2 < x < a+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2-2x+1-b^2 \leq 0$ 에서 $x^2-2x+(1+b)(1-b) \leq 0$ 이
므로

$$\{x-(1-b)\}\{x-(1+b)\} \leq 0$$

이때 $1-b < 1+b$ 이므로

$$1-b \leq x \leq 1+b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편 $a > 0, b > 0$ 이므로 $1-b < a+2$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분

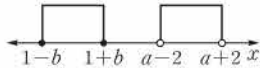
이 존재하지 않으려면 오

른쪽 그림에서

$$1+b \leq a-2$$

$$\therefore a-b \geq 3$$

답 ②



$b > 0$ 이므로
 $1-b < 1+b$

$$A-B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B = \emptyset$$

04 **전략** $(A^c \cup B) \cap C = \emptyset$ 이므로 집합 $A^c \cup B$ 와 집합 C 는 서로소임을 이용한다.

풀이 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, A = \{1, 3, 9\}$

이므로

$$A^c = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

이때 $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로

$$A^c \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

한편 $x^2 - (2k+1)x + 2k = 0$ 에서

$$(x-1)(x-2k) = 0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=2k$$

이때 $k \neq \frac{1}{2}$ 이므로 $C = \{1, 2k\}$

$(A^c \cup B) \cap C = \emptyset$ 에서

$$\{2, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{1, 2k\} = \emptyset$$

이므로 $2k=3$ 또는 $2k=9$

$$\therefore k = \frac{3}{2} \text{ 또는 } k = \frac{9}{2}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 6$$

답 ②

$A \cap B = \emptyset$ 이므로
 $A^c \cup B = A^c$
와 같이 구할 수도 있다.

집합 P 의 원소는
 $4 \cdot 1, 4 \cdot 2, \dots, 4 \cdot 29$
이므로
 $n(P) = 29$

05 **전략** 집합의 연산 법칙 또는 벤 다이어그램을 이용한다.

풀이 $\neg, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $= \emptyset \cup C = C$

$\neg, [\text{반례}] A = \{1\}, B = C = \{2\}$ 이면 $A \cap B = \emptyset,$

$A \cap C = \emptyset$ 이지만 $B \cap C \neq \emptyset$ 이다.

$\neg, A \cap B = \emptyset, C \subset A,$

$D \subset B$ 이므로 네 집합 $A,$

B, C, D 를 벤 다이어그

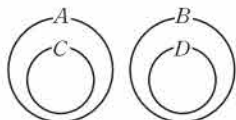
램으로 나타내면 오른쪽

그림과 같다.

$$\therefore C \cap D = \emptyset$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ④



06 **전략** 집합의 연산 법칙을 이용하여 $A * B$ 를 파악한다.

풀이 $\neg, \text{두 집합 } A, B \text{가 서로소이면}$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$\therefore A * B^c = A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B$$

$$= B - A = B$$

$$\neg, (A * B) \cap (A^c * B^c) = (A^c \cap B^c) \cap (A \cap B)$$

$$= (A^c \cap A) \cap (B^c \cap B)$$

$$= \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

따라서 $A * B$ 와 $A^c * B^c$ 는 서로소이다.

$$\neg, (A * B) * A^c = (A^c \cap B^c) * A^c$$

$$= (A^c \cap B^c)^c \cap A$$

$$= (A \cup B) \cap A = A$$

이므로 $A \subset B^c$ 이면

$$A - B^c = \emptyset, \text{ 즉 } A \cap B = \emptyset$$

따라서 A, B 는 서로소이다.

이상에서 $\neg, \neg, \neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

07 **전략** 양 끝 점을 제외하고 막대를 30등분, 20등분, 12등분하는 점들의 지점을 나타내는 값의 집합을 각각 P, Q, R 로 나타낸다.

풀이 막대의 양 끝 점을 $A,$

B 라 하고 A 로부터 n cm 떨어진 지점을 나타내는 값을 n

이라 하자.

양 끝 점을 제외하고 막대를 30등분하는 점들의 지점을 나타내는 값의 집합을 P 라 하면

$$P = \{4, 8, 12, \dots, 116\}$$

막대를 20등분하는 점들의 지점을 나타내는 값의 집합을 Q 라 하면

$$Q = \{6, 12, 18, \dots, 114\}$$

막대를 12등분하는 점들의 지점을 나타내는 값의 집합을 R 라 하면

$$R = \{10, 20, 30, \dots, 110\}$$

즉 $n(P) = 29, n(Q) = 19, n(R) = 11$ 이고, $P \cap Q,$

$Q \cap R, R \cap P$ 의 원소는 각각 120 미만의 12의 양의 배수, 30의 양의 배수, 20의 양의 배수이므로

$$n(P \cap Q) = 9, n(Q \cap R) = 3, n(R \cap P) = 5$$

이때 $P \cap Q \cap R$ 의 원소는 120 미만의 60의 양의 배수이므로

$$n(P \cap Q \cap R) = 1$$

막대의 눈금이 표시된 모든 점들의 지점을 나타내는 값의 집합은 $P \cup Q \cup R$ 이므로

$$n(P \cup Q \cup R) =$$

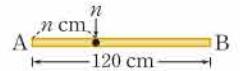
$$= n(P) + n(Q) + n(R) - n(P \cap Q) - n(Q \cap R) - n(R \cap P) + n(P \cap Q \cap R)$$

$$= 29 + 19 + 11 - 9 - 3 - 5 + 1$$

$$= 43$$

따라서 막대의 내부에 표시된 눈금이 43개이므로 막대는 44개로 나누어진다.

답 ③



08 [전략] 진리집합 A 와 a 의 값의 범위에 따른 진리집합 B 를 구한 후 $A \cap B = \emptyset$ 을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구한다.

[풀이] 조건 $\sim q$ 는 ' $3 < x < 6$ '이므로 조건 ' p 이고 $\sim q$ '의 진리집합은

$$A = \{x \mid 3 < x \leq 5\}$$

한편 $(ax-2)(x-a-1) \leq 0$ 에서

$$a\left(x - \frac{2}{a}\right)(x - (a+1)) \leq 0$$

(i) $a+1 < \frac{2}{a}$, 즉 $0 < a < 1$ 일 때,

$$B = \left\{x \mid a+1 \leq x \leq \frac{2}{a}\right\}$$

$A \cap B = \emptyset$ 을 만족시키려

면 오른쪽 그림에서

$$\frac{2}{a} \leq 3 \quad \therefore a \geq \frac{2}{3}$$

이때 $0 < a < 1$ 이므로 $\frac{2}{3} \leq a < 1$

(ii) $\frac{2}{a} \leq a+1$, 즉 $a \geq 1$ 일 때,

$$B = \left\{x \mid \frac{2}{a} \leq x \leq a+1\right\}$$

$A \cap B = \emptyset$ 을 만족시키려

면 오른쪽 그림에서

$$a+1 \leq 3 \quad \therefore a \leq 2$$

이때 $a \geq 1$ 이므로 $1 \leq a \leq 2$

(i), (ii)에서 $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$

따라서 a 의 최댓값은 2, 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이므로 구하는 합은

$$2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

답 ③

09 [전략] 집합 P^c 에 속하지만 집합 Q^c 에 속하지 않는 원소를 찾는다.

[풀이] 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 거짓임을 보이려면 조건 $\sim p$ 를 만족시키지만 조건 $\sim q$ 를 만족시키지 않는 원소를 찾으면 된다.

따라서 조건 $\sim p$ 의 진리집합이 P^c , 조건 $\sim q$ 의 진리집합이 Q^c 이므로 반례는 집합 $P^c - Q^c$ 의 원소이다.

이때

$$P^c - Q^c = P^c \cap (Q^c)^c = P^c \cap Q$$

이므로 구하는 집합은 $P^c \cap Q$ 이다.

답 ②

10 [전략] 먼저 세 집합 P, Q, R 의 포함 관계를 확인한다.

[풀이] $P \cap Q = Q$ 에서 $Q \subset P$

$P - R = P$ 에서 $P \cap R = \emptyset$

즉 세 집합 P, Q, R 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

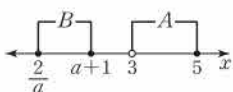
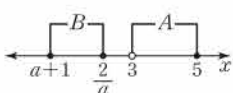
따라서 $Q \subset P \subset R^c$ 이므로 명제

$p \rightarrow \sim r, q \rightarrow p, r \rightarrow \sim q$

는 모두 참이다.

이상에서 $\neg, \wedge, \supset$ 모두 참인 명제이다.

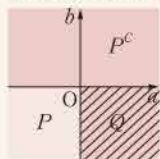
답 ⑤



$$\begin{aligned} & a+1 < \frac{2}{a} \text{에서} \\ & a^2 + a - 2 < 0 \\ & (a+2)(a-1) < 0 \\ & \therefore 0 < a < 1 (\because a > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{a} \leq a+1 \text{에서} \\ & a^2 + a - 2 \geq 0 \\ & (a+2)(a-1) \geq 0 \\ & \therefore a \geq 1 (\because a > 0) \end{aligned}$$

조건 p, q 를 만족시키는 부분을 그림으로 나타내면 다음과 같다.
(단, 좌표축은 제외한다.)



$$\begin{aligned} A \cap B &= \emptyset \\ \iff A - B &= A \\ \iff A &\subset B^c \\ \iff B &\subset A^c \end{aligned}$$

$Q \subset R^c$ 에서 $R \subset Q^c$ 이므로
 $r \rightarrow \sim q$

11 [전략] 먼저 세 집합 P, Q, R^c 의 포함 관계를 확인한다.

[풀이] $\sim p \rightarrow q$ 이므로

$$P^c \subset Q$$

..... ㉠

$p \rightarrow \sim q$ 이므로

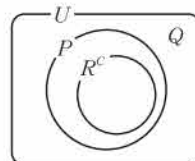
$$P \subset Q^c, \text{ 즉 } Q \subset P^c$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $P^c = Q$

또 $\sim r \rightarrow p$ 이므로 $R^c \subset P$

따라서 세 집합 P, Q, R^c 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\neg, P \cap Q = \emptyset$

$\therefore R^c \subset P$ 이므로 $P^c \subset R$

$\therefore R^c \cup Q^c = R^c \cup P = P$

$$\therefore P \subset (R^c \cup Q^c)$$

이상에서 $\neg, \wedge, \supset$ 모두 옳다.

답 ⑤

[다른 풀이] $\therefore P \subset Q^c$ 이므로 $P \subset (R^c \cup Q^c)$

12 [전략] 필요조건을 만족시키는 진리집합의 포함 관계를 생각한다.

[풀이] p 가 (q 또는 r)이기 위한 필요조건이므로

$$(Q \cup R) \subset P, \text{ 즉 } (Q \cup R) - P = \emptyset$$

$$\therefore (Q \cup R) \cap P^c = \emptyset$$

답 ③

13 [전략] 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하고 세 집합 P, Q, R 의 포함 관계를 이용한다.

[풀이] 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{(a, b) \mid a < 0 \text{이고 } b < 0\},$$

$$Q = \{(a, b) \mid a > 0 \text{이고 } b < 0\},$$

$$R = \{(a, b) \mid a, b \text{는 } 0 \text{이 아닌 모든 실수}\}$$

$\neg, P \subset R$ 이므로 p 는 r 이기 위한 충분조건이다.

$\therefore Q \subset R$ 이므로 r 는 q 이기 위한 필요조건이다.

$\therefore P^c \cup Q = P^c$ 이고 $P^c \subset R, R \not\subset P^c$ 이므로

($\sim p$ 또는 q)는 r 이기 위한 충분조건이다.

이상에서 옳은 것은 $\neg, \wedge$ 이다.

답 ③

14 [전략] 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ 임을 이용한다.

[풀이] $x^2 \geq 0$ 이므로

$$-x^2 + 2 \leq 2, 3x^2 + 4 \geq 4$$

$$\therefore 2 \leq a \leq 4$$

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하도록 하는 정수 a 는 2, 3, 4의 3개이다.

답 ③

15 [전략] 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

[풀이] $\neg, x, y$ 가 양수이고 $x+y=2$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad 1 \geq \sqrt{xy}$$

$$\therefore xy \leq 1 \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립})$$

$$\hookrightarrow x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 - 2xy$$

$\neg$ 에서 $xy \leq 1$ 이므로

$$-2xy \geq -2, \quad 4 - 2xy \geq 2$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq 2$$

$$\text{ㄷ. } \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} = \frac{x+y}{2xy} = \frac{2}{2xy} = \frac{1}{xy}$$

$\neg$ 에서 $0 < xy \leq 1$ 이므로

$$\frac{1}{xy} \geq 1 \quad \therefore \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \geq 1$$

이상에서 $\neg$, $\hookrightarrow$, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

16 [전략] $20 \in C$ 임을 이용하여 k 에 대한 식을 세운다.

[풀이] $(-1)^2 = 1, 1^2 = 1, 2^2 = 4$ 이므로 $20 \in C$ 에서

$$k^2 + 1 = 20 \text{ 또는 } k^2 + 4 = 20$$

$$k^2 = 19 \text{ 또는 } k^2 = 16$$

$$\therefore k = \pm\sqrt{19} \text{ 또는 } k = \pm 4$$

이때 k 는 자연수이므로 $k = 4$

답 4

[참고] $k=4$ 일 때, 오른쪽 표에서 $C = \{1, 4, 10, 13, 17, 20\}$

a	b	-3	0	4
-1		10	1	17
1		10	1	17
2		13	4	20

17 [전략] $A \ll B$ 의 의미를 이해하여 집합 X 의 가장 큰 원소를 찾는다.

[풀이] $P \ll X$ 이므로 집합 X 는 집합 P 의 가장 큰 원소인 3을 원소로 갖는다.

$X \ll Q$ 이므로 집합 Q 는 집합 X 의 가장 큰 원소를 원소로 갖는다.

따라서 집합 X 는 3을 원소로 갖고, 가장 큰 원소는 5 또는 7이다.

(i) 집합 X 의 가장 큰 원소가 5인 경우

집합 X 는 5 이하의 자연수 중에서 3과 5를 반드시 원소로 가지므로 집합 X 의 개수는

$$2^{5-2} = 8$$

(ii) 집합 X 의 가장 큰 원소가 7인 경우

집합 X 는 7 이하의 자연수 중에서 3과 7을 반드시 원소로 가지므로 집합 X 의 개수는

$$2^{7-2} = 32$$

(i), (ii)에서 구하는 집합 X 의 개수는

$$8 + 32 = 40$$

답 40

채점 기준	비율
① 집합 X 가 반드시 갖는 원소와 가장 큰 원소를 알 수 있다.	40%
② 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	60%

18 [전략] $A \cap B = A$ 이면 $A \subset B$ 임을 이용한다.

[풀이] 조건 ㉠에서 $A \subset B$ 이므로 k 는 20의 배수이다.

조건 ㉡에서

$$n(B \cap A^c) = n(B - A)$$

$$= n(B) - n(A)$$

$$\text{이므로 } n(B) - n(A) = 2n(A)$$

$$\therefore n(B) = 3n(A)$$

이때 $20 = 2^2 \cdot 5$ 이므로

$$n(A) = (2+1) \cdot (1+1) = 6$$

즉 $n(B) = 3 \cdot 6 = 18$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 k 는 20의 배수이면서 양의 약수의 개수가 18이어야 한다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은

$$(2^2 \cdot 5) \cdot 3^2 = 180$$

답 180

19 [전략] $f(A) + f(B) = f(U)$ 임을 이용한다.

[풀이] $f(A) + f(B) = f(U)$ 이고

$$f(U) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

$$\text{이므로 } f(B) = 28 - f(A)$$

$$\therefore f(A)f(B) = f(A)\{28 - f(A)\}$$

$$= -\{f(A)\}^2 + 28f(A)$$

$$= -\{f(A) - 14\}^2 + 196$$

따라서 $f(A)f(B)$ 는 $f(A) = 14$ 일 때 최댓값 196을 가지므로

$$a = 14, k = 196$$

$$\therefore a + k = 210$$

답 210

[참고] 실제로 $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 6, 7\}$ 이면

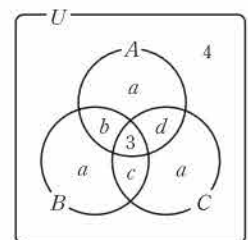
$A \cup B = U$, $A \cap B = \emptyset$ 이고 $f(A) = 14$ 를 만족시킨다.

이외에도 $A = \{1, 3, 4, 6\}$, $B = \{2, 5, 7\}$ 등 조건을 만족시키는 두 집합 A, B 는 다양하게 존재한다.

20 [전략] 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내어 본다.

[풀이] 40명의 학생 전체의 집합을 U , 첫 번째, 두 번째, 세 번째 봉사활동에 참가한 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하자.

한 번도 봉사활동에 참가하지 않은 학생은 4명, 3회 모두 참가한 학생은 3명이고 첫 번째에만, 두 번째에만, 세 번째에만 참가한 학생 수가 서로 같으므로 벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 위의 그림과 같이 나타내자.



연속해서 2회만 참가한 학생 수는 $b + c$, 첫 번째와 세 번째의 2회만 참가한 학생 수는 d 이므로

$$b + c = 2d$$

$$n(U) = 40 \text{이므로}$$

$$3a + b + c + d + 3 + 4 = 40$$

$$3a + 2d + d + 7 = 40, \quad 3a + 3d = 33$$

$$\therefore a + d = 11$$

따라서 구하는 학생 수는 11이다.

답 11

원소의 개수가 n 인 집합 A 의 특정한 원소 k 개를 반드시 원소로 갖는 A 의 부분집합의 개수
 $\Rightarrow 2^{n-k}$ (단, $k < n$)

첫 번째 봉사활동에는 참가하고 두 번째 봉사활동에는 참가하지 않은 학생의 집합은
 $A - B$
 이다.

21 [전략] '어떤 x 에 대하여 p 이다.'가 참이라면 전체집합의 원소 중에서 한 개 이상이 p 를 만족시켜야 함을 이용한다.

[풀이] 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 8x + k \geq 0$ 이다.'의 부정은 '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 - 8x + k < 0$ 이다.'이다.

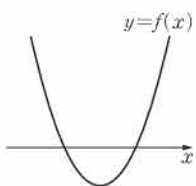
주어진 명제의 부정이 참이 되기 위해서는 $f(x) = x^2 - 8x + k$ 라 할 때, $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - k > 0, \quad 16 - k > 0$$

$$\therefore k < 16$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 15이다.



→ 2

답 15

채점 기준	비율
① 주어진 명제의 부정을 말할 수 있다.	30%
② 자연수 k 의 최댓값을 구할 수 있다.	70%

22 [전략] 원소의 개수가 n 인 집합의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 $2^n - 1$ 임을 이용한다.

[풀이] $a \in A$ 이면 $2a - 4 \notin U$ 이므로

$$2a - 4 < 1 \text{ 또는 } 2a - 4 > 20$$

$$\therefore a < \frac{5}{2} \text{ 또는 } a > 12$$

또 $a \in A$ 이면 $\frac{1}{2}a \in U$ 이므로 a 는 짝수이다.

따라서 주어진 명제가 참이 되도록 하는 집합 A 는 집합 $\{2, 14, 16, 18, 20\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이므로 집합 A 의 개수는

$$2^5 - 1 = 31$$

답 31

23 [전략] 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 주어진 명제가 참이라면 $P \cap Q \neq \emptyset$ 이어야 함을 이용한다.

[풀이] 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 주어진 명제가 참이라면 $x \in (P \cap Q)$ 인 실수 x 가 존재해야 한다. 즉 $P \cap Q \neq \emptyset$ 이어야 한다.

$$x^2 - (a+1)x + a \geq 0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x-a) \geq 0$$

(i) $a \leq 1$ 일 때,

$P \cap Q \neq \emptyset$ 이므로 주어진 명제가 참이 되도록 하는 자연수 a 는 1의 1개이다.

(ii) $a > 1$ 일 때,

$P \cap Q \neq \emptyset$ 이라면 $a \leq 6$ 이어야 하므로

$$1 < a \leq 6$$

즉 주어진 명제가 참이 되도록 하는 자연수 a 는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 a 의 개수는

$$1 + 5 = 6$$

$$\begin{aligned} P &= \{x | 2 \leq x \leq 6\}, \\ Q &= \{x | x \leq a \text{ 또는 } x \geq 1\} \\ \text{이므로} \\ P \cap Q &= \{x | 2 \leq x \leq 6\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

답 6

24 [전략] 주어진 명제의 대우를 이용하여 명제를 증명한다.

[풀이] 주어진 명제의 대우는 ' m, n 이 자연수일 때, mn 이 홀수이면 $m^2 + n^2$ 은 짝수이다.'이다.

두 자연수의 곱 mn 이 홀수이면 두 자연수 m, n 은 모두 홀수이므로

$$m = 2p + 1, n = 2q + 1 \quad (p, q \text{는 음이 아닌 정수})$$

이라 하면

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= (2p+1)^2 + (2q+1)^2 \\ &= (4p^2 + 4p + 1) + (4q^2 + 4q + 1) \\ &= 2(2p^2 + 2q^2 + 2p + 2q + 1) \end{aligned}$$

이때 $2p^2 + 2q^2 + 2p + 2q + 1$ 은 자연수이므로 $m^2 + n^2$ 은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

→ 2

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① 주어진 명제의 대우를 말할 수 있다.	30%
② 주어진 명제의 대우가 참임을 이용하여 그 명제가 참임을 증명할 수 있다.	70%

25 [전략] 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y 라 하고 조각 A의 둘레의 길이를 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

[풀이] 넓이가 100인 직사각형의 가로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라 하면

$$xy = 100 \quad \dots\dots ①$$

이때 조각 A의 둘레의 길이는

$$2x + 2y \quad \dots\dots ②$$

이고 $2x > 0, 2y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 2x + 2y &\geq 2\sqrt{2x \cdot 2y} \\ &= 4\sqrt{xy} = 40 \quad (\because ①) \end{aligned}$$

등호는 $x = y$ 일 때 성립하므로 ①에서

$$x = y = 10 \quad \dots\dots ③$$

한편 $PQ = a, RS = b$ 라 하면 조각 B의 둘레의 길이는

$$2(10 - a) + 2(10 - b) = 40 - 2(a + b)$$

이고 최댓값이 16이므로

$$40 - 2(a + b) \leq 16$$

$$2(a + b) \geq 24$$

$$\therefore a + b \geq 12$$

따라서 $PQ + RS$ 의 최솟값은 12이다.

→ 3

답 12

채점 기준	비율
① 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y 라 할 때, 조각 A의 둘레의 길이를 x, y 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② 조각 A의 둘레의 길이가 최소일 때의 x, y 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $PQ + RS$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

26 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $b+c=x, c+a=y, a+b=z$ 라 하면

$$a+b+c=\frac{1}{2}(x+y+z) \text{이므로}$$

$$a=\frac{1}{2}(x+y+z)-x=\frac{1}{2}(y+z-x),$$

$$b=\frac{1}{2}(x+y+z)-y=\frac{1}{2}(z+x-y),$$

$$c=\frac{1}{2}(x+y+z)-z=\frac{1}{2}(x+y-z)$$

따라서

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y+z-x}{x} + \frac{z+x-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 3 \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{y} \cdot \frac{y}{z}} + 2\sqrt{\frac{x}{z} \cdot \frac{z}{x}} - 3 \right) \\ &= \frac{3}{2} \text{ (단, 등호는 } a=b=c \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

답 풀이 참조

참고 등호는 $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}, \frac{z}{y} = \frac{y}{z}, \frac{x}{z} = \frac{z}{x}$, 즉 $x=y=z$ 일 때 성립하고, $x=y=z$ 이면 $b+c=c+a=a+b$ 에서 $a=b=c$ 이다. 따라서 주어진 부등식이 성립하고, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립한다.

두 집합 X, Y 에 대하여 X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X 에서 Y 로의 함수라 한다.

원소의 개수가 n 인 집합의 부분집합의 개수 $\Rightarrow 2^n$

III 함수

07 함수

개념 & 핵심 기출

본책 64쪽

01 정의역의 임의의 원소 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 오직 한 점에서 만나야 하므로 함수의 그래프는 ②이다.

답 ②

02 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 각각 a, b, c 라 하면 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 다음과 같다.

(i) $f(1)+f(2)+f(3)=3$ 인 경우

$(1, 1, 1)$ 의 1개

(ii) $f(1)+f(2)+f(3)=4$ 인 경우

$(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$ 의 3개

(iii) $f(1)+f(2)+f(3)=5$ 인 경우

$(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2),$

$(2, 1, 2), (2, 2, 1)$ 의 6개

이상에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$1+3+6=10$$

답 ③

03 $\neg, A=B=\{-1, 0\}, C=D=\{0, 2\}$

$\neg, f(-1)=g(-1)=0, f(0)=g(0)=-1,$

$f(1)=g(1)=0$ 이므로 $f=g$

$\neg, h(-1)=2, k(-1)=0$ 이므로

$h(-1) \neq k(-1)$

$h(1)=0, k(1)=2$ 이므로 $h(1) \neq k(1)$

$\therefore h \neq k$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ③

04 집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x)=g(x)$ 이어야 하므로 $x^3=2x^2+3x$

$$x(x^2-2x-3)=0, \quad x(x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

즉 집합 X 는 집합 $\{-1, 0, 3\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는 $2^3-1=7$

답 ⑤

05 $f(a)=g(a)$ 에서 $a^2=a+2$

$$a^2-a-2=0, \quad (a+1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2$$

(i) $a=-1$ 이면

$$f(-1)=1, h(-1)=7 \text{이므로 } f \neq h$$

(ii) $a=2$ 이면

$$f(2)=4, h(2)=4 \text{이므로 } f=h$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-1$

답 -1

06 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ의 4개이므로

$$a=4$$

일대일함수의 그래프인 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이므로

$$b=2$$

일대일대응의 그래프인 것은 ㄴ의 1개이므로

$$c=1$$

$$\therefore a+b+c=7$$

답 7

07 함수 f 가 일대일함수이고, $f(1)=1$ 이므로

$$f(2) \neq 1, f(3) \neq 1$$

이때 $f(2)f(3)=18=3 \cdot 6$ 이므로

$$f(2)=3, f(3)=6 \text{ 또는 } f(2)=6, f(3)=3$$

$$\therefore f(2)+f(3)=9$$

답 9

자연수 a 의 값은 60이다.

08 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 $a>0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 $f(-1)=-5, f(3)=7$ 이므로

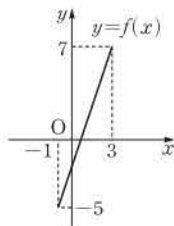
$$-a+b=-5, 3a+b=7$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-2$$

$$\therefore a-2b=3-2 \cdot (-2)=7$$

답 7



09 함수 $f(x)$ 가 항등함수이므로 $f(x)=x$

(i) $x<0$ 일 때,

$$-x^2+2=x \text{에서}$$

$$x^2+x-2=0, (x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 (\because x<0)$$

(ii) $0 \leq x < 4$ 일 때,

$$2x-3=x \text{에서 } x=3$$

(iii) $x \geq 4$ 일 때, $x=5$

이상에서 $X=\{-2, 3, 5\}$ 이므로

$$f(a)+f(b)+f(c)=a+b+c$$

$$=-2+3+5=6$$

답 ③

$f(x)$ 는 항등함수이므로
 $f(a)=a, f(b)=b,$
 $f(c)=c$

10 함수 $f(x)$ 가 항등함수이므로 $f(x)=x$

$$f(2)=2 \text{에서 } 4+2a+b=2$$

$$\therefore 2a+b=-2$$

..... ㉠

$$f(5)=5 \text{에서 } 25+5a+b=5$$

$$\therefore 5a+b=-20$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6, b=10$

$$\therefore a+b=4$$

답 ②

다른 풀이 함수 $f(x)$ 가 항등함수이므로 정의역 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x)=x$ 이다.

즉 $x^2+ax+b=x$ 에서

$$x^2+(a-1)x+b=0$$

따라서 정의역 X 의 두 원소 2, 5는 이 이차방정식의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+5=-(a-1), 2 \cdot 5=b$$

따라서 $a=-6, b=10$ 이므로

$$a+b=4$$

11 함수 f 가 항등함수이므로

$$f(2)=2, f(3)=3$$

함수 g 가 상수함수이므로 상수 c 에 대하여

$$g(2)=g(3)=c$$

$$f(2)+g(2)=1 \text{에서 } 2+c=1$$

$$\therefore c=-1$$

$$\therefore f(3)+g(3)=3+(-1)=2$$

답 ②

다른 풀이 함수 f 가 항등함수이므로

$$f(2)=2, f(3)=3$$

$$\therefore f(3)=f(2)+1$$

함수 g 가 상수함수이므로

$$g(2)=g(3)$$

$$\therefore f(3)+g(3)=\{f(2)+1\}+g(2)$$

$$=\{f(2)+g(2)\}+1$$

$$=1+1=2$$

12 $f(2)=-1, f(-1)=2$ 이므로

$$(f \circ f \circ f \circ f)(2)=(f \circ f \circ f)(-1)$$

$$=(f \circ f)(2)$$

$$=f(-1)=2$$

답 ④

13 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$ 이므로

$$g(2x-1)=\frac{x+3}{2}$$

이때 $2x-1=5$ 에서 $x=3$

$$\therefore g(5)=\frac{3+3}{2}=3$$

답 ③

14 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x+a)$

$$=(x+a)^2-2(x+a)-1$$

$$=x^2+2(a-1)x+a^2-2a-1$$

즉 $x^2+2(a-1)x+a^2-2a-1=x^2+4x+b$ 이므로

$$2(a-1)=4, a^2-2a-1=b$$

$$\therefore a=3, b=2$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

15 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+10)$

$$=4(ax+10)+a$$

$$=4ax+40+a,$$

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(4x+a)$$

$$=a(4x+a)+10$$

$$=4ax+a^2+10$$

이때 $g \circ f=f \circ g$ 이므로

$$4ax+40+a=4ax+a^2+10$$

$$a^2-a-30=0, (a+5)(a-6)=0$$

$$\therefore a=6 (\because a>0)$$

답 ③

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c \\ =a'x^2+b'x+c' \\ \text{이 } x \text{에 대한 항등식이면} \\ a=a', b=b', c=c' \end{aligned}$$

$$16 \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) \\ = 2\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + 2 = x$$

즉 합성함수 $f \circ g$ 는 항등함수 I 이므로

$$h(x) = ((f \circ g \circ f) \circ (f \circ g))(x) \\ = ((I \circ f) \circ I)(x) \\ = f(x) = 2x + 2$$

답 ②

$$17 \quad (h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x) \\ = (h \circ g)(f(x)) \\ = (h \circ g)(3x - 1) \\ = 2(3x - 1) + 1 \\ = 6x - 1$$

따라서 $6x - 1 = 5$ 에서

$$x = 1$$

답 ③

$$18 \quad \text{주어진 식의 양변에 } x=1, y=1 \text{을 대입하면} \\ f(1+1) = f(1)f(1) \\ f(1) = a \quad (a > 0) \text{라 하면 } f(2) = 4 \text{이므로} \\ a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0) \\ \therefore f(1) = 2$$

주어진 식의 양변에 $x=1, y=2$ 를 대입하면

$$f(1+2) = f(1)f(2) \\ \therefore f(3) = 2 \cdot 4 = 8$$

주어진 식의 양변에 $x=2, y=3$ 을 대입하면

$$f(2+3) = f(2)f(3) \\ \therefore f(5) = 4 \cdot 8 = 32$$

답 ⑤

$$19 \quad \text{주어진 식의 양변에 } x=2, y=2 \text{를 대입하면} \\ f(2+2) = f(2) + f(2) \\ f(4) = 2f(2), \quad 3 = 2f(2) \\ \therefore f(2) = \frac{3}{2}$$

주어진 식의 양변에 $x=4, y=4$ 를 대입하면

$$f(4+4) = f(4) + f(4) \\ \therefore f(8) = 3 + 3 = 6$$

주어진 식의 양변에 $x=8, y=2$ 를 대입하면

$$f(8+2) = f(8) + f(2) \\ \therefore f(10) = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

답 ④

$$20 \quad f(x) + 3f(1-x) = 2x \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변에 x 대신 $1-x$ 를 대입하면

$$f(1-x) + 3f(x) = 2(1-x) \quad \dots\dots ㉡$$

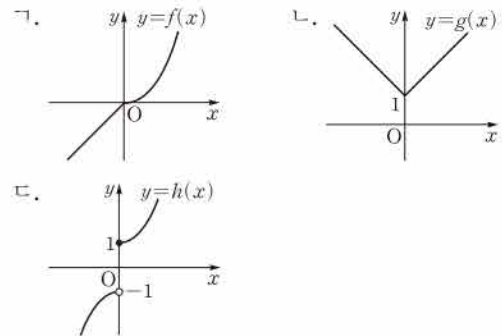
㉠-㉡ $\times 3$ 을 하면

$$-8f(x) = 8x - 6 \quad \therefore f(x) = -x + \frac{3}{4}$$

$$\therefore f(-2) + f(2) = \frac{11}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

답 ③

21 세 함수 f, g, h 의 그래프는 다음과 같다.



이상에서 집합 R 에서 R 로의 일대일 대응인 것은 f 뿐이므로 역함수가 존재하는 것은 f 뿐이다. 답 ①

$$22 \quad f(3) = 6 \text{이므로} \quad 3a + b = 6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$y = ax + b \text{라 하면} \quad ax = y - b$$

$$\therefore x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} \quad (\because a \neq 0)$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면} \quad y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

이때 $f^{-1}(x) = cx - 1$ 이므로

$$c = \frac{1}{a}, \quad -1 = -\frac{b}{a}$$

$-1 = -\frac{b}{a}$ 에서 $b = a$ 이므로 $b = a$ 를 ㉠에 대입하면

$$3a + a = 6 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

따라서 $b = a = \frac{3}{2}, c = \frac{1}{a} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$a + b + c = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

답 11/3

다른 풀이 $f(3) = 6$ 이므로 $f^{-1}(6) = 3$

$$f^{-1}(6) = 6c - 1 = 3 \text{에서} \quad c = \frac{2}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x - 1 \text{에서 } f^{-1}(3) = 1 \text{이므로}$$

$$f(1) = 3$$

따라서 $f(1) = a + b = 3$ 이므로

$$a + b + c = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

$$23 \quad f(2x-1) = x+4 \text{에서 } 2x-1=t \text{로 놓으면}$$

$$x = \frac{t+1}{2}$$

$$\text{즉 } f(t) = \frac{t+1}{2} + 4 = \frac{1}{2}t + \frac{9}{2} \text{이므로}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \text{라 하면} \quad 2y = x + 9$$

$$\therefore x = 2y - 9$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 2x - 9$

따라서 $f^{-1}(x) = 2x - 9$ 이므로

$$a = 2, b = -9$$

$$\therefore 2a - b = 2 \cdot 2 - (-9) = 13$$

답 13

다른 풀이 $f(2x-1)=x+4$ 이므로

$$f^{-1}(x+4)=2x-1$$

$x+4=t$ 로 놓으면 $x=t-4$ 이므로

$$f^{-1}(t)=2(t-4)-1=2t-9$$

따라서 $f^{-1}(x)=2x-9$ 이므로

$$a=2, b=-9$$

$$\therefore 2a-b=13$$

24 $f \circ h = g$ 에서 $h = f^{-1} \circ g$

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= (f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) \\ &= f^{-1}(3x+5) = \frac{(3x+5)-3}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}x + 1$$

답 ③

$f \circ h = g$ 에서

$$f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ g$$

$$(f^{-1} \circ f) \circ h = f^{-1} \circ g$$

$$I \circ h = f^{-1} \circ g$$

(단, I 는 항등함수)

$$\therefore h = f^{-1} \circ g$$

다른 풀이 $y = \frac{x-3}{2}$ 이라 하면 $2y = x-3$

$$\therefore x = 2y + 3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 2x + 3$

따라서 $f(x) = 2x + 3$ 이므로 $f \circ h = g$ 에서

$$f(h(x)) = g(x)$$

$$2h(x) + 3 = 3x + 5, \quad 2h(x) = 3x + 2$$

$$\therefore h(x) = \frac{3}{2}x + 1$$

참고 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 3x + 5$ 에 대하여 $h \circ f = g$ 를 만족시키는 함수 h 는 다음과 같이 구한다.

$h(2x+3) = 3x+5$ 이므로 $2x+3=t$ 로 놓으면

$$x = \frac{t-3}{2}$$

$$\therefore h(t) = 3 \cdot \frac{t-3}{2} + 5 = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$$

$$\therefore h(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

25 $h(x) = ((f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f)(x)$

$$= (g^{-1} \circ (f^{-1})^{-1} \circ f)(x)$$

$$= (g^{-1} \circ f \circ f)(x)$$

$$= (g^{-1} \circ (f \circ f))(x) \quad \dots\dots ㉠$$

이때

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+5)$$

$$= -(-x+5) + 5 = x$$

이므로 합성함수 $f \circ f$ 는 항등함수 I 이다.

따라서 ㉠에서

$$h(x) = (g^{-1} \circ (f \circ f))(x) = (g^{-1} \circ I)(x)$$

$$= g^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - 2$$

$$\therefore h(10) + h(11) = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$$

답 3

다른 풀이 $h(x) = ((f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f)(x)$

$$= (g^{-1} \circ f \circ f)(x)$$

$$= g^{-1}(f(f(x)))$$

이므로

$$h(10) = g^{-1}(f(f(10))) = g^{-1}(f(-5))$$

$$= g^{-1}(10) = \frac{4}{3},$$

$y = 2|x| - 3$ 의 그래프는 $x \geq 0$ 일 때 $y = 2x - 3$ 의 그래프를 그리고, 이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$$h(11) = g^{-1}(f(f(11))) = g^{-1}(f(-6))$$

$$= g^{-1}(11) = \frac{5}{3}$$

$$\therefore h(10) + h(11) = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$$

26 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 P 는 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

따라서 점 P 의 좌표를 (a, a) ($a \geq 1$)라 하면 원점과 점 P 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{a^2 + a^2} = 4\sqrt{2}, \quad a^2 = 16$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a \geq 1)$$

따라서 $f(4) = 4$ 이므로 $16 - 8 + k = 4$

$$\therefore k = -4$$

답 ①

27 ㄱ. $y = f(|x|)$ 의 그래프

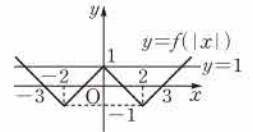
프는 $x \geq 0$ 일 때 $y = f(x)$

의 그래프를 그리고, 이

그래프를 y 축에 대하여

대칭이동한 것이므로 위의 그림과 같다.

따라서 $y = f(|x|)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 개수는 3이다.



ㄴ. $y = |f(x)|$ 의 그래프는

$y = f(x)$ 의 그래프에서

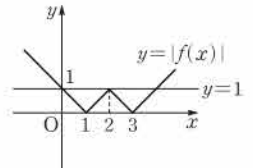
$y \geq 0$ 인 부분은 그대로

두고, $y < 0$ 인 부분은 x

축에 대하여 대칭이동한

것이므로 위의 그림과 같다.

따라서 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 개수는 3이다.



ㄷ. $|y| = f(|x|)$ 의 그

래프는 $x \geq 0, y \geq 0$

일 때 $y = f(x)$ 의 그

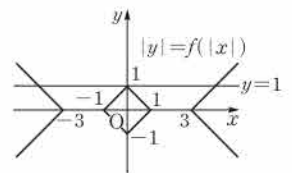
래프를 그리고, 이 그

래프를 x 축, y 축, 원

점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 위의 그림과

같다.

따라서 $|y| = f(|x|)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 개수는 3이다.



이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

28 $y = 2|x| - 3$ 에서

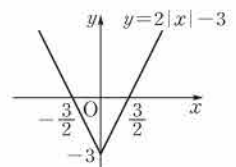
(i) $x \geq 0$ 일 때,

$$y = 2x - 3$$

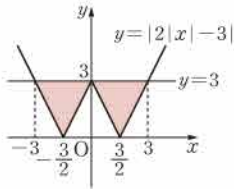
(ii) $x < 0$ 일 때,

$$y = -2x - 3$$

(i), (ii)에서 $y = 2|x| - 3$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=|2|x|-3|$ 의 그래프는 함수 $y=2|x|-3$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|2|x|-3|$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\right) \cdot 2 = 9 \quad \text{답 ④}$$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 69쪽

01 $f(1)=f(5)=-1,$

$f(3)=f(7)=f(11)=\dots=f(123)=4$

$$\therefore f(5)+f(11)+f(123)=-1+4+4=7$$

답 7

$$123=4 \cdot 30 + 3 \text{이므로}$$

$$f(123)=f(3)=4$$

02 $a_{13}=1$ 이므로 $f(1)=3$

$a_{21}=1$ 이므로 $f(2)=1$

$a_{32}=1$ 이므로 $f(3)=2$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 ②이다.

답 ②

03 n 이 홀수일 때, $f(n)=n-1$ 이므로

$$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$$

$$=0+2+4+6+8=20$$

→ ①

n 이 짝수일 때, $f(n)=f\left(\frac{n}{2}\right)$ 이므로

$$f(2)=f(1)=0,$$

$$f(4)=f(2)=0,$$

$$f(6)=f(3)=2,$$

$$f(8)=f(4)=0,$$

$$f(10)=f(5)=4$$

$$\therefore f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)$$

$$=0+0+2+0+4=6$$

→ ②

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(10)=26$$

→ ④

답 26

$$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(10)$$

$$=f(1)+f(3)+\dots+f(9)+f(2)+f(4)+\dots+f(10)$$

$$=20+6=26$$

채점 기준	비율
① $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② $f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(10)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

04 $\neg. a^2+b^2 < 1$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$$(0, 0) \text{의 1개}$$

이므로 $f(1)=1$

$$a^2+b^2 < 2 \text{를 만족시키는 순서쌍 } (a, b) \text{는}$$

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1) \text{의 3개}$$

이므로 $f(2)=3$

$$\therefore f(1)+f(2)=1+3=4$$

나. [반례] $i=3, j=4$ 라 하면

$$a^2+b^2 < 3 \text{을 만족시키는 순서쌍 } (a, b) \text{는}$$

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) \text{의 4개}$$

이므로 $f(3)=4$

$$a^2+b^2 < 4 \text{를 만족시키는 순서쌍 } (a, b) \text{는}$$

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) \text{의 4개}$$

이므로 $f(4)=4$

즉 $i < j$ 이지만 $f(i)=f(j)$ 이다.

다. $a^2+b^2 < 50$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$$a=0 \text{일 때, } b=0, 1, 2, \dots, 7 \text{의 8개}$$

$$a=1 \text{일 때, } b=0, 1, 2, \dots, 6 \text{의 7개}$$

$$a=2 \text{일 때, } b=0, 1, 2, \dots, 6 \text{의 7개}$$

$$a=3 \text{일 때, } b=0, 1, 2, \dots, 6 \text{의 7개}$$

$$a=4 \text{일 때, } b=0, 1, 2, \dots, 5 \text{의 6개}$$

$$a=5 \text{일 때, } b=0, 1, 2, 3 \text{의 4개}$$

$$a=6 \text{일 때, } b=0, 1, 2 \text{의 3개}$$

$$a=7 \text{일 때, } b=0 \text{의 1개}$$

$$\therefore f(50)=8+7+7+7+6+5+4+1=45$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

05 (i) $x \leq 0$ 일 때,

$$x^2+2x=2x+4 \text{에서 } x^2=4$$

$$\therefore x=-2 (\because x \leq 0)$$

(ii) $0 < x \leq 4$ 일 때,

$$x^2-x=2x+4 \text{에서}$$

$$x^2-3x-4=0, \quad (x+1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=4 (\because 0 < x \leq 4)$$

(iii) $x > 4$ 일 때,

$$x^2-x=8x-20 \text{에서}$$

$$x^2-9x+20=0, \quad (x-4)(x-5)=0$$

$$\therefore x=5 (\because x > 4)$$

→ ①

이상에서 $X=\{-2, 4, 5\}$ 이므로 집합 X 의 모든 원소의 합은

$$-2+4+5=7$$

→ ②

답 7

채점 기준	비율
① $x \leq 0, 0 < x \leq 4, x > 4$ 로 나누어 x 의 값을 구할 수 있다.	80%
② 집합 X 의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20%

06 조건 ㉠에서 $f(k)=g(k) \ (k > 1)$ 라 하면

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=g(k)=f(k)=f\left(\frac{1}{\frac{1}{k}}\right)=g\left(\frac{1}{k}\right)$$

또 $f(1)=f\left(\frac{1}{1}\right)=g(1)$ 이므로

$$\{x \mid f(x)=g(x), x \text{는 양의 실수}\}=\left\{\frac{1}{k}, 1, k\right\}$$

이때 조건 ㄴ에서 $\frac{1}{3} \in \left\{\frac{1}{k}, 1, k\right\}$ 이므로

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{3} \quad (\because k>1) \quad \therefore k=3$$

즉 $\left\{\frac{1}{k}, 1, k\right\}=\left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}$ 이므로

$$X=\left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}$$

일 때 집합 X 의 원소의 합이 최대이다.
따라서 집합 X 의 원소의 합의 최댓값은

$$\frac{1}{3}+1+3=\frac{13}{3}$$

답 ②

07 $f(x)=x^2-6x+7$
 $= (x-3)^2-2$

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가해야 하므로

$$a \geq 3$$

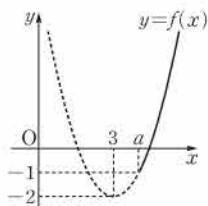
또 치역과 공역이 같아야 하므로

$$f(a)=-1$$

$$a^2-6a+7=-1, \quad a^2-6a+8=0$$

$$(a-2)(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a \geq 3)$$



답 ③

참고 $a=2$. 즉 $x \geq 2$ 이면 $f(2)=f(4)=-1$ 이므로 $f(x)$ 는 일대일함수가 될 수 없다.

따라서 $f(x)$ 는 일대일대응이 될 수 없다.

08 조건 ㄱ에서 함수 f 는 일대일대응이므로

$$\{f(0), f(1), f(2)\}=\{2, 3, 4\}$$

(i) $f(0)=2, f(1)=3, f(2)=4$ 또는

$f(0)=4, f(1)=3, f(2)=2$ 인 경우

순서쌍 $(x, f(x))$ 를 좌표평면 위에 나타내면 세 점이 한 직선 위에 있는 경우이므로 조건 ㄴ을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(0)=2, f(1)=4, f(2)=3$ 또는

$f(0)=3, f(1)=4, f(2)=2$ 인 경우

$f(1)$ 의 값이 가장 크므로 조건 ㄴ을 만족시키지 않는다.

(iii) $f(0)=3, f(1)=2, f(2)=4$ 인 경우

$$f(0)=c=3,$$

$$f(1)=a+b+c=2,$$

$$f(2)=4a+2b+c=4$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{3}{2}, b=-\frac{5}{2}, c=3$$

일대일대응
 → 일대일함수이고, 치역과 공역이 같은 함수

$$\begin{aligned} h(x) &= ax^2 + 2x - 4a \\ &= a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{4a^2+1}{a} \end{aligned}$$

에서 축의 방정식은 $x = -\frac{1}{a}$

$f(0), f(1), f(2)$ 의 값이 될 수 있는 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$
2	3	4
2	4	3
3	2	4
3	4	2
4	2	3
4	3	2

이차함수의 그래프는 직선과 최대 2개의 점에서 만날 수 있다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ 에서 $a>0$ 이므로 $f(1)$ 의 값이 가장 클 수 없다.

$$\therefore a-b+c=\frac{3}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)+3=7$$

(iv) $f(0)=4, f(1)=2, f(2)=3$ 인 경우

$$f(0)=c=4,$$

$$f(1)=a+b+c=2,$$

$$f(2)=4a+2b+c=3$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{3}{2}, b=-\frac{7}{2}, c=4$$

$$\therefore a-b+c=\frac{3}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)+4=9$$

이상에서 $a-b+c$ 의 최댓값은 9이다.

답 9

09 $g(x)=2x, h(x)=ax^2+bx-4a$ 라 하면 $f(x)$ 가 함수이므로

$g(-2)=h(-2)$ 에서

$$-4=4a-2b-4a \quad \therefore b=2$$

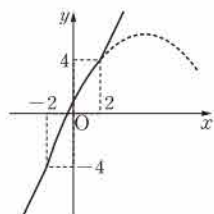
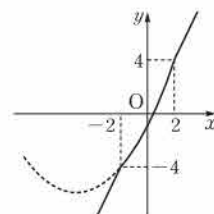
$g(2)=h(2)$ 에서

$$4=4a+2b-4a \quad \therefore b=2$$

한편 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

(i) $a>0$ 일 때,

(ii) $a<0$ 일 때,



이때 $y=h(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x = -\frac{1}{a}$

(i) $a>0$ 일 때, $-\frac{1}{a} \leq -2 \quad \therefore 0 < a \leq \frac{1}{2}$

(ii) $a<0$ 일 때, $-\frac{1}{a} \geq 2 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq a < 0$

(i), (ii)에서 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq \frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq \frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	40%
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%

10 f 가 일대일대응이고, $f(1)=6$ 이므로

$f(2)-f(3)=2$ 를 만족시키는 $f(2), f(3)$ 의 값은

$$f(2)=4, f(3)=2 \text{ 또는 } f(2)=10, f(3)=8$$

이때 $f(4), f(5)$ 의 값은 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 나머지 두 개의 값을 각각 하나씩 갖는다.

(i) $f(2)=4, f(3)=2$ 일 때,

$$f(4)=8, f(5)=10 \text{ 또는 } f(4)=10, f(5)=8 \text{ 이므로}$$

$$f(3)f(4) \text{의 값은}$$

$$2 \cdot 8 = 16 \text{ 또는 } 2 \cdot 10 = 20$$

(ii) $f(2)=10, f(3)=8$ 일 때,

$f(4)=2, f(5)=4$ 또는 $f(4)=4, f(5)=2$ 이므로

$f(3)f(4)$ 의 값은

$$8 \cdot 2 = 16 \text{ 또는 } 8 \cdot 4 = 32$$

(i), (ii)에서 $f(3)f(4)$ 의 최댓값은 32, 최솟값은 16이므로 구하는 합은

$$32 + 16 = 48$$

답 ⑤

11 $f(x)=4$ 이라면 $x=5k+4$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴이어야 한다.

함수 f 는 치역이 $\{4\}$ 인 상수함수이므로 정의역 X 는 집합 $\{x | x=5k+4, k=0, 1, 2, \dots, 9\}$, 즉

$\{4, 9, 14, 19, \dots, 49\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는

$$2^{10} - 1 = 1023$$

답 ⑤

1등 비밀노트

자연수 n 을 5로 나누었을 때의 나머지는 0 또는 1 또는 2 또는 3 또는 4이므로 자연수 n 은 $5k$ (k 는 자연수) 또는 $5k+r$ (k 는 음이 아닌 정수, $r=1, 2, 3, 4$) 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 5로 나누었을 때의 나머지가 4인 자연수는 $5k+4$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴로 나타낼 수 있다.

12 함수 $g(x)$ 가 상수함수이므로 정수 k 에 대하여 $g(b)=g(c)=k$ 라 하자.

또 함수 $f(x)$ 가 항등함수이므로

$$f(a)=a$$

조건 (가)에서

$$a \cdot k \cdot k = ak^2 = 5$$

이때 a, k 가 모두 정수이고, $k^2 \geq 0$ 이므로

$$a=5, k^2=1 \quad \dots\dots ㉠$$

조건 (나)에서

$$a+k+k=a+2k < a$$

$$\therefore k < 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a=5, k=-1$

$$\therefore a+g(b)=5+(-1)=4 \quad \text{답 ④}$$

13 $f(1)=a+3, f(2)=2a+3, f(3)=3a+3$ 이므로 함수 f 의 치역을 $f(X)$ 라 하면

$$f(X)=\{a+3, 2a+3, 3a+3\}$$

합성함수 $g \circ f$ 가 정의되려면 $f(X) \subset X$ 이어야 하므로

$$\{a+3, 2a+3, 3a+3\} \subset \{1, 2, 3\}$$

(i) $a+3=1$, 즉 $a=-2$ 일 때,

$$f(X)=\{1, -1, -3\} \text{이므로 } f(X) \not\subset X$$

(ii) $a+3=2$, 즉 $a=-1$ 일 때,

$$f(X)=\{2, 1, 0\} \text{이므로 } f(X) \not\subset X$$

(iii) $a+3=3$, 즉 $a=0$ 일 때,

$$f(X)=\{3\} \text{이므로 } f(X) \subset X$$

이상에서 구하는 a 의 값은 0이다.

답 0

합성함수 $g \circ f$ 가 정의되려면
(f 의 치역)
 $\subset$ (g 의 정의역)
이어야 한다.

$$14 \quad f(x) = \begin{cases} 2 & (x < 1) \\ -1 & (x = 1) \\ -2 & (1 < x \leq 2) \\ 1 & (x > 2) \end{cases}$$

(i) $x < 1$ 일 때,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = -2$$

(ii) $x = 1$ 일 때,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-1) = 2$$

(iii) $1 < x \leq 2$ 일 때,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-2) = 2$$

(iv) $x > 2$ 일 때,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = -1$$

$$\text{이상에서 } g(x) = \begin{cases} -2 & (x < 1) \\ 2 & (1 \leq x \leq 2) \\ -1 & (x > 2) \end{cases}$$

즉 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른

쪽 그림과 같으므로 $A(0, 1)$,

$P(1, -2), Q(2, -1)$ 이라

하면 직선 $y=ax+1$ 이 두 직선

AP, AQ 와 같거나 직선 AP

와 직선 AQ 사이에 존재하면

된다.

이때 직선 AP 의 기울기는

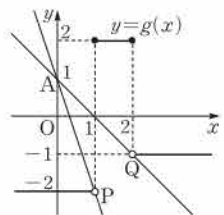
$$\frac{-2-1}{1-0} = -3$$

$$\text{직선 } AQ \text{의 기울기는 } \frac{-1-1}{2-0} = -1$$

따라서 구하는 a 의 값의 범위는

$$-3 \leq a \leq -1$$

답 ①



15 $f^1(2)=1, f^2(2)=4, f^3(2)=3, f^4(2)=2, f^5(2)=1, \dots$

$f^1(3)=2, f^2(3)=1, f^3(3)=4, f^4(3)=3, f^5(3)=2, \dots$

이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$f^n(2) = f^{n+4}(2), f^n(3) = f^{n+4}(3)$$

이 성립한다.

따라서

$$f^1(2)+f^3(3)=1+4=5,$$

$$f^2(2)+f^4(3)=4+3=7,$$

$$f^3(2)+f^5(3)=3+2=5,$$

$$f^4(2)+f^6(3)=2+1=3,$$

$$f^5(2)+f^7(3)=1+4=5,$$

$\vdots$

이므로 $f^n(2)+f^{n+2}(3)=5$ 를 만족시키는 100 이하의 자연수 n 은

$$1, 3, 5, \dots, 99 \text{의 } 50 \text{ 개}$$

답 50

16 $(f \circ g \circ h)(x) = 3g\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ 에서

$$f(g(h(x))) = 3g\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

일품 BOX

$$3g(h(x)) - 2 = 3g\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

$$\therefore g(h(x)) = g\left(\frac{x}{2}\right)$$

함수 g 는 일대일대응이므로

$$h(x) = \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (h \circ h)(8) &= h(h(8)) \\ &= h(4) = 2 \end{aligned}$$

→ 1

→ 2

→ 3

답 2

채점 기준	비율
① $g(h(x)) = g\left(\frac{x}{2}\right)$ 임을 알 수 있다.	40%
② 함수 $h(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
③ $(h \circ h)(8)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

17 $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = 1$ 에서
 $f(f(x)) = k$ 라 하면

$$f(k) = 1$$

$0 \leq k \leq 2$ 일 때, $k^2 = 1$

$$\therefore k = 1 \quad (\because 0 \leq k \leq 2)$$

$2 < k \leq 4$ 일 때, $(k-4)^2 = 1$

$$\therefore k = 3 \quad (\because 2 < k \leq 4)$$

$$\therefore f(f(x)) = 1 \text{ 또는 } f(f(x)) = 3$$

(i) $f(f(x)) = 1$ 일 때,

$f(x) = p$ 라 하면

$$f(p) = 1$$

$0 \leq p \leq 2$ 일 때, $p^2 = 1$

$$\therefore p = 1 \quad (\because 0 \leq p \leq 2)$$

$f(x) = 1$ 을 만족시키는 x 의
값을 α , β 라 하면

$$\alpha + \beta = 4$$

$2 < p \leq 4$ 일 때, $(p-4)^2 = 1$

$$\therefore p = 3 \quad (\because 2 < p \leq 4)$$

$f(x) = 3$ 을 만족시키는 x 의 값을 γ , δ 라 하면

$$\gamma + \delta = 4$$

(ii) $f(f(x)) = 3$ 일 때,

$f(x) = s$ 라 하면

$$f(s) = 3$$

$0 \leq s \leq 2$ 일 때, $s^2 = 3$

$$\therefore s = \sqrt{3}$$

$$(\because 0 \leq s \leq 2)$$

$f(x) = \sqrt{3}$ 을 만족시키는 x
의 값을 α' , β' 이라 하면

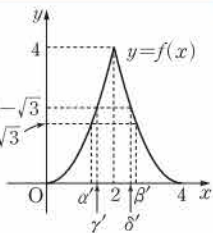
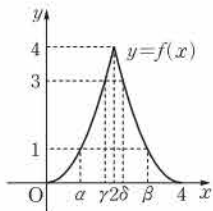
$$\alpha' + \beta' = 4$$

$2 < s \leq 4$ 일 때, $(s-4)^2 = 3$

$$\therefore s = 4 - \sqrt{3} \quad (\because 2 < s \leq 4)$$

$f(x) = 4 - \sqrt{3}$ 을 만족시키는 x 의 값을 γ' , δ' 이라 하
면

$$\gamma' + \delta' = 4$$



$$\begin{aligned} &\alpha + \beta + \gamma + \delta \\ &+ \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' \end{aligned}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 직
선 $x=2$ 에 대하여 대칭이
므로

$$2 - \alpha = \beta - 2$$

$$\therefore \alpha + \beta = 4$$

$$2 - \gamma = \delta - 2$$

$$\therefore \gamma + \delta = 4$$

(i), (ii)에서 모든 x 의 값의 합은

$$4 + 4 + 4 + 4 = 16$$

답 16

$$\mathbf{18} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(c) = ac + b,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(ax + b) = c$$

이므로 $f \circ g = g \circ f$ 에서 $ac + b = c$

$$\therefore ac = c - b$$

..... ㉠

ㄱ. $a=0$ 을 ㉠에 대입하면 $c - b = 0$

$$\therefore b = c$$

ㄴ. $a(c - b) \neq 0$ 에서 $a \neq 0$, $c - b \neq 0$ 이므로 ㉠에서
 $c \neq 0$

㉠의 양변을 ac 로 나누면

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{ac} = 1$$

ㄷ. $c - b = 3$ 을 ㉠에 대입하면 $ac = 3$

a , c 가 자연수이고 $a > c$ 이므로

$$a = 3, c = 1$$

$c = 1$ 을 $c - b = 3$ 에 대입하면

$$b = -2$$

따라서 $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 1$ 이므로

$$f(3) + g(3) = 7 + 1 = 8$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

19 주어진 식의 양변에 $x=1$, $y=1$ 을 대입하면

$$f(1) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

→ 1

주어진 식의 양변에 $x=8$, $y=\frac{1}{8}$ 을 대입하면

$$f(1) = f(8) + f\left(\frac{1}{8}\right), \quad 0 = 6 + f\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{8}\right) = -6$$

→ 2

이때

$$f(8) = f(2 \cdot 4) = f(2) + f(4)$$

$$= f(2) + f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) + f(2)$$

$$= 3f(2)$$

이므로

$$3f(2) = 6 \quad \therefore f(2) = 2$$

$$\therefore f(4) = f(2) + f(2) = 2 + 2 = 4$$

→ 3

$$\therefore f\left(\frac{1}{8}\right) + f(1) + f(4) = -6 + 0 + 4 = -2$$

→ 4

답 -2

채점 기준	비율
① $f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
② $f\left(\frac{1}{8}\right)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $f(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $f\left(\frac{1}{8}\right) + f(1) + f(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

다른 풀이 $f\left(\frac{1}{8}\right) + f(1) + f(4) = f\left(\frac{1}{8} \cdot 1\right) + f(4)$

$$= f\left(\frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 4\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

이때

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 3f\left(\frac{1}{2}\right)$$

이므로

$$3f\left(\frac{1}{2}\right) = -6 \quad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

따라서 구하는 값은 -2

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = -6$$

20 주어진 식의 양변에 $x=1, y=0$ 을 대입하면

$$f(1)f(0) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(0) = 1 + 1 = 2$$

주어진 식의 양변에 $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$f(1)f(1) = f(2) + f(0)$$

$$1 \cdot 1 = f(2) + 2$$

$$\therefore f(2) = -1$$

주어진 식의 양변에 $x=2, y=2$ 을 대입하면

$$f(2)f(2) = f(4) + f(0)$$

$$(-1) \cdot (-1) = f(4) + 2$$

$$\therefore f(4) = -1$$

답 -1

21 $2f(x) + f(g(x)) = 5x + 4$ ㉠

㉠의 양변에 x 대신 $g(x)$ 를 대입하면

$$2f(g(x)) + f(g(g(x))) = 5g(x) + 4$$

조건 ㉡에서 $g \circ g = I$ 이므로

$$2f(g(x)) + f(x) = 5g(x) + 4 \quad \dots\dots ㉢ \quad \dots\dots 1$$

㉠ $\times 2$ - ㉢을 하면

$$3f(x) = 10x - 5g(x) + 4$$

$$\therefore 3f(x) + 5g(x) = 10x + 4 \quad \dots\dots 2$$

$$\therefore 3f(6) + 5g(6) = 64 \quad \dots\dots 3$$

답 64

채점 기준	비율
1 $2f(g(x)) + f(x) = 5g(x) + 4$ 임을 알 수 있다.	40%
2 $3f(x) + 5g(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
3 $3f(6) + 5g(6)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

22 $y = \frac{2}{5}(x+1)$ 이라 하면 $x = \frac{5}{2}y - 1$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{5}{2}x - 1$

$$\therefore g(x) = \frac{5}{2}x - 1$$

두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점을 A라 하면

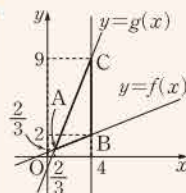
점 A의 x 좌표는 $\frac{2}{5}(x+1) = \frac{5}{2}x - 1$ 에서

$$x = \frac{2}{3} \quad \therefore A\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

또 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $x=4$ 의 교점을 각각 B, C라 하면

$$B(4, 2), C(4, 9)$$

이때 삼각형 ABC의 경계 또는 내부에 놓인 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 다음과 같다.



(i) $x=1$ 일 때,

$$\frac{4}{5} \leq y \leq \frac{3}{2} \text{ 이므로 } (1, 1) \text{의 1개}$$

(ii) $x=2$ 일 때,

$$\frac{6}{5} \leq y \leq 4 \text{ 이므로 } (2, 2), (2, 3), (2, 4) \text{의 3개}$$

(iii) $x=3$ 일 때,

$$\frac{8}{5} \leq y \leq \frac{13}{2} \text{ 이므로}$$

$$(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \text{의 5개}$$

(iv) $x=4$ 일 때,

$$2 \leq y \leq 9 \text{ 이므로}$$

$$(4, 2), (4, 3), \dots, (4, 9) \text{의 8개}$$

이상에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$$1 + 3 + 5 + 8 = 17$$

답 17

23 함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이다.

$x \geq 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 치역은

$$\{y | y \geq k\}$$

$x < 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 치역은

$$\{y | y < k\}$$

$f^{-1}(k-4) = a$ 라 하면 $f(a) = k-4$ 에서 $k-4 < k$ 이므로

$$a < 0, f(a) = 2a + k$$

즉 $2a + k = k - 4$ 이므로

$$a = -2$$

→ 1

또 $f^{-1}(k+9) = b$ 라 하면 $f(b) = k+9$ 에서 $k+9 \geq k$ 이므로

$$b \geq 0, f(b) = 3b + k$$

즉 $3b + k = k + 9$ 이므로

$$b = 3$$

→ 2

$$\therefore f^{-1}(k-4) + f^{-1}(k+9) = a + b$$

$$= -2 + 3 = 1$$

→ 3

답 1

채점 기준	비율
1 $f^{-1}(k-4)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
2 $f^{-1}(k+9)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
3 $f^{-1}(k-4) + f^{-1}(k+9)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

$$\text{다른 풀이} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-k}{3} & (x \geq k) \\ \frac{x-k}{2} & (x < k) \end{cases}$$

$$f^{-1}(k-4) = \frac{k-4-k}{2} = -2,$$

$$f^{-1}(k+9) = \frac{k+9-k}{3} = 3$$

$$\therefore f^{-1}(k-4) + f^{-1}(k+9) = 1$$

24 $f^{-1}(x) = x^2$ 에서

$$f(x^2) = x$$

..... ㉠

$(f \circ g^{-1})(x^2) = x$ 에서 $f(g^{-1}(x^2)) = x$ 이므로 ㉠에서

$$g^{-1}(x^2) = x^2 \quad \therefore g(x^2) = x^2$$

$$\begin{aligned}\therefore (f \circ g)(16) &= f(g(16)) \\ &= f(16) = 4\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 $(f \circ g^{-1})(x^2) = x$ 에서

$$(f \circ g^{-1})^{-1}(x) = x^2$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})(x) = x^2$$

이때 $(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = g(x^2)$ 이므로

$$g(x^2) = x^2$$

또 $f^{-1}(x) = x^2$ 에서 $f(x^2) = x$ 이므로

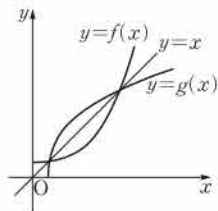
$$\begin{aligned}(f \circ g)(16) &= f(g(16)) \\ &= f(16) = 4\end{aligned}$$

25 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)$

는 서로 역함수이므로 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프와

$y=g(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.



방정식 $\frac{1}{10}x^2 + a = x$, 즉 $x^2 - 10x + 10a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 - 10x + 10a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-5)^2 - 10a > 0$$

$$\therefore a < \frac{5}{2}$$

..... ㉠

또 두 근의 합과 곱도 모두 양수이어야 하므로

$$a > 0$$

..... ㉡

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 0 < a < \frac{5}{2}$$

따라서 정수 a 는 1, 2이므로 구하는 합은

$$1 + 2 = 3$$

답 3

채점 기준	비율
① $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같음을 알 수 있다.	30%
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ 모든 정수 a 의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

26 오른쪽 그림에서

$$g^{-1}(f(7)) = g^{-1}(4) = a \text{라 하면}$$

$$g(a) = 4 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore g^{-1}(f(7)) = 2$$

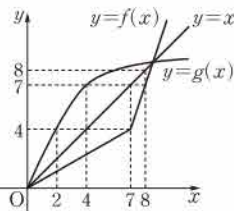
$$f^{-1}(g(4)) = f^{-1}(7) = b \text{라 하면}$$

$$f(b) = 7 \quad \therefore b = 8$$

$$\therefore f^{-1}(g(4)) = 8$$

$$\therefore g^{-1}(f(7)) + f^{-1}(g(4)) = 10$$

답 10



27 구간 $0 < x < 1$, $1 \leq x \leq 2$, $2 < x < 3$, $3 \leq x < 4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 즉 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이므로 $0 < x \leq 4$ 에서 $f(f(x)) = x$ 이다.

따라서 방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의 실근은 직선 $y=x$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표이다.

오른쪽 그림에서 직선 $y=x$ 와

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 네

점 A, B, C, D에서 만나고 이

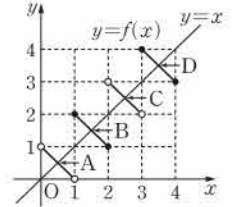
네 점의 x 좌표는 각각

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$$

이므로 구하는 합은

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 8$$

답 8



28 $f(x) = g(x)$ 에서

$$|x-2a| + |x-4a| = |x-2a| - |x-4a|$$

$$|x-4a| = 0 \quad \therefore x = 4a$$

$$\therefore P(4a, 2a)$$

$g(x) = h(x)$ 에서

$$|x-2a| - |x-4a| = -|x-2a| + |x-4a|$$

$$|x-2a| = |x-4a|, \quad x-2a = \pm(x-4a)$$

$$\therefore x = 3a \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore Q(3a, 0)$$

$f(x) = h(x)$ 에서

$$|x-2a| + |x-4a| = -|x-2a| + |x-4a|$$

$$|x-2a| = 0 \quad \therefore x = 2a$$

$$\therefore R(2a, 2a)$$

$\triangle PQR$ 에서 $\overline{PR}$ 를 밑변으로

생각하면 높이는 $2a$ 이고,

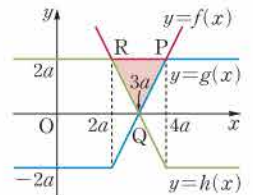
$\triangle PRQ$ 의 넓이는 50이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 50$$

$$a^2 = 25$$

$$\therefore a = 5 \quad (\because a > 0)$$

답 5



29 $\neg$. $x \geq 2$ 이면

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x-2) + 1 = x$$

이므로 $f(x)$ 는 항등함수이다.

ㄴ. $0 \leq x < 2$ 이면

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(x-2) + 1 = 2$$

이므로 $f(x)$ 는 상수함수이다.

ㄷ. $x \leq 0$ 이면

$$f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(x-2) + 1 = -x + 2$$

이때 $x_1 \neq x_2$ 이면

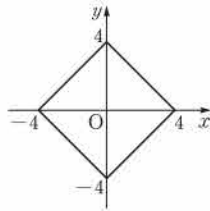
$$\begin{aligned}f(x_1) - f(x_2) &= (-x_1 + 2) - (-x_2 + 2) \\ &= x_2 - x_1 \neq 0\end{aligned}$$

이므로 $f(x_1) \neq f(x_2)$

즉 $f(x)$ 는 일대일함수이다.
이상에서 $\neg$, $\wedge$, $\supset$ 모두 옳다.

답 ⑤

30 $|x| + |y| = 4$ 의 그래프는 직선 $x+y=4$ 에서 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분과 이 부분을 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



→ ①

이 도형에 내접하는 원의 반지름의 길이는 원점과 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

→ ②

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\pi$$

→ ③

답 8π

채점 기준	비율
① $ x + y = 4$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	40%
② ①의 도형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40%
③ 원의 넓이를 구할 수 있다.	20%

내신 + 수능

1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제**

본책 74쪽

01 $\neg$. $a < b$ 이면 $f(a) < f(b)$ 이므로

$$f(1) < f(2) < f(3) < f(4)$$

따라서 집합 Y 의 6개의 원소 중 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

$\wedge$. $f(3) = 8$ 이고, $a < b$ 이면 $f(a) < f(b)$ 이므로

$$f(4) = 9 \text{ 또는 } f(4) = 10$$

또 $f(1) < f(2)$ 에서 집합 Y 의 원소 5, 6, 7 중 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 그 개수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$2 \cdot 3 = 6$$

$\supset$. (i) $f(1) < f(2) < f(3) < f(4)$ 인 경우

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

(ii) $f(1) = f(2) < f(3) < f(4)$ 인 경우

집합 Y 의 6개의 원소 중 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 3, 4에 대응시키면 되므로 함수의 개수는

$${}_6C_3 = 20$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$15 + 20 = 35$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\supset$ 이다.

답 ④

1등급 비밀노트

855

두 집합 X, Y 에 대하여 $n(X)=r, n(Y)=s$ ($2 \leq r \leq s$)일 때, X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 $a \in X, b \in X, a < b$ 인 a, b 에 대하여 $f(a) < f(b)$ (또는 $f(a) > f(b)$)를 만족시키는 f 의 개수
→ 순서가 이미 정해졌으므로 C_r

02 조건 ㉞에서 함수 f 가 일대일대응이므로

$$f(1) + f(2) + f(3) = a + b + c = 14$$

$$\therefore f(2) + f(3) = 14 - f(1) \quad \dots\dots ㉟$$

㉟을 조건 ㉞의 식에 대입하면

$$f(1)\{14 - f(1)\} = 40$$

$$\{f(1)\}^2 - 14f(1) + 40 = 0$$

$$\{f(1) - 4\}\{f(1) - 10\} = 0$$

$$\therefore f(1) = 4 \text{ 또는 } f(1) = 10$$

(i) $f(1) = 4$ 일 때,

$$f(2) + f(3) = 10 \text{ 이므로 순서쌍 } (f(2), f(3)) \text{ 은}$$

$$(1, 9), (2, 8), (3, 7), (7, 3), (8, 2), (9, 1)$$

따라서 $f(2)f(3)$ 의 값은

$$1 \cdot 9 = 9, 2 \cdot 8 = 16, 3 \cdot 7 = 21$$

(ii) $f(1) = 10$ 일 때,

$$f(2) + f(3) = 4 \text{ 이므로 순서쌍 } (f(2), f(3)) \text{ 은}$$

$$(1, 3), (3, 1)$$

따라서 $f(2)f(3)$ 의 값은

$$1 \cdot 3 = 3$$

(i), (ii)에서 $f(2)f(3)$ 의 최댓값은 21, 최솟값은 3이므로 구하는 합은

$$21 + 3 = 24$$

답 24

03 조건 ㉞에서 $f(1) \leq 2$ 이므로

$$f(1) = 1$$

조건 ㉞에서 $f(x)$ 는 일대일함수이므로 $f(3) = a$ 라 하면

조건 ㉞에서

$$a = 3 \text{ 또는 } a = 5$$

이때 조건 ㉞에서 $(f \circ f)(3) = f(a) = 7$ 이므로

$$a = 5$$

즉 $f(1) = 1, f(3) = 5, f(5) = 7$ 이므로

$$f(7) = 3, f(9) = 9 \text{ 또는 } f(7) = 9, f(9) = 3$$

$$\therefore f(7) + f(9) = 12$$

답 12

04 $n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$

(a_i 는 $0 \leq a_i \leq 9$ 인 정수, $i = 0, 1, 2, \dots, m$)이라 하면

조건 ㉞에서

$$f(n) = f(a_m \cdot 10^m + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0)$$

$$= f(a_m \cdot 10^{m-1} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0$$

$$= f(a_m \cdot 10^{m-2} + \dots + a_2) + a_1 + a_0$$

$\vdots$

$$= f(a_m) + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

$$= f(0) + a_m + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

$$= a_m + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$f(3) \leq 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{조건 ㉞에서 } 7 \leq 2a$$

$f(1) = f(2)$ 이므로 $f(1)$ 의 값이 정해지면 $f(2)$ 의 값도 정해진다.

$$f(a_m) = f(10 \cdot 0 + a_m)$$

$$\neg. f(123)=1+2+3=6$$

$$\neg. f(10^n)=f(1 \cdot 10^n+0)=1 \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(10^n)=f(f(10^n))=f(1) \\ =f(0)+1=1$$

$$\therefore (f \circ f)(10^n)=f(10^n)$$

$$\neg. f(n)=a_m+\dots+a_2+a_1+a_0 \text{을 9의 배수라 가정하면}$$

$$n=a_m \cdot 10^m+a_{m-1} \cdot 10^{m-1}+\dots+a_1 \cdot 10+a_0 \\ =a_m(10^m-1)+a_{m-1}(10^{m-1}-1) \\ +\dots+a_1(10-1) \\ +(a_m+\dots+a_2+a_1+a_0)$$

이때 10^a-1 (a 는 자연수)과 $a_m+\dots+a_2+a_1+a_0$ 은 각각 9의 배수이므로 n 은 9의 배수이다.

이상에서 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

05 $\neg$. [반례] $x=4, y=5$ 일 때, $f(4)=3, f(5)=2$ 이므로 $x < y$ 이지만 $f(x) > f(y)$ 이다.

1, 2, 4의 3개

1, 5의 2개

$$\neg. x \text{가 소수이면 } f(x)=2 \text{이고 } f(2)=2 \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(2)=2$$

$$\therefore (f \circ f)(x)=f(x)$$

$$\neg. x=a_1^{p_1}a_2^{p_2}\dots a_n^{p_n}(a_1, a_2, \dots, a_n \text{은 2가 아닌 서로 다른 소수이고, } p_1, p_2, \dots, p_n \text{은 자연수)이라 하면}$$

$$k=f(x)=(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)$$

$$2x=2a_1^{p_1}a_2^{p_2}\dots a_n^{p_n} \text{이므로}$$

$$f(2x)=(1+1)(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1) \\ =2k$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④

06 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$f(-1)=0, f(0)=2, f(1)=-1, f(2)=-1$$

이므로

$$f(1)=-1,$$

$$f^2(1)=f(f(1))=f(-1)=0,$$

$$f^3(1)=f(f^2(1))=f(0)=2,$$

$$f^4(1)=f(f^3(1))=f(2)=-1,$$

$$f^5(1)=f(f^4(1))=f(-1)=0,$$

$\vdots$

즉 $f^n(1)$ 은 $-1, 0, 2$ 가 이 순서대로 반복되므로

$$f(1)+f^2(1)+f^3(1)+\dots+f^{10}(1)$$

$$=(-1+0+2)+(-1+0+2)+(-1+0+2)-1 \\ =2$$

답 2

07 $g(x)=6$ 에서 $(f \circ f)(x+2)=6$ 이므로

$$f(f(x+2))=6$$

$$x+2=t \text{로 놓으면}$$

$$f(f(t))=6$$

$$\therefore f(t)=3 \text{ 또는 } f(t)=7 \text{ 또는 } f(t)=9$$

그런데 $f(t) \leq 7$ 이므로

$$f(t)=3 \text{ 또는 } f(t)=7$$

$$(i) f(t)=3 \text{일 때,}$$

$$t=2 \text{ 또는 } t=4 \text{ 또는 } t=6 \text{ 또는 } t=10 \text{이므로}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=4 \text{ 또는 } x=8$$

$$(ii) f(t)=7 \text{일 때,}$$

$$t=8 \text{이므로 } x=6$$

(i), (ii)에서 실수 x 는 0, 2, 4, 6, 8의 5개이다. **답 ③**

08 $\neg$. 조건 ㉞의 식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$f(3-2)=f(5+2)$$

$$\therefore f(1)=f(7)$$

$$\neg. \text{조건 ㉞의 식의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$f(3)=f(5)$$

$$\text{조건 ㉞의 식의 양변에 } x_1=3, x_2=5 \text{를 대입하면}$$

$$f\left(\frac{3+5}{2}\right) \geq \frac{f(3)+f(5)}{2}$$

$$= \frac{f(5)+f(5)}{2}$$

$$=f(5)$$

$$\therefore f(4) \geq f(5)$$

$$\neg. \text{조건 ㉞의 식의 양변에}$$

$$x_1=4, x_2=6 \text{을 대입하면}$$

$$f\left(\frac{4+6}{2}\right) \geq \frac{f(4)+f(6)}{2} \dots\dots \text{㉠}$$

$$x_1=5, x_2=7 \text{을 대입하면}$$

$$f\left(\frac{5+7}{2}\right) \geq \frac{f(5)+f(7)}{2} \dots\dots \text{㉡}$$

$$x_1=6, x_2=8 \text{을 대입하면}$$

$$f\left(\frac{6+8}{2}\right) \geq \frac{f(6)+f(8)}{2} \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉠}+\text{㉡}+\text{㉢} \text{을 하면}$$

$$f(5)+f(6)+f(7)$$

$$\geq \frac{f(4)}{2} + \frac{f(5)}{2} + f(6) + \frac{f(7)}{2} + \frac{f(8)}{2}$$

$$2f(5)+2f(7) \geq f(4)+f(5)+f(7)+f(8)$$

$$\therefore f(5)+f(7) \geq f(4)+f(8)$$

이상에서 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

1등급 비밀노트

임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

$$\textcircled{1} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

⇒ 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록

$$\textcircled{2} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

⇒ 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록

09 함수 $y=a(x+6)+6$ 의 그

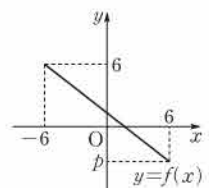
래프는 a 의 값에 관계없이 점

$(-6, 6)$ 을 지난다. 또 역함수

$f^{-1}(x)$ 가 존재하면 함수 $f(x)$

는 일대일대응이므로 $y=f(x)$

의 그래프는 점 $(6, p)$ 를 지난다.



따라서 $y=f(x)$ 의 그래프의 기울기 a 는

$$a = \frac{p-6}{6-(-6)} = \frac{p-6}{12}$$

$$\therefore f(x) = \frac{p-6}{12}(x+6)+6$$

$$= \frac{p-6}{12}x + \frac{p+6}{2}$$

$$f(0) > 0 \text{에서 } \frac{p+6}{2} > 0$$

$$\therefore p > -6$$

따라서 $f(0) > 0$ 을 만족시키는 정수 p 의 최솟값은 -5 이다. 답 -5

10 $g=[2, 3, 4, 1], h=[3, 4, 1, 2]$ 에서
 $g(1)=2, g(2)=3, g(3)=4, g(4)=1,$
 $h(1)=3, h(2)=4, h(3)=1, h(4)=2$

이므로

$$(h \circ g)(1) = h(g(1)) = h(2) = 4,$$

$$(h \circ g)(2) = h(g(2)) = h(3) = 1,$$

$$(h \circ g)(3) = h(g(3)) = h(4) = 2,$$

$$(h \circ g)(4) = h(g(4)) = h(1) = 3$$

따라서 역함수의 정의에 의하여

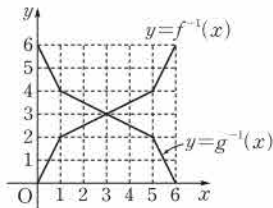
$$(h \circ g)^{-1}(1) = 2, (h \circ g)^{-1}(2) = 3,$$

$$(h \circ g)^{-1}(3) = 4, (h \circ g)^{-1}(4) = 1$$

$$\therefore (h \circ g)^{-1} = [2, 3, 4, 1]$$

답 ②

11 두 함수 $y=f(x),$
 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는
 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭
 이고, 두 함수 $y=g(x),$
 $y=g^{-1}(x)$ 의 그래프도
 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭



이므로 $y=f^{-1}(x), y=g^{-1}(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.

이때 $1 \leq a \leq 6$ 이므로 자연수 a 의 값에 따른 b 의 값은 다음과 같다.

(i) $a=1$ 일 때,

$$g(f^{-1}(1)) = g(2) = 5 \text{이므로 } g^{-1}(b) = 5$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}$$

(ii) $a=2$ 일 때,

$$g(f^{-1}(2)) = g\left(\frac{5}{2}\right) = 4 \text{이므로 } g^{-1}(b) = 4$$

$$\therefore b = 1$$

(iii) $a=3$ 일 때,

$$g(f^{-1}(3)) = g(3) = 3 \text{이므로 } g^{-1}(b) = 3$$

$$\therefore b = 3$$

(iv) $a=4$ 일 때,

$$g(f^{-1}(4)) = g\left(\frac{7}{2}\right) = 2 \text{이므로 } g^{-1}(b) = 2$$

$$\therefore b = 5$$

두 점 $(-6, 6), (6, p)$
 를 지나는 직선의 기울기

$y=f(x)$
 $\downarrow$ y 축의 방향으로
 $\downarrow$ -1 만큼 평행이동
 $y=f(x)-1$
 $\downarrow$ x 축의 이랫부분을 x 축
 $\downarrow$ 에 대하여 대칭이동
 $y=|f(x)-1|$
 $\downarrow$ y 축의 방향으로
 $\downarrow$ -1 만큼 평행이동
 $y=|f(x)-1|-1$

(v) $a=5$ 일 때,

$$g(f^{-1}(5)) = g(4) = 1 \text{이므로 } g^{-1}(b) = 1$$

$$\therefore b = \frac{11}{2}$$

(vi) $a=6$ 일 때,

$$g(f^{-1}(6)) = g(6) = 0 \text{이므로 } g^{-1}(b) = 0$$

$$\therefore b = 6$$

이상에서 조건을 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(2, 1), (3, 3), (4, 5), (6, 6)$$

이므로 $a+b$ 의 최댓값은 $6+6=12$, 최솟값은 $2+1=3$ 이다.

따라서 구하는 합은

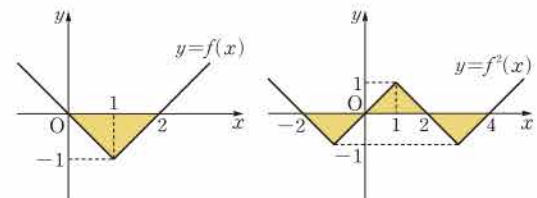
$$12+3=15$$

답 ⑤

12 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.

$y=(f \circ f)(x)=|f(x)-1|-1$ 의 그래프는 [그림 1]의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 다음 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고 $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프이다.

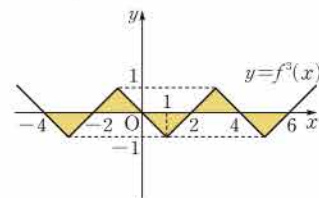
따라서 $y=f^2(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]

[그림 2]

같은 방법으로 $y=f^3(x)$ 의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

즉 $y=f^1(x), y=f^2(x), y=f^3(x), \dots, y=f^n(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 차례대로

$$1, 3 \cdot 1, 5 \cdot 1, \dots, (2n-1) \cdot 1$$

이므로

$$a=2, b=-1$$

$$\therefore a^2+b^2=2^2+(-1)^2=5$$

답 5

[그림 1], [그림 2],
 [그림 3]에서 색칠한 삼
 각형한 개의 넓이는 모두
 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$ 로 같다.

08 유리식과 유리함수

개념 & 핵심 기출

본책 76쪽

$$01 \quad x \triangle x^2 = \frac{x}{x+x^2} = \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} (x^2-x) \triangle (x-1) &= \frac{x^2-x}{x^2-x+x-1} \\ &= \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (x \triangle x^2) + \{(x^2-x) \triangle (x-1)\} \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} \\ &= \frac{x+1}{x+1} = 1 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 02 \quad &\frac{(a-2)^2}{a-b} + \frac{(b-2)^2}{b-a} \\ &= \frac{(a-2)^2 - (b-2)^2}{a-b} \\ &= \frac{\{(a-2) + (b-2)\} \{(a-2) - (b-2)\}}{a-b} \\ &= \frac{(a+b-4)(a-b)}{a-b} \\ &= a+b-4 \quad (\because a-b \neq 0) \end{aligned}$$

따라서 $a+b-4=2$ 이므로

$$a+b=6$$

답 6

$$\begin{aligned} 03 \quad &\frac{x+4}{x^2-1} \times \frac{x-2}{x^2+4x} \div \frac{x^2-5x+6}{x+1} \\ &= \frac{x+4}{x^2-1} \times \frac{x-2}{x^2+4x} \times \frac{x+1}{x^2-5x+6} \\ &= \frac{x+4}{(x+1)(x-1)} \times \frac{x-2}{x(x+4)} \times \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{1}{x(x-1)(x-3)} \end{aligned}$$

따라서 $A(x) = x(x-1)(x-3)$ 이므로

$$A(13) = 13 \cdot 12 \cdot 10 = 1560$$

답 1560

04 주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \frac{2}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right) \\ &+ \frac{3}{3} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7}\right) \\ &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+7} \\ &= \frac{6}{(x+1)(x+7)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{x-3}{x+4} \div \frac{x^2+x}{x^2+4x} \\ &= \frac{x-3}{x+4} \times \frac{x^2+4x}{x^2+x} \\ &= \frac{x-3}{x+4} \times \frac{x(x+4)}{x(x+1)} \\ &= \frac{x-3}{x+1} \end{aligned}$$

$$\therefore x^2+x = (x+4)(x-3)+12$$

$$\begin{aligned} a \neq b & \text{이므로} \\ a-b & \neq 0 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{6}{(x+1)(x+7)} = \frac{a}{(x+1)(x+7)}$ 이고, 이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=6$$

답 6

$$\begin{aligned} 05 \quad \frac{10}{7} &= 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=2, c=3$ 이므로

$$a+b+c=6$$

답 ④

06 주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned} \frac{x}{1 + \frac{3}{x+1}} &= \frac{x}{\frac{x+4}{x+1}} = \frac{x^2+x}{x+4} \\ &= \frac{(x+4)(x-3)+12}{x+4} \\ &= x-3 + \frac{12}{x+4} \end{aligned}$$

따라서 $x-3 + \frac{12}{x+4} = x+a + \frac{b}{x+4}$ 이고, 이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=-3, b=12$$

$$\therefore b-2a = 12 - 2 \cdot (-3) = 18$$

답 18

07 $3x=2y=4z=k$ ($k \neq 0$)라 하면

$$x = \frac{k}{3}, y = \frac{k}{2}, z = \frac{k}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2x+y-z}{x+y+z} &= \frac{\frac{2}{3}k + \frac{k}{2} - \frac{k}{4}}{\frac{k}{3} + \frac{k}{2} + \frac{k}{4}} \\ &= \frac{\frac{11}{12}k}{\frac{13}{12}k} = \frac{11}{13} \end{aligned}$$

답 ④

08 $\frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{3} = k$ ($k \neq 0$)라 하면

$$x-y=2k, x+y=3k$$

..... ㉠

㉠의 두 식을 변끼리 더하면

$$2x=5k \quad \therefore x = \frac{5}{2}k$$

㉠의 두 식을 변끼리 빼면

$$-2y=-k \quad \therefore y = \frac{1}{2}k$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2-5y^2}{xy} &= \frac{\left(\frac{5}{2}k\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}k\right)^2}{\frac{5}{2}k \cdot \frac{1}{2}k} = \frac{\frac{25}{4}k^2 - \frac{5}{4}k^2}{\frac{5}{4}k^2} \\ &= \frac{5k^2}{\frac{5}{4}k^2} = 4 \end{aligned}$$

답 4

다른 풀이 $\frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{3}$ 의 양변에 6을 곱하면

$$3(x-y)=2(x+y) \quad \therefore x=5y$$

$$\therefore \frac{x^2-5y^2}{xy} = \frac{20y^2}{5y^2} = 4$$

09 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{4a+3b+2c}{k} = m (m \neq 0)$ 이라 하면

$$a=2m, b=3m, c=5m$$

이므로

$$\frac{4a+3b+2c}{k} = \frac{8m+9m+10m}{k} = \frac{27m}{k}$$

$$\therefore \frac{27m}{k} = m \text{ 이므로}$$

$$k=27$$

답 27

다른 풀이 $\frac{a}{2} = \frac{4a}{8}, \frac{b}{3} = \frac{3b}{9}, \frac{c}{5} = \frac{2c}{10}$ 이므로

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{4a+3b+2c}{8+9+10} = \frac{4a+3b+2c}{27}$$

따라서 $\frac{4a+3b+2c}{k} = \frac{4a+3b+2c}{27}$ 이므로

$$k=27 (\because 4a+3b+2c \neq 0)$$

10 $\therefore k > 0$ 이면 x 의 값이 커질 때 y 의 값은 작아지지만 $k < 0$ 이면 x 의 값이 커질 때 y 의 값도 커진다.

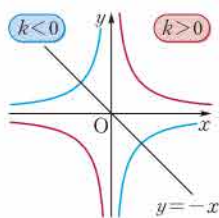
ㄴ. 함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로 직선

$y = -x$ 에 대하여 대칭이다.

ㄷ. k 의 절댓값이 커질수록 그래프는 원점으로부터 멀어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.



답 ㄴ

11 원점 O는 함수 $y = \frac{8}{x}$ 의 그래프의 두 점근선의 교점이므로

OP의 길이가 최소일 때의 점 P는 오른쪽 그림과 같다.

$$\frac{8}{x} = x \text{에서 } x^2 = 8$$

$$\therefore x = \pm 2\sqrt{2}$$

따라서 점 P의 좌표는

$$(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \text{ 또는 } (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

이므로 OP의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$$

답 4

다른 풀이 점 P의 좌표를 $(a, \frac{8}{a})$ ($a \neq 0$)이라 하면

$$OP = \sqrt{a^2 + \frac{64}{a^2}}$$

$a \neq 0$ 에서 $a^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + \frac{64}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{64}{a^2}} = 16$$

(단, 등호는 $a = \pm 2\sqrt{2}$ 일 때 성립)

따라서 OP의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{16} = 4$$

원점과 점 (x_1, y_1) 사이의 거리

$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

$$a^2 = \frac{64}{a^2} \text{에서 } a^4 = 64$$

$$a^2 = 8$$

$$\therefore a = \pm 2\sqrt{2}$$

$$12 (f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x))$$

$$= f_1\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{x}{2}$$

$$(f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x) = ((f_1 \circ f_2) \circ f_3)(x)$$

$$= (f_1 \circ f_2)\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{\frac{3}{x}}{2} = \frac{3}{2x}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{2x} \text{에서 } x^2 = 3$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{3}$$

따라서 두 함수 $y = \frac{x}{2}, y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프의 교점의 좌표는

$$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

이므로 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{15} \quad \text{답 } \sqrt{15}$$

13 $y = \frac{a}{x+b} + c$ 의 그래프의 점근선의 방정식이

$$x = -1, y = 2 \text{이므로}$$

$$b = 1, c = 2$$

따라서 $y = \frac{a}{x+1} + 2$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = a + 2 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore a + b + c = 1$$

답 ④

$$14 y = \frac{-2x+k}{x+1} = \frac{-2(x+1)+k+2}{x+1}$$

$$= \frac{k+2}{x+1} - 2$$

이므로 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{k+2}{x-2+1} - 1 - 2$$

$$= \frac{k+2}{x-1} - 3$$

즉 $g(x) = \frac{k+2}{x-1} - 3$ 이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = 1, y = -3$$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(1, -3)$ 이고, 이 점이 $y = f(x)$ 의 그래프 위에 있으므로

$$f(1) = -3$$

$$-3 = \frac{-2+k}{1+1}, \quad -6 = -2+k$$

$$\therefore k = -4$$

답 -4

$$15 y = \frac{bx+1}{x+a} = \frac{b(x+a)-ab+1}{x+a}$$

$$= \frac{-ab+1}{x+a} + b$$

이므로 점근선의 방정식은

$$x = -a, y = b$$

일품 BOX

이 함수의 그래프가 점 $(1, -2)$ 에 대하여 대칭이므로

$$a = -1, b = -2$$

따라서 $2 \leq x \leq 4$ 에서

$$\begin{aligned} y &= \frac{-2x+1}{x-1} \\ &= -\frac{1}{x-1} - 2 \end{aligned}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$x=4일 때 최댓값 -\frac{7}{3},$$

$$x=2일 때 최솟값 -3$$

을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$$-\frac{7}{3} \cdot (-3) = 7$$

답 7

16 $y = \frac{3x-2}{2x-3}$ 라 하면

$$y(2x-3) = 3x-2, \quad (2y-3)x = 3y-2$$

$$\therefore x = \frac{3y-2}{2y-3}$$

$$x와 y를 서로 바꾸면 \quad y = \frac{3x-2}{2x-3}$$

$$이때 (f^{-1})^{-1} = f이므로 \quad f(x) = \frac{3x-2}{2x-3}$$

따라서 $a=2, b=-3, c=-2$ 이므로

$$a+b+c = -3$$

답 -3

참고 $f(x) = \frac{3x-2}{2x-3}, f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{2x-3}$ 에서

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

17 $g(2)=1$ 이므로 $f(1)=2$

$$\frac{1+a}{b+3} = 2 \quad \therefore a-2b=5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(f \circ f)(1)=3에서 \quad f(f(1))=f(2)=3$$

$$\frac{2+a}{2b+3} = 3 \quad \therefore a-6b=7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}을 연립하여 풀면 \quad a=4, b=-\frac{1}{2}$$

$$따라서 f(x) = \frac{x+4}{-\frac{1}{2}x+3} = \frac{2x+8}{-x+6} 이므로$$

$$f(4) = \frac{16}{2} = 8$$

답 8

18 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(3, b)$ 에 대하여 대칭이다.

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x+5}{x-a} = \frac{2(x-a)+2a+5}{x-a} \\ &= \frac{2a+5}{x-a} + 2 \end{aligned}$$

에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(a, 2)$ 에 대하여 대칭이므로

그래프가 점 $(1, -2)$ 에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$$x=1, y=-2$$

즉 $-a=1, b=-2$ 이므로

$$a=-1, b=-2$$

$$a=3, b=2$$

$$\therefore ab=6$$

답 ③

비밀노트

함수 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0, c \neq 0$)에 대하여 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ 에 대하여 대칭이고 $y=f(x)$ 의 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 점 $(\frac{a}{c}, -\frac{d}{c})$ 에 대하여 대칭이다.

1등급을 위한 고난도 문제

본책 79쪽

$$01 \quad x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \quad \cdots ①$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7에서 \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9$$

$$이때 x > 0이므로 \quad x + \frac{1}{x} = 3 \quad \cdots ②$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3 - 3 \cdot 3 = 18 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^5 + \frac{1}{x^5} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 7 \cdot 18 - 3 = 123 \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

답 123

채점 기준	비율
① $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 을 변형할 수 있다.	20%
② $x + \frac{1}{x}$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

$$\begin{aligned} 02 \quad \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} &= \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \\ &= \frac{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)}{abc} \\ &= \frac{2^2 - 2 \cdot (-1)}{abc} \\ &= \frac{6}{abc} \end{aligned}$$

$$즉 \frac{6}{abc} = -3이므로 \quad abc = -2 \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} &= \frac{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}{abc} \\ &= \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{abc} \\ &= \frac{(-1)^2 - 2 \cdot (-2) \cdot 2}{-2} = -\frac{9}{2} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

답 $-\frac{9}{2}$

곱셈 공식의 변형

$$\begin{aligned} ① a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ ② a^3 - b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b) \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① abc 의 값을 구할 수 있다.	50%
② $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}$ 의 값을 구할 수 있다.	50%

03 $\frac{am+2a}{m^2-4} = \frac{a(m+2)}{(m+2)(m-2)} = \frac{a}{m-2}$

이므로 $m-2$ 가 a 의 양의 약수 d 이면 $\frac{a}{d}$ 는 정수이고,
 $m-2$ 가 $-d$ 일 때도 $-\frac{a}{d}$ 는 정수이다.

즉 $f(a)=4$ 가 되려면 a 의 양의 약수의 개수가 2이어야
 하므로 a 는 소수이다.

따라서 a 는 30 이하의 홀수인 소수이므로 a 의 값은

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29의 9개 답 ④

04 $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+4}{x+3} - \frac{x+5}{x+4}$

$$= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+3}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right)$$

$$= -\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{-(x^2+7x+12)+x^2+3x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{-4x-10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

따라서

$$\frac{-4x-10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{ax+b}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

이고, 이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=-4, b=-10 \quad \text{답 } a=-4, b=-10$$

다른 풀이 주어진 등식에 $x=0$ 을 대입하면

$$-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{b}{24}$$

$$\therefore b = -12 + 32 - 30 = -10$$

주어진 등식에 $x=-5$ 를 대입하면

$$\frac{-5}{-4} - \frac{-4}{-3} + \frac{-1}{-2} = \frac{-5a-10}{-4 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1)}$$

$$30 - 32 + 12 = -5a - 10, \quad 5a = -20$$

$$\therefore a = -4$$

05 $n^2+1 < n^2+2 < 2n^2+2$ 이므로 집합 $A_n \cap B_n$ 의 원소의 최솟값은 n^2+2 이고, n^2+3n+2 와 $2n^2+2$ 중 작거나 같은 값이 집합 $A_n \cap B_n$ 의 원소의 최댓값이다.

이때

$$n^2+3n+2 - (2n^2+2) = 3n - n^2$$

$$= n(3-n)$$

에서 $n < 3$ 이면 $n^2+3n+2 > 2n^2+2$ 이므로

$$f(n) = 2n^2+2$$

$$A_n \cap B_n = \{x \mid n^2+2 \leq x \leq n^2+3n+2\}$$

부분분수로의 변형

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$$

(단, $A \neq B$)

분자의 차수가 분모의 차수보다 낮아지도록 식을 변형한다.

세 다항식 A, B, C 에 대하여 $A=B=C$ 이면
 $\Rightarrow A=B$ 이고 $B=C$ 이고 $C=A$

$$A_n \cap B_n = \{x \mid n^2+2 \leq x \leq 2n^2+2\}$$

$n \geq 3$ 이면 $n^2+3n+2 \leq 2n^2+2$ 이므로

$$f(n) = n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \frac{1}{f(4)} + \cdots + \frac{1}{f(10)}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{11 \cdot 12}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{31}{60}$$

따라서 $p=60, q=31$ 이므로

$$p+q=91$$

답 91

06 A, B, C로 시간당 채울 수 있는 물의 양을 각각 a, b, c 라 하고, 수영장을 가득 채우는 데 필요한 물의 양을 W 라 하자.

$$\frac{W}{a} = \frac{W}{b} \cdot m \text{ 이므로 } m = \frac{b}{a}$$

$$\frac{W}{b} = \frac{W}{c} \cdot n \text{ 이므로 } n = \frac{c}{b}$$

$$\text{또 } \frac{W}{c} = \frac{W}{a+b} \cdot x \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{a+b}{c} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{c}{b}} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{c}{b}}$$

$$= \frac{\frac{1}{m} + 1}{n} = \frac{m+1}{mn}$$

답 ④

07 $x+y+z=3x+2y-z$ 에서

$$2x+y-2z=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$3x+2y-z=x-y+2z$ 에서

$$2x+3y-3z=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $-2y+z=0$

$$\therefore z=2y$$

$z=2y$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $x = \frac{3y}{2}$

$$\therefore \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{z}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{z}} = \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{2y}}{\frac{1}{3y} - \frac{1}{2y}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

답 ⑤

08 $\frac{-x+y+z}{x} = \frac{x-y+z}{y} = \frac{x+y-z}{z} = k$ 라 하면

$$-x+y+z=kx, \quad x-y+z=ky, \quad x+y-z=kz$$

위의 세 식을 변끼리 더하면

$$x+y+z=k(x+y+z)$$

$$\therefore k=1 \quad (\because x+y+z \neq 0)$$

$$\frac{-x+y+z}{x} = 1 \text{ 에서 } x = \frac{y+z}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{x-y+z}{y} = 1 \text{ 에서 } y = \frac{z+x}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

일품 BOX

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $y=z$
 $y=z$ 를 ㉠에 대입하여 정리하면 $x=z$
 $\therefore x=y=z$ ①

즉 $\triangle ABC$ 는 한 변의 길이가 x 인 정삼각형이고 $\triangle ABC$ 의 넓이는 $\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \sqrt{3}, \quad x^2 = 4$$

$$\therefore x=2 (\because x>0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이는

$$x+y+z=3x=3 \cdot 2=6$$

②

③

답 6

채점 기준	비율
① $x=y=z$ 임을 알 수 있다.	50%
② 정삼각형 ABC 의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	30%
③ $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	20%

09 $|y| = \frac{k}{|x|}$ 의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같고, 점 D의 좌표를

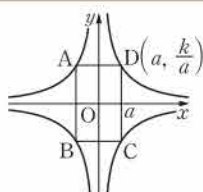
$(a, \frac{k}{a})$ ($a>0$)라 하면

$$S(k) = 4 \cdot a \cdot \frac{k}{a} = 4k$$

$$\therefore S(1) + S(2) + S(3) + S(4)$$

$$= 4 \cdot (1+2+3+4)$$

$$= 40$$



$x>0, y>0$ 일 때 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 그리고, 이 그래프를 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이다.

점 C는 제1사분면 위의 점이므로 점 C의 x 좌표는 양수이다.

답 ④

10 $0 < a < b$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 두 점 A, B를 각각 $A(a, \frac{1}{a}), B(b, \frac{1}{b})$ 이라 하면 직선 AB의 기울기

가 $-\frac{1}{4}$ 이므로

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{\frac{a-b}{ab}}{b-a} = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{ab} = -\frac{1}{4} \quad \therefore ab=4$$

또 $\overline{AB} = \frac{\sqrt{34}}{4}$ 이므로

$$\sqrt{(b-a)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

$$\sqrt{(b-a)^2 + \left(\frac{a-b}{ab}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

$$(b-a)\sqrt{1 + \frac{1}{(ab)^2}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

$$(b-a) \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

$$\therefore b-a = \sqrt{2}$$

이때 $\overline{AB}$ 의 중점의 x 좌표가 $\frac{a+b}{2}$ 이고

$$(a+b)^2 = (b-a)^2 + 4ab$$

$$= (\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 4 = 18$$

이므로

$$a+b = 3\sqrt{2} (\because a+b>0)$$

따라서 $\overline{AB}$ 의 중점의 x 좌표는

$$\frac{a+b}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

답 ⑤

11 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 직선 l 과 직선 $y=x$ 는 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(1, a), (a, 1)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(a-1)^2 + (1-a)^2} \\ &= \sqrt{2}(a-1) (\because a>1) \end{aligned}$$

또 직선 l 의 방정식은

$$y-a = -1 \cdot (x-1), \text{ 즉 } x+y-(a+1)=0$$

이므로 원점과 직선 $x+y-(a+1)=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-(a+1)|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{a+1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}(a-1) \cdot \frac{a+1}{\sqrt{2}} = \frac{a^2-1}{2}$$

$$\frac{a^2-1}{2} = 40 \text{에서 } a^2 = 81$$

$$\therefore a=9 (\because a>1)$$

①

한편 점 C의 x 좌표는 $\frac{9}{x}=x$ 에서

$$x^2=9 \quad \therefore x=3 (\because x>0)$$

따라서 C(3, 3)이므로 점 C와 직선 $x+y-10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+3-10|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

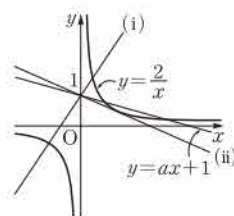
$$\therefore \triangle CAB = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = 16$$

②

답 16

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	60%
② $\triangle CAB$ 의 넓이를 구할 수 있다.	40%

12 직선 $y=ax+1$ 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 (0, 1)을 지나므로 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 직선 $y=ax+1$ 은 오른쪽 그림과 같다.



(i) $a>0$ 일 때,

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 직선 $y=ax+1$ 은 항상 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $a<0$ 일 때,

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 직선 $y=ax+1$ 이 접하려면 방정식 $\frac{2}{x} = ax+1$, 즉 $ax^2+x-2=0$ 의 판별식을 D 라

할 때 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=1^2-4a \cdot (-2)=0, \quad 8a+1=0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{8}$$

따라서 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = ax + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{8} < a < 0$$

(i), (ii)에서 $-\frac{1}{8} < a < 0$ 또는 $a > 0$ 답 ④

13 $\overline{AD} = a - c$, $\overline{AB} = \frac{16}{a} - \frac{16}{c}$ 이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} 2(\overline{AD} + \overline{AB}) &= 2(a - c) + 2\left(\frac{16}{a} - \frac{16}{c}\right) \\ &= 2\left(a + \frac{16}{a}\right) + 2\left(-c + \frac{16}{-c}\right) \end{aligned}$$

이때 $a > 0$, $-c > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} &2\left(a + \frac{16}{a}\right) + 2\left(-c + \frac{16}{-c}\right) \\ &\geq 2 \cdot 2\sqrt{a \cdot \frac{16}{a}} + 2 \cdot 2\sqrt{-c \cdot \frac{16}{-c}} \\ &= 16 + 16 \\ &= 32 \text{ (단, 등호는 } a = 4, c = -4 \text{일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 최소일 때 $A(4, 4)$, $C(-4, -4)$ 이므로 구하는 넓이는

$$\overline{AD} \cdot \overline{AB} = 8 \cdot 8 = 64$$

답 64

14 $\because y = \frac{2x+6}{x+2} = \frac{2(x+2)+2}{x+2} = \frac{2}{x+2} + 2$

따라서 $y = \frac{2x+6}{x+2}$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore y = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$

따라서 $y = \frac{x}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore y = \frac{x-4}{2-x} = \frac{-(x-2)+2}{x-2} = \frac{2}{x-2} - 1$

따라서 $y = \frac{x-4}{2-x}$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동에 의하여 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 $\neg$, $\vdash$ 이다. 답 ④

15 함수 $y = \frac{k}{x-5} + 2$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x = 5$, $y = 2$ 이므로 $k < 0$ 이면 제3사분면을 지나지 않는다.

$$\therefore k > 0$$

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = ax + 1$ 의 교점의 개수는

(i) $a < -\frac{1}{8}$ 일 때 $\Rightarrow 0$

(ii) $a = -\frac{1}{8}$ 일 때 $\Rightarrow 1$

(iii) $-\frac{1}{8} < a < 0$ 일 때 $\Rightarrow 2$

(iv) $a = 0$ 일 때 $\Rightarrow 1$

(v) $a > 0$ 일 때 $\Rightarrow 2$

$a = \frac{16}{a}$ 에서 $a^2 = 16$

$\therefore a = 4$ ($\because a > 0$)

$-c = \frac{16}{-c}$ 에서

$$c^2 = 16$$

$\therefore c = -4$ ($\because c < 0$)

이때 오른쪽 그림에서 함

수 $y = \frac{k}{x-5} + 2$ 의 그래

프가 모든 사분면을 지나

려면 함수 $y = \frac{k}{x-5} + 2$

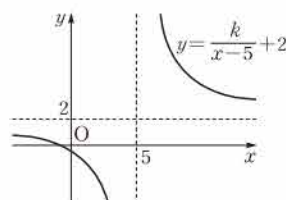
의 그래프의 y 절편이 음

수이어야 하므로

$$\frac{k}{0-5} + 2 < 0, \quad \frac{k}{5} > 2 \quad \therefore k > 10$$

따라서 구하는 정수 k 의 최솟값은 11이다. 답 11

참고 함수 $y = \frac{k}{x-5} + 2$ 의 그래프의 x 절편이 음수이어야 함을 이용하여 k 의 값의 범위를 구해도 된다.



16 $y = \frac{1}{x-5} - \frac{12}{x^2+2x-35}$

$$= \frac{1}{x-5} - \frac{12}{(x+7)(x-5)}$$

$$= \frac{x-5}{(x+7)(x-5)} = \frac{1}{x+7}$$

따라서 $-2 \leq x \leq 3$ 에서

$y = \frac{1}{x+7}$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$x = -2$ 일 때

최댓값 $\frac{1}{5}$,

$x = 3$ 일 때 최솟값 $\frac{1}{10}$

을 갖는다.

즉 $M = \frac{1}{5}$, $m = \frac{1}{10}$ 이므로

$$M + m = \frac{3}{10}$$

답 ①

17 $y = \frac{-2x+7}{2x-1} = \frac{-(2x-1)+6}{2x-1}$

$$= \frac{6}{2x-1} - 1$$

y 의 값이 정수이려면

$$2x-1 = -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$$

$$\therefore x = -\frac{5}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{2}$$

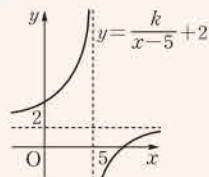
이때 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다. 답 ②

따라서 x 좌표, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는 4이다. 답 ③

$(-1, -3), (0, -7), (1, 5), (2, 1)$

답 4

$k < 0$ 일 때



채점 기준

비율

① 주어진 함수의 식을 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$) 꼴로 변형할 수 있다.

30%

② 정수 x 의 값을 구할 수 있다.

50%

③ x 좌표, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구할 수 있다.

20%

18 정사각형 OBPA의 넓이가 9이므로 정사각형의 한 변의 길이는 3이다.

또 정사각형은 원점을 한 꼭짓점으로 하고 두 변이 각각 x 축, y 축 위에 있으므로

$$P(-3, 3)$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 한 점근선이 직선

$$x=-2$$

$$-\frac{d}{c}=-2 \quad \therefore d=2c$$

$f(0)=0$ 에서 $b=0$ 이므로

$$f(x)=\frac{ax}{cx+2c}$$

$f(-3)=3$ 에서

$$\frac{-3a}{-3c+2c}=3 \quad \therefore a=c$$

따라서 $f(x)=\frac{cx}{cx+2c}=\frac{x}{x+2}$ 이므로

$$f(4)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

답 2/3

19 함수 $y=\frac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 두 직선 $x=-2$,

$y=4$ 와 만나지 않으려면 두 직선 $x=-2$, $y=4$ 가 주어진 함수의 그래프의 점근선이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned} y &= \frac{bx+c}{x+a} = \frac{b(x+a)+c-ab}{x+a} \\ &= \frac{c-ab}{x+a} + b \end{aligned}$$

에서 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=b$ 이므로

$$a=2, b=4$$

$$\therefore y = \frac{bx+c}{x+a} = \frac{c-8}{x+2} + 4$$

한편 직선 $y=x+6$ 은 점 $(-2, 4)$ 를 지나므로 오른쪽

쪽 그림에서 $y=\frac{c-8}{x+2}+4$

의 그래프가 직선 $y=x+6$

과 만나지 않으려면

$c-8 < 0$ 이어야 한다.

$$\therefore c < 8$$

따라서 정수 c 의 최댓값은 7이다.

답 7

20 네 개의 직선 l_1, l_2, l_3, l_4 는

$$x=a, y=b, x=0, y=0$$

이므로 네 개의 직선 l_1, l_2, l_3, l_4 로 둘러싸인 사각형의 꼭짓점은

$$(0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b)$$

세 점 $(0, 0), (a, 0), (0, b)$ 는 모두 함수 $y=\frac{4}{x}$ 의 그

래프의 점근선 위의 점이므로 함수 $y=\frac{4}{x}$ 의 그래프는 점

(a, b) 를 지난다.

$$\text{따라서 } b=\frac{4}{a} \text{이므로 } ab=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다.

또 세 점 $(a, 0), (0, b), (a, b)$ 는 모두 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선 위의 점이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(0, 0)$ 을 지난다.

$$\text{따라서 } 0=\frac{k}{-a}+b \text{이므로 } k=ab \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $k=4$ 이고

$$a=1, b=4 \text{ 또는 } a=2, b=2 \text{ 또는 } a=4, b=1$$

(i) $a=1, b=4$ 일 때,

$$f(x)=\frac{4}{x-1}+4 \text{이므로}$$

$$f(5)=\frac{4}{5-1}+4=5$$

(ii) $a=2, b=2$ 일 때,

$$f(x)=\frac{4}{x-2}+2 \text{이므로}$$

$$f(5)=\frac{4}{5-2}+2=\frac{10}{3}$$

(iii) $a=4, b=1$ 일 때,

$$f(x)=\frac{4}{x-4}+1 \text{이므로}$$

$$f(5)=\frac{4}{5-4}+1=5$$

이상에서 $f(5)$ 의 최솟값은 $\frac{10}{3}$ 이다.

답 ②

21 $y=\frac{bx}{x+a}$ 라 하면

$$y(x+a)=bx, \quad x(y-b)=-ay$$

$$\therefore x=\frac{-ay}{y-b}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y=\frac{-ax}{x-b}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-ax}{x-b}$$

$$\text{조건 ㉞에서 } \frac{bx}{x+a}=\frac{-ax}{x-b} \text{이므로}$$

$$b=-a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{한편 } f(x)=\frac{bx}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab}{x+a}=\frac{-ab}{x+a}+b \text{에서}$$

$y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=b$ 이므로 점 P의 좌표는

$$(-a, b)$$

$$\text{조건 ㉞에서 } \overline{OP}=3\sqrt{2} \text{이므로 } \sqrt{(-a)^2+b^2}=3\sqrt{2}$$

$$\therefore a^2+b^2=18 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 2a^2=18 \quad \therefore a^2=9$$

$$\therefore ab=a \cdot (-a)=-a^2=-9 \quad \text{답 } -9$$

💡 비밀노트

$f^{-1}(x)$ 는 $f(x)$ 의 식에서 분자의 x 의 계수 b 와 분모의 상수항 a 의 위치를 서로 바꾼 후 그 부호를 각각 바꾼 것과 같음을 이용하여 구할 수도 있다.

22 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 두 직선 $y=x+2$,

$y=-x+8$ 에 대하여 각각 대칭이므로 두 직선의 교점은

함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점과 같다.

$y=x+2$, $y=-x+8$ 을 연립하여 풀면

$$x=3, y=5$$

즉 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=5$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=5, y=3$$

$$f(x) = \frac{ax}{x+b} = \frac{a(x+b)-ab}{x+b} = \frac{-ab}{x+b} + a \text{에서}$$

$y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=a$ 이므로

$$a=3, b=-5$$

$$\therefore f(x) = \frac{3x}{x-5}$$

$f^{-1}(4)=k$ 라 하면 $f(k)=4$ 이므로

$$\frac{3k}{k-5}=4$$

$$3k=4k-20 \quad \therefore k=20$$

$$\therefore f^{-1}(4)=20$$

①

②

③

답 20

채점 기준	비율
① $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
③ $f^{-1}(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

23 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x-1}\right) = x+1$ 이므로

$$\frac{x}{x-1} = t \text{로 놓으면}$$

$$x=t(x-1), \quad x(1-t)=-t$$

$$\therefore x = \frac{t}{t-1}$$

$x = \frac{t}{t-1}$ 를 $g\left(\frac{x}{x-1}\right) = x+1$ 에 대입하면

$$g(t) = \frac{t}{t-1} + 1 = \frac{2t-1}{t-1}$$

$$\therefore g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

$g^{-1}(3)=a$ 라 하면 $g(a)=3$ 이므로

$$\frac{2a-1}{a-1}=3$$

$$2a-1=3a-3 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore g^{-1}(3)=2$$

답 ⑤

다른 풀이 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x+1$ 에서

$$g^{-1}(x+1) = f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$x+1=3$ 이면 $x=2$ 이므로

$$g^{-1}(3) = \frac{2}{2-1} = 2$$

24 $f(x) = \frac{x-a}{x+2} = \frac{(x+2)-a-2}{x+2} = \frac{-a-2}{x+2} + 1$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-2, y=1$$

따라서 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=-2$ 이고, 조건 ⑦에서

점근선의 방정식은
 $x=1, y=b+1$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= f(x-3) + b = \frac{x-3-a}{x-3+2} + b \\ &= \frac{(x-1)-a-2}{x-1} + b \\ &= \frac{-a-2}{x-1} + b+1 \end{aligned}$$

이므로

$$b+1=-2 \quad \therefore b=-3$$

또 조건 ⑧에서

$$\begin{aligned} y &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x-a}{x+2}\right) \\ &= \frac{\frac{x-a}{x+2}-a}{\frac{x-a}{x+2}+2} = \frac{\frac{x-a-ax-2a}{x+2}}{\frac{x-a+2x+4}{x+2}} \\ &= \frac{(1-a)x-3a}{3x-a+4} \end{aligned}$$

의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $x=-1$ 이므로

$$\frac{a-4}{3} = -1 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore a-b=4$$

답 ②

내신 수학

1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제**

본책 83쪽

01 A, B 두 지역의 15세 이상 인구수의 비가 2 : 5이므로 두 지역의 15세 이상 인구수를 각각 $2p$, $5p$ ($p>0$)라 하고, 두 지역의 실업자 수의 비가 1 : 2이므로 두 지역의 실업자 수를 각각 q , $2q$ ($q>0$)라 하자.

또 두 지역의 취업자 수를 각각 x , y 라 하자.

$$\text{A 지역의 실업률은 } \frac{q}{x+q} \times 100 (\%)$$

$$\text{B 지역의 실업률은 } \frac{2q}{y+2q} \times 100 (\%)$$

이때 두 지역의 실업률이 같으므로

$$\frac{q}{x+q} \times 100 = \frac{2q}{y+2q} \times 100$$

$$q(y+2q) = 2q(x+q), \quad qy+2q^2 = 2qx+2q^2$$

$$\therefore y=2x \quad (\because q>0)$$

$$\text{A 지역의 고용률은 } \frac{x}{2p} \times 100 (\%)$$

$$\text{B 지역의 고용률은 } \frac{2x}{5p} \times 100 (\%)$$

따라서 두 지역의 고용률의 비는

$$\left(\frac{x}{2p} \times 100\right) : \left(\frac{2x}{5p} \times 100\right) = \frac{1}{2} : \frac{2}{5} = 5 : 4$$

즉 $m=5$, $n=4$ 이므로

$$m+5n=5+5 \cdot 4=25$$

답 25

02 $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$ ($a>1$)이라 하면 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$B\left(\frac{1}{a}, a\right)$$

$$\begin{aligned} y &= 2x0 \text{이므로} \\ \frac{y}{5p} &= \frac{2x}{5p} \end{aligned}$$

$y = \frac{1}{x}$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, $\triangle OAB$ 가 정삼각형이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

직선 $y=x$ 와 선분 AB의 교점을 P라 하면 점 P는 선분 AB의 중점입니다.

$$P\left(\frac{a^2+1}{2a}, \frac{a^2+1}{2a}\right)$$

$\angle AOP=30^\circ$ 이므로 직각삼각

형 OAP에서

$$\overline{OP} : \overline{AP} = \sqrt{3} : 1, \quad \overline{OP} = \sqrt{3} \overline{AP}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(a - \frac{a^2+1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{a^2+1}{2a}\right)^2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{a^2+1}{2a} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{a^2+1}{2a} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{a^2-1}{2a}$$

$$(\sqrt{3}-1)a^2 = \sqrt{3}+1$$

$$\therefore a^2 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \boxed{2+\sqrt{3}}$$

점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle AOH = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

이므로 직각삼각형 OAH에서

$$\tan 15^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{OH}} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a^2} = \boxed{2-\sqrt{3}}$$

따라서 $f(a) = \frac{a^2+1}{2a}$, $p=2+\sqrt{3}$, $q=2-\sqrt{3}$ 이므로

$$f(p+q) = f(4) = \frac{4^2+1}{2 \cdot 4} = \frac{17}{8} \quad \text{답 } \frac{17}{8}$$

03 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{-5-3}{4+2}(x+2)$$

$$\therefore 4x+3y-1=0$$

점 P의 좌표를 $(t, \frac{3}{t})$ ($t>0$)이

라 하면 점 P와 직선 $4x+3y-1=0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{\left|4t + \frac{9}{t} - 1\right|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{\left|4t + \frac{9}{t} - 1\right|}{5}$$

$\triangle PAB$ 의 밑변을 $\overline{AB}$ 라 하면 $\triangle PAB$ 의 넓이는 높이 d 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4t + \frac{9}{t} \geq 2\sqrt{4t \cdot \frac{9}{t}} = 12$$

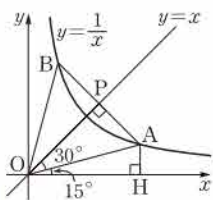
(단, 등호는 $t = \frac{3}{2}$ 일 때 성립)

이므로 d 의 최솟값은

$$\frac{|12-1|}{5} = \frac{11}{5}$$

따라서 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최솟값은

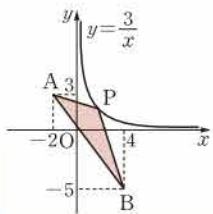
$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \frac{11}{5} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{11}{5} = 11 \quad \text{답 } 11$$



$$\frac{a + \frac{1}{a}}{2} = \frac{\frac{a^2+1}{a}}{2} = \frac{a^2+1}{2a}$$

직선 $y=x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 45° 이다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\ &= 2-\sqrt{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y-3 &= -\frac{4}{3}(x+2) \\ -3y+9 &= 4x+8 \\ \therefore 4x+3y-1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4t &= \frac{9}{t} \text{에서 } t^2 = \frac{9}{4} \\ \therefore t &= \frac{3}{2} \quad (\because t>0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(4+2)^2 + (-5-3)^2} \\ &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

04 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 이므로

$$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$

$$= \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}$$

$$= \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x+2x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1}+1}$$

$$= \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x+3x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

$\vdots$

$$\therefore f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$$

$$f^k(a) = \frac{2}{333} \text{에서 } \frac{a}{ka+1} = \frac{2}{333}$$

$$\frac{ka+1}{a} = \frac{333}{2} \quad \therefore k + \frac{1}{a} = 166 + \frac{1}{2}$$

이때 a, k 는 자연수이므로

$$a=2, k=166$$

$$\therefore a+k=168$$

답 168

05 $Q(2+a, 3), R(2, 3+b)$

이고 $\triangle OQR$ 의 넓이가 6이므로

$$(2+a)(3+b)$$

$$- \frac{1}{2} \{2(3+b)$$

$$+ 3(2+a) + ab\}$$

$$= 6$$

$$\frac{3}{2}a + b + \frac{1}{2}ab = 6, \quad 3a + 2b + ab = 12$$

$$(a+2)b = 12 - 3a$$

$$\therefore b = \frac{12-3a}{a+2} = \frac{-3(a+2)+18}{a+2}$$

$$= \frac{18}{a+2} - 3$$

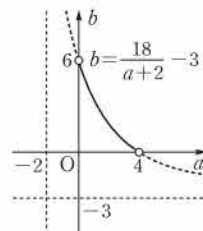
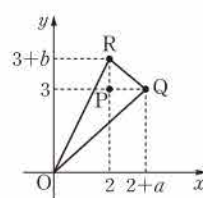
이때 $a>0, b>0$ 이므로

$$\frac{18}{a+2} - 3 > 0$$

$$\therefore 0 < a < 4$$

따라서 구하는 자취의 방정식은

$$y = \frac{18}{x+2} - 3 \quad (0 < x < 4)$$



답 ①

09 무리식과 무리함수

개념 & 핵심 기출

본책 84쪽

01 $-3 \leq x \leq 1$ 에서 $1-x \geq 0$, $x+3 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-x)^2} - \sqrt{(x+3)^2} &= |1-x| - |x+3| \\ &= (1-x) - (x+3) \\ &= -2x-2\end{aligned}$$

답 ②

02 $\sqrt{ab}\sqrt{b-a} = -\sqrt{ab(b-a)}$ 에서

$$ab < 0, b-a < 0$$

$$\therefore a > 0, b < 0$$

따라서 $a-b > 0$ 이므로

$$\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{|a|-|b|} = \frac{|a-b|}{a-(-b)} = \frac{a-b}{a+b}$$

답 ③

03 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = -\sqrt{\frac{a}{c}}$ 에서 $a > 0, c < 0$

$a+b < c$ 에서 $b < c-a$ 이므로

$$b < 0$$

따라서 $a-b > 0, b+c < 0, c-a < 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{(b+c)^2} + \sqrt{(c-a)^2} \\ &= (a-b) - \{-(b+c)\} - (c-a) \\ &= 2a\end{aligned}$$

답 2a

$$\begin{aligned}04 \quad \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{2}-1}} &= \frac{1}{1+\frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}} \\ &= \frac{1}{1+2(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} \\ &= 3-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}05 \quad \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{(x+1)-2\sqrt{x^2-1}+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} \\ &= \frac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2} \\ &= x-\sqrt{x^2-1} \\ &= \sqrt{10}-\sqrt{10-1} \\ &= \sqrt{10}-3\end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}06 \quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\ &= \frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}\end{aligned}$$

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}A < 0, B < 0 \text{ 일 때,} \\ \sqrt{A}\sqrt{B} &= -\sqrt{AB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{a(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}\end{aligned}$$

에서

$$x+y = (2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2}) = 4,$$

$$xy = (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) = 2,$$

$$x-y = (2+\sqrt{2}) - (2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$$

답 ②

$$\begin{aligned}07 \quad a+b &= (\sqrt{3}+\sqrt{2}+1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}+1) \\ &= 2\sqrt{3}+2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ab &= (\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1) \\ &= (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= 2+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}a^2+ab+b^2 &= (a+b)^2 - ab \\ &= (2\sqrt{3}+2)^2 - (2+2\sqrt{3}) \\ &= 14+6\sqrt{3}\end{aligned}$$

즉 $p+q\sqrt{3} = 14+6\sqrt{3}$ 이고 p, q 는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$p=14, q=6$$

$$\therefore p+q=20$$

답 20

$$\begin{aligned}\text{다른 풀이} \quad a-b &= (\sqrt{3}+\sqrt{2}+1) - (\sqrt{3}-\sqrt{2}+1) \\ &= 2\sqrt{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ab &= (\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1) \\ &= (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= 2+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}a^2+ab+b^2 &= (a-b)^2 + 3ab \\ &= (2\sqrt{2})^2 + 3(2+2\sqrt{3}) \\ &= 14+6\sqrt{3}\end{aligned}$$

즉 $p+q\sqrt{3} = 14+6\sqrt{3}$ 이고 p, q 는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$p=14, q=6$$

$$\therefore p+q=20$$

$$\begin{aligned}08 \quad 2 + \frac{2}{\sqrt{3}+1} &= 2 + \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= 2+\sqrt{3}-1 = \sqrt{3}+1\end{aligned}$$

이므로 주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \frac{a}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{\sqrt{3}+1}}}} \\ &= \frac{a}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{\sqrt{3}+1}}} \\ &= \frac{a}{2 + \frac{2}{\sqrt{3}+1}} = \frac{a}{\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}\end{aligned}$$

일품 BOX

즉 $-\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3} = b + 3\sqrt{3}$ 이고 a, b 는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-\frac{a}{2} = b, \frac{a}{2} = 3$$

$$\therefore a = 6, b = -3$$

$$\therefore a + b = 3$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 09 \text{ (좌변)} &= a\sqrt{2} + a\sqrt{3} + ab\sqrt{6} + 6 + 3\sqrt{6} + 6b\sqrt{3} \\ &= 6 + a\sqrt{2} + (a + 6b)\sqrt{3} + (ab + 3)\sqrt{6} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &6 + a\sqrt{2} + (a + 6b)\sqrt{3} + (ab + 3)\sqrt{6} \\ &= c + \sqrt{2} - 17\sqrt{3} \end{aligned}$$

이때 a, b, c 는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$c = 6, a = 1, a + 6b = -17, ab + 3 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -3, c = 6$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + (-3)^2 + 6^2 = 46$$

답 ④

10 직선의 기울기는 음수이고 y 절편은 양수이므로 $a < 0, b > 0$

즉 $-a > 0, b > 0$ 이므로 무리함수 $y = b\sqrt{-ax}$ 의 정의역은 $\{x | x \geq 0\}$ 이고, 치역은 $\{y | y \geq 0\}$ 이다.

이때 $y = b\sqrt{-ax}$ 의 그래프는 원점을 지나므로 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

답 ②

11 두 함수 $y = \sqrt{ax}, y = \sqrt{-bx}$ 의 그래프가 제1사분면을 지나므로

$$a > 0, -b > 0$$

함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프가 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프보다 아래쪽에 있고, 함수 $y = \sqrt{-bx}$ 의 그래프가 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프보다 위쪽에 있으므로

$$a < 1, -b > 1$$

$$\therefore 0 < a < 1, b < -1$$

따라서 $a + b < 0, a - b > 0$ 이므로

$$|a + b| - |a - b| = -1 \text{에서}$$

$$-(a + b) - (a - b) = -1, \quad -2a = -1$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

답 1/2

12 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-2(x-2)} - 1 \\ &= \sqrt{-2x+4} - 1 \end{aligned}$$

따라서 $a = 4, b = -1$ 이므로

$$ab = -4$$

$$\therefore f(ab) = f(-4)$$

$$= \sqrt{-2 \cdot (-4) + 4} - 1$$

$$= 2\sqrt{3} - 1$$

답 ③

$\sqrt{X}$ 의 값이 실수가 되도록 하는 조건은 $X \geq 0$ 이다.

$$\begin{aligned} \sqrt{4x-1} &\geq 0 \text{이므로} \\ g(x) &\geq k \end{aligned}$$

13 함수 $f(x) = \sqrt{-2x+5} - 1$ 에서 $-2x+5 \geq 0$ 이므로

$$x \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore A = \left\{x \mid x \leq \frac{5}{2}\right\}$$

함수 $g(x) = \sqrt{4x-1} + k$ 에서

$$g(x) \geq k$$

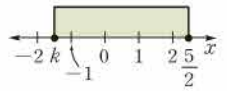
$$\therefore B = \{y \mid y \geq k\}$$

$$\therefore A \cap B = \left\{x \mid k \leq x \leq \frac{5}{2}\right\}$$

이때 집합 $A \cap B$ 에 속하는 정수의 개수가 4이므로 오른쪽 그림에서 k 의 값의 범위는

$$-2 < k \leq -1$$

답 ③



참고 무리함수의 정의역과 치역

함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$ ($a > 0$)에 대하여

$$\Rightarrow \text{정의역: } ax+b \geq 0 \text{이므로 } \left\{x \mid x \geq -\frac{b}{a}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{치역: } \sqrt{ax+b} \geq 0 \text{이므로 } \{y \mid y \geq c\}$$

14 함수 $y = \sqrt{x+a} + 2a$ 의 치역은 $\{y \mid y \geq 2a\}$

즉 $\{y \mid y \geq 2a\} = \{y \mid y \geq a-2\}$ 이므로

$$2a = a - 2 \quad \therefore a = -2$$

$f(x) = -\sqrt{-2(x-1)} + 3$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-7 \leq x \leq -1$ 에서

$y = -\sqrt{-2(x-1)} + 3$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x = -1$ 일 때 최댓값

$$-\sqrt{4} + 3 = 1,$$

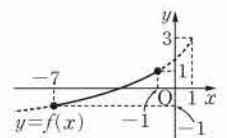
$$x = -7 \text{일 때 최솟값 } -\sqrt{16} + 3 = -1$$

을 갖는다.

즉 $M = 1, m = -1$ 이므로

$$M^2 + m^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$$

답 2



15 함수 $y = \sqrt{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면

$$y = \sqrt{(x-3)+1} - 4 \quad \therefore y = \sqrt{x-2} - 4$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{x-2} - 4$$

$y = \sqrt{x-2} - 4$ 라 하면

$$\sqrt{x-2} = y + 4, \quad x - 2 = (y + 4)^2$$

$$\therefore x = (y + 4)^2 + 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = (x + 4)^2 + 2$

$$\therefore f^{-1}(x) = (x + 4)^2 + 2 = x^2 + 8x + 18$$

이때 $y = f(x)$ 의 치역이 $\{y \mid y \geq -4\}$ 이므로 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x \geq -4\}$ 이다.

$$\therefore f^{-1}(x) = x^2 + 8x + 18 \quad (x \geq -4)$$

$$\text{답 } f^{-1}(x) = x^2 + 8x + 18 \quad (x \geq -4)$$

$$\begin{aligned}
 16 \quad (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(3) \\
 &= (g^{-1} \circ f)(3) \\
 &= g^{-1}(f(3)) \\
 &= g^{-1}\left(\frac{3+1}{3-1}\right) \\
 &= g^{-1}(2)
 \end{aligned}$$

이때 $g^{-1}(2)=k$ 라 하면 $g(k)=2$ 이므로

$$\sqrt{3k-3}+1=2, \quad \sqrt{3k-3}=1$$

$$3k-3=1 \quad \therefore k=\frac{4}{3}$$

$$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3) = \frac{4}{3} \quad \text{답 } \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad y=f(x) \text{의 그래프가 점 } (2, 3) \text{을 지나므로} \\
 \sqrt{2a+b}=3
 \end{aligned}$$

$$\therefore 2a+b=9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f(x)$ 의 역함수의 그래프가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(3, 2)$ 를 지난다.

따라서 $\sqrt{3a+b}=2$ 이므로

$$3a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-5, b=19$

$$\therefore 2a+3b=2 \cdot (-5)+3 \cdot 19=47 \quad \text{답 } 47$$

1등급 비밀노트

무리함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점

무리함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점은 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점이다. 그러나 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이 아닐 수도 있다.

예를 들어 함수 $y=\sqrt{-5x+19}$ 는 그 역함수

$$y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{19}{5} \quad (x \geq 0) \text{의 그래프와의 교점은 직선 } y=x \text{ 위의}$$

점 $\left(\frac{-5+\sqrt{101}}{2}, \frac{-5+\sqrt{101}}{2}\right)$ 외에도 직선 $y=x$ 위의 점이 아닌 두 점 $(2, 3), (3, 2)$ 가 존재한다.

$x=0$ 을

$$y=-x^2+2ax+b$$

대입하면 $y=b$, 즉 y 절편은 b 이다.

이때 $y=-x^2+2ax+b=-(x-a)^2+a^2+b$ 에서 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표는 a 이므로

$$0 < a < 1$$

또 이차함수의 그래프의 y 절편은 b 이므로

$$-1 < b < 0$$

따라서 $a-1 < 0, b+1 > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= |a-1| - |b+1| \\
 &= -(a-1) - (b+1) \\
 &= -a-b
 \end{aligned}$$

답 ③

$$03 \quad \sqrt{x}=\sqrt{a}+\frac{3}{\sqrt{a}} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$x=a+6+\frac{9}{a}$$

$$\therefore x-6=a+\frac{9}{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 제곱하면

$$(x-6)^2=\left(a+\frac{9}{a}\right)^2$$

$$x^2-12x+36=a^2+18+\frac{81}{a^2}$$

$$x^2-12x=a^2-18+\frac{81}{a^2}$$

$$\therefore x^2-12x=\left(a-\frac{9}{a}\right)^2$$

$$\text{따라서 } \sqrt{x^2-12x}=\sqrt{\left(a-\frac{9}{a}\right)^2}=\frac{9}{a}-a \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x-6-\sqrt{x^2-12x}}{x-6+\sqrt{x^2-12x}} &= \frac{a+\frac{9}{a}-\left(\frac{9}{a}-a\right)}{a+\frac{9}{a}+\left(\frac{9}{a}-a\right)} \\
 &= \frac{2a}{\frac{18}{a}} = \frac{a^2}{9}
 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{a^2}{9}=ka^2 \text{이므로}$$

$$k=\frac{1}{9} \quad (\because a \neq 0)$$

답 $\frac{1}{9}$

$$04 \quad \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})} \\
 &= \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}
 \end{aligned}$$

①

이므로 주어진 부등식의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\
 &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \dots \\
 &\quad + (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}) \} \\
 &= \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1}-1)
 \end{aligned}$$

②

$$\text{즉 } \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1}-1) \leq 5 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2n+1} &\leq 11, \quad 2n+1 \leq 121 \\
 \therefore n &\leq 60
 \end{aligned}$$

$0 < a < 3$ 에서

$$\begin{aligned}
 a-\frac{9}{a} &> 0 \\
 &= \frac{a^2-9}{a} \\
 &= \frac{(a+3)(a-3)}{a} < 0 \\
 \therefore \sqrt{\left(a-\frac{9}{a}\right)^2} &= \left|a-\frac{9}{a}\right| \\
 &= -\left(a-\frac{9}{a}\right) \\
 &= \frac{9}{a}-a
 \end{aligned}$$

무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안의 식의 값이 0 이상이고, (분모) $\neq 0$ 이어야 한다.

$x+4=0$ 이면 주어진 식의 값이 0이므로 실수가 된다.

$$\begin{aligned}
 (a+1)^2-4a &= a^2-2a+1 \\
 &= (a-1)^2 \\
 (b-1)^2+4b &= b^2+2b+1 \\
 &= (b+1)^2
 \end{aligned}$$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 87쪽

$$01 \quad 12+x-x^2 \geq 0 \text{에서}$$

$$x^2-x-12 \leq 0, \quad (x+3)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $x^2+x-2 \neq 0$ 이어야 하므로

$$(x+2)(x-1) \neq 0$$

$$\therefore x \neq -2, x \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$x+4=0 \text{에서 } x=-4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③에서 정수 x 는 $-4, -3, -1, 0, 2, 3, 4$ 이므로 구하는 합은

$$-4+(-3)+(-1)+0+2+3+4=1$$

답 1

$$02 \quad \sqrt{(a+1)^2-4a}-\sqrt{(b-1)^2+4b}$$

$$= \sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(b+1)^2}$$

$$= |a-1| - |b+1|$$

일품 BOX

따라서 구하는 자연수 n 의 최댓값은 60이다.

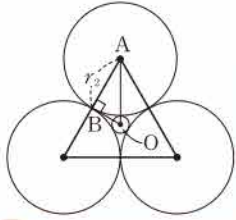
→ ③

답 60

채점 기준	비율
① $\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ 의 분모를 유리화할 수 있다.	40%
② 주어진 부등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	40%
③ 자연수 n 의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

05 반지름의 길이가 1인 원

의 중심을 O라 하면 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r_2 인 세 원의 중심을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형은 정삼각형이고, 점 O는 정삼각형의 외심이다. 또 점 O는 정삼각형의 내심이기도 하므로



$$\angle OAB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

직각삼각형 OAB에서 $\cos 30^\circ = \frac{r_2}{OA} = \frac{r_2}{1+r_2}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r_2}{1+r_2}, \quad 2r_2 = \sqrt{3}(1+r_2)$$

$$(2-\sqrt{3})r_2 = \sqrt{3}$$

$$\therefore r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 3+2\sqrt{3}$$

따라서 $r_1 = 2r_2 + 1 = 2(3+2\sqrt{3}) + 1 = 7+4\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{7+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = \frac{(7+4\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})}{(3+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})} = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

즉 $a=1, b=\frac{2}{3}$ 이므로

$$a+b = \frac{5}{3}$$

답 ①

06 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 에서 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$

로 놓으면

$$\frac{a+\sqrt{5}}{a-\sqrt{5}} + \frac{a-\sqrt{5}}{a+\sqrt{5}} = \frac{(a+\sqrt{5})^2 + (a-\sqrt{5})^2}{(a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})} = \frac{2a^2+10}{a^2-5}$$

한편 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 에서 $a^2=5+2\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{2a^2+10}{a^2-5} = \frac{2(5+2\sqrt{6})+10}{(5+2\sqrt{6})-5} = \frac{4\sqrt{6}+20}{2\sqrt{6}} = 2 + \frac{5}{3}\sqrt{6}$$

즉 $p+q\sqrt{6}=2+\frac{5}{3}\sqrt{6}$ 이므로

$$p=2, q=\frac{5}{3}$$

$$\therefore 6pq = 6 \cdot 2 \cdot \frac{5}{3} = 20$$

→ ③

→ ④

답 20

n 이 자연수이므로
 $\sqrt{n}$
 $= (\text{자연수}) + (\text{소수 부분})$
 꼴이다.

점 O에서 반지름의 길이가 r_2 인 세 원의 중심까지의 거리가 각각 같으므로 점 O는 정삼각형의 외심이다.

$18a^2-3an$ 과
 $n+3a^2-18a$ 는 모두 정수이다.

정삼각형의 외심과 내심은 일치한다.

점 O는 정삼각형의 외심이므로
 $\overline{AB} \perp \overline{OB}$

채점 기준	비율
① $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$ 로 놓고 주어진 식을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30%
③ p, q 의 값을 구할 수 있다.	20%
④ $6pq$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

07 $\sqrt{n}=a+b$ (a 는 자연수, $0 < b < 1$)에서

$$b = \sqrt{n} - a \quad \dots\dots ㉑$$

㉑을 $a^3+b^3=18ab$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} a^3 + (\sqrt{n}-a)^3 &= 18a(\sqrt{n}-a) \\ a^3 + n\sqrt{n} - 3an + 3a^2\sqrt{n} - a^3 &= 18a\sqrt{n} - 18a^2 \\ 18a^2 - 3an + (n+3a^2-18a)\sqrt{n} &= 0 \end{aligned}$$

a, n 은 자연수, $\sqrt{n}$ 은 무리수이므로 무리수가 서로 같은 조건에 의하여

$$18a^2 - 3an = 0 \quad \dots\dots ㉒$$

$$n + 3a^2 - 18a = 0 \quad \dots\dots ㉓$$

㉒에서 $3a(6a-n)=0$

$$\therefore a = \frac{n}{6} \quad (\because a \text{는 자연수})$$

$a = \frac{n}{6}$ 을 ㉓에 대입하면

$$n + 3 \cdot \left(\frac{n}{6}\right)^2 - 18 \cdot \frac{n}{6} = 0, \quad \frac{n^2}{12} - 2n = 0$$

$$n^2 - 24n = 0, \quad n(n-24) = 0$$

$$\therefore n = 24 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 ②

💡 비밀노트

무리수의 정수 부분과 소수 부분

① 소수 부분: 0보다 크고 1보다 작은 실수

② (무리수) = (정수 부분) + (소수 부분)

$$\Rightarrow (\text{정수 부분}) = (\text{무리수}) - (\text{소수 부분}),$$

$$(\text{소수 부분}) = (\text{무리수}) - (\text{정수 부분})$$

08 $P(m, 0)$ 이므로

$$A(m, \sqrt{m})$$

점 B의 y 좌표는 점 A의 y 좌표와 같으므로

$$\sqrt{-2x} = \sqrt{m}, \quad -2x = m$$

$$\therefore x = -\frac{m}{2}$$

$$\therefore B\left(-\frac{m}{2}, \sqrt{m}\right)$$

점 C의 x 좌표가 $-\frac{m}{2}$ 이므로 점 C의 y 좌표는

$$y = -\sqrt{-3 \cdot \left(-\frac{m}{2}\right)} = -\sqrt{\frac{3}{2}m}$$

$$\therefore C\left(-\frac{m}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}m}\right)$$

점 D의 y 좌표는 점 C의 y 좌표와 같으므로

$$-\sqrt{4x} = -\sqrt{\frac{3}{2}m}, \quad 4x = \frac{3}{2}m$$

$$\therefore x = \frac{3}{8}m$$

$$\therefore D\left(\frac{3}{8}m, -\sqrt{\frac{3}{2}m}\right)$$

따라서 $Q\left(\frac{3}{8}m, 0\right)$ 이므로

$$n = \frac{3}{8}m$$

m, n 이 자연수일 때, 순서쌍 (m, n) 은
 $(8, 3), (16, 6), (24, 9), (32, 12),$
 $(40, 15), \dots$

이때 m, n 은 두 자리 자연수이므로
 $(32, 12), (40, 15), \dots$

따라서 $m+n$ 의 최솟값은

$$32+12=44$$

답 44

09 점 B의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면 점 A의 좌표는
 $(a+2, \sqrt{a+2})$

이때 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 높이는 $2\sqrt{3}$ 이므로

$$\sqrt{a+2}=2\sqrt{3}, \quad a+2=12$$

$$\therefore a=10$$

따라서 $A(12, 2\sqrt{3}), B(10, 0)$ 이므로

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

답 $10\sqrt{3}$

10 직선 $y=x$ 와 함수 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 $x=\sqrt{ax}$ 에서

$$x^2=ax, \quad x(x-a)=0$$

$$\therefore x=a \quad (\because x \neq 0)$$

$$\therefore P(a, a)$$

직선 $y=\frac{1}{2}x$ 와 함수 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프의 교점의 x 좌표

는 $\frac{1}{2}x=\sqrt{ax}$ 에서

$$x^2=4ax, \quad x(x-4a)=0$$

$$\therefore x=4a \quad (\because x \neq 0)$$

$$\therefore Q(4a, 2a)$$

두 점 $O(0, 0), Q(4a, 2a)$ 사이의 거리는

$$OQ = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{5}a$$

점 $P(a, a)$ 에서 직선 $y=\frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$PH = \frac{|a-2a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle OPQ &= \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PH \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5}a \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

답 ②

11 두 점 A, B를 지나는 직선이 x 축의 음의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 이므로
 $\angle ABC = 30^\circ$

점 C의 좌표를
 $(c, \sqrt{-b})$ 라 하면
 $\sqrt{c} = \sqrt{-b}$
 $\therefore c = -b$

$A(a, \sqrt{a}), B(b, \sqrt{-b}) (b < 0)$ 라 하면 $C(-b, \sqrt{-b})$
 이므로

$$\overline{BC} = -b - b = -2b$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{BC} \cos 30^\circ = -2b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}b,$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \sin 30^\circ = -2b \cdot \frac{1}{2} = -b \quad \cdots \textcircled{1}$$

따라서 $\overline{AB}^2 = 3b^2, \overline{AC}^2 = b^2$ 이므로

$$(a-b)^2 + (\sqrt{a}-\sqrt{-b})^2 = 3b^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(a+b)^2 + (\sqrt{a}-\sqrt{-b})^2 = b^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$-4ab = 2b^2 \quad \therefore b = -2a \quad \cdots \textcircled{2}$$

이때 직선 AC가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{-b}}{a+b} = \tan 60^\circ, \quad \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2a}}{-a} = \sqrt{3}$$

$$\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{a}}{a} = \sqrt{3}, \quad \sqrt{a} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore a = \frac{3-2\sqrt{2}}{3} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } \frac{3-2\sqrt{2}}{3}$$

채점 기준	비율
① $\overline{AB}, \overline{AC}$ 를 b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30%

12 방정식 $\sqrt{ax}=x$ 의 한 실근이 $x=3$ 이므로

$$\sqrt{3a}=3 \quad \therefore a=3$$

$y=\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y=\sqrt{3(x-b)}$$

이때 $y=\sqrt{3(x-b)}$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 접하므로

$\sqrt{3(x-b)}=x$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2-3x+3b=0$$

이차방정식 $x^2-3x+3b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 3b = 0$$

$$9-12b=0 \quad \therefore b=\frac{3}{4}$$

$$\therefore a-b = \frac{9}{4} \quad \text{답 ⑤}$$

13 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 $\sqrt{20-2x}=\sqrt{12+2x}$ 에서

$$20-2x=12+2x, \quad 4x=8$$

$$\therefore x=2$$

이때 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하므로 임의의 두 실수 x_1, x_2 ($-6 \leq x_1 \leq x_2 \leq 10$)에 대하여

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

$$\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2} \leq g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

일품 BOX

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{h(x_1)+h(x_2)}{2} \\ &= \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2} \\ &\leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \end{aligned}$$

즉 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 $-6 \leq x \leq 10$ 에서 위로 볼록하다.

한편 $y=\sqrt{20-2x}$ 의 그래프를 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭 이동한 그래프의 식은

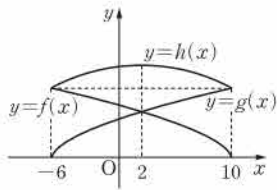
$$y=\sqrt{12+2x}=g(x)$$

이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $y=h(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=h(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값

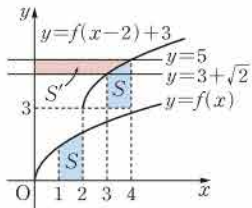
$$\begin{aligned} h(2) &= f(2)+g(2) \\ &= 4+4=8 \end{aligned}$$

을 갖는다.



8

14 $y=f(x-2)+3$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같이 세 점 $(2, 3)$, $(3, 3+\sqrt{2})$, $(4, 5)$ 를 지난다.



이때 $y=f(x-2)+3$ 의 그래프와 직선 $x=3$, $x=4$, $y=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는 S 와 같으므로 구하는 도형의 넓이를 S' 이라 하면

$$\begin{aligned} S' &= 4 \cdot (5-3) - 3 \cdot \{(3+\sqrt{2})-3\} - S \\ &= 8 - 3\sqrt{2} - S \end{aligned}$$

9

15 점 $A(a, b)$ 가 함수 $y=\sqrt{2-x}$ 의 그래프 위의 점이므로 $b=\sqrt{2-a}$ 에서

$$\begin{aligned} b^2 &= 2-a \quad \therefore a=2-b^2 \\ \therefore \overline{OB} + \overline{OC} &= a+b=2-b^2+b \\ &= -\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

이때 점 A 는 제1사분면 위의 점이므로

$$0 < b < \sqrt{2}$$

따라서 $\overline{OB} + \overline{OC}$ 는 $b=\frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

10

$$\frac{9}{4}$$

채점 기준	비율
① a 를 b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② $\overline{OB} + \overline{OC}$ 를 b 에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ $\overline{OB} + \overline{OC}$ 의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

$y=\sqrt{20-2x}$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 를 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \frac{x+x'}{2} &= 2, y'=y \\ \therefore x &= 4-x', y=y' \\ \therefore y' &= \sqrt{20-2(4-x')} \\ &= \sqrt{12+2x'} \end{aligned}$$

$f(1)=\sqrt{2}$, $f(2)=2$ 이므로 $y=f(x-2)+3$ 에서 $x=3$ 일 때, $y=f(1)+3=3+\sqrt{2}$ $x=4$ 일 때, $y=f(2)+3=5$

직선 $x=1$, $x=2$ 및 $y=0$ (x 축)을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 각각 평행이동하면 $x=3$, $x=4$, $y=3$

점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{AG} : \overline{GH} = 2 : 1$ $\therefore \overline{AH} = 3\overline{GH}$

역함수의 성질

- ① $(f^{-1})^{-1}=f$
- ② $(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1}$

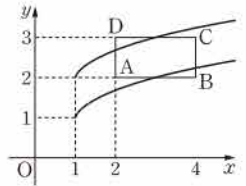
16 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(0, 0)$, $(2, 1)$ 을 지나고, $y=f(x-m)+n$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다.

$g(x)=f(x-m)+n$ 이라 하자.

(i) $m=1$ 일 때,

오른쪽 그림에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 $\square ABCD$ 가 만나도록 하는 n 의 값은

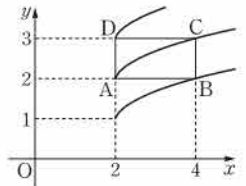
1, 2의 2개



(ii) $m=2$ 일 때,

오른쪽 그림에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 $\square ABCD$ 가 만나도록 하는 n 의 값은

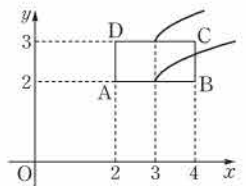
1, 2, 3의 3개



(iii) $m=3$ 일 때,

오른쪽 그림에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 $\square ABCD$ 가 만나도록 하는 n 의 값은

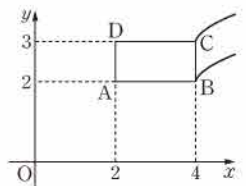
2, 3의 2개



(iv) $m=4$ 일 때,

오른쪽 그림에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 $\square ABCD$ 가 만나도록 하는 n 의 값은

2, 3의 2개



이상에서 구하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$2+3+2+2=9$$

11

17 점 G 의 x 좌표가 t 이므로

$$G(t, -\sqrt{t-1}-1)$$

이때 점 G 는 정삼각형 ABC 의 무게중심이므로

$$A(t, -3\sqrt{t-1}-3)$$

$\overline{BC}=a$ 라 하면 정삼각형 ABC 의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = |-3\sqrt{t-1}-3| = 3\sqrt{t-1}+3$$

$$\therefore a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (3\sqrt{t-1}+3) = 2\sqrt{3}(\sqrt{t-1}+1)$$

따라서 $S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 3\sqrt{3}(\sqrt{t-1}+1)^2$ 이므로

$$\frac{S(10)}{S(1)+S(2)} = \frac{48\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+12\sqrt{3}} = \frac{16}{5}$$

12

18 $(f^{-1} \circ f^{-1})(a) = 16$ 에서

$$(f \circ f)^{-1}(a) = 16$$

$$\therefore (f \circ f)(16) = a$$

이때

$$f(16) = 2 - \sqrt{16} = -2, \\ f(-2) = \sqrt{2 - (-2)} = 2$$

이므로

$$a = (f \circ f)(16) = f(f(16)) = f(-2) = 2 \quad \text{답 2}$$

19 $(f^{-1} \circ g)(x) = 4x$ 에서 $f^{-1}(g(x)) = 4x$ 이므로

$$g(x) = f(4x) = \sqrt{4x-12}$$

$$y = \sqrt{4x-12} \text{라 하면} \quad y^2 = 4x-12$$

$$4x = y^2 + 12$$

$$\therefore x = \frac{1}{4}y^2 + 3$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면} \quad y = \frac{1}{4}x^2 + 3$$

$$\therefore g^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3 \quad (x \geq 0)$$

함수 $y = g^{-1}(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌

표는 $\frac{1}{4}x^2 + 3 = 2x$ 에서

$$x^2 - 8x + 12 = 0, \quad (x-2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 A(2, 4), B(6, 12) 또는 A(6, 12), B(2, 4)

이므로

$$AB = \sqrt{(6-2)^2 + (12-4)^2} = 4\sqrt{5} \quad \text{답 ④}$$

20 $(f^{-1})^{-1} = f$ 이므로 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프를 직선

$y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는 $y = f(x)$, 즉

$y = \sqrt{a(x+3)} + 2$ 의 그래프이다.

오른쪽 그림에서

$$f(x) = \sqrt{a(x+3)} + 2 \text{이고,}$$

$$f(0) = 3 \text{이므로}$$

$$\sqrt{3a} + 2 = 3, \quad \sqrt{3a} = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}(x+3)} + 2$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}x + 1} + 2$$

따라서 $a = \frac{1}{3}, b = 1, c = 2$ 이므로

$$30abc = 20 \quad \text{답 20}$$

다른 풀이 $f^{-1}(x) = k(x-2)^2 - 3 \quad (k > 0, x \geq 2)$ 이라

하면 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 (3, 0)을 지나므로

$$k(3-2)^2 - 3 = 0 \quad \therefore k = 3$$

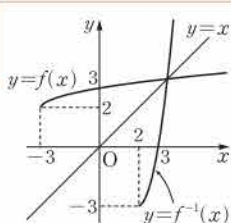
$$\therefore f^{-1}(x) = 3(x-2)^2 - 3$$

$$y = 3(x-2)^2 - 3 \text{이라 하면} \quad (x-2)^2 = \frac{1}{3}y + 1$$

$$x-2 = \sqrt{\frac{1}{3}y + 1} \quad (\because x \geq 2)$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{1}{3}y + 1} + 2$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면} \quad y = \sqrt{\frac{1}{3}x + 1} + 2$$



두 점 (2, -3), (3, 0)을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각 (-3, 2), (0, 3)이다.

$$\therefore f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x + 1} + 2$$

따라서 $a = \frac{1}{3}, b = 1, c = 2$ 이므로

$$30abc = 20$$

내신 수능



1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제**

본책 90쪽

01 $a(b+1) - b - 95 = 2\sqrt{b}$ 에서 $a(b+1) - b - 95$ 는 정수이므로 $2\sqrt{b}$ 도 정수이다.

이때 $2\sqrt{b} > 0$ 이므로 b 는 20 이하의 자연수의 제곱인 수이다.

(i) $b = 1$ 일 때,

$$2a - 1 - 95 = 2 \text{에서}$$

$$2a = 98 \quad \therefore a = 49$$

이때 $a > 20$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b = 4$ 일 때,

$$5a - 4 - 95 = 4 \text{에서}$$

$$5a = 103 \quad \therefore a = \frac{103}{5}$$

이때 $a > 20$ 이고 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $b = 9$ 일 때,

$$10a - 9 - 95 = 6 \text{에서}$$

$$10a = 110 \quad \therefore a = 11$$

$$\therefore a + b = 20$$

(iv) $b = 16$ 일 때,

$$17a - 16 - 95 = 8 \text{에서}$$

$$17a = 119 \quad \therefore a = 7$$

$$\therefore a + b = 23$$

이상에서 $a + b$ 의 최솟값은 20이다. 답 ②

참고 $2\sqrt{b}$ 가 자연수이려면 $\sqrt{b}$ 는 $\frac{n}{2}$ (n 은 자연수) 꼴이어야

$$\text{하므로 } \sqrt{b} = \frac{n}{2} \text{에서} \quad b = \frac{n^2}{4}$$

이때 n 이 홀수이면 n^2 이 홀수이므로 b 가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다. 즉 n 은 짝수인 자연수이므로 $\frac{n}{2}$ 은 자연수이다. 따라서 $\sqrt{b}$ 는 자연수이고, b 는 자연수의 제곱인 수이다.

02 $2 < \sqrt{6} < 3$ 이므로 $x_1 = \sqrt{6} - 2$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{6}+2}{2} - 2 = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

$$x_4 = \frac{2}{\sqrt{6}-2} = \frac{2(\sqrt{6}+2)}{2} = \sqrt{6} + 2$$

$$x_5 = \sqrt{6} + 2 - 4 = \sqrt{6} - 2$$

⋮

$2 < \sqrt{6} < 3$ 에서

$$4 < \sqrt{6} + 2 < 5$$

$$\therefore 2 < \frac{\sqrt{6}+2}{2} < \frac{5}{2}$$

즉 x_n 은 $\sqrt{6}-2$, $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$, $\frac{\sqrt{6}-2}{2}$, $\sqrt{6}+2$ 가 이 순서대로 반복된다.

따라서

$$x_{98} = x_{4 \cdot 24 + 2} = x_2 = \frac{\sqrt{6}+2}{2},$$

$$x_{99} = x_{4 \cdot 24 + 3} = x_3 = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

이므로

$$x_{98} + x_{99} = \frac{\sqrt{6}+2}{2} + \frac{\sqrt{6}-2}{2} = \sqrt{6} \quad \text{답 } \sqrt{6}$$

03 A 행성과 B 행성의 중력 가속도를 각각 G_A , G_B , 질량을 각각 M_A , M_B 라 하고, 각 행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전 반지름의 길이를 각각 r_A , r_B , 공전 주기를 각각 T_A , T_B 라 하면

$$T_A = k\sqrt{\frac{r_A^3}{G_A M_A}}, T_B = k\sqrt{\frac{r_B^3}{G_B M_B}}$$

이때 $G_A = \frac{9}{2}G_B$, $M_A = 16M_B$, $r_A = 3r_B$ 이므로

$$T_A = k\sqrt{\frac{(3r_B)^3}{\frac{9}{2}G_B \cdot 16M_B}}$$

$$= k\sqrt{\frac{27r_B^3}{72G_B M_B}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3r_B^3}{8G_B M_B}}$$

$$\therefore \frac{T_A}{T_B} = \frac{k\sqrt{\frac{3r_B^3}{8G_B M_B}}}{k\sqrt{\frac{r_B^3}{G_B M_B}}} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

따라서 A 행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전 주기는 B 행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전 주기의 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 배이다. 답 ③

04 점 A의 좌표는 $(a, \sqrt{a})$ 이고 $\overline{OA} = 6\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{a^2 + a} = 6\sqrt{2}, \quad a^2 + a = 72$$

$$a^2 + a - 72 = 0, \quad (a+9)(a-8) = 0$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a > 1)$$

$y = \sqrt{ax}$, 즉 $y = \sqrt{8x}$ 에서 $x=8$ 일 때 $y=8$ 이므로

B(8, 8)

또 곡선 $y = \sqrt{8x}$ 위의 점 C의 y좌표가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$2\sqrt{2} = \sqrt{8x} \quad \therefore x = 1$$

$$\therefore C(1, 2\sqrt{2})$$

D(0, $2\sqrt{2}$)이므로 $\triangle OAD$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{OD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} &= \frac{1}{2} \cdot (8-1) \cdot (8-2\sqrt{2}) \\ &= 28 - 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 두 삼각형 OAD와 ABC의 넓이의 합은

$$8\sqrt{2} + 28 - 7\sqrt{2} = 28 + \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3x} &= 2\sqrt{3} \text{에서} \\ 3x &= 12 \quad \therefore x = 4 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$0 < m < 10$ 이면 직선 ㉠은 $x < 0$ 일 때, x 축과 한 점에서 만나고, $x > 0$ 일 때, $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다.

즉 $p=28$, $q=1$ 이므로

$$p+q=29 \quad \text{답 } 29$$

05 점 A(1, $\sqrt{3}$)이 곡선 $y = \sqrt{ax}$ 위의 점이므로

$$\sqrt{a} = \sqrt{3} \quad \therefore a = 3$$

곡선 $y = \frac{1}{2}\sqrt{ax}$, 즉 $y = \frac{1}{2}\sqrt{3x}$ 위의 점 B의 y좌표가 $\sqrt{3}$

이므로

$$\frac{1}{2}\sqrt{3x} = \sqrt{3} \quad \therefore x = 4$$

$$\therefore B(4, \sqrt{3})$$

점 B는 곡선 $y = \frac{b}{x}$ 위의 점이므로

$$\frac{b}{4} = \sqrt{3} \quad \therefore b = 4\sqrt{3}$$

따라서 두 곡선 $y = \sqrt{3x}$, $y = \frac{4\sqrt{3}}{x}$ 의 교점의 x좌표가 k

이므로

$$\sqrt{3k} = \frac{4\sqrt{3}}{k}, \quad k\sqrt{3k} = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore k^3 = 16 \quad \text{답 } 16$$

06 $y = \sqrt{x+|x|}$ 에서

(i) $x \geq 0$ 일 때,

$$y = \sqrt{x+x} = \sqrt{2x}$$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$$y = \sqrt{x-x} = 0$$

(i), (ii)에서 $y = \sqrt{x+|x|}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

점 (1, 1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y = m(x-1) + 1$$

..... ㉠

직선 ㉠이 원점을 지날 때,

$$0 = -m + 1$$

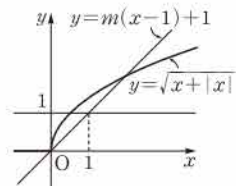
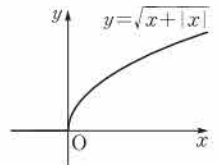
$$\therefore m = 1$$

직선 ㉠이 x축과 평행할 때,

$$m = 0$$

따라서 구하는 m의 값의 범위는

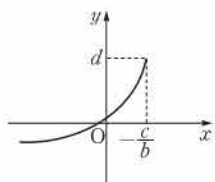
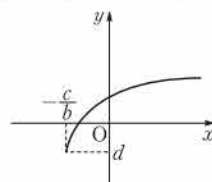
$$0 \leq m < 1 \quad \text{답 } ④$$



07 $y = a\sqrt{bx+c} + d = a\sqrt{b\left(x+\frac{c}{b}\right)} + d$ 의 그래프가

제 1, 2, 3사분면을 모두 지나고 제 4사분면은 지나지 않는 경우는 다음의 2가지 경우이다.

(i) $a > 0$, $b > 0$ 일 때, (ii) $a < 0$, $b < 0$ 일 때,



ㄱ. (i), (ii)에서 $a > 0, b > 0$ 또는 $a < 0, b < 0$ 이므로 $ab > 0$

ㄴ. $a > 0, b > 0$ 일 때, $-\frac{c}{b} < 0$ 이므로 $bc > 0$

ㄷ. (i) $a > 0, b > 0$ 일 때, $d < 0$ 이므로 $ad < 0$

(ii) $a < 0, b < 0$ 일 때, $d > 0$ 이므로 $ad < 0$

(i), (ii)에서 $ad < 0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

08 $y = \sqrt{2x+p+1}$
 $= \sqrt{2\left(x + \frac{p+1}{2}\right)}$

(i) 직선 $y = x + p$ 가 점

$\left(-\frac{p+1}{2}, 0\right)$ 을 지날 때,

$$0 = -\frac{p+1}{2} + p \text{에서 } p = 1$$

(ii) 직선 $y = x + p$ 가 $y = \sqrt{2x+p+1}$ 의 그래프와 접할 때,
 $x + p = \sqrt{2x+p+1}$ 에서

$$x^2 + 2px + p^2 = 2x + p + 1$$

$$x^2 + 2(p-1)x + p^2 - p - 1 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (p-1)^2 - p^2 + p + 1 = 0$$

$$-p + 2 = 0 \quad \therefore p = 2$$

ㄱ. $p > 2$ 일 때 교점은 없다.

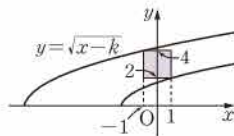
ㄴ. $p = 2$ 일 때 교점은 1개이고, $1 < p < 2$ 일 때 교점은 2개이다.

ㄷ. $p < 1$ 일 때 교점은 1개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

09 두 부등식 $-1 \leq x \leq 1$,
 $2 \leq y \leq 4$ 를 동시에 만족시키는 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



이때 $A \cap B \neq \emptyset$ 이라면 $y = \sqrt{x-k}$ 의 그래프가 색칠한 부분을 지나야 한다.

(i) $y = \sqrt{x-k}$ 의 그래프가 점 (1, 2)를 지날 때,

$$2 = \sqrt{1-k} \text{에서 } k = -3$$

(ii) $y = \sqrt{x-k}$ 의 그래프가 점 (-1, 4)를 지날 때,

$$4 = \sqrt{-1-k} \text{에서 } k = -17$$

(i), (ii)에서 $-17 \leq k \leq -3$ 일 때 $A \cap B \neq \emptyset$ 이므로

$$M = -3, m = -17$$

$$\therefore Mm = 51$$

답 51

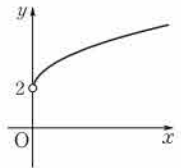
10 $f(x) = \frac{1 \cdot 4 + x \cdot 1}{1+x} = \frac{x+4}{x+1}$ 이므로

$$y = \sqrt{(x+1)f(x)} = \sqrt{(x+1) \cdot \frac{x+4}{x+1}} = \sqrt{x+4}$$

이때 $x > 0$ 이므로

$y = \sqrt{(x+1)f(x)}$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

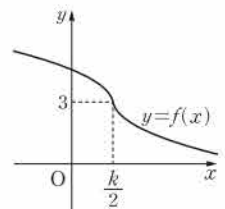
답 ①



11 $y = -\sqrt{2x-k} + 3 = -\sqrt{2\left(x - \frac{k}{2}\right)} + 3$ 에서 함수 $y = -\sqrt{2x-k} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{k}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이다.

또 $y = \sqrt{-2x+k} + 3 = \sqrt{-2\left(x - \frac{k}{2}\right)} + 3$ 에서 함수 $y = \sqrt{-2x+k} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{k}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이다.

이때 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$$\text{즉 } \frac{k}{2} = 2 \text{이므로 } k = 4$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -\sqrt{2x-4}+3 & (x \geq 2) \\ \sqrt{-2x+4}+3 & (x < 2) \end{cases}$$

$$f^{-1}(k-3) = f^{-1}(1) = a \text{라 하면 } f(a) = 1$$

이때 $a \geq 2$ 이므로

$$-\sqrt{2a-4}+3=1, \quad \sqrt{2a-4}=2$$

$$2a-4=4 \quad \therefore a=4$$

$$f^{-1}(k+3) = f^{-1}(7) = b \text{라 하면 } f(b) = 7$$

이때 $b < 2$ 이므로

$$\sqrt{-2b+4}+3=7, \quad \sqrt{-2b+4}=4$$

$$-2b+4=16 \quad \therefore b=-6$$

$$\therefore f^{-1}(k-3) + f^{-1}(k+3) = 4 + (-6) = -2$$

답 -2

12 점 A의 좌표는 $(-a, 0)$ 이고, 두 점 A, B는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 B의 좌표는 $(0, -a)$ 이다.

점 P는 직선 $y = x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를

(b, b) ($b > 0$)라 하면 $\overline{AP} = 2\sqrt{5}$ 에서

$$\sqrt{(b+a)^2 + b^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore (a+b)^2 + b^2 = 20 \quad \dots\dots ㉠$$

또 점 P는 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b = \sqrt{b+a}$$

$$\therefore b^2 = a+b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$b^4 + b^2 = 20, \quad b^4 + b^2 - 20 = 0$$

$$(b^2+5)(b^2-4) = 0, \quad b^2 = 4$$

$$\therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$$

일품 BOX

$b=2$ 를 ㉠에 대입하면 $4=a+2$

$$\therefore a=2$$

따라서 $\overline{AP}=\overline{BP}=2\sqrt{5}$, $\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$ 이고 $\triangle ABP$ 의 넓이는 6이므로 $\triangle ABP$ 의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot r \cdot (2\sqrt{5}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}) &= 6 \\ \therefore r &= \frac{6}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{6(2\sqrt{5}-\sqrt{2})}{18} \\ &= \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3} \quad \text{㉡} \quad \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

다른 풀이 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $\triangle ABP$ 는 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 인 이등변삼각형이다. 점 P에서 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AH}=k$ 라 하면

$$\overline{PH}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-k^2}=\sqrt{20-k^2}$$

$\triangle ABP$ 의 넓이가 6이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \sqrt{20-k^2} &= 6, \quad k\sqrt{20-k^2}=6 \\ k^2(20-k^2) &= 36, \quad k^4-20k^2+36=0 \\ (k^2-2)(k^2-18) &= 0, \quad k^2=2 \text{ 또는 } k^2=18 \\ \therefore k &= \sqrt{2} \text{ 또는 } k=3\sqrt{2} \quad (\because k>0) \end{aligned}$$

이때 $\overline{AH}=\overline{OH}<\overline{PH}$ 이므로

$$k=\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{AP}=\overline{BP}=2\sqrt{5}$, $\overline{AB}=2k=2\sqrt{2}$ 이고 $\triangle ABP$ 의 넓이는 6이므로 $\triangle ABP$ 의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot r \cdot (2\sqrt{5}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}) &= 6 \\ \therefore r &= \frac{6}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{6(2\sqrt{5}-\sqrt{2})}{18} \\ &= \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}) \end{aligned}$$

$f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것의 개수는 각각 2, 4, 2, 4이다.

$$\begin{aligned} 2^3, 2^3+1, 2^3+2, \\ 2^3+3, 2^3+4, 2^3+5, \\ 2^3+6, 2^3+7 \end{aligned}$$

$\triangle OAH$ 는 직각이등변삼각형이다.

(ii) x 가 짝수일 때,

$xf(x)$ 는 항상 짝수이므로 $f(x)$ 의 값이 될 수 있는 것은

1, 2, 3, 4의 4개

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = 64$$

㉢ ③

02 **전략** 자연수를 2^k+l (k 는 자연수, $0 \leq l < 2^k$) 꼴로 나타내어 본다.

풀이 ㄱ. $9=2^3+1$ 이므로

$$g(9)=1$$

ㄴ. $n=2^k+l$ 에서 $n-l=2^k$ 이고 n 이 3 이상의 홀수이면 $k \geq 1$ 이므로 2^k 은 짝수이다.

따라서 $l=g(n)$ 은 홀수이다.

ㄷ. $f(n)=3$ 이므로

$$n=2^3+l \quad (0 \leq l < 2^3)$$

따라서 n 의 개수는 8이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

㉣ ⑤

03 **전략** 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 경계로 범위를 나누어 $f(x)$ 를 나타낸 후 함수 f 가 일대일대응이 되기 위한 조건을 생각한다.

$$\text{풀이} \quad f(x) = \begin{cases} (a+3)x-a & (x \geq 1) \\ (-a+3)x+a & (x < 1) \end{cases}$$

에서 함수 f 가 일대일대응이 되려면 두 직선

$y=(a+3)x-a$, $y=(-a+3)x+a$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.

즉 $(a+3)(-a+3) > 0$ 이므로

$$(a+3)(a-3) < 0 \quad \therefore -3 < a < 3$$

따라서 정수 a 는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

㉤ ②

04 **전략** 주어진 함수의 그래프를 이용하여 함수값을 구한다.

풀이 $f(x_1)=a$, $f(a)=c$

이므로

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x_1) &= f(f(x_1)) \\ &= f(a) \\ &= c \end{aligned}$$

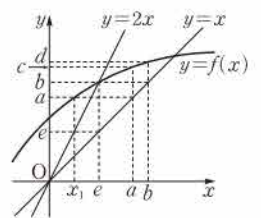
$2x_1=e$ 이고, $f(e)=b$,

$f(b)=d$ 이므로

$$\begin{aligned} (f \circ f)(2x_1) &= f(f(2x_1)) \\ &= f(f(e)) \\ &= f(b) \\ &= d \end{aligned}$$

$$\therefore (f \circ f)(x_1) + (f \circ f)(2x_1) = c + d$$

㉥ ⑤



내신 · 수능

1등급을 꿈꾸는 실전 마무리 문제

본책 92쪽

01 **전략** $af(a)+bf(b)$ 가 짝수가 되려면 $af(a)$ 와 $bf(b)$ 가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 함을 이용한다.

풀이 집합 X 의 임의의 서로 다른 두 원소 a, b 에 대하여 $af(a)+bf(b)$ 가 짝수가 되는 경우는 $af(a)$ 와 $bf(b)$ 가 모두 짝수이거나 모두 홀수인 경우이다.

즉 집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $xf(x)$ 가 짝수이거나 홀수이어야 한다.

그런데 x 가 짝수이면 $xf(x)$ 는 홀수가 될 수 없으므로 $xf(x)$ 는 짝수이어야 한다.

(i) x 가 홀수일 때,

$xf(x)$ 가 짝수하려면 $f(x)$ 가 짝수이어야 하므로

$f(x)$ 의 값이 될 수 있는 것은

2, 4의 2개

$$\begin{aligned} (\text{짝수}) + (\text{짝수}) &= (\text{짝수}) \\ (\text{홀수}) + (\text{홀수}) &= (\text{짝수}) \end{aligned}$$

따라서 $f(3+x)=f(x-3)$ 이므로 이 식의 양변에 x 대신 $x+3$ 을 대입하면

$$f(x+6)=f(x)$$

$$\therefore f(40)=f(34)=f(28)=\cdots=f(10)=f(4)$$

이때 $f(3+x)=f(3-x)$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(4)=f(2)=2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$\therefore f(40)=5$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 3 \text{에서} \\ f(x) &= 2x + 10 \text{이므로} \\ f(2) &= 2 \cdot 2 + 1 = 5 \end{aligned}$$

06 **전략** x 의 값의 범위를 나누어 함수 $f^{-1}(x)$ 를 먼저 구한다.

풀이 $x < 0$ 일 때 $y = 3x + 1$ 이라 하면

$$x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \quad (y < 1)$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면} \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \quad (x < 1)$$

$$x \geq 0 \text{일 때 } y = \frac{1}{2}x + 1 \text{이라 하면}$$

$$x = 2y - 2 \quad (y \geq 1)$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면} \quad y = 2x - 2 \quad (x \geq 1)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} & (x < 1) \\ 2x - 2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$x - 1 < 1, x + 1 < 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x-1) + f^{-1}(x+1) \\ &= \left\{ \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{3} \right\} + \left\{ \frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{3} \right\} \\ &= \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \text{에서} \quad x = \frac{7}{2}$$

그런데 $x < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0 \leq x < 2$ 일 때,

$$x - 1 < 1, x + 1 \geq 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x-1) + f^{-1}(x+1) \\ &= \left\{ \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{3} \right\} + \{2(x+1) - 2\} \\ &= \frac{7}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{7}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \text{에서} \quad x = 1$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$x - 1 \geq 1, x + 1 \geq 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x-1) + f^{-1}(x+1) \\ &= \{2(x-1) - 2\} + \{2(x+1) - 2\} \\ &= 4x - 4 \end{aligned}$$

$$4x - 4 = \frac{5}{3} \text{에서} \quad x = \frac{17}{12}$$

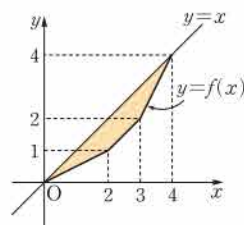
그런데 $x \geq 2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $x = 1$

답 ⑤

07 **전략** 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 이때 두 함수



$y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (2+4) \cdot 1 \right\} \right] \\ &= 5 \end{aligned}$$

답 ③

08 **전략** x 의 값의 범위를 나누어 $f(f(x))$ 를 구한다.

$$\text{풀이} \quad f(f(x)) = \begin{cases} -f(x) - 2 & (f(x) < -1) \\ f(x) & (-1 \leq f(x) \leq 2) \\ -f(x) + 4 & (f(x) > 2) \end{cases}$$

(i) $x < -4$ 일 때, $f(x) = -x - 2$ 이고 $f(x) > 2$ 이므로

$$f(f(x)) = -(-x-2) + 4 = x + 6$$

(ii) $-4 \leq x < -1$ 일 때, $f(x) = -x - 2$ 이고

$$-1 < f(x) \leq 2 \text{이므로}$$

$$f(f(x)) = -x - 2$$

(iii) $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x) = x$ 이고 $-1 \leq f(x) \leq 2$ 이므로

$$f(f(x)) = x$$

(iv) $2 < x \leq 5$ 일 때, $f(x) = -x + 4$ 이고 $-1 \leq f(x) < 2$ 이므로

$$f(f(x)) = -x + 4$$

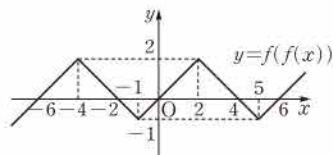
(v) $x > 5$ 일 때, $f(x) = -x + 4$ 이고 $f(x) < -1$ 이므로

$$f(f(x)) = -(-x+4) - 2 = x - 6$$

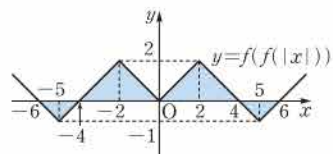
이상에서

$$f(f(x)) = \begin{cases} x+6 & (x < -4) \\ -x-2 & (-4 \leq x < -1) \\ x & (-1 \leq x \leq 2) \\ -x+4 & (2 < x \leq 5) \\ x-6 & (x > 5) \end{cases}$$

이므로 $y=f(f(x))$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $y=f(f(|x|))$ 의 그래프는 $y=f(f(x))$ 의 그래프에서 $x \geq 0$ 인 부분만 남기고, $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $y=f(f(|x|))$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \right) = 10 \quad \text{답 ②}$$

09 **전략** $a=111111$ 이라 하고 x, y, z 를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a=111111$ 이라 하면

$$x = \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a},$$

$$y = \frac{2a-1}{2a+1} = 1 - \frac{2}{2a+1} = 1 - \frac{1}{a + \frac{1}{2}},$$

$$z = \frac{3a-2}{3a+1} = 1 - \frac{3}{3a+1} = 1 - \frac{1}{a + \frac{1}{3}}$$

이때 $a < a + \frac{1}{3} < a + \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{a + \frac{1}{3}} > \frac{1}{a + \frac{1}{2}}$$

$$1 - \frac{1}{a} < 1 - \frac{1}{a + \frac{1}{3}} < 1 - \frac{1}{a + \frac{1}{2}}$$

$$\therefore x < z < y \quad \text{답 ②}$$

10 **전략** 원 $x^2+y^2=4$ 와 함수 $y=\frac{k}{x}$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 원 $x^2+y^2=4$ 와 함수 $y=\frac{k}{x}$ 의 그래프는 모두 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 오직 두 점에서만 만나므로 제1사분면 위에서 만나는 점을 P라 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 와 직선 $y=x$ 의 교점이다.

$y=x$ 를 $x^2+y^2=4$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2=2 \quad \therefore x=\sqrt{2} \quad (\because x>0)$$

$$\therefore P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

이때 점 $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 는 함수 $y=\frac{k}{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\sqrt{2} = \frac{k}{\sqrt{2}} \quad \therefore k=2$$

$$\therefore y = \frac{2}{x}$$

따라서 $A(a, \frac{2}{a})$ 라 하면 점 A가 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로

$$a^2 + \frac{4}{a^2} = 16$$

또 점 A와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left| a - \frac{2}{a} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| a - \frac{2}{a} \right|$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{2} \left| a - \frac{2}{a} \right|$$

이때 $\left| a - \frac{2}{a} \right|^2 = a^2 + \frac{4}{a^2} - 4 = 16 - 4 = 12$ 에서

$$\left| a - \frac{2}{a} \right| = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6} \quad \text{답 ②}$$

$$\frac{2a-1}{2a+1} = \frac{2a+1-2}{2a+1} = 1 - \frac{2}{2a+1}$$

$$\frac{3a-2}{3a+1} = \frac{3a+1-3}{3a+1} = 1 - \frac{3}{3a+1}$$

점 A(2, 1)을 지나고 기울기가 1인 직선

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{a + \frac{1}{3}} > \frac{1}{a + \frac{1}{2}}$$

이므로

$$-\frac{1}{a} < -\frac{1}{a + \frac{1}{3}}$$

$$< -\frac{1}{a + \frac{1}{2}}$$

$$(t-2)^2 = \left(\frac{2}{t-2} \right)^2 \text{에서}$$

$$(t-2)^2 = 2$$

$$\therefore t = 2 \pm \sqrt{2}$$

두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

11 **전략** 점 A가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점임을 이용한다.

풀이 두 점 A(2, 1), B(4, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1 = \frac{3-1}{4-2}(x-2), \text{ 즉 } y=x-1$$

이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{(x-1)+1}{(x-1)-1} \\ &= \frac{x}{x-2} = \frac{x-2+2}{x-2} \\ &= \frac{2}{x-2} + 1 \end{aligned}$$

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2, y=1$ 이므로 점 A(2, 1)은 두 점근선의 교점이다.

한편 $y=g(x)$ 의 그래프

는 직선 $y-1=x-2$,

즉 $y=x-1$ 에 대하여

대칭이므로 $\overline{AP}$ 의 길

이는 오른쪽 그림과 같

이 점 P가 $y=g(x)$ 의

그래프와 직선 $y=x-1$ 의 교점일 때 최소이다.

$$\frac{2}{x-2} + 1 = x-1 \text{에서 } 2 = (x-2)^2$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$$

따라서 점 P의 좌표는

$$(2+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) \text{ 또는 } (2-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$$

이므로 $\overline{AP}$ 의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{(2+\sqrt{2}-2)^2 + (1+\sqrt{2}-1)^2} = 2 \quad \text{답 ④}$$

다른 풀이 점 P의 좌표를 $(t, \frac{2}{t-2} + 1)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{(t-2)^2 + \left(\frac{2}{t-2} + 1 - 1 \right)^2} \\ &= \sqrt{(t-2)^2 + \left(\frac{2}{t-2} \right)^2} \end{aligned}$$

$(t-2)^2 > 0, \left(\frac{2}{t-2} \right)^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(t-2)^2 + \left(\frac{2}{t-2} \right)^2 \geq 2\sqrt{(t-2)^2 \cdot \left(\frac{2}{t-2} \right)^2} = 4$$

(단, 등호는 $t=2 \pm \sqrt{2}$ 일 때 성립)

따라서 $\overline{AP}$ 의 길이의 최솟값은 $\sqrt{4}=2$ 이다.

12 **전략** $g(0)$ 의 값이 $y=(g \circ f)(x)$ 에서 $f(x)=0$ 일 때의 합성함수 $g \circ f$ 의 함숫값과 같음을 이용한다.

풀이 $g(0)$ 의 값은 $g(f(x)) = \frac{3x-1}{2}$ 에서 $f(x)=0$ 일 때의 합성함수 $g \circ f$ 의 함숫값과 같다.

$$\frac{x+1}{x-1} = 0 \text{에서 } x = -1 \quad \therefore f(-1) = 0$$

$$\text{따라서 } g(0) = g(f(-1)) = \frac{3 \cdot (-1) - 1}{2} = -2 \text{이므로}$$

$$(f^{-1} \circ g)(0) = f^{-1}(g(0)) = f^{-1}(-2)$$

이때 $f^{-1}(-2)=a$ 라 하면 $f(a)=-2$

$$\frac{a+1}{a-1}=-2, \quad a+1=-2a+2$$

$$3a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(0)=\frac{1}{3} \quad \text{답 ②}$$

다른 풀이 $(g \circ f)(x)=\frac{3x-1}{2}$, 즉 $g(f(x))=\frac{3x-1}{2}$

에서

$$g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{3x-1}{2}$$

$$\frac{x+1}{x-1}=t \text{로 놓으면} \quad x+1=t(x-1)$$

$$(1-t)x=-t-1 \quad \therefore x=\frac{t+1}{t-1}$$

$$\therefore g(t)=\frac{3 \cdot \frac{t+1}{t-1}-1}{2}=\frac{t+2}{t-1}$$

따라서 $g(0)=-2$ 이므로

$$(f^{-1} \circ g)(0)=f^{-1}(g(0))=f^{-1}(-2)$$

이때 $f^{-1}(-2)=a$ 라 하면 $f(a)=-2$

$$\frac{a+1}{a-1}=-2 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(0)=\frac{1}{3}$$

13 **전략** 0이 아닌 두 실수 m, n 에 대하여

$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}=-\sqrt{\frac{m}{n}}$ 이면 $m>0, n<0$ 임을 이용한다.

풀이 $ab \neq 0$ 이고 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}=-\sqrt{\frac{1}{a}}$ 이므로

$$ab<0, b>0 \quad \therefore a<0, b>0$$

$$\neg. \frac{|ab|}{a}=\frac{-ab}{a}=-b$$

$$\neg. |a-2b|-\sqrt{4b^2}+\sqrt{a^2}=-(a-2b)-2b+(-a)=-2a$$

$\neg. a-b<0$ 이므로

$$\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{|a|+|b|}=\frac{-(a-b)}{-a+b}=1$$

이상에서 $\neg, \neg, \neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

14 **전략** 먼저 x, y 의 분모를 유리화한다.

$$\text{풀이} \quad x=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=7-4\sqrt{3},$$

$$y=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$$

이므로

$$x+y=14, \quad x-y=-8\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{x+y}{x-y}=\frac{14}{-8\sqrt{3}}+\frac{8\sqrt{3}}{14}$$

$$=-\frac{7\sqrt{3}}{12}+\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$=-\frac{49\sqrt{3}+48\sqrt{3}}{84}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{84}$$

답 ①

다른 풀이 $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{4xy}{x^2-y^2}$ 이므로

$$x^2-y^2=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}-\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$$

$$=(7-4\sqrt{3})^2-(7+4\sqrt{3})^2$$

$$=-112\sqrt{3},$$

$$xy=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=1$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{4xy}{x^2-y^2}=\frac{4 \cdot 1}{-112\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{84}$$

15 **전략** 주어진 함수의 그래프를 이용하여 a, b, c 의 부호를 구한다.

$$\text{풀이} \quad y=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+c}{x+a}=\frac{-ab+c}{x+a}+b$$

에서 $y=\frac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a, y=b$ 이므로

$$a<0, b<0$$

또 y 절편은 양수이므로

$$\frac{c}{a}>0$$

$$\therefore c<0 (\because a<0)$$

$y=\sqrt{ax+b}+c$ 에서

$$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

이므로 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행 이동한 것이다.

이때 $a<0, -\frac{b}{a}<0, c<0$ 이므로 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

16 **전략** $y=f(x)$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, -1)$ 을 지나는 직선임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax-a-1=a(x-1)-1$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점

$(1, -1)$ 을 지나는 직선이다. **①**

함수 $f(x)$ 가 정의되려면

$$-3 \leq f(0) \leq 2, \quad -3 \leq f(2) \leq 2 \quad \text{②}$$

$$-3 \leq -a-1 \leq 2 \text{에서} \quad -2 \leq -a \leq 3$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 2 \quad \text{③}$$

$$-3 \leq a-1 \leq 2 \text{에서}$$

$$-2 \leq a \leq 3 \quad \text{④}$$

$$\text{③, ④에서} \quad -2 \leq a \leq 2 \quad \text{⑤}$$

$$\text{답 } -2 \leq a \leq 2$$

일품 BOX

채점 기준	비율
① $y=f(x)$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, -1)$ 을 지나는 직선임을 알 수 있다.	30%
② 함수 $f(x)$ 가 정의되기 위한 조건을 구할 수 있다.	40%
③ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%

17 [전략] 먼저 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것을 생각한다.

[풀이] 함수 f 가 일대일대응이므로

$$f(2)=4 \text{ 또는 } f(2)=6$$

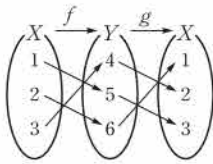
이때 $f(2)=4$ 이면

$$(g \circ f)(2)=g(f(2))=g(4)=2 \neq 1$$

이므로 $f(2)=6, f(3)=4$

또 $(g \circ f)(2)=g(f(2))=g(6)=1$ 이므로

$$g(5)=3$$



따라서 두 함수 f, g 는 위의 그림과 같으므로

$$\begin{aligned} (g \circ f)(3) + (f \circ g)(5) &= g(f(3)) + f(g(5)) \\ &= g(4) + f(3) \\ &= 2 + 4 = 6 \end{aligned}$$

답 6

18 [전략] 함수 f^3 이 항등함수임을 이용한다.

[풀이] $f^3(1)=f^2(1)=f(1)=1, f^3(2)=2,$

$f^3(3)=3, f^3(4)=4$ 이므로 f^3 은 항등함수이다.

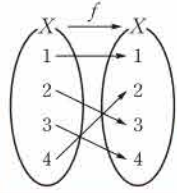
이때 $f(1)=1, f(2)=3$ 이고 f^3 이 항

등함수이려면 함수 f 는

$$f(3)=4, f(4)=2$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore f^{99}(2) + f^{100}(4) &= f^{99}(2) + f^{99}(f(4)) \\ &= 2 + f(4) \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f^3(1) &= f^2(f(1)) \\ &= f^2(1) \\ &= f(f(1)) \\ &= f(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= 20 \text{이면} \\ f^3(3) &= f^2(f(3)) \\ &= f^2(20) \\ &= f(f(20)) \\ &= f(3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$99=3 \cdot 33$ 이므로 f^{99} 은 항등함수이다.

채점 기준	비율
① f^3 이 항등함수임을 알 수 있다.	30%
② $f(3), f(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $f^{99}(2) + f^{100}(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

19 [전략] 주어진 등식을 간단히 하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

[풀이] $\frac{x^2-3xy-7y^2}{x^2-3xy-5y^2}=3$ 에서

$$x^2-3xy-7y^2=3(x^2-3xy-5y^2)$$

$$x^2-3xy-7y^2=3x^2-9xy-15y^2$$

$$2x^2-6xy-8y^2=0, \quad x^2-3xy-4y^2=0$$

$$\therefore (x+y)(x-4y)=0$$

(i) $x=-y$ 일 때,

$$xy=(-y) \cdot y=-y^2 < 0 \quad (\because y \neq 0)$$

그런데 $xy > 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=4y$ 일 때,

$$xy=4y \cdot y=4y^2 > 0 \quad (\because y \neq 0)$$

이때 $xy > 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $x=4y$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2x+7y}{2x-5y} &= \frac{8y+7y}{8y-5y} \\ &= \frac{15y}{3y} = 5 \quad (\because y \neq 0) \end{aligned}$$

→ 2

→ 3

답 5

채점 기준	비율
① 주어진 등식을 간단히 할 수 있다.	30%
② x, y 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50%
③ $\frac{2x+7y}{2x-5y}$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

20 [전략] $f(-2)=-6, f(-6)=-2$ 임을 이용하여 a, b 의 값을 구한다.

[풀이] 조건 ㉞에서 $f(-2)=-6$ 이므로

$$\frac{-2a+b}{-2+4}=-6$$

$$\therefore -2a+b=-12$$

..... ㉟

또 조건 ㉝에서 $f^{-1}(-2)=-6$ 이므로

$$f(-6)=-2$$

$$\frac{-6a+b}{-6+4}=-2$$

$$\therefore -6a+b=4$$

..... ㉡

㉟, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-4, b=-20$$

→ 1

따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-4x-20}{x+4} = \frac{-4(x+4)-4}{x+4} \\ &= -\frac{4}{x+4} - 4 \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-4, y=-4$ 이다.

즉 점 $(-4, -4)$ 가 두 점

근선의 교점이므로 오른쪽

그림과 같이 직선

$y=-x+k$ 가 점

$(-4, -4)$ 를 지날 때

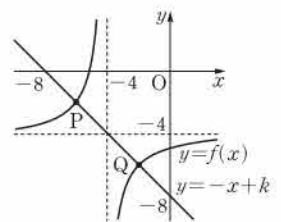
PQ의 길이가 최소이다.

따라서 $-4=4+k$ 이므로 $k=-8$

→ 2

→ 3

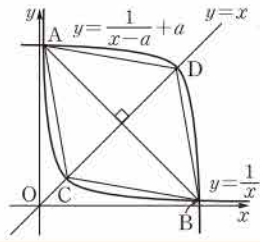
답 -8



채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
② $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
③ k 의 값을 구할 수 있다.	40%

21 **전략** $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 임을 이용하여 사각형 ACBD의 넓이를 구한다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 모두 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.
 $B(a, \frac{1}{a})$ ($a>1$)이라 하면 $A(\frac{1}{a}, a)$ 이므로



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 점근선의 교점은 각각 $(0, 0)$, (a, a) 이다.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a} - a\right)^2} \\ &= \sqrt{2\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

또 두 점 A, B는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점이므로 $\frac{1}{x} = \frac{1}{x-a} + a$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{ax - a^2 + 1}{x - a} \\ \therefore x^2 - ax + 1 &= 0 \quad (\because a \neq 0)\end{aligned}$$

이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이 $a, \frac{1}{a}$ 이므로

$$a + \frac{1}{a} = a$$

이때

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4 = a^2 - 4$$

이므로

$$a - \frac{1}{a} = \sqrt{a^2 - 4}$$

따라서 ㉠에서

$$\overline{AB} = \sqrt{2(a^2 - 4)}$$

점 C의 x좌표는 $\frac{1}{x} = x$ 에서

$$\begin{aligned}x^2 &= 1 \quad \therefore x = 1 \quad (\because x > 0) \\ \therefore C(1, 1)\end{aligned}$$

또 점 D의 x좌표는 $\frac{1}{x-a} + a = x$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-a} &= x-a, \quad (x-a)^2 = 1 \\ x-a &= -1 \quad (\because x < a) \quad \therefore x = a-1 \\ \therefore D(a-1, a-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{CD} &= \sqrt{\{(a-1)-1\}^2 + \{(a-1)-1\}^2} \\ &= \sqrt{2}(a-2)\end{aligned}$$

사각형 ACBD에서 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 이므로

$$\begin{aligned}S(a) &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(a^2 - 4)} \cdot \sqrt{2}(a-2) \\ &= \sqrt{a+2} \sqrt{(a-2)^3} \\ \therefore \frac{S(a)}{\sqrt{a+2}} &= \sqrt{(a-2)^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{이때 } \frac{S(a)}{\sqrt{a+2}} &= 8 \text{이므로 } \sqrt{(a-2)^3} = 8 \\ (a-2)^3 &= 64, \quad a-2 = 4 \\ \therefore a &= 6\end{aligned}$$

답 6

22 **전략** 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 점근선의 교점이 (a, a) 로 같음을 이용한다.

풀이 조건 ㉠에서 $a=b=c=d$ 이므로

$$f(x) = \frac{k}{x-a} + a, \quad g(x) = \frac{l}{x-a} + a$$

라 하면

$$\begin{aligned}f(x) + g(x) &= \left(\frac{k}{x-a} + a\right) + \left(\frac{l}{x-a} + a\right) \\ &= \frac{k+l}{x-a} + 2a\end{aligned}$$

이때 조건 ㉡에서 $k+l=0$ 이므로

$$l = -k$$

따라서 $g(x) = \frac{-k}{x-a} + a$ 에서

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= f\left(\frac{-k}{x-a} + a\right) = \frac{k}{\left(\frac{-k}{x-a} + a\right) - a} + a \\ &= -x + 2a\end{aligned}$$

이고, 조건 ㉢에서 $y=f(g(x))$ 의 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 = 2a \quad \therefore a = 2$$

즉 $f(x) = \frac{k}{x-2} + 2$ 이고 $f(0) = 4$ 이므로

$$\begin{aligned}4 &= \frac{k}{-2} + 2 \quad \therefore k = -4 \\ \therefore l &= 4\end{aligned}$$

따라서 $g(x) = \frac{4}{x-2} + 2$ 이므로

$$g(3) = \frac{4}{3-2} + 2 = 6$$

답 6

23 **전략** 두 정사각형 P, Q의 한 변의 길이를 각각 x, y라 한 후 정사각형 ABCD의 넓이를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 두 정사각형 P, Q의 한 변의 길이를 각각 x, y라 하면

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{k}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{k(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} \\ &= \frac{k}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5}), \\ y^2 &= \frac{k}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{k(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} \\ &= \frac{k}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}x^2 y^2 &= \frac{k}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5}) \cdot \frac{k}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = \frac{k^2}{2} \\ \therefore xy &= \sqrt{\frac{k^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}k \quad (\because x > 0, y > 0)\end{aligned}$$

이때 정사각형 ABCD의 넓이가 5이므로

$$(x+y)^2 = 5, \quad x^2 + 2xy + y^2 = 5$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}k+\frac{k}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5}) &= 5 \\ \sqrt{7}k+\sqrt{2}k &= 5 \\ \therefore k &= \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \sqrt{7}-\sqrt{2} \quad \text{답 } \sqrt{7}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

24 **전략** 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 평행이동과 대칭이동에 의하여 서로 겹쳐짐을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

풀이 $f(x)=\sqrt{2x+7}-4=\sqrt{2\left(x+\frac{7}{2}\right)}-4,$

$$g(x)=\sqrt{-2x+7}+4=\sqrt{-2\left(x-\frac{7}{2}\right)}+4$$

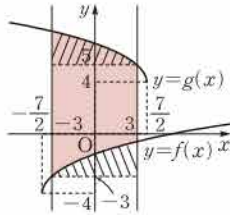
이므로 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다.

이때 $y=g(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것과 같으므로 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$6 \cdot 8 = 48$$

답 48



25 **전략** 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\sqrt{8x}=x \text{에서}$$

$$8x=x^2, \quad x(x-8)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=8$$

따라서 도형의 내부에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수이고 직선 $y=x$ 위에 있는 점은

$(1, 1), (2, 2), \dots, (7, 7)$ 의 7개

이고, 직선 $y=x$ 보다 위에 있는 점은

$$f(1)=\sqrt{8}<3 \text{에서} \quad (1, 2)$$

$$f(2)=\sqrt{16}=4 \text{에서} \quad (2, 3)$$

$$f(3)=\sqrt{24}<5 \text{에서} \quad (3, 4)$$

$$f(4)=\sqrt{32}<6 \text{에서} \quad (4, 5)$$

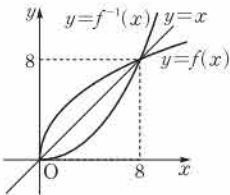
$$f(5)=\sqrt{40}<7 \text{에서} \quad (5, 6)$$

의 5개이다.

이때 도형의 내부에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수이고 직선 $y=x$ 보다 아래에 있는 점의 개수는 직선 $y=x$ 보다 위에 있는 점의 개수와 같으므로 구하는 점의 개수는

$$7+2 \cdot 5=17$$

답 17



가로의 길이가
 $3-(-3)=6,$
세로의 길이가
 $5-(-3)=8$
인 직사각형의 넓이

$f(6)=\sqrt{48}<7$ 이고,
 $f(7)=\sqrt{56}<8$ 이므로 x
좌표가 6 또는 7일 때는
존재하지 않는다.



MEMO

A series of horizontal dashed lines for writing, spanning the width of the page.