



정답 및 풀이

I	다항식	2
II	방정식	24
III	부등식	65
IV	순열과 조합	88
V	행렬	103

I 다항식

01 다항식의 연산

개념 & 핵심 기출

본책 8쪽

- 01 ㄱ. x^2 항, x 항, 상수항의 순서로 정리되어 있으므로 x 에 대하여 내림차순으로 정리한 것이다.
 ㄴ. x 에 대한 다항식에서 a^2+3 은 상수항이므로 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면 $ax+a^2+3$ 이다.
 ㄷ. x 항, 상수항의 순서로 정리되어 있으므로 x 에 대하여 내림차순으로 정리한 것이다.
 ㄹ. x 에 대하여 내림차순으로 정리하면 $(y^2-2)x^2+3yx$ 이다.
 이상에서 x 에 대하여 내림차순으로 정리한 다항식인 것은 ㄱ, ㄷ이다. [답] ②

02 $5A-2(B+3A)$
 $=5A-2B-6A$
 $=-A-2B$
 $=-(2x^2-4x+3)-2(3x^2+5x-4)$
 $=-2x^2+4x-3-6x^2-10x+8$
 $=-8x^2-6x+5$ [답] $-8x^2-6x+5$

03 $A+B=-x^2+3xy-4y^2$ ㉠
 $3B-2A=7x^2-xy-2y^2$ ㉡

㉠ $\times 3$ -㉡을 하면
 $5A=-10x^2+10xy-10y^2$
 $\therefore A=-2x^2+2xy-2y^2$
 $X-2A=B$ 에서
 $X=2A+B$
 $=(A+B)+A$
 $=(-x^2+3xy-4y^2)+(-2x^2+2xy-2y^2)$
 $=-3x^2+5xy-6y^2$

따라서 다항식 X 의 xy 의 계수는 5이다. [답] 5

💡비밀노트
 $A=-2x^2+2xy-2y^2$ 을 ㉠에 대입하여 B 를 구한 후 $X=2A+B$ 에 A 와 B 를 대입하여 답을 구할 수도 있지만 위의 풀이처럼 $X=2A+B=(A+B)+A$ 임을 이용하면 B 를 구하지 않고도 X 를 구할 수 있다.

04 $(2x+ky^2)(x^2-xy^2+2y)$ 의 전개식에서 x^2y^2 항은 $2x \cdot (-xy^2) + ky^2 \cdot x^2 = (k-2)x^2y^2$
 이때 x^2y^2 의 계수가 3이므로
 $k-2=3 \quad \therefore k=5$ [답] 5

05 $(2x+a)(2x-a)+(bx+3)(bx-3)$
 $=4x^2-a^2+b^2x^2-9$
 $=(b^2+4)x^2-(a^2+9)$

x 에 대한 다항식에서 y^2+1 은 상수항이다.

먼저 구하는 식을 간단히 한 후 두 다항식 A, B 를 대입하여 동류항끼리 모아 정리한다.

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
 $=a^3+b^3$

$a-b=10$ 이므로 주어진 식에 $a-b$ 를 곱해도 식의 값은 변하지 않는다.

필요한 항이 나오도록 각 다항식에서 하나씩 항을 선택하여 곱한다.

이때 x^2 의 계수가 8이므로
 $b^2+4=8, \quad b^2=4$
 $\therefore b=2 (\because b>0)$
 또 상수항이 -25 이므로
 $-(a^2+9)=-25, \quad a^2=16$
 $\therefore a=4 (\because a>0)$
 $\therefore a+b=6$

[답] 6

06 $(a+b+c)(a-b-c)+(a+b-c)(a-b+c)$
 $=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$
 $+\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$
 $=a^2-(b+c)^2+a^2-(b-c)^2$
 $=a^2-b^2-2bc-c^2+a^2-b^2+2bc-c^2$
 $=2(a^2-b^2-c^2)$
 이므로 $2(a^2-b^2-c^2)=0$ 에서
 $a^2=b^2+c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다. [답] ④

07 $(x+a)^3+(2x-3)^3$
 $=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3+8x^3-36x^2+54x-27$
 $=9x^3+(3a-36)x^2+(3a^2+54)x+a^3-27$

이때 x^2 의 계수가 -42 이므로
 $3a-36=-42 \quad \therefore a=-2$

따라서 x 의 계수는
 $3a^2+54=3 \cdot (-2)^2+54=66$ [답] ③

08 $(2x+1)^2(4x^2-2x+1)^2$
 $=\{(2x+1)(4x^2-2x+1)\}^2$
 $=\{(2x)^3+1^3\}^2$
 $=(8x^3+1)^2$
 $=64x^6+16x^3+1$

따라서 $a=64, b=16, n=3$ 이므로
 $a+2b+n=99$ [답] 99

09 $(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
 $=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
 $=\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\}\{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}$
 $=(a^3-b^3)(a^3+b^3)$
 $=a^6-b^6$ [답] ③

10 $a+b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
 $ab=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$
 $\therefore a+a^2+a^3+b+b^2+b^3$
 $=(a+b)+(a^2+b^2)+(a^3+b^3)$
 $=(a+b)+\{(a+b)^2-2ab\}$
 $+\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}$
 $=4+(4^2-2 \cdot 1)+(4^3-3 \cdot 1 \cdot 4)$
 $=70$ [답] 70

일품 BOX

11 $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ 이므로
 $56 = 2^3 + 3ab \cdot 2, \quad 6ab = 48$
 $\therefore ab = 8$
 $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = 2^2 + 4 \cdot 8 = 36$ 이므로
 $a+b = 6$ ($\because a+b > 0$)
 $\therefore a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
 $= 6^3 - 3 \cdot 8 \cdot 6$
 $= 72$ 답 ④

12 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 직사각형의 대각선의 길이가 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로
 $x^2 + y^2 = 100$
 또 직사각형의 둘레의 길이가 24 cm이므로
 $2(x+y) = 24 \quad \therefore x+y = 12$
 이때 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ 에서
 $100 = 12^2 - 2xy \quad \therefore xy = 22$
 따라서 직사각형의 넓이는 22 cm^2 이다. 답 ④

13 $x \neq 0$ 이므로 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면
 $x - 4 - \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x - \frac{1}{x} = 4$
 $\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$
 $= 4^3 + 3 \cdot 4$
 $= 76$ 답 ⑤

14 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ 에서
 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 0$
 이때 $x+y+z \neq 0$ 이므로
 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = 0$
 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\} = 0$
 $x-y=0, y-z=0, z-x=0$
 $\therefore x=y=z$
 $\therefore \frac{(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3}{(x+y)(y+z)(z+x)}$
 $= \frac{(2x)^3 + (2x)^3 + (2x)^3}{2x \cdot 2x \cdot 2x}$
 $= 3$ 답 ③

15 주어진 직육면체의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 68이므로
 $4(x+y+z) = 68$
 $\therefore x+y+z = 17$
 대각선의 길이가 10이므로
 $x^2 + y^2 + z^2 = 100$
 따라서 직육면체의 겉넓이는
 $2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)$
 $= 17^2 - 100$
 $= 189$ 답 ⑤

다항식의 나눗셈을 할 때에는 차수를 맞춰서 계산하고 해당 차수의 항이 없는 부분은 비워 둔다.

$a > 0, b > 0$ 이므로
 $a+b > 0$

$A = BQ + R$ 에서 R 가 상수이거나 R 의 차수가 B 의 차수보다 작으면 A 를 B 로 나누었을 때의 몫은 Q , 나머지는 R 이다.

(직사각형의 넓이)
 $=$ (가로 길이)
 $\times$ (세로 길이)
 $= xy$

$x=0$ 을 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 에 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 $x \neq 0$ 이다.

16
$$\begin{array}{r} 3x-2 \\ x^2+2 \overline{) 3x^3-2x^2+3} \\ \underline{3x^3 +6x} \\ -2x^2-6x+3 \\ \underline{-2x^2 -4} \\ -6x+7 \end{array}$$

 $\therefore Q(x) = 3x-2, R(x) = -6x+7$
 이때 $3x-2 = -\frac{1}{2}(-6x+7) + \frac{3}{2}$ 이므로 구하는 나머지는 $\frac{3}{2}$ 이다. 답 ③

17 주어진 등식에서 다항식 $2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 7x - 1$ 을 $2x^2 + 5$ 로 나누었을 때의 몫이 $P(x)$, 나머지가 $ax+4$ 이다.

$$\begin{array}{r} x^2+2x-1 \\ 2x^2+5 \overline{) 2x^4+4x^3+3x^2+7x-1} \\ \underline{2x^4 +5x^2} \\ 4x^3-2x^2+7x \\ \underline{4x^3 +10x} \\ -2x^2-3x-1 \\ \underline{-2x^2 -5} \\ -3x+4 \end{array}$$

따라서 $P(x) = x^2 + 2x - 1, a = -3$ 이므로
 $P(a) = P(-3)$
 $= (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 1$
 $= 2$ 답 ②

18
$$\begin{array}{r} x+4 \\ x^2+2x-3 \overline{) x^3+6x^2+ax+b} \\ \underline{x^3+2x^2-3x} \\ 4x^2+(a+3)x+b \\ \underline{4x^2+8x-12} \\ (a-5)x+b+12 \end{array}$$

이때 나머지가 10이므로
 $a-5=0, b+12=10$
 $\therefore a=5, b=-2$
 $\therefore ab = -10$ 답 -10

1등급을 위한 고난도 문제

본책 11쪽

01 $2(A-B) - \{B - 3(C-A)\}$
 $= 2A - 2B - B + 3C - 3A$
 $= -A - 3B + 3C$
 $= -(-2x^2 + 5x - 4) - 3(3x^2 - 2x - 1)$
 $+ 3(4x^2 + x - 3)$
 $= 2x^2 - 5x + 4 - 9x^2 + 6x + 3 + 12x^2 + 3x - 9$
 $= 5x^2 + 4x - 2$ 답 ③

02 $mA+nB$

$$=m(x^2-x+1)+n(2x^2+3x-1)$$

$$=(m+2n)x^2+(-m+3n)x+m-n$$

다항식 $mA+nB$ 의 x^2 의 계수가 0이므로

$$m+2n=0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$mA-nB=m(x^2-x+1)-n(2x^2+3x-1)$$

$$=(m-2n)x^2+(-m-3n)x+m+n$$

다항식 $mA-nB$ 의 x 의 계수가 3이므로

$$-m-3n=3 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$m=6, n=-3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\therefore m+n=3 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 3

채점 기준	비율
① 다항식 $mA+nB$ 의 x^2 의 계수를 이용하여 m, n 에 대한 관계식을 세울 수 있다.	30%
② 다항식 $mA-nB$ 의 x 의 계수를 이용하여 m, n 에 대한 관계식을 세울 수 있다.	30%
③ m, n 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $m+n$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

03 $A+2B$

$$=(ax^2+bxy+ay^2)+2(x^2+2xy+3y^2)$$

$$=(a+2)x^2+(b+4)xy+(a+6)y^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2A-C=2(ax^2+bxy+ay^2)-(6x^2+xy-2y^2)$$

$$=(2a-6)x^2+(2b-1)xy+(2a+2)y^2$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

①, ②의 항이 각각 두 개이려면 각 다항식에서 x^2, xy, y^2 의 계수 중 하나씩만 0이어야 한다.

그런데 a, b 는 정수이므로 ②에서 $2b-1 \neq 0$ 이다.

따라서 $2a-6=0$ 또는 $2a+2=0$ 이므로

$$a=3 \text{ 또는 } a=-1$$

한편 ①에서 $a=3, a=-1$ 일 때 모두 $a+2 \neq 0$,

$a+6 \neq 0$ 이므로 $b+4=0$ 이어야 한다.

즉 $b=-4$ 이고, $ab < 0$ 이므로

$$a=3$$

$$\therefore a^2+b^2=3^2+(-4)^2=25$$

답 25

04 $(x^2+ax+6)(x^2+bx-2)$ 의 전개식에서

$$x^3\text{항은 } x^2 \cdot bx + ax \cdot x^2 = (a+b)x^3$$

$$x^2\text{항은 } x^2 \cdot (-2) + ax \cdot bx + 6 \cdot x^2 = (ab+4)x^2$$

이때 x^3 의 계수와 x^2 의 계수가 모두 0이므로

$$a+b=0, ab+4=0$$

$b=-a$ 를 $ab+4=0$ 에 대입하면

$$-a^2+4=0, \quad a^2=4$$

$$\therefore a=\pm 2$$

$$\therefore a=-2, b=2 \text{ 또는 } a=2, b=-2$$

그런데 $a > b$ 이므로

$$a=2, b=-2$$

같은 다항식을 이루고 있는 각각의 단항식이다.

$$b < 0, ab < 0 \text{이므로 } a > 0$$

$$1+3+5=9,$$

$$2+2+5=9,$$

$$3+3+3=9$$

따라서 주어진 다항식의 전개식에서 x 항은

$$ax \cdot (-2) + 6 \cdot bx = (-2a+6b)x$$

이므로 x 의 계수는

$$-2a+6b=-2 \cdot 2+6 \cdot (-2)=-16$$

답 ①

05 $P(x)=(2x-3)(x^2+ax+a)$ 라 하면 다항식

$P(x)$ 의 x 에 대한 모든 항의 계수와 상수항의 합은

$P(1)$ 의 값과 같으므로 $P(1)=15$ 에서

$$-(2a+1)=15$$

$$\therefore a=-8$$

따라서 $P(x)$ 의 전개식에서 x^2 항은

$$2x \cdot ax - 3 \cdot x^2 = (2a-3)x^2$$

이므로 x^2 의 계수는

$$2a-3=2 \cdot (-8)-3=-19$$

답 -19

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	50%
② 전개식에서 x^2 항을 구할 수 있다.	30%
③ x^2 의 계수를 구할 수 있다.	20%

등급 비밀노트

856

x 에 대한 n 차 다항식 $P(x)$ 가

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

일 때, x 에 대한 모든 항의 계수와 상수항의 합

$a_0+a_1+a_2+\dots+a_n$ 의 값은 $P(1)$ 의 값과 같다. 즉 $P(x)$ 에 x 대신 1을 대입한 값과 같다.

06 $(x+x^2+x^3+x^5)^3$

$$=(\underbrace{x+x^2+x^3}_{\textcircled{1}})(\underbrace{x+x^2+x^3+x^5}_{\textcircled{2}})(\underbrace{x+x^2+x^3+x^5}_{\textcircled{3}})$$

$(x+x^2+x^3+x^5)^3$ 을 전개하기 위해 다항식 ①, ②, ③에서 택한 항을 순서대로

$$x^a, x^b, x^c \quad (a, b, c \text{는 } 1 \text{ 또는 } 2 \text{ 또는 } 3 \text{ 또는 } 5)$$

이라 하자.

ㄱ. x^{14} 항이 나오는 경우는 $a+b+c=14$ 일 때이고, 이것을 만족시키는 a, b, c 는 존재하지 않는다.

따라서 x^{14} 의 계수는 0이다.

ㄴ. x^9 항이 나오는 경우는 $a+b+c=9$ 일 때이고, 이것을 만족시키는 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 는

$$(1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5),$$

$$(3, 5, 1), (5, 1, 3), (5, 3, 1),$$

$$(2, 2, 5), (2, 5, 2), (5, 2, 2),$$

$$(3, 3, 3)$$

의 10개이다. 그런데 각 경우의 계수는 모두 1이므로 x^9 의 계수는 10이다.

ㄷ. 모든 항의 계수의 합은 $(x+x^2+x^3+x^5)^3$ 에 $x=1$ 을 대입한 값과 같다.

$$\text{따라서 구하는 합은 } 4^3=64$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

07 다항식 PQ 의 전개식에서 x 항은

$$(-a+2b)x \cdot (-1) + 1 \cdot (a+3b)x = (2a+b)x$$

이때 x 의 계수가 20이므로

$$2a+b=20 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

한편 $a+b>0$ 에서 다항식 P 의 차수가 2이고, 다항식 PQ 의 차수가 3이므로 다항식 Q 의 차수는 1이다.

$$\therefore 2a-b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=5, b=10 \quad \rightarrow \textcircled{3}$

$$\therefore a+b=15 \quad \rightarrow \textcircled{4}$$

답 15

채점 기준	비율
① 다항식 PQ 의 x 의 계수를 이용하여 a, b 에 대한 관계식을 세울 수 있다.	30%
② 다항식 PQ 의 차수를 이용하여 a, b 에 대한 관계식을 세울 수 있다.	30%
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

08 (i) n 이 홀수일 때,

(주어진 식)

$$= \left(-\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \right) \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \right) \\ = -b \cdot b = -b^2$$

(ii) n 이 짝수일 때,

(주어진 식)

$$= \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \right) \left(-\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \right) \\ = b \cdot (-b) = -b^2$$

(i), (ii)에서 주어진 식을 간단히 하면 $-b^2$ 이다. 답 ②

💡 비법노트

n 이 자연수일 때, $(-a)^n$ ($a>0$) 꼴은 n 이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각한다.

09 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{yz-zx-xy}{xyz} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$xyz = 2(yz-zx-xy) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore (x-2)(y+2)(z+2)$$

$$= (-2+x)(-2-y)(-2-z)$$

$$= (-2)^3 + (x-y-z) \cdot (-2)^2$$

$$+ (-xy+yz-zx) \cdot (-2) + xyz$$

$$= xyz - 2(yz-zx-xy) + 4(x-y-z) - 8$$

$$= 4(x-y-z) - 8 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 4 \cdot 4 - 8 = 8$$

답 ⑤

10 $40^2 = (32+8)^2 = 32^2 + 2 \cdot 32 \cdot 8 + 8^2$ 이므로

$$p = 2 \cdot 32 \cdot 8 = 512$$

$\rightarrow \textcircled{1}$

$$40^2 = (24+8+8)^2$$

$$= 24^2 + 8^2 + 8^2 + 2(24 \cdot 8 + 8 \cdot 8 + 8 \cdot 24)$$

이므로

$$(a^2+ab+b^2) \\ \times (a^2-ab+b^2) \\ = a^4+a^2b^2+b^4$$

$x^2-x+1=0$ 에서

$$x^2-x=-1,$$

$$1+x^2=x,$$

$$1-x=-x^2$$

$$(a+b+c)^2 \\ = a^2+b^2+c^2 \\ + 2(ab+bc+ca)$$

$$q = 2(24 \cdot 8 + 8 \cdot 8 + 8 \cdot 24) = 896 \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

$$\therefore 3p-q = 3 \cdot 512 - 896 = 640 \quad \rightarrow \textcircled{3}$$

답 640

채점 기준	비율
① p 의 값을 구할 수 있다.	40%
② q 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $3p-q$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 $32^2+8^2+512=24^2+8^2+8^2+q$ 에서

$$32^2 = (24+8)^2 = 24^2 + 2 \cdot 24 \cdot 8 + 8^2$$
이므로

$$(24^2 + 2 \cdot 24 \cdot 8 + 8^2) + 8^2 + 512 = 24^2 + 8^2 + 8^2 + q$$

$$\therefore q = 2 \cdot 24 \cdot 8 + 512 = 896$$

11 $A = (1+x+x^2)(1-x+x^2) \\ + (1-x)(1+x)(1+x^2) \\ = (1+x^2+x^4) + (1-x^2)(1+x^2) \\ = (1+x^2+x^4) + (1-x^4) \\ = 2+x^2$

이므로 $A^2 = (2+x^2)^2 = 4+4x^2+x^4$

따라서 A^2 의 전개식에서 x^2 의 계수는 4이다. 답 ②

12 $(-a+b+1)^2 = a^2+b^2+1-2ab-2a+2b$

$$(a-b+1)^2 = a^2+b^2+1-2ab+2a-2b$$

$$(a+b-1)^2 = a^2+b^2+1+2ab-2a-2b$$

따라서 주어진 등식은

$$(a^2+b^2+1-2ab-2a+2b)$$

$$+ (a^2+b^2+1-2ab+2a-2b)$$

$$= 2(a^2+b^2+1+2ab-2a-2b)$$

$$-4ab = 4ab-4a-4b$$

$$\therefore a+b=2ab$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2$$

답 2

13 $(1-2x+3x^2-4x^3)^3 = 1 + \dots + ax^7 + bx^8 - 64x^9$

이고

$$\{(x-2)(1-2x+3x^2-4x^3)\}^3$$

$$= (x-2)^3(1-2x+3x^2-4x^3)^3$$

$$= (x^3-6x^2+12x-8)(1-2x+3x^2-4x^3)^3$$

이므로 $\{(x-2)(1-2x+3x^2-4x^3)\}^3$ 의 전개식에서 x^{10} 항은

$$x^3 \cdot ax^7 - 6x^2 \cdot bx^8 + 12x \cdot (-64x^9)$$

$$= (a-6b-768)x^{10}$$

따라서 x^{10} 의 계수는 $a-6b-768$ 이다.

답 ④

14 $x + \frac{1}{x} = 1$ 의 양변에 x 를 곱하면

$$x^2+1=x \quad \therefore x^2-x+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore P(n) = (1+x^2)^n + (1-x)^n$$

$$= x^n + (-x^2)^n$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x+1$ 을 곱하면

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$x^3+1=0 \quad \therefore x^3=-1$$

따라서 $x^4=-x$, $x^5=-x^2$, $x^6=1$ 이므로 $P(n)$ 의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(1) &= x - x^2 = 1 \\ P(2) &= x^2 + x^4 = x^2 - x = -1 \\ P(3) &= x^3 - x^6 = -1 - 1 = -2 \\ P(4) &= x^4 + x^8 = x^4 + x^6 \cdot x^2 = -x + x^2 = -1 \\ P(5) &= x^5 - x^{10} = x^5 - x^6 \cdot x^4 = -x^2 + x = 1 \\ P(6) &= x^6 + x^{12} = x^6 + (x^6)^2 = 1 + 1 = 2 \\ P(7) &= x^7 - x^{14} = x^6 \cdot x - (x^6)^2 \cdot x^2 = x - x^2 = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

즉 자연수 k 에 대하여

$$\begin{aligned} &P(6k-5) + P(6k-4) + P(6k-3) \\ &+ P(6k-2) + P(6k-1) + P(6k) \\ &= 1 - 1 - 2 - 1 + 1 + 2 = 0 \end{aligned}$$

이때 $2000 = 6 \cdot 333 + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} &P(1) + P(2) + P(3) + \cdots + P(2000) \\ &= \{P(1) + P(2) + P(3) + \cdots + P(1998)\} \\ &\quad + P(1999) + P(2000) \\ &= 0 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

답 0

비밀노트

$x^6=10$ 이므로 자연수 k 에 대하여

$$x = x^7 = x^{13} = \cdots = x^{6k-5}$$

$$x^2 = x^8 = x^{14} = \cdots = x^{6k-4}$$

$\vdots$

$$1 = x^6 = x^{12} = \cdots = x^{6k}$$

즉 x^n (n 은 자연수)은 $x, x^2, -1, -x, -x^2, 1$ 이 이 순서대로 반복되므로 $P(n) = x^n + (-x^2)^n$ 에서

$$P(1) = P(7) = P(13) = \cdots = P(6k-5) = 1$$

$$P(2) = P(8) = P(14) = \cdots = P(6k-4) = -1$$

$\vdots$

$$P(6) = P(12) = \cdots = P(6k) = 2$$

따라서 $P(n)$ 의 값은 1, -1, -2, -1, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

$x^3=-1$ 의 양변에 x, x^2 ,

x^3 을 각각 곱하면

$$x^4 = -x,$$

$$x^5 = -x^2,$$

$$x^6 = -x^3 = 1$$

$$\overline{BE} = \overline{BC} - \overline{CE}$$

$$= a - c$$

$$ab = 96$$

→ ①

$$\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CE} = 23 \text{에서}$$

$$a + b + c = 23$$

..... ⑦

$$\overline{AB} + \overline{BE} = 17 \text{에서}$$

$$b + (a - c) = 17$$

..... ⑧

⑦+⑧을 하면

$$2(a+b) = 40$$

$$\therefore a+b = 20$$

→ ②

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a+b)^2 - 2ab}$$

$$= \sqrt{20^2 - 2 \cdot 96} = 4\sqrt{13}$$

→ ③

답 $4\sqrt{13}$

채점 기준	비율
① ab 의 값을 구할 수 있다.	20%
② $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ 대각선 AC의 길이를 구할 수 있다.	30%

$$\begin{aligned} 17 \quad a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= (a-b)^2 + 2ab \end{aligned}$$

$a+b=k(a-b)$ 의 양변을 제곱하면

$$(a+b)^2 = \{k(a-b)\}^2$$

이므로 $(a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$ 에서

$$k^2(a-b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

$$\therefore (k^2-1)(a-b)^2 = 4ab \quad \text{..... ①}$$

$a+b=k(a-b)$, 즉 $(k-1)a = (k+1)b$ 에서 $k^2 \neq 1$,

$a \neq 0$ 이므로

$$a \neq b$$

따라서 $a-b \neq 0$ 이므로 ①에서

$$\frac{ab}{(a-b)^2} = \frac{k^2-1}{4}$$

$$\therefore \textcircled{2} \quad \frac{k^2-1}{4}$$

$$\text{즉 } p=2, f(k) = \frac{k^2-1}{4} \text{이므로}$$

$$f(p) = f(2) = \frac{2^2-1}{4} = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

15 $ax+by=p$, $bx+ay=q$ 라 하면

$$p+q = (ax+by) + (bx+ay)$$

$$= a(x+y) + b(x+y)$$

$$= (a+b)(x+y) = 4 \cdot 2 = 8$$

$$pq = (ax+by)(bx+ay)$$

$$= abx^2 + (a^2+b^2)xy + aby^2$$

$$= ab(x^2+y^2) + xy(a^2+b^2)$$

$$= \{(x+y)^2 - 2xy\} - \{(a+b)^2 - 2ab\}$$

$$= \{2^2 - 2 \cdot (-1)\} - \{4^2 - 2 \cdot 1\} = -8$$

$$\therefore (ax+by)^3 + (bx+ay)^3$$

$$= p^3 + q^3 = (p+q)^3 - 3pq(p+q)$$

$$= 8^3 - 3 \cdot (-8) \cdot 8 = 704$$

답 ④

16 $\overline{AD}=a$, $\overline{DC}=b$, $\overline{CE}=c$ 라 하면 $\square ABCD$ 의 넓이가 96이므로

a, b 가 자연수이므로

$a+b, a^2+b^2$ 도 자연수이다.

$$a=1, b=4$$

또는 $a=4, b=1$ 일 때,

$$a^2+b^2=17$$

$$a=2, b=3$$

또는 $a=3, b=2$ 일 때,

$$a^2+b^2=13$$

$$18 \quad a^3+b^3+ab(a+b)$$

$$= \{(a+b)^3 - 3ab(a+b)\} + ab(a+b)$$

$$= (a+b)^3 - 2ab(a+b)$$

$$= (a+b)\{(a+b)^2 - 2ab\}$$

$$= (a+b)(a^2+b^2)$$

$$\therefore (a+b)(a^2+b^2) = 175$$

→ ①

a, b 가 자연수이므로 $a+b \geq 2$ 이고 $a^2 \geq a, b^2 \geq b$ 에서

$$a^2+b^2 \geq a+b \geq 2$$

이때 $175 = 5 \cdot 35 = 7 \cdot 25$ 이므로

$$a+b=5, a^2+b^2=35$$

$$\text{또는 } a+b=7, a^2+b^2=25$$

→ ②

(i) $a+b=5, a^2+b^2=35$ 일 때,

주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, b 는 존재하지 않는다.

(ii) $a+b=7$, $a^2+b^2=25$ 일 때,
 $a=3$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=3$ 이면 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서
 $a=3$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=3$ → ③
 $\therefore ab=12$ → ④

답 12

채점 기준	비율
① 주어진 등식을 간단히 정리할 수 있다.	30%
② $a+b$, a^2+b^2 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ a , b 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ ab 의 값을 구할 수 있다.	10%

19 $\frac{x^6+x^5+x^4+x^3-x^2+x-1}{x^3}$
 $=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)+1 \dots \textcircled{1}$

한편 $x \neq 0$ 이므로 $x^2-3x+1=0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x-3+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=3$$

$$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5 \text{이므로}$$

$$x-\frac{1}{x}=-\sqrt{5} \quad \left(\because x-\frac{1}{x}<0\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3-\frac{1}{x^3} &= \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right) \\ &= (-\sqrt{5})^3+3 \cdot (-\sqrt{5}) \\ &= -8\sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 ①에서

$$\frac{x^6+x^5+x^4+x^3-x^2+x-1}{x^3}$$

$$= -8\sqrt{5}+7-\sqrt{5}+1$$

$$= 8-9\sqrt{5}$$

즉 $a=8$, $b=-9$ 이므로

$$a-b=17$$

답 ③

20 $x^4+y^4+z^4$
 $= (x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2$
 $= (x^2+y^2+z^2)^2-2\{(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\}$
 $\dots\dots \textcircled{1}$

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \text{이므로}$$

$$0=6+2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore xy+yz+zx=-3$$

이때

$$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2$$

$$= (xy+yz+zx)^2-2(xy \cdot yz+yz \cdot zx+zx \cdot xy)$$

$$= (xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$$

$$= (-3)^2-0=9$$

따라서 ①에서

$$x^4+y^4+z^4=6^2-2 \cdot 9=18$$

답 18

21 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
 $= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

이므로 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=28$ 에서

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=56$$

$\dots\dots \textcircled{1}$ → ①

$$a-b=k \text{라 하면 } b-c=2k \text{이고 } (a-b)+(b-c)=3k$$

이므로

$$a-c=3k, \text{ 즉 } c-a=-3k$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

따라서 ①에서

$$k^2+(2k)^2+(-3k)^2=56, \quad k^2=4$$

이때 $a>c$ 에서 $a-c=3k>0$ 이므로

$$k>0$$

$$\therefore k=2$$

$$\therefore a-c=3k=6$$

$\dots\dots \textcircled{3}$

답 6

채점 기준	비율
① $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
② $c-a$ 를 $a-b$ 를 이용하여 나타낼 수 있다.	40%
③ $a-c$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

22 $P(x)=(x+2)(x^2+3x-1)-4$
 $=x^3+5x^2+5x-6$

$$\begin{array}{r} x+5 \\ x^2+1 \overline{) x^3+5x^2+5x-6} \\ \underline{x^3 \quad \quad + x} \\ 5x^2+4x-6 \\ \underline{5x^2 \quad \quad + 5} \\ 4x-11 \end{array}$$

따라서 다항식 $P(x)$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 나머지는 $4x-11$ 이다. 답 ④

23 $x^4+2x^3-8x-13$
 $=P(x)(x^2+4x+12)+32x+35$

이므로

$$x^4+2x^3-40x-48=P(x)(x^2+4x+12)$$

다항식

$x^4+2x^3-40x-48$ 은
 $x^2+4x+12$ 로 나누어떨
 어진다.

$$\begin{array}{r} x^2-2x-4 \\ x^2+4x+12 \overline{) x^4+2x^3-40x-48} \\ \underline{x^4+4x^3+12x^2} \\ -2x^3-12x^2-40x-48 \\ \underline{-2x^3-8x^2-24x} \\ -4x^2-16x-48 \\ \underline{-4x^2-16x-48} \\ 0 \end{array}$$

따라서 $P(x)=x^2-2x-4$ 이므로

$$a=-2, b=-4$$

$$\therefore ab=8$$

답 8

24 $Q(x)=(x-2)x+4=x^2-2x+4$ 이므로
 $x^4-x^2+5x-2=P(x)(x^2-2x+4)-5x+2$
 $\therefore x^4-x^2+10x-4=P(x)(x^2-2x+4)$

$$\begin{array}{r} x^2+2x-1 \\ x^2-2x+4 \overline{) x^4 - x^2+10x-4} \\ \underline{x^4-2x^3+4x^2} \\ 2x^3-5x^2+10x \\ \underline{2x^3-4x^2+8x} \\ -x^2+2x-4 \\ \underline{-x^2+2x-4} \\ 0 \end{array}$$

따라서 $P(x)=x^2+2x-1$ 이므로

$$P(x)-Q(x)=(x^2+2x-1)-(x^2-2x+4) \\ =4x-5 \quad \text{답 ③}$$

25 다항식 $x^4+(a^2-a-1)x^2+(-a^2+b)x+b^3$ 을
 x^2-x-a 로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2+x+a^2 \\ x^2-x-a \overline{) x^4 + (a^2-a-1)x^2 + (-a^2+b)x + b^3} \\ \underline{x^4-x^3-ax^2} \\ x^3+(a^2-1)x^2+(-a^2+b)x \\ \underline{x^3-x^2-ax} \\ a^2x^2+(-a^2+a+b)x+b^3 \\ \underline{a^2x^2-ax} \\ (a+b)x+a^3+b^3 \end{array}$$

이때 나머지가 $2x+26$ 이므로

$$a+b=2, a^3+b^3=26$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \text{에서}$$

$$26=2^3-3ab \cdot 2$$

$$\therefore ab=-3$$

답 -3

채점 기준	비율
① 주어진 다항식을 x^2-x-a 로 나눌 수 있다.	50%
② $a+b, a^3+b^3$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	30%

26 다항식 $P(x)$ 를 $(2x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을
 $Q(x)$ 라 하면

$$8x^2+a=2(2x-1)^2+8x+a-2$$

이므로

$$\begin{aligned} P(x) &= (2x-1)^3Q(x)+8x^2+a \\ &= (2x-1)^2(2x-1)Q(x) \\ &\quad + \{2(2x-1)^2+8x+a-2\} \\ &= (2x-1)^2\{(2x-1)Q(x)+2\}+8x+a-2 \end{aligned}$$

이때 $P(x)$ 를 $(2x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가
 $bx+5$ 이므로

$$8=b, a-2=5$$

$$\therefore a=7, b=8$$

$$\therefore a+b=15$$

답 ③

$P(x)$ 를 $(2x-1)^2$ 으로
 나누었을 때의 몫은
 $(2x-1)Q(x)+2$, 나
 머지는 $8x+a-2$ 이다.

다른 풀이 다항식 $P(x)$ 를 $(2x-1)^3$ 으로 나누었을 때의
 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$P(x)=(2x-1)^3Q(x)+8x^2+a$$

이때 $(2x-1)^3Q(x)$ 는 $(2x-1)^2$ 으로 나누어떨어지므
 로 다항식 $P(x)$ 를 $(2x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는
 다항식 $8x^2+a$ 를 $(2x-1)^2$, 즉 $4x^2-4x+1$ 로 나누
 었을 때의 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 4x^2-4x+1 \overline{) 8x^2 + a} \\ \underline{8x^2-8x+2} \\ 8x+a-2 \end{array}$$

이때 $P(x)$ 를 $(2x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가
 $bx+5$ 이므로

$$8=b, a-2=5$$

$$\therefore a=7, b=8$$

내신 수학 1등급을 결정하는 사고력 통합 문제 본책 15쪽

01 $\overline{AM}=a, \overline{AB}=b$ 라 하면

$$\overline{AM}+\overline{MG}=a+\frac{2}{3}b=x+y+4$$

$$\therefore 3a+2b=3x+3y+12 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=b+2a+b=2x+3y+9 \text{이므로}$$

$$2a+2b=2x+3y+9 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠-㉡ \text{을 하면 } a=x+3$$

$$a=x+3 \text{을 } ㉠ \text{에 대입하면}$$

$$3(x+3)+2b=3x+3y+12$$

$$2b=3y+3 \quad \therefore b=\frac{3}{2}(y+1)$$

$$\therefore \triangle GBC=\frac{1}{3}\triangle MBC=\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b=\frac{1}{3}ab$$

$$=\frac{1}{3}(x+3) \cdot \frac{3}{2}(y+1)$$

$$=\frac{1}{2}(x+3)(y+1) \quad \text{답 ①}$$

02 조건 (나)에서

$$P(a, a, a)+P(b, b, b)+P(c, c, c)$$

$$=(a^2+a^2+a^2-5)+(b^2+b^2+b^2-5)+(c^2+c^2+c^2-5)$$

$$=3(a^2+b^2+c^2)-15=93$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=36 \quad \dots\dots ㉠$$

조건 (다)에서

$$P(a, 1, 1)+P(1, b, 1)+P(1, 1, c)$$

$$=(a+1+a-5)+(b+b+1-5)+(1+c+c-5)$$

$$=2(a+b+c)-12=4$$

$$\therefore a+b+c=8 \quad \dots\dots ㉡$$

한편 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 이므로

$$㉠, ㉡ \text{에서}$$

$$8^2=36+2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca=14 \quad \dots\dots ㉢$$

이때

$$P(ab, ab, ab) + P(bc, bc, bc) + P(ca, ca, ca) \\ = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

이고

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ = (ab + bc + ca)^2 - 2(ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab) \\ = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \\ = 14^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \quad (\because \textcircled{㉓}, \textcircled{㉔}) \\ = 148$$

이므로 ㉔에서

$$P(ab, ab, ab) + P(bc, bc, bc) + P(ca, ca, ca) \\ = 3 \cdot 148 - 15 = 429 \quad \text{답 429}$$

03 세 정삼각형 OAB, OCD, OEF의 한 변의 길이를 각각 a, b, c 라 하면 세 정삼각형의 둘레의 길이의 합이 36이므로

$$3a + 3b + 3c = 36$$

$$\therefore a + b + c = 12$$

세 정삼각형의 넓이의 합이 $24\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 24\sqrt{3}$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 96$$

이때 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ 에서

$$96 = 12^2 - 2(ab + bc + ca)$$

$$\therefore ab + bc + ca = 24$$

한편 $\angle BOC = \angle DOE = \angle FOA = 60^\circ$ 이므로 세 삼각형 OBC, ODE, OFA의 넓이의 합은

$$\frac{1}{2}ab \sin 60^\circ + \frac{1}{2}bc \sin 60^\circ + \frac{1}{2}ca \sin 60^\circ \\ = \frac{\sqrt{3}}{4}(ab + bc + ca) \\ = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 24 \\ = 6\sqrt{3} \quad \text{답 } 6\sqrt{3}$$

04 ㄱ. 다항식 AB 의 차수는 다항식 A 의 차수와 다항식 B 의 차수의 합과 같으므로

$$M(AB) = M(A) + M(B)$$

ㄴ. $M(A) > M(B)$ 이면 다항식 $A+B$ 의 차수는 다항식 A 의 차수와 같고, 다항식 $A+B$ 의 최고차항의 계수는 다항식 A 의 최고차항의 계수와 같으므로

$$N(A+B) = N(A)$$

ㄷ. $M(A+B) \neq M(A), M(A+B) \neq M(B)$ 이면

$$M(A) = M(B) \text{이고 } N(A) + N(B) = 0$$

즉 $N(B) = -N(A)$ 이므로 $N(A) = a$ (a 는 0이 아닌 실수)라 하면

$$N(AB) = N(A)N(B) \\ = a \cdot (-a) = -a^2$$

따라서 $|N(AB)| = 9$ 에서

$$|-a^2| = 9 \quad \therefore |a| = 3$$

$\angle BOC, \angle FOE$ 는 맞꼭지각이므로

$$\angle BOC = \angle FOE \\ = 60^\circ$$

같은 방법으로 하면

$$\angle DOE = 60^\circ, \\ \angle FOA = 60^\circ$$

두 변의 길이가 a, b 이고 그 끼인각의 크기가 θ 인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab \sin \theta \\ (\text{단, } 0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

정육면체의 모서리의 개수는 12이다.

다항식 AB 의 최고차항의 계수는 다항식 A 의 최고차항의 계수와 다항식 B 의 최고차항의 계수의 곱과 같다.

$$\therefore |N(A)| + |N(B)| = |a| + |-a| \\ = 2|a| = 6$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

등급 비밀노트

888

(i) $M(A) > M(B)$ 이면 $M(A+B) = M(A)$

(ii) $M(A) < M(B)$ 이면 $M(A+B) = M(B)$

(iii) $M(A) = M(B)$ 이고 $N(A) + N(B) \neq 0$ 이면

$$M(A+B) = M(A) = M(B)$$

(iv) $M(A) = M(B)$ 이고 $N(A) + N(B) = 0$ 이면

$$M(A+B) < M(A), M(A+B) < M(B)$$

이상에서 $M(A+B) \neq M(A), M(A+B) \neq M(B)$ 이면

$M(A) = M(B)$ 이고 $N(A) + N(B) = 0$ 임을 알 수 있다.

05 [그림 2]의 4개의 정육면체의 부피의 합은

$$2x^3 + 2y^3 = 2(x^3 + y^3) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

[그림 1]의 5개의 직사각형의 넓이의 합은

$$xy + 2(x^2 + y^2)$$

이고 [그림 2]의 4개의 정육면체의 겉넓이의 합은

$$2 \cdot 6x^2 + 2 \cdot 6y^2 = 12(x^2 + y^2)$$

이므로

$$12(x^2 + y^2) = \frac{36}{7} \{xy + 2(x^2 + y^2)\}$$

에서 $7(x^2 + y^2) = 3xy + 6(x^2 + y^2)$

$$\therefore x^2 + y^2 = 3xy \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

한편 [그림 2]의 4개의 정육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 240이므로

$$2 \cdot 12x + 2 \cdot 12y = 240, \quad 24(x + y) = 240$$

$$\therefore x + y = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉓}$$

㉑에서 $(x+y)^2 - 2xy = 3xy$ 이므로

$$(x+y)^2 = 5xy, \quad 10^2 = 5xy \quad (\because \textcircled{㉓})$$

$$\therefore xy = 20$$

따라서

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ = 10^3 - 3 \cdot 20 \cdot 10 = 400$$

이므로 ㉑에서 구하는 합은

$$2(x^3 + y^3) = 2 \cdot 400 = 800$$

답 800

02 나머지 정리와 인수분해

개념 & 핵심 기출

본책 16쪽

01 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$ax^4 + (-6a+b)x^2 + 9a-b+c = x^4 - 5x^2 + 12$$

위의 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=1, -6a+b=-5, 9a-b+c=12$$

$$\therefore a=1, b=1, c=4$$

$$\therefore a+b+c=6$$

답 6

다른 풀이 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 양변에 $x^2=2$ 를 대입하면

$$a+b+c=2^2-5\cdot 2+12=6$$

비밀노트

주어진 등식은 차수가 짝수인 항과 상수항으로만 이루어진 항등식
이므로 양변에 $x^2=2$ 를 대입하여 좌변이 $a+b+c$ 가 되게 한 후
등식이 성립함을 이용할 수도 있다.

02 주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$6=2b \quad \therefore b=3$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$4-9+6=-c \quad \therefore c=-1$$

주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$16-18+6=2a \quad \therefore a=2$$

$$\therefore abc=-6$$

답 -6

03 x^3+2x^2+ax+b

$$=(x+2)^2(x+c)+2$$

$$=(x^2+4x+4)(x+c)+2$$

$$=x^3+(c+4)x^2+(4c+4)x+4c+2$$

위의 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$c+4=2, 4c+4=a, 4c+2=b$$

$$\therefore a=-4, b=-6, c=-2$$

따라서 $P(x)=x^3+2x^2-4x-6$ 이므로

$$P(c+3)=P(1)$$

$$=1+2-4-6$$

$$=-7$$

답 ①

04 $P(x)$ 를 x^2-2x-3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$$

$$=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$$

이때 나머지 정리에 의하여 $P(-1)=3, P(3)=23$ 이므로

$$-a+b=3, 3a+b=23$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=5, b=8$$

따라서 구하는 나머지는 $5x+8$ 이다.

답 ④

$P(x)$ 는 $x-1, x-3$ 으로
로 각각 나누어떨어진다.

05 $P(1)=P(3)=0$ 이므로 $P(x)=a(x-1)(x-3)$
(a 는 0이 아닌 상수)이라 하면

$$\frac{P(6)}{P(4)} = \frac{a \cdot 5 \cdot 3}{a \cdot 3 \cdot 1} = \frac{15a}{3a} = 5$$

답 5

06 주어진 조립제법을

완성하면 오른쪽과 같으

므로

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -3 & 1 & 2 \\ & & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{4} \\ \hline & 4 & -5 & \frac{7}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$4x^3-3x^2+x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^2-5x+\frac{7}{2}\right)+\frac{1}{4}$$

$$= (2x+1)\left(2x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{4}$$

따라서 $a=\frac{7}{2}$ 이고, 몫의 상수항은 $\frac{7}{4}$ 이므로 구하는 합은

$$\frac{7}{2} + \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$$

답 $\frac{21}{4}$

07 $(n+3)^3+3(n+3)^2+3(n+3)+1$

$$= \{(n+3)+1\}^3 = (n+4)^3$$

이므로 $(n+4)^3 \leq 1000$ 에서

$$n+4 \leq 10 \quad \therefore n \leq 6$$

따라서 자연수 n 은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$$1+2+3+4+5+6=21$$

답 ③

08 $27x^3-64y^6=(3x)^3-(4y^2)^3$

$$=(3x-4y^2)(9x^2+12xy^2+16y^4)$$

이므로 $27x^3-64y^6$ 의 인수 중에서 $9x^2+pxy^2+qy^4$ 이 될
수 있는 것은 $9x^2+12xy^2+16y^4$ 이다.

따라서 $p=12, q=16$ 이므로

$$p+q=28$$

답 28

09 $\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2+ab+b^2} = \frac{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}$

$$=a^2-ab+b^2$$

이므로 $a^2-ab+b^2=4$

$$\therefore a^2+b^2=ab+4=4+4=8$$

답 ④

10 $x^2+5x=X$ 로 놓으면

$$(주어진 식)=(X+4)(X+6)-24$$

$$=X^2+10X$$

$$=X(X+10)$$

$$=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$$

$$=x(x+5)(x^2+5x+10)$$

따라서 $a=5, b=5, c=10$ 이므로

$$a+b+c=20$$

답 ①

11 $x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2$

$$=(x^2+3)^2-(2x)^2$$

$$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$$

따라서

$$P(x)=x^2+2x+3, Q(x)=x^2-2x+3$$

$$\text{또는 } P(x)=x^2-2x+3, Q(x)=x^2+2x+3$$

다항식을 이차식으로 나
누었을 때의 나머지는 상
수이거나 일차식이므로
 $ax+b$ (a, b 는 상수)로
놓는다.

일품 BOX

이므로

$$P(1)+Q(1)=8$$

답 ②

1등급 비밀노트

복이차식에서 완전제곱식 꼴을 만들 때, x^4 항과 상수항을 기준으로 생각한다. 즉

$$\begin{aligned} x^4+2x^2+9 &= \{(x^2)^2 + \square x^2 + 3^2\} - \triangle x^2 \\ \text{에서 } \square &= 2 \cdot 3 = 6 \text{ 이어야 하므로} \\ 2 &= 6 - \triangle \quad \therefore \triangle = 4 \\ \text{따라서 주어진 식은 } (x^4+6x^2+9) - 4x^2 &\text{으로 나타낼 수 있다.} \end{aligned}$$

12 $x^4-13x^2y^2+36y^4$

$$\begin{aligned} &= (x^4-12x^2y^2+36y^4) - x^2y^2 \\ &= (x^2-6y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= (x^2+xy-6y^2)(x^2-xy-6y^2) \\ &= (x+3y)(x-2y)(x+2y)(x-3y) \end{aligned}$$

따라서 네 일차식의 합은

$$(x+3y)+(x-2y)+(x+2y)+(x-3y)=4x$$

답 4x

다른 풀이 $x^2=X, y^2=Y$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} x^4-13x^2y^2+36y^4 &= X^2-13XY+36Y^2 \\ &= (X-4Y)(X-9Y) \\ &= (x^2-4y^2)(x^2-9y^2) \\ &= (x+2y)(x-2y)(x+3y)(x-3y) \end{aligned}$$

13 $x^2-xy-6y^2-x+8y-2$

$$\begin{aligned} &= x^2-(y+1)x-(6y^2-8y+2) \\ &= x^2-(y+1)x-2(y-1)(3y-1) \\ &= (x+2y-2)(x-3y+1) \end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=-3$ 이므로

$$a-b=5$$

답 5

14 $a(a^2-bc)+b(c^2-ab)+c(b^2-ac)$

$$\begin{aligned} &= a^3-abc+bc^2-ab^2+b^2c-ac^2 \\ &= (c-a)b^2+c(c-a)b-a(c^2-a^2) \\ &= (c-a)\{b^2+cb-a(c+a)\} \\ &= (c-a)(b-a)(b+c+a) \\ &= (a-b)(a-c)(a+b+c) \end{aligned}$$

답 ②

15 $ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$

$$\begin{aligned} &= a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^2a+ca^2 \\ &= (b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c) \\ &= (b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\} \\ &= (b+c)(a+b)(a-c)=0 \end{aligned}$$

그런데 $a+b>0, b+c>0$ 이므로

$$a-c=0 \quad \therefore a=c$$

따라서 주어진 삼각형은 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ②

$$\begin{aligned} P(1)&=6, Q(1)=2 \\ \text{또는 } P(1)&=2, \\ Q(1)&=6 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$P(x)$ 의 최고차항의 계수가 1, 상수항이 6이므로 $P(a)=0$ 인 a 의 값은 $\pm(6$ 의 약수) 중에서 찾는다.

$$\begin{aligned} x^4-1 &= (x^2+1)(x^2-1) \\ &= (x^2+1)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1 \cdot 2(y-1) \rightarrow 2y-2 \\ 1 \cdot -(3y-1) \rightarrow -3y+1 \\ \hline -y-1 \end{array}$$

삼각형의 세 변의 길이는 양수이므로
 $a>0, b>0, c>0$
 $\therefore a+b>0,$
 $b+c>0$

16 $P(-1)=0$ 이므로 오 른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(x^2-5x+6) \\ &= (x+1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

즉 $P(-1)=P(2)=P(3)=0$ 이므로

$$a=-1 \text{ 또는 } a=2 \text{ 또는 } a=3 \quad \dots\dots ㉠$$

$Q(1)=0$ 이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $Q(x)$ 를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-1)(x^2+x-6) \\ &= (x-1)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

즉 $Q(-3)=Q(1)=Q(2)=0$ 이므로

$$a \neq -3, a \neq 1, a \neq 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 a 는 $-1, 3$ 이므로 구하는 합은

$$-1+3=2$$

답 ②

17 $x-1$ 이 $P(x)=ax^4+bx^3+cx-a$ 의 인수이므로

$$P(1)=a+b+c-a=0$$

$$\therefore c=-b$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x) &= ax^4+bx^3-bx-a \\ &= a(x^4-1)+bx(x^2-1) \\ &= a(x^2+1)(x+1)(x-1) \\ &\quad +bx(x+1)(x-1) \\ &= (x+1)(x-1)(ax^2+bx+a) \end{aligned}$$

따라서 항상 $P(x)$ 의 인수인 것은 ②이다.

답 ②

18 $V(x)=x^3+x^2-8x-12$ 라 하자.

$V(-2)=0$ 이므로 오 른 쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $V(x)$ 를 인수분 해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= (x+2)(x^2-x-6) \\ &= (x+2)^2(x-3) \end{aligned}$$

이때 $V(x)=\{P(x)\}^2Q(x)$ 이므로

$$P(x)=x+2, Q(x)=x-3$$

$$\therefore Q(10)=10-3=7$$

답 7

1등급을 위한 고난도 문제

본책 19쪽

01 $\frac{x^2+ax+b}{3x^2+2bx+9}=k$ (k 는 상수)라 하면

$$x^2+ax+b=3kx^2+2bkx+9k$$

위의 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$1=3k, a=2bk, b=9k$$

$$\therefore k=\frac{1}{3}, a=2, b=3$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

02 주어진 등식의 양변에

$x=1$ 을 대입하면

$$-1=a_{10}+a_9+a_8+a_7+\cdots+a_1+a_0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$x=-1$ 을 대입하면

$$1=a_{10}-a_9+a_8-a_7+\cdots-a_1+a_0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}-\textcircled{㉡}$ 을 하면

$$-2=2(a_9+a_7+a_5+a_3+a_1)$$

$$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-1 \quad \text{답 ①}$$

03 $x-2y=-1$, 즉 $x=2y-1$ 이므로

$$ax^2+bxy+cy^2$$

$$=a(2y-1)^2+b(2y-1)y+cy^2$$

$$=a(4y^2-4y+1)+b(2y^2-y)+cy^2$$

$$=(4a+2b+c)y^2+(-4a-b)y+a \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 $(4a+2b+c)y^2+(-4a-b)y+a=2$ 가 y 에 대한 항등식이므로

$$4a+2b+c=0, -4a-b=0, a=2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore a=2, b=-8, c=8 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore a-b+c=18 \quad \text{답 18}$$

채점 기준	비율
① $ax^2+bxy+cy^2$ 을 y 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
② a, b, c 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $a-b+c$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

04 $b_3(x+1)^3+b_2(x+1)^2+b_1(x+1)+b_0$

$$=b_3(x^3+3x^2+3x+1)+b_2(x^2+2x+1)$$

$$+b_1(x+1)+b_0$$

$$=b_3x^3+(3b_3+b_2)x^2+(3b_3+2b_2+b_1)x$$

$$+b_3+b_2+b_1+b_0$$

이고 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a_3=b_3, a_2=3b_3+b_2, a_1=3b_3+2b_2+b_1,$$

$$a_0=b_3+b_2+b_1+b_0$$

이때 $a_1-a_2=2$ 이므로

$$(3b_3+2b_2+b_1)-(3b_3+b_2)=2$$

$$\therefore b_2+b_1=2$$

또 $a_0=8$ 에서 $b_3+b_2+b_1+b_0=8$ 이므로

$$b_0+b_3=8-(b_2+b_1)$$

$$=8-2=6 \quad \text{답 6}$$

05 $P(x)$ 를 x^3+1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^3+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

$$=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

$\cdots \textcircled{㉠}$

이때 $P(x)$ 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지가 $3x-5$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 에서

$$P(x)=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)$$

$$+a(x^2-x+1)+3x-5 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$P(x)$ 를 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$ 이다.

또 $P(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지가 -2 , 즉

$$P(-1)=-2 \text{이므로 } \textcircled{㉡} \text{에서}$$

$$3a-8=-2 \quad \therefore a=2$$

따라서 구하는 나머지는

$$2(x^2-x+1)+3x-5=2x^2+x-3$$

$$\text{답 } 2x^2+x-3$$

💡 비밀노트

$\textcircled{㉠}$ 에서 $(x+1)(x^2-x+1)Q(x)$ 는 x^2-x+1 로 나누어떨어지므로 ax^2+bx+c 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지가 $3x-5$ 이어야 한다. 이때 $\textcircled{㉡}$ 에서

$$P(x)=(x^2-x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}+3x-5$$

이므로 $P(x)$ 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 몫은 $(x+1)Q(x)+a$ 이다.

06 $P(x)$ 를 $(x-1)(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+2x-7$$

ㄱ. $P(x)+5$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$P(1)+5=2 \cdot 1-7+5=0$$

이므로 $P(x)+5$ 는 $x-1$ 로 나누어떨어진다.

ㄴ. $P(x-1)$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-1-1)=P(-2)$$

$$=2 \cdot (-2)-7=-11$$

ㄷ. $xP\left(\frac{1}{2}x\right)$ 를 $x+4$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$-4P\left(\frac{1}{2} \cdot (-4)\right)=-4P(-2)$$

$$=-4 \cdot (-11)=44$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & a & b & c & & \\ & & 2 & -2 & -4 & & \\ \hline & 1 & a+2 & b-2 & c-4 & 1 & \end{array}$$

$$2(a+2)=-2 \text{에서 } a=-3$$

$$2(b-2)=-4 \text{에서 } b=0$$

$$c-4=1 \text{에서 } c=5$$

$$\therefore ax^2+bx+c=-3x^2+5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

오른쪽 조립제법에서 $-3x^2+5$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫은

$-3x+3$ 이다. 답 $-3x+3$

채점 기준	비율
① ax^2+bx+c 를 구할 수 있다.	70%
② ax^2+bx+c 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 구할 수 있다.	30%

08 $P(-1)=P(1)=P(2)=k$ 에서

$$P(-1)-k=0, P(1)-k=0, P(2)-k=0$$

이고, $P(x)$ 는 x^3 의 계수가 1인 삼차식이므로

$$P(x)-k=(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+k$$

일품 BOX

한편 $P(x)$ 를 $Q(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 $x+a$ (a 는 상수)라 하면 나머지는 k 이므로

$$P(x)=Q(x)(x+a)+k$$

따라서

$$(x+1)(x-1)(x-2)+k=Q(x)(x+a)+k$$

이므로

$$(x+1)(x-1)(x-2)=Q(x)(x+a)$$

$$\therefore Q(x)=(x+1)(x-1)$$

$$\text{또는 } Q(x)=(x+1)(x-2)$$

$$\text{또는 } Q(x)=(x-1)(x-2)$$

$$\therefore Q(3)=4 \cdot 2=8$$

$$\text{또는 } Q(3)=4 \cdot 1=4$$

$$\text{또는 } Q(3)=2 \cdot 1=2$$

즉 $Q(3)$ 의 최댓값은 8이다. 답 ④

09 $9x^2+y^2+6xy+12x+4y+4=(3x+y+2)^2$

이므로 주어진 등식에서

$$(3x+y+2)^2=121$$

이때 $x>0, y>0$ 에서 $3x+y+2>0$ 이므로

$$3x+y+2=11, \quad 3x+y=9$$

$$\therefore x+\frac{y}{3}=3$$

답 ⑤

10 두 정육면체의 부피의 차이가 7이므로

$$a^3-b^3=7$$

$$\therefore (a-b)(a^2+ab+b^2)=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 정육면체의 한 면의 둘레의 길이의 차이가 4이므로

$$4a-4b=4 \quad \therefore a-b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$a^2+ab+b^2=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 7

채점 기준	비율
① 부피의 차를 이용하여 a, b 에 대한 식을 세우고, 인수분해 할 수 있다.	40%
② 한 면의 둘레의 길이의 차를 이용하여 a, b 에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
③ a^2+ab+b^2 의 값을 구할 수 있다.	20%

11 $a^3+3ab^2=104 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$b^3+3a^2b=-112 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

①+②을 하면

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-8$$

$$(a+b)^3=-8$$

$$\therefore a+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①-②을 하면

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=216$$

$$(a-b)^3=216$$

$$\therefore a-b=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③, ④을 연립하여 풀면

$$a=2, b=-4$$

$$\therefore ab=-8$$

답 ②

x^3 의 계수가 1인 삼차식을
 x^2 의 계수가 1인 이차식으로
나누었을 때의 몫은 x
의 계수가 1인 일차식이다.

$x-y=0, y-z=0,$
 $z-x=0$ 이므로
 $x=y=z$

a, b 는 양수이고 $a>b$ 이
므로
 $a^3>b^3$

12 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ 에서

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$$

$$\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$$

$$\therefore (x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$$

ㄱ. $x+y+z \neq 0$ 이면

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$$

ㄴ. $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ 이면 $x-y \neq 0, y-z \neq 0, z-x \neq 0$ 이므로

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \neq 0$$

$$\therefore x+y+z=0$$

ㄷ. 삼각형의 세 변의 길이가 x, y, z 이면 $x+y+z>0$ 이므로

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$$

따라서 $x=y=z$ 이므로 정삼각형이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

13 $(x+\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})(x+5\sqrt{3})(x+6\sqrt{3})+a$

$$=\{(x+\sqrt{3})(x+6\sqrt{3})\}\{(x+2\sqrt{3})(x+5\sqrt{3})\}+a$$

$$=(x^2+7\sqrt{3}x+18)(x^2+7\sqrt{3}x+30)+a$$

$x^2+7\sqrt{3}x=X$ 로 놓으면 위의 식은

$$(X+18)(X+30)+a$$

$$=X^2+48X+540+a$$

$$=(X+24)^2-36+a$$

$$=(x^2+7\sqrt{3}x+24)^2-36+a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 ①이 이차식의 제곱이 되려면

$$-36+a=0$$

$$\therefore a=36$$

답 36

14 $x^4-x^2+16=(x^4+8x^2+16)-9x^2$

$$=(x^2+4)^2-(3x)^2$$

$$=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)$$

즉 $Q(x)=x^2+3x+4$ 이므로

$$Q(x^2)=x^4+3x^2+4$$

$$=(x^4+4x^2+4)-x^2$$

$$=(x^2+2)^2-x^2$$

$$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$$

따라서 $Q(x^2)$ 의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

15 $(x+y)^2(x-y)^2-18(x^2+y^2)+81$

$$=(x^2-y^2)^2-18(x^2+y^2)+81$$

$$=(x^2+y^2)^2-18(x^2+y^2)+81-4x^2y^2$$

$$=\{(x^2+y^2)-9\}^2-(2xy)^2$$

$$=(x^2+y^2+2xy-9)(x^2+y^2-2xy-9)$$

$$=\{(x+y)^2-3^2\}\{(x-y)^2-3^2\}$$

$$=(x+y+3)(x+y-3)(x-y+3)(x-y-3)$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

다른 풀이 $x+y=a$, $x-y=b$ 라 하고 두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{1}{2}(a^2+b^2) \\ \therefore (x+y)^2(x-y)^2-18(x^2+y^2)+81 \\ &= a^2b^2-9(a^2+b^2)+81 \\ &= a^2b^2-9a^2-9b^2+81 \\ &= a^2(b^2-9)-9(b^2-9) \\ &= (a^2-9)(b^2-9) \\ &= (a+3)(a-3)(b+3)(b-3) \\ &= (x+y+3)(x+y-3)(x-y+3)(x-y-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{1}{4}(a+b)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(a-b)^2 \\ &= \frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2) \\ &\quad + \frac{1}{4}(a^2-2ab+b^2) \\ &= \frac{1}{2}(a^2+b^2) \end{aligned}$$

16 $x^4 - \frac{m^2+n^2}{2}x^2 + \left(\frac{m^2-n^2}{4}\right)^2$

$$\begin{aligned} &= \left[x^2 - \frac{(m+n)^2}{4}\right] \left[x^2 - \frac{(m-n)^2}{4}\right] \\ &= \left(x + \frac{m+n}{2}\right) \left(x - \frac{m+n}{2}\right) \\ &\quad \times \left(x + \frac{m-n}{2}\right) \left(x - \frac{m-n}{2}\right) \end{aligned}$$

따라서 위의 식을 두 이차식의 곱으로 나타내면

$$\begin{aligned} &\left\{x^2 - \frac{(m+n)^2}{4}\right\} \left\{x^2 - \frac{(m-n)^2}{4}\right\}, \\ &\left\{\left(x + \frac{m+n}{2}\right) \left(x - \frac{m+n}{2}\right)\right\} \\ &\quad \times \left\{\left(x + \frac{m-n}{2}\right) \left(x - \frac{m-n}{2}\right)\right\} \\ &= \left(x^2 + mx + \frac{m^2-n^2}{4}\right) \left(x^2 - mx + \frac{m^2-n^2}{4}\right), \\ &\left\{\left(x + \frac{m+n}{2}\right) \left(x - \frac{m-n}{2}\right)\right\} \\ &\quad \times \left\{\left(x - \frac{m+n}{2}\right) \left(x + \frac{m-n}{2}\right)\right\} \\ &= \left(x^2 + nx - \frac{m^2-n^2}{4}\right) \left(x^2 - nx - \frac{m^2-n^2}{4}\right) \end{aligned}$$

이차식 $A(x)$ 의 상수항이 4이고 $m > n > 0$ 에서 $\frac{m^2-n^2}{4} > 0$ 이므로

$$\frac{m^2-n^2}{4} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차식 $C(x)$ 의 x 의 계수가 3이므로

$$n=3 \quad (\because n > 0)$$

$n=3$ 을 ①에 대입하면

$$\frac{m^2-9}{4} = 4, \quad m^2=25$$

$$\therefore m=5 \quad (\because m > 0)$$

$$\therefore m+n=8$$

x 의 계수: 0,
상수항: $-\frac{(m+n)^2}{4}$

x 의 계수: 0,
상수항: $-\frac{(m-n)^2}{4}$

x 의 계수: m ,
상수항: $\frac{m^2-n^2}{4}$

x 의 계수: $-m$,
상수항: $\frac{m^2-n^2}{4}$

x 의 계수: n ,
상수항: $-\frac{m^2-n^2}{4}$

x 의 계수: $-n$,
상수항: $-\frac{m^2-n^2}{4}$

$(x^2+ax-3)-y^2+by$
에서 $x^2+ax-30|$
 $(x-1)(x+3)$
또는 $(x-3)(x+1)$
로 인수분해되어야 함을
이용하여 풀 수도 있다.

채점 기준	비율
① 주어진 식을 인수분해 할 수 있다.	30%
② m, n 의 값을 구할 수 있다.	60%
③ $m+n$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

17 $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+1}=\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{c^2+1}$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned} (a^2+b^2)(a^2+1) &= (b^2+c^2)(c^2+1) \\ a^4+a^2+b^2a^2+b^2 &= b^2c^2+b^2+c^4+c^2 \\ (a^2-c^2)b^2+a^4-c^4+a^2-c^2 &= 0 \\ (a^2-c^2)b^2+(a^2+c^2)(a^2-c^2)+a^2-c^2 &= 0 \\ (a^2-c^2)(a^2+b^2+c^2+1) &= 0 \\ \therefore (a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2+1) &= 0 \end{aligned}$$

이때 $a+c > 0$, $a^2+b^2+c^2+1 > 0$ 이므로

$$a-c=0 \quad \therefore a=c$$

따라서 주어진 삼각형은 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

☐ $a=c$ 인 이등변삼각형

채점 기준	비율
① 양변을 제곱한 후 인수분해 할 수 있다.	70%
② 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	30%

18 $a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$

$$\begin{aligned} &= a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2 \\ &= a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c) \\ &= (a-b-c)a^2-(b^2+c^2)a+(b^2+c^2)(b+c) \\ &= (a-b-c)a^2-(a-b-c)(b^2+c^2) \\ &= (a-b-c)(a^2-b^2-c^2) \end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ②이다.

19 $2x^2-y^2-xy+3x+9y-20$

$$\begin{aligned} &= 2x^2-(y-3)x-(y^2-9y+20) \\ &= 2x^2-(y-3)x-(y-4)(y-5) \\ &= (2x+y-5)(x-y+4) \end{aligned}$$

즉 $(2x+y-5)(x-y+4)=0$ 이므로

$$2x+y-5=0 \quad \text{또는} \quad x-y+4=0$$

이때 $x \geq y$ 에서 $x-y \geq 0$ 이므로

$$x-y+4 \neq 0$$

따라서 $2x+y-5=0$ 이므로

$$2x+y=5$$

☐ 5

채점 기준	비율
① 주어진 등식의 좌변을 인수분해 할 수 있다.	60%
② $2x+y$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

20 $x^2+ax-y^2+by-3=x^2+ax-(y^2-by+3)$ 에서 y^2-by+3 은

$$(y+1)(y+3) \quad \text{또는} \quad (y-1)(y-3)$$

으로 인수분해 되어야 하므로

$$b=-4 \quad \text{또는} \quad b=4$$

(i) $b=-4$ 일 때,

$$x^2+ax-(y^2+4y+3)=x^2+ax-(y+1)(y+3)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ (주어진 식)} &= \{x-(y+1)\}\{x+(y+3)\} \\ &= x^2+2x-(y+1)(y+3) \end{aligned}$$

$$\therefore a=2$$

$$\textcircled{\text{ii}} \text{ (주어진 식)} = \{x+(y+1)\}\{x-(y+3)\} \\ = x^2 - 2x - (y+1)(y+3)$$

$$\therefore a=-2$$

(ii) $b=4$ 일 때,

$$x^2 + ax - (y^2 - 4y + 3) = x^2 + ax - (y-1)(y-3)$$

$$\textcircled{\text{i}} \text{ (주어진 식)} = \{x-(y-1)\}\{x+(y-3)\} \\ = x^2 - 2x - (y-1)(y-3)$$

$$\therefore a=-2$$

$$\textcircled{\text{ii}} \text{ (주어진 식)} = \{x+(y-1)\}\{x-(y-3)\} \\ = x^2 + 2x - (y-1)(y-3)$$

$$\therefore a=2$$

(i), (ii)에서 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(2, -4), (-2, -4), (-2, 4), (2, 4)$$

이므로 $a+b$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-2, -6, 2, 6$ 이다. 답 ④

21 $P(x) = 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ 이라 하면

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0, P\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{2} & 6 & 5 & 4 & -2 & -1 \\ & & 3 & 4 & 4 & 1 \\ \hline -\frac{1}{3} & 6 & 8 & 8 & 2 & 0 \\ & & -2 & -2 & -2 & \\ \hline & 6 & 6 & 6 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)(6x^2 + 6x + 6) \\ = (2x-1)(3x+1)(x^2+x+1) \quad \text{답 ④}$$

22 $P(1)=0, P(-3)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 5 & -1 & -17 & 12 \\ & & 1 & 6 & 5 & -12 \\ \hline -3 & 1 & 6 & 5 & -12 & 0 \\ & & -3 & -9 & 12 & \\ \hline & 1 & 3 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-1)(x+3)(x^2+3x-4) \\ = (x-1)^2(x+3)(x+4) \quad \text{답 ①}$$

따라서

$$P(21) = 20^2 \cdot 24 \cdot 25 = 24 \cdot 10^4$$

이므로 $n=24$ 답 24

채점 기준	비율
① $P(x)$ 를 인수분해 할 수 있다.	80%
② 자연수 n 의 값을 구할 수 있다.	20%

23 $P(x) = 2x^3 + ax^2 + (-2a-2)x - 12$ 라 하면 $P(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & a & -2a-2 & -12 \\ & & 4 & 2a+8 & 12 \\ \hline & 2 & a+4 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-2)\{2x^2 + (a+4)x + 6\}$$

이때 $2x^2 + (a+4)x + 6 = (2x+p)(x+q)$ (p, q 는 정수)라 하면

$$2x^2 + (a+4)x + 6 = 2x^2 + (p+2q)x + pq$$

$$\therefore a+4 = p+2q, 6 = pq$$

$6=pq$ 를 만족시키는 정수 p, q 의 순서쌍 (p, q) 는

$$(-1, -6), (-2, -3), (-3, -2), (-6, -1), \\ (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$$

따라서 $p+2q$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 13, -13이고

$$a = p+2q-4 \text{이므로}$$

$$M = 13-4=9, m = -13-4=-17$$

$$\therefore M-m=26 \quad \text{답 26}$$

24 조건 ㉠에서 $P(-1)+Q(-1)=0$ 이고 조건 ㉡에서 $Q(-1)=0$ 이므로

$$P(-1)=0$$

또 $P(x)$ 는 x^3 의 계수가 1인 삼차식이고 조건 ㉡에서 $P(-3)=P(-2)=0$ 이므로

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \quad \text{답 ①}$$

한편 $Q(x)$ 는 x^3 의 계수가 1인 삼차식이고 조건 ㉡에서 $Q(-2)=Q(-1)=0$ 이므로

$$Q(x) = (x+1)(x+2)(x-a) \quad (a \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$P(x)+Q(x)$$

$$= (x+1)(x+2)(x+3) + (x+1)(x+2)(x-a)$$

$$= (x+1)(x+2)\{(x+3) + (x-a)\}$$

$$= 2(x+1)(x+2)\left(x - \frac{a-3}{2}\right)$$

이때 $P(x)+Q(x)=0$ 을 만족시키는 실수 x 의 값이 -2와 -1뿐이므로

$$\frac{a-3}{2} = -2 \text{ 또는 } \frac{a-3}{2} = -1$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\therefore Q(x) = (x+1)^2(x+2)$$

$$\text{또는 } Q(x) = (x+1)(x+2)(x-1)$$

한편 $Q(0) < 0$ 이므로

$$Q(x) = (x+1)(x+2)(x-1) \quad \text{답 ②}$$

$$\therefore Q(2) = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12 \quad \text{답 ③}$$

답 12

채점 기준	비율
① $P(x)$ 를 구할 수 있다.	30%
② $Q(x)$ 를 구할 수 있다.	50%
③ $Q(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

25 $P(2x+1)=16P(x+1)$ ㉠

$x=0$ 을 ㉠의 양변에 대입하면 $P(1)=16P(1)$

$\therefore P(1)=0$

따라서 사차식 $P(x)$ 를

$P(x)=(x-1)^n Q(x)$

($n=1, 2, 3, 4$, $Q(x)$ 는 다항식, $Q(1) \neq 0$)

라 하면 ㉠에서

$2^n x^n Q(2x+1)=16x^n Q(x+1)$

$\therefore x^n \{2^n Q(2x+1)-16Q(x+1)\}=0$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$2^n Q(2x+1)-16Q(x+1)=0$

$x=0$ 을 위의 등식의 양변에 대입하면

$2^n Q(1)-16Q(1)=0$

$2^n=16 (\because Q(1) \neq 0)$

$\therefore n=4$

그런데 $P(x)=(x-1)^4 Q(x)$ 에서 $P(x)$ 는 사차식이므로 $Q(x)$ 는 0이 아닌 상수이어야 한다.

따라서 $P(x)=a(x-1)^4$ ($a \neq 0$)이라 하면 조건 ㉠에서

$a \cdot 2^4=32 \quad \therefore a=2$

즉 $P(x)=2(x-1)^4$ 이므로

$P(4)=2 \cdot 3^4=162$

답 ④

내신 + 수능

1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 23쪽

01 $P(x)=ax^2+bx+1$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$\{P(x)\}^2=(ax^2+bx+1)^2$

$=a^2x^4+2abx^3+(b^2+2a)x^2+2bx+1,$

$P(x^2)+2x^2=a(x^2)^2+bx^2+1+2x^2$

$=ax^4+(b+2)x^2+1$

이때 $\{P(x)\}^2=P(x^2)+2x^2$ 이 x 에 대한 항등식이므로

$a^2=a, 2ab=0, b^2+2a=b+2, 2b=0$

$\therefore a=1, b=0$

$\therefore P(x)=x^2+1$

따라서

$\{P(x)\}^3=(x^2+1)^3=x^6+3x^4+3x^2+1$

이므로 x^2 의 계수는 3이다.

답 3

02 $\{P(x)\}^{2000}=\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2000}, P(x^2)=\frac{x^2-1}{2}$ 이므로

$\{P(x)\}^{2000}$ 을 $P(x^2)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

$R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2000}=\frac{x^2-1}{2}Q(x)+ax+b$

$=\frac{(x+1)(x-1)}{2}Q(x)+ax+b$

..... ㉠

$x=-1, x=1$ 을 각각 ㉠의 양변에 대입하면

$1=-a+b, 0=a+b$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$

따라서 $R(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 이므로

$R(-5)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

답 3

03 $P(1)=P(5)=k$ (k 는 상수)라 하면

$P(1)-k=0, P(5)-k=0$

$P(x)$ 의 x^2 의 계수를 m (m 은 0이 아닌 상수)이라 하면

$P(x)-k=m(x-1)(x-5)$

$\therefore P(x)=m(x-1)(x-5)+k$

$P(x)$ 를 $x-2$ 와 $2x+a$ 로 나누었을 때의 나머지가 같으므로

$P(2)=P\left(-\frac{a}{2}\right)$

$-3m+k=m\left(-\frac{a}{2}-1\right)\left(-\frac{a}{2}-5\right)+k$

$m\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{a}{2}+5\right)=-3m$

이때 $m \neq 0$ 이므로

$\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{a}{2}+5\right)=-3$

$a^2+12a+32=0, (a+8)(a+4)=0$

$\therefore a=-8$ 또는 $a=-4$

$a=-4$ 이면

$P(x)=(2x-4)Q_2(x)+R_2$

$= (x-2)2Q_2(x)+R_1$

$R_1=R_2$

이고 $P(x)=(x-2)Q_1(x)+R_1$ 이므로

$2Q_2(x)=Q_1(x) \quad \therefore Q_2(x)=\frac{1}{2}Q_1(x)$

그런데 $Q_2(x) \neq \frac{1}{2}Q_1(x)$ 이므로 $a \neq -4$

$\therefore a=-8$

답 -8

참고 $a=-8$ 이면

$P(x)=(2x-8)Q_2(x)+R_2$

$= (x-4)2Q_2(x)+R_1$

이고 $P(x)=(x-2)Q_1(x)+R_1$ 이므로

$Q_2(x) \neq \frac{1}{2}Q_1(x)$

04 $A(1)B(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여

$A(x)B(x)$ 를 인수분해 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ & & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 & -1 & \\ 1 & 1 & -1 & & & 0 \end{array}$$

$\therefore A(x)B(x)=(x-1)^2(x^2+x-1)$

이때 $A(x)+B(x)$ 는 삼차식이고 $m < n$ 이므로

$$A(x)=x-1,$$

$$B(x)=(x-1)(x^2+x-1)=x^3-2x+1$$

$\{A(x)\}^2=(x-1)^2=x^2-2x+1$ 이므로 $B(x)$ 를

$\{A(x)\}^2$ 으로 나누면

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x^2-2x+1 \overline{) x^3-2x^2+x} \\ \underline{x^3-2x^2+x} \\ 0 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 $x-1$ 이다.

답 ②

다른 풀이 $B(x)$ 를 $\{A(x)\}^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$(x-1)(x^2+x-1)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$$

$x=1$ 을 위의 등식의 양변에 대입하면

$$0=a+b \quad \therefore b=-a \quad \dots\dots ㉠$$

따라서

$$(x-1)(x^2+x-1)=(x-1)^2Q(x)+a(x-1),$$

$$\text{즉 } (x-1)\{x^2+x-1-(x-1)Q(x)-a\}=0$$

이고 이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$x^2+x-1-(x-1)Q(x)-a=0$$

$x=1$ 을 위의 등식의 양변에 대입하면

$$1-a=0 \quad \therefore a=1$$

㉠에서 $b=-1$ 이므로 구하는 나머지는 $x-1$ 이다.

05 $66=x, 17=y$ 라 하면 A, B, C, D 의 부피는 각각 x^3, x^2y, xy^2, y^3 이므로 A 1개, B 6개, C 12개, D 8개의 부피의 합은

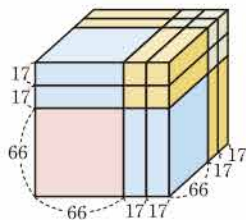
$$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=(x+2y)^3$$

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는

$$x+2y=66+2 \cdot 17=100$$

답 100

참고 만들어진 정육면체는 오른쪽 그림과 같다.



06 $\neg, P(1)=-a-b$ 이고 $P(-1)=-a-b$ 이므로 $P(1)=0$ 이면 $P(-1)=0$ 이다.

즉 $x-1$ 이 $P(x)$ 의 인수이면 $x+1$ 도 $P(x)$ 의 인수이다.

$\therefore P(x)$ 가 x^2+1 로 나누어떨어지면

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+1)(ax^2-2a) \\ &= ax^4-ax^2-2a \end{aligned}$$

즉 $ax^4-bx^2-2a=ax^4-ax^2-2a$ 이므로

$$a=b$$

이때 $a \neq 0, b \neq 0$ 이므로

$$a+b \neq 0$$

두 정수 a, b 가
 $a=kn^2$,
 $b=k(n^4-2)$
(k 는 0이 아닌 상수)
풀이면 $P(n)=0$ 이다.

$\therefore P(n)=an^4-bn^2-2a=0$ 이라 하면

$$a(n^4-2)=bn^2$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{n^4-2}{n^2} \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 $a=n^2, b=n^4-2$ 이면 $P(n)=0$ 이므로 자연수 n 에 대하여 $x-n$ 이 $P(x)$ 의 인수가 되도록 하는 두 정수 a, b 가 항상 존재한다.

이상에서 옳은 것은 $\neg, \therefore$ 이다.

답 ③

내신 + 수능

1등급을 굳히는 **실전 마무리 문제**

본책 24쪽

01 **전략** a, b 가 자연수임을 이용하여 x^2 의 계수가 12인 경우를 구한다.

$$\text{풀이 } (ax+1)(bx+1)=abx^2+(a+b)x+1$$

이므로 x^2 의 계수인 ab 가 12가 되도록 하는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(1, 12), (2, 6), (3, 4),$$

$$(4, 3), (6, 2), (12, 1)$$

따라서 $a+b$ 의 값은

$$1+12=13 \text{ 또는 } 2+6=8 \text{ 또는 } 3+4=7$$

이므로 $a+b$ 의 최솟값은 7이다.

답 ②

02 **전략** 곱셈 공식을 이용하여 $ab+bc+ca$ 의 값을 구하고, a, b, c 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 이므로

$$6^2=12+2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca=12$$

따라서 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca=12$ 이므로

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

$$\therefore a-b=0, b-c=0, c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

이때 $a+b+c=6$ 이므로

$$a=b=c=2$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3=3 \cdot 2^3=24$$

답 ⑤

1등급 비밀노트

888

$$\textcircled{1} a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$

$$= \frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$$

$$\textcircled{2} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$x-a$ 가 $P(x)$ 의 인수이면 $P(a)=0$ 이다.

$x^2=X$ 라 할 때,
 $aX^2-bX-2a$ 가
 $X+1$ 로 나누어떨어지면
 $aX^2-bX-2a$
 $= (X+1)(aX-2a)$
로 놓을 수 있다.

03 **전략** 자연수의 나눗셈에서 나머지는 나누는 수보다 작아야 함을 이용한다.

풀이 $n=1$ 일 때,

$$n^4 + 2n^2 + 24 = 27, \quad n^2 + 2n + 3 = 6$$

이므로

$$R(1) = \boxed{3}$$

$n=2$ 일 때,

$$n^4 + 2n^2 + 24 = 48, \quad n^2 + 2n + 3 = 11$$

이므로

$$R(2) = \boxed{4}$$

한편 $n^4 + 2n^2 + 24$ 를 $n^2 + 2n + 3$ 으로 나누면

$$\begin{array}{r} n^2 - 2n + 3 \\ n^2 + 2n + 3 \overline{) n^4 + 2n^2 + 24} \\ \underline{n^4 + 2n^3 + 3n^2} \\ -2n^3 - n^2 \\ \underline{-2n^3 - 4n^2 - 6n} \\ 3n^2 + 6n + 24 \\ \underline{3n^2 + 6n + 9} \\ 15 \end{array}$$

$$\therefore n^4 + 2n^2 + 24$$

$$= (n^2 + 2n + 3) \left(\frac{n^2 - 2n + 3}{1} \right) + 15$$

$n \geq 3$ 일 때, $n^2 + 2n + 3 \geq 18$ 이므로

$$R(n) = 15$$

$$\therefore \textcircled{A} 3 \quad \textcircled{B} 4 \quad \textcircled{C} n^2 - 2n + 3$$

따라서 $a=3, b=4, P(n)=n^2-2n+3$ 이므로

$$a+P(b)=3+P(4)$$

$$=3+11=14$$

답 ④

27=6·4+3이므로 27을 6으로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

48=11·4+4이므로 48을 11로 나누었을 때의 나머지는 4이다.

$$ab+bc=(a+c)b$$

$$=(n^3+n^2+4n+2)(3n^2+2n+1)$$

답 ①

다른 풀이 $P(x)=(x-n)^3+a(x-n)^2+b(x-n)+c$

$$\dots\dots \textcircled{A}$$

라 하고 $x=n+1$ 을 $\textcircled{A}$ 의 양변에 대입하면

$$P(n+1)=1+a+b+c \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

또 $x=n-1$ 을 $\textcircled{A}$ 의 양변에 대입하면

$$P(n-1)=-1+a-b+c \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}+\textcircled{C}$ 을 하면

$$P(n+1)+P(n-1)=2(a+c) \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$\textcircled{B}-\textcircled{C}$ 을 하면

$$P(n+1)-P(n-1)=2(1+b) \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

한편 $P(x)=x^3+x^2+x+1$ 에서

$$P(n+1)=(n+1)^3+(n+1)^2+(n+1)+1$$

$$=n^3+4n^2+6n+4,$$

$$P(n-1)=(n-1)^3+(n-1)^2+(n-1)+1$$

$$=n^3-2n^2+2n$$

이므로 $\textcircled{D}$ 에서

$$2(a+c)=2n^3+2n^2+8n+4$$

$$\therefore a+c=n^3+n^2+4n+2$$

또 $\textcircled{E}$ 에서

$$2(1+b)=6n^2+4n+4$$

$$\therefore b=3n^2+2n+1$$

$$\therefore ab+bc=(a+c)b$$

$$=(n^3+n^2+4n+2)(3n^2+2n+1)$$

04 **전략** 조립제법을 이용하여 a, b, c 를 n 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이

$$\begin{array}{r} n \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & n & n^2+n & n^3+n^2+n \\ \hline \end{array} \\ n \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & n+1 & n^2+n+1 & n^3+n^2+n+1 \\ \hline & n & 2n^2+n & \\ \hline \end{array} \\ n \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2n+1 & 3n^2+2n+1 & \\ \hline & n & & \\ \hline \end{array} \\ 1 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3n+1 & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$x^3+x^2+x+1$$

$$=(x-n)\{x^2+(n+1)x+n^2+n+1\}$$

$$+n^3+n^2+n+1$$

$$=(x-n)\{(x-n)(x+2n+1)+3n^2+2n+1\}$$

$$+n^3+n^2+n+1$$

$$=(x-n)[(x-n)\{(x-n)+3n+1\}+3n^2+2n+1]$$

$$+n^3+n^2+n+1$$

$$=(x-n)^3+(3n+1)(x-n)^2$$

$$+(3n^2+2n+1)(x-n)+n^3+n^2+n+1$$

따라서 $a=3n+1, b=3n^2+2n+1, c=n^3+n^2+n+1$

이므로

$3A(x)-B(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 7이다.

05 **전략** 주어진 두 등식을 이용하여 보기의 식을 $x+1$ 을 포함한 식으로 나타낸다.

풀이 $A(x)+B(x)=(x+1)Q_1(x)+1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

$$A(x)-B(x)=(x+1)Q_2(x)+3 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

ㄱ. $\textcircled{A}+\textcircled{B}$ 을 하면

$$2A(x)=(x+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+4$$

$$\dots\dots \textcircled{C}$$

$$\therefore A(x)-2=\frac{1}{2}(x+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}$$

따라서 $A(x)-2$ 는 $x+1$ 로 나누어떨어진다.

ㄴ. $\textcircled{C}+\textcircled{B}$ 을 하면

$$3A(x)-B(x)$$

$$=(x+1)\{Q_1(x)+2Q_2(x)\}+7$$

따라서 $3A(x)-B(x)$ 는 $x+1$ 로 나누어떨어지지 않는다.

ㄷ. $\textcircled{C} \times 3 - \textcircled{B}$ 을 하면

$$2A(x)+4B(x)=(x+1)\{3Q_1(x)-Q_2(x)\}$$

$$\therefore A(x)+2B(x)$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)\{3Q_1(x)-Q_2(x)\}$$

따라서 $A(x)+2B(x)$ 는 $x+1$ 로 나누어떨어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

다른 풀이 $A(x)+B(x)=(x+1)Q_1(x)+1$ 에서

$$A(-1)+B(-1)=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$A(x)-B(x)=(x+1)Q_2(x)+3 \text{에서}$$

$$A(-1)-B(-1)=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

㉔, ㉕을 연립하여 풀면

$$A(-1)=2, B(-1)=-1$$

$$\neg. A(-1)-2=2-2=0$$

따라서 $A(x)-2$ 는 $x+1$ 로 나누어떨어진다.

$$\neg. 3A(-1)-B(-1)=6+1=7$$

따라서 $3A(x)-B(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 7이다.

$$\neg. A(-1)+2B(-1)=2-2=0$$

따라서 $A(x)+2B(x)$ 는 $x+1$ 로 나누어떨어진다.

06 ▶ 전략 $Q(x)$ 가 $x(x+1)(x+2)$ 의 인수임을 이용한다.

▶ 풀이 $x(x+1)(x+2)=(x^2+ax+b)Q(x)+R(x)$ 에서 $Q(x)=R(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2) &= (x^2+ax+b)Q(x)+Q(x) \\ &= (x^2+ax+b+1)Q(x) \end{aligned}$$

$$\therefore Q(x)=x \text{ 또는 } Q(x)=x+1$$

$$\text{또는 } Q(x)=x+2$$

(i) $Q(x)=x$ 일 때,

$$x(x+1)(x+2)=(x^2+ax+b+1)x \text{에서}$$

$$x^2+3x+2=x^2+ax+b+1$$

$$a=3, b+1=2$$

$$\therefore a=3, b=1$$

(ii) $Q(x)=x+1$ 일 때,

$$x(x+1)(x+2)=(x^2+ax+b+1)(x+1) \text{에서}$$

$$x^2+2x=x^2+ax+b+1$$

$$a=2, b+1=0$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

그런데 a, b 는 양수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $Q(x)=x+2$ 일 때,

$$x(x+1)(x+2)=(x^2+ax+b+1)(x+2) \text{에서}$$

$$x^2+x=x^2+ax+b+1$$

$$a=1, b+1=0$$

$$\therefore a=1, b=-1$$

그런데 a, b 는 양수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $a=3, b=1$ 이므로

$$ab=3 \quad \text{답 ③}$$

▶ 다른 풀이 삼차식을 이차식으로 나누었을 때의 몫은 일차식이므로 $Q(x)=R(x)=x+k$ (k 는 상수)라 하면

$$x(x+1)(x+2)=(x^2+ax+b)(x+k)+x+k$$

$$\therefore x^3+3x^2+2x$$

$$=x^3+(a+k)x^2+(ak+b+1)x+bk+k$$

따라서 $3=a+k, 2=ak+b+1, bk+k=0$ 이므로

$$a=3, b=1, k=0 \quad (\because a>0, b>0)$$

$$\therefore ab=3$$

등식의 좌변이 삼차식이고 $x^3+ax+b+1$ 이 이차식이므로 $Q(x)$ 는 일차식이다.

$(x-5)(x-a-2)=(x-4)(x-2a-3)$ 을 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

$x(x+1)(x+2)$ 의 최고차항의 계수가 1이고, x^2+ax+b 의 최고차항의 계수도 1이므로 $Q(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이다.

07 ▶ 전략 나머지 정리를 이용하여 R_1, R_2 를 각각 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\text{▶ 풀이} \quad R_1=P(-a)=-a^3+2a^2+3a-4,$$

$$R_2=P(a)=a^3+2a^2-3a-4 \text{이므로}$$

$$R_1+R_2=4a^2-8$$

$$4a^2-8=12 \text{에서}$$

$$a^2=5$$

따라서 $P(x)$ 를 $x-a^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned} P(a^2) &= P(5)=5^3+2 \cdot 5^2-3 \cdot 5-4 \\ &=156 \end{aligned}$$

답 ④

08 ▶ 전략 나머지를 $R(x)$ 라 하고 $P(x)-R(x)$ 를 나타낸 후 $P(x)$ 중에서 차수가 가장 낮은 다항식이 삼차식인 경우를 생각한다.

▶ 풀이 다항식 $P(x)$ 를 $(x-5)(x-a-2)$, $(x-4)(x-2a-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라 하고 나머지를 $R(x)$ 라 하면

$$P(x)=(x-5)(x-a-2)Q_1(x)+R(x)$$

$$=(x-4)(x-2a-3)Q_2(x)+R(x)$$

$$\therefore P(x)-R(x)=(x-5)(x-a-2)Q_1(x)$$

$$=(x-4)(x-2a-3)Q_2(x)$$

이때 $R(x)$ 는 상수이거나 일차식이므로 다항식 $P(x)$ 중에서 차수가 가장 낮은 다항식이 삼차식이면 $Q_1(x), Q_2(x)$ 는 각각 일차식이고,

$$x-5=x-2a-3, x-a-2 \neq x-4$$

$$\text{또는 } x-5 \neq x-2a-3, x-a-2=x-4$$

$$\text{또는 } x-a-2=x-2a-3$$

(i) $x-5=x-2a-3, x-a-2 \neq x-4$ 일 때,

$$-5=-2a-3, -a-2 \neq -4 \text{에서}$$

$$a=1, a \neq 2$$

$$\therefore a=1$$

(ii) $x-5 \neq x-2a-3, x-a-2=x-4$ 일 때,

$$-5 \neq -2a-3, -a-2=-4 \text{에서}$$

$$a \neq 1, a=2$$

$$\therefore a=2$$

(iii) $x-a-2=x-2a-3$ 일 때,

$$-a-2=-2a-3 \text{에서 } a=-1$$

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 실수 a 의 값은 1, 2, -1이므로 구하는 합은

$$1+2+(-1)=2$$

답 ②

09 ▶ 전략 $P(x)$ 를 n 차식이라 하고 주어진 등식의 좌변과 우변의 차수를 비교하여 n 의 값을 구한다.

▶ 풀이 $P(x^2)$

$$=x^3P(x+3)+6x^2(x+3)(x-1)(x-3)$$

$$\dots\dots \textcircled{㉑}$$

최고차항의 계수가 1인 다항식 $P(x)$ 를 n 차식이라 하면

㉑의 좌변은 $2n$ 차식이고, ㉑의 우변은 $(n+3)$ 차식 또는 5차식이므로 ㉑이 x 에 대한 항등식이려면

$$2n=n+3 \text{ 또는 } 2n=5$$

$$\therefore n=3 \text{ 또는 } n=\frac{5}{2}$$

그런데 n 은 자연수이므로

$$n=3$$

$x=0$ 을 ㉠의 양변에 대입하면

$$P(0)=0$$

$x=-3$ 을 ㉠의 양변에 대입하면

$$P(9)=-27P(0)$$

$$\therefore P(9)=0$$

$x=3$ 을 ㉠의 양변에 대입하면

$$P(9)=27P(6)$$

$$\therefore P(6)=0$$

따라서 $P(x)$ 는 $x, x-9, x-6$ 을 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$$P(x)=x(x-6)(x-9)$$

즉 구하는 나머지는

$$P(-1)=-1 \cdot (-7) \cdot (-10)=-70 \quad \text{답 ②}$$

10 **전략** $P(9)=2613$ 임을 이용하여 10보다 작은 자연수 a, b, c, d 의 값을 구한다.

풀이 $P(9)=a \cdot 10^3+b \cdot 10^2+c \cdot 10+d=2613$ 이고,

a, b, c, d 는 10보다 작은 자연수이므로

$$a=2, b=6, c=1, d=3$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x) &= 2(x+1)^3 + 6(x+1)^2 + (x+1) + 3 \\ &= 2x^3 + 12x^2 + 19x + 12 \end{aligned}$$

따라서 오른쪽 조립제법

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 12 & 19 & 12 \\ & & -4 & -16 & -6 \\ \hline & 2 & 8 & 3 & 6 \end{array}$$

에서 $P(x)$ 를 $x+2$ 로 나

누었을 때의 몫은

$$2x^2+8x+3 \text{이다.}$$

답 ⑤

11 **전략** a, b 가 연속하는 두 자연수임을 이용하여 A 를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 a, b 가 연속하는 두 자연수이므로 $b=a+1$ 이라 하면

$$A=a^2+b^2+c^2=a^2+(a+1)^2+\{a(a+1)\}^2$$

$$=a^4+2a^3+3a^2+2a+1$$

$$=a^4+a^2+1+2a^3+2a+2a^2$$

$$=(a^2+a+1)^2$$

$$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{A}=a^2+a+1=a(a+1)+1$$

이때 연속하는 두 자연수의 곱 $a(a+1)$ 은 짝수이므로 $\sqrt{A}$ 는 항상 홀수이고, 유리수이다. **답 ③**

참고 $b=a-1$ 이라 하면 $\sqrt{A}=a^2-a+1=a(a-1)+10$ 이므로 그 결과는 같다.

12 **전략** 주어진 등식의 좌변에서 $16=x$ 로 놓고 좌변을 인수분해 한다.

풀이 $16=x$ 라 하면

$$16^3+2 \cdot 16^2-2 \cdot 16+3=x^3+2x^2-2x+3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ & & -3 & 3 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

이라 하면 $P(-3)=0$ 이

므로 오른쪽과 같이 조립

제법을 이용하여 인수분해 하면

$$P(x)=(x+3)(x^2-x+1)$$

$$\therefore 16^3+2 \cdot 16^2-2 \cdot 16+3=P(16)$$

$$=(16+3)(16^2-16+1)$$

$$=19 \cdot 241$$

따라서 $a=19, b=241$ 또는 $a=241, b=19$ 이므로

$$a+b=260$$

답 ③

13 **전략** 나머지 정리를 이용하여 b 를 a 에 대한 식으로 나타낸 후 $x^{10}(x^2+ax+b)$ 를 인수분해 한다.

풀이 $x^{10}(x^2+ax+b)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^{10}(x^2+ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$$

$x=2$ 를 위의 등식의 양변에 대입하면

$$2^{10}(4+2a+b)=0$$

$$\therefore b=-2a-4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때

$$x^{10}(x^2+ax+b)=x^{10}(x^2+ax-2a-4)$$

$$=x^{10}(x-2)(x+a+2)$$

이므로

$$x^{10}(x-2)(x+a+2)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$$

$$\therefore (x-2)\{x^{10}(x+a+2)-(x-2)Q(x)-2^{10}\}$$

$$=0$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$x^{10}(x+a+2)-(x-2)Q(x)-2^{10}=0$$

$x=2$ 를 위의 등식의 양변에 대입하면

$$2^{10}(a+4)-2^{10}=0$$

$$2^{10}(a+3)=0$$

$$\therefore a=-3$$

$a=-3$ 을 ㉠에 대입하면

$$b=-2 \cdot (-3)-4=2$$

$$\therefore ab=-6$$

답 ①

14 **전략** 인수 정리를 이용하여 c 를 b 에 대한 식으로 나타낸 후 $ax^3+bx^2-4ax+c$ 를 인수분해 한다.

풀이 $P(x)=ax^3+bx^2+cx-16a$ 라 하면 $P(x)$ 가

$x+2$ 를 인수로 가지므로

$$P(-2)=0$$

$$16a-8b-2c-16a=0$$

$$\therefore c=-4b$$

$$\therefore ax^3+bx^2-4ax+c$$

$$=ax^3+bx^2-4ax-4b$$

$$=ax(x^2-4)+b(x^2-4)$$

$$=(x^2-4)(ax+b)$$

$$=(x+2)(x-2)(ax+b)$$

따라서 항상 $ax^3+bx^2-4ax+c$ 의 인수인 것은 ④이다.

답 ④

15 [전략] $24x^3 + 22x^2 - x - 3$ 의 값이 0이 되도록 하는 x 의 값을 찾아 조립제법을 이용하여 인수분해 한다.

[풀이] $P(x) = 24x^3 + 22x^2 - x - 3$ 이라 하면 $P(-\frac{1}{2}) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해 하면 다음과 같다.

$$-\frac{1}{2} \begin{array}{rrrr} 24 & 22 & -1 & -3 \\ & -12 & -5 & 3 \\ \hline 24 & 10 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x) &= \left(x + \frac{1}{2}\right)(24x^2 + 10x - 6) \\ &= (2x+1)(12x^2 + 5x - 3) \\ &= (2x+1)(4x+3)(3x-1) \end{aligned}$$

$$\therefore a+b+c+d+e+f=2+1+4+3+3+1=14$$

답 ②

$\pm \frac{(3\text{의 약수})}{(24\text{의 약수})}$ 중에서 찾는다.

한 변의 길이가 a 인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}a$ 이다.

$e=3, f=10$ 이고
 $a=2, b=1, c=4, d=3$
또는 $a=4, b=3, c=2, d=10$ 이다.

16 [전략] $(P \ominus Q) \otimes P$ 를 전개한 후 $P=x+y, Q=x-y$ 를 대입한다.

$$\begin{aligned} \text{[풀이]} \quad (P \ominus Q) \otimes P &= (P+2Q) \otimes P \\ &= \{(P+2Q)+P\}(P+2Q) \\ &= (2P+2Q)(P+2Q) \\ &= 2P^2 + 6PQ + 4Q^2 \quad \rightarrow ① \\ &= 2(x+y)^2 + 6(x+y)(x-y) + 4(x-y)^2 \\ &= 12x^2 - 4xy \quad \rightarrow ② \end{aligned}$$

따라서 xy 의 계수는 -4 이다.

→ ①

→ ②

→ ③

답 -4

채점 기준	비율
① $(P \ominus Q) \otimes P$ 를 P, Q 에 대한 전개식으로 나타낼 수 있다.	40%
② $(P \ominus Q) \otimes P$ 를 x, y 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ xy 의 계수를 구할 수 있다.	20%

$$\begin{aligned} \text{[다른 풀이]} \quad (P \ominus Q) \otimes P &= (P+2Q) \otimes P \\ &= (2P+2Q)(P+2Q) \\ &= \{2(x+y)+2(x-y)\}\{x+y+2(x-y)\} \\ &= 4x(3x-y) \\ &= 12x^2 - 4xy \end{aligned}$$

따라서 xy 의 계수는 -4 이다.

17 [전략] 세 정사각형 A, B, C 의 넓이와 색칠한 부분의 넓이의 총합은 한 변의 길이가 10인 정사각형의 넓이와 같음을 이용한다.

[풀이] 세 정사각형 A, B, C 의 한 변의 길이를 각각 a, b, c 라 하면
 $a+b+c=10$

세 정사각형 A, B, C 의 넓이의 합이 색칠한 부분의 넓이와 같으므로 세 정사각형 A, B, C 의 넓이의 합은 한 변의 길이가 10인 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 50$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \text{에서}$$

$$10^2 = 50 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca=25$$

$$p=\sqrt{2}a, q=\sqrt{2}b, r=\sqrt{2}c \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} pq+qr+rp &= 2ab+2bc+2ca \\ &= 2(ab+bc+ca) \\ &= 2 \cdot 25 \\ &= 50 \end{aligned}$$

답 50

18 [전략] $R_1(x)$ 와 $R_2(x)$ 사이의 관계를 파악한다.

$$\begin{aligned} \text{[풀이]} \quad P(x) &= (x-1)^4 Q_1(x) + R_1(x) \\ &= (x-1)^2 \cdot (x-1)^2 Q_1(x) + R_1(x) \end{aligned}$$

이므로 $R_2(x)$ 는 다항식 $R_1(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$\text{즉 } R_1(x) = (x-1)^2 Q_2(x) + R_2(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^4 Q_1(x) + (x-1)^2 Q_2(x) + R_2(x) \\ &= (x-1)^2 \{(x-1)^2 Q_1(x) + Q_2(x)\} + R_2(x) \end{aligned}$$

이때 $(x-1)^2 Q_1(x) + Q_2(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ 이므로

$$P(x) = (x-1)^2(x^3 + 3x^2 + 2x) + R_2(x) \quad \rightarrow ①$$

$R_2(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$R_2(1) = 2 \text{에서} \quad a+b=2 \quad \dots\dots ⑦$$

$$R_2(2) = 5 \text{에서} \quad 2a+b=5 \quad \dots\dots ⑧$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-1$$

$$\therefore R_2(x) = 3x-1$$

따라서

$$P(x) = (x-1)^2(x^3 + 3x^2 + 2x) + 3x-1 \quad \rightarrow ②$$

이므로

$$P(3) = 4 \cdot 60 + 9 - 1 = 248 \quad \rightarrow ③$$

답 248

채점 기준	비율
① $P(x)$ 를 $R_2(x)$ 를 이용하여 나타낼 수 있다.	60%
② $P(x)$ 를 구할 수 있다.	30%
③ $P(3)$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

$$\text{참고} \quad Q_1(x) = x+5, Q_2(x) = 11x-5,$$

$$R_1(x) = 11x^3 - 27x^2 + 24x - 6$$

19 [전략] 주어진 등식을 변형하여 $P(1)=2P(2)=3P(3)$ 임을 이용한다.

$$\text{[풀이]} \quad \frac{P(1)}{30} = \frac{P(2)}{15} = \frac{P(3)}{10} = \frac{1}{6} \text{의 각 변에 } 30 \text{을 곱하면}$$

$$P(1)=2P(2)=3P(3)=5$$

이므로

$$P(1)-5=2P(2)-5=3P(3)-5=0$$

따라서 삼차식 $xP(x)$ 에 대하여

$$xP(x)-5=k(x-1)(x-2)(x-3) \quad (k \neq 0)$$

이라 하면

$$xP(x) = k(x-1)(x-2)(x-3) + 5$$

$x=0$ 을 위의 식의 양변에 대입하면

$$0 = -6k + 5 \quad \therefore k = \frac{5}{6}$$

$$\therefore xP(x) = \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + 5$$

$P(x)$ 를 $x-6$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $P(6)$ 이므로

$$6P(6) = \frac{5}{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 = 55$$

$$\therefore P(6) = \frac{55}{6} \quad \text{답 } \frac{55}{6}$$

1등 비밀노트

n 차 다항식 $P(x)$ 가 n 개의 서로 다른 실수 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 에 대하여 $P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n) = 0$ 이면 $P(x)$ 는 $x-a_1, x-a_2, \dots, x-a_n$ 으로 나누어떨어진다. 즉 $P(x) = k(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) \quad (k \neq 0)$ 으로 놓을 수 있다.

20 전략 두 다항식을 $(x-a)(x-b)$ 로 나누었을 때의 나머지가 서로 같으므로 각 식에 $x=a, x=b$ 를 대입한 값이 각각 같음을 이용한다.

풀이 $A(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1, B(x) = x^3 - x^2 - 3x + 13$ 이라 하면 두 다항식 $A(x), B(x)$ 를 각각 $(x-a)(x-b)$ 로 나누었을 때의 나머지가 서로 같으므로

$$A(a) = B(a), A(b) = B(b)$$

$A(a) = B(a)$ 에서

$$\begin{aligned} a^3 + a^2 - 5a + 1 &= a^3 - a^2 - 3a + 13 \\ 2a^2 - 2a - 12 &= 0, \quad a^2 - a - 6 = 0 \\ (a+2)(a-3) &= 0 \\ \therefore a &= -2 \text{ 또는 } a = 3 \end{aligned}$$

마찬가지로 $A(b) = B(b)$ 에서

$$b = -2 \text{ 또는 } b = 3$$

그런데 $a \neq b$ 이므로

$$a = -2, b = 3 \text{ 또는 } a = 3, b = -2$$

다항식 $A(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1$ 을 $(x+2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x), R(x) = px + q$ (p, q 는 상수)라 하면

$$A(x) = (x+2)(x-3)Q(x) + px + q \quad \dots\dots ㉠$$

$x = -2$ 를 ㉠의 양변에 대입하면

$$7 = -2p + q \quad \dots\dots ㉡$$

$x = 3$ 을 ㉠의 양변에 대입하면

$$22 = 3p + q \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$p = 3, q = 13$$

따라서 $R(x) = 3x + 13$ 이므로

$$R(a+b) = R(1) = 16 \quad \text{답 } 16$$

참고 두 다항식 $A(x), B(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라 하면

$P(x)$ 가 삼차식이고 나누는 식이 삼차식이므로 몫은 0이 아닌 실수이다.

$$P(1) = 0, P(2) = 0$$

$x^2 + ax + b$ 가 완전제곱식으로 인수분해 되려면 $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b$

$$\begin{aligned} A(-2) &= -8 + 4 + 10 + 1 = 7 \\ A(3) &= 27 + 9 - 15 + 1 = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= -2, b = 3 \text{ 또는 } a = 3, b = -20 \text{ 이므로} \\ a + b &= 1 \end{aligned}$$

$$A(x) = (x-a)(x-b)Q_1(x) + R(x)$$

$$B(x) = (x-a)(x-b)Q_2(x) + R(x)$$

$$\therefore A(a) = R(a) = B(a), A(b) = R(b) = B(b)$$

21 전략 $P(x)$ 를 $(x-1)(x-3), (x-1)(x-2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머지를 이용하여 $R(x)$ 의 식을 세운다.

풀이 삼차식 $P(x)$ 를 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 q ($q \neq 0$)라 하면

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \cdot q + R(x) \quad \dots\dots ㉠$$

$P(x)$ 를 $(x-1)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $3x-3$ 이므로 ㉠에서 $R(x)$ 를 $(x-1)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $3x-3$ 이다.

즉 $R(x) = a(x-1)(x-3) + 3x-3$ (a 는 상수)이라 하면 ㉠에서

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3) \cdot q \\ &\quad + a(x-1)(x-3) + 3x-3 \end{aligned}$$

이때 $P(x)$ 가 $(x-1)(x-2)$ 로 나누어떨어지므로

$$P(2) = 0 \text{에서}$$

$$-a + 6 - 3 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

따라서

$$R(x) = 3(x-1)(x-3) + 3x-3 \quad \dots\dots ㉡$$

이므로

$$R(4) = 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4 - 3 = 18 \quad \dots\dots ㉢$$

답 18

채점 기준	비율
① $P(x)$ 를 $R(x)$ 를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
② $R(x)$ 를 구할 수 있다.	60%
③ $R(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

22 전략 주어진 식을 전개하여 x 또는 y 에 대하여 내림차순으로 정리한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } (x+3)^2 + (2y-3)^2 - 4xy + k \\ = x^2 + 2(3-2y)x + 4y^2 - 12y + 18 + k \end{aligned}$$

위의 식이 x, y 에 대한 일차식의 완전제곱식이 되려면

$$\begin{aligned} (3-2y)^2 &= 4y^2 - 12y + 18 + k, \\ \text{즉 } 4y^2 - 12y + 9 &= 4y^2 - 12y + 18 + k \end{aligned}$$

이어야 하므로

$$9 = 18 + k$$

$$\therefore k = -9 \quad \text{답 } -9$$

$$\begin{aligned} \text{다른 풀이 } (x+3)^2 + (2y-3)^2 - 4xy + k \\ = 4y^2 - 4(x+3)y + x^2 + 6x + 18 + k \end{aligned}$$

위의 식이 x, y 에 대한 일차식의 완전제곱식이 되려면

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= x^2 + 6x + 18 + k, \\ \text{즉 } x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 6x + 18 + k \end{aligned}$$

이어야 하므로

$$9 = 18 + k \quad \therefore k = -9$$

참고 주어진 식을 인수분해 하면 $(x-2y+3)^2$ 이다.

23 [전략] $12=x$ 로 놓고 주어진 등식의 좌변을 x 에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] $12=x$ 라 하면

$$12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 - 8 = x(x+1)(x+2)(x+3) - 8 \\ = (x^2+3x)(x^2+3x+2) - 8$$

$x^2+3x=X$ 로 놓으면 위의 식은

$$X(X+2) - 8 \\ = X^2 + 2X - 8 \\ = (X+4)(X-2) \\ = (x^2+3x+4)(x^2+3x-2) \\ = (12^2+3 \cdot 12+4)(12^2+3 \cdot 12-2) \\ = 184 \cdot 178 \\ = (2^3 \cdot 23) \cdot (2 \cdot 89) \\ = 2^4 \cdot 23 \cdot 89$$

이때 $2^4 \cdot 23 \cdot 89$ 의 양의 약수의 개수는

$$(4+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 20$$

이므로 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는 20이다.

답 20

💡비밀노트

$2^4 \cdot 23 \cdot 89$ 의 양의 약수 중 1개를 a 로 택하면 b 가

$$b = (2^4 \cdot 23 \cdot 89) \div a$$

로 결정되므로 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는 a 를 택하는 경우의 수, 즉 $2^4 \cdot 23 \cdot 89$ 의 양의 약수의 개수와 같다.

자연수 N 이

$$N = p^a q^b \cdots r^c$$

($p, q, \dots, r$ 는 서로 다른 소수)

으로 소인수분해 되면 N 의 양의 약수의 개수는

$$(a+1)(b+1) \cdots (c+1)$$

24 [전략] 주어진 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구하고, 이것을 만족시키는 자연수 a, b 의 값을 찾는다.

[풀이] $\overline{FC} = b - a$, $\overline{DH} = a - (b - a) = 2a - b$ 이므로 두 정사각형 ABFE, IJHD의 넓이의 차는

$$a^2 - (2a - b)^2 = (a + 2a - b)(a - 2a + b) \\ = (3a - b)(b - a)$$

$$\therefore (3a - b)(b - a) = 35$$

이때 $3a - b, b - a$ 는 정수이고

$$0 < b - a < 3a - b$$

이므로

$$3a - b = 35, b - a = 1$$

$$\text{또는 } 3a - b = 7, b - a = 5$$

(i) $3a - b = 35, b - a = 1$ 일 때,

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 18, b = 19$$

그런데 $\frac{3}{2}a < b$ 를 만족시키지 않는다.

(ii) $3a - b = 7, b - a = 5$ 일 때,

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 6, b = 11$$

(i), (ii)에서

$$a = 6, b = 11$$

따라서 $\overline{FC} = 11 - 6 = 5$, $\overline{DH} = 2 \cdot 6 - 11 = 1$,

$\overline{GJ} = 5 - 1 = 4$ 이므로 두 사각형 GFCH, EGJI의 넓이의 합은

$$Q(x) = (x-1)(x-3) \\ = x^2 - 4x + 3$$

일 때에는

$$x^2 - ax + a + 5$$

$$= x^2 - 4x + 3$$

을 만족시키는 a 의 값이 존재하지 않는다.

$$a < \frac{3}{2}a < b \text{이므로}$$

$$0 < b - a$$

$$b < 2a \text{이므로}$$

$$2b < 4a$$

$$2b - (a + b)$$

$$< 4a - (a + b)$$

$$\therefore b - a < 3a - b$$

$$\frac{3}{2} \cdot 18 > 19$$

$$5^2 + 1 \cdot 4 = 29$$

→ 3

답 29

채점 기준	비율
① $3a - b, b - a$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ 두 사각형의 넓이의 합을 구할 수 있다.	20%

25 [전략] 먼저 $P(2)=0$ 임을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해한다.

[풀이] $P(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -a-2 & 3a+5 & -2a-10 \\ & & 2 & -2a & 2a+10 \\ \hline & 1 & -a & a+5 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-2)(x^2 - ax + a+5)$$

→ 1

이때

$$(x-2)(x^2 - ax + a+5)$$

$$= (x-p)(x-q)(x-r)$$

이고 p, q, r 가 연속하는 세 자연수이므로 2를 포함한 연속하는 세 자연수는

$$1, 2, 3 \text{ 또는 } 2, 3, 4$$

따라서 $Q(x) = x^2 - ax + a + 5$ 라 하면

$$Q(x) = (x-1)(x-3)$$

$$\text{또는 } Q(x) = (x-3)(x-4)$$

이때 $Q(3)=0$ 이므로

$$9 - 3a + a + 5 = 0 \quad \therefore a = 7$$

→ 2

즉 $Q(x) = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$ 이므로

$$P(x) = (x-2)(x-3)(x-4)$$

$$\therefore a + p + q + r = 7 + 2 + 3 + 4 = 16$$

→ 3

답 16

채점 기준	비율
① $P(x)$ 를 인수분해 할 수 있다.	30%
② a 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $a + p + q + r$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

II 방정식

03 복소수

개념 & 핵심 기출

본책 30쪽

01 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$6x-2=2y, 4x+3=3y-4$$

$$\therefore 3x-y=1, 4x-3y=-7$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=5$

$$\therefore xy=10$$

답 10

02 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2+b^2=3, ab=1$$

이때 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=3+2\cdot 1=5$ 이므로

$$a+b=\sqrt{5} \quad (\because a>0, b>0)$$

답 4

03 $z=(1+i)a^2-(8+i)a+15-6i$

$$=(a^2-8a+15)+(a^2-a-6)i$$

에서

$$\bar{z}=(a^2-8a+15)-(a^2-a-6)i$$

$\bar{z}$ 의 허수부분이 -6 이므로

$$-(a^2-a-6)=-6, \quad a^2-a-12=0$$

$$(a+3)(a-4)=0 \quad \therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

답 4

04 $z_1=(1+5i)x^2-4x-5-4i$

$$=(x^2-4x-5)+(5x^2-4)i$$

$z_2=(1-4i)x^2+x+3=(x^2+x+3)-4x^2i$

$$\therefore z_1+z_2=(2x^2-3x-2)+(x^2-4)i$$

이때 z_1+z_2 가 실수이므로 $x^2-4=0$ 에서

$$(x+2)(x-2)=0 \quad \therefore x=2 \quad (\because x>0)$$

답 2

05 $z_2=\bar{z}_1+(1-i)=(2+2i)+(1-i)=3+i$

$$z_3=z_2+(1-i)=(3+i)+(1-i)=4$$

$$z_4=\bar{z}_3-(1-i)=4-(1-i)=3+i$$

따라서 $z_1-z_4=(2-2i)-(3+i)=-1-3i$ 이므로

$$\overline{z_1-z_4}=-1+3i$$

답 2

06 $\beta=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$a+\beta=(2-3i)+(a+bi)=(2+a)+(-3+b)i$$

이므로 조건 ㉞에서

$$-3+b=0 \quad \therefore b=3$$

또 $a-\beta=(2-3i)-(a+bi)=(2-a)+(-3-b)i$

므로 조건 ㉝에서

$$2-a=5 \quad \therefore a=-3$$

$$\therefore \beta=-3+3i$$

답 $-3+3i$

두 복소수 $a+bi, c+di$
(a, b, c, d 는 실수)가
서로 같을 조건
 $\Rightarrow a=c, b=d$

복소수의 덧셈은 실수부
분은 실수부끼리, 허수
부분은 허수부끼리 계
산한다.

복소수 z 의 켤레복소수를
 $\bar{z}$ 라 할 때,
 $(\bar{\bar{z}})=z$

$$(a+bi)i=ai-b$$

$$07 \quad z_1z_2+\frac{z_1}{z_2}=(3+i)(1-3i)+\frac{3+i}{1-3i}$$

$$=6-8i+\frac{(3+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$$

$$=6-8i+\frac{10i}{10}$$

$$=6-7i$$

답 3

$$08 \quad z=\frac{2-ai}{3-i}=\frac{(2-ai)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$

$$=\frac{(6+a)+(2-3a)i}{10}$$

$$=\frac{6+a}{10}+\frac{2-3a}{10}i$$

복소수 z 의 실수부분과 허수부분이 같으므로

$$\frac{6+a}{10}=\frac{2-3a}{10}, \quad 6+a=2-3a$$

$$\therefore a=-1$$

답 -1

$$09 \quad x^2=\left(\frac{i}{1+i}\right)^2=\frac{i^2}{(1+i)^2}=-\frac{1}{2i}$$

$$y^2=\left(\frac{i}{1-i}\right)^2=\frac{i^2}{(1-i)^2}=\frac{-1}{-2i}=\frac{1}{2i}$$

$$\therefore x^2+y^2=-\frac{1}{2i}+\frac{1}{2i}=0$$

답 3

다른 풀이 $x+y=\frac{i}{1+i}+\frac{i}{1-i}$

$$=\frac{i(1-i)+i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i}{2}=i$$

$$xy=\frac{i^2}{(1+i)(1-i)}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=i^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-1+1=0$$

10 $\overline{z+zi}=\overline{z(1+i)}=\bar{z}\cdot\overline{1+i}=\bar{z}(1-i)$ 이므로

$$\bar{z}(1-i)=3+i$$

$$\therefore \bar{z}=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$$

따라서 $z=1-2i$ 이므로 $a=1, b=-2$

$$\therefore ab=-2$$

답 1

다른 풀이 $z=a+bi$ 이므로

$$z+zi=a+bi+(a+bi)i$$

$$=(a-b)+(a+b)i$$

$$\therefore \overline{z+zi}=(a-b)-(a+b)i$$

따라서 $(a-b)-(a+b)i=3+i$ 이므로 복소수가 서로
같을 조건에 의하여

$$a-b=3, -a-b=1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-2$

$$\therefore ab=-2$$

11 $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}=2+5i$ 이므로

$$z_1-z_2=2-5i$$

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=z_1z_2=3-4i$$
이므로

$$z_1z_2=3+4i$$

일품 BOX

$$\begin{aligned}\therefore (z_1-2)(z_2+2) &= z_1z_2+2(z_1-z_2)-4 \\ &= (3+4i)+2(2-5i)-4 \\ &= 3-6i\end{aligned}$$

$$i^{10}=i^{4 \cdot 2+2}=i^2=-1$$

$$\left(\frac{z}{5}\right)^{10}=(-2i)^{10}=1024i^{10}=-1024$$

답 -1024

12 $\neg$. $z_1=\overline{z_2}$ 이면 $z_1z_2=\overline{z_2}z_2$

따라서 z_1z_2 는 실수이다.

$$\begin{aligned}\neg. z_1+z_2=0 \text{에서 } \overline{z_1+z_2} &= \overline{0} \\ \therefore \overline{z_1}+\overline{z_2} &= 0\end{aligned}$$

$$\neg. z_1z_2=1 \text{이면 } z_1=\frac{1}{z_2} \text{ 이므로}$$

$$\overline{z_1}=\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}=\frac{1}{\overline{z_2}}$$

$$\text{또 } z_1\overline{z_2}=1 \text{ 이면 } \overline{z_2}=\frac{1}{z_1} \text{ 이므로}$$

$$\overline{z_1}+\frac{1}{z_1}=\frac{1}{z_2}+\overline{z_2}$$

이상에서 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하자.

$$\begin{aligned}\neg. z_1=\overline{z_2} \text{에서 } a+bi &= c-di \text{ 이므로} \\ a &= c, b = -d\end{aligned}$$

$$\therefore z_1z_2=(c-di)(c+di)=c^2+d^2$$

따라서 z_1z_2 는 실수이다.

$$\begin{aligned}\neg. z_1+z_2=0 \text{에서 } (a+bi) &+ (c+di)=0 \text{ 이므로} \\ (a+c) &+ (b+d)i=0\end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a+c=0, b+d=0$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{z_1}+\overline{z_2} &= (a-bi)+(c-di) \\ &= (a+c)-(b+d)i=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg. z_1\overline{z_2}=1 \text{에서 } (a+bi)(c-di) &= 1 \text{ 이므로} \\ (ac+bd) &+ (bc-ad)i=1\end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$ac+bd=1, bc-ad=0$$

이때

$$\begin{aligned}\overline{z_1}z_2 &= (a-bi)(c+di) \\ &= (ac+bd)+(ad-bc)i=1\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \overline{z_1}=\frac{1}{z_2}$$

$$\therefore \overline{z_1}+\frac{1}{z_1}=\frac{1}{z_2}+\overline{z_2}$$

복소수와 그 켤레복소수의 곱은 항상 실수이다.

자연수 n 과 복소수 z 에 대하여
 $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
(단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

$$\begin{aligned}13 \quad z &= a^2(1-i)-a(6-i)+8+2i \\ &= (a^2-6a+8)-(a^2-a-2)i\end{aligned}$$

z^2 이 음의 실수이려면 z 가 순허수이어야 하므로

$$a^2-6a+8=0, a^2-a-2 \neq 0$$

$$a^2-6a+8=0 \text{에서 } (a-2)(a-4)=0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a^2-a-2 \neq 0 \text{에서 } (a+1)(a-2) \neq 0$$

$$\therefore a \neq -1, a \neq 2 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a=4$$

$$\text{따라서 } z=-(4^2-4-2)i=-10i \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\text{① } a < 0, b < 0 \text{ 일 때,} \\ \sqrt{a}\sqrt{b} &= -\sqrt{ab} \\ \text{② } a > 0, b < 0 \text{ 일 때,} \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= -\sqrt{\frac{a}{b}}\end{aligned}$$

비밀노트

복소수 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)에 대하여

① z^2 이 실수 $\Rightarrow z$ 가 실수 또는 순허수 $\Rightarrow a=0$ 또는 $b=0$

② z^2 이 음의 실수 $\Rightarrow z$ 가 순허수 $\Rightarrow a=0, b \neq 0$

③ z^2 이 양의 실수 $\Rightarrow z$ 가 0이 아닌 실수 $\Rightarrow a \neq 0, b=0$

$$14 \quad z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i \text{ 이므로}$$

$$z^{36}=(z^2)^{18}=i^{18}=-1,$$

$$\overline{z}^{36}=\overline{z^{36}}=-1$$

$$\therefore z^{36}+\overline{z}^{36}=-2$$

답 ③

15 자연수 k 에 대하여

(i) $n=2k-1$ 일 때,

$$\begin{aligned}f(n) &= f(2k-1)=i^{2k-1+1} \\ &= (i^2)^k = (-1)^k\end{aligned}$$

(ii) $n=2k$ 일 때,

$$\begin{aligned}f(n) &= f(2k)=i^{4k}-i^{2k} \\ &= (i^4)^k - (i^2)^k = 1 - (-1)^k\end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$f(2k-1)+f(2k)=(-1)^k+\{1-(-1)^k\}=1$$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(100)$$

$$= \{f(1)+f(2)\} + \{f(3)+f(4)\} + \dots + \{f(99)+f(100)\}$$

$$= \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{50\text{개}}=50$$

답 50

다른 풀이 $f(1)=i^2=-1$

$$f(2)=i^4-i^2=1+1=2$$

$$f(3)=i^4=1$$

$$f(4)=i^8-i^4=1-1=0$$

$$f(5)=i^6=-1$$

$$f(6)=i^{12}-i^6=1+1=2$$

$$f(7)=i^8=1$$

$$f(8)=i^{16}-i^8=1-1=0$$

$\vdots$

따라서 $f(n)$ 의 값은 $-1, 2, 1, 0$ 이 이 순서대로 반복되므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(100)$$

$$= (-1+2+1+0) \cdot 25 = 50$$

$$16 \quad \neg. \sqrt{5}\sqrt{-2}=\sqrt{5 \cdot (-2)}=\sqrt{-10}$$

$$\neg. \sqrt{-3}\sqrt{-3}=-\sqrt{(-3) \cdot (-3)}=-\sqrt{3^2}=-3$$

$$\neg. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}}=-\sqrt{\frac{2}{-6}}=-\sqrt{-\frac{1}{3}}$$

$$\neg. \frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{-10}{-2}}=\sqrt{5}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ②

17 $\frac{1}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{1}{a}}$ 이므로 $a < 0$
 $\therefore \sqrt{a^2} + (\sqrt{a})^2 + \sqrt{-a}\sqrt{a} = -a + a + \sqrt{-a^2}$
 $= \sqrt{a^2}i = -ai$

답 ①

18 $1 < \sqrt{3} < 2$ 에서 $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$
 즉 $0 < x < 1$ 이므로 $x-1 < 0, 1-x > 0, -x < 0$
 $\therefore (\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{(x-1)^2} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{-x}} \sqrt{\frac{x}{x-1}}$
 $= (x-1) + |x-1| + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}i} \sqrt{\frac{x}{1-x}}i$
 $= x-1 - (x-1) + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}i} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}i$
 $= 1$

답 1

실수 x 에 대하여
 $\sqrt{x^2} = |x|$
 $= \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$

$-2 < -\sqrt{3} < -1$ 이므로
 $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$

- 두 실수 A, B 에 대하여
 ① $A-B > 0$ 이면 $A > B$
 ② $A-B = 0$ 이면 $A = B$
 ③ $A-B < 0$ 이면 $A < B$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 33쪽

01 $\neg, I(a) = I(\beta) = 0$ 이면 a, β 는 실수이므로

$a^2 + \beta^2 - a\beta = \left(a - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\beta^2 \geq 0$
 $\therefore a^2 + \beta^2 \geq a\beta$

$\neg, I(a) = 0, R(\beta) = 0$ 이면 a 는 실수이고, $\beta = pi$ (p 는 실수) 꼴이므로

$a^2 - \beta^2 - a^2\beta^2 = a^2 - (pi)^2 - a^2(pi)^2$
 $= a^2 + p^2 + a^2p^2 \geq 0$
 $\therefore a^2 - \beta^2 \geq a^2\beta^2$

$\neg, R(a) = R(\beta) = 0, I(a) \neq 0, I(\beta) \neq 0$ 이면 a, β 는 순허수이다.

따라서 $a = ai, \beta = bi$ (a, b 는 0이 아닌 실수)라 하면
 $a^2 + \beta^2 - a\beta = (ai)^2 + (bi)^2 - ai \cdot bi$
 $= -a^2 - b^2 + ab$

이때 $\neg$ 에 의하여 $a^2 + b^2 \geq ab$ 이고 $b \neq 0$ 이므로
 $a^2 + b^2 > ab$, 즉 $-a^2 - b^2 + ab < 0$
 $\therefore a^2 + \beta^2 < a\beta$

이상에서 $\neg, \neg, \neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

02 $\langle 2x, 2y \rangle + \langle y, x \rangle$
 $= (2y + 2xi) + (x + yi)$
 $= (x + 2y) + (2x + y)i = 4 + 5i$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x + 2y = 4, 2x + y = 5$
 위의 두 식을 연립하여 풀면 $x = 2, y = 1$
 $\therefore xy = 2$

답 ③

03 $a = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하면
 $-a + \beta = -(a + bi) + (c + di)$
 $= (-a + c) + (-b + d)i$

$a + \beta + i = (a + bi) + (c + di) + i$
 $= (a + c) + (b + d + 1)i$
 $-a + \beta, a + \beta + i$ 가 모두 실수이려면
 $-b + d = 0, b + d + 1 = 0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b = -\frac{1}{2}, d = -\frac{1}{2}$

따라서

$a - 2\beta = (a + bi) - 2(c + di)$
 $= (a - 2c) + (b - 2d)i$

에서 $a - 2\beta$ 의 허수부분은

$b - 2d = -\frac{1}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① $-a + \beta, a + \beta + i$ 가 모두 실수일 조건을 구할 수 있다.	50%
② b, d 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ $a - 2\beta$ 의 허수부분을 구할 수 있다.	30%

04 $z\hat{z} + 1 = (a + bi)(b + ai) + 1$
 $= 1 + (a^2 + b^2)i$

$z + \hat{z} = (a + bi) + (b + ai)$
 $= (a + b) + (a + b)i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$1 = a + b, a^2 + b^2 = a + b$
 $\therefore a^2 + b^2 = 1$

답 1

다른 풀이 $z\hat{z} + 1 = z + \hat{z}$ 이므로

$z\hat{z} + 1 - z - \hat{z} = 0, z(\hat{z} - 1) - (\hat{z} - 1) = 0$
 $(\hat{z} - 1)(z - 1) = 0, \hat{z} - 1 = 0$ 또는 $z - 1 = 0$
 $\therefore \hat{z} = 1$ 또는 $z = 1$

(i) $\hat{z} = 1$ 일 때, $a = 0, b = 1$

(ii) $z = 1$ 일 때, $a = 1, b = 0$

(i), (ii)에서 $a^2 + b^2 = 1$

참고 세 복소수 z, w, v 에 대하여 다음이 성립한다.

- ① 교환법칙 $z + w = w + z, zw = wz$
 ② 결합법칙 $(z + w) + v = z + (w + v), (zw)v = z(wv)$
 ③ 분배법칙 $z(w + v) = zw + zv, (z + w)v = zv + wv$

05 $i(x + 3i)^2 = i(x^2 + 6xi - 9) = -6x + (x^2 - 9)i$

이 복소수가 자연수이려면 $-6x$ 는 자연수이고,
 $x^2 - 9 = 0$ 이어야 한다.

$x^2 - 9 = 0$ 에서 $(x + 3)(x - 3) = 0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 3$

(i) $x = -3$ 일 때,

$-6x = 18$ 이므로 $-6x$ 는 자연수이다.

(ii) $x = 3$ 일 때,

$-6x = -18$ 이므로 $-6x$ 는 자연수가 아니다.

(i), (ii)에서 $x = -3$

답 -3

06 자연수 k 에 대하여

$$f(k, 2k) = \frac{k+2ki}{k-2ki} = \frac{(k+2ki)^2}{(k-2ki)(k+2ki)}$$

$$= \frac{-3k^2+4k^2i}{5k^2} = \frac{-3+4i}{5}$$

이므로

$$f(1, 2) = f(2, 4) = f(3, 6) = \dots = f(10, 20)$$

$$= \frac{-3+4i}{5}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 10 \cdot \frac{-3+4i}{5} = -6+8i \quad \text{답 ②}$$

07 $z=a+bi$ (a 는 실수, $b>0$)라 하면

$$\bar{z}=a-bi$$

$z+\bar{z}=6$, $z\bar{z}=10$ 에서

$$2a=6, a^2+b^2=10$$

$$\therefore a=3, b=1 (\because b>0)$$

따라서 $z=3+i$, $\bar{z}=3-i$ 이므로

$$\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z}} = \frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{z\bar{z}}$$

$$= \frac{6\{(3+i)-(3-i)\}}{10} = \frac{6}{5}i$$

$$\text{답 } \frac{6}{5}i$$

채점 기준	비율
① $z=a+bi$ 로 놓고 $\bar{z}$ 를 a, b 로 나타낼 수 있다.	20%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

08 $a\bar{a}=\beta\bar{\beta}=5$ 에서 $\frac{1}{\alpha}=\frac{\bar{\alpha}}{5}$, $\frac{1}{\beta}=\frac{\bar{\beta}}{5}$ 이므로

$$(a+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) = (a+\beta)\left(\frac{\bar{\alpha}}{5}+\frac{\bar{\beta}}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}(a+\beta)(\bar{a}+\bar{\beta})$$

$$= \frac{1}{5}(a+\beta)(\overline{a+\beta})$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 10$$

$$= 2$$

답 ④

두 복소수 z_1, z_2 와 그 켤레복소수 $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ 에 대하여
 $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$

09 $\bar{z}\bar{z}=a^2+b^2$ 이므로

$$a^2+b^2=5$$

이때 a, b 가 자연수이므로

$$a^2=1, b^2=4 \text{ 또는 } a^2=4, b^2=1$$

$$\therefore a=1, b=2 \text{ 또는 } a=2, b=1$$

한편

$$z\bar{z} + \omega\bar{\omega} + z\bar{\omega} + \bar{z}\omega$$

$$= z(\bar{z} + \bar{\omega}) + \omega(\bar{z} + \bar{\omega})$$

$$= (z+\omega)(\bar{z} + \bar{\omega})$$

$$= (z+\omega)(\overline{z+\omega})$$

$$= \{(a+c) + (b+d)i\} \{(a+c) - (b+d)i\}$$

$$= (a+c)^2 + (b+d)^2$$

$$z+\omega = (a+bi) + (c+di)$$

$$= (a+c) + (b+d)i$$

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi)$$

$$= a^2+b^2$$

이므로

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 = 25$$

이때 $a+c, b+d$ 가 자연수이므로

$$(a+c)^2=9, (b+d)^2=16$$

$$\text{또는 } (a+c)^2=16, (b+d)^2=9$$

$$\therefore a+c=3, b+d=4$$

$$\text{또는 } a+c=4, b+d=3$$

(i) $a=1, b=2$ 이면

$$c=2, d=2 \text{ 또는 } c=3, d=1$$

(ii) $a=2, b=1$ 이면

$$c=1, d=3 \text{ 또는 } c=2, d=2$$

이때 $\omega\bar{\omega}=c^2+d^2$ 이므로 $\omega\bar{\omega}$ 의 최댓값은 $c=3, d=1$ 또는 $c=1, d=3$ 일 때 10이다.

답 10

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	20%
② $a+c, b+d$ 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ c, d 의 값을 구할 수 있다.	20%
④ $\omega\bar{\omega}$ 의 최댓값을 구할 수 있다.	20%

10 $z_1\bar{z}_1=4$ 에서 $z_1=\frac{4}{z_1}$, $z_2\bar{z}_2=9$ 에서 $z_2=\frac{9}{z_2}$ 이므로

$$3z_1+2z_2=-12i$$
에서

$$3 \cdot \frac{4}{z_1} + 2 \cdot \frac{9}{z_2} = -12i, \quad \frac{2}{z_1} + \frac{3}{z_2} = -2i$$

$$\frac{3z_1+2z_2}{z_1 \cdot z_2} = -2i, \quad \frac{3z_1+2z_2}{z_1 z_2} = -2i$$

$$\frac{12i}{z_1 z_2} = -2i, \quad z_1 z_2 = \frac{12i}{-2i} = -6$$

$$\therefore z_1 z_2 = -6$$

답 -6

11 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 조건 (가)에서

$$(z-\bar{z})i = \{a+bi - (a-bi)\}i = -2b$$

즉 $-2b=-2$ 이므로

$$b=1$$

한편 조건 (나)에서

$$z + \frac{2}{z} = a+i + \frac{2}{a+bi}$$

$$= a+i + \frac{2(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}$$

$$= a+i + \frac{2a-2bi}{a^2+1}$$

$$= a + \frac{2a}{a^2+1} + \frac{a^2-1}{a^2+1}i$$

이 수가 실수이려면

$$a^2-1=0 \quad \therefore a^2=1$$

$$\therefore (z+i)(\bar{z}+i) = (z+i)(\overline{z+i})$$

$$= (z+i)(\bar{z}-i)$$

$$= z\bar{z} - (z-\bar{z})i + 1$$

$$= (a^2+b^2) - (-2) + 1$$

$$= 2+2+1=5$$

답 ⑤

다른 풀이 $a^2=1$ 에서 $a=\pm 1$ 이므로

$$z=1+i \text{ 또는 } z=-1+i$$

(i) $z=1+i$ 일 때,

$$z+i=1+2i \text{이므로 } \overline{z+i}=1-2i$$

$$\therefore (z+i)(\overline{z+i})=5$$

(ii) $z=-1+i$ 일 때,

$$z+i=-1+2i \text{이므로 } \overline{z+i}=-1-2i$$

$$\therefore (z+i)(\overline{z+i})=5$$

(i), (ii)에서 구하는 값은 5이다.

12 $\frac{1}{i}=-i, \frac{1}{i^2}=-1, \frac{1}{i^3}=i, \frac{1}{i^4}=1$ 이므로

$$\frac{1+i}{i} + \frac{1+2i}{i^2} + \frac{1+3i}{i^3} + \frac{1+4i}{i^4}$$

$$=-(1+i)i-(1+2i)+(1+3i)i+(1+4i)$$

$$=-i+1-1-2i+i-3+1+4i$$

$$=-2+2i$$

$$\frac{1+5i}{i^5} + \frac{1+6i}{i^6} + \frac{1+7i}{i^7} + \frac{1+8i}{i^8}$$

$$=\frac{1+5i}{i} + \frac{1+6i}{i^2} + \frac{1+7i}{i^3} + \frac{1+8i}{i^4}$$

$$=-(1+5i)i-(1+6i)+(1+7i)i+(1+8i)$$

$$=-i+5-1-6i+i-7+1+8i$$

$$=-2+2i$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=2 \cdot (-2+2i)=-4+4i \quad \text{답 ②}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$$

m 의 값이 최대이고, n 의 값이 최소일 때이다.

$$13 \quad 100i+99i^2+98i^3+97i^4=100i-99-98i+97 \\ =-2+2i$$

같은 방법으로 하면

$$96i^5+95i^6+94i^7+93i^8$$

$$=92i^9+91i^{10}+90i^{11}+89i^{12}$$

$\vdots$

$$=4i^{97}+3i^{98}+2i^{99}+i^{100}$$

$$=-2+2i$$

이므로

$$100i+99i^2+98i^3+97i^4+\cdots+2i^{99}+i^{100}$$

$$=25 \cdot (-2+2i)=-50+50i \quad \text{답 ②}$$

$$14 \quad f(n)=n \left\{ \frac{i^3(z+\bar{z})+i(z-\bar{z})}{2z} \right\}^{n+1}$$

$$=n \left\{ \frac{-i(z+\bar{z})+i(z-\bar{z})}{2z} \right\}^{n+1}$$

$$=n \left(\frac{-iz-i\bar{z}+iz-i\bar{z}}{2z} \right)^{n+1}$$

$$=n \left(\frac{-2i\bar{z}}{2z} \right)^{n+1} = n \cdot (-i)^{n+1} \quad \cdots ①$$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$$

$$=1 \cdot (-i)^2 + 2 \cdot (-i)^3 + 3 \cdot (-i)^4 + \cdots + 9 \cdot (-i)^{10}$$

$$=-1+2i+3-4i-5+6i+7-8i-9$$

$$=(-1+3-5+7-9)+(2-4+6-8)i$$

$$=-5-4i$$

$\cdots ②$

$$\text{답 } -5-4i$$

$$\begin{aligned} (-i)^2 &= -1, \\ (-i)^3 &= i, \\ (-i)^4 &= 1, \\ (-i)^5 &= -i, \\ &\vdots \end{aligned}$$

채점 기준

비율

① $f(n)$ 을 간단히 할 수 있다.

50%

② $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$ 의 값을 구할 수 있다.

50%

15 m 이 자연수일 때 $(-i)^m$ 의 값은 $-i, -1, i, 1$ 이 순서대로 반복되므로 조건 ⑦에서 m 은 $4k-3$ (k 는 자연수) 꼴이다.

이때 m 은 두 자리 자연수이므로

$$m=13, 17, 21, \cdots, 97 \quad \cdots ①$$

또 $(2i)^n=2^n \cdot i^n=-2^n$ 에서 $i^n=-1$

n 이 자연수일 때 i^n 의 값은 $i, -1, -i, 1$ 이 순서대로 반복되므로 조건 ④에서 n 은 $4l-2$ (l 은 자연수) 꼴이다.

이때 n 은 두 자리 자연수이므로

$$n=10, 14, 18, \cdots, 98 \quad \cdots ②$$

따라서 $m-n$ 의 값은 $m=97, n=10$ 일 때 최대이므로 $m-n$ 의 최댓값은

$$97-10=87 \quad \cdots ③$$

답 87

채점 기준

비율

① m 의 값을 구할 수 있다.

40%

② n 의 값을 구할 수 있다.

40%

③ $m-n$ 의 최댓값을 구할 수 있다.

20%

$$16 \quad z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{에 대하여}$$

$$z^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2},$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = 1$$

$\vdots$

이므로

$$z^{99} = (z^3)^{33} = 1, \quad z^{100} = (z^3)^{33} \cdot z = z,$$

$$z^{198} = (z^3)^{66} = 1, \quad z^{200} = (z^3)^{66} \cdot z^2 = z^2$$

$$\therefore P_{99} + P_{100} = \left| \frac{z^{99}+1}{z^{198}} \right| + \left| \frac{z^{100}+1}{z^{200}} \right|$$

$$= \left| \frac{1+1}{1} \right| + \left| \frac{z+1}{z^2} \right|$$

$$= 2 + \left| \frac{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1}{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}} \right|$$

$$= 2 + \left| \frac{1+\sqrt{3}i}{-(1+\sqrt{3}i)} \right|$$

$$= 2+1=3 \quad \text{답 3}$$

$$17 \quad z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{이므로}$$

$$z^n + z^{2n} + z^{3n} = i^n + i^{2n} + i^{3n}$$

$$= i^n + (i^2)^n + (i^3)^n$$

$$= i^n + (-1)^n + (-i)^n$$

자연수 k 에 대하여

(i) $n=4k-3$ 일 때,

$$i^n + (-1)^n + (-i)^n = i - 1 - i = -1$$

(ii) $n=4k-2$ 일 때,

$$i^n + (-1)^n + (-i)^n = -1 + 1 - 1 = -1$$

(iii) $n=4k-1$ 일 때,

$$i^n + (-1)^n + (-i)^n = -i - 1 + i = -1$$

(iv) $n=4k$ 일 때,

$$i^n + (-1)^n + (-i)^n = 1 + 1 + 1 = 3$$

이상에서 자연수 n 이 4의 배수가 아니면

$z^n + z^{2n} + z^{3n} = -1$ 이 성립하므로 구하는 100 이하의 자연수 n 의 개수는

$$100 - 25 = 75$$

답 ④

100 이하의 4의 양의 배수의 개수는 25이다.

18 조건 (가)에서 $a-1 < 0, b-1 > 0$

$$\therefore a < 1, b > 1$$

조건 (나)에서 $a+b=0, b-c-2=0$

$$\therefore a = -b, c = b-2$$

이때 $b > 1$ 에서 $-b < -1, b-2 > -1$ 이므로

$$a < -1, c > -1$$

따라서 $a < -1 < c < b$ 이므로

$$a < c < b$$

답 ②

$$c = b - 2 < b$$

두 실수 a, b 에 대하여
 $|a| \geq 0, |b| \geq 0$ 이므로
 $|a| + |b| = 0$ 이면
 $|a| = 0, |b| = 0$
 $\therefore a = 0, b = 0$

$$\begin{aligned} 19 \quad \frac{a}{1+i} + \frac{b}{1-i} &= \frac{a(1-i) + b(1+i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{(a+b) + (-a+b)i}{2} \end{aligned}$$

→ ①

이므로 주어진 등식에서

$$(a+b) + (-a+b)i = -12 + 4i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a+b = -12, -a+b = 4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = -8, b = -4$$

→ ②

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{a}\sqrt{b} &= \sqrt{-8}\sqrt{-4} = -\sqrt{(-8) \cdot (-4)} \\ &= -4\sqrt{2} \end{aligned}$$

→ ③

$$\text{답 } -4\sqrt{2}$$

채점 기준	비율
① $\frac{a}{1+i} + \frac{b}{1-i}$ 를 간단히 할 수 있다.	30%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $\sqrt{a}\sqrt{b}$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

20 $\neg, a < 0$ 이므로 $\sqrt{a^2} = -a$

$$b > 0 \text{이므로 } \sqrt{b^2} = b$$

$$\therefore \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = -ab$$

ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $(\sqrt{x})^2 = x$ 이므로

$$(\sqrt{ab})^2 = ab$$

ㄷ. $a < 0, b > 0$ 이므로

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

$a > 0, b < 0$ 일 때,
 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$
 그 외의 경우에는
 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
 (단, $b \neq 0$)

내신 + 수능

1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제**

본책 36쪽

01 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)$

$$\begin{aligned} &= \left(i + \frac{1}{i}\right) + \left(i^2 + \frac{2}{i^2}\right) + \left(i^3 + \frac{3}{i^3}\right) + \dots + \left(i^{100} + \frac{100}{i^{100}}\right) \\ &= (i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{100}) \\ &\quad + \left(\frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4} + \dots + \frac{100}{i^{100}}\right) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} &i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{100} \\ &= (i + i^2 + i^3 + i^4) + i^4(i + i^2 + i^3 + i^4) \\ &\quad + \dots + i^{96}(i + i^2 + i^3 + i^4) \\ &= (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) + \dots + (i - 1 - i + 1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4} + \dots + \frac{100}{i^{100}} \\ &= \left(\frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4}\right) + \left(\frac{5}{i^5} + \frac{6}{i^6} + \frac{7}{i^7} + \frac{8}{i^8}\right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{97}{i^{97}} + \frac{98}{i^{98}} + \frac{99}{i^{99}} + \frac{100}{i^{100}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{i} - 2 - \frac{3}{i} + 4\right) + \left(\frac{5}{i} - 6 - \frac{7}{i} + 8\right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{97}{i} - 98 - \frac{99}{i} + 100\right) \\ &= \left(2 - \frac{2}{i}\right) + \left(2 - \frac{2}{i}\right) + \dots + \left(2 - \frac{2}{i}\right) \\ &= 25\left(2 - \frac{2}{i}\right) = 50 - \frac{50}{i} \\ &= 50 + 50i \end{aligned}$$

이므로

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100) = 50 + 50i$$

따라서 $x=50, y=50$ 이므로

$$x+y=100$$

답 ④

02 $(1+i)^2=2i, (1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4$

$(1+i)^m = -4^n$ 이 성립하려면 $m=4k$ (k 는 자연수)일 때,

$$(1+i)^m = (1+i)^{4k} = (-4)^k$$

에서

$$(-4)^k = -4^n$$

이어야 한다.

이때 모든 자연수 n 에 대하여 $-4^n < 0$ 이므로 $k=n$ 이고 k 는 홀수이다.

따라서 $m+n$ 의 값은 $m=92, n=23$ 일 때 최대이므로 $m+n$ 의 최댓값은 115이다.

답 ⑤

03 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 중에서 $-1, i, 1-i$ 의 개수를 각각 x, y, z 라 하면

$$x+y+z=10 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $(-1)^2=1, i^2=-1, (1-i)^2=-2i$ 이므로

$$\begin{aligned} &a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 \\ &= 1 \cdot x + (-1) \cdot y + (-2i) \cdot z \\ &= x - y - 2zi \end{aligned}$$

즉 $x-y-2zi=6-4i$ 이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x-y=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$-2z=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

②에서

$$z=2$$

$z=2$ 를 ①에 대입하면

$$x+y=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

①, ③을 연립하여 풀면

$$x=7, y=1$$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$$

$$=(-1) \cdot 7 + i \cdot 1 + (1-i) \cdot 2$$

$$=-5-i$$

$$\text{답 } -5-i$$

04 $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i,$

$$\frac{3-4i}{4+3i} = \frac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{-25i}{25} = -i \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m - \left(\frac{3-4i}{4+3i}\right)^n = i^m - (-i)^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $m=4k-3$ ($k=1, 2, 3, \dots, 13$)일 때,

$i^m=i$ 이므로 ①이 실수가 되려면

$$(-i)^n=i$$

이어야 한다.

$$\therefore n=4t-1 \quad (t=1, 2, 3, \dots, 12)$$

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$13 \cdot 12 = 156$$

(ii) $m=4k-2$ ($k=1, 2, 3, \dots, 13$)일 때,

$i^m=-1$ 이므로 ①이 실수가 되려면

$$(-i)^n=-1 \text{ 또는 } (-i)^n=1$$

이어야 한다.

$$\therefore n=2t \quad (t=1, 2, 3, \dots, 25)$$

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$13 \cdot 25 = 325$$

(iii) $m=4k-1$ ($k=1, 2, 3, \dots, 12$)일 때,

$i^m=-i$ 이므로 ①이 실수가 되려면

$$(-i)^n=-i$$

이어야 한다.

$$\therefore n=4t-3 \quad (t=1, 2, 3, \dots, 13)$$

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$12 \cdot 13 = 156$$

(iv) $m=4k$ ($k=1, 2, 3, \dots, 12$)일 때,

$i^m=1$ 이므로 ①이 실수가 되려면

$$(-i)^n=-1 \text{ 또는 } (-i)^n=1$$

이어야 한다.

$$\therefore n=2t \quad (t=1, 2, 3, \dots, 25)$$

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$12 \cdot 25 = 300$$

이상에서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$156+325+156+300=937$$

$$\text{답 } 937$$

$(2i)^m \cdot (1+i)^n$
 $= (2i)^{m+k} \cdot (1+i)$
 이므로 항상 허수이다.

m, k 는 모두 자연수이다.

$n=4s-2$ ($s=1, 2, 3, \dots, 13$) 또는 $n=4s$ ($s=1, 2, 3, \dots, 12$)이므로 n 이 짝수일 때이다.

$$z = \frac{0+(2+9)i}{2+9} = i$$

05 조건 ⑦에서 $m < n$ 이므로 $n \geq 2$

$n=2k+1$ (k 는 자연수) 풀이면

$$(1+i)^n = (1+i)^{2k+1}$$

$$= \{(1+i)^2\}^k \cdot (1+i)$$

$$= (2i)^k \cdot (1+i)$$

이므로 조건 ④에서 $(2i)^m \cdot (1+i)^n$ 이 실수가 되도록 하는 자연수 m 은 존재하지 않는다.

즉 $n=2k$ 풀이므로

$$(-2)^l \cdot (2i)^m \cdot (1+i)^n = (-2)^l \cdot (2i)^m \cdot (1+i)^{2k}$$

$$= (-2)^l \cdot (2i)^m \cdot (2i)^k$$

$$= (-2)^l \cdot (2i)^{m+k}$$

$$= (-1)^l \cdot 2^{l+m+k} \cdot i^{m+k}$$

$(-2)^l \cdot (2i)^m \cdot (1+i)^n = 32$ 가 성립하려면

$$32=2^5$$

$$l+m+k=5$$

$$\cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(-1)^l \cdot i^{m+k}=1$$

$$\cdots \cdots \textcircled{2}$$

(i) $l=1$ 일 때, ①에서 $m+k=4$ 이고

$$(-1) \cdot i^4 = -1$$

따라서 ②을 만족시키지 않는다.

(ii) $l=2$ 일 때, ①에서 $m+k=3$ 이고

$$(-1)^2 \cdot i^3 = -i$$

따라서 ②을 만족시키지 않는다.

(iii) $l=3$ 일 때, ①에서 $m+k=2$ 이고

$$(-1)^3 \cdot i^2 = 1$$

따라서 ②을 만족시킨다.

이때 $m+k=2$ 에서 $m=1, k=1$ 이므로

$$l=3, m=1, n=2k=2$$

(iv) $l \geq 4$ 일 때, ①을 만족시키는 자연수 m, k 는 존재하지 않는다.

이상에서 $l=3, m=1, n=2$ 이므로

$$lmn=6$$

$$\text{답 } 6$$

06 $z^2 < 0$ 에서 z 는 순허수이고

$$z = \frac{3+\sqrt{2}i}{a-3i} = \frac{(3+\sqrt{2}i)(a+3i)}{(a-3i)(a+3i)}$$

$$= \frac{(3a-3\sqrt{2}) + (\sqrt{2}a+9)i}{a^2+9}$$

이므로

$$3a-3\sqrt{2}=0 \quad \therefore a=\sqrt{2}$$

즉 $z=i$ 이므로 자연수 n 에 대하여 z^n 의 값은 $i, -1, -i, 1$ 이 이 순서대로 반복된다.

한편

$$\frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}} = \frac{i\{1-(-i)\}}{\sqrt{2}} = \frac{i(1+i)}{\sqrt{2}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

이므로

$$\left\{ \frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}} \right\}^2 = \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\left\{ \frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}} \right\}^3 = \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

$$= -i \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\left\{\frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}}\right\}^4 &= \left\{\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^2 = (-i)^2 = -1 \\ \left\{\frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}}\right\}^5 &= \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ &= -1 \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \left\{\frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}}\right\}^6 &= \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 \cdot \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= -1 \cdot (-i) = i \\ \left\{\frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}}\right\}^7 &= \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^6 \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ &= i \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\ \left\{\frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}}\right\}^8 &= \left\{\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^4\right\}^2 = (-1)^2 = 1 \\ &\vdots\end{aligned}$$

즉 자연수 n 에 대하여 $\left\{\frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}}\right\}^n$ 의 값은 $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, 1$ 이 이 순서대로 반복된다.

따라서 $z^n + \left\{\frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}}\right\}^n = 2$ 를 만족시키려면 $z^n = 1$, $\left\{\frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}}\right\}^n = 1$ 이어야 한다.

한편 n 이 4의 배수일 때 $z^n = 1$ 이고 n 이 8의 배수일 때 $\left\{\frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}}\right\}^n = 1$ 이므로 자연수 n 은 8의 배수이어야 한다.

따라서 구하는 100 이하의 자연수 n 은

8, 16, 24, ..., 96

의 12개이다.

답 ⑤

$Ak+B=0$ 이 모든 양수 k 에 대하여 성립한다.
 $\Rightarrow Ak+B=0$ 은 k 에 대한 항등식이다.
 $\Rightarrow A=0, B=0$

04 이차방정식

개념 & 핵심 기출

본책 37쪽

01 $x^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$ 에서

$$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha = -\sqrt{2}, \beta = \sqrt{3}$

$(\sqrt{2}+1)x^2 - x - (2+\sqrt{2}) = 0$ 의 양변에 $\sqrt{2}-1$ 을 곱하면

$$x^2 - (\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2} = 0$$

$$(x+1)(x-\sqrt{2})=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

이때 $\gamma < \delta$ 이므로 $\gamma = -1, \delta = \sqrt{2}$

$$\therefore \alpha < \gamma < \delta < \beta$$

답 ③

02 $|x-3|=t$ ($t \geq 0$)로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2 + 3t - 10 = 0, \quad (t+5)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t \geq 0)$$

즉 $|x-3|=2$ 이므로 $x-3 = \pm 2$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

$$\therefore |a-\beta| = 4$$

답 4

03 방정식 $|x^2 + (a^2-1)x + 2a-5| = 3$ 의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 이 방정식에 대입하여 정리하면

$$|a^2 + 2a - 5| = 3 \quad \therefore a^2 + 2a - 5 = \pm 3$$

(i) $a^2 + 2a - 5 = -3$ 일 때,

$$a^2 + 2a - 2 = 0 \quad \therefore a = -1 \pm \sqrt{3}$$

그런데 $a > 0$ 이므로

$$a = -1 + \sqrt{3}$$

(ii) $a^2 + 2a - 5 = 3$ 일 때,

$$a^2 + 2a - 8 = 0, \quad (a+4)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -4 \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 $a > 0$ 이므로

$$a = 2$$

(i), (ii)에서 $a = -1 + \sqrt{3}$ 또는 $a = 2$ 이므로 구하는 합은

$$(-1 + \sqrt{3}) + 2 = 1 + \sqrt{3}$$

답 ③

04 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{k})^2 - \{(a^2-3)k + (b^2-3b+2)\} = 0$$

$$(a^2-4)k + (b^2-3b+2) = 0$$

$$(a+2)(a-2)k + (b-1)(b-2) = 0$$

위의 식이 모든 양수 k 에 대하여 성립하므로

$$(a+2)(a-2) = 0 \text{에서}$$

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

$$(b-1)(b-2) = 0 \text{에서}$$

$$b = 1 \text{ 또는 } b = 2$$

따라서 $a+b$ 는 $a=2, b=2$ 일 때 최대이므로 $a+b$ 의 최댓값은

$$2+2=4$$

답 4

05 $\triangle ABC$ 는 둔각삼각형이므로

$$b^2+c^2 < a^2 \quad (\because a > b > c) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 이차방정식 $(a+b)x^2+2cx+a-b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= c^2 - (a+b)(a-b) \\ &= c^2 - (a^2 - b^2) \\ &= c^2 - a^2 + b^2 < 0 \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

참고 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$ 라 할 때,

$$\begin{aligned} \angle C < 90^\circ \text{이면 } a^2+b^2 &> c^2 \\ \angle C = 90^\circ \text{ 이면 } a^2+b^2 &= c^2 \\ \angle C > 90^\circ \text{ 이면 } a^2+b^2 &< c^2 \end{aligned}$$

06 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$\begin{aligned} D &= (-a)^2 - 4b > 0 \\ \therefore a^2 &> 4b \end{aligned}$$

(i) $a \leq 2$ 일 때,

$4 > 4b$ 를 만족시키는 b 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=3$ 일 때,

$$9 > 4b \text{ 이므로 } b=1, 2$$

(iii) $a=4$ 일 때,

$$16 > 4b \text{ 이므로 } b=1, 2, 3$$

(iv) $a \geq 5$ 일 때,

$$25 > 4b \text{ 이므로 } b=1, 2, 3, 4, 5, 6$$

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$2+3+6+6=17$$

답 ⑤

07 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=6, \alpha\beta=4$$

이때 $\alpha > 0, \beta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 &= \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta} \\ &= \alpha+\beta+2\sqrt{4} \\ &= 6+2\sqrt{4}=10 \\ \therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} &= \sqrt{10} \quad (\because \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} > 0) \end{aligned}$$

답 ⑤

08 주어진 이차방정식의 두 근의 차가 2이므로 두 근을 $\alpha, \alpha+2$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha+(\alpha+2) &= m \quad \therefore m=2\alpha+2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \alpha(\alpha+2) &= 3m-1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha+2) &= 3(2\alpha+2)-1 \\ \alpha^2-4\alpha-5 &= 0, \quad (\alpha+1)(\alpha-5)=0 \\ \therefore \alpha &= -1 \text{ 또는 } \alpha=5 \end{aligned}$$

$$\alpha=-1 \text{ 을 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } m=0$$

$$\alpha=5 \text{ 를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } m=12$$

$$\text{그런데 } m > 0 \text{ 이므로 } m=12$$

답 12

다른 풀이 이차방정식 $x^2-mx+3m-1=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$|\alpha-\beta|=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= m, \alpha\beta=3m-1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \\ (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \text{ 이므로 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서} \\ 4 &= m^2-4(3m-1), \quad m^2-12m=0 \\ m(m-12) &= 0 \quad \therefore m=12 \quad (\because m > 0) \end{aligned}$$

09 조건 (가)에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a, \alpha\beta=b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} (\alpha+4)+(\beta+4) &= -3a, (\alpha+4)(\beta+4)=3b \\ \therefore \alpha+\beta+8 &= -3a, \alpha\beta+4(\alpha+\beta)+16=3b \\ \therefore \alpha+\beta+8 &= -3a, \alpha\beta+4(\alpha+\beta)+16=3b \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} a+8 &= -3a, b+4a+16=3b \\ \therefore a &= -2, b=4 \\ \therefore a+b &= 2 \end{aligned}$$

답 ②

10 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} (3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2}) &= -a \quad \therefore a=-6 \\ (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) &= b \quad \therefore b=7 \end{aligned}$$

따라서 $a+b=1, a-b=-13$ 이므로 1, -13을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$\begin{aligned} (x-1)(x+13) &= 0 \\ \therefore x^2+12x-13 &= 0 \quad \text{답 } x^2+12x-13=0 \end{aligned}$$

11 이차방정식 $x^2+6x+7=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= -6, \alpha\beta=7 \\ \therefore \alpha < 0, \beta < 0 \end{aligned}$$

즉 $|\alpha|=-\alpha, |\beta|=-\beta$ 이므로 $|\alpha|, |\beta|$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은 $-\alpha, -\beta$ 를 두 근으로 하는 이차방정식과 같다.

따라서

$$\begin{aligned} |\alpha|+|\beta| &= -\alpha-\beta \\ &= -(\alpha+\beta)=6, \\ |\alpha||\beta| &= (-\alpha) \cdot (-\beta) \\ &= \alpha\beta=7 \end{aligned}$$

이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+7=0$ 이다.

답 ①

12 근의 공식을 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{a}$ 로 잘못 적용하여 풀었으므로

2로 나눈 식이 근의 공식을 바르게 적용한 식이다.

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}=4, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}=-2$$

이때 바르게 풀 근은

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=2, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-1$$

이므로 2, -1을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 a 인 이차방정식은

$$a(x-2)(x+1)=0$$

$$\therefore ax^2-ax-2a=0$$

이 이차방정식이 $ax^2+bx+c=0$ 과 같으므로

$$b=-a, c=-2a$$

$$\therefore \frac{b+c}{a}=\frac{-a-2a}{a}=-3 \quad \text{답 -3}$$

13 이차방정식 $x^2+2x+4=0$ 의 두 근은

$$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot 4}$$

$$=-1\pm\sqrt{3}i$$

따라서 x^2+2x+4 를 복소수의 범위에서 인수분해 하면

$$\{x-(-1-\sqrt{3}i)\}\{x-(-1+\sqrt{3}i)\}$$

$$=(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{3}i) \quad \text{답 ④}$$

다른 풀이 $x^2+2x+4=(x^2+2x+1)-(-3)$

$$=(x+1)^2-(\sqrt{3}i)^2$$

$$=(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{3}i)$$

14 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $2+i$, $2-i$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2+i)+(2-i)=-a \quad \therefore a=-4$$

$$(2+i)(2-i)=b \quad \therefore b=5$$

따라서 이차방정식 $5x^2+4x+1=0$ 의 두 근은

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-5\cdot 1}}{5}$$

$$=\frac{-2\pm i}{5}$$

이므로 $5x^2+4x+1$ 을 복소수의 범위에서 인수분해 하면

$$5\left(x-\frac{-2-i}{5}\right)\left(x-\frac{-2+i}{5}\right)$$

$$=5\left(x+\frac{2+i}{5}\right)\left(x+\frac{2-i}{5}\right)$$

$$\text{답 } 5\left(x+\frac{2+i}{5}\right)\left(x+\frac{2-i}{5}\right)$$

15 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ 이고, 이차방정식

$x^2+x+1=0$ 의 두 근은

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 x^3-1 을 복소수의 범위에서 인수분해 하면

$$(x-1)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$=(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$\text{답 } (x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

이차방정식

$$ax^2+2b'x+c=0$$

의 근은

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

이차방정식

$$x^2+6x-2=0$$

$$x=-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot(-2)}$$

$$=-3\pm\sqrt{11}$$

16 이차방정식 $x^2-(p+q)x+p-q=0$ 의 한 근이 $4-\sqrt{10}$ 이고, 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $4+\sqrt{10}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$(4-\sqrt{10})+(4+\sqrt{10})=p+q$$

$$(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})=p-q$$

$$\therefore p+q=8, p-q=6$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $p=7, q=1$

$$\therefore pq=7 \quad \text{답 ②}$$

17 $\frac{2+i}{1+i}=\frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-i}{2}$ 에서 이차방정식

$2x^2+2ax+b=0$ 의 한 근이 $\frac{3-i}{2}$ 이고, 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $\frac{3+i}{2}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{3-i}{2}+\frac{3+i}{2}=-a \quad \therefore a=-3$$

$$\frac{3-i}{2}\cdot\frac{3+i}{2}=\frac{b}{2} \quad \therefore b=5$$

따라서 이차방정식 $x^2+cx+d=0$ 의 한 근이 $-3+\sqrt{5}$ 이고, 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $-3-\sqrt{5}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$(-3+\sqrt{5})+(-3-\sqrt{5})=-c \quad \therefore c=6$$

$$(-3+\sqrt{5})(-3-\sqrt{5})=d \quad \therefore d=4$$

$$\therefore d-c=-2 \quad \text{답 -2}$$

18 이차방정식 $x^2+mx+n=0$ 의 한 근이 $-1+\sqrt{2}i$ 이고, 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}i$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$(-1+\sqrt{2}i)+(-1-\sqrt{2}i)=-m \quad \therefore m=2$$

$$(-1+\sqrt{2}i)(-1-\sqrt{2}i)=n \quad \therefore n=3$$

따라서 이차방정식 $x^2+6x-2=0$ 의 양의 근은

$-3+\sqrt{11}$ 이므로

$$a=-3, b=11$$

$$\therefore a+b=8 \quad \text{답 ②}$$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 40쪽

01 $(x-2)*(x+4)$

$$=(x-2)(x+4)-(x-2)-(x+4)$$

$$=x^2+2x-8-x+2-x-4$$

$$=x^2-10$$

$$x*3=3x-x-3=2x-3$$

따라서 주어진 방정식은

$$x^2-10+|2x-3|-2=0$$

$$\therefore x^2+|2x-3|-12=0$$

$$|A|=\begin{cases} A & (A\geq 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$$

→ ①

(i) $2x-3 < 0$, 즉 $x < \frac{3}{2}$ 일 때,

$$x^2 - (2x-3) - 12 = 0, \quad x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{10}$$

그런데 $x < \frac{3}{2}$ 이므로 $x = 1 - \sqrt{10}$ → 2

(ii) $2x-3 \geq 0$, 즉 $x \geq \frac{3}{2}$ 일 때,

$$x^2 + (2x-3) - 12 = 0, \quad x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x+5)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x \geq \frac{3}{2}$ 이므로 $x = 3$ → 3

(i), (ii)에서

$$x = 1 - \sqrt{10} \text{ 또는 } x = 3$$

$$\boxed{\text{답}} \quad x = 1 - \sqrt{10} \text{ 또는 } x = 3$$

채점 기준	비율
① 주어진 방정식을 간단히 할 수 있다.	30%
② $x < \frac{3}{2}$ 일 때, x 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $x \geq \frac{3}{2}$ 일 때, x 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ 방정식의 해를 구할 수 있다.	10%

02 이차방정식 $3x^2 - (2k+5)x + 3 = 0$ 의 한 근이 a 이므로

$$3a^2 - (2k+5)a + 3 = 0$$

$a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$3a - (2k+5) + \frac{3}{a} = 0$$

$$3\left(a + \frac{1}{a}\right) - (2k+5) = 0$$

이때 $a + \frac{1}{a} = k^2$ 이므로

$$3k^2 - 2k - 5 = 0, \quad (k+1)(3k-5) = 0$$

$$\therefore k = \frac{5}{3} \quad (\because k > 0) \quad \boxed{\text{답}} \quad ③$$

💡 비밀노트

x^2 의 계수와 상수항이 같은 이차방정식은 두 근의 곱이 1이므로 a 가 한 근이면 $\frac{1}{a}$ 도 근이다. 이 성질을 이용하면 $3x^2 - (2k+5)x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 $a + \frac{1}{a} = \frac{2k+5}{3}$ 이므로 $\frac{2k+5}{3} = k^2$ 을 만족시키는 양수 k 의 값을 구해도 된다.

03 $kx^2 + (1-2k)x - 2 = 0$ 에서

$$(kx+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{k} \text{ 또는 } x = 2$$

$x^2 - 2(k+1)x + 4k = 0$ 에서

$$(x-2k)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2k \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $\alpha = -\frac{1}{k}$, $\beta = 2$, $\gamma = 2k$ 이므로 $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ 에서

이차방정식이므로 $k \neq 0$

$$2 - \left(-\frac{1}{k}\right) = 2k - 2, \quad 2k^2 - 4k - 1 = 0$$

$$\therefore k = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} \quad \boxed{\text{답}} \quad \frac{2 - \sqrt{6}}{2}, \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$$

04 (i) $-1 < x < 0$ 일 때, $0 < x^2 < 1$ 이므로

$$[x^2] = 0, [x] = -1$$

따라서 주어진 방정식은 $x^2 = 2x + 1$ 이므로

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{2}$$

그런데 $-1 < x < 0$ 이므로

$$x = 1 - \sqrt{2}$$

→ 1

(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때, $0 \leq x^2 < 1$ 이므로

$$[x^2] = 0, [x] = 0$$

따라서 주어진 방정식은 $0 = 2x + 1$ 이므로

$$x = -\frac{1}{2}$$

그런데 $0 \leq x < 1$ 이므로 해는 없다. → 2

(i), (ii)에서 구하는 해는

$$x = 1 - \sqrt{2}$$

→ 3

$$\boxed{\text{답}} \quad x = 1 - \sqrt{2}$$

채점 기준	비율
① $-1 < x < 0$ 일 때, 해를 구할 수 있다.	40%
② $0 \leq x < 1$ 일 때, 해를 구할 수 있다.	40%
③ 방정식의 해를 구할 수 있다.	20%

05 $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : r$ 이므로

$$\overline{AB} = k, \overline{BC} = rk \quad (k > 0)$$

라 하면 $\square ABEF$ 는 한 변의 길이가 k 인 정사각형이다.

$$\therefore \overline{EC} = (r-1)k$$

$\square ABCD$ 와 $\square ECDF$ 가 닮음이므로

$$\overline{AB} : \overline{EC} = \overline{BC} : \overline{CD}$$

$$k : (r-1)k = rk : k$$

$$k^2 = r(r-1)k^2, \quad r^2 - r - 1 = 0 \quad (\because k > 0)$$

$$\therefore r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

그런데 $r > 1$ 이므로 $r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ → 1

참고 주어진 문제와 같이 직사각형 ABCD에서 정사각형 ABEF를 잘라 내고 남은 직사각형이 원래의 직사각형과 닮음일 때, 두 변 AB, BC의 길이의 비를 황금비라 한다. 즉 황금비는 $1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 이고, 이러한 직사각형 ABCD를 황금사각형이라 한다.

06 이차방정식 $x^2 - 2(a-k)x - a + 15 = 0$ 이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = \{-(a-k)\}^2 - (-a+15) \geq 0$$

$$\therefore (a-k)^2 + a - 15 \geq 0 \quad \dots\dots ①$$

이때 a, k 는 실수이므로 $(a-k)^2 \geq 0$

따라서 ㉠이 모든 실수 k 에 대하여 성립하려면
 $a-15 \geq 0$, 즉 $a \geq 15$ 이어야 하므로 실수 a 의 최솟값은 15이다. 답 ③

07 $x^2+3xy+2y^2-x-3y+k-1$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 + (3y-1)x + 2y^2 - 3y + k - 1$$

$$x^2 + (3y-1)x + 2y^2 - 3y + k - 1 = 0$$

을 x 에 대한 이차방정식으로 생각하면 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-(3y-1) \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$(단, D = (3y-1)^2 - 4(2y^2 - 3y + k - 1))$$

그런데 주어진 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해 되려면 D 가 완전제곱식이 되어야 하므로

$$D = (3y-1)^2 - 4(2y^2 - 3y + k - 1)$$

$$= y^2 + 6y - 4k + 5$$

에서 y 에 대한 이차방정식 $D=0$ 의 판별식이 0이어야 한다.

따라서 $D=0$ 의 판별식을 D' 이라 하면

$$\frac{D'}{4} = 3^2 - (-4k+5) = 0$$

$$\therefore k = -1$$

답 ⑤

비밀노트

x, y 에 대한 이차식 A 가 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 때에는 다음과 같은 순서로 문제를 해결한다.

- (i) A 를 x (또는 y)에 대하여 내림차순으로 정리한다.
- (ii) $A=0$ 의 판별식 D 가 완전제곱식이어야 하므로 $D=0$ 의 판별식이 0이어야 한다.

08 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-2(a+b)\}^2$$

$$-4\{(a-b)^2 + 3ab + 4a - 3b + 23\}$$

$$= 0$$

$$(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 + b^2 + ab + 4a - 3b + 23) = 0$$

$$ab - 4a + 3b - 23 = 0$$

$$a(b-4) + 3(b-4) = 11$$

$$\therefore (a+3)(b-4) = 11$$

이때 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 에서

$$a < 0, b < 0 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } b=0$$

이고, a, b 는 정수이므로

$$a+3 = -1, b-4 = -11$$

$$\therefore a = -4, b = -7$$

$$\therefore ab = 28$$

답 28

09 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 이차방정식의 두 근의 곱이 양수이므로 두 근의 부호는 서로 같다.

주어진 이차방정식의 두 근을 $4\alpha, \alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha = -3 \text{을 ㉠에 대입하면}$$

$$-15 = -2k + 1$$

$$\therefore k = 8$$

$$\alpha = 3 \text{을 ㉠에 대입하면}$$

$$15 = -2k + 1$$

$$\therefore k = -7$$

$\alpha + \beta > 0$ 이므로 α, β 중 적어도 하나는 양수이다.
 이때 $\alpha > 0, \beta > 0$ 이라 하면

$$|\alpha| + |\beta| = \alpha + \beta = 3$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $\alpha < \beta$ 일 때,
 $\alpha < 0, \beta > 0$

$$4\alpha + \alpha = -(2k-1) \quad \dots\dots ㉠$$

$$4\alpha \cdot \alpha = 36 \quad \dots\dots ㉡ \quad \rightarrow 1$$

㉡에서 $\alpha^2 = 9$ 이므로

$$\alpha = \pm 3 \quad \rightarrow 2$$

$$\alpha = -3 \text{을 ㉠에 대입하면 } k = 8$$

$$\alpha = 3 \text{을 ㉠에 대입하면 } k = -7 \quad \rightarrow 3$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$8 \cdot (-7) = -56 \quad \rightarrow 4$$

답 -56

채점 기준	비율
① 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30%
② α 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ k 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ 모든 실수 k 의 값의 곱을 구할 수 있다.	20%

10 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha\beta = a \quad \dots\dots ㉡$$

이때 $|\alpha| + |\beta| = 9$ 이므로 $\alpha < \beta$ 라 하면

$$\alpha < 0, \beta > 0$$

$$\therefore -\alpha + \beta = 9 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$$\alpha = -3, \beta = 6$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$a = -18 \quad \text{답 ①}$$

다른 풀이 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = a$ 이고, $|\alpha| + |\beta| = 9$ 이므로

$$(|\alpha| + |\beta|)^2 = \alpha^2 + 2|\alpha\beta| + \beta^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2|\alpha\beta|$$

$$= 9 - 2a + 2|a|$$

따라서 $9 - 2a + 2|a| = 81$ 이므로

$$|a| - a = 36$$

그런데 $a \geq 0$ 이면 $|a| - a = a - a = 0$ 이므로

$$a < 0$$

즉 $|a| - a = -a - a = -2a$ 이므로

$$-2a = 36 \quad \therefore a = -18$$

11 이차방정식 $x^2 - x + p = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = p$$

이차방정식 $x^2 - qx - 1 = 0$ 의 두 근이 $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$= 1 + \frac{1}{p} = q \quad \dots\dots ㉠$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= 2 + p + \frac{1}{p} = -1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠에서 $\frac{1}{p}=q-1$, ㉡에서 $p+\frac{1}{p}=-3$ 이므로

$$p+q-1=-3$$

$$\therefore p+q=-2$$

답 ①

12 이차방정식 $(x-2)(x+3)=3x$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$(\alpha-2)(\alpha+3)=3\alpha, (\beta-2)(\beta+3)=3\beta$$

$$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)=9\alpha\beta$$

이때 $(x-2)(x+3)=3x$ 에서 $x^2-2x-6=0$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=-6$$

$$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)=9\alpha\beta=-54$$

답 ①

다른 풀이 $(x-2)(x+3)=3x$ 에서

$$x^2-2x-6=0$$

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-6$$

$$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)$$

$$=\{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\}\{\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9\}$$

$$=(-6-2\cdot 2+4)(-6+3\cdot 2+9)$$

$$=-54$$

13 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2a, \alpha\beta=-3b$$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=4a^2+12b$$

즉 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{a^2+3b}<10$ 이므로

$$\sqrt{a^2+3b}<5 \quad \therefore a^2+3b<25$$

→ ①

(i) $a=1$ 일 때,

$3b<24$, 즉 $b<8$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),$

$(1, 5), (1, 6), (1, 7)$ 의 7개

(ii) $a=2$ 일 때,

$3b<21$, 즉 $b<7$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4),$

$(2, 5), (2, 6)$ 의 6개

(iii) $a=3$ 일 때,

$3b<16$, 즉 $b<\frac{16}{3}$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5)$ 의 5개

(iv) $a=4$ 일 때,

$3b<9$, 즉 $b<3$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(4, 1), (4, 2)$ 의 2개

(v) $a\geq 5$ 일 때,

$a^2+3b>25$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 a, b 는 존재하지 않는다. → ②

이상에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$7+6+5+2=20$$

→ ③

답 20

a, b 는 자연수이므로
 $4a^2>0, 12b>0$
 $\therefore 4a^2+12b>0$

$0<a<x<b,$
 $0<c<y<d$ 일 때
 ① $a+c<x+y<b+d$
 ② $ac<xy<bd$

채점 기준	비율
① 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b 의 조건을 구할 수 있다.	40%
② 순서쌍 (a, b) 를 구할 수 있다.	50%
③ 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구할 수 있다.	10%

14 이차방정식 $x^2-ax+2b-4=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a, \alpha\beta=2b-4$$

이차방정식 $x^2-5a^2x+16b^2=0$ 의 두 근이 α^2, β^2 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha^2+\beta^2=5a^2, \alpha^2\beta^2=16b^2$$

이때 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ 이므로

$$5a^2=a^2-2(2b-4)$$

$$\therefore a^2=-b+2$$

..... ㉠

→ ①

또 $\alpha^2\beta^2=16b^2$, 즉 $(\alpha\beta)^2=16b^2$ 에서

$$(2b-4)^2=16b^2, \quad 3b^2+4b-4=0$$

$$(b+2)(3b-2)=0$$

$$\therefore b=-2 \text{ 또는 } b=\frac{2}{3}$$

→ ②

$b=-2$ 를 ㉠에 대입하면

$$a^2=4 \quad \therefore a=\pm 2$$

$$\therefore ab=-4 \text{ 또는 } ab=4$$

$b=\frac{2}{3}$ 를 ㉠에 대입하면

$$a^2=\frac{4}{3} \quad \therefore a=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore ab=-\frac{4\sqrt{3}}{9} \text{ 또는 } ab=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

따라서 ab 의 최댓값은 4이다. → ③

답 4

채점 기준	비율
① 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 세울 수 있다.	30%
② b 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ ab 의 최댓값을 구할 수 있다.	30%

15 조건 (나)에서

$$6<\alpha+\beta<8, 5<\alpha\beta<12$$

이차방정식 $ax^2-bx+3c=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$ 이므로

$$6<\frac{b}{a}<8 \quad \therefore 6a<b<8a \quad (\because a>0)$$

이때 조건 (가)에 의하여

$$a=1, b=7$$

또 $\alpha\beta=\frac{3c}{a}=3c$ 이므로

$$5<3c<12 \quad \therefore \frac{5}{3}<c<4$$

이때 조건 (나)에 의하여

$$c=2 \text{ 또는 } c=3$$

(i) $c=2$ 일 때, 주어진 방정식은

$$x^2 - 7x + 6 = 0, \quad (x-1)(x-6) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=6$$

이것은 조건 ④를 만족시키지 않는다.

(ii) $c=3$ 일 때, 주어진 방정식은

$$x^2 - 7x + 9 = 0$$

$$\therefore x = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

(i), (ii)에서 $c=3$ 이므로

$$a+2b+3c=1+2 \cdot 7+3 \cdot 3=24$$

답 24

16 이차방정식 $x^2+2x-2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2+2\alpha-2=0, \quad \beta^2+2\beta-2=0$$

또 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \quad \alpha\beta=-2$$

$$\therefore (\alpha^3+2\alpha^2-\alpha-1)(\beta^3+2\beta^2-\beta-1)$$

$$= \{\alpha(\alpha^2+2\alpha-2)+\alpha-1\}$$

$$\times \{\beta(\beta^2+2\beta-2)+\beta-1\}$$

$$= (\alpha-1)(\beta-1)$$

$$= \alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1$$

$$= -2 - (-2) + 1 = 1$$

답 ③

17 이차방정식 $x^2+4x-8=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+4x-8$$

이때 $f(\alpha)=2, f(\beta)=2$ 에서

$$f(\alpha)-2=0, \quad f(\beta)-2=0$$

따라서 이차방정식 $f(x)-2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(x)-2=(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$=x^2+4x-8$$

$$\therefore f(x)=x^2+4x-6$$

답 ⑤

18 이차방정식 $x^2+px+q=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-p, \quad \alpha\beta=q$$

→ ①

이때

$$(\alpha-3)+(\beta-3)=\alpha+\beta-6$$

$$= -p-6,$$

$$(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$$

$$= q+3p+9$$

이므로 $\alpha-3, \beta-3$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인

이차방정식은

$$x^2+(p+6)x+3p+q+9=0$$

→ ②

이 이차방정식이 $x^2+qx+p=0$ 과 같으므로

$$p+6=q, \quad 3p+q+9=p$$

$$\therefore p-q=-6, \quad 2p+q=-9$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$p=-5, \quad q=1$$

→ ③

$$\therefore p^2+q^2=(-5)^2+1^2=26$$

→ ④

답 26

$$\begin{aligned} 3 < \sqrt{13} < 4 \text{에서} \\ -4 < -\sqrt{13} < -3 \\ 3 < 7 - \sqrt{13} < 4 \\ \therefore \frac{3}{2} < \frac{7 - \sqrt{13}}{2} < 2 \\ \text{또 } 3 < \sqrt{13} < 4 \text{에서} \\ 10 < 7 + \sqrt{13} < 11 \\ \therefore 5 < \frac{7 + \sqrt{13}}{2} < \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$f(x)$ 의 이차항의 계수가 1이고 x^2-3x 의 이차항의 계수도 1이므로 $f(x)+x^2-3x$ 의 이차항의 계수는 2이다.

$$\begin{aligned} x^2+2=0 \text{에서} \\ x^2=-2 \\ \therefore x=\pm\sqrt{2}i \\ x^2-3=0 \text{에서} \\ x^2=3 \quad \therefore x=\pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다.	20%
② $\alpha-3, \beta-3$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차 방정식을 세울 수 있다.	40%
③ p, q 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ p^2+q^2 의 값을 구할 수 있다.	10%

19 이차방정식 $x^2+x-3=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$x^2+x-3=(x-\alpha)(x-\beta)$$

이때 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-3$ 이므로

$$\alpha=-\frac{3}{\beta}, \quad \beta=-\frac{3}{\alpha}$$

$$\therefore f(\alpha)=-\frac{9}{\beta^2}+3\alpha=-\alpha^2+3\alpha,$$

$$f(\beta)=-\frac{9}{\alpha^2}+3\beta=-\beta^2+3\beta$$

즉 $f(\alpha)+\alpha^2-3\alpha=0, f(\beta)+\beta^2-3\beta=0$ 이므로 α, β 는 이차방정식 $f(x)+x^2-3x=0$ 의 두 근이다.

조건 ②에서 $f(x)$ 의 이차항의 계수가 1이므로

$$f(x)+x^2-3x=2(x-\alpha)(x-\beta)=2(x^2+x-3)$$

따라서 $f(x)=x^2+5x-6$ 이므로

$$f(2)=2^2+5 \cdot 2-6=8$$

답 8

20 $x^2=X$ 로 놓으면

$$x^4-x^2-6$$

$$=X^2-X-6$$

$$=(X+2)(X-3)$$

$$=(x^2+2)(x^2-3)$$

$$=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

따라서 x^4-x^2-6 의 인수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

21 이차방정식 $5x^2-2x+3=0$ 의 두 근은

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{14}i}{5}$$

→ ①

따라서 $5x^2-2x+3$ 을 복소수의 범위에서 인수분해 하면

$$5\left(x - \frac{1 - \sqrt{14}i}{5}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{14}i}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5} \{5x - (1 - \sqrt{14}i)\} \{5x - (1 + \sqrt{14}i)\}$$

→ ②

$$\therefore a^2+b^2=(1-\sqrt{14}i)^2+(1+\sqrt{14}i)^2$$

$$=-26$$

→ ③

답 -26

채점 기준	비율
① 이차방정식 $5x^2-2x+3=0$ 의 근을 구할 수 있다.	30%
② 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해 할 수 있다.	50%
③ a^2+b^2 의 값을 구할 수 있다.	20%

22 계수가 모두 정수, 즉 실수이므로 주어진 이차방정식의 두 허근 z_1, z_2 를

$$z_1=a+bi, \quad z_2=a-bi \quad (a, b \text{는 실수}, b \neq 0)$$

라 하자.

ㄱ. 근과 계수의 관계에 의하여

$$q = z_1 z_2 \\ = a^2 + b^2 > 0$$

ㄴ. $z_1 = 2z_2$ 이면 $a + bi = 2a - 2bi$ 이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a = 2a, b = -2b \\ \therefore a = b = 0$$

그런데 $b \neq 0$ 이어야 하므로 $z_1 = 2z_2$ 를 만족시키는 p, q 는 존재하지 않는다.

ㄷ. $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 이면 $z_1 z_2 = 1$ 이지만

$$p = z_1 + z_2 = 1, q = z_1 z_2 = 1 \text{ 이므로} \\ p + q \neq 1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

23 이차방정식 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 한 허근이 a 이고, 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $\bar{a}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \bar{a} = 1, a\bar{a} = 2$$

$$\therefore z\bar{z} = \frac{a-1}{a+1} \cdot \frac{\bar{a}-1}{\bar{a}+1} \\ = \frac{a\bar{a} - (a+\bar{a}) + 1}{a\bar{a} + (a+\bar{a}) + 1} \\ = \frac{2 - 1 + 1}{2 + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)} = \frac{\bar{a}-1}{\bar{a}+1} \\ = \frac{\bar{a}-1}{a+1}$$

답 ③

24 $z = p + qi$ (p, q 는 실수, $q \neq 0$)라 하면 조건 ㉞에서 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$ 의 한 근이 $z - 3$, 즉 $(p-3) + qi$ 이고, 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $(p-3) - qi$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\{(p-3) + qi\} + \{(p-3) - qi\} = a \\ \therefore a = 2(p-3) \quad \dots\dots \textcircled{㉞} \\ \{(p-3) + qi\}\{(p-3) - qi\} = 9 \\ \therefore (p-3)^2 + q^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉟}$$

조건 ㉞에서 이차방정식 $x^2 - bx + 9 = 0$ 의 한 근이 $z + 3i$, 즉 $p + (q+3)i$ 이므로

(i) $q+3=0$, 즉 $q=-3$ 일 때,

$$\textcircled{㉞} \text{에서 } (p-3)^2 = 0 \text{ 이므로 } p=3$$

$$p=3 \text{ 을 } \textcircled{㉞} \text{에 대입하면 } a=0$$

또 이차방정식 $x^2 - bx + 9 = 0$ 의 한 근이 3이므로

$$9 - 3b + 9 = 0 \quad \therefore b = 6$$

(ii) $q+3 \neq 0$, 즉 $q \neq -3$ 일 때,

계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $p - (q+3)i$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\{p + (q+3)i\}\{p - (q+3)i\} = 9 \\ \therefore p^2 + (q+3)^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉟}$$

$\textcircled{㉞}, \textcircled{㉟}$ 에서

$$(p-3)^2 + q^2 = p^2 + (q+3)^2 \\ \therefore p = -q$$

$\textcircled{㉞}$ 에 대입할 수도 있다.

a, b 는 실수이고 $b \neq 0$ 이므로

$$a^2 \geq 0, b^2 > 0 \\ \therefore a^2 + b^2 > 0$$

이것을 $\textcircled{㉞}$ 에 대입하면

$$(-q-3)^2 + q^2 = 9, \quad q^2 + 3q = 0$$

$$q(q+3) = 0 \quad \therefore q = -3 \text{ 또는 } q = 0$$

그런데 $q \neq 0, q \neq -3$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=0, b=6$ 이므로

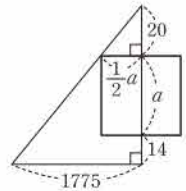
$$a+b=6$$

답 6

내신 수능
1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제**

본책 44쪽

01 주어진 구장산술의 내용을 간단히 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로



$$\frac{1}{2}a : 1775 = 20 : (a+34)$$

$$\frac{1}{2}a(a+34) = 35500$$

$$a^2 + 34a - 71000 = 0$$

$$(a+284)(a-250) = 0$$

$$\therefore a = 250 \quad (\because a > 0)$$

답 ②

02 이차방정식 $ax^2 - 32x + 16 = 0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-16)^2 - 16a = 16^2 - 16a \geq 0$$

$$\therefore a \leq 16$$

이때 이차방정식 $ax^2 - 32x + 16 = 0$ 의 근이

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 16a}}{a}$$

이고 적어도 한 개는 정수이므로 $(-16)^2 - 16a = k^2$ (k 는 정수) 꼴이어야 한다.

$$\therefore k^2 = (-16)^2 - 16a$$

$$= 16(16-a) = 4^2(16-a)$$

따라서 $16-a$ 가 정수의 제곱 꼴이어야 하므로

$$a = 7 \text{ 또는 } a = 12 \text{ 또는 } a = 15 \text{ 또는 } a = 16$$

(i) $a=7$ 일 때,

$$7x^2 - 32x + 16 = 0 \text{에서}$$

$$(7x-4)(x-4) = 0 \quad \therefore x = \frac{4}{7} \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2 - 7x + 7 = 0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-7)^2 - 4 \cdot 7b \geq 0$$

$$49 - 28b \geq 0 \quad \therefore b \leq \frac{7}{4}$$

이를 만족시키는 자연수 b 는 1뿐이므로

$$x^2 - 7x + 7 = 0 \quad \therefore x = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2}$$

따라서 정수인 근이 존재하지 않는다.

(ii) $a=12$ 일 때,

$$12x^2 - 32x + 16 = 0 \text{에서}$$

$$4(3x-2)(x-2)=0 \quad \therefore x=\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=2$$

따라서 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2 - 7x + 12 = 0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (-7)^2 - 4 \cdot 12b \geq 0$$

$$49 - 48b \geq 0 \quad \therefore b \leq \frac{49}{48}$$

이를 만족시키는 자연수 b 는 1뿐이므로

$$x^2 - 7x + 12 = 0, \quad (x-3)(x-4) = 0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 정수인 근이 존재한다.

(iii) $a=15$ 일 때,

$$15x^2 - 32x + 16 = 0 \text{에서}$$

$$(5x-4)(3x-4)=0 \quad \therefore x=\frac{4}{5} \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}$$

따라서 정수인 근이 존재하지 않는다.

(iv) $a=16$ 일 때,

$$16x^2 - 32x + 16 = 0 \text{에서}$$

$$16(x-1)^2 = 0 \quad \therefore x=1$$

따라서 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2 - 7x + 16 = 0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_3 이라 하면

$$D_3 = (-7)^2 - 4 \cdot 16b \geq 0$$

$$49 - 64b \geq 0 \quad \therefore b \leq \frac{49}{64}$$

이를 만족시키는 자연수 b 는 존재하지 않는다.

이상에서 $a=12$, $b=1$ 이므로

$$a+b=13$$

답 13

03 이차방정식 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -5$$

이차방정식 $x^2 + x - 4 = 0$ 의 두 근이 γ, δ 이므로

$$\gamma^2 + \gamma - 4 = 0, \quad \delta^2 + \delta - 4 = 0$$

$$\therefore \gamma^2 + \gamma = 4, \quad \delta^2 + \delta = 4$$

$$\therefore (2\gamma + \alpha)(2\gamma + \beta)(2\delta + \alpha)(2\delta + \beta)$$

$$= \{4\gamma^2 + 2(\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta\} \{4\delta^2 + 2(\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta\}$$

$$= (4\gamma^2 + 4\gamma - 5)(4\delta^2 + 4\delta - 5)$$

$$= (4 \cdot 4 - 5)(4 \cdot 4 - 5) = 121$$

답 121

두 근이 모두 양수이므로

$$k > 0, \quad 2k - 1 > 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}$$

$$4\gamma^2 + 4\gamma = 4(\gamma^2 + \gamma) = 4 \cdot 4$$

04 $g(x) = f(x) + x - 3$ 이라 하면

$$g(\alpha) = f(\alpha) + \alpha - 3$$

$$= \beta + \alpha - 3$$

$$= 0$$

$$g(\beta) = f(\beta) + \beta - 3$$

$$= \alpha + \beta - 3$$

$$= 0$$

따라서 방정식 $g(x) = 0$, 즉 $f(x) + x - 3 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 두 근의 합은

$$\alpha + \beta = 3$$

답 ④

05 주어진 이차방정식의 두 근이 서로 다른 소수이므로 두 근의 합은 자연수이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합이 $\frac{15}{m}$ 이므로 자연수 m 은 15의 약수이다.

$$(i) m=1 \text{일 때, } \frac{15}{m} = 15$$

합이 15인 서로 다른 두 소수는 2와 13이므로 두 근은 2, 13이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$n = 2 \cdot 13 = 26$$

$$(ii) m=3 \text{일 때, } \frac{15}{m} = 5$$

합이 5인 서로 다른 두 소수는 2와 3이므로 두 근은 2, 3이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{n}{3} = 2 \cdot 3 \quad \therefore n = 18$$

$$(iii) m=5 \text{ 또는 } m=15 \text{일 때,}$$

$$\frac{15}{m} = 3 \text{ 또는 } \frac{15}{m} = 1$$

합이 3 또는 1인 두 소수는 존재하지 않는다.

이상에서 $n=26$ 또는 $n=18$ 이므로 구하는 합은

$$26 + 18 = 44$$

답 44

참고 2를 제외한 모든 소수는 홀수이므로 두 소수의 합이 홀수이려면 두 소수 중 하나는 2이어야 한다.

06 주어진 이차방정식의 두 근을 $k, 2k-1$ ($k > \frac{1}{2}$)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$k + (2k-1) = m$$

$$\therefore m = 3k - 1$$

..... ㉠

$$k(2k-1) = 2m-1$$

$$\therefore 2k^2 - k + 1 = 2m$$

..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$2k^2 - 7k + 3 = 0, \quad (2k-1)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 3 \left(\because k > \frac{1}{2} \right)$$

따라서 이차방정식의 두 근은 3, 5이므로

$$\alpha = 3$$

$$k=3 \text{을 ㉠에 대입하면 } m=8$$

$$\therefore \alpha m = 24$$

답 ⑤

07 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b$$

$$(2\alpha-1)(2\beta-1) = 0 \text{에서}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \beta = \frac{1}{2}$$

$$(a^2+1)(\beta^2-1)=0 \text{에서 } \alpha, \beta \text{는 실수이므로}$$

$$\beta^2=1 \quad \therefore \beta=\pm 1$$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$ 이고, $a>0$ 에서 $\alpha+\beta=-a<0$ 이므로

$$\alpha=\frac{1}{2}, \beta=-1$$

$$\therefore b=\alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

답 ①

08 이차방정식 $x^2+px+q=0$ 의 한 근이 α 이므로

$$\alpha^2+p\alpha+q=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)=x^2-4px+6q$ 라 하면 $f(\alpha^2)=-p^2\alpha-pq+6q$ 이므로

$$\alpha^4-4p\alpha^2+6q=-p^2\alpha-pq+6q$$

$$\alpha^4-4p\alpha^2=p(-p\alpha-q)$$

①에서 $-p\alpha-q=\alpha^2$ 이므로

$$\alpha^4-4p\alpha^2=p\alpha^2, \quad \alpha^2(\alpha^2-5p)=0$$

α 는 자연수이므로

$$\alpha^2=5p$$

p 는 정수이므로 자연수 α 의 최솟값은 $p=5$ 일 때 5이다.

즉 $p=5, \alpha=5$ 일 때 ①에서

$$q=-\alpha^2-p\alpha=-5^2-5\cdot 5=-50 \quad \text{답 } -50$$

09 이차방정식 $f(x+1)=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(\alpha+1)=0, f(\beta+1)=0$$

이때 이차방정식 $f(x-2)=0$ 의 두 근은

$$x-2=\alpha+1 \text{ 또는 } x-2=\beta+1$$

$$\therefore x=\alpha+3 \text{ 또는 } x=\beta+3$$

따라서 이차방정식 $f(x-2)=0$ 의 두 근의 곱은

$$(\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9$$

$$=5+3\cdot 3+9$$

$$=23$$

답 23

1등급 비밀노트

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 α, β 일 때, 방정식 $f(ax+b)=0$ 의 두 근은 $ax+b=\alpha, ax+b=\beta$ 를 만족시키는 x 의 값, 즉 $x=\frac{\alpha-b}{a}, x=\frac{\beta-b}{a}$ 이다. (단, $a\neq 0$)

10 오른쪽 그림에서

$$\overline{AC}+\overline{BC}=2a$$

$\triangle PAC$ 와 $\triangle BPC$ 에서

$$\angle ACP=\angle PCB=90^\circ,$$

$$\angle APC=\angle BPC (\because \angle APB=90^\circ)$$

이므로

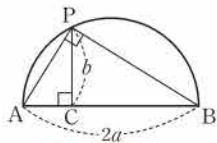
$$\triangle PAC \sim \triangle BPC \text{ (AA 닮음)}$$

즉 $\overline{PC}:\overline{BC}=\overline{AC}:\overline{PC}$ 이므로

$$b:\overline{BC}=\overline{AC}:b$$

$$\therefore \overline{AC}\cdot\overline{BC}=b^2$$

따라서 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 의 길이를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은



나머지 정리
다항식 $P(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 r 라 하면
 $r=P(a)$

$$\begin{aligned} \overline{AC}\cdot\overline{BC} &= (a-\sqrt{a^2-b^2}) \\ &\quad \times (a+\sqrt{a^2-b^2}) \\ &= a^2-(a^2-b^2) \\ &= b^2 \end{aligned}$$

$$(1+i)+(1-i)=2$$

$$(1+i)(1-i)=2$$

반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이다.

$$x^2-(\overline{AC}+\overline{BC})x+\overline{AC}\cdot\overline{BC}=0$$

$$\therefore x^2-2ax+b^2=0$$

답 ④

1등급 비밀노트

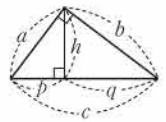
오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서

$$ab=ch,$$

$$a^2=pc, b^2=qc,$$

$$h^2=pq$$

가 성립한다.



다른 풀이 오른쪽 그림과 같이

$\overline{AB}$ 의 중점을 O라 하면 점 O는 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 반원의 중심이므로

$$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OP}=a$$

$\triangle COP$ 에서 $\overline{OC}=\sqrt{a^2-b^2}$ 이므로

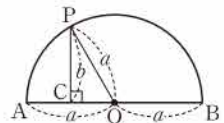
$$\overline{AC}=\overline{OA}-\overline{OC}=a-\sqrt{a^2-b^2}$$

$$\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{OC}=a+\sqrt{a^2-b^2}$$

$$\therefore \overline{AC}+\overline{BC}=2a, \overline{AC}\cdot\overline{BC}=b^2$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2-2ax+b^2=0$$



11 조건 ㉠에서 다항식 $f(x)$ 가 $x-1-i$ 를 인수로 가지므로

$$f(1+i)=0$$

즉 방정식 $f(x)=0$ 의 한 근이 $1+i$ 이고, 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $1-i$ 이다.

$$\therefore f(x)=a(x-1-i)(x-1+i)$$

$$=a(x^2-2x+2)$$

$$=ax^2-2ax+2a$$

조건 ㉡에서 방정식

$$f(x)+1=0, \text{ 즉 } ax^2-2ax+2a+1=0$$

의 두 근의 곱이 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{2a+1}{a}=4, \quad 2a+1=4a$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$

즉 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$ 이므로 $f(ax)-ax=0$ 에서

$$f\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}x=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}x=0$$

$$\therefore x^2-8x+8=0$$

따라서 위의 이차방정식의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 8이다. **답 8**

12 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2$$

즉 $\alpha=2-\beta, \beta=2-\alpha$ 이므로 조건 ㉢에서

$$f(\alpha)+f(3\alpha)=2-\alpha+2,$$

$$f(\beta)+f(3\beta)=2-\beta+2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(\alpha) + f(3\alpha) + \alpha - 4 &= 0, \\ f(\beta) + f(3\beta) + \beta - 4 &= 0\end{aligned}$$

따라서 α, β 는 이차방정식 $f(x) + f(3x) + x - 4 = 0$ 의 두 근이므로

$$\begin{aligned}f(x) + f(3x) + x - 4 &= a(x - \alpha)(x - \beta) \\ &= a(x^2 - 2x - 4) \quad (a \neq 0)\end{aligned}$$

라 하면

$$f(x) + f(3x) = a(x^2 - 2x - 4) - x + 4$$

이 식에 $x=1, x=3$ 을 각각 대입하면

$$f(1) + f(3) = -5a + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(3) + f(9) = -a + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $f(1) - f(9) = -4a + 2$

조건 (4)에서 $f(1) - f(9) = -6$ 이므로

$$-4a + 2 = -6$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore f(x) + f(3x) = 2x^2 - 5x - 4$$

이때 $f(x) = px^2 + qx + r$ (p, q, r 는 상수, $p \neq 0$)라 하면 $f(3x) = 9px^2 + 3qx + r$ 이므로

$$f(x) + f(3x) = 10px^2 + 4qx + 2r$$

즉 $10p=2, 4q=-5, 2r=-4$ 이므로

$$p = \frac{1}{5}, q = -\frac{5}{4}, r = -2$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{5}{4}x - 2$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{-2}{\frac{1}{5}} = -10$$

답 -10

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c\end{aligned}$$

에서 그래프의 축의 방정식은

$$x = -\frac{b}{2a}$$

05 이차방정식과 이차함수

개념 & 핵심 기술

본책 46쪽

01 이차함수 $y = x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 8$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면 이차방정식

$x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - (a^2 - 8) < 0$$

$$-4a + 12 < 0 \quad \therefore a > 3$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 4이다.

답 ④

02 ㄱ. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프의 축이 y 축의 오른쪽에 있으므로

$$-\frac{b}{2a} > 0 \quad \therefore ab < 0$$

ㄴ. $x = -2$ 일 때, $y = 4a - 2b + c$

주어진 그래프에서 $x = -2$ 일 때 $y < 0$ 이므로

$$4a - 2b + c < 0$$

ㄷ. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이 ㄱ. 주어진 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로 $-1, 3$ 은 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{b}{a} = 2 > 0$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{a} < 0 \text{이므로 } ab < 0$$

03 이차함수 $y = x^2 - (2a+m)x + a^2 + 3a + n$ 의 그래프가 x 축에 접하므로 이차방정식

$x^2 - (2a+m)x + a^2 + 3a + n = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(2a+m)\}^2 - 4(a^2 + 3a + n) = 0$$

$$\therefore (4m-12)a + m^2 - 4n = 0$$

이 식이 a 에 대한 항등식이므로

$$4m - 12 = 0, m^2 - 4n = 0$$

$$\therefore m = 3, n = \frac{9}{4}$$

$$\therefore 4mn = 27$$

답 27

04 이차함수 $y = x^2 + ax + 10$ 의 그래프와 직선

$y = -ax + b^2$ 이 만나지 않으려면 이차방정식

$x^2 + ax + 10 = -ax + b^2$, 즉 $x^2 + 2ax - b^2 + 10 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-b^2 + 10) < 0$$

다음은 모두 k 에 대한 항등식을 나타낸다.

- ① k 의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
- ② 모든 k 에 대하여 성립하는 등식
- ③ 임의의 k 에 대하여 성립하는 등식

$$\therefore a^2 + b^2 < 10$$

따라서 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$$

의 4개이다.

답 ②

$$1^2 + 1^2 = 2, 1^2 + 2^2 = 5, \\ 2^2 + 1^2 = 5, 2^2 + 2^2 = 8$$

05 이차함수 $y = x^2 - 4x + a$ 의 그래프가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = 1 - 4 + a \quad \therefore a = 1$$

직선 $y = bx + c$ 가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = b + c \quad \therefore c = -b - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 이차함수 $y = x^2 - 4x + 1$ 의 그래프와 직선

$y = bx - b - 2$ 가 접하므로 이차방정식

$x^2 - 4x + 1 = bx - b - 2$, 즉 $x^2 - (b+4)x + b+3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(b+4)\}^2 - 4(b+3) = 0$$

$$b^2 + 4b + 4 = 0, \quad (b+2)^2 = 0$$

$$\therefore b = -2$$

$b = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $c = 0$

$$\therefore a + 2b + 3c = 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = -3$$

답 -3

06 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2$ 의 그래프와 직선 $y = 4x - k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식

$$x^2 - 2ax + a^2 + 2 = 4x - k, \text{ 즉}$$

$x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 2 + k = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = \{-(a+2)\}^2 - (a^2 + 2 + k) > 0$$

$$\therefore k < 4a + 2$$

(i) $a = 1$ 일 때, $k < 6$ 이므로 $f(1) = 5$

(ii) $a = 2$ 일 때, $k < 10$ 이므로 $f(2) = 9$

(iii) $a = 3$ 일 때, $k < 14$ 이므로 $f(3) = 13$

(iv) $a = 4$ 일 때, $k < 18$ 이므로 $f(4) = 17$

이상에서

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 44$$

답 44

07 $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

이므로 $-1 \leq x \leq a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-1)$, $f(a)$ 중 큰 값이다.

그런데 $f(-1) = 6$ 이므로 $f(a) = 11$ 이어야 한다.

즉 $a^2 - 2a + 3 = 11$ 이므로

$$a^2 - 2a - 8 = 0, \quad (a+2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > -1)$$

$$\therefore f\left(\frac{a}{2}\right) = f(2) = 3$$

답 ①

08 $x + y^2 = 1$ 에서 $y^2 = 1 - x \quad \dots\dots \textcircled{1}$

이때 y 는 실수이므로 $y^2 = 1 - x \geq 0 \quad \therefore x \leq 1$

$\textcircled{1}$ 을 $2x^2 + 3y^2$ 에 대입하면

$$2x^2 + 3y^2 = 2x^2 + 3(1-x)$$

$$= 2x^2 - 3x + 3$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} \text{라 하면}$$

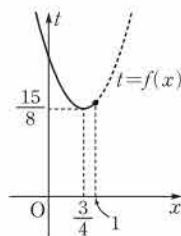
$x \leq 1$ 에서 함수 $t = f(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$

는 $x = \frac{3}{4}$ 에서 최솟값 $\frac{15}{8}$ 를 갖는다.

즉 $2x^2 + 3y^2$ 의 최솟값은 $\frac{15}{8}$ 이다.

답 ②



09 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로

$$f(x) = a(x+1)(x-3) \quad (a > 0)$$

이라 하자.

이때 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, -6)$ 을 지나므로

$$-6 = a \cdot 1 \cdot (-3) \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore f(x) = 2(x+1)(x-3)$$

$$= 2(x^2 - 2x - 3)$$

$$= 2(x-1)^2 - 8$$

따라서 $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 4$ 일 때 최댓값 10을 갖고, $x = 1$ 일 때 최솟값 -8 을 가지므로

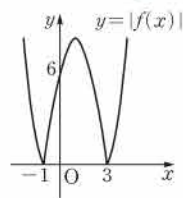
$$-8 \leq f(x) \leq 10$$

$$\therefore 0 \leq |f(x)| \leq 10$$

즉 $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = |f(x)|$ 의 최댓값은 10, 최솟값은 0이므로 구하는 함은 10이다.

답 10

참고 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$$\mathbf{10} \quad y = -x^2 + 6x = -(x-3)^2 + 9$$

이므로 두 점 A, B와 두 점 C, D는 각각 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이다.

$A(3-t, 0), B(3+t, 0) \quad (0 < t < 3)$ 이라 하면

$$C(3+t, -t^2+9), D(3-t, -t^2+9)$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{CD} = 2t, \quad \overline{AD} = \overline{BC} = -t^2 + 9$$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$2\{2t + (-t^2 + 9)\} = -2t^2 + 4t + 18$$

$$= -2(t-1)^2 + 20$$

이므로 $0 < t < 3$ 에서 $t = 1$ 일 때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다.

답 20

11 1인당 입장료를 50x원 인상하면 하루 입장객이

200x명 감소하므로 하루 입장료 수입은

$$(600 + 50x)(4000 - 200x)$$

$$= -10000(x^2 - 8x - 240)$$

$$= -10000(x-4)^2 + 2560000$$

따라서 입장료 수입은 $x = 4$ 일 때 최대가 되므로 1인당 입장료를 $50 \cdot 4 = 200$ (원) 인상해야 한다.

답 ②

주어진 함수의 그래프가
아래로 볼록하므로
 $a > 0$

a 가 자연수이므로
 $k < 4a + 2$ 를 만족시키는
자연수 k 의 개수는 $4a + 1$
이다.
따라서 $f(a) = 4a + 1$ 임
을 이용할 수도 있다.

두 점 A, B가 직선 $x = 3$
에 대하여 대칭이므로 두
점 A, B는 각각 점
(3, 0)에서 같은 거리만
큼 떨어져 있다.

12 $x^2 - 2(a+2)x + 6a + 3 = 0$ 에서

$(x-2a-1)(x-3) = 0$

$\therefore x = 2a+1$ 또는 $x = 3$

두 점 A, B의 좌표는 $(2a+1, 0)$, $(3, 0)$ 이고,

C(0, $6a+3$)이므로

$\overline{AB} = 2-2a$, $\overline{OC} = 6a+3$

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}(2-2a)(6a+3) = -6a^2 + 3a + 3$
 $= -6\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{27}{8}$

따라서 $0 < a < 1$ 에서 $a = \frac{1}{4}$ 일 때 $\triangle ABC$ 의 넓이의 최댓값은 $\frac{27}{8}$ 이다. 답 $\frac{27}{8}$

$0 < a < 1$ 에서
 $1 < 2a+1 < 3$ 이므로
 $\overline{AB} = 3 - (2a+1)$
 $= 2-2a$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 48쪽

01 $f(x) = a(x+5)(x-3)$ ($a < 0$)이라 하면

$f\left(\frac{x-2}{3}\right) = a\left(\frac{x-2}{3}+5\right)\left(\frac{x-2}{3}-3\right)$
 $= \frac{a}{9}(x+13)(x-11)$

$f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 0$ 에서 $x = -13$ 또는 $x = 11$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 -2 이다. 답 ②

다른 풀이 $f(-5) = 0$, $f(3) = 0$ 이므로 $f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 0$ 이

려면

$\frac{x-2}{3} = -5$ 또는 $\frac{x-2}{3} = 3$
 $\therefore x = -13$ 또는 $x = 11$

02 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면 조건 (가)에서

$1-a+b = 25+5a+b$

$-6a = 24 \quad \therefore a = -4$ 답 ①

조건 (나)에 의하여 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 실근의 곱이 -2 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$b = -2$ 답 ②

즉 $f(x) = x^2 - 4x - 2$ 이고 이차방정식 $x^2 - 4x - 2 = 0$ 의 실근은

$x = 2 \pm \sqrt{6}$ 답 ③

따라서 x 좌표의 차는

$2 + \sqrt{6} - (2 - \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$ 답 $2\sqrt{6}$

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	30%
② b 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ 이차방정식의 실근을 구할 수 있다.	30%
④ x 좌표의 차를 구할 수 있다.	10%

03 $x^2 - ax = 0$ 에서 $x(x-a) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = a$

A(0, 0), B(a, 0)이라 하면 이차함수 $y = x^2 - ax$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$y = x^2 - ax$
 $= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$

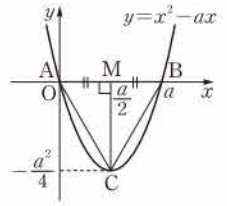
이므로 C $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right)$

이때 $\triangle ABC$ 는 한 변의 길이가 a 인 정삼각형이므로 $\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면

$\overline{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB}$, $\frac{a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$a^2 - 2\sqrt{3}a = 0$, $a(a - 2\sqrt{3}) = 0$

$\therefore a = 2\sqrt{3}$ ($\because a > 0$) 답 $2\sqrt{3}$



04 $|f(x)| = 2$ 에서 $f(x) = -2$ 또는 $f(x) = 2$

(i) $f(x) = -2$ 일 때,

오른쪽 그림과 같이 $y = f(x)$

의 그래프와 직선 $y = -2$ 가 접

하고 접점의 x 좌표는 2이므로

방정식 $f(x) = -2$ 의 실근은

$x = 2$ 이다.

(ii) $f(x) = 2$ 일 때,

오른쪽 그림과 같이 $y = f(x)$

의 그래프와 직선 $y = 2$ 는 서로

다른 두 점에서 만난다.

이때 두 교점은 직선 $x = 2$ 에

대하여 대칭이므로 두 교점의

x 좌표를 각각 $2+a$, $2-a$ 라

하면 두 교점의 x 좌표의 합은

$(2+a) + (2-a) = 4$

따라서 방정식 $f(x) = 2$ 의 모든 실근의 합은 4이다.

(i), (ii)에서 서로 다른 모든 실근의 합은

$2 + 4 = 6$ 답 ③

다른 풀이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표가 1, 3이므로

$f(x) = a(x-1)(x-3)$ ($a > 0$)

이라 하자.

이때 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가

$(2, -2)$ 이므로

$-2 = a \cdot 1 \cdot (-1) \quad \therefore a = 2$

$\therefore f(x) = 2(x-1)(x-3) = 2x^2 - 8x + 6$

(i) $f(x) = -2$ 일 때,

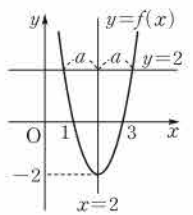
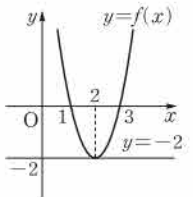
$2x^2 - 8x + 6 = -2$, $x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0 \quad \therefore x = 2$

(ii) $f(x) = 2$ 일 때,

$2x^2 - 8x + 6 = 2$, $x^2 - 4x + 2 = 0$

$\therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$



(i), (ii)에서 서로 다른 모든 실근의 합은
 $2 + (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 6$

05 이차방정식 $x^2 - 2f(t)x + f(t) = 0$ 이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = \{-f(t)\}^2 - f(t) = 0, \quad f(t)\{f(t) - 1\} = 0$$

$$\therefore f(t) = 0 \text{ 또는 } f(t) = 1$$

(i) $f(t) = 0$ 일 때,
 함수 $y = f(t)$ 의 그래프와 t 축의 교점의 개수가 4이므로 방정식 $f(t) = 0$ 의 실근의 개수는 4이다.

(ii) $f(t) = 1$ 일 때,
 함수 $y = f(t)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 개수가 3이므로 방정식 $f(t) = 1$ 의 실근의 개수는 3이다.

(i), (ii)에서 실수 t 의 개수는 $4 + 3 = 7$ **답 3**

06 이차함수 $y = x^2 - 4x$, 즉 $y = (x - 2)^2 - 4$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - 2 = (x + 3 - 2)^2 - 4$$

$$\therefore y = (x + 1)^2 - 2$$
 → 1

두 점 P, Q는 이차함수 $y = (x + 1)^2 - 2$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 의 교점이므로 두 점 P, Q의 x 좌표는 이차방정식 $(x + 1)^2 - 2 = mx$, 즉 $x^2 + (2 - m)x - 1 = 0$ 의 두 근이다. **→ 2**

이때 $\overline{PQ}$ 의 중점이 원점이므로 이차방정식 $x^2 + (2 - m)x - 1 = 0$ 의 두 근의 합은 0이다. **→ 3**

따라서 근과 계수의 관계에 의하여
 $-(2 - m) = 0 \quad \therefore m = 2$ **→ 4**

답 2

채점 기준	비율
1 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	20%
2 두 점 P, Q의 x 좌표가 방정식의 근임을 알 수 있다.	30%
3 방정식의 두 근의 합이 0임을 알 수 있다.	30%
4 m 의 값을 구할 수 있다.	20%

07 이차방정식 $f(x) = mx + n$, 즉 $f(x) - mx - n = 0$ 이 중근 a 를 갖고, x^2 의 계수가 1이므로

$$f(x) - mx - n = (x - a)^2$$

$$\therefore f(x) = (x - a)^2 + mx + n$$

같은 방법으로 하면

$$g(x) = (x - \beta)^2 + mx + n$$

두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 실근과 같으므로

$$(x - a)^2 + mx + n = (x - \beta)^2 + mx + n$$

$$(x - a)^2 = (x - \beta)^2$$

$$-2ax + a^2 = -2\beta x + \beta^2$$

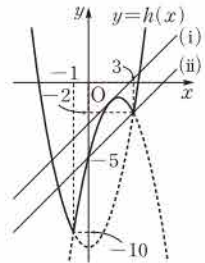
$$2(a - \beta)x = (a + \beta)(a - \beta)$$

$$\therefore x = \frac{a + \beta}{2} \quad (\because a \neq \beta)$$
 답 5

직선 $y = x - 5$ 의 y 절편이 -5 이므로 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x - 5$ 는 서로 다른 세 점에서 만난다.

이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 그래프의 식
 $\Rightarrow y = a(x - p)^2 + q$

08 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y = x + k$ 와 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 다음과 같다.



(i) 직선 $y = x + k$ 가 함수

$y = -x^2 + 4x - 5$ 의 그래프에 접할 때,
 이차방정식 $x + k = -x^2 + 4x - 5$, 즉
 $x^2 - 3x + k + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = (-3)^2 - 4(k + 5) = 0$

$$\therefore k = -\frac{11}{4}$$

(ii) 직선 $y = x + k$ 가 점 $(3, -2)$ 를 지날 때,
 $-2 = 3 + k$

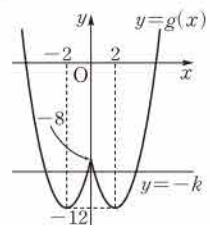
$$\therefore k = -5$$

(i), (ii)에서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-\frac{11}{4} \cdot (-5) = \frac{55}{4}$$
 답 55/4

09 $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 8 & (x \geq 0) \\ x^2 + 4x - 8 & (x < 0) \end{cases}$

이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. **→ 1**



이때 방정식 $g(x) + k = 0$, 즉
 $g(x) = -k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -k$ 의 교점의 개수와 같으므로

$$h(k) = \begin{cases} 2 & (k < 8 \text{ 또는 } k = 12) \\ 3 & (k = 8) \\ 4 & (8 < k < 12) \\ 0 & (k > 12) \end{cases}$$
 → 2

따라서 $h(k) > 2$ 를 만족시키는 정수 k 는 8, 9, 10, 11이므로 구하는 합은

$$8 + 9 + 10 + 11 = 38$$
 → 3

답 38

채점 기준	비율
1 함수 $y = g(x)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	30%
2 $h(k)$ 를 구할 수 있다.	50%
3 $h(k) > 2$ 를 만족시키는 정수 k 의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

10 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면 조건 (가)에 의하여 $f(0) = c = 1$

조건 (나)에 의하여

$$a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2x$$

$$\therefore 2ax + a + b = 2x$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$2a = 2, \quad a + b = 0$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

따라서 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 최댓값 3을 갖고, $x = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{3}{4}$ 을 갖는다.

즉 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4} \quad \text{답 ⑤}$$

11 (i) $a > 0$ 일 때,

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = a(x-2)^2 + 4$ 는 $x = 2$ 일 때 최솟값 4를 갖고, $x = 0$ 일 때 최댓값 $4a + 4$ 를 가지므로

$$4a + 4 = 8 \quad \therefore a = 1$$

(ii) $a < 0$ 일 때,

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = a(x-2)^2 + 4$ 는 $x = 2$ 일 때 최댓값 4를 갖고, $x = 0$ 일 때 최솟값 $4a + 4$ 를 가지므로

$$4a + 4 = -4 \quad \therefore a = -2$$

(i), (ii)에서 $a = 1, \beta = -2$ 이므로

$$a - \beta = 3 \quad \text{답 3}$$

12 조건 (가)에 의하여 이차방정식 $-x^2 + 2px - q = px$, 즉 $x^2 - px + q = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-p)^2 - 4q = 0 \quad \therefore p^2 = 4q \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\therefore f(x) = -x^2 + 2px - q = -(x-p)^2 + p^2 - q = -(x-p)^2 + 3q$$

$2p \leq x \leq 3p$ 에서 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x = 3p$ 일 때 최솟값 $-13q$ 를 갖는다.

이때 조건 (나)에 의하여

$$-13q = -39 \quad \therefore q = 3$$

$q = 3$ 을 ㉠에 대입하면

$$p^2 = 12$$

$$\therefore p = 2\sqrt{3} \quad (\because p > 0)$$

따라서 이차함수 $f(x) = -(x - 2\sqrt{3})^2 + 9$ 는 $x = 2\sqrt{3}$ 일 때 최댓값 9를 갖는다. 답 ⑤

13 조건 (나)에 의하여 이차함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최소이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.

이때 조건 (가)에서 $f(-2) = 0$ 이므로 $f(4) = 0$ 이다.

즉 $f(x) = a(x+2)(x-4)$ ($a > 0$)라 하면 $|f(0)| = 4$ 이므로

$$|a \cdot 2 \cdot (-4)| = 4 \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-4) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 8) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

따라서 $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 일 때 최댓값 $-\frac{5}{2}$ 를 갖고, $x = 1$ 일 때 최솟값 $-\frac{9}{2}$ 를 가지므로

주어진 함수가 이차함수이므로
 $a \neq 0$

$$\begin{aligned} f(3p) &= -(3p-p)^2 + 3q \\ &= -4p^2 + 3q \\ &= -4 \cdot 4q + 3q \\ &= -13q \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

이차함수가 실수 전체의 범위에서 최솟값을 가지므로
 $a > 0$

$$M = -\frac{5}{2}, m = -\frac{9}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\therefore \frac{M}{m} = \frac{5}{9} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{답 } \frac{5}{9}$$

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	50%
② M, m 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $\frac{M}{m}$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

14 $x^2 - 4x + 2 = t$ 로 놓으면

$$t = (x-2)^2 - 2$$

이므로 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $x = 4$ 일 때 최댓값 2를 갖고, $x = 2$ 일 때 최솟값 -2 를 갖는다.

$$\therefore -2 \leq t \leq 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 + 6t - 1 = (t+3)^2 - 10 \quad (-2 \leq t \leq 2)$$

따라서 $t = 2$ 일 때 최댓값 15를 갖고, $t = -2$ 일 때 최솟값 -9 를 가지므로

$$M = 15, m = -9 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\therefore M - m = 24 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

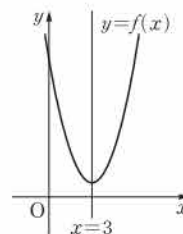
$$\text{답 24}$$

채점 기준	비율
① 공통부분을 t 로 놓고 t 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
② M, m 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $M - m$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

15 $f(x) = x^2 - 6x + 10$

$$= (x-3)^2 + 1$$

이므로 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이다.



(i) $a = \frac{3}{2}$ 일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(a) = f(a+3)$$

(ii) $a < \frac{3}{2}$ 일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(a)$

(iii) $a > \frac{3}{2}$ 일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(a+3)$$

이상에서 $k = \frac{3}{2}$ 이고

$$g_1(a) = f(a) = a^2 - 6a + 10,$$

$$g_2(a) = f(a+3) = a^2 + 1$$

이므로

$$\begin{aligned} g(-2k) + g(2k) &= g_1(-3) + g_2(3) \\ &= 37 + 10 = 47 \end{aligned}$$

$$\text{답 ④}$$

1등급 비밀노트

$f(a)$ 와 $f(a+3)$ 의 값이 같으면 그 값이 최댓값이고, $f(a)$ 와 $f(a+3)$ 의 값이 다르면 둘 중 큰 값이 최댓값이다.
따라서 $a \leq x \leq a+3$ 에 꼭짓점의 x 좌표가 속하는지의 여부와 관계없이 $f(a)$ 와 $f(a+3)$ 의 값의 대소가 바뀌는 a 의 값이 k 의 값이다.

16 $\overline{QR} = \overline{PS} = x$ ($0 < x < 10$),

$\overline{PQ} = \overline{SR} = y$ ($0 < y < 5$)라 하면

$\triangle APS \sim \triangle ABC$ (AA 닮음)

이므로

$x : 10 = (5 - y) : 5, \quad 5x = 50 - 10y$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 5$

□PQRS의 넓이는

$$\begin{aligned} xy &= x \left(-\frac{1}{2}x + 5 \right) = -\frac{1}{2}(x^2 - 10x) \\ &= -\frac{1}{2}(x-5)^2 + \frac{25}{2} \end{aligned}$$

따라서 $0 < x < 10$ 에서 □PQRS의 넓이는 $x=5$ 일 때 최댓값 $\frac{25}{2}$ 를 갖는다. [답] ⑤

17 과자 한 개의 판매 가격을 $(1000 + 10k)$ 원이라 하면 과자의 하루 판매량은 $(500 - 20k)$ 개이므로 하루 판매 수익은

$$\begin{aligned} &(1000 + 10k)(500 - 20k) - \{350(500 - 20k) + 3000\} \\ &= -200(k + 100)(k - 25) - 1000(-7k + 178) \\ &= -200\{k^2 + 75k - 2500 + 5(-7k + 178)\} \\ &= -200(k^2 + 40k - 1610) \\ &= -200(k + 20)^2 + 402000 \end{aligned}$$

따라서 하루 판매 수익은 $k = -20$ 일 때 최대가 되므로 이때의 과자 한 개의 판매 가격은

$1000 + 10 \cdot (-20) = 800$ (원) [답] 800원

18 $\overline{BQ} = 2\overline{AP}$, $\overline{CR} = 3\overline{AP}$ 이므로 $\overline{AP} = x$ 라 하면

$\overline{BQ} = 2x$, $\overline{CR} = 3x$

오른쪽 그림에서 △PQR의

넓이는

$$\begin{aligned} &\square ABCD - \triangle PBQ \\ &- \triangle CRQ - \square APRD \end{aligned}$$

$= 4 - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (2 - x)$

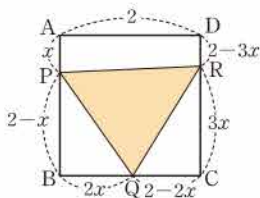
$- \frac{1}{2} \cdot (2 - 2x) \cdot 3x - \frac{1}{2} \cdot \{x + (2 - 3x)\} \cdot 2$

$= 4x^2 - 3x + 2 = 4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{23}{16}$ [답] ②

이므로 $0 \leq 3x \leq 2$, 즉 $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ 에서 $x = \frac{3}{8}$ 일 때

△PQR의 넓이의 최솟값은 $\frac{23}{16}$ 이다. [답] ③

[답] $\frac{23}{16}$



∠A는 공통이고
∠APS = ∠ABC (동위각)
두 삼각형 APS, ABC의 높이의 비

$k < 0$ 이므로 가격을 인하한 것이다.

채점 기준

비율

① AP, BQ, CR의 길이를 같은 문자로 나타낼 수 있다.	20%
② △PQR의 넓이에 대한 식을 세울 수 있다.	50%
③ △PQR의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	30%

내신 · 수능

1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 51쪽

01 ㄱ. 이차함수 $y = x^2 - ax + ad$ 의 그래프가 x 축과 만나려면 이차방정식 $x^2 - ax + ad = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 할 때

$D_1 = (-a)^2 - 4ad \geq 0, \quad a(a - 4d) \geq 0$

이때 $a > 0$ 이므로

$a - 4d \geq 0 \quad \therefore a \geq 4d$

위의 부등식을 만족시키는 a, d 의 순서쌍 (a, d) 는 $(4, 1), (5, 1), (6, 1)$ 의 3개이다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2 - ax + ad = dx + bc$, 즉

$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$D_2 = \{-(a + d)\}^2 - 4(ad - bc)$

$= a^2 - 2ad + d^2 + 4bc$

$= (a - d)^2 + 4bc$

이때 $(a - d)^2 \geq 0, 4bc > 0$ 이므로

$D_2 > 0$

따라서 이차함수 $y = x^2 - ax + ad$ 의 그래프와 직선 $y = dx + bc$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

ㄷ. $f(x) = x^2 - (a + d)x + ad - bc$ 라 하면

$f(x) = \left(x - \frac{a + d}{2}\right)^2 - \frac{(a + d)^2}{4} + ad - bc$

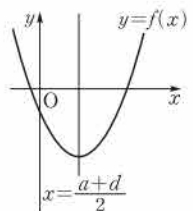
이므로 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은

$x = \frac{a + d}{2} > 0$

ㄴ에서 이차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이차방정식 $f(x) = 0$ 은 적어도 한 개의 양의 실근을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.



[답] ⑤

02 조건 ㉔에서

$f(x)g(x) = (x + 3)(x - 3)(x + 4)(x - 4)$

이고, 조건 ㉕에 의하여 이차방정식 $f(x) = 0$ 은 합이 1인 두 실근을 가지므로 두 실근은 $-3, 4$ 이다.

즉 $f(x) = a(x + 3)(x - 4)$ (a 는 0이 아닌 상수)라 하면

$g(x) = \frac{1}{a}(x - 3)(x + 4)$ 이므로 방정식 $f(x) = g(x)$ 에 서

$$a(x+3)(x-4) = \frac{1}{a}(x-3)(x+4)$$

$$a^2(x^2-x-12) = x^2+x-12$$

$$(a^2-1)x^2 - (a^2+1)x - 12(a^2-1) = 0$$

이 방정식이 서로 다른 두 정수 m, n 을 근으로 가지므로 $a^2-1 \neq 0$ 이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$$m+n = \frac{a^2+1}{a^2-1} = 1 + \frac{2}{a^2-1} \quad \dots\dots ㉑$$

$$mn = -12$$

㉑에서 $\frac{2}{a^2-1} \neq 0$ 이므로 $m+n \neq 1$

또 $a \neq 0$ 이므로 $m+n \neq -1$

따라서 구하는 순서쌍 (m, n) 은

$$(-12, 1), (-6, 2), (-2, 6), (-1, 12)$$

의 4개이다.

㉒ 4

03 이차함수 $y=f(x)$ 의

그래프의 축의 방정식을

$x=p$ 라 하고, $AB=2k$ 라

하면 오른쪽 그림에서

$$A(p-k, 0),$$

$$B(p+k, 0)$$

이므로

$$f(x) = (x-p+k)(x-p-k)$$

이때 $CD=AB+2$ 이므로 위의 그림에서

$$C(p-k-1, 5), D(p+k+1, 5)$$

즉 $f(p+k+1)=5$ 이므로

$$(p+k+1-p-k)(p+k+1-p-k) = 5$$

$$2k+1=5 \quad \therefore k=2$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 두 점 사이의 거리가 $2AB=8$ 이므로 그 두 점의 좌표는 각각

$$(p-4, a), (p+4, a)$$

$$\therefore a=f(p+4)$$

$$=(p+4-p+2)(p+4-p-2)$$

$$=12$$

㉒ 12

04 $f(x) = -x^2 + 2ax = -(x-a)^2 + a^2$ 이라 하자.

(i) $b < a$ 일 때,

$0 \leq x \leq b$ 에서 $f(x)$ 는 $x=b$ 일

때 최댓값 $f(b)$ 를 가지므로

$$-b^2 + 2ab = 9$$

$$\therefore b(2a-b) = 9$$

이때 a, b 는 자연수이므로 순서쌍 (a, b) 는

$$(5, 1) \text{의 1개}$$

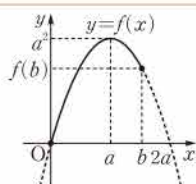
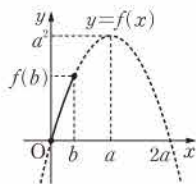
(ii) $a \leq b \leq 2a$ 일 때,

$0 \leq x \leq b$ 에서 $f(x)$ 는 $x=a$ 일

때 최댓값 a^2 을 가지므로

$$a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$



$b=1$ 일 때,

$$2a-1=9 \quad \therefore a=5$$

$b=3$ 일 때,

$$2a-3=9 \quad \therefore a=6$$

$b=9$ 일 때,

$$2a-9=1 \quad \therefore a=5$$

이때 $b < a$ 인 경우는

$a=5, b=1$ 뿐이다.

$$3 \leq b \leq 6$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는

$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$ 의 4개

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$1+4=5$$

㉒ ③

05 $A(t, -t+8), B(t, -t^2+9t-8)$ 이므로

$$\overline{AB} = -t^2+9t-8 - (-t+8) = -t^2+10t-16$$

(i) $2 < t < \frac{9}{2}$ 일 때,

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래

프는 직선 $x=\frac{9}{2}$ 에 대하여

대칭이므로 점 C의 x좌표는

$$\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2} - t\right) = 9 - t$$

$$\therefore \overline{BC} = (9-t) - t$$

$$= 9 - 2t$$

$$\therefore g(t) = 2\{(-t^2+10t-16) + (9-2t)\}$$

$$= -2(t^2-8t+7)$$

$$= -2(t-4)^2 + 18$$

따라서 $2 < t < \frac{9}{2}$ 에서 $g(t)$ 는 $t=4$ 일 때 최댓값 18을 갖는다.

(ii) $\frac{9}{2} < t < 8$ 일 때,

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래

프는 직선 $x=\frac{9}{2}$ 에 대하여

대칭이므로 점 C의 x좌표는

$$\frac{9}{2} - \left(t - \frac{9}{2}\right) = 9 - t$$

$$\therefore \overline{BC} = t - (9-t)$$

$$= 2t - 9$$

$$\therefore g(t) = 2\{(-t^2+10t-16) + (2t-9)\}$$

$$= -2(t^2-12t+25)$$

$$= -2(t-6)^2 + 22$$

따라서 $\frac{9}{2} < t < 8$ 에서 $g(t)$ 는 $t=6$ 일 때 최댓값 22를 갖는다.

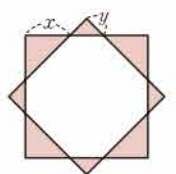
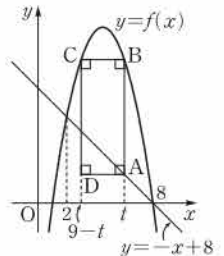
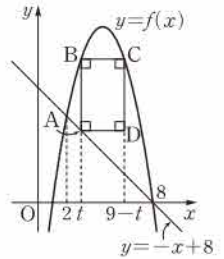
(i), (ii)에서 $g(t)$ 의 최댓값은 22이므로

$$M = 22$$

또 $g(3) = -2(3-4)^2 + 18 = 16$ 이므로

$$g(3) + M = 38$$

㉒ 38



06 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길

이가 1인 정사각형에서 색칠한 직각

이등변삼각형의 빗변이 아닌 변의

길이를 x , 다른 정사각형의 색칠한

직각이등변삼각형의 빗변이 아닌 변

의 길이를 y 라 하면 서로 다른 8개의 교점이 존재하므로

$$0 < x < \frac{1}{2}$$

또 $1 = x + \sqrt{2}y + x$ 에서

$$y = \frac{1-2x}{\sqrt{2}}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}y^2 &= 2x^2 + 2 \cdot \frac{(1-2x)^2}{2} \\ &= 6x^2 - 4x + 1 \\ &= 6\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

이고, $0 < x < \frac{1}{2}$ 에서 $x = \frac{1}{3}$ 일 때 색칠한 부분의 넓이의

최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 30m = 10$$

답 10



위의 그림에서 빗변의 길이는

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + y^2} &= \sqrt{2y^2} \\ &= \sqrt{2}y \end{aligned}$$

06 여러 가지 방정식

개념 & 핵심 기출

본책 52쪽

01 주어진 삼차방정식의 한 근이 1이므로

$$1 + 2k + 1 + k - 4 - 4k = 0$$

$$\therefore k = -2$$

즉 주어진 삼차방정식은 $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ 이므로

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ 이라 하면

$$P(1) = 0$$

조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} P(x) & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 \end{array}$$

$$= (x-1)(x^2-2x-8)$$

$$= (x-1)(x+2)(x-4)$$

따라서 주어진 삼차방정식은

$$(x-1)(x+2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로

$$\alpha = -2, \beta = 4$$

$$\therefore \beta - \alpha = 6$$

답 ①

다른 풀이 주어진 삼차방정식의 한 근이 1이므로

$$1 + 2k + 1 + k - 4 - 4k = 0$$

$$\therefore k = -2$$

따라서 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ 의 세 근이 1, α , β 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + \alpha + \beta = 3, 1 \cdot \alpha \cdot \beta = -8$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -8$$

$$\therefore (\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= 2^2 - 4 \cdot (-8) = 36$$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\beta - \alpha = 6$

02 $x^2 - 3x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2 - X - 20 = 0, (X+4)(X-5) = 0$$

$$\therefore X = -4 \text{ 또는 } X = 5$$

(i) $X = -4$ 일 때,

$$x^2 - 3x = -4 \text{이므로}$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-3)^2 - 4 \cdot 4 = -7 < 0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X = 5$ 일 때,

$$x^2 - 3x = 5 \text{이므로}$$

$$x^2 - 3x - 5 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (-3)^2 - 4 \cdot (-5) = 29 > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 이차방정식 $x^2 - 3x - 5 = 0$ 의 근이고, 두 허근은 이차방정식

$x^2-3x+4=0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=-5, b=3$$

$$\therefore ab=-15$$

답 -15

03 a 가 사차방정식 $x^4-20x^2+5k+4=0$ 의 근이면 $-a$ 도 근이므로 이 사차방정식의 네 실근은 $\alpha, \beta, -\beta, -\alpha$ 이다.

$x^2=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2-20X+5k+4=0$$

이고 이 이차방정식의 두 근이 α^2, β^2 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha^2\beta^2=5k+4$$

$$\alpha\beta=8\text{이므로 } 5k+4=64$$

$$\therefore k=12$$

따라서 주어진 방정식은 $x^4-20x^2+64=0$ 이므로

$$(x^2-4)(x^2-16)=0$$

$$(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=-2 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=4$$

이때 $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ 이므로

$$\alpha=-4, \beta=-2, \gamma=2, \delta=4$$

$$\therefore k+\gamma+\delta=18$$

답 18

04 삼차방정식 $x^3-x^2+5x-2=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=1, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5, \alpha\beta\gamma=2$$

$$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

$$=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$$

$$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$$

$$=1-1+5-2$$

$$=3$$

답 ⑤

05 삼차방정식 $x^3+ax^2+44x+b=0$ 의 세 근을 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ ($\alpha>0$)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\cdot 2\alpha+2\alpha\cdot 3\alpha+3\alpha\cdot \alpha=44, \quad 11\alpha^2=44$$

$$\alpha^2=4 \quad \therefore \alpha=2 \quad (\because \alpha>0)$$

따라서 세 실근은 2, 4, 6이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+4+6=-a, \quad 2\cdot 4\cdot 6=-b$$

$$\therefore a=-12, \quad b=-48$$

$$\therefore a+b=-60$$

답 -60

06 삼차방정식 $x^3+x^2-1=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-1, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0, \quad \alpha\beta\gamma=1$$

따라서

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha) &= 2(\alpha+\beta+\gamma) \\ &= -2, \end{aligned}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=-1\text{에서}$$

$$\alpha+\beta=-1-\gamma,$$

$$\beta+\gamma=-1-\alpha,$$

$$\gamma+\alpha=-1-\beta$$

$$a^4-20a^2+5k+4=0\text{이}$$

므로

$$(-a)^4-20\cdot (-a)^2+5k+4$$

$$=a^4-20a^2+5k+4$$

$$=0$$

$$\begin{aligned} &(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta) \\ &= \alpha\beta+\gamma\alpha+\beta^2+\beta\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta+\gamma^2+\gamma\alpha+\gamma\alpha+\beta\gamma \\ &\quad +\alpha^2+\alpha\beta \end{aligned}$$

$$= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

$$= (-1)^2=1,$$

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

$$= (-1-\gamma)(-1-\alpha)(-1-\beta)$$

$$= -1-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$$

$$= -1+1-1=-1$$

이므로 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3+2x^2+x+1=0$$

답 ⑤

15분 비밀노트

삼차방정식 $x^3+x^2-1=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로

$$x^3+x^2-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$(-1)^3+(-1)^2-1=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)$$

이므로

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) &= (-1-\gamma)(-1-\alpha)(-1-\beta) \\ &= -1 \end{aligned}$$

07 삼차방정식 $x^3+px^2+qx-p=0$ 의 한 근이 $3+\sqrt{7}$ 이고, 계수가 모두 유리수이므로 $3-\sqrt{7}$ 도 근이다. 나머지 한 근을 α 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(3+\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})=-p$$

$$\therefore \alpha+6=-p \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha(3+\sqrt{7})+(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})\alpha=q$$

$$\therefore 6\alpha+2=q \quad \dots\dots ㉡$$

$$\alpha(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})=p$$

$$\therefore 2\alpha=p \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$$\alpha=-2, \quad p=-4$$

$$\alpha=-2\text{를 } ㉡\text{에 대입하면 } q=-10$$

$$\therefore p+q=-14$$

답 ①

참고 주어진 방정식에 $x=3+\sqrt{7}$ 을 대입한 후 무리수가 서로 같을 조건을 이용하여 p, q 의 값을 구할 수도 있다.

08 삼차방정식 $x^3-kx^2+kx-k^2=0$ 의 한 근이 $4i$ 이고, 계수가 모두 실수이므로 $-4i$ 도 근이다.

한편 $x^3-kx^2+kx-k^2=0$ 에서

$$x^2(x-k)+k(x-k)=0$$

$$\therefore (x-k)(x^2+k)=0$$

즉 나머지 한 근은 k 이다.

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$k\cdot 4i\cdot (-4i)=k^2, \quad k^2-16k=0$$

$$k(k-16)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=16$$

이때 $k=0$ 이면 주어진 삼차방정식은 $x^3=0$ 이 되어 허근을 갖지 않으므로 $k=16$

즉 주어진 삼차방정식의 세 근은 16, $4i$, $-4i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16^2 + (-4i)^2 = 240 \quad \text{답 240}$$

다른 풀이 $x^3 - kx^2 + kx - k^2 = 0$ 에서

$$(x-k)(x^2+k)=0$$

즉 $4i$ 는 이차방정식 $x^2+k=0$ 의 한 근이므로

$$(4i)^2 + k = 0 \quad \therefore k = 16$$

따라서 주어진 삼차방정식의 세 근은 16, $4i$, $-4i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16^2 + (-4i)^2 = 240$$

09 주어진 사차방정식의 한 근이 $2-i$ 이고 계수가 모두 유리수, 즉 실수이므로 $2+i$ 도 근이다.

$2-i$, $2+i$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x-2+i)(x-2-i)=0$$

$$\therefore x^2 - 4x + 5 = 0$$

또 주어진 사차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$ 이고, 계수가 모두 유리수이므로 $2-\sqrt{3}$ 도 근이다.

$2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0$$

$$\therefore x^2 - 4x + 1 = 0$$

따라서

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 5$$

$$= (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 1)$$

$$= x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$$

이므로

$$a = -8, b = 22, c = -24$$

$$\therefore a + b + c = -10 \quad \text{답 ⑤}$$

10 $x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근 ω 는 이차방정식

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이므로

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$\therefore \omega - 2\omega^2 + 3\omega^4 - 4\omega^5 = \omega - 2\omega^2 + 3\omega - 4\omega^2$$

$$= 4\omega - 6\omega^2$$

$$= 4\omega - 6(-\omega - 1)$$

$$= 10\omega + 6$$

따라서 $a=10$, $b=6$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 10^2 + 6^2 = 136 \quad \text{답 136}$$

11 $x^3 = -1$, 즉 $x^3 + 1 = 0$ 에서

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

방정식 $x^3 = -1$ 의 한 허근 ω 는 이차방정식

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이고, ω 의 켤레복소수인 $\bar{\omega}$ 도

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = 1, \omega \bar{\omega} = 1$$

$x^2 - 4x = X$ 로 놓고 다음과 같이 전개한다.

$$(X+5)(X+1)$$

$$= X^2 + 6X + 5$$

$$= (x^2 - 4x)^2$$

$$+ 6(x^2 - 4x) + 5$$

$$= x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$$+ 6x^2 - 24x + 5$$

$$= x^4 - 8x^3 + 22x^2$$

$$- 24x + 5$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \text{에서}$$

$$\omega^2 = -\omega - 1$$

$x = \pm\sqrt{3}$ 을 $y = -x$ 에 대입하면

$$y = \mp\sqrt{3} \text{ (복호동순)}$$

$$\begin{aligned} \therefore z\bar{z} &= \frac{\omega}{1-\omega} \cdot \frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} = \frac{\omega}{1-\omega} \cdot \frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} \\ &= \frac{\omega\bar{\omega}}{1-(\omega+\bar{\omega})+\omega\bar{\omega}} \\ &= \frac{1}{1-1+1} = 1 \end{aligned} \quad \text{답 ⑤}$$

12 $x^3 = 1$, 즉 $x^3 - 1 = 0$ 에서

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근 ω 는 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이므로

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 의 양변을 ω 로 나누어 정리하면

$$\omega + \frac{1}{\omega} = -1$$

$$\omega^2 + \frac{1}{\omega^2} = \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2 = -1$$

$$\omega^3 + \frac{1}{\omega^3} = 1 + 1 = 2$$

$$\omega^4 + \frac{1}{\omega^4} = \omega + \frac{1}{\omega} = -1$$

$\vdots$

$$\therefore \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + \left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}\right) + \left(\omega^3 + \frac{1}{\omega^3}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\omega^{10} + \frac{1}{\omega^{10}}\right)$$

$$= \{-1 + (-1) + 2\} \cdot 3 + (-1)$$

$$= -1$$

답 -1

$$\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 16 & \cdots \text{㉠} \\ x - y = 2 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉡에서 $y = x - 2$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$x^2 + 4x(x-2) + (x-2)^2 = 16$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \therefore x = 1 \pm \sqrt{3}$$

이것을 ㉡에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x = 1 + \sqrt{3}, y = -1 + \sqrt{3}$$

$$\text{또는 } x = 1 - \sqrt{3}, y = -1 - \sqrt{3}$$

$$\therefore x + y = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\therefore (x+y)^2 = 12$$

답 ③

다른 풀이 ㉠에서 $(x-y)^2 + 6xy = 16$ 이므로 이 식에

$x - y = 2$ 를 대입하면

$$2^2 + 6xy = 16 \quad \therefore xy = 2$$

$$\therefore (x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$$

$$= 2^2 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & \cdots \text{㉠} \\ x^2 - xy + y^2 = 9 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $(x+y)(x-y) = 0$

$$\therefore y = -x \text{ 또는 } y = x$$

(i) $y = -x$ 를 ㉡에 대입하면

$$x^2 - x(-x) + (-x)^2 = 9$$

$$3x^2 = 9, \quad x^2 = 3$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{3}, y = \mp\sqrt{3} \text{ (복호동순)}$$

일품 BOX

(ii) $y=x$ 를 ㉠에 대입하면

$$x^2 - x^2 + x^2 = 9, \quad x^2 = 9$$

$$\therefore x = \pm 3, y = \pm 3 \text{ (복호동순)}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 3 \end{cases} \text{ (복호동순)}$$

따라서 $2x+y$ 의 최댓값은 $2 \cdot 3 + 3 = 9$

답 9

$$15 \quad \begin{cases} x+y=3 & \dots\dots ㉠ \\ x^2y+xy^2=-12 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $xy(x+y)=-12$

㉡에서

$$㉠을 ㉡에 대입하면 \quad 3xy = -12 \quad \therefore xy = -4$$

즉 $x+y=3, xy=-4$ 에서 x, y 는 이차방정식

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \text{의 두 근이므로}$$

$$(t+1)(t-4)=0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 4$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\therefore |x-y|=5$$

답 ⑤

16 직육면체의 가로, 세로의 길이를 각각 a, b , 높이를 c 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 36이므로

$$4(a+b+c)=36 \quad \therefore a+b+c=9$$

이 직육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{29}$ 이므로

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{29} \quad \therefore a^2+b^2+c^2=29$$

이때 $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에서

$$9^2 = 29 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca=26$$

이 직육면체의 부피가 24이므로 $abc=24$

즉 a, b, c 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0$$

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

$$(x-2)(x^2-7x+12)=0$$

$$(x-2)(x-3)(x-4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=3 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 직육면체의 모서리 중 길이가 가장 짧은 모서리의 길이는 2이다. 답 ③

17 두 연못 O_1, O_2 의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라 하면 두 연못의 중심 사이의 거리가 6이므로

$$r_1+r_2=6 \quad \dots\dots ㉠$$

두 연못 O_1, O_2 의 넓이의 합이 20π 이므로

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 20\pi$$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 = 20 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠에서 $r_2=6-r_1$ 이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$r_1^2 + (6-r_1)^2 = 20, \quad r_1^2 - 6r_1 + 8 = 0$$

$$(r_1-2)(r_1-4)=0 \quad \therefore r_1=2 \text{ 또는 } r_1=4$$

$x=\pm 3$ 을 $y=x$ 에 대입

하면

$$y=\pm 3 \text{ (복호동순)}$$

$x=3, y=3$ 일 때 $2x+y$ 는 최댓값을 갖는다.

정원의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m로 놓고 풀 수도 있다. 이때 꽃밭의 가로, 세로의 길이는 각각 $(x-3)$ m, $(y-2)$ m이다.

$x+y=u, xy=v$ 를 만족시키는 x, y 는 이차방정식 $t^2-ut+v=0$ 의 두 근이다.

다항식 $P(x)$ 에 대하여 $P(a)=0$ 이면 인수 정리에 의하여 $P(x)=(x-a)Q(x)$ 로 인수분해 된다.

$$2 \begin{vmatrix} 1 & -9 & 26 & -24 \\ & 2 & -14 & 24 \\ & & 1 & -7 \\ & & & 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 24 \\ 24 \\ 0 \end{vmatrix}$$

따라서 $r_1=2, r_2=4$ 또는 $r_1=4, r_2=2$ 이므로 두 연못 O_1, O_2 의 반지름의 길이의 차는 2이다. 답 2

다른 풀이 $(r_1+r_2)^2=r_1^2+2r_1r_2+r_2^2$ 에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$6^2=20+2r_1r_2 \quad \therefore r_1r_2=8$$

즉 r_1, r_2 는 이차방정식 $x^2-6x+8=0$ 의 두 근이므로

$$(x-2)(x-4)=0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 두 연못의 반지름의 길이의 차는 2이다.

18 꽃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m

($x>y$)라 하면 정원의 가로, 세로의 길이는 각각 $(x+3)$ m, $(y+2)$ m이고, 정원의 둘레의 길이가 50 m이므로

$$2\{(x+3)+(y+2)\}=50$$

$$\therefore x+y=20$$

꽃밭의 넓이가 96 m^2 이므로 $xy=96$

즉 x, y 는 이차방정식 $t^2-20t+96=0$ 의 두 근이므로

$$(t-8)(t-12)=0$$

$$\therefore t=8 \text{ 또는 } t=12$$

따라서 $x=12, y=8$ 이므로 꽃밭의 가로의 길이는 12 m이다. 답 12 m

1등급을 위한 고난도 문제

본책 55쪽

01 $P(x)=x^3+(a+1)x^2+2ax+a^2$ 이라 하면

$$P(-a)=-a^3+(a+1)a^2-2a^2+a^2=0$$

이므로

$$P(x)=(x+a)(x^2+x+a)$$

(i) 이차방정식 $x^2+x+a=0$ 이 $x=-a$ 를 근으로 가질 때,

$$(-a)^2+(-a)+a=0 \quad \therefore a=0$$

(ii) 이차방정식 $x^2+x+a=0$ 이 중근을 가질 때,

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=1^2-4a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 $a=0$ 또는 $a=\frac{1}{4}$ 이므로 구하는 합은 $\frac{1}{4}$ 이다. 답 ③

02 $x^2=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2+2aX+2a-1=0$$

$$(X+2a-1)(X+1)=0$$

$$\therefore X=-2a+1 \text{ 또는 } X=-1$$

즉 $x^2=-2a+1$ 또는 $x^2=-1$ 이고, 방정식 $x^2=-1$ 은 서로 다른 두 허근을 가지므로 방정식 $x^2=-2a+1$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 $-2a+1>0$ 이어야 하므로

$$a<\frac{1}{2}$$

답 ①

03 $x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$9x^2 + 24x - 2 + \frac{24}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$$

$$9\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 24\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

$$9\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 24\left(x + \frac{1}{x}\right) - 20 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면} \quad 9t^2 + 24t - 20 = 0$$

$$(3t+10)(3t-2) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{10}{3} \text{ 또는 } t = \frac{2}{3}$$

(i) $t = -\frac{10}{3}$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \text{이므로} \quad 3x^2 + 10x + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = 5^2 - 3 \cdot 3 = 16 > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $t = \frac{2}{3}$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \text{이므로} \quad 3x^2 - 2x + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-1)^2 - 3 \cdot 3 = -8 < 0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 한 실근 α 에 대하여

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = -\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{10}{3}$$

$x=0$ 이면 주어진 방정식은 $9=0$ 이므로 $x \neq 0$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

04 $x^4 + 3x^2 + 4 = 0$ 에서

$$(x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 = 0, \quad (x^2 + 2)^2 - x^2 = 0$$

$$(x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. ㉠에서 $x^2 + x + 2 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$$

이고, $x^2 - x + 2 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (-1)^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$$

이므로 α 는 항상 허수이다.

ㄴ. ㉠에서 $x^2 + x + 2 = 0$ 의 한 근을 α 라 하면

$$\alpha^2 + \alpha = -2$$

ㄷ. ㉠에서 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 한 근을 α 라 하면

$$\alpha^2 - \alpha = -2$$

또 $x^2 + x + 2 = 0$ 의 한 근을 α 라 하면 $\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$ 에서 $\alpha^2 = -\alpha - 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \alpha &= (-\alpha - 2) - \alpha \\ &= -2\alpha - 2 \end{aligned}$$

이때 ㄱ에서 α 는 허수이므로 $-2\alpha - 2$ 도 허수이다.

따라서 $\alpha^2 - \alpha = 2$ 를 만족시키는 α 는 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

05 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ 의 세 근이 1, α , β 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + \alpha + \beta = -a, \quad \alpha + \beta + \alpha\beta = b, \quad \alpha\beta = -2$$

이때

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \\ &= 20 + 2 \cdot (-2) = 16 \end{aligned}$$

이므로

$$\alpha + \beta = -4 \text{ 또는 } \alpha + \beta = 4$$

(i) $\alpha + \beta = -4$ 일 때,

$$1 + \alpha + \beta = -a \text{에서} \quad a = 3$$

$$\alpha + \beta + \alpha\beta = b \text{에서} \quad b = -6$$

$$\therefore a - b = 9$$

(ii) $\alpha + \beta = 4$ 일 때,

$$1 + \alpha + \beta = -a \text{에서} \quad a = -5$$

$$\alpha + \beta + \alpha\beta = b \text{에서} \quad b = 2$$

$$\therefore a - b = -7$$

(i), (ii)에서 $a - b$ 의 최댓값은 9이다.

답 ④

06 삼차방정식 $x^3 + px^2 + 11x + q = 0$ 의 세 근을

$\alpha - 1$, α , $\alpha + 1$ (α 는 정수)이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha - 1) + \alpha + (\alpha + 1) = -p$$

$$\therefore 3\alpha = -p \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\alpha - 1)\alpha + \alpha(\alpha + 1) + (\alpha - 1)(\alpha + 1) = 11$$

$$\alpha^2 = 4 \quad \therefore \alpha = \pm 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(\alpha - 1)\alpha(\alpha + 1) = -q$$

$$\therefore \alpha^3 - \alpha = -q \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 ①

$\alpha = -2$ 이면 세 근은 $-3, -2, -1$
 $\alpha = 2$ 이면 세 근은 $1, 2, 3$

채점 기준	비율
① $x + \frac{1}{x} = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식을 구하여 풀 수 있다.	40%
② t 의 값에 따라 근을 판별할 수 있다.	40%
③ $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

1등급 비밀노트

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + a = 0$ ($a \neq 0$)과 같이 x 에 대한 내림차순 또는 오름차순으로 정리하였을 때 가운데 항을 중심으로 계수가 서로 대칭인 방정식을 상반방정식이라 하며 다음과 같은 방법으로 푼다.

(1) 짝수차 상반방정식의 풀이

(i) 양변을 x^2 으로 나눈다.

(ii) $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ 임을 이용하여 좌변을 정리한 후

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하여 주어진 방정식을 t 에 대한 방정식으로 나타낸다.

(iii) t 의 값을 구한 후 $t = x + \frac{1}{x}$ 에 대입하여 x 의 값을 구한다.

(2) 홀수차 상반방정식의 풀이

(i) $x = -1$ 일 때 주어진 방정식이 성립하므로 $(x+1)f(x) = 0$ 꼴로 변형한다.

(ii) $f(x) = 0$ 은 짝수차 상반방정식이므로 (1)을 이용하여 푼다.

㉔을 ㉔, ㉔에 각각 대입하면

$$p = \pm 6, q = \pm 6 \text{ (복호동순)}$$

$$\therefore |p| + |q| = 12$$

답 12

채점 기준	비율
① 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	60%
② p, q 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $ p + q $ 의 값을 구할 수 있다.	10%

15점 비밀노트

문제에서 연속하는 세 정수의 조건이 주어지면 세 수를

$$a-1, a, a+1$$

로 놓고 풀고, 연속하는 세 홀수 또는 짝수의 조건이 주어지면 세 수를

$$a-2, a, a+2$$

로 놓고 푼다.

07 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = -a, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b, \alpha\beta\gamma = -c$$

따라서

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = -\frac{a}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{c}$$

이므로 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3 + \frac{b}{c}x^2 + \frac{a}{c}x + \frac{1}{c} = 0$$

이때 상수항이 1이어야 하므로 양변에 c 를 곱하면 구하는 방정식은

$$cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

$$\text{답 } cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

15점 비밀노트

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($ad \neq 0$)의 세 근이 α, β, γ 이면 $dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ 의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이다.

08 $P(x) - Q(x) = x^3 - 8x^2 + x + 4a + 2$

방정식 $P(x) - Q(x) = 0$ 의 한 근이 순허수이므로 한 근을 ki (k 는 0이 아닌 실수)라 하면 계수가 모두 실수이므로 $-ki$ 도 근이다.

나머지 한 근을 a 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + ki + (-ki) = 8$$

$$\therefore a = 8$$

$$8 \cdot ki + ki \cdot (-ki) + (-ki) \cdot 8 = 1$$

$$\therefore k^2 = 1$$

..... ㉔

㉔에서 $a = -2a - n$ 이고 a 는 정수, n 은 자연수이므로 a 는 정수이다.

$a^2 \geq 0$ 이므로

$$a^2 + 2 \geq 2$$

따라서 $a = p$, $a^2 + 2 = 1$ 인 경우는 성립하지 않는다.

$k^2 = 1$ 에서 $k = \pm 1$ 이므로 두 허근은 $i, -i$ 이다.

$$8 \cdot ki \cdot (-ki) = -4a - 2$$

$$\therefore 8k^2 = -4a - 2$$

..... ㉔

㉔을 ㉔에 대입하면

$$-4a - 2 = 8 \quad \therefore a = -\frac{5}{2}$$

..... ㉔

따라서 구하는 합은

$$8 + \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{11}{2}$$

..... ㉔

답 $\frac{11}{2}$

채점 기준	비율
① 방정식 $P(x) - Q(x) = 0$ 의 실근을 구할 수 있다.	40%
② a 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ 실근과 a 의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

09 구하는 삼차방정식을 $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 유리수)이라 하면 이 방정식의 한 근이 $1 + 2\sqrt{2}$ 이고, 계수가 모두 유리수이므로 $1 - 2\sqrt{2}$ 도 근이다.

즉 세 근이 $\frac{1}{2}, 1 + 2\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2}$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2} + (1 + 2\sqrt{2}) + (1 - 2\sqrt{2}) = -\frac{a}{2}$$

$$\therefore a = -5$$

$$\frac{1}{2} (1 + 2\sqrt{2}) + (1 + 2\sqrt{2})(1 - 2\sqrt{2}) + (1 - 2\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\therefore b = -12$$

$$\frac{1}{2} (1 + 2\sqrt{2})(1 - 2\sqrt{2}) = -\frac{c}{2}$$

$$\therefore c = 7$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$2x^3 - 5x^2 - 12x + 7 = 0$$

$$\text{답 } 2x^3 - 5x^2 - 12x + 7 = 0$$

10 삼차방정식 $x^3 + nx^2 + n^2x - p = 0$ 의 한 근이 $a + \sqrt{2}i$ 이고 계수가 모두 실수이므로 $a - \sqrt{2}i$ 도 근이다. 나머지 한 근을 a 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (a + \sqrt{2}i) + (a - \sqrt{2}i) = -n \quad \text{..... ㉔}$$

$$\alpha(a + \sqrt{2}i) + (a + \sqrt{2}i)(a - \sqrt{2}i) + (a - \sqrt{2}i)\alpha = n^2 \quad \text{..... ㉔}$$

$$\alpha(a + \sqrt{2}i)(a - \sqrt{2}i) = p \quad \text{..... ㉔}$$

㉔에서 $\alpha(a^2 + 2) = p$

이때 p 는 소수이고 a, n 은 정수이므로

$$a = 1, a^2 + 2 = p \quad \text{..... ㉔}$$

$a = 1$ 을 ㉔, ㉔에 각각 대입하여 정리하면

$$2a + 1 = -n, a^2 + 2a + 2 = n^2$$

$n = -2a - 1$ 이므로 이것을 $a^2 + 2a + 2 = n^2$ 에 대입하면

$$a^2 + 2a + 2 = (-2a - 1)^2$$

$$3a^2 + 2a - 1 = 0, (a + 1)(3a - 1) = 0$$

$\therefore a = -1$ ($\because a$ 는 정수)
 $a = -1$ 을 ㉔에 대입하면
 $p = 3$ 답 ②

11 $\alpha = p + qi$, $\beta = r + si$ (p, q, r, s 는 실수)라 하면
 조건 ㉑에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha + \bar{\alpha} &= (p + qi) + (p - qi) = 2p = 4 \\ \therefore p &= 2 \\ \beta - \bar{\beta} &= (r + si) - (r - si) = 2si = 4i \\ \therefore s &= 2 \end{aligned}$$

조건 ㉒에 의하여 $\beta = 2\alpha$ 이므로

$$r + 2i = 2(2 + 2i) \quad \therefore r + 2i = 4 + 4i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$r = 4, q = 1$$

즉 $\alpha = 2 + i$, $\beta = 4 + 2i$ 이고 주어진 사차방정식의 계수가
 모두 실수이므로 $\bar{\alpha} = 2 - i$, $\bar{\beta} = 4 - 2i$ 도 근이다. → ①

$\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ 를 네 근으로 하고 x^4 의 계수가 1인 사차방정
 식은

$$(x - 2 - i)(x - 2 + i)(x - 4 - 2i)(x - 4 + 2i) = 0$$

이므로

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \\ = (x - 2 - i)(x - 2 + i)(x - 4 - 2i)(x - 4 + 2i) \end{aligned}$$

$x = 1$ 을 양변에 대입하면

$$\begin{aligned} 1 + a + b + c + d \\ = (-1 - i)(-1 + i)(-3 - 2i)(-3 + 2i) \\ = 2 \cdot 13 = 26 \\ \therefore a + b + c + d = 25 \end{aligned}$$

→ ②

답 25

채점 기준	비율
① 주어진 사차방정식의 근을 구할 수 있다.	50%
② $a + b + c + d$ 의 값을 구할 수 있다.	50%

12 사차방정식 $x^4 + ax^2 + b = 0$ 의 한 근이 $p + qi$ 이고,
 계수가 모두 실수이므로 $p - qi$ 도 근이다.

이때 주어진 방정식의 한 근을 α 라 하면

$$\alpha^4 + a\alpha^2 + b = (-\alpha)^4 + a(-\alpha)^2 + b = 0$$

이므로 $-\alpha$ 도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 근은

$$p + qi, p - qi, -p + qi, -p - qi$$

이므로 모든 근의 곱은

$$\begin{aligned} (p + qi)(p - qi)(-p + qi)(-p - qi) \\ = (p^2 + q^2)(p^2 + q^2) \\ = (p^2 + q^2)^2 \end{aligned}$$

답 ④

13 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 에서 $2\omega + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$$4\omega^2 + 4\omega + 1 = -3 \quad \therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

양변에 $\omega - 1$ 을 곱하면

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \quad \therefore \omega^3 - 1 = 0$$

$\therefore \omega^3 = 1$, $\omega^2 = -\omega - 1$ 이므로 $x = \omega$ 를 주어진 방정식에
 대입하면

$$\begin{aligned} \omega^4 + a\omega^3 - b\omega^2 + a\omega + 1 &= 0 \\ \omega + a - b(-\omega - 1) + a\omega + 1 &= 0 \\ (a + b + 1) + (a + b + 1)\omega &= 0 \\ (a + b + 1)(1 + \omega) &= 0 \end{aligned}$$

이때 $1 + \omega \neq 0$ 이므로 $a + b + 1 = 0$

$$\therefore a + b = -1$$

$$\therefore \omega^2 = -\omega - 1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \bar{\omega}$$

주어진 방정식의 한 근이 ω 이고 계수가 모두 실수이
 므로 $\bar{\omega}$, 즉 ω^2 도 근이다.

ㄷ, 다항식 $x^4 + ax^3 - bx^2 + ax + 1$ 은 $x^2 + x + 1$ 을 인수
 로 갖고 상수항이 1이므로

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 - bx^2 + ax + 1 \\ = (x^2 + x + 1)(x^2 + cx + 1) \quad (c \text{는 실수}) \end{aligned}$$

이라 하자.

이때 주어진 방정식이 중근인 실근을 갖기 위해서는
 방정식 $x^2 + cx + 1 = 0$ 이 중근인 실근을 가져야 하므
 로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = c^2 - 4 = 0$$

$$\therefore c = -2 \text{ 또는 } c = 2$$

따라서 $c = -2$, $c = 2$ 일 때 실수 a, b 의 순서쌍

(a, b) 는 각각 1개씩이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는
 2이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

14 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이 ω 이므로

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

양변에 $\omega - 1$ 을 곱하면

$$\begin{aligned} (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) &= 0 \\ \omega^3 - 1 &= 0 \quad \therefore \omega^3 = 1 \end{aligned}$$

$\therefore x = \omega^3$, 즉 $x = 1$ 을 $x^2 - x + 1 = 0$ 에 대입하면

$$1^2 - 1 + 1 \neq 0$$

ㄴ, $x = -\omega^2$ 을 $x^2 - x + 1 = 0$ 에 대입하면

$$\omega^4 + \omega^2 + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$$

따라서 $-\omega^2$ 은 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이다.

ㄷ, $\omega^3 = 1$ 에서 $\frac{1}{\omega} = \omega^2$

$x = \omega^2$ 을 $x^2 - x + 1 = 0$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \omega^4 - \omega^2 + 1 &= \omega - (-\omega - 1) + 1 \\ &= 2\omega + 2 \neq 0 \end{aligned}$$

이상에서 근이 될 수 있는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

15 방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근이 ω 이므로

$$\omega^2 - \omega + 1 = 0$$

양변에 $\omega + 1$ 을 곱하면

$$\begin{aligned} (\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1) &= 0 \\ \omega^3 + 1 &= 0 \quad \therefore \omega^3 = -1 \end{aligned}$$

→ ①

일품 BOX

한편 $\omega^n = \omega^{2n+1}$ 에서 $\omega^{2n+1} = \omega^n \cdot \omega^{n+1}$ 이므로
 $\omega^{n+1} = 1$
 $\omega^3 = -1$ 에서 $\omega^6 = 1$ 이므로 $n+1$ 은 6의 배수이다.
 즉 $n+1=6, 12, 18, \dots$ 이므로
 $n=5, 11, 17, \dots$

따라서 두 자리 자연수 n 의 최솟값은 11이다.

답 11

채점 기준	비율
① ω^3 의 값을 구할 수 있다.	30%
② ω^{n+1} 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ 두 자리 자연수 n 의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

16 $x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근 ω 는 이차방정식

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이므로

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$\therefore \omega^{4n} + (\omega+1)^{4n} + 1 = (\omega^4)^n + (-\omega^2)^{4n} + 1$$

$$= \omega^n + (\omega^8)^n + 1$$

$$= \omega^n + \omega^{2n} + 1$$

$$= \omega^{2n} + \omega^n + 1$$

$$(-\omega^2)^{4n} = \{(-\omega^2)^4\}^n = (\omega^8)^n$$

$$\omega^8 = (\omega^3)^3 \cdot \omega^2 = \omega^2$$

(i) $n=3k$ ($k=1, 2, 3, \dots$)일 때,

$$\omega^{2n} + \omega^n + 1 = \omega^{6k} + \omega^{3k} + 1 = 3$$

(ii) $n=3k+1$ ($k=0, 1, 2, \dots$)일 때,

$$\omega^{2n} + \omega^n + 1 = \omega^{6k+2} + \omega^{3k+1} + 1$$

$$= \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

(iii) $n=3k+2$ ($k=0, 1, 2, \dots$)일 때,

$$\omega^{2n} + \omega^n + 1 = \omega^{6k+4} + \omega^{3k+2} + 1$$

$$= \omega^4 + \omega^2 + 1$$

$$= \omega + \omega^2 + 1 = 0$$

이상에서 $\omega^{4n} + (\omega+1)^{4n} + 1 = 0$ 을 만족시키는 자연수 n 은 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 꼴이므로 30 이하의 자연수 n 의 개수는

$$30 - 10 = 20$$

답 20

30 이하의 3의 양의 배수의 개수

$$17 \begin{cases} x+y=2 & \dots\dots ㉠ \\ x^2+ay=20 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

$x=a, y=\beta$ 를 ㉠에 대입하면

$$a+\beta=2$$

이때 $\alpha-\beta=-6$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$\alpha=-2, \beta=4$$

$x=-2, y=4$ 를 ㉡에 대입하면

$$4+4a=20 \quad \therefore a=4$$

㉠에서 $y=2-x$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$x^2+4(2-x)=20, \quad x^2-4x-12=0$$

$$(x+2)(x-6)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=6$$

이것을 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x=-2, y=4 \text{ 또는 } x=6, y=-4$$

따라서 $\gamma=6, \delta=-4$ 이므로

$$a+\gamma-\delta=14$$

답 14

채점 기준	비율
① a, β 의 값을 구할 수 있다.	20%
② a 의 값을 구할 수 있다.	10%
③ 주어진 연립방정식을 풀 수 있다.	50%
④ $a+\gamma-\delta$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

$$18 \begin{cases} 2x^2-2xy-y+1=0 & \dots\dots ㉠ \\ x^2-2x(y-1)-2y+1=0 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x+1)(x-2y+1)=0$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2y-1$$

(i) $x=-1$ 을 ㉡에 대입하면

$$2+2y-y+1=0 \quad \therefore y=-3$$

$$\therefore xy=3$$

(ii) $x=2y-1$ 을 ㉡에 대입하면

$$2(2y-1)^2-2y(2y-1)-y+1=0$$

$$4y^2-7y+3=0, \quad (4y-3)(y-1)=0$$

$$\therefore y=\frac{3}{4} \text{ 또는 } y=1$$

$$y=\frac{3}{4} \text{ 을 } x=2y-1 \text{ 에 대입하면 } x=\frac{1}{2}$$

$$y=1 \text{ 을 } x=2y-1 \text{ 에 대입하면 } x=1$$

$$\therefore xy=\frac{3}{8} \text{ 또는 } xy=1$$

(i), (ii)에서 xy 의 최솟값은 $\frac{3}{8}$ 이다.

답 ①

$$19 \begin{cases} -x+y=a & \dots\dots ㉠ \\ 2x^2+y^2=6 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=x+a$ 이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$2x^2+(x+a)^2=6$$

$$\therefore 3x^2+2ax+a^2-6=0 \quad \dots\dots ㉢$$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(a^2 - 6) = 0, \quad a^2 = 9$$

$$\therefore a=3 (\because a>0)$$

답 3

20 (i) $x \geq y$ 일 때,

$$\langle 2x, 2y \rangle = 2x, \langle x, y \rangle = x$$

이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x+y^2=2x & \dots\dots ㉠ \\ x-y+5=x & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $y=5$

$$y=5 \text{ 를 } ㉠ \text{ 에 대입하여 풀면 } x=25$$

(ii) $x < y$ 일 때,

$$\langle 2x, 2y \rangle = -2y, \langle x, y \rangle = -y$$

이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x+y^2=-2y & \cdots \cdots \textcircled{a} \\ x-y+5=-y & \cdots \cdots \textcircled{b} \end{cases}$$

㉔에서 $x=-5$

$x=-5$ 를 ㉔에 대입하여 정리하면

$$y^2+2y-5=0$$

$$\therefore y=-1 \pm \sqrt{6} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 정수인 해는 $x=25$, $y=5$ 이므로

$$\alpha=25, \beta=5$$

$$\therefore \alpha+\beta=30 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 30

채점 기준	비율
① $x \geq y$ 일 때, 주어진 연립방정식을 풀 수 있다.	40%
② $x < y$ 일 때, 주어진 연립방정식을 풀 수 있다.	40%
③ $\alpha+\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

21 $|x^2+y^2+x+y-8|+|x^2+xy+y^2-5|=0$ 의 근이 $x=\alpha, y=\beta$ 이고 α, β 는 실수이므로

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta-8=0 \\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-5=0 \end{cases}$$

$\alpha+\beta=u, \alpha\beta=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2-2v+u-8=0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ u^2-v-5=0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

㉔ $\times 2$ -㉕을 하면 $u^2-u-2=0$

$$(u+1)(u-2)=0 \quad \therefore u=-1 \text{ 또는 } u=2$$

이것을 ㉔에 대입하여 풀면

$$u=-1, v=-4 \text{ 또는 } u=2, v=-1$$

(i) $u=-1, v=-4$ 일 때,

$$\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=-4 \text{ 이므로}$$

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=4$$

(ii) $u=2, v=-1$ 일 때,

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=-\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ 의 최댓값은 4이다. 답 4

참고 (i)에서 α, β 는 이차방정식 $t^2+t-4=0$ 의 두 근이고, 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=1^2-4 \cdot (-4)=17>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

마찬가지로 (ii)에서 α, β 는 이차방정식 $t^2-2t-1=0$ 의 두 근이고, 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(-1)=2>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

22 반구의 반지름의 길이를 r 라 하면 원뿔의 높이는 $r+1$ 이고, 아이스크림콘의 부피가 30π 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 + \frac{1}{3} \pi r^2(r+1) = 30\pi$$

$$3r^3+10r^2+30=3\left(r+\frac{5}{3}\right)^2+\frac{65}{3}>0$$

원뿔의 밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 4이므로 모선의 길이는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$

$$5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -200 \\ & 5 & 40 & 200 \\ & 1 & 8 & 40 \\ & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$x^2+8x+40=(x+4)^2+24>0$$

$$\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha+\beta$$

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$$

직각삼각형 ABC의 세 변의 길이는 9, 12, 15이다.

$$\begin{aligned} 3r^3+r^2-90 &= 0 \\ (r-3)(3r^2+10r+30) &= 0 \\ \therefore r &= 3 \quad (\because r>0) \end{aligned}$$

따라서 아이스크림콘의 겉넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 5 = 18\pi + 15\pi = 33\pi \quad \text{답 } 33\pi$$

23 두 구멍의 밑면은 모두 한 변의 길이가 1인 정사각형이고 높이는 각각 $x+2, x$ 이므로

$$x(x+1)(x+2)-1^2 \cdot (x+2)-1^2 \cdot x+1^3=199$$

$$x^3+3x^2-200=0$$

$$(x-5)(x^2+8x+40)=0$$

$$\therefore x=5 \quad (\because x>0)$$

답 1

24 $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b$ 라 하면 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (a-3) + (b-3) \\ &= a+b-6 \end{aligned}$$

직각삼각형 ABC의 둘레의 길이가 36이므로

$$a+b+(a+b-6)=36$$

$$\therefore a+b=21$$

직각삼각형 ABC의 넓이에서

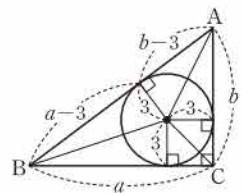
$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 36$$

$$\therefore ab=108$$

즉 a, b 는 이차방정식 $x^2-21x+108=0$ 의 두 근이므로

$$(x-9)(x-12)=0 \quad \therefore x=9 \text{ 또는 } x=12$$

따라서 직각삼각형 ABC의 세 변 중 길이가 가장 짧은 변의 길이는 9이다. 답 9



채점 기준	비율
① 삼각형의 둘레의 길이를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30%
② 직각삼각형의 넓이를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30%
③ 길이가 가장 짧은 변의 길이를 구할 수 있다.	40%

내신 수능 1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제** 본책 59쪽

01 $(x-a)(x^2-4x+4-3a)=0$ 이므로

$$x-a=0 \text{ 또는 } x^2-4x+4-3a=0$$

(i) -1 이 방정식 $x-a=0$ 의 근일 때,

$$-1-a=0 \text{ 에서 } a=-1$$

이때 이차방정식 $x^2-4x+7=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-7=-3<0$$

이므로 실근을 갖지 않는다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) -1 이 방정식 $x^2-4x+4-3a=0$ 의 근일 때,

$$1+4+4-3a=0 \text{에서 } a=3$$

따라서 주어진 삼차방정식은

$$(x-3)(x^2-4x-5)=0$$

$$(x-3)(x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3 \text{ 또는 } x=5$$

(i), (ii)에서 $a=3, \beta=5$ 또는 $a=5, \beta=3$ 이므로

$$a^2+\beta^2=3^2+5^2=34 \quad \text{답 ②}$$

02 사차방정식 $2x^4+6x^3-x^2-6x-1=0$ 의 네 근이 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 이므로

$$2x^4+6x^3-x^2-6x-1$$

$$=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

$x=2$ 를 양변에 대입하면

$$2(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta)$$

$$=2 \cdot 2^4+6 \cdot 2^3-2^2-6 \cdot 2-1=63 \quad \text{답 63}$$

03 $P(x)$

$$=x^4+(a-1)x^3+(a^2-4)x^2+(a^2-a+2)x+4$$

라 하면

$$P(-1)=1-a+1+a^2-4-a^2+a-2+4=0$$

이므로 -1 은 사차방정식 $P(x)=0$ 의 한 실근이다.

따라서 사차방정식 $P(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우는 다음과 같다.

(i) 오직 -1 만을 근으로 갖는 경우

근이 오직 -1 뿐이고 x^4 의 계수가 1인 사차방정식은 $(x+1)^4=0$ 이다.

그런데 $P(x)$ 는 $(x+1)^4$ 로 인수분해 되지 않으므로 사차방정식 $P(x)=0$ 은 오직 -1 만을 근으로 갖지 않는다.

(ii) -1 을 중근으로 갖고 두 허근을 갖는 경우

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & a-1 & a^2-4 & a^2-a+2 & 4 \\ & & -1 & -a+2 & -a^2+a+2 & -4 \\ \hline -1 & 1 & a-2 & a^2-a-2 & 4 & 0 \\ & & -1 & -a+3 & -a^2+2a-1 & \\ \hline & 1 & a-3 & a^2-2a+1 & -a^2+2a+3 & \end{array}$$

$P(x)$ 가 $(x+1)^2$ 을 인수로 가져야 하므로 위의 조립제법에서

$$-a^2+2a+3=0, \quad a^2-2a-3=0$$

$$(a+1)(a-3)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=3$$

① $a=-1$ 일 때,

$$P(x)=(x+1)^2(x^2-4x+4)$$

$$=(x+1)^2(x-2)^2$$

$$P(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

② $a=3$ 일 때,

$$P(x)=(x+1)^2(x^2+4)$$

$$P(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=\pm 2i$$

(i), (ii)에서 $a=3 \quad \text{답 ④}$

$P(x)$ 의 상수항은 4,
 $(x+1)^4$ 의 상수항은 1로
서로 다르다.

$$\begin{aligned} a-b+c &= 10 \text{에서} \\ a+c &= b+1 \\ \therefore \frac{c+b+a+1}{8} &= \frac{2(b+1)}{8} \\ &= \frac{b+1}{4} \end{aligned}$$

등급 비밀노트

계수가 모두 실수인 사차방정식의 한 근이 $p+qi$ (p, q 는 실수)이면 $p-qi$ 도 근이므로 허근의 개수는 0 또는 2 또는 4이다. 그런데 03번에서 사차방정식 $P(x)=0$ 이 실근 -1 을 가지므로 허근의 개수는 0 또는 2이다. 따라서 사차방정식 $P(x)=0$ 이 오직 한 개의 실근을 가지려면 오직 -1 만을 근으로 갖거나 -1 을 중근으로 갖고 두 허근을 가져야 한다.

04 $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=-9$ 에서

$$f(\alpha)+9=f(\beta)+9=f(\gamma)+9=0$$

이므로 α, β, γ 는 삼차방정식 $f(x)+9=0$, 즉 $x^3-6x^2+3x+10=0$ 의 세 근이다.

이때 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=6, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &= 6^2-2 \cdot 3=30 \quad \text{답 30} \end{aligned}$$

05 방정식 $x^3-ax^2+bx-c=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=a, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b, \alpha\beta\gamma=c$$

$$f(\alpha)=0, f(\beta)=0, f(\gamma)=0 \text{이므로}$$

ㄱ. 방정식 $f(2x)=0$ 에서

$$2x=\alpha \text{ 또는 } 2x=\beta \text{ 또는 } 2x=\gamma$$

$$\therefore x=\frac{\alpha}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\gamma}{2}$$

ㄴ. 방정식 $f\left(\frac{x}{2}\right)=0$ 에서

$$\frac{x}{2}=\alpha \text{ 또는 } \frac{x}{2}=\beta \text{ 또는 } \frac{x}{2}=\gamma$$

$$\therefore x=2\alpha \text{ 또는 } x=2\beta \text{ 또는 } x=2\gamma$$

방정식 $f\left(\frac{x}{2}\right)=0$ 의 세 근의 합이 2이므로

$$2(\alpha+\beta+\gamma)=2$$

$$2a=2 \quad \therefore a=1$$

ㄷ. $a=1$ 이므로 $f(1)=1-a+b-c=0$

$$\therefore a-b+c=1 \quad \dots\dots ⑦$$

방정식 $f(2x-1)=0$ 에서

$$2x-1=\alpha \text{ 또는 } 2x-1=\beta \text{ 또는 } 2x-1=\gamma$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\gamma+1}{2}$$

따라서 방정식 $f(2x-1)=0$ 의 세 근의 곱은

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}{8} \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+a+\beta+\gamma+1}{8} \\ &= \frac{c+b+a+1}{8} = \frac{b+1}{4} \quad (\because ⑦) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{b+1}{4}=0 \quad \therefore b=-1$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

06 삼차방정식 $(x+a)(x^2-4x+b)=0$ 에서

$$x^3+(a-4)x^2+(b-4a)x+ab=0$$

이 방정식의 세 근의 합이 6이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-(a-4)=6 \quad \therefore a=-2$$

삼차방정식 $(x-2)(x^2-4x+b)=0$ 의 한 허근 ω 는 이차방정식 $x^2-4x+b=0$ 의 근이고, 이 이차방정식의 계수가 모두 실수이므로 ω 의 켈레복소수인 $\bar{\omega}$ 도 $x^2-4x+b=0$ 의 근이다.

따라서 $\bar{\omega}^2-4\bar{\omega}+b=0$, 즉 $\bar{\omega}(\bar{\omega}-4)=-b$ 이므로 $\{\bar{\omega}(\bar{\omega}-4)\}^2=36$ 에서

$$(-b)^2=36 \quad \therefore b=\pm 6$$

이때 $b=-6$ 이면 이차방정식 $x^2-4x+b=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$\begin{aligned} b &= 6 \\ \therefore a+b &= 4 \end{aligned}$$

답 ②

07 $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$ 에서

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

방정식 $x^3=1$ 의 한 허근 ω 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

따라서

$$f(1)=f(4)=f(7)=f(10)=f(13)$$

$$=\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega}=-1,$$

$$f(2)=f(5)=f(8)=f(11)$$

$$=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=\frac{\omega^2}{1+\omega}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1,$$

$$f(3)=f(6)=f(9)=f(12)$$

$$=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+f(5)-f(6)$$

$$=f(7)-f(8)+f(9)-f(10)+f(11)-f(12)$$

$$=0$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=f(13)=-1$$

답 ①

참고 ω^n 과 관련된 문제는 n 을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 자연수끼리 분류하여 생각한다.

08 $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$ 에서

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

방정식 $x^3=1$ 의 한 허근 ω 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

ㄱ. $a_3=1+\omega+\omega^2=0$ 이므로 $a_n=0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 3이다.

ㄴ. $a_6=(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3+\omega^4+\omega^5)=0$ 이므로 $a_n=0$ 을 만족시키는 짝수 n 이 존재한다.

ㄷ. $a_{11}=a_9+\omega^9+\omega^{10}=1+\omega$ ($\because a_9=0$)

이때 $a_{11}^2=(1+\omega)^2=(-\omega^2)^2=\omega^4=\omega$ 이므로 a_{11}^2 은 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이다.

$b=-6$ 일 때,
 $x^2-4x-6=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면
 $\frac{D_1}{4}=(-2)^2-(-6)$
 $=10>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$b=6$ 일 때,
 $x^2-4x+6=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면
 $\frac{D_2}{4}=(-2)^2-6$
 $=-2<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$f(3k+1)$ 꼴
($k=0, 1, 2, \dots$)

$f(3k+2)$ 꼴
($k=0, 1, 2, \dots$)

$f(3k)$ 꼴 ($k=1, 2, \dots$)
 $\angle ABC=90^\circ$ 이고 사다리꼴 ABCD에서
 $AD \parallel BC$ 이므로
 $\angle A=90^\circ$

$$BC=9AD=18$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \neq 0, \\ a_2 &= 1 + \omega \neq 0 \end{aligned}$$

$n=3k$ (k 는 자연수) 꼴일 때,
 $a_n=0$

방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근은

$$x=\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

따라서 a_{11}^2 의 실수부분은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

09 주어진 사차방정식의 네 근이 $\pm\sqrt{7}$, $\pm\sqrt{3}$ 이고 x^4 의 계수가 1이므로 사차방정식은

$$(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$

$$(x^2-7)(x^2-3)=0$$

$$\therefore x^4-10x^2+21=0$$

$$(x+a)(x+b)(x-a)(x-b)+c=0$$

$$(x^2-a^2)(x^2-b^2)+c=0$$

$$\therefore x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2+c=0$$

이 사차방정식이 $x^4-10x^2+21=0$ 과 같으므로

$$a^2+b^2=10 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a^2b^2+c=21 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 a, b 는 자연수이므로 ㉠에서

$$a=1, b=3 \text{ 또는 } a=3, b=1$$

이것을 ㉡에 대입하면 $c=12$

$$\therefore a+b+c=16$$

답 16

10 $\overline{AD}=x$, $\overline{AB}=h$ 라 하면 조건 ㉠에서 $\overline{BC}=9x$ 이므로 조건 ㉡에서

$$\frac{1}{2} \cdot (x+9x) \cdot h = 40\sqrt{2}$$

$$\therefore xh=8\sqrt{2} \quad \dots\dots ㉢$$

한편 $\triangle ABD$ 에서 $\angle A=90^\circ$ 이므로

$$x^2+h^2=36 \quad \therefore h^2=36-x^2$$

㉢에서 $x^2h^2=128$ 이므로 $x^2(36-x^2)=128$

$$x^4-36x^2+128=0, \quad (x^2-4)(x^2-32)=0$$

$$(x+2)(x-2)(x+4\sqrt{2})(x-4\sqrt{2})=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=4\sqrt{2} \quad (\because x>0)$$

이것을 ㉢에 대입하면

$$x=2, h=4\sqrt{2} \text{ 또는 } x=4\sqrt{2}, h=2$$

이때 $\overline{AD}<\overline{AB}$ 이므로 $\overline{AD}=2, \overline{AB}=4\sqrt{2}$

점 D에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 E라 하면

$$\overline{DE}=\overline{AB}=4\sqrt{2},$$

$$\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}=18-2=16$$

이므로 $\triangle DEC$ 에서

$$\overline{CD}^2=(4\sqrt{2})^2+16^2=288$$

답 288

11 저수지에 물이 가득 찼을 때의 물의 양을 1, A 펌프만을 이용하여 저수지의 물을 모두 뺄 때 걸리는 시간을 a 시간, B 펌프만을 이용하여 저수지의 물을 모두 뺄 때 걸리는 시간을 b 시간이라 하자.

A 펌프만을 이용하여 저수지의 물을 모두 빼면 B 펌프만을 이용하여 빼는 것보다 10시간이 덜 걸리므로

$$a=b-10 \quad \dots\dots ㉠$$

또 A 펌프, B 펌프를 동시에 이용하여 저수지의 물을 12시간 동안 뺐 후 B 펌프만을 이용하여 12시간 동안 빼면 저수지의 물을 모두 뺐 수 있으므로

$$12\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + 12 \cdot \frac{1}{b} = 1$$

$$\therefore 12b + 24a = ab$$

①을 위의 식에 대입하면

$$12b + 24(b - 10) = (b - 10)b$$

$$b^2 - 46b + 240 = 0, \quad (b - 6)(b - 40) = 0$$

$$\therefore b = 40 \quad (\because b > 10)$$

답 ③

$\frac{1}{a}$ 은 A 펌프를 이용하여 한 시간 동안 뺐 물의 양이고, $\frac{1}{b}$ 은 B 펌프를 이용하여 한 시간 동안 뺐 물의 양이다.

$a > 0, b > 0$ 이고
 $a = b - 10$ 이므로
 $b - 10 > 0$
 $\therefore b > 10$

내신 · 수능

1등급을 공하는 실전 마무리 문제

본책 61쪽

01 [전략] 주어진 복소수를 $a + bi$ 꼴로 나타낸 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

[풀이] $z = (2+i)x + (1-2i)y - 2i$ 라 하면

$$z = (2x+y) + (x-2y-2)i$$

$$z^2 = -9 \text{이므로} \quad z = \pm 3i$$

(i) $z = -3i$ 일 때,

$(2x+y) + (x-2y-2)i = -3i$ 이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+y=0, \quad x-2y-2=-3$$

$$\therefore x = -\frac{1}{5}, \quad y = \frac{2}{5}$$

그런데 x, y 는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $z = 3i$ 일 때,

$(2x+y) + (x-2y-2)i = 3i$ 이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+y=0, \quad x-2y-2=3$$

$$\therefore x=1, \quad y=-2$$

(i), (ii)에서 $x=1, y=-2$ 이므로

$$x-y=3$$

답 ③

02 [전략] 복소수의 성질을 이용한다.

[풀이] ㄱ. $\alpha=1, \beta=i$ 이면

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 + i^2 = 1 - 1 = 0$$

이지만 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 이다.

ㄴ. $\alpha \neq 0$ 이면 $\beta=0, \beta \neq 0$ 이면 $\alpha=0$ 이므로 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.

ㄷ. $a=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$\beta = \bar{a} = a - bi$$

$$\alpha\beta = (a+bi)(a-bi) = 0 \text{에서}$$

$$a^2 + b^2 = 0$$

이때 a, b 는 실수이므로 $a=b=0$

$$\therefore a=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

03 [전략] $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때 $z^n + (z-\sqrt{2})^n$ 의 값을 구하여 규칙을 찾는다.

[풀이] $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 에서

$$z^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2i}{2} = i$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = i \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

$$z^4 = (z^2)^2 = i^2 = -1$$

$$z^5 = z^4 \cdot z = -z = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$z^6 = z^4 \cdot z^2 = -i$$

$$z^7 = z^4 \cdot z^3 = -z^3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$z^8 = (z^4)^2 = (-1)^2 = 1$$

$\vdots$

$z-\sqrt{2} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ 에서

$$(z-\sqrt{2})^2 = \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$(z-\sqrt{2})^3 = (z-\sqrt{2})^2 \cdot (z-\sqrt{2}) = -i \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$(z-\sqrt{2})^4 = \{(z-\sqrt{2})^2\}^2 = (-i)^2 = -1$$

$$(z-\sqrt{2})^5 = (z-\sqrt{2})^4 \cdot (z-\sqrt{2}) = -(z-\sqrt{2}) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$(z-\sqrt{2})^6 = (z-\sqrt{2})^4 \cdot (z-\sqrt{2})^2 = i$$

$$(z-\sqrt{2})^7 = (z-\sqrt{2})^4 \cdot (z-\sqrt{2})^3 = -(z-\sqrt{2})^3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$(z-\sqrt{2})^8 = \{(z-\sqrt{2})^4\}^2 = (-1)^2 = 1$$

$\vdots$

$$\therefore z + (z-\sqrt{2}) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}i,$$

$$z^2 + (z-\sqrt{2})^2 = i + (-i) = 0,$$

$$z^3 + (z-\sqrt{2})^3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} + \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}i,$$

$$z^4 + (z-\sqrt{2})^4 = -1 + (-1) = -2,$$

$$z^5 + (z-\sqrt{2})^5 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}i,$$

$$z^6 + (z-\sqrt{2})^6 = -i + i = 0,$$

$$z^7 + (z-\sqrt{2})^7 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} + \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}i,$$

$$z^8 + (z-\sqrt{2})^8 = 1 + 1 = 2$$

$\vdots$

즉 $n=8k-4$ (k 는 자연수)일 때 $z^n + (z-\sqrt{2})^n < 0$ 이므로 조건을 만족시키는 20 이하의 자연수 n 의 값은 4, 12, 20이다.

따라서 구하는 합은

$$4 + 12 + 20 = 36$$

답 ④

04 [전략] 분모의 켈레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 복소수 a 를 간단히 한다.

풀이 $a = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 이므로
 $2a-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$$4a^2-4a+1=-3$$

$$\therefore a^2-a+1=0$$

$$\therefore \frac{a^3-a^2+a-3}{a^2-a+3} = \frac{a(a^2-a+1)-3}{a^2-a+3} = -\frac{3}{2}$$

답 ①

05 **전략** n 이 $4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k$ (k 는 자연수)인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 $f(n) = (-1)^n(i+i^2+i^3+\dots+i^n)$
 $\times n\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \dots + \frac{1}{i^n}\right)$

자연수 k 에 대하여 $n=4k-3$ 일 때,

$$\begin{aligned} & i+i^2+i^3+\dots+i^n \\ &= (i+i^2+i^3+i^4) + (i^5+i^6+i^7+i^8) \\ &+ \dots + (i^{4k-7}+i^{4k-6}+i^{4k-5}+i^{4k-4}) + i^{4k-3} \\ &= (i-1-i+1) + (i-1-i+1) \\ &+ \dots + (i-1-i+1) + i \\ &= i, \\ & \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \dots + \frac{1}{i^n} \\ &= \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}\right) + \left(\frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8}\right) \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{i^{4k-7}} + \frac{1}{i^{4k-6}} + \frac{1}{i^{4k-5}} + \frac{1}{i^{4k-4}}\right) + \frac{1}{i^{4k-3}} \\ &= \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1\right) + \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1\right) \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1\right) + \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{i} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(4k-3) &= -i \cdot (4k-3) \cdot \frac{1}{i} \\ &= -(4k-3) \end{aligned}$$

같은 방법으로 하면

$$\begin{aligned} f(4k-2) &= (i-1)(4k-2)\left(\frac{1}{i}-1\right) \\ &= 2(4k-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4k-1) &= -(-1) \cdot (4k-1) \cdot (-1) \\ &= -(4k-1) \end{aligned}$$

$$f(4k) = 0 \cdot 4k \cdot 0 = 0$$

(i) $n=4k-3$ 일 때, $n+3=4k$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n)+f(n+3) &= f(4k-3)+f(4k) \\ &= -(4k-3) = -4k+3 \end{aligned}$$

$$|f(n)+f(n+3)|=39 \text{에서}$$

$$|-4k+3|=39, \quad -4k+3=\pm 39$$

$$\therefore k=-9 \text{ 또는 } k=\frac{21}{2}$$

그런데 k 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=4k-2$ 일 때, $n+3=4k+1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n)+f(n+3) &= f(4k-2)+f(4k+1) \\ &= 2(4k-2) - (4k+1) \\ &= 4k-5 \end{aligned}$$

$$|f(n)+f(n+3)|=39 \text{에서}$$

$$|4k-5|=39, \quad 4k-5=\pm 39$$

$$\therefore k=-\frac{17}{2} \text{ 또는 } k=11$$

그런데 k 는 자연수이므로 $k=11$

$$\therefore n=42$$

(iii) $n=4k-1$ 일 때, $n+3=4k+2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n)+f(n+3) &= f(4k-1)+f(4k+2) \\ &= -(4k-1) + 2(4k+2) \\ &= 4k+5 \end{aligned}$$

$$|f(n)+f(n+3)|=39 \text{에서}$$

$$|4k+5|=39, \quad 4k+5=\pm 39$$

$$\therefore k=-11 \text{ 또는 } k=\frac{17}{2}$$

그런데 k 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $n=4k$ 일 때, $n+3=4k+3$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n)+f(n+3) &= f(4k)+f(4k+3) \\ &= 0 - (4k+3) = -4k-3 \end{aligned}$$

$$|f(n)+f(n+3)|=39 \text{에서}$$

$$|-4k-3|=39, \quad -4k-3=\pm 39$$

$$\therefore k=-\frac{21}{2} \text{ 또는 } k=9$$

그런데 k 는 자연수이므로 $k=9$

$$\therefore n=36$$

이상에서 자연수 n 은 36, 42이므로 구하는 합은

$$36+42=78$$

답 ①

06 **전략** 원의 중심을 O , $\overline{EH}$ 의 중점을 M 이라 하고

$\triangle EOM$ 이 직각삼각형을 이용한다.

풀이 원의 중심을 O 라 하고 정사각형 $ABCD$ 의 한 변의 길이를 x 라 하면 원의 반지름의 길이가 1이므로 직각삼각형 ABC 에서

$$2^2 = x^2 + x^2, \quad x^2 = 2$$

$$\therefore x = \sqrt{2} \quad (\because x > 0)$$

정사각형 $EFGH$ 의 한 변의 길이

를 y 라 하고 $\overline{EH}$ 의 중점을 M 이라 하면 직각삼각형 EOM 에서

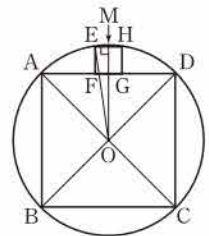
$$1^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$1 = \frac{y^2}{4} + y^2 + \sqrt{2}y + \frac{1}{2}$$

$$5y^2 + 4\sqrt{2}y - 2 = 0$$

$$\therefore y = \frac{-2\sqrt{2} + \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 5 \cdot (-2)}}{5}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5} \quad (\because y > 0)$$



따라서 정사각형 EFGH의 넓이는

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \frac{2}{25} \quad \text{답 ②}$$

07 [전략] 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식을 D 라 할 때, $D \geq 0$ 이어야 함을 이용한다.

[풀이] 이차방정식 $x^2 - 4x + a^2 = 0$ 이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - a^2 \geq 0 \quad \therefore a^2 \leq 4$$

a 는 정수이므로

$$a^2 = 0 \text{ 또는 } a^2 = 1 \text{ 또는 } a^2 = 4$$

(i) $a^2 = 0$, 즉 $a = 0$ 일 때,

$$x^2 - 4x = 0, \quad x(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

(ii) $a^2 = 1$, 즉 $a = \pm 1$ 일 때,

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$$

그런데 $x = 2 \pm \sqrt{3}$ 은 유리수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a^2 = 4$, 즉 $a = \pm 2$ 일 때,

$$x^2 - 4x + 4 = 0, \quad (x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

이상에서 정수 a 는 $-2, 0, 2$ 의 3개이다. 답 ③

08 [전략] 계수가 모두 실수인 이차방정식의 한 허근이 α 이면 $\bar{\alpha}$ 도 근임을 이용한다.

[풀이] 계수가 모두 실수인 이차방정식의 한 허근이 α 이면 $\bar{\alpha}$ 도 근이므로

$$\bar{\alpha} = \beta, \quad \bar{\beta} = \alpha$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \quad \alpha\beta = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} &= \beta\beta + \alpha\alpha = \alpha^2 + \beta^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 4^2 - 2 \cdot 6 = 4 \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

09 [전략] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여

$$\frac{8}{a} + \frac{a}{\beta} = 7 \text{을 } a \text{에 대한 식으로 나타낸다.}$$

[풀이] 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 8, \quad \alpha\beta = a$$

α 는 이차방정식의 근이므로

$$a^2 - 8a + a = 0 \quad \therefore a^2 = 8a - a$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{8}{a} + \frac{a}{\beta} &= \frac{8\beta + a^2}{a\beta} = \frac{8\beta + 8a - a}{a\beta} \\ &= \frac{8(\alpha + \beta) - a}{a\beta} = \frac{64 - a}{a} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{64 - a}{a} = 7$$

$$64 - a = 7a \quad \therefore a = 8 \quad \text{답 ②}$$

10 [전략] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 켈레근을 이용한다.

[풀이] 이차방정식 $x^2 - 4x + a = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \quad \alpha\beta = a$$

이차방정식 $x^2 + bx - 8 = 0$ 의 두 근이 γ, δ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\gamma + \delta = -b, \quad \gamma\delta = -8$$

이차방정식 $x^2 + bx - 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = b^2 + 32 > 0$$

이므로 γ, δ 는 이차방정식 $x^2 + bx - 8 = 0$ 의 서로 다른 두 실근이다.

한편 $\alpha + \gamma = 6 - 2i$ 에서 $\alpha = (6 - \gamma) - 2i$ 이므로 α 는 이차방정식 $x^2 - 4x + a = 0$ 의 한 허근이다.

이때 이차방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\bar{\alpha}$ 도 근이다. 즉 $\beta = \bar{\alpha} = (6 - \gamma) + 2i$ 이므로 $\alpha + \beta = 4$ 에서

$$2(6 - \gamma) = 4 \quad \therefore \gamma = 4$$

$\gamma = 4$ 를 $\gamma\delta = -8$ 에 대입하면

$$\delta = -2$$

$$\therefore b = -(\gamma + \delta) = -2$$

한편 $\alpha = 2 - 2i, \beta = 2 + 2i$ 이므로

$$a = \alpha\beta = (2 - 2i)(2 + 2i) = 8$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8^2 + (-2)^2 = 68 \quad \text{답 ⑤}$$

11 [전략] $\triangle BOP, \triangle POA$ 의 넓이를 각각 a, b 에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] $B(0, 4)$ 이고 점 $P(a, b)$ 는 이차함수의 그래프 위의 점이므로

$$b = 2a^2 - 4a + 4$$

$\triangle BOP$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |a| = 2|a|$$

$\triangle POA$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |b| = |b| \quad (\because b > 0)$$

이때 $\triangle BOP, \triangle POA$ 의 넓이가 같으므로

$$2|a| = b, \quad 2|a| = 2a^2 - 4a + 4$$

$$\therefore |a| = a^2 - 2a + 2$$

(i) $a < 0$ 일 때,

$$-a = a^2 - 2a + 2, \quad a^2 - a + 2 = 0$$

이때 이 이차방정식을 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

(ii) $a \geq 0$ 일 때,

$$a = a^2 - 2a + 2, \quad a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a-1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

$$\therefore P(1, 2) \text{ 또는 } P(2, 4)$$

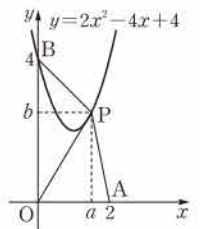
(i), (ii)에서 $a+b$ 의 최댓값은 $a=2, b=4$ 일 때 6이다.

답 ④

$y = 2x^2 - 4x + 4$ 의 그래프 또는 x 축보다 항상 위쪽에 있으므로 $b > 0$

이차방정식 $a^2 - a + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.



12 **전략** 주어진 식에 x 대신 $1-x$ 를 대입한 후 $f(x)$ 를 구한다.

풀이 $2f(x) + f(1-x) = 3x^2$ ㉠

㉠에 x 대신 $1-x$ 를 대입하면

$$2f(1-x) + f(x) = 3(1-x)^2$$
 ㉡

㉠ $\times 2$ - ㉡을 하면

$$3f(x) = 3x^2 + 6x - 3$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$$

따라서 $-4 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x)$ 는 $x=-4$ 일 때 최댓값 7, $x=-1$ 일 때 최솟값 -2 를 가지므로 구하는 합은

$$7 + (-2) = 5$$
 답 ⑤

13 **전략** 주어진 조건을 이용하여 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 생각해 본다.

풀이 $f(-2)=f(0)$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=-1$ 에 대하여 대칭이다.

즉 $f(-2) \neq f(1)$ 이므로 $f(-2) + |f(1)| = 0$ 에서

$$f(-2) < 0, f(1) > 0$$

이를 만족시키는 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$$f(x) = a(x+1)^2 + b \quad (a, b \text{는 상수}, a > 0) \text{라 하면}$$

$f(-2) + |f(1)| = 0$, 즉

$$f(-2) + f(1) = 0 \text{에서}$$

$$(a+b) + (4a+b) = 0$$

$$\therefore 5a + 2b = 0$$
 ㉠

$-3 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값 45를 가지므로

$$25a + b = 45$$
 ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = -5$$

따라서 $f(x) = 2(x+1)^2 - 5$ 이므로

$$f(2) = 2 \cdot 9 - 5 = 13$$
 답 ⑤

14 **전략** 방정식 $h(x)=0$ 의 한 근이 a 이면 $h(a)=0$ 이고 다항식 $h(x)$ 는 $x-a$ 를 인수로 가짐을 이용한다.

풀이 두 방정식 $f(x)+g(x)=0$, $f(x)g(x)=0$ 이 모두 1을 근으로 가지므로

$$f(1)+g(1)=0, f(1)g(1)=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$f(1)=0, g(1)=0$$

따라서 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$ 는 각각 $x-1$ 을 인수로 가지므로

$$f(x) = (x-1)(x-p),$$

$$g(x) = (x-1)(x-q) \quad (p, q \text{는 서로 다른 상수})$$

로 놓으면

$$f(x)+g(x) = (x-1)(2x-p-q)$$

$$f(x)g(x) = (x-1)^2(x-p)(x-q)$$

방정식 $f(x)=0$ 의 한 근이 $a \neq 0$ 이면 방정식 $f(ax+b)=0$ 의 한 근은 $ax+b=a$ 에서 $x = \frac{a-b}{a}$ 이다. (단, $a \neq 0$)

$$\begin{aligned} g(1) &= -f(1) \text{이므로} \\ f(1)g(1) &= 0 \text{에서} \\ -\{f(1)\}^2 &= 0 \\ \therefore f(1) &= 0, \\ g(1) &= 0 \end{aligned}$$

$p=q$ 이면 조건 ②를 만족시키지 않는다.

이때 방정식 $f(x)+g(x)=0$ 의 한 근이 3이므로

$$2(6-p-q)=0$$

$$\therefore p+q=6$$
 ㉠

또 방정식 $f(x)g(x)=0$ 의 한 근이 -1 이므로

$$(i) p=-1 \text{일 때, ㉠에서 } q=7$$

$$(ii) q=-1 \text{일 때, ㉠에서 } p=7$$

$$(i), (ii) \text{에서 } k=7$$
 답 ④

15 **전략** 방정식 $x^3=1$ 의 한 허근이 ω 이면 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 은 두 허근 $\omega, \bar{\omega}$ 를 가짐을 이용한다.

풀이 $x^3-1=0$ 에서

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

방정식 $x^3=1$ 의 한 허근 ω 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이고 ω 의 켤레복소수인 $\bar{\omega}$ 도 이차방정식의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = -1 \quad \therefore \bar{\omega} = -\omega - 1$$

한편 방정식 $(x+1)^3=8$ 의 양변을 8로 나누면

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^3 = 1 \text{이고, 방정식 } x^3=1 \text{의 세 근이 } 1, \omega, -\omega-1 \text{이므로}$$

$$\frac{x+1}{2} = 1 \text{ 또는 } \frac{x+1}{2} = \omega \text{ 또는 } \frac{x+1}{2} = -\omega-1$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2\omega-1 \text{ 또는 } x=-2\omega-3$$

$$\therefore a+b+c+d = 2 + (-1) + (-2) + (-3) = -4$$
 답 ②

이때 방정식 $f(x)+g(x)=0$ 의 한 근이 3이므로

$$\frac{x+1}{2} = 1 \text{ 또는 } \frac{x+1}{2} = \omega \text{ 또는 } \frac{x+1}{2} = -\omega-1$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2\omega-1 \text{ 또는 } x=-2\omega-3$$

$$\therefore a+b+c+d = 2 + (-1) + (-2) + (-3) = -4$$
 답 ②

$$\therefore a+b+c+d = 2 + (-1) + (-2) + (-3) = -4$$
 답 ②

16 **전략** 먼저 $xy+2x-y-2=0$ 의 좌변을 인수분해 하여 x, y 의 값을 구한다.

$$\begin{cases} x^2+y^2+3xy-2x-y+2=0 & \dots\dots ㉠ \\ xy+2x-y-2=0 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } x(y+2) - (y+2) = 0$$

$$(x-1)(y+2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } y=-2$$

(i) $x=1$ 을 ㉡에 대입하면

$$1+y^2+3y-2-y+2=0, \quad y^2+2y+1=0$$

$$(y+1)^2=0 \quad \therefore y=-1$$

(ii) $y=-2$ 를 ㉡에 대입하면

$$x^2+4-6x-2x+2+2=0$$

$$x^2-8x+8=0 \quad \therefore x=4 \pm 2\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=4 \pm 2\sqrt{2} \\ y=-2 \end{cases}$$

따라서 $x+y$ 의 최댓값은 $x=4+2\sqrt{2}$, $y=-2$ 일 때

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

$$2+2\sqrt{2} \text{이다.}$$
 답 ④

이때 $|x+y|=2$ 이므로 $|x-y|=4$
 $|x+y|=2$ 에서
 $x+y=-2$ 또는 $x+y=2$
 $|x-y|=4$ 에서
 $x-y=-4$ 또는 $x-y=4$
 $x+y=-2, x-y=-4$ 를 연립하여 풀면
 $x=-3, y=1 \quad \therefore 2x+y=-5$
 $x+y=-2, x-y=4$ 를 연립하여 풀면
 $x=1, y=-3 \quad \therefore 2x+y=-1$
 $x+y=2, x-y=-4$ 를 연립하여 풀면
 $x=-1, y=3 \quad \therefore 2x+y=1$
 $x+y=2, x-y=4$ 를 연립하여 풀면
 $x=3, y=-1 \quad \therefore 2x+y=5$
 따라서 $2x+y$ 의 최댓값은 5, 최솟값은 -5이므로
 $M=5, m=-5$
 $\therefore M-m=10$ 답 ⑤

18 전략 조건 (나)를 이용하여 복소수 z_n (n 은 자연수)의 값의 규칙을 찾는다.

풀이 조건 (나)에 의하여

$$z_2 = \frac{1}{1-z_1}$$

$$1-z_2 = 1 - \frac{1}{1-z_1} = \frac{z_1}{z_1-1} \text{이므로}$$

$$z_3 = \frac{1}{1-z_2} = \frac{z_1-1}{z_1} = 1 - \frac{1}{z_1}$$

$$1-z_3 = 1 - \left(1 - \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{z_1} \text{이므로}$$

$$z_4 = \frac{1}{1-z_3} = z_1$$

$$\vdots$$

즉 조건 (가)에 의하여

$$z_1 = z_4 = z_7 = \dots = z_{199} = 3+4i \quad \rightarrow ①$$

$$\therefore z_{200} = \frac{1}{1-z_{199}} = \frac{1}{1-(3+4i)} = \frac{1}{-2-4i}$$

$$= \frac{1-2i}{-2(1+2i)(1-2i)} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i$$

따라서 $p = -\frac{1}{10}, q = \frac{1}{5}$ 이므로 → ②

$$100(p+q) = 100 \cdot \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) = 10 \quad \rightarrow ③$$

답 10

채점 기준	비율
① z_n 의 값의 규칙을 찾을 수 있다.	50%
② p, q 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $100(p+q)$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

15급 비밀노트

이와 같은 문제는 일반적으로 복소수 z_n 에 대하여 $z_1, z_2, z_3, \dots$ 의 값이 같은 순서로 반복되어 $z_n = z_1$ 이 되는 경우와 z_n 을 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있는 경우가 있다. 따라서 먼저 복소수 $z_1, z_2, z_3, \dots$ 의 값을 차례대로 구하여 어떠한 규칙이 있는지 조사해 본다.

유리수 p, q 에 대하여
 $p+q\sqrt{2}=0$ 이면
 $p=0, q=0$

$ax^2 - \sqrt{2}bx + c = 0$ 이
 차방정식이므로
 $a \neq 0$

19 전략 먼저 주어진 근을 이차방정식에 대입하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

풀이 이차방정식 $ax^2 - \sqrt{2}bx + c = 0$ 의 한 근이 $2-\sqrt{2}$ 이므로

$$a(2-\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}b(2-\sqrt{2}) + c = 0$$

$$\therefore (6a+2b+c) - (4a+2b)\sqrt{2} = 0$$

이때 a, b, c 가 유리수이므로

$$6a+2b+c=0, 4a+2b=0$$

$$\therefore b=-2a, c=-2a$$

즉 주어진 이차방정식은

$$ax^2 + 2\sqrt{2}ax - 2a = 0$$

$$x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 = 0 \quad (\because a \neq 0)$$

$$\therefore x = -\sqrt{2} \pm 2$$

따라서 다른 한 근은 $-2-\sqrt{2}$ 이다. 답 $-2-\sqrt{2}$

참고 이차방정식 $ax^2 - \sqrt{2}bx + c = 0$ 에서 $-\sqrt{2}b$ 가 유리수 인지 알 수 없으므로 다른 한 근을 $2+\sqrt{2}$ 라 할 수 없다.

20 전략 $x_1 = c - x_2$ 로 나타낸 후 함수 $f(x_1) + g(x_2)$ 를 x_2 에 대한 이차함수로 나타낸다.

풀이 $x_1 = c - x_2$ 이므로

$$f(x_1) + g(x_2)$$

$$= f(c-x_2) + g(x_2)$$

$$= (c-x_2)(15-c+x_2) + \frac{x_2(30-x_2)}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}x_2^2 + 2cx_2 + 15c - c^2$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x_2 - \frac{2}{3}c\right)^2 + 15c - \frac{c^2}{3} \quad \rightarrow ①$$

즉 함수 $f(x_1) + g(x_2)$ 는 $x_2 = \frac{2}{3}c$ 일 때 최댓값

$15c - \frac{c^2}{3}$ 을 가지므로

$$15c - \frac{c^2}{3} = 42, \quad c^2 - 45c + 126 = 0$$

$$(c-3)(c-42) = 0$$

$$\therefore c=3 \text{ 또는 } c=42 \quad \rightarrow ②$$

따라서 모든 c 의 값의 합은

$$3+42=45 \quad \rightarrow ③$$

답 45

채점 기준	비율
① $f(x_1) + g(x_2)$ 를 x_2 에 대한 이차함수로 나타낼 수 있다.	50%
② c 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ c 의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

21 전략 주어진 범위에 꼭짓점의 x 좌표가 속할 때와 속하지 않을 때로 나누어 생각한다.

풀이 $y = -x^2 + 2ax - a^2 + b = -(x-a)^2 + b$

(i) $0 \leq a < 1$ 일 때,

$$1 \leq x \leq 3 \text{에서 } x=1 \text{일 때 최댓값이 } 2 \text{이므로}$$

$$-1+2a-a^2+b=2 \quad \therefore b=a^2-2a+3$$

$$\therefore a+b=a^2-a+3$$

(ii) $1 \leq a \leq 3$ 일 때,

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $x=a$ 일 때 최댓값이 2이므로

$$b=2 \quad \therefore a+b=a+2$$

(iii) $3 < a \leq 4$ 일 때,

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $x=3$ 일 때 최댓값이 2이므로

$$-9+6a-a^2+b=2 \quad \therefore b=a^2-6a+11$$

$$\therefore a+b=a^2-5a+11$$

이상에서 $f(a)=a+b$ 라 하면

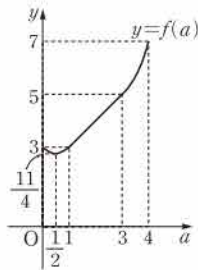
$$f(a)=\begin{cases} a^2-a+3 & (0 \leq a < 1) \\ a+2 & (1 \leq a \leq 3) \\ a^2-5a+11 & (3 < a \leq 4) \end{cases}$$

이므로 $y=f(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $a=4$ 일 때 최댓값은 7이고,

$a=\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 $\frac{11}{4}$ 이다.

☐ 최댓값: 7, 최솟값: $\frac{11}{4}$



채점 기준	비율
① a 의 값의 범위에 따라 $a+b$ 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
② $a+b$ 의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40%

22 [전략] 사다리꼴의 넓이를 a, b 에 대한 식으로 나타낸 후 한 문자에 대한 이차함수로 변형한다.

☐ 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 I라 하고, $\overline{BG}, \overline{EF}$ 의 교점을 J라 하자.

이때 $\triangle EBJ \cong \triangle EGJ$

(SAS 합동)이므로

$$\angle EJB = \angle EJJ = 90^\circ$$

또 $\triangle BJE \sim \triangle BAG$ (AA 답음)이므로

$$\angle BEJ = \angle BGA$$

따라서 $\triangle FIE \cong \triangle BAG$ (ASA 합동)이므로

$$\overline{IE} = \overline{AG} = b$$

$$\therefore \overline{HF} = \overline{CF} = \overline{BI} = \overline{BE} - \overline{EI} = a - b$$

한편 직각삼각형 AEG에서

$$(2-a)^2 + b^2 = a^2$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}b^2 + 1$$

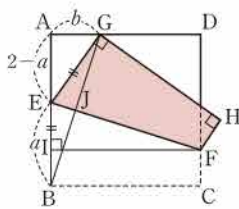
사다리꼴 EFHG의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \{a + (a-b)\} \cdot 2 = 2a - b$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}b^2 + 1\right) - b \quad (\because \text{㉠})$$

$$= \frac{1}{2}b^2 - b + 2$$

$$= \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{3}{2}$$



$$\begin{aligned} f(1) + \dots + f(6) \\ = f(7) + \dots + f(12) \\ \vdots \\ = f(25) + \dots + f(30) \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{EB} = \overline{EG}, \overline{EJ} \text{는 공통,} \\ \angle BEJ = \angle GEJ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle BJE = \angle BAG \\ = 90^\circ, \\ \angle B \text{는 공통} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE} \\ = 2 - a, \\ \overline{EG} = \overline{EB} = a \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\overline{EG} + \overline{FH}) \cdot \overline{GH}$$

이므로 $b=1$ 일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

⑤에서 $b=1$ 일 때 $a=\frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$$

$$\boxed{\frac{5}{4}}$$

23 [전략] 방정식 $x^2-x+1=0$ 의 한 근이 ω 이면 $\omega^2-\omega+1=0, \omega^3=-1$ 이 성립함을 이용한다.

☐ 풀이 $\omega^2-\omega+1=0$ 이므로

$$\omega-1=\omega^2, \omega^2+1=\omega, \omega^2-\omega=-1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(n) &= (\omega-1)^n + (\omega^2+1)^n + (\omega^2-\omega)^n \\ &= \omega^{2n} + \omega^n + (-1)^n \end{aligned}$$

$\omega^2-\omega+1=0$ 의 양변에 $\omega+1$ 을 곱하면

$$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$$

$$\therefore \omega^3+1=0$$

즉 $\omega^3=-1$ 이므로

$$f(1)=\omega^2+\omega-1=2\omega-2$$

$$f(2)=\omega^4+\omega^2+1=-\omega+\omega^2+1=0$$

$$f(3)=\omega^6+\omega^3-1=1-1-1=-1$$

$$f(4)=\omega^8+\omega^4+1=\omega^2-\omega+1=0$$

$$f(5)=\omega^{10}+\omega^5-1=-\omega-\omega^2-1=-2\omega$$

$$f(6)=\omega^{12}+\omega^6+1=1+1+1=3$$

$$f(7)=\omega^{14}+\omega^7-1=\omega^2+\omega-1=2\omega-2$$

$$f(8)=\omega^{16}+\omega^8+1=-\omega+\omega^2+1=0$$

$\vdots$

따라서 $f(n)$ 의 값은 $2\omega-2, 0, -1, 0, -2\omega, 3$ 이 이 순서대로 반복된다.

이때 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$ 이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(30)=0$$

채점 기준	비율
① $f(n)$ 을 간단히 할 수 있다.	30%
② $f(n)$ 의 값의 규칙을 찾을 수 있다.	50%
③ $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(30)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

24 [전략] 인수분해를 이용하여 각 방정식의 해를 구한 후 그 해가 정수가 될 조건을 생각한다.

☐ 풀이 $x^4+9x^2-n^2-9n=0$ 에서

$$(x^2+n+9)(x^2-n)=0$$

$$x^2=-n-9 \text{ 또는 } x^2=n$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{-n-9} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{n} \quad (\because n>0)$$

$x^4-9x^2-n^2-9n=0$ 에서

$$(x^2+n)(x^2-n-9)=0$$

$$x^2=-n \text{ 또는 } x^2=n+9$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{-n} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{n+9} \quad (\because n>0)$$

따라서 주어진 두 사차방정식이 모두 정수인 해를 가지려면 $\sqrt{n}, \sqrt{n+9}$ 가 모두 자연수가 되어야 한다.

이때 $\sqrt{n}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 값은

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

이고, 이 중에서 $\sqrt{n+9}$ 가 자연수가 되도록 하는 n 의 값은 16이다. 답 16

25 전략 $\overline{AB}=a$ km, $\overline{BD}=b$ km, $\overline{DC}=c$ km라 하고 주어진 조건을 이용하여 관계식을 세운다.

풀이 $\overline{AB}=a$ km, $\overline{BD}=b$ km, $\overline{DC}=c$ km라 하면

$$(a+b+c)-(8+c)=24$$

$$\therefore a+b=32 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

직각삼각형 ABD에서

$$a^2=b^2+8^2, \quad a^2-b^2=64$$

$$(a+b)(a-b)=64$$

㉠을 위의 식에 대입하면

$$32(a-b)=64$$

$$\therefore a-b=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=17, b=15$$

따라서 두 지점 A, B를 잇는 직선 도로의 길이는 17 km 이다. 답 17 km

$a > 0$ 이므로 부등식의 각 변에 a 를 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$1 < -b$ 이고 $a < 10$ 이므로 $a < -b$

III 부등식

07 일차부등식

개념 & 핵심 기출

본책 66쪽

01 $\neg$, $ab > 0$ 에서 a, b 의 부호가 같고, $bc < 0$ 에서 b, c 의 부호가 다르므로 a, c 의 부호도 다르다.

$$\therefore ac < 0$$

$$\neg, (a+b)c = ac + bc < 0$$

$$\neg, b < a < 0 \text{이므로} \quad 0 < a^2 < b^2 < 2b^2$$

이때 $bc < 0$ 에서 $c > 0$ 이므로

$$\frac{a^2}{c} < \frac{2b^2}{c} \quad \therefore \frac{a^2}{2c} < \frac{b^2}{c}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다. 답 ㉠ ㉡

02 $\neg$, $a=0.1, b=-1.1$ 이면 $0 < a < 1, b < -1$ 이지만 $a^2+b^2=0.01+1.21=1.22 < 2$ 이다.

$$\neg, 0 < a < 1 \text{에서} \quad a^2 < a$$

$$b < -1 \text{에서} \quad ab < -a \text{이므로}$$

$$a < -ab$$

$$\therefore a^2 < -ab$$

$$\neg, 0 < a < 1 \text{에서} \quad \frac{1}{a} > 1$$

$$b < -1 \text{에서} \quad -1 < \frac{1}{b} < 0$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 0$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다. 답 $\neg, \neg$

다른 풀이 $\neg, b < -1$ 에서 $-b > 1$ 이므로

$$a < -b$$

$$a > 0 \text{이므로 양변에 } a \text{를 곱하면}$$

$$a^2 < -ab$$

$$\textbf{03} \quad 1 < f(1) < 4 \text{이므로} \quad 1 < a+b < 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$-2 < f(2) < 2 \text{이므로} \quad -2 < 2a+b < 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠의 각 변에 2를 곱하면

$$2 < 2a+2b < 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡}-\textcircled{㉢} \text{을 하면} \quad 0 < b < 10$$

$$f(0)=b \text{이므로} \quad 0 < f(0) < 10$$

$$\text{답 } 0 < f(0) < 10$$

참고 부등식의 사칙계산

$a < x < b, c < y < d$ 일 때

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \quad a < x < b & \textcircled{2} \quad a < x < b \\ +) \quad c < y < d & -) \quad c < y < d \\ \hline a+c < x+y < b+d & a-d < x-y < b-c \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \textcircled{3} \quad a < x < b & \textcircled{4} \quad a < x < b \\ \times) \quad c < y < d & \div) \quad c < y < d \\ \hline ac < xy < bd & \frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c} \end{array}$$

(단, ③, ④는 a, b, c, d 가 양수일 때 성립한다.)

$$\begin{aligned} 04 \quad A-B &= (a^3+b^3)-(a^2b+ab^2) \\ &= a^2(a-b)-b^2(a-b) \\ &= (a-b)(a^2-b^2) \\ &= (a-b)(a+b)(a-b) \\ &= (a+b)(a-b)^2 \end{aligned}$$

이때 $a>0, b>0$ 이므로 $a+b>0$

또 $a \neq b$ 이므로 $(a-b)^2>0$

따라서 $A-B>0$ 이므로

$$A>B$$

$$\text{답 } A>B$$

$$\begin{aligned} 05 \quad A-B &= (abc+1)-(a+bc) \\ &= a(bc-1)-(bc-1) \\ &= (a-1)(bc-1) \end{aligned}$$

그런데 $-1<a<1$ 이므로 $a-1<0$

또 $-1<b<1, -1<c<1$ 이므로

$$-1<bc<1 \quad \therefore bc-1<0$$

따라서 $A-B>0$ 이므로

$$A>B$$

$$\text{답 } A>B$$

$$06 \quad (i) \quad \frac{A}{B} = \frac{2^{30}}{5^{12}} = \left(\frac{2^5}{5^2}\right)^6 = \left(\frac{32}{25}\right)^6 > 1$$

$$\therefore A>B$$

$$(ii) \quad \frac{A}{C} = \frac{2^{30}}{3^{20}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{10} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1$$

$$\therefore A<C$$

(i), (ii)에서 $B<A<C$

$$\text{답 } ③$$

$$\begin{aligned} 07 \quad a &= -2b \text{이므로 } a+b<0 \text{에서} \\ -2b+b &< 0, \quad -b<0 \\ \therefore b &> 0 \end{aligned}$$

$a=-2b$ 를 $(a-3b)x+3a+2b<0$ 에 대입하면

$$(-2b-3b)x-6b+2b<0, \quad 5bx>-4b$$

이때 $b>0$ 이므로 $x>-\frac{4}{5}$

$$\text{답 } ②$$

$$\begin{aligned} 08 \quad (a+b)x+a-2b &> 0 \text{에서} \\ (a+b)x &> -a+2b \end{aligned}$$

이 부등식의 해가 $x<\frac{2}{3}$ 이므로

$$a+b<0$$

$$\therefore x < \frac{-a+2b}{a+b}$$

따라서 $\frac{-a+2b}{a+b} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$2a+2b=-3a+6b$$

$$5a=4b \quad \therefore a=\frac{4}{5}b$$

$a+b<0$ 에서 $\frac{4}{5}b+b<0$

$$\frac{9}{5}b<0 \quad \therefore b<0$$

$a=\frac{4}{5}b$ 를 $(2a-b)x<a+b$ 에 대입하면

$$\left(\frac{8}{5}b-b\right)x<\frac{4}{5}b+b, \quad \frac{3}{5}bx<\frac{9}{5}b$$

이때 $b<0$ 이므로 $x>3$

$$\text{답 } x>3$$

$$\begin{aligned} &(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ &\quad -ab(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-2ab+b^2) \\ &= (a+b)(a-b)^2 \\ &\text{과 같이 풀이할 수도 있다.} \end{aligned}$$

부등식 $ax>b$ 의 해가

① 없다.

$$\Rightarrow a=0, b \geq 0$$

② 모든 실수이다.

$$\Rightarrow a=0, b<0$$

$$\begin{aligned} 09 \quad (a-b)x+2a+3b &> 0 \text{에서} \\ (a-b)x &> -2a-3b \end{aligned}$$

이 부등식의 해가 모든 실수이므로

$$a-b=0, \quad -2a-3b<0$$

$a-b=0$ 에서 $b=a$ 이므로 $-2a-3b<0$ 에서

$$-2a-3a<0, \quad -5a<0$$

$$\therefore a>0$$

$b=a$ 를 $(a+2b)x>b-2a$ 에 대입하면

$$(a+2a)x>a-2a, \quad 3ax>-a$$

이때 $a>0$ 이므로 $x>-\frac{1}{3}$

$$\text{답 } ③$$

$$10 \quad 2x+1<a-x \text{에서}$$

$$3x<a-1 \quad \therefore x<\frac{a-1}{3}$$

$x+4<3x+2a$ 에서

$$-2x<2a-4 \quad \therefore x>2-a$$

주어진 연립부등식의 해가 $-2<x<b$ 이므로

$$2-a=-2, \quad \frac{a-1}{3}=b \quad \therefore a=4, b=1$$

$$\therefore a+b=5$$

$$\text{답 } ⑤$$

$$11 \quad 2(x-1)+a>0 \text{에서}$$

$$2x>2-a \quad \therefore x>\frac{2-a}{2}$$

$$6x+2a<1 \text{에서 } x<\frac{1-2a}{6}$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지

않으려면 오른쪽 그림에서

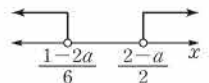
$$\frac{1-2a}{6} \leq \frac{2-a}{2}$$

$$1-2a \leq 6-3a \quad \therefore a \leq 5$$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$$1+2+3+4+5=15$$

$$\text{답 } 15$$



12 두 삼각형 APS, BQR는 모두 직각이등변삼각형 이고 서로 합동이므로

$$\overline{BQ}=x, \overline{PQ}=36-2x$$

$\overline{PQ}<\overline{AP}+\overline{BQ}$ 에서

$$36-2x<x+x, \quad -4x<-36$$

$$\therefore x>9$$

$$\dots\dots ①$$

$\overline{PS}=\overline{QR}=x$ 이므로 $\square PQRS$ 의 둘레의 길이는

$$2\{(36-2x)+x\}=72-2x$$

이고, $\overline{AP}$ 를 한 변으로 하는 정사각형의 둘레의 길이는 $4x$ 이므로

$$72-2x>4x, \quad -6x>-72$$

$$\therefore x<12$$

$$\dots\dots ②$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$9<x<12$$

따라서 정수 x 는 10, 11이다.

$$\text{답 } 10, 11$$

$$13 \quad 2-\frac{2(1-x)}{3}<\frac{3x+5}{6} \text{에서}$$

$$12-4(1-x)<3x+5, \quad 8+4x<3x+5$$

$$\therefore x < -3 \quad \dots\dots ㉞$$

$$\frac{3x+5}{6} < \frac{2x-1}{2} + 4 \text{에서}$$

$$3x+5 < 6x-3+24, \quad -3x < 16$$

$$\therefore x > -\frac{16}{3} \quad \dots\dots ㉟$$

㉞, ㉟의 공통부분을 구하면

$$-\frac{16}{3} < x < -3$$

따라서 정수 x 는 $-5, -4$ 이므로 구하는 곱은

$$-5 \cdot (-4) = 20 \quad \text{답 20}$$

14 $6-x < x+4$ 에서

$$-2x < -2 \quad \therefore x > 1$$

$$x+4 < \frac{x+a}{2} \text{에서}$$

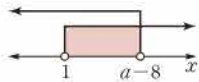
$$2x+8 < x+a \quad \therefore x < a-8$$

주어진 부등식이 해를 가지려면

오른쪽 그림에서

$$a-8 > 1 \quad \therefore a > 9$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 10이다.



답 ③

15 $x+2 < ax+b$ 에서

$$(1-a)x < b-2 \quad \dots\dots ㉞$$

$$ax+b < x-a+3b \text{에서} \quad (a-1)x < -a+2b$$

$$(1-a)x > a-2b \quad \dots\dots ㉟$$

(i) $1-a > 0$, 즉 $a < 1$ 일 때,

$$\text{㉞에서 } x < \frac{b-2}{1-a}, \text{ ㉟에서 } x > \frac{a-2b}{1-a} \text{이고, 주어진}$$

부등식의 해가 $-1 < x < 4$ 이므로

$$\frac{a-2b}{1-a} = -1, \quad \frac{b-2}{1-a} = 4$$

$$a-2b = -1+a, \quad b-2 = 4-4a$$

$$b = \frac{1}{2}, \quad 4a+b = 6 \quad \therefore a = \frac{11}{8}, \quad b = \frac{1}{2}$$

그런데 $a < 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $1-a < 0$, 즉 $a > 1$ 일 때,

$$\text{㉞에서 } x > \frac{b-2}{1-a}, \text{ ㉟에서 } x < \frac{a-2b}{1-a} \text{이고, 주어진}$$

부등식의 해가 $-1 < x < 4$ 이므로

$$\frac{b-2}{1-a} = -1, \quad \frac{a-2b}{1-a} = 4$$

$$b-2 = -1+a, \quad a-2b = 4-4a$$

$$a-b = -1, \quad 5a-2b = 4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=3$

(i), (ii)에서 $a=2, b=3$ 이므로

$$a+b=5 \quad \text{답 ②}$$

16 $|2x+a| < 5a$ 에서

$$-5a < 2x+a < 5a, \quad -6a < 2x < 4a$$

$$\therefore -3a < x < 2a \quad \dots\dots ㉞$$

이때 $a > 0$ 이므로 부등식 ㉞을 만족시키는 정수 x 에 0이 반드시 포함된다.

$p > 0$ 일 때
① $|x| < p$ 이면 $-p < x < p$
② $|x| > p$ 이면 $x < -p$ 또는 $x > p$

또 $|-3a| > |2a|$ 이므로 부등식

㉞을 만족시키는 정수 x 가 2개이

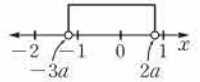
려면 오른쪽 그림에서

$$-2 \leq -3a < -1, \quad 0 < 2a \leq 1$$

$$\frac{1}{3} < a \leq \frac{2}{3}, \quad 0 < a \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{3} < a \leq \frac{1}{2}$$

따라서 양수 a 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.



답 $\frac{1}{2}$

17 $2|x-3| + |x-7| \leq 8$ 에서

(i) $x < 3$ 일 때,

$$-2(x-3) - (x-7) \leq 8$$

$$-3x \leq -5 \quad \therefore x \geq \frac{5}{3}$$

$$\text{그런데 } x < 3 \text{이므로} \quad \frac{5}{3} \leq x < 3$$

(ii) $3 \leq x < 7$ 일 때,

$$2(x-3) - (x-7) \leq 8 \quad \therefore x \leq 7$$

$$\text{그런데 } 3 \leq x < 7 \text{이므로} \quad 3 \leq x < 7$$

(iii) $x \geq 7$ 일 때,

$$2(x-3) + (x-7) \leq 8$$

$$3x \leq 21 \quad \therefore x \leq 7$$

$$\text{그런데 } x \geq 7 \text{이므로} \quad x = 7$$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\frac{5}{3} \leq x \leq 7$ 이므로 정수 x 는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다.

답 ②

18 $-3 \leq x \leq 5$ 일 때 주어진 부등식은

$$(x+3) - (x-5) > k \quad \therefore k < 8$$

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하기 위한 자연수 k 의 최댓값은 7이다.

답 ④

$$x+3 \geq 0, \quad x-5 \leq 0$$

0이 아닌 실수 b 에 대하여
 $b^2 > 0$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 69쪽

01 $\neg, a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ 이면 $0 < ab < 1$ 이지만

$$\frac{1}{a} = -2 \text{이므로 } b > \frac{1}{a} \text{이다.}$$

ㄴ. $b^2 > 0$ 이므로 $ab < 1$ 의 양변을 b^2 으로 나누면

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{b^2}$$

ㄷ. $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 $0 < ab < 1$ 에서

$$0 < a^3b < a^2, \quad 0 < ab^3 < b^2$$

$$\therefore -b^2 < a^3b - ab^3 < a^2$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

02 $b^2c + ac^2 + ab^2 + a^2c = 2abc$ 에서

$$a(b^2+c^2) + c(a^2+b^2-2ab) = 0$$

$$\therefore a(b^2+c^2) + c(a-b)^2 = 0 \quad \dots\dots ㉞$$

→ ①

$a=b$ 이면 $a(b^2+c^2)=0$ 이어야 하므로

$$a=0 \text{ 또는 } b^2+c^2=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } b=0, c=0$$

그런데 이것은 a, b, c 가 0이 아닌 실수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore a \neq b$$

이때 ㉠에서 $a(b^2+c^2)=-c(a-b)^2$ 이므로

$$-\frac{a}{c} = \frac{(a-b)^2}{b^2+c^2} > 0$$

따라서 $\frac{a}{c} < 0$ 이므로

$$ac < 0$$

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	20%
② $a \neq b$ 임을 알 수 있다.	40%
③ $ac < 0$ 임을 보일 수 있다.	40%

03 (i) $A-B=(ab+cd)-(ac+bd)$

$$=a(b-c)-d(b-c)$$

$$=(a-d)(b-c)$$

$a>d, b>c$ 에서 $a-d>0, b-c>0$ 이므로

$$A-B>0 \quad \therefore A>B$$

(ii) $B-C=(ac+bd)-(ad+bc)$

$$=a(c-d)-b(c-d)$$

$$=(a-b)(c-d)$$

$a>b, c>d$ 에서 $a-b>0, c-d>0$ 이므로

$$B-C>0 \quad \therefore B>C$$

(i), (ii)에서 $A>B>C$

답 ①

04 조건 ㉠에서

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)>0$$

이므로 $a-b>0 \quad \therefore a>b$ ㉡

조건 ㉡에서

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)<0$$

이므로 $a+b<0$ ($\because$ ㉡)

㉡에 의하여 $a+b>2b$ 이므로

$$2b<0 \quad \therefore b<0 \quad \dots\dots ㉢$$

조건 ㉢에서 $ab<b$ 이므로 양변을 b 로 나누면

$$a>1 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣에서 $b<0<1<a$

$$\therefore b<1<a \quad \text{답 ④}$$

05 $a^2+b^2+1-(ab+a+b)$

$$= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b)$$

$$= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\} \geq 0$$

$$\therefore a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$$

(단, 등호는 $a=b=1$ 일 때 성립)

답 풀이 참조

참고 등호는 $a-b=0, a-1=0, b-1=0$, 즉 $a=b=1$ 일 때 성립한다.

06 $a(2x+a)>b(x+1)$ 에서

$$(2a-b)x>b-a^2$$

이 부등식이 해를 갖지 않으므로

$$2a-b=0, b-a^2 \geq 0$$

이때 $b-a^2 \geq 0$ 에서 $b \geq a^2$ 이고, 주어진 조건에서 $b \leq a^2$ 이므로

$$b=a^2 \quad \dots\dots ㉠$$

이것을 $2a-b=0$ 에 대입하면

$$2a-a^2=0, \quad a(2-a)=0$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a \neq 0)$$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면 $b=4$

$$\therefore a+b=6 \quad \text{답 ④}$$

07 $\frac{x}{a}+1>\frac{5x+3}{4}-x$ 에서

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{4}\right)x>-\frac{1}{4} \quad \dots\dots ㉠$$

$x-1<ax+b$ 에서

$$(a-1)x>-b-1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 해가 같고 a 는 자연수이므로

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{4}>0, a-1>0$$

$$a<4, a>1 \quad \therefore 1<a<4$$

이때 a 는 자연수이므로

$$a=2 \text{ 또는 } a=3$$

(i) $a=2$ 일 때,

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{4}\right)x>-\frac{1}{4} \text{에서}$$

$$\frac{1}{4}x>-\frac{1}{4} \quad \therefore x>-1$$

$$(a-1)x>-b-1 \text{에서 } x>-b-1$$

이때 두 부등식의 해가 같으므로

$$-b-1=-1 \quad \therefore b=0$$

그런데 b 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$ 일 때,

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{4}\right)x>-\frac{1}{4} \text{에서}$$

$$\frac{1}{12}x>-\frac{1}{4} \quad \therefore x>-3$$

$$(a-1)x>-b-1 \text{에서}$$

$$2x>-b-1 \quad \therefore x>\frac{-b-1}{2}$$

이때 두 부등식의 해가 같으므로

$$\frac{-b-1}{2}=-3 \quad \therefore b=5$$

(i), (ii)에서 $a=3, b=5$ 이므로

$$ab=15$$

답 15

$a \geq 10$ 이므로 $a-1 \geq 0$
 이때 $a-1=0$, 즉 $a=10$ 이
 면 ㉠은 $\frac{3}{4}x > -\frac{1}{4}$, ㉡
 은 $0 \cdot x > -b-1$ 이므로
 ㉠, ㉡의 해가 같지 않다.
 $\therefore a-1 > 0$

a^2+ab+b^2
 $= \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
 이때 등호는 $a=b=0$ 일
 때 성립하는데 a, b 는 서로
 다른 두 실수이므로
 $a^2+ab+b^2 > 0$

$a > b$ 의 양변에 b 를 더하
 면
 $a+b > 2b$

08 $a(x-a^2) > b(x-ab)$ 에서
 $(a-b)x > a^3 - ab^2$
 $(a-b)x > a(a+b)(a-b)$ ㉠

ㄱ. $a=b$ 이면 $a-b=0$ 이므로 ㉠에서

$$0 \cdot x > 0$$

따라서 이 부등식의 해는 없다.

ㄴ. 부등식의 해가 $x > 0$ 이므로 ㉠에서

$$a-b > 0$$

$$\therefore x > a(a+b)$$

따라서 $a(a+b)=0$ 이고, $a > 0$ 이므로

$$a+b=0$$

$$\text{즉 } b = -a \text{이므로 } b < 0$$

ㄷ. 부등식의 해가 $x < a$ 이므로 ㉠에서

$$a-b < 0$$

$$\therefore x < a(a+b)$$

따라서 $a(a+b)=a$ 이고, $a \neq 0$ 이므로

$$a+b=1 \quad \therefore b=1-a$$

$b=1-a$ 를 $a-b < 0$ 에 대입하면

$$a-(1-a) < 0, \quad 2a < 1$$

$$\therefore a < \frac{1}{2}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

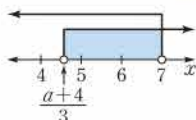
답 ⑤

09 $-x+a < 2x-4$ 에서
 $-3x < -a-4 \quad \therefore x > \frac{a+4}{3}$

$$\frac{3x-1}{2} < x+3 \text{에서}$$

$$3x-1 < 2x+6 \quad \therefore x < 7$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$$4 \leq \frac{a+4}{3} < 5, \quad 12 \leq a+4 < 15$$

$$\therefore 8 \leq a < 11$$

따라서 정수 a 는 8, 9, 10이므로 구하는 합은

$$8+9+10=27$$

답 27

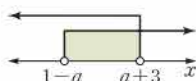
채점 기준	비율
① 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ 모든 정수 a 의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

10 $2x+a > x+1$ 에서 $x > 1-a$

$$3x-6 < x+2a \text{에서}$$

$$2x < 2a+6 \quad \therefore x < a+3$$

이때 주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$$1-a < a+3$$

$$-2a < 2 \quad \therefore a > -1$$

..... ㉠

1월의 월 소비 총액이 200만 원이고, 외식비가 40만 원이므로 나머지 항목의 총액은 160만 원이다.

또 주어진 연립부등식을 만족시키는 음수 x 가 존재하지 않으므로

$$1-a \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-1 < a \leq 1$$

답 ②

11 1월에 지출한 외식비에서 $x\%$, 나머지 항목에서 4% 를 줄이면 줄어든 금액은

$$40 \cdot \frac{x}{100} + 160 \cdot \frac{4}{100} \text{ (만 원)}$$

이고, 이것은 1월의 월 소비 총액의 5% 이상이므로

$$40 \cdot \frac{x}{100} + 160 \cdot \frac{4}{100} \geq 200 \cdot \frac{5}{100}$$

$$4x+64 \geq 100, \quad 4x \geq 36$$

$$\therefore x \geq 9$$

..... ㉠

→ ①

1월에 지출한 외식비에서 4% , 나머지 항목에서 $x\%$ 를 줄이면 줄어든 금액은

$$40 \cdot \frac{4}{100} + 160 \cdot \frac{x}{100} \text{ (만 원)}$$

이고, 이것은 1월의 월 소비 총액의 10% 이하이므로

$$40 \cdot \frac{4}{100} + 160 \cdot \frac{x}{100} \leq 200 \cdot \frac{10}{100}$$

$$16+16x \leq 200, \quad 16x \leq 184$$

$$\therefore x \leq 11.5$$

..... ㉡

→ ②

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$9 \leq x \leq 11.5$$

..... ③

답 $9 \leq x \leq 11.5$

채점 기준	비율
① 외식비에서 $x\%$, 나머지 항목에서 4% 를 줄인 경우의 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
② 외식비에서 4% , 나머지 항목에서 $x\%$ 를 줄인 경우의 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ 조건을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

12 조건 ㉠에서 $y=20-x$ 이므로 이것을 조건 ㉡의 부등식에 대입하면

$$(20-x)-x < 2x-(20-x) < x+2(20-x)+4$$

$$\therefore 20-2x < 3x-20 < -x+44$$

$$20-2x < 3x-20 \text{에서}$$

$$-5x < -40 \quad \therefore x > 8$$

..... ㉠

$$3x-20 < -x+44 \text{에서}$$

$$4x < 64 \quad \therefore x < 16$$

..... ㉡

한편 y 는 자연수이므로 $20-x > 0$ 에서

$$x < 20$$

..... ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$$8 < x < 16$$

따라서 자연수 x 는 9, 10, 11, ..., 15이므로 순서쌍

(x, y) 의 개수는 7이다.

답 ②

참고 순서쌍 (x, y) 를 구하면 다음과 같다.

$$(9, 11), (10, 10), (11, 9), (12, 8), (13, 7), (14, 6), (15, 5)$$

13 조건 ㉞에서

$$1.5 \leq \frac{n-5}{10} < 2, \quad 15 \leq n-5 < 20$$

$$\therefore 20 \leq n < 25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 ㉞에서

$$7 < \frac{n+2}{3} \leq 8, \quad 21 < n+2 \leq 24$$

$$\therefore 19 < n \leq 22 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$20 \leq n \leq 22 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

따라서 자연수 n 은 20, 21, 22이므로 구하는 합은

$$20 + 21 + 22 = 63 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 63

채점 기준	비율
① 조건 ㉞을 이용하여 n 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
② 조건 ㉞을 이용하여 n 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
③ 조건을 모두 만족시키는 n 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
④ 모든 자연수 n 의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

14 $4x - a < 2x + b$ 에서 $2x < a + b$

$$\therefore x < \frac{a+b}{2}$$

$$-2x - 1 < 2x + b \text{에서} \quad -4x < b + 1$$

$$\therefore x > -\frac{b+1}{4}$$

잘못 변형한 연립부등식의 해가 $-\frac{3}{4} < x < \frac{3}{2}$ 이므로

$$-\frac{b+1}{4} = -\frac{3}{4}, \quad \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 원래 부등식은

$$4x - 1 \leq -2x - 1 < 2x + 2$$

$$4x - 1 \leq -2x - 1 \text{에서} \quad 6x \leq 0$$

$$\therefore x \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$-2x - 1 < 2x + 2 \text{에서} \quad -4x < 3$$

$$\therefore x > -\frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{의 공통부분을 구하면} \quad -\frac{3}{4} < x \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\text{답} \quad -\frac{3}{4} < x \leq 0$$

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	50%
② 원래 부등식의 해를 구할 수 있다.	50%

15 $ax + 2 < x + 1$ 에서

$$(a-1)x < -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x + 1 < 2x + b \text{에서}$$

$$-x < b - 1 \quad \therefore x > 1 - b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(i) $a - 1 < 0$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서} \quad x > -\frac{1}{a-1} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

두 부등식의 부등호의 방향이 같으므로 공통부분이 항상 존재한다.

$\frac{n-5}{10}$ 를 반올림하여 일의 자리까지 나타내면 2가 되므로

$$1.5 \leq \frac{n-5}{10} < 2.5$$

또 버림하여 일의 자리까지 나타내면 1이 되므로

$$1 \leq \frac{n-5}{10} < 2$$

$$\therefore 1.5 \leq \frac{n-5}{10} < 2$$

이때 ①, ②의 공통부분이 존재하므로 주어진 부등식은 해를 갖는다.

(ii) $a - 1 = 0$ 일 때,

①에서 $0 \cdot x < -1$ 이므로 해가 없다.

$$\therefore (a-1)(b-1) = 0$$

(iii) $a - 1 > 0$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서} \quad x < -\frac{1}{a-1}$$

주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서

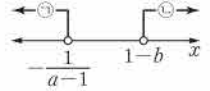
$$-\frac{1}{a-1} \leq 1-b$$

$a - 1 > 0$ 이므로 양변에 $a - 1$ 을 곱하면

$$-1 \leq (1-b)(a-1)$$

$$\therefore (a-1)(b-1) \leq 1$$

이상에서 $(a-1)(b-1)$ 의 최댓값은 1이다. 답 ①



16 $\triangle MPC$

$$= \square ABCD - (\triangle APM + \triangle PBC + \triangle CDM)$$

$$= 8 \cdot 6 - \left[\frac{1}{2} \cdot x \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (6-x) \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \right]$$

$$= 48 - \{2x + (24 - 4x) + 12\}$$

$$= 2x + 12$$

한편

$$\begin{aligned} \triangle APM + \triangle PBC &= 2x + (24 - 4x) \\ &= 24 - 2x \end{aligned}$$

이고

$$\square PBCQ = (6-x) \cdot 8 = 48 - 8x$$

이므로 주어진 조건에서

$$24 - 2x < 2x + 12 < 48 - 8x$$

$$24 - 2x < 2x + 12 \text{에서}$$

$$-4x < -12 \quad \therefore x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x + 12 < 48 - 8x \text{에서}$$

$$10x < 36 \quad \therefore x < 3.6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$3 < x < 3.6 \quad \text{답} \quad 3 < x < 3.6$$

17 $|2x+1| < 5$ 에서

$$-5 < 2x+1 < 5, \quad -6 < 2x < 4$$

$$\therefore -3 < x < 2$$

$$ax + 2a - b < 0 \text{에서}$$

$$ax < -2a + b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

연립부등식의 해가 $-1 < x < 2$ 이므로 부등식 ①의 해는

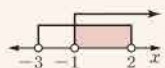
$x > -1$ 이어야 한다.

즉 ①에서 $a < 0$ 이므로

$$x > \frac{-2a+b}{a}$$

$$\text{따라서} \quad \frac{-2a+b}{a} = -1 \text{이므로} \quad -2a+b = -a$$

$$\therefore b = a$$



$b=a$ 를 $(a+b)x+a-3b>0$ 에 대입하면

$$2ax-2a>0, \quad ax>a$$

$a<0$ 이므로 $x<1$

답 ①

18 (i) $x<1$ 일 때,

$$|x-1|+|x-2|=- (x-1)-(x-2) \\ =-2x+3$$

$x<1$ 에서 $-2x>-2$ 이므로 $-2x+3>1$

(ii) $1\leq x<2$ 일 때,

$$|x-1|+|x-2|=(x-1)-(x-2) \\ =1$$

(iii) $x\geq 2$ 일 때,

$$|x-1|+|x-2|=(x-1)+(x-2) \\ =2x-3$$

$x\geq 2$ 에서 $2x\geq 4$ 이므로 $2x-3\geq 1$

이상에서 $|x-1|+|x-2|\geq 1$ 이므로 부등식

$|x-1|+|x-2|<a$ 의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$a\leq 1$$

답 ②

19 $f(n, n+4)$ 의 값은 부등식

$$|x|+|x-n|<n+4$$

..... ①

를 만족시키는 정수 x 의 개수와 같다.

(i) $x<0$ 일 때,

$$\textcircled{1}\text{에서} \quad -x-(x-n)<n+4 \\ -2x<4 \quad \therefore x>-2$$

그런데 $x<0$ 이므로 $-2<x<0$

..... ②

(ii) $0\leq x<n$ 일 때,

$$\textcircled{1}\text{에서} \quad x-(x-n)<n+4 \\ \therefore n<n+4$$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $0\leq x<n$ 이므로 $0\leq x<n$

..... ③

(iii) $x\geq n$ 일 때,

$$\textcircled{1}\text{에서} \quad x+(x-n)<n+4 \\ 2x<2n+4 \quad \therefore x<n+2$$

그런데 $x\geq n$ 이므로 $n\leq x<n+2$

..... ④

이상에서 부등식 ①의 해는 $-2<x<n+2$ 이므로 정수 x 의 개수는

$$(n+2)-(-2)-1=n+3 \\ \therefore f(n, n+4)=n+3$$

..... ⑤

따라서 $f(n, n+4)=10$ 에서

$$n+3=10 \quad \therefore n=7$$

..... ⑥

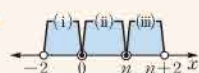
답 7

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x 의 값 1, 2를 기준으로 범위를 나눈다.

$$a>b, a>c\text{이므로} \\ c-a<0, a-b>0$$

$$b>a, b>c\text{이므로} \\ a-b<0, b-c>0$$

$$c>a, c>b\text{이므로} \\ c-a>0, b-c<0$$



$0\leq |x|<2+a$ 에서
 $|x|=0, 1, 2, \dots$
 $\therefore x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 즉 정수 x 는 항상 홀수 개이다.

내신 + 수능

1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제**

본책 72쪽

01 a, b, c, d, e 가 연속하는 5개의 정수이므로 조건 (가)에 의하여

$$a=c-2, b=c-1, d=c+1, e=c+2$$

조건 (나)에 의하여

$$(c-2)+(c-1)<c+1$$

$$\therefore c<4$$

조건 (다)에 의하여

$$(c-2)^2+c^2=(c+2)^2, \quad c^2-8c=0$$

$$c(c-8)=0 \quad \therefore c=0 \text{ 또는 } c=8$$

그런데 $c<4$ 이므로 $c=0$

따라서 $a=-2, b=-1, d=1, e=2$ 이므로

$$b^2+d^2=(-1)^2+1^2=2$$

답 2

비밀노트

문제에서 연속하는 정수 조건이 있을 때, 연속하는 세 정수는 $x-1, x, x+1$ 로 놓고, 연속하는 5개의 정수는 $x-2, x-1, x, x+1, x+2$ 로 놓으면 편리하다.

02 $c-a>a-b>b-c$ 에서

$$c-a>a-b$$

..... ①

$$a-b>b-c$$

..... ②

(i) a, b, c 중 가장 큰 수를 a 라 하면

$$c-a<0, a-b>0$$

이므로 ①을 만족시키는 a, b, c 가 존재하지 않는다.

(ii) a, b, c 중 가장 큰 수를 b 라 하면

$$a-b<0, b-c>0$$

이므로 ②를 만족시키는 a, b, c 가 존재하지 않는다.

(iii) a, b, c 중 가장 큰 수를 c 라 하면

$$c-a>0, b-c<0$$

이므로 a, b, c 의 값에 따라 주어진 부등식이 성립한다.

이상에서 $a<c, b<c$ 이고, a, b 의 대소는 비교할 수 없으므로 옳은 것은 ③뿐이다.

답 ②

03 $||x|-2|<a$ 에서 $-a<|x|-2<a$

$$2-a<|x|<2+a$$

(i) $2-a<0$, 즉 $a>2$ 일 때,

$$0\leq |x|<2+a$$

이 부등식을 만족시키는 정수 x 는 항상 홀수 개이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2-a\geq 0$, 즉 $a\leq 2$ 일 때,

$$0\leq 2-a<|x|<2+a$$

이를 만족시키는 정수 x 가 6

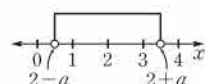
개이면 자연수 $|x|$ 는 3개이

므로 오른쪽 그림에서

$$3<2+a\leq 4 \quad \therefore 1<a\leq 2$$

(i), (ii)에서 $1<a\leq 2$

답 $1<a\leq 2$



채점 기준

비율

① $x<0$ 일 때, x 의 값의 범위를 구할 수 있다.

20%

② $0\leq x<n$ 일 때, x 의 값의 범위를 구할 수 있다.

20%

③ $x\geq n$ 일 때, x 의 값의 범위를 구할 수 있다.

20%

④ $f(n, n+4)$ 를 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

10%

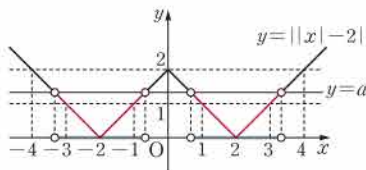
⑤ n 의 값을 구할 수 있다.

30%

다른 풀이 $||x|-2| = \begin{cases} -|x|+2 & (|x|<2) \\ |x|-2 & (|x|\geq 2) \end{cases}$

$$= \begin{cases} -x-2 & (x\leq -2) \\ x+2 & (-2<x<0) \\ -x+2 & (0\leq x<2) \\ x-2 & (x\geq 2) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=||x|-2|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



부등식 $||x|-2| < a$ 의 해는 함수 $y=||x|-2|$ 의 그래프가 직선 $y=a$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 부등식 $||x|-2| < a$ 를 만족시키는 정수 x 가 6개이려면 x 가 $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ 이어야 한다.

$$\therefore 1 < a \leq 2$$

04 $|x-a| \leq b$ 에서 $-b \leq x-a \leq b$

$$\therefore a-b \leq x \leq a+b$$

$ax+b < bx+2a$ 에서

$$(a-b)x < 2a-b \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

ㄱ. 부등식 ㉠의 해가 $0 \leq x \leq 2$ 이면

$$a-b=0, a+b=2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=1$$

㉠에서 $0 \leq x < 1$ 이므로 부등식 ㉠의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. 부등식 ㉠의 해가 $1 \leq x \leq 3$ 이면

$$a-b=1, a+b=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, b=1$$

㉠에서 $x < 3$

따라서 연립부등식의 해는 $1 \leq x < 3$ 이다.

ㄷ. 연립부등식의 해가 $\frac{1}{2} < x \leq 4$

이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 부등식 ㉠의 해가

$$x > \frac{1}{2} \text{ 이어야 한다.}$$

즉 ㉠에서 $a-b < 0$ 이므로

$$x > \frac{2a-b}{a-b}$$

따라서 $\frac{2a-b}{a-b} = \frac{1}{2}$ 이므로

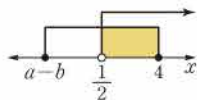
$$4a-2b=a-b \quad \therefore b=3a \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

또 부등식 ㉠의 해가 $a-b \leq x \leq 4$ 이어야 하므로

$$a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1, b=3$$



따라서 부등식 ㉠의 해는 $-2 \leq x \leq 4$ 이므로 정수 x 는 $-2, -1, 0, \dots, 4$ 의 7개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㉢

05 다음과 같이 사무실을 원점으로 하고 10 m를 1로 하는 수직선을 그려 식당을 점 A(3), 오락실을 점 B(7), 숙소를 점 P(x) ($-5 \leq x \leq 12$, $x \neq 0$, $x \neq 3$, $x \neq 7$)라 하자.



$\overline{AP} = |x-3|$, $\overline{BP} = |x-7|$ 이므로 조건을 만족시키는 숙소의 개수는

$$\overline{AP} + \overline{BP} = |x-3| + |x-7| \leq 8$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수와 같다.

(i) $-5 \leq x < 0$ 또는 $0 < x < 3$ 일 때,

$$-(x-3)-(x-7) \leq 8$$

$$-2x \leq -2 \quad \therefore x \geq 1$$

그런데 $-5 \leq x < 0$ 또는 $0 < x < 3$ 이므로

$$1 \leq x < 3$$

(ii) $3 < x < 7$ 일 때,

$(x-3)-(x-7) \leq 8$ 에서 $4 \leq 8$ 이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $3 < x < 7$ 이므로

$$3 < x < 7$$

(iii) $7 < x \leq 12$ 일 때,

$$(x-3)+(x-7) \leq 8$$

$$2x \leq 18 \quad \therefore x \leq 9$$

그런데 $7 < x \leq 12$ 이므로

$$7 < x \leq 9$$

이상에서 부등식 $|x-3| + |x-7| \leq 8$ 의 해는

$$1 \leq x < 3 \text{ 또는 } 3 < x < 7 \text{ 또는 } 7 < x \leq 9$$

따라서 정수 x 는 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9의 7개이므로 조건을 만족시키는 숙소는 7개이다.

답 ㉡



08 이차부등식

개념 & 핵심 기출

본책 73쪽

01 $x^2+2x-8 \leq 0$ 에서 $(x+4)(x-2) \leq 0$
 $\therefore -4 \leq x \leq 2$

$y=ax^2+4ax+4=a(x+2)^2-4a+4$ 이고, $a>0$ 이므로
 $-4 \leq x \leq 2$ 에서 $x=-2$ 일 때 최솟값은 $-4a+4$ 이다.
 따라서 $-4a+4=-4$ 이므로
 $a=2$ 답 2

02 $x^2-(a+2)x+2a < 0$ 에서
 $(x-2)(x-a) < 0$ ㉠

(i) $a < 2$ 일 때, 부등식 ㉠의 해는 $a < x < 2$
 그런데 a 는 자연수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x 는 없다.

(ii) $a=2$ 일 때, 부등식 ㉠은 $(x-2)^2 < 0$ 이므로 해는 없다.

(iii) $a > 2$ 일 때, 부등식 ㉠의 해는 $2 < x < a$
 이 부등식을 만족시키는 정수 x 가 3개이려면 오른쪽 그림에서
 $5 < a \leq 6$

이때 a 는 자연수이므로 $a=6$
 이상에서 $a=6$ 답 6

$a < 0$ 에서 $-a > 0$ 이므로 양변을 $-a$ 로 나눴을 때 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$a=5$ 이면 정수 x 는 3, 4의 2개, $a=6$ 이면 정수 x 는 3, 4, 5의 3개이다.

비밀노트

(iii)에서 $5 < a < 6$, $5 \leq a < 6$ 등과 같이 오답하기 쉬운 문제이다. 이러한 유형의 문제는 등호를 포함시켰을 때 주어진 조건을 만족시키지 않으면 등호를 제외하고, 만족시키면 등호를 포함하는 방법으로 해결하는 것이 좋다.

03 $\neg, a > \frac{1}{3}$ 이면 주어진 부등식은
 $(x-3)\left(x-\frac{1}{a}\right) < 0 \quad \therefore \frac{1}{a} < x < 3$

$\neg, a = \frac{1}{3}$ 이면 주어진 부등식은
 $(x-3)\left(\frac{1}{3}x-1\right) < 0 \quad \therefore (x-3)^2 < 0$

따라서 해는 없다.

$\neg, a < 0$ 이면 주어진 부등식은
 $(x-3)\left(x-\frac{1}{a}\right) > 0 \quad \therefore x < \frac{1}{a} \text{ 또는 } x > 3$
 이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다. 답 ④

04 $2x^2-5x+2 < 0$ 에서 $(2x-1)(x-2) < 0$
 $\therefore \frac{1}{2} < x < 2$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$ 이므로 해가 $-\frac{\beta}{2} < x < -\frac{a}{2}$, 즉
 $-1 < x < -\frac{1}{4}$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+1)\left(x+\frac{1}{4}\right) < 0 \quad \therefore x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4} < 0$

양변에 4를 곱하면 $4x^2+5x+1 < 0$ 이므로
 $a=4$, $b=5 \quad \therefore ab=20$ 답 ③

05 해가 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3) \geq 0$
 $\therefore x^2-x-6 \geq 0$ ㉠

부등식 $ax^2+bx+c \leq 0$ 과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$

따라서 ㉠의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2-ax-6a \leq 0$
 이 부등식이 $ax^2+bx+c \leq 0$ 과 같으므로
 $b=-a$, $c=-6a$

이것을 $bx^2+ax-c < 0$ 에 대입하면
 $-ax^2+ax+6a < 0, \quad x^2-x-6 < 0$
 $(x+2)(x-3) < 0 \quad \therefore -2 < x < 3$ 답 $-2 < x < 3$

06 이차방정식 $x^2-4x+5k=0$ 의 두 근을 α , $\alpha-6$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha-6)=4$ ㉠
 $\alpha(\alpha-6)=5k$ ㉡

㉠에서 $\alpha=5$ 이므로 이것을 ㉡에 대입하면
 $-5=5k \quad \therefore k=-1$

따라서 해가 $k+1 \leq x \leq k+5$, 즉 $0 \leq x \leq 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$x(x-4) \leq 0 \quad \therefore x^2-4x \leq 0$

이 부등식이 $x^2+ax+b \leq 0$ 과 같으므로

$a=-4$, $b=0 \quad \therefore a+b=-4$ 답 ②

07 $x^2-2k(x+1)+15 \geq 0$ 에서
 $x^2-2kx-2k+15 \geq 0$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2-2kx-2k+15=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (-2k+15) \leq 0$
 $k^2+2k-15 \leq 0, \quad (k+5)(k-3) \leq 0$
 $\therefore -5 \leq k \leq 3$ 답 ①

08 $kx^2-2kx+1 < x^2+4x+5$ 에서
 $(1-k)x^2+2(2+k)x+4 > 0$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$1-k > 0 \quad \therefore k < 1$ ㉠

이차방정식 $(1-k)x^2+2(2+k)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (2+k)^2 - 4(1-k) < 0$
 $k^2+8k < 0, \quad k(k+8) < 0$
 $\therefore -8 < k < 0$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-8 < k < 0$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다. 답 -1

09 이차부등식 $ax^2 - (a-6)x + a-6 > 0$ 의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$ax^2 - (a-6)x + a-6 \leq 0$$

이 성립해야 하므로 $a < 0$ ㉠

이차방정식 $ax^2 - (a-6)x + a-6 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(a-6)\}^2 - 4a(a-6) \leq 0$$

$$a^2 - 4a - 12 \geq 0, \quad (a+2)(a-6) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2 \text{ 또는 } a \geq 6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a \leq -2$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -2 이다. 답 ②

10 $|2x^2 - 5x - 6| < 6$ 에서

$$-6 < 2x^2 - 5x - 6 < 6$$

$$-6 < 2x^2 - 5x - 6 \text{에서}$$

$$2x^2 - 5x > 0, \quad x(2x-5) > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } x > \frac{5}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$2x^2 - 5x - 6 < 6 \text{에서}$$

$$2x^2 - 5x - 12 < 0, \quad (2x+3)(x-4) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < x < 4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-\frac{3}{2} < x < 0 \text{ 또는 } \frac{5}{2} < x < 4$$

따라서 정수 x 는 $-1, 3$ 의 2개이다. 답 ③

11 $x^2 - 4 > 0$ 에서 $(x+2)(x-2) > 0$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$x^2 + (1-a)x - a < 0 \text{에서}$$

$$(x+1)(x-a) < 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

(i) $a < -1$ 일 때,

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합이 7인 경우는 존재하지 않는다.

(ii) $a = -1$ 일 때,

㉡에서 $(x+1)^2 < 0$ 이므로 해는 없다.

(iii) $a > -1$ 일 때,

㉠, ㉡을 동시에 만족시

키는 모든 정수 x 의 값

의 합이 7이려면 정수 x

는 3, 4이어야 하므로 위의 그림에서

$$4 < a \leq 5$$

이상에서 $4 < a \leq 5$ 답 ④ $4 < a \leq 5$

12 조건 ㉠에서 가로, 세로의 길이는 양수이므로

$$n-2 > 0, n > 0 \quad \therefore n > 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

조건 ㉡에서 $2\{n(n-2) + 2n + 2(n-2)\} > 88$

$$n^2 + 2n - 48 > 0, \quad (n+8)(n-6) > 0$$

$$\therefore n < -8 \text{ 또는 } n > 6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $n > 6$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 7이다. 답 7

13 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 3a = 0$ 의 서로 다른 두 근을 α, β 라 하고 판별식을 D 라 할 때, 이 이차방정식의 두 근이 모두 양수이려면

$$(i) D = (-a)^2 - 4(a^2 - 3a) > 0$$

$$a^2 - 4a < 0, \quad a(a-4) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$(ii) \alpha + \beta = a > 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

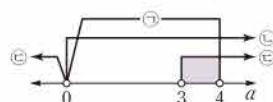
$$(iii) \alpha\beta = a^2 - 3a > 0, \quad a(a-3) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 3 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

이상에서 공통부분을 구

하면

$$3 < a < 4$$



답 ③

14 이차방정식 $x^2 + 2ax + 6 - a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 판별식을 D 라 할 때, 이 이차방정식의 두 근이 모두 음수이려면

$$(i) \frac{D}{4} = a^2 - (6-a) \geq 0$$

$$a^2 + a - 6 \geq 0, \quad (a+3)(a-2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -3 \text{ 또는 } a \geq 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

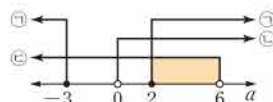
$$(ii) \alpha + \beta = -2a < 0 \quad \therefore a > 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$(iii) \alpha\beta = 6 - a > 0 \quad \therefore a < 6 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

이상에서 공통부분을 구

하면

$$2 \leq a < 6$$



따라서 정수 a 는 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$$2+3+4+5=14$$

답 14

15 이차방정식 $x^2 + (2m-3)x + m^2 - 4m = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta = m^2 - 4m < 0, \quad m(m-4) < 0$$

$$\therefore 0 < m < 4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

음의 근의 절댓값이 양의 근보다 크려면

$$\alpha + \beta = -(2m-3) < 0, \quad 2m-3 > 0$$

$$\therefore m > \frac{3}{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 } \frac{3}{2} < m < 4$$

따라서 정수 m 은 2, 3의 2개이다. 답 ②

16 $f(x) = x^2 - 2ax + b$ 라 하면 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 모두 4보다 작아야 하므로 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

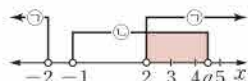
$$(i) \frac{D}{4} = (-a)^2 - b \geq 0 \text{에서 } a^2 \geq b$$

$$(ii) f(4) = 16 - 8a + b > 0 \text{에서 } b > 8a - 16$$

$$(iii) -\frac{2a}{2} = a < 4$$

이상에서 $a < 4, 8a - 16 < b \leq a^2$

$-3 \leq a < -10$ 이면 정수 x 는 존재하지 않고, $a < -30$ 이면 정수 x 는 음수이므로 합이 7이 될 수 없다.



답 ④ $4 < a \leq 5$

$$a^2 - (8a - 16)$$

$$= (a-4)^2 \geq 0$$

이므로

$$a^2 \geq 8a - 16$$

$$\text{따라서 } a^2 \geq b,$$

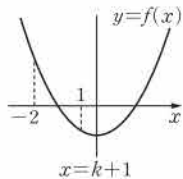
$$b > 8a - 16 \text{에서}$$

$$8a - 16 < b \leq a^2$$

$a=1$ 일 때, $-8 < b \leq 1$ 이므로 $b=1$
 $a=2$ 일 때, $0 < b \leq 4$ 이므로 $b=1, 2, 3, 4$
 $a=3$ 일 때, $8 < b \leq 9$ 이므로 $b=9$
 따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는
 $1+4+1=6$ 답 6

17 $f(x)=x^2+(a^2-5)x+7a$ 라 하면 이차방정식
 $f(x)=0$ 의 두 근 사이에 3이 있어야 하므로
 $f(3)=9+3a^2-15+7a < 0$
 $3a^2+7a-6 < 0, \quad (a+3)(3a-2) < 0$
 $\therefore -3 < a < \frac{2}{3}$ 답 -3 < a < \frac{2}{3}

18 $x^2+x-2=0$ 에서 $(x+2)(x-1)=0$
 $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
 즉 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-2=0$ 의 서로 다른
 두 근 중에서 한 근만이 -2 와 1 사이에 있어야 한다.
 $f(x)=x^2-2(k+1)x+k^2-2$ 라
 하면 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방
 정식은
 $x = -\frac{-2(k+1)}{2},$
 즉 $x=k+1$



이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같아야 한다.
 $f(-2) > 0$ 에서 $4+4k+4+k^2-2 > 0$
 $k^2+4k+6 > 0 \quad \therefore (k+2)^2+2 > 0$
 즉 모든 실수 k 에 대하여 성립한다.
 $f(1) < 0$ 에서 $1-2k-2+k^2-2 < 0$
 $k^2-2k-3 < 0, \quad (k+1)(k-3) < 0$
 $\therefore -1 < k < 3$
 따라서 자연수 k 는 $1, 2$ 이므로 구하는 합은
 $1+2=3$ 답 ①

모든 실수 x 에 대하여
 $(x+1)^2+2 > 0$
 이므로 부등식
 $(x+1)^2+2 < 0$ 의 해는
 없다.

k 는 자연수이므로
 $k+1 > 1$

02 $ax^2+2ax+3a > 0$ 에서
 $a(x^2+2x+3) > 0$ ㉠
 ㄱ. $a=0$ 이면 부등식 ㉠은
 $0 \cdot (x^2+2x+3) > 0$
 이므로 해는 없다.
 ㄴ. $a > 0$ 이면 부등식 ㉠은
 $x^2+2x+3 > 0$, 즉 $(x+1)^2+2 > 0$
 이므로 해는 모든 실수이다.
 ㄷ. $a < 0$ 이면 부등식 ㉠은
 $x^2+2x+3 < 0$, 즉 $(x+1)^2+2 < 0$
 이므로 해는 없다.
 이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

03 (i) $x < 0$ 일 때,
 $x^2-x-2 \leq 0, \quad (x+1)(x-2) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq x \leq 2$
 그런데 $x < 0$ 이므로 $-1 \leq x < 0$ ①
 (ii) $x \geq 0$ 일 때,
 $x^2+x-2 \leq 0, \quad (x+2)(x-1) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq x \leq 1$
 그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x \leq 1$ ②
 (i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
 $-1 \leq x \leq 1$
 이므로 정수 x 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다. ③
답 3

채점 기준	비율
① $x < 0$ 일 때, x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
② $x \geq 0$ 일 때, x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ 정수 x 의 개수를 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 $|x|^2=x^2$ 이므로 주어진 부등식은
 $|x|^2+|x|-2 \leq 0, \quad (|x|+2)(|x|-1) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq |x| \leq 1$
 그런데 $|x| \geq 0$ 이므로
 $0 \leq |x| \leq 1 \quad \therefore -1 \leq x \leq 1$
 따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

04 $x^2-4nx+3n^2 \leq 0$ 에서
 $(x-n)(x-3n) \leq 0$
 이때 n 이 자연수이므로 $n \leq x \leq 3n$
 따라서 이 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는
 $3n-n+1=2n+1$ 이므로
 $f(n)=2n+1$ ①
 $f(1)+f(3)+f(5)=f(m)$ 에서
 $3+7+11=2m+1 \quad \therefore m=10$ ②
답 10

채점 기준	비율
① $f(n)$ 을 구할 수 있다.	70%
② m 의 값을 구할 수 있다.	30%

1등급을 위한 고난도 문제 본책 76쪽

01 $f(x) \leq g(x)$ 에서
 $x^2+4x-a^2-2a \leq -x^2-2ax$
 $\therefore 2x^2+2(a+2)x-a^2-2a \leq 0$
 이 부등식의 해가 오직 한 개 존재하려면 이차방정식
 $2x^2+2(a+2)x-a^2-2a=0$ 의 판별식을 D 라 할 때
 $\frac{D}{4}=(a+2)^2-2(-a^2-2a)=0$
 $3a^2+8a+4=0, \quad (a+2)(3a+2)=0$
 $\therefore a=-2$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$
 따라서 모든 실수 a 의 값의 합은
 $-2+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{3}$ 답 ③

05 $x^2 - (k^2 + k + 2)x + k^3 + 2k^2 \leq 0$ 에서

$$x^2 - (k^2 + k + 2)x + k^2(k + 2) \leq 0$$

$$(x - k^2)(x - k - 2) \leq 0$$

(i) $k^2 > k + 2$ 일 때,

$$k^2 - k - 2 > 0, \quad (k + 1)(k - 2) > 0$$

$$\therefore k > 2 \quad (\because k > 0)$$

이때 주어진 부등식의 해는

$$k + 2 \leq x \leq k^2$$

이 부등식을 만족시키는 x 의 최댓값이 3이므로

$$k^2 = 3 \quad \therefore k = \pm\sqrt{3}$$

그런데 $k > 2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k^2 = k + 2$ 일 때,

$$k^2 - k - 2 = 0, \quad (k + 1)(k - 2) = 0$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

이때 주어진 부등식은

$$(x - 4)^2 \leq 0 \quad \therefore x = 4$$

그런데 이것은 x 의 최댓값이 3이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k^2 < k + 2$ 일 때,

$$k^2 - k - 2 < 0, \quad (k + 1)(k - 2) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 2 \quad (\because k > 0)$$

이때 주어진 부등식의 해는

$$k^2 \leq x \leq k + 2$$

이 부등식을 만족시키는 x 의 최댓값이 3이므로

$$k + 2 = 3 \quad \therefore k = 1$$

이상에서 $k = 1$

답 ①

06 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 에서

$$f(a + \beta) = a(a + \beta)^2 + b(a + \beta) + c$$

이므로 주어진 부등식은

$$f(x) < f(a + \beta)$$

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의

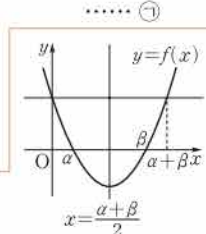
축의 방정식이 $x = \frac{a + \beta}{2}$ 이므로

$$f(a + \beta) = f(0)$$

따라서 ①에서 $f(x) < f(0)$ 이므로

주어진 부등식의 해는

$$0 < x < a + \beta$$



답 ⑤

07 액자틀의 넓이가 140 cm^2 이하가 되려면

$$(8 + 2x)(5 + 2x) - 5 \cdot 8 \leq 140$$

$$4x^2 + 26x \leq 140, \quad 2x^2 + 13x - 70 \leq 0$$

$$(x + 10)(2x - 7) \leq 0$$

$$\therefore -10 \leq x \leq \frac{7}{2}$$

그런데 $x > 0$ 이므로

$$0 < x \leq \frac{7}{2}$$

따라서 자연수 x 의 최댓값은 3이다.

답 ②

답 ③

답 3

$y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{a + \beta}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

$a < 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$(x - 1)^2 \geq 0$$

따라서 해는 모든 실수이다.

$-a > 0$ 이므로 양변을

$-a$ 로 나누면

$$(x + 1)^2 \leq 0$$

$$\therefore x = -1$$

x 는 길이이므로 $x > 0$

$a < 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$(x - 2)^2 \leq 0$$

$$\therefore x = 2$$

채점 기준

비율

① x 에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.

30%

② x 의 값의 범위를 구할 수 있다.

50%

③ 자연수 x 의 최댓값을 구할 수 있다.

20%

08 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\frac{1}{10} < x < \frac{1}{5}$ 이

므로 $a > 0$

해가 $\frac{1}{10} < x < \frac{1}{5}$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x - \frac{1}{10}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) < 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{3}{10}x + \frac{1}{50} < 0$$

양변에 a 를 곱하면

$$ax^2 - \frac{3}{10}ax + \frac{1}{50}a < 0$$

이 부등식이 $ax^2 + bx + c < 0$ 과 같으므로

$$b = -\frac{3}{10}a, \quad c = \frac{1}{50}a$$

이차부등식 $cx^2 + bx + a \leq 0$, 즉

$$\frac{1}{50}ax^2 - \frac{3}{10}ax + a \leq 0 \text{에서 } a > 0 \text{이므로}$$

$$x^2 - 15x + 50 \leq 0, \quad (x - 5)(x - 10) \leq 0$$

$$\therefore 5 \leq x \leq 10$$

따라서 정수 x 는 5, 6, 7, 8, 9, 10이므로 구하는 합은

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$$

답 45

채점 기준

비율

① a 의 부호를 구할 수 있다.

20%

② b, c 를 a 로 나타낼 수 있다.

30%

③ 이차부등식 $cx^2 + bx + a \leq 0$ 의 해를 구할 수 있다.

30%

④ 모든 정수 x 의 값의 합을 구할 수 있다.

20%

09 해가 $x = 1$ 뿐이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x - 1)^2 \leq 0$$

주어진 부등식과 부등식 ①의 부등호의 방향이 다르므로

$$a < 0$$

①의 양변에 a 를 곱하면

$$a(x - 1)^2 \geq 0 \quad \therefore ax^2 - 2ax + a \geq 0$$

이 부등식이 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 과 같으므로

$$b = -2a, \quad c = a$$

ㄱ. 부등식 $ax^2 + bx + c \leq 0$, 즉 $a(x - 1)^2 \leq 0$ 의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $-ax^2 + bx - c \leq 0$, 즉 $-ax^2 - 2ax - a \leq 0$ 에서

$$-a(x + 1)^2 \leq 0$$

따라서 부등식의 해는 $x = -1$ 뿐이다.

ㄷ. $cx^2 + 2bx + 4a \geq 0$, 즉 $ax^2 - 4ax + 4a \geq 0$ 에서

$$a(x - 2)^2 \geq 0$$

따라서 부등식의 해는 $x = 2$ 뿐이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

일품 BOX

10 해가 $a \leq x \leq \beta$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-a)(x-\beta) \leq 0$
 $\therefore x^2 - (a+\beta)x + a\beta \leq 0$

이 부등식이 $x^2 + ax + 6 \leq 0$ 과 같으므로

$$a = -(a+\beta), 6 = a\beta \quad \dots\dots ㉠$$

해가 $x \leq a+1$ 또는 $x \geq \beta+1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-a-1)(x-\beta-1) \geq 0$$

$$\therefore x^2 - (a+\beta+2)x + (a+1)(\beta+1) \geq 0$$

이 부등식이 $x^2 - 7x + b \geq 0$ 과 같으므로

$$7 = a+\beta+2, b = (a+1)(\beta+1) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠에서 $a+\beta=5$ 이므로 ㉡에서

$$a = -(a+\beta) = -5$$

㉡에서 $a\beta=6$ 이므로 ㉠에서

$$b = (a+1)(\beta+1) = a\beta + (a+\beta) + 1$$

$$= 6 + 5 + 1 = 12$$

$$\therefore a+b=7$$

답 7

11 주어진 그래프에서 이차부등식 $f(x) \leq 0$ 의 해는
 $-1 \leq x \leq 2$

이때 $f\left(\frac{x+k}{2}\right) \leq 0$ 에서 $\frac{x+k}{2} = t$ 로 놓으면 $f(t) \leq 0$ 이고, 부등식 $f(t) \leq 0$ 의 해는 $-1 \leq t \leq 2$ 이므로

$$-1 \leq \frac{x+k}{2} \leq 2, \quad -2 \leq x+k \leq 4$$

$$\therefore -2-k \leq x \leq 4-k$$

따라서 $-2-k=-4, 4-k=2$ 이므로

$$k=2$$

답 ③

12 $P(t, t^2+at+b), R(t, t-4)$ 이므로

$$PR = t^2 + at + b - (t-4) = t^2 + (a-1)t + b+4$$

$$\therefore S(t) = \frac{1}{2} \cdot PR \cdot 2$$

$$= t^2 + (a-1)t + b+4$$

$S(t) \leq 8$ 에서 $t^2 + (a-1)t + b+4 \leq 8$

$$\therefore t^2 + (a-1)t + b-4 \leq 0 \quad \dots\dots ㉠$$

해가 $1 \leq t \leq 4$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(t-1)(t-4) \leq 0 \quad \therefore t^2 - 5t + 4 \leq 0$$

이 부등식이 부등식 ㉠과 같으므로

$$a-1 = -5, b-4 = 4 \quad \therefore a = -4, b = 8$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 4를 갖는다.

답 ④

13 이차부등식 $x^2 + (a-1)x - a + 4 \leq 0$ 의 해가 존재하지 않으므로 이차방정식 $x^2 + (a-1)x - a + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-1)^2 - 4(-a+4) < 0$$

$$a^2 + 2a - 15 < 0, \quad (a+5)(a-3) < 0$$

$$\therefore -5 < a < 3$$

답 ①

$$-5 < a < 3 \text{에서}$$

$$-8 < a-3 < 0$$

$$(x+2)a - 3x < 6 \text{에서}$$

$$(a-3)x < -2(a-3)$$

이때 $a-3 < 0$ 이므로

$$x > -2$$

따라서 정수 x 의 최솟값은 -1 이다.

답 ②

답 ③

답 -1

채점 기준	비율
① a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
② 부등식 $(x+2)a - 3x < 6$ 의 해를 구할 수 있다.	40%
③ 정수 x 의 최솟값을 구할 수 있다.	10%

14 $k(x^2+x+1) > x+1$ 에서

$$kx^2 + (k-1)x + k-1 > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $k=0$ 일 때,

$$-x-1 > 0 \text{에서 } x < -1 \text{이므로 해가 존재한다.}$$

(ii) $k \neq 0$ 일 때,

부등식 ㉠의 해가 존재하지 않으려면

$$k < 0 \quad \dots\dots ㉡$$

이차방정식 $kx^2 + (k-1)x + k-1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (k-1)^2 - 4k(k-1) \leq 0$$

$$3k^2 - 2k - 1 \geq 0, \quad (3k+1)(k-1) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -\frac{1}{3} \text{ 또는 } k \geq 1 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$$k \leq -\frac{1}{3}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } k \leq -\frac{1}{3}$$

$$\text{답 } k \leq -\frac{1}{3}$$

15 $|x|=t$ ($t \geq 0$)로 놓으면 주어진 부등식은

$$t^2 - 2at + 2a^2 + a \geq 0$$

$f(t) = t^2 - 2at + 2a^2 + a = (t-a)^2 + a^2 + a$ 라 하면 $t \geq 0$ 에서 $f(t) \geq 0$ 이어야 한다.

(i) $a < 0$ 일 때, $f(0) \geq 0$ 이어야 하므로

$$2a^2 + a \geq 0, \quad a(2a+1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a \geq 0$$

$$\text{그런데 } a < 0 \text{이므로 } a \leq -\frac{1}{2}$$

(ii) $a \geq 0$ 일 때, $f(a) \geq 0$ 이어야 하므로

$$a^2 + a \geq 0, \quad a(a+1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 0$$

$$\text{그런데 } a \geq 0 \text{이므로 } a \geq 0$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a \leq -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a \geq 0$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{1}{2}, \beta = 0 \text{이므로}$$

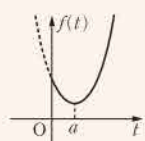
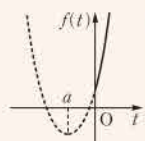
$$\beta - a = \frac{1}{2}$$

답 ③

$$\text{답 } \frac{1}{2}$$

이차부등식 $f(x) \leq 0$ 의 해
 $\Rightarrow$ 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x 축보다 아래쪽에 있거나 x 축과 만나는 부분의 x 의 값의 범위

$x^2 = |x|^2 = t^2$
 $\triangle PRQ$ 의 밑변을 PR 라 하면 높이는 두 직선 $x=t, x=t+2$ 사이의 거리이다.



채점 기준	비율
① $ x =t$ 로 놓고 주어진 부등식이 성립하도록 하는 t 에 대한 조건을 구할 수 있다.	30%
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ $\beta-\alpha$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

16 실수 k 의 값에 관계없이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점이 항상 존재하므로 방정식 $f(x)=g(x)$ 는 실수 k 의 값에 관계없이 항상 실근을 갖는다.

이차방정식 $(x-1)(x-2)=k(x-a)$, 즉 $x^2-(k+3)x+2+ak=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=\{-(k+3)\}^2-4(2+ak)\geq 0$$

$$\therefore k^2+2(3-2a)k+1\geq 0 \quad \dots\dots ①$$

부등식 ①이 모든 실수 k 에 대하여 성립해야 하므로 k 에 대한 이차방정식 $k^2+2(3-2a)k+1=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(3-2a)^2-1\leq 0$$

$$a^2-3a+2\leq 0, \quad (a-1)(a-2)\leq 0$$

$$\therefore 1\leq a\leq 2$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 2, 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $2+1=3$ 답 ①

17 $a<b<c$ 이므로 부등식 $(x-a)(x-b)>0$ 의 해는

$$x<a \text{ 또는 } x>b \quad \dots\dots ①$$

부등식 $(x-b)(x-c)>0$ 의 해는

$$x<b \text{ 또는 } x>c \quad \dots\dots ②$$

①, ②의 공통부분을 구하면

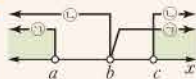
$$x<a \text{ 또는 } x>c$$

$$\therefore a=-1, c=6$$

따라서 $x^2+ax-c<0$, 즉 $x^2-x-6<0$ 에서

$$(x+2)(x-3)<0 \quad \therefore -2<x<3 \quad \dots\dots ③$$

답 -2<x<3



채점 기준	비율
① a, c 의 값을 구할 수 있다.	70%
② 이차부등식 $x^2+ax-c<0$ 의 해를 구할 수 있다.	30%

18 $x^2-5x-6>0$ 에서

$$(x+1)(x-6)>0 \quad \therefore x<-1 \text{ 또는 } x>6$$

$x^2+a^2<(a^2-a+1)x+a$ 에서

$$x^2-(a^2-a+1)x+a^2-a<0$$

$$(x-1)(x-a^2+a)<0$$

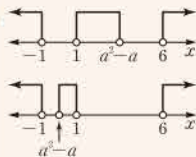
이때 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면

$$-1\leq a^2-a\leq 6$$

$$-1\leq a^2-a \text{에서 } a^2-a+1\geq 0$$

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq 0$$

즉 모든 실수 a 에 대하여 성립한다.



$p\leq x\leq q$ 에서 부등식 $f(x)\geq 0$ 이 항상 성립하려면 $p\leq x\leq q$ 에서 $(f(x)$ 의 최솟값) ≥ 0 이어야 한다.

$$a^2-a\leq 6 \text{에서 } a^2-a-6\leq 0$$

$$(a+2)(a-3)\leq 0 \quad \therefore -2\leq a\leq 3$$

따라서 정수 a 는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다. 답 ②

19 $|x-1|(x-2)\geq 0$ 에서 $|x-1|\geq 0$ 이므로

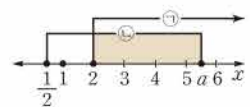
$$x=1 \text{ 또는 } x\geq 2 \quad \dots\dots ①$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 5개이므로 부등식 $(2x-1)(x-a)\leq 0$ 의 해는

$$\frac{1}{2}\leq x\leq a \quad \dots\dots ②$$

이어야 하고 오른쪽 그림에서

$$5\leq a<6$$



답 ④

20 $f(x)g(x)<0$ 에서

$$f(x)<0, g(x)>0 \text{ 또는 } f(x)>0, g(x)<0$$

이때 $f(x)\leq g(x)$ 이므로 $f(x)<0, g(x)>0$

$$f(x)<0 \text{에서 } -1<x<2 \quad \dots\dots ①$$

$$g(x)>0 \text{에서 } -2<x<1 \quad \dots\dots ②$$

①, ②의 공통부분을 구하면 $-1<x<1$

따라서 정수 x 는 0의 1개이다. 답 ①

21 두 이차방정식

$$x^2+(a-2)x+2-a=0, \quad \dots\dots ①$$

$$x^2+(a+2)x+2a+1=0 \quad \dots\dots ②$$

의 판별식을 각각 D_1, D_2 라 하면

$$D_1=(a-2)^2-4(2-a)=a^2-4$$

$$=(a+2)(a-2)$$

$$D_2=(a+2)^2-4(2a+1)=a^2-4a$$

$$=a(a-4)$$

(i) ①은 실근, ②은 허근을 가질 때,

$$D_1=(a+2)(a-2)\geq 0 \text{에서}$$

$$a\leq -2 \text{ 또는 } a\geq 2 \quad \dots\dots ③$$

$$D_2=a(a-4)<0 \text{에서}$$

$$0<a<4 \quad \dots\dots ④$$

③, ④의 공통부분을 구하면 $2\leq a<4$

(ii) ①은 허근, ②은 실근을 가질 때,

$$D_1=(a+2)(a-2)<0 \text{에서}$$

$$-2<a<2 \quad \dots\dots ⑤$$

$$D_2=a(a-4)\geq 0 \text{에서}$$

$$a\leq 0 \text{ 또는 } a\geq 4 \quad \dots\dots ⑥$$

⑤, ⑥의 공통부분을 구하면 $-2<a\leq 0$

(i), (ii)에서 $-2<a\leq 0$ 또는 $2\leq a<4$

따라서 정수 a 는 -1, 0, 2, 3이므로 구하는 합은

$$-1+0+2+3=4$$

답 4

22 (i) $x+2a\leq x^2$, 즉 $x^2-x-2a\geq 0$ 에서

$$x^2-x-2a=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2a \quad \dots\dots ①$$

일품 BOX

$0 \leq x \leq 1$ 에서 ㉠은 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $-\frac{1}{4} - 2a$ 를 갖고, 주어진 부등식이 항상 성립하므로

$$-\frac{1}{4} - 2a \geq 0 \quad \therefore a \leq -\frac{1}{8} \quad \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $x^2 \leq 2x + 3b$, 즉 $x^2 - 2x - 3b \leq 0$ 에서

$$x^2 - 2x - 3b = (x-1)^2 - 1 - 3b \quad \cdots \textcircled{2}$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 ㉡은 $x=0$ 일 때 최댓값 $-3b$ 를 갖고, 주어진 부등식이 항상 성립하므로

$$-3b \leq 0 \quad \therefore b \geq 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

(i), (ii)에서 $b - 8a \geq 1$

따라서 $b - 8a$ 의 최솟값은 1이다.

$p \leq x \leq q$ 에서 부등식 $f(x) \leq 0$ 이 항상 성립하려면 $p \leq x \leq q$ 에서 $(f(x) \text{의 최댓값}) \leq 0$ 이어야 한다.

$a \leq -\frac{1}{8}$ 에서 $-8a \geq 1$ 이고 $b \geq 0$ 이므로 $b - 8a \geq 1$

답 1

채점 기준	비율
① a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
② b의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ b-8a의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

23 A 음료 한 잔의 가격을 $200x$ 원 인상하면 하루 판매량이 $4x$ 잔 줄어들므로 하루 판매액은

$$(2000 + 200x)(100 - 4x) \text{ (원)}$$

이고 하루 판매액이 24만 원 이상이라면

$$(2000 + 200x)(100 - 4x) \geq 240000$$

$$x^2 - 15x + 50 \leq 0, \quad (x-5)(x-10) \leq 0$$

$$\therefore 5 \leq x \leq 10 \quad \cdots \textcircled{1}$$

A 음료 한 잔의 가격을 $100x$ 원 인하하면 하루 판매량이 10잔 늘어나므로 하루 판매액은

$$(2000 - 100x)(100 + 10x) \text{ (원)}$$

이고 하루 판매액이 22만 원 이상이라면

$$(2000 - 100x)(100 + 10x) \geq 220000$$

$$x^2 - 10x + 20 \leq 0$$

$$\therefore 5 - \sqrt{5} \leq x \leq 5 + \sqrt{5} \quad \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $5 \leq x \leq 5 + \sqrt{5}$

따라서 자연수 x 는 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$$5 + 6 + 7 = 18 \quad \text{답 18}$$

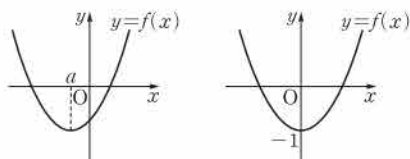
24 $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 + a - 1 = (x-a)^2 + a - 1$ 이라 하면 이차방정식 $f(x) = 0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (a^2 + a - 1) \geq 0$$

$$-a + 1 \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$$

(i) $a \leq 0$ 일 때,

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주어진 이차방정식은 항상 음의 실근을 갖는다.



(ii) $0 < a \leq 1$ 일 때,

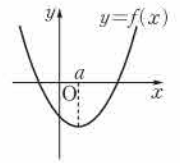
주어진 이차방정식이 음의 실근을 가지려면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $f(0) < 0$ 에서

$$a^2 + a - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{그런데 } 0 < a \leq 1 \text{이므로 } 0 < a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{답 } a < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$



25 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(a-1)\}^2 - 4(a-3)$$

$$= a^2 - 6a + 13 = (a-3)^2 + 4 > 0$$

이므로 모든 실수 a 에 대하여 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄱ. $\alpha = -\beta$ 이면 $\alpha + \beta = a - 1$ 에서

$$0 = a - 1 \quad \therefore a = 1$$

ㄴ. α 와 β 의 부호가 서로 다르면 $\alpha\beta = a - 3$ 에서

$$a - 3 < 0 \quad \therefore a < 3$$

ㄷ. (i) $\alpha > 0, \beta > 0$ 일 때,

$$\alpha + \beta = a - 1 > 0 \quad \therefore a > 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = a - 3 > 0 \quad \therefore a > 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a > 3$

(ii) $\alpha < 0, \beta < 0$ 일 때,

$$\alpha + \beta = a - 1 < 0 \quad \therefore a < 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\alpha\beta = a - 3 > 0 \quad \therefore a > 3 \quad \cdots \textcircled{4}$$

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 a 의 값은 없다.

(i), (ii)에서 $a > 3$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

26 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 이 이차방정식이 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = \{-(k+1)\}^2 - (k+3) \geq 0$$

$$k^2 + k - 2 \geq 0, \quad (k+2)(k-1) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -2 \text{ 또는 } k \geq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\alpha + \beta = 2(k+1), \alpha\beta = k+3$ 에서

ㄱ. $\alpha > 0, \beta > 0$ 이면 $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ 이므로

$$2(k+1) > 0 \quad \therefore k > -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$k+3 > 0 \quad \therefore k > -3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $k \geq 1$

ㄴ. $\alpha > 0, \beta < 0$ 이면 $\alpha\beta < 0$ 이므로

$$k+3 < 0 \quad \therefore k < -3 \quad \cdots \textcircled{4}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $k < -3$

ㄷ. $\alpha < -\beta, \beta > 0$ 이면 $\alpha < 0$

즉 $\alpha + \beta < 0, \alpha\beta < 0$ 이므로

$$2(k+1) < 0 \quad \therefore k < -1 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$\beta > 0$ 에서 $-\beta < 0$ 이므로 $\alpha < -\beta < 0$

$$k+3 < 0 \quad \therefore k < -3 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

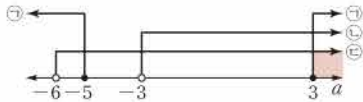
⑦, ⑩, ⑪의 공통부분을 구하면 $k < -3$
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

27 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$D_1 = (-a)^2 - 4b = 0 \quad \therefore b = \frac{1}{4}a^2$$

이차방정식 $x^2 - (a+3)x + a+6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라
 하고, 판별식을 D_2 라 하면 이 이차방정식이 두 양의 실근
 을 가지므로

- (i) $D_2 = \{-(a+3)\}^2 - 4(a+6) \geq 0$ 에서
 $a^2 + 2a - 15 \geq 0, \quad (a+5)(a-3) \geq 0$
 $\therefore a \leq -5$ 또는 $a \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
- (ii) $\alpha + \beta = a+3 > 0$ 에서 $a > -3 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
- (iii) $\alpha\beta = a+6 > 0$ 에서 $a > -6 \quad \dots\dots \textcircled{C}$



이상에서 공통부분을 구하면 $a \geq 3$
 따라서 $a-b = a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a-2)^2 + 1$ 이므로 $a \geq 3$
 에서 $a-b$ 는 $a=3$ 일 때 최댓값 $\frac{3}{4}$ 을 갖는다. 답 $\frac{3}{4}$

28 $f(x) = x^2 - 2ax - a$ 라 하고, 이차방정식 $f(x) = 0$
 의 판별식을 D 라 하면

- (i) $\frac{D}{4} = (-a)^2 - (-a) > 0$ 에서
 $a^2 + a > 0, \quad a(a+1) > 0$
 $\therefore a < -1$ 또는 $a > 0$
- (ii) $f(-1) = 1 + 2a - a > 0$ 에서 $a > -1$
- (iii) $f(1) = 1 - 2a - a > 0$ 에서 $a < \frac{1}{3}$
- (iv) $-1 < -\frac{2a}{2} < 1$ 에서 $-1 < a < 1$
- 이상에서 $0 < a < \frac{1}{3}$ 답 $0 < a < \frac{1}{3}$

29 $f(x) = 2(x-b)(x-c) - (x-a)^2$ 이라 하면

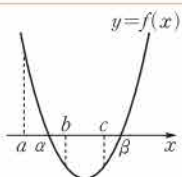
$$f(a) = 2(a-b)(a-c) > 0$$

$$f(b) = -(b-a)^2 < 0$$

$$f(c) = -(c-a)^2 < 0$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의
 개형은 오른쪽 그림과 같으므로

$$a < a < b < c < \beta \quad \text{답 ④}$$



$a < b < c$ 이므로
 $a-b < 0, a-c < 0$
 $\therefore (a-b)(a-c) > 0$

30 $f(x) = x^2 + 4mx + m^2 + 3$ 이라 하고, 이차방정식
 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

- (i) $\frac{D}{4} = (2m)^2 - (m^2 + 3) \geq 0$ 에서
 $m^2 - 1 \geq 0, \quad (m+1)(m-1) \geq 0$

$$\therefore m \leq -1 \text{ 또는 } m \geq 1$$

- (ii) $f(-2) = 4 - 8m + m^2 + 3 \leq 0$ 에서
 $m^2 - 8m + 7 \leq 0, \quad (m-1)(m-7) \leq 0$
 $\therefore 1 \leq m \leq 7$

- (iii) $f(0) = m^2 + 3 > 0$ 이므로 m 은 모든 실수이다.

이상에서 $1 \leq m \leq 7$

따라서 정수 m 은 1, 2, 3, ..., 7의 7개이다. 답 ⑤

31 $f(x) = (a+1)x^2 + 4x - a + 1$ 이라 하고, 이차방정
 식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (a+1)(-a+1) = a^2 + 3 > 0$$

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는
 다. 답 ①

- (i) $f(0) = 0$ 일 때,

$$f(0) = -a + 1 = 0 \text{이므로 } a = 1$$

주어진 이차방정식은 $2x^2 + 4x = 0$ 이므로

$$x(x+2) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서 오직 한 개의 실근을 갖는다.

- (ii) $f(2) = 0$ 일 때,

$$f(2) = 3a + 13 = 0 \text{이므로 } a = -\frac{13}{3}$$

주어진 이차방정식은 $-\frac{10}{3}x^2 + 4x + \frac{16}{3} = 0$ 이므로

$$5x^2 - 6x - 8 = 0, \quad (5x+4)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{4}{5} \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서 오직 한 개의 실근을 갖는다.

- (iii) $f(0)f(2) < 0$ 일 때,

$$(-a+1)(3a+13) < 0$$

$$(a-1)(3a+13) > 0$$

$$\therefore a < -\frac{13}{3} \text{ 또는 } a > 1$$

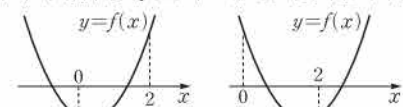
이상에서 $a \leq -\frac{13}{3}$ 또는 $a \geq 1$ 답 ④

$$\text{답 } a \leq -\frac{13}{3} \text{ 또는 } a \geq 1$$

채점 기준	비율
① 주어진 이차방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.	20%
② $f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$ 일 때의 a 의 값이 조건을 만족시키는지 알 수 있다.	30%
③ $f(0)f(2) < 0$ 일 때 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
④ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

💡 비밀노트

$f(0) \neq 0, f(2) \neq 0$ 일 때, 주어진 조건을 만족시키려면 $a+1 > 0$ 인 경우에 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같아야 한다.



따라서 $f(0), f(2)$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 (iii)에서 부등식 $f(0)f(2) < 0$ 을 푼다.

내신 · 수능
1등급을 결정하는 **사고력 통합 문제** 본책 81쪽

01 $f(x) = (x-p)^2 + q$ 라 하면 조건 ㉞에 의하여 $f(2) = 0$ 이므로

$$(2-p)^2 + q = 0 \quad \therefore p^2 - 4p + 4 + q = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f(0) = a$ 이므로 $p^2 + q = a \quad \dots\dots \textcircled{2}$

㉞을 ㉠에 대입하면

$$a - 4p + 4 = 0 \quad \therefore p = \frac{a+4}{4} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이때 조건 ㉞에서 $1 \leq p \leq 2$ 이므로

$$1 \leq \frac{a+4}{4} \leq 2, \quad 4 \leq a+4 \leq 8 \quad \therefore 0 \leq a \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

한편 ㉞을 ㉡에 대입하면 $\left(\frac{a+4}{4}\right)^2 + q = a$

$$\therefore q = -\frac{a^2 - 8a + 16}{16} = -\frac{(a-4)^2}{16}$$

이때 조건 ㉞에서 $-\frac{9}{4} \leq q \leq -\frac{1}{4}$ 이므로

$$-\frac{9}{4} \leq -\frac{(a-4)^2}{16} \leq -\frac{1}{4} \quad 4 \leq (a-4)^2 \leq 36, \quad 2 \leq |a-4| \leq 6$$

$$-6 \leq a-4 \leq -2 \text{ 또는 } 2 \leq a-4 \leq 6 \quad \therefore -2 \leq a \leq 2 \text{ 또는 } 6 \leq a \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

㉞, ㉡의 공통범위를 구하면

$$0 \leq a \leq 2$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2의 3개이다. **답 3**

02 $f(x) = (x+1)(x-5) = (x-2)^2 - 9$

오른쪽 그림과 같이 함수

$y = f(x)$ 의 그래프는 직선

$x = 2$ 에 대하여 대칭이고 부등

식 $f(x) < f(a)$ 의 해가

$-3 < x < a$ 이므로 $y = f(x)$

의 그래프와 직선 $y = f(a)$ 가

만나는 두 점의 x 좌표는 -3 ,

a 이다.

$$\text{즉 } 2 - (-3) = a - 2 \text{이므로 } a = 7$$

부등식 $f(x) < a$ 에서 $(x+1)(x-5) < 7$

$$x^2 - 4x - 12 < 0, \quad (x+2)(x-6) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 6$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, \dots, 5$ 이므로 구하는 합은

$$-1 + 0 + 1 + \dots + 5 = 14 \quad \text{답 14}$$

03 $z = a + bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면

$$z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

z^2 의 실수부분이 $3x^2 - 2x - 1$ 이므로

$$a^2 - b^2 = 3x^2 - 2x - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$z + \bar{z}^2 < 0$ 에서

$$(a^2 - b^2 + 2abi) + (a^2 - b^2 - 2abi) < 0$$

$m \leq |x| \leq n$ 이면
 $-n \leq x \leq -m$
 또는 $m \leq x \leq n$
 (단, $0 < m < n$)

$a = 60$ 이면 $b = 50$ 이므로
 $a > b$
 $\therefore a \neq 6$

직선 $x = 2$ 로부터
 $y = f(x)$ 의 그래프와 직
 선 $y = f(a)$ 의 두 교점까
 지의 거리가 같다.

$$\bar{z}^2 = \bar{z}^2$$

$$2(a^2 - b^2) < 0, \quad a^2 - b^2 < 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 < 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$(3x+1)(x-1) < 0 \quad \therefore -\frac{1}{3} < x < 1$$

따라서 $\alpha = -\frac{1}{3}, \beta = 1$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{4}{3} \quad \text{답 4}$$

04 세 지점 A, B, C를 B를 원점으로 하는 수직선 위
 에 놓고 1 km를 1로 생각하면

$$A(-10), B(0), C(20)$$

보관 창고의 좌표를 t 라 하면 보관 창고는 B와 C 사이에
 있으므로

$$0 < t < 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 하루에 드는 총운송비는

$$200(t+10)^2 + 100t^2 + 300(20-t)^2 \text{ (원)}$$

이므로 하루에 드는 총운송비가 155000원 이하하려면

$$200(t+10)^2 + 100t^2 + 300(20-t)^2 \leq 155000$$

$$3t^2 - 40t - 75 \leq 0, \quad (3t+5)(t-15) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{5}{3} \leq t \leq 15 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0 < t \leq 15$

따라서 보관 창고는 B 지점에서 최대 15 km 떨어진 지
 점까지 지을 수 있다. **답 4**

05 빗변이 아닌 두 변의 길이를 a, b ($a < b$)라 하면 조
 건 ㉞에 의하여

$$a + b = 11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 ㉞에 의하여 $\frac{1}{2}ab > 14$

$$\therefore ab > 28 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠에서 $b = 11 - a$ 이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$a(11-a) > 28, \quad a^2 - 11a + 28 < 0$$

$$(a-4)(a-7) < 0 \quad \therefore 4 < a < 7$$

그런데 조건 ㉞에서 a 는 자연수이므로 $a = 5$

$a = 5$ 를 ㉠에 대입하면 $b = 6$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} \quad \text{답 1}$$

06 $f(x) = x^2 + (t-2)x + 2t$ 라

하면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같아야 한다.

(i) $f(1) = 1 + t - 2 + 2t \leq 0$ 에서

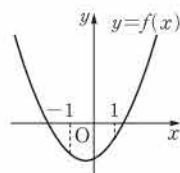
$$3t - 1 \leq 0 \quad \therefore t \leq \frac{1}{3}$$

(ii) $f(-1) = 1 - t + 2 + 2t \leq 0$ 에서

$$t + 3 \leq 0 \quad \therefore t \leq -3$$

(i), (ii)에서 $t \leq -3$ 이므로 실수 t 의 최댓값은 -3 이다.

답 1



07 $\begin{cases} x+y+2xy=4k \\ x+y-xy=k-3 \end{cases}$ ㉠
..... ㉡

㉠-㉡을 하면

$$3xy=3k+3 \quad \therefore xy=k+1$$

$xy=k+1$ 을 ㉡에 대입하면

$$x+y-(k+1)=k-3$$

$$\therefore x+y=2k-2$$

따라서 x, y 는 이차방정식 $t^2-2(k-1)t+k+1=0$ 의 두 근이므로 이 이차방정식이 실근을 갖지 않으려면 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = \{-(k-1)\}^2 - (k+1) < 0$$

$$k^2-3k < 0, \quad k(k-3) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 3$$

즉 정수 k 는 1, 2이므로 구하는 합은

$$1+2=3$$

답 ③

08 $x^2+2ax-3a^2 \leq 0$ 에서

$$(x+3a)(x-a) \leq 0$$

$$\therefore -3a \leq x \leq a$$

$x^2-2ax-3a^2 < 0$ 에서

$$(x+a)(x-3a) < 0$$

$$\therefore -a < x < 3a$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-a < x \leq a$$

(i) $a=n$ (n 은 자연수)일 때,

㉢을 만족시키는 정수 x 는

$$-n+1, -n+2, -n+3, \dots, -2, -1, 0,$$

$$1, 2, \dots, n-1, n$$

$$\therefore f(a)=2n=2a, S(a)=n=a$$

(ii) $n < a < n+1$ (n 은 음이 아닌 정수)일 때,

㉢을 만족시키는 정수 x 는

$$-n, -n+1, -n+2, \dots, -2, -1, 0,$$

$$1, 2, \dots, n-1, n$$

$$\therefore f(a)=2n+1, S(a)=0$$

$f(a)=24$ 이면 $24=2 \cdot 12$ 이므로 (i)에 의하여

$$p=12$$

$f(a)=37$ 이면 $37=2 \cdot 18+1$ 이므로 (ii)에 의하여

$$q=0$$

$$\therefore p+q=12$$

답 12

09 주어진 연립부등식의 해가 $-1 \leq x \leq 3$ 또는 $x=5$ 이려면

$$x^2+ax+b=(x-3)(x-5) \geq 0,$$

$$x^2+cx+d=(x+1)(x-5) \leq 0$$

이어야 한다.

$$x^2+ax+b=x^2-8x+15 \text{에서} \quad a=-8, b=15$$

$$x^2+cx+d=x^2-4x-5 \text{에서} \quad c=-4, d=-5$$

$$\therefore ad-bc=-8 \cdot (-5)-15 \cdot (-4)=100$$

답 100

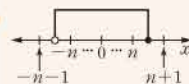
n 은 자연수이므로
 $-n < n+1$

n 은 자연수이므로
 $-3n < n^2$

$n \neq 10$ 이므로 $n \geq 20$ 에서
 $n+1 < n^2$

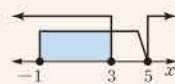
$\frac{\beta}{a}$ 를 한 문자로 생각하여
해가 $\frac{1}{2} \leq \frac{\beta}{a} \leq 2$ 인 이차
부등식을 세운다.

a 는 실수이므로
 $a^2 \geq 0$
이때 $a \neq 0$ 에서 $a \neq 0$ 이므로
 $a^2 > 0$



$$a=12$$

$$18 < a < 19$$



서로 다른 세 양수 a, b, c
에 대하여
 $a+b+c > 0,$
 $(a-b)^2 > 0,$
 $(b-c)^2 > 0,$
 $(c-a)^2 > 0$

10 $x^2-x-n-n^2 \geq 0$ 에서
 $(x+n)(x-n-1) \geq 0$
 $\therefore x \leq -n$ 또는 $x \geq n+1$ ㉠

$x^2+n(3-n)x-3n^3 < 0$ 에서
 $(x+3n)(x-n^2) < 0$

$$\therefore -3n < x < n^2$$

..... ㉡

오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-3n < x \leq -n$$

$$\text{또는 } n+1 \leq x < n^2$$

즉 정수 x 의 개수는

$$\{-n-(-3n)\} + \{n^2-(n+1)\} = n^2+n-1$$

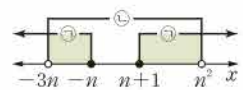
따라서 $n^2+n-1 > 55$ 에서

$$n^2+n-56 > 0, \quad (n+8)(n-7) > 0$$

$$\therefore n > 7 \quad (\because n \geq 2)$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

답 8



11 주어진 이차방정식이 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - a \geq 0 \quad \therefore a \leq 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\beta}{a} \leq 2 \text{이므로} \quad \left(\frac{\beta}{a} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\beta}{a} - 2\right) \leq 0$$

$$\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{\beta}{a} + 1 \leq 0$$

위의 식의 양변에 $2a^2$ 을 곱하여 정리하면

$$2a^2 - 5a\beta + 2\beta^2 \leq 0$$

$$2\{(a+\beta)^2 - 2a\beta\} - 5a\beta \leq 0$$

$$\therefore 2(a+\beta)^2 - 9a\beta \leq 0$$

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=4, \quad a\beta=a$$

이므로

$$32-9a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{32}{9} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{32}{9} \leq a \leq 4$

따라서 구하는 정수 a 의 값은 4이다.

답 ⑤

내신 · 수능

1등급을 공하는 실전 마무리 문제

본책 83쪽

01 <전략> 두 수의 차의 부호를 구하여 세 수 사이의 대소 관계를 조사한다.

[풀이] (i) $A-B$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

$$- (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$$> 0$$

$$\therefore A > B$$

(ii) $C - A$

$$\begin{aligned} &= 3(a^3 + b^3 + c^3) - (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c) \\ &= (a^3 + b^3 - a^2b - b^2a) + (b^3 + c^3 - b^2c - c^2b) \\ &\quad + (c^3 + a^3 - c^2a - a^2c) \\ &= \{a^2(a-b) - b^2(a-b)\} + \{b^2(b-c) - c^2(b-c)\} \\ &\quad + \{c^2(c-a) - a^2(c-a)\} \\ &= (a-b)^2(a+b) + (b-c)^2(b+c) + (c-a)^2(c+a) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore C > A$$

(i), (ii)에서 $B < A < C$

답 ③

02 [전략] 먼저 부등식의 해가 주어진 해와 일치하기 위한 a, b 의 조건을 찾는다.

[풀이] $ax + x - b > 0$ 에서 $(a+1)x > b$
이 부등식의 해가 $x < 1$ 이므로 $a+1 < 0$

$$\therefore x < \frac{b}{a+1}$$

따라서 $\frac{b}{a+1} = 1$ 이므로 $b = a+1$ ㉠

$$\begin{aligned} ax - bx - b < 0 \text{에서 } (a-b)x < b \\ \{a - (a+1)\}x < a+1, \quad -x < a+1 \\ \therefore x > -a-1 \end{aligned}$$

이때 a 가 정수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x 의 최솟값은 $-a$ 이다.

$$\text{즉 } -a = 4 \text{이므로 } a = -4$$

$$a = -4 \text{를 ㉠에 대입하면 } b = -3$$

$$\therefore a+b = -7$$

답 ④

03 [전략] 두 연립부등식의 해를 각각 구하여 해가 같아지도록 하는 a, b 의 값을 구한다.

[풀이] $2x - 5 < x + 1$ 에서 $x < 6$

$10 - x < x + a$ 에서

$$-2x < a - 10 \quad \therefore x > \frac{10-a}{2}$$

이때 연립부등식 $\begin{cases} 2x-5 < x+1 \\ 10-x < x+a \end{cases}$ 의 해가 존재하므로 그

$$\text{해는 } \frac{10-a}{2} < x < 6 \quad \dots\dots ㉠$$

$3x + b < 2 - x$ 에서

$$4x < 2 - b \quad \therefore x < \frac{2-b}{4}$$

$x + 3 < 2x + 1$ 에서 $x > 2$

이때 연립부등식 $\begin{cases} 3x+b < 2-x \\ x+3 < 2x+1 \end{cases}$ 의 해가 존재하므로 그

$$\text{해는 } 2 < x < \frac{2-b}{4} \quad \dots\dots ㉡$$

두 연립부등식의 해가 서로 같으므로 ㉠, ㉡에서

$$\frac{10-a}{2} = 2, \quad 6 = \frac{2-b}{4} \quad \therefore a = 6, \quad b = -22$$

$$\therefore a+b = -16$$

답 ①

04 [전략] 먼저 주어진 일차부등식의 해를 이용하여 a 의 값의 범위를 구한다.

[풀이] 일차부등식 $(a-4)x > a-4$ 의 해가 $x < 1$ 이므로

$$a-4 < 0 \quad \therefore a < 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$(a+2)x + 3a < (a+4)(x-1) + 6$ 에서

$$-2x < -4a + 2 \quad \therefore x > 2a - 1 \quad \dots\dots ㉡$$

$ax + 3a + 4 > (a+1)x + 4$ 에서

$$-x > -3a \quad \therefore x < 3a \quad \dots\dots ㉢$$

$\therefore a=1$ 이면 ㉠에서 $x > 1$, ㉢에서 $x < 3$ 이므로 주어진 연립부등식의 해는 $1 < x < 3$

따라서 정수 x 는 2의 1개이므로 $f(1) = 1$

$\therefore a=0$ 이면 ㉠에서 $x > -1$, ㉢에서 $x < 0$ 이므로 주어진 연립부등식의 해는 $-1 < x < 0$

따라서 정수 x 는 존재하지 않으므로 $f(0) = 0$

즉 $a=0$ 일 때 $f(a) = 0$ 이지만 $a > -1$ 이다.

$\therefore$ 주어진 연립부등식의 해가 존재하려면 ㉠, ㉢에서

$$2a - 1 < 3a, \text{ 즉 } a > -1$$

이어야 한다. 이때 연립부등식의 해는

$$2a - 1 < x < 3a \text{이고, } a \text{가 정수이면}$$

$$f(a) = 3a - (2a - 1) - 1 = a$$

즉 $1 < f(a) < 10 - a$ 에서

$$1 < a < 10 - a \quad \therefore 1 < a < 5$$

그런데 ㉠에서 $a < 4$ 이므로 $1 < a < 4$

따라서 정수 a 는 2, 3의 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

비밀노트

㉠에서 $f(a) = 0$ 인 경우를 연립부등식의 해가 없는 경우라고 생각하지 않도록 주의한다. 예를 들어 $a=0$ 이면 연립부등식의 해는 $-1 < x < 0$ 으로 존재하지만 부등식을 만족시키는 정수 x 는 존재하지 않는다.

05 [전략] 선분의 길이를 x 에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 조건을 이용하여 부등식을 세운다.

[풀이] 가로에 있는 선분의 길이의 합은

$$2x \cdot 3 = 6x$$

$\overline{EB} = 8 - x$ 이므로 세로에 있는 선분의 길이의 합은

$$8 \cdot 3 + (8 - x) = 32 - x$$

$$6x + (32 - x) \leq 62 \text{이므로}$$

$$5x + 32 \leq 62 \quad \therefore x \leq 6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\overline{BI} = \overline{JC} = \overline{EB} = 8 - x \text{이므로}$$

$$\overline{IJ} = 2x - 2(8 - x) = 4x - 16$$

직사각형 $GIJH$ 의 둘레의 길이는

$$2\{(4x - 16) + (8 - x)\} = 6x - 16$$

이므로

$$6x - 16 > 3x \quad \therefore x > \frac{16}{3} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$\frac{16}{3} < x \leq 6$$

답 ④

06 [전략] $|x| < a$ ($a > 0$)이면 $-a < x < a$ 이다.

[풀이] $a|x| - a^2 < b|x| - b^2$ 에서

$$(a-b)|x| < a^2 - b^2$$

$$(a-b)|x| < (a+b)(a-b)$$

$a > b > 0$ 에서 $a-b > 0$ 이므로 양변을 $a-b$ 로 나누면

$$|x| < a+b$$

$$\therefore -a-b < x < a+b$$

답 ②

07 [전략] $x < 0$ 일 때와 $x \geq 0$ 일 때로 나누어 부등식의 해를 구한다.

[풀이] (i) $x < 0$ 일 때,

$\langle x \rangle = -2x$ 이므로 주어진 부등식은

$$4x^2 + 2x - 2 \leq 0, \quad 2x^2 + x - 1 \leq 0$$

$$(x+1)(2x-1) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $-1 \leq x < 0$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$\langle x \rangle = 3x$ 이므로 주어진 부등식은

$$9x^2 - 3x - 2 \leq 0, \quad (3x+1)(3x-2) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

따라서 $a = -1, \beta = \frac{2}{3}$ 이므로 $a + \beta = -\frac{1}{3}$ [답 ③]

1등급 비밀노트

$$\langle x \rangle^2 - \langle x \rangle - 2 \leq 0 \text{에서} \quad (\langle x \rangle + 1)(\langle x \rangle - 2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq \langle x \rangle \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $x < 0$ 일 때와 $x \geq 0$ 일 때로 나누어 부등식 ①의 해를 구할 수도 있다.

08 [전략] 주어진 부등식을 $f(x) > 0$ 꼴로 변형한 후 $f(x)$ 를 인수분해 한다.

[풀이] ①에서

$$(a^2 - b^2)x^2 - 4(a^2 - b^2)x + 3(a^2 - b^2) > 0$$

$$(a^2 - b^2)(x^2 - 4x + 3) > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

ㄱ. $|a| < |b|$ 이면 $a^2 < b^2$ 이므로 $a^2 - b^2 < 0$

②에서 $x^2 - 4x + 3 < 0$

$$(x-1)(x-3) < 0 \quad \therefore 1 < x < 3$$

ㄴ. $a = b$ 이면 ②에서

$$0 \cdot (x^2 - 4x + 3) > 0$$

이므로 부등식 ②의 해는 없다.

ㄷ. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 이고, $a+b < 0, b > 0$ 이면

$$a-b = a+b-2b < 0$$

이므로 $(a+b)(a-b) > 0$

②에서 $x^2 - 4x + 3 > 0$

$$(x-1)(x-3) > 0 \quad \therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 3$$

$$a=b \text{이면 } a^2 - b^2 = 0$$

$$a+b < 0, -2b < 0 \text{ 이므로 } a+b-2b < 0$$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[답 ③]

09 [전략] 부등식의 해를 이용하여 a, β 에 대한 식을 구한 후 a, b, c 사이의 관계식을 찾는다.

[풀이] 해가 $a < x < \beta$ 이고 x^2 의 계수가 2인 이차부등식은

$$2(x-a)(x-\beta) < 0$$

$$\therefore 2x^2 - 2(a+\beta)x + 2a\beta < 0$$

이 부등식이 $2x^2 - 4x + 1 < 0$ 과 같으므로

$$a+\beta=2, \quad a\beta=\frac{1}{2}$$

부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{a}$ 이므로

$$a > 0$$

해가 $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{a}$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x - \frac{1}{a}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) < 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{a+\beta}{a\beta}x + \frac{1}{a\beta} < 0$$

양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - \frac{a(a+\beta)}{a\beta}x + \frac{a}{a\beta} < 0$

이 부등식이 $ax^2 + bx + c < 0$ 과 같으므로

$$-\frac{a(a+\beta)}{a\beta} = b, \quad \frac{a}{a\beta} = c$$

$$\therefore b = -4a, \quad c = 2a$$

$$\frac{a+\beta}{a\beta} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

이차부등식 $(a+b)x^2 + (b+c)x + 4c > 0$, 즉

$-3ax^2 - 2ax + 8a > 0$ 에서 $a > 0$ 이므로

$$3x^2 + 2x - 8 < 0, \quad (x+2)(3x-4) < 0$$

$$\therefore -2 < x < \frac{4}{3}$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

[답 ③]

10 [전략] 먼저 이차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 이용하여 a 의 값의 범위를 구한다.

[풀이] 이차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (2a^2 + 6a) > 0$$

$$a^2 + 6a < 0, \quad a(a+6) < 0$$

$$\therefore -6 < a < 0$$

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 두 점 A, B 사이의 거리는 $|\beta - \alpha|$ 이고 이차방정식 $f(x) = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta = 2a, \quad a\beta = 2a^2 + 6a$$

$$\therefore (\beta - \alpha)^2 = (a + \beta)^2 - 4a\beta$$

$$= (2a)^2 - 4(2a^2 + 6a)$$

$$= -4(a+3)^2 + 36$$

$-6 < a < 0$ 에서 두 점 A, B 사이의 거리의 최댓값은

$a = -3$ 일 때

$$|\beta - \alpha| = \sqrt{36} = 6$$

따라서 $m=6, p=-3$ 이므로

$$m+p=3$$

답 ③

11 [전략] 먼저 주어진 부등식을 한 문자에 대한 내림차순으로 정리한다.

[풀이] 주어진 부등식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 + 2(2y+5)x + 4y^2 + ay + b > 0$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2 + 2(2y+5)x + 4y^2 + ay + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2y+5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$$

$$\therefore (20-a)y < b-25$$

이 부등식이 모든 실수 y 에 대하여 성립해야 하므로

$$20-a=0, b-25 > 0$$

$$\therefore a=20, b > 25$$

이때 b 는 정수이므로 $a+b$ 의 최솟값은

$$20+26=46$$

답 ②

12 [전략] 두 부등식의 해를 각각 구하여 수직선 위에 나타낸 후 공통부분이 존재하지 않도록 하는 a, b 의 조건을 구한다.

[풀이] $x^2 - 2ax + a^2 - 4 < 0$ 에서

$$x^2 - 2ax + (a+2)(a-2) < 0$$

$$(x-a+2)(x-a-2) < 0$$

$$\therefore a-2 < x < a+2$$

..... ㉠

$x^2 - 2x + 1 - b^2 \leq 0$ 에서

$$x^2 - 2x + (1+b)(1-b) \leq 0$$

$$(x-1+b)(x-1-b) \leq 0$$

$$\therefore 1-b \leq x \leq 1+b$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않아야 하므로 오른쪽 그림에서

$$1+b \leq a-2$$

$$\therefore a-b \geq 3$$

따라서 $a-b$ 의 최솟값은 3이다.

답 ③

13 [전략] 두 점 A, B의 좌표를 k 를 이용하여 나타낸 후 $g(k)$ 를 구한다.

[풀이] $f(0)=k+2$ 이므로 $A(0, k+2)$

점 B의 y 좌표가 $k+2$ 이므로 $k+2 = -x^2 + 4kx + k+2$ 에서

$$x^2 - 4kx = 0, \quad x(x-4k) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4k$$

즉 $B(4k, k+2)$ 이므로

$$g(k) = \overline{AB} \cdot \overline{OA} = 4k(k+2) = 4k^2 + 8k$$

$$32 \leq g(k) \leq 96 \text{에서} \quad 32 \leq 4k^2 + 8k \leq 96$$

(i) $32 \leq 4k^2 + 8k$ 에서

$$k^2 + 2k - 8 \geq 0, \quad (k+4)(k-2) \geq 0$$

$$\therefore k \geq 2 \quad (\because k > 0)$$

(ii) $4k^2 + 8k \leq 96$ 에서

$$k^2 + 2k - 24 \leq 0, \quad (k+6)(k-4) \leq 0$$

$$\therefore 0 < k \leq 4 \quad (\because k > 0)$$

(i), (ii)에서 $2 \leq k \leq 4$

따라서 자연수 k 는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$2+3+4=9$$

답 ④

14 [전략] 이차방정식의 서로 다른 두 실근이 모두 음수일 조건을 이용하여 먼저 a 의 값의 범위를 구한다.

[풀이] 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하고, 두 근을 α, β ($\alpha < \beta < 0$)라 하자.

ㄱ. (i) $\frac{D}{4} = \{-(a-1)\}^2 - (3a+7) > 0$ 에서

$$a^2 - 5a - 6 > 0, \quad (a+1)(a-6) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 6$$

(ii) $\alpha + \beta = 2(a-1) < 0$ 에서 $a < 1$

(iii) $\alpha\beta = 3a+7 > 0$ 에서 $a > -\frac{7}{3}$

이상에서 공통부분을 구하면

$$-\frac{7}{3} < a < -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄴ. $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 3a+7$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=a-1$ 이고, ㉠에서

$$-\frac{10}{3} < a-1 < -2 \text{이므로} \quad -7 < a-1$$

$$\text{또 } f(-7) = 49 + 14(a-1) + 3a+7 = 17a+42 \text{이}$$

$$\text{고, ㉠에서 } \frac{7}{3} < 17a+42 < 25 \text{이므로}$$

$$f(-7) > 0$$

따라서 이차방정식 ㉠의 두 근은 모두 -7 보다 크다.

ㄷ. 이차방정식 $x^2 + ax + 3a = 0$ 의 두 근을 p, q 라 하면

$$pq = 3a < 0 \text{이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.}$$

이때 $p+q = -a > 0$ 이므로 양의 근은 음의 근의 절댓값보다 크다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

15 [전략] 이차방정식 $f(x)=0$ 에 대하여 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그려 $f(-1), f(a), f(2a)$ 의 부호를 찾는다.

[풀이] $f(x) = x^2 - ax + a - 1$ 이

라 하면 $-1 < a < \beta < 2a$ 이므로

오른쪽 그림에서

$$f(-1) > 0, f(a) < 0,$$

$$f(2a) > 0$$

$$f(-1) > 0 \text{에서} \quad 1+a+a-1 > 0$$

$$\therefore a > 0$$

..... ㉠

$$f(a) < 0 \text{에서} \quad a-1 < 0$$

$$\therefore a < 1$$

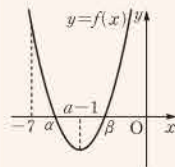
..... ㉡

$$f(2a) > 0 \text{에서} \quad 4a^2 - 2a^2 + a - 1 > 0$$

$$2a^2 + a - 1 > 0, \quad (a+1)(2a-1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

부등식 $mx < n$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립할 조건은
 $m=0, n>0$



위의 그림에서
 $-7 < a-1, f(-7) > 0$
이면 두 근은 모두 -7 보다
크다.

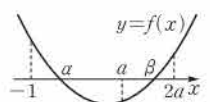
㉠에서 $-7 < 3a < -3$

㉡에서 $1 < -a < \frac{7}{3}$

b 는 양수이므로
 $1-b < 1+b$

a, b 는 양수이므로
 $a+2 \leq 1-b$ 이면
 $a+b \leq -1$ 이 되어 모순
이다.

$$\therefore 1-b < a+2$$



㉑, ㉒, ㉓의 공통부분을 구하면

$$\frac{1}{2} < a < 1$$

답 ②

16 [전략] 부등식을 정리한 후 a 의 값의 범위를 나누어 주어진 조건을 만족시키는 경우를 찾는다.

[풀이] 주어진 부등식에서 $-4 < |x+2| - a < 4$
 $\therefore a-4 < |x+2| < a+4$... ①

(i) $0 < a < 4$ 일 때,

$$\begin{aligned} a-4 < 0 \text{이므로 } 0 \leq |x+2| < a+4 \\ -a-4 < x+2 < a+4 \\ \therefore -a-6 < x < a+2 \end{aligned}$$

정수 x 의 최댓값이 5이려면

$$5 < a+2 \leq 6 \quad \therefore 3 < a \leq 4$$

그런데 $0 < a < 4$ 이므로 $3 < a < 4$... ②

(ii) $a=4$ 일 때,

$$\begin{aligned} 0 < |x+2| < 8 \text{에서} \\ -8 < x+2 < 0 \text{ 또는 } 0 < x+2 < 8 \\ \therefore -10 < x < -2 \text{ 또는 } -2 < x < 6 \end{aligned}$$

이때 정수 x 의 최댓값은 5이므로 조건을 만족시킨다.

... ③

(iii) $a > 4$ 일 때,

$$\begin{aligned} -a-4 < x+2 < -a+4 \\ \text{또는 } a-4 < x+2 < a+4 \\ \therefore -a-6 < x < -a+2 \text{ 또는 } a-6 < x < a+2 \end{aligned}$$

그런데 $a > 4$ 이므로 정수 x 의 최댓값은 5가 될 수 없다.

... ④

이상에서 구하는 a 의 값의 범위는

$$3 < a \leq 4$$

... ⑤

답 $3 < a \leq 4$

채점 기준	비율
① 주어진 부등식을 정리할 수 있다.	10%
② $0 < a < 4$ 일 때, 주어진 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
③ $a=4$ 일 때, 주어진 조건을 만족시킴을 알 수 있다.	20%
④ $a > 4$ 일 때, 주어진 조건을 만족시키지 않음을 알 수 있다.	30%
⑤ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	10%

17 [전략] 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 이용하여 a 에 대한 부등식을 세운다.

[풀이] 이차방정식 $ax^2 + (|a-2|+1)x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} D &= (|a-2|+1)^2 - 4a^2 > 0 \\ (|a-2|+1+2a)(|a-2|+1-2a) &> 0 \end{aligned}$$

이때 $a > 0$ 에서 $|a-2|+1+2a > 0$ 이므로

$$|a-2|+1-2a > 0$$

(i) $0 < a < 2$ 일 때,

$$-(a-2)+1-2a > 0, \quad -3a > -3$$

$a > 4$ 에서 $a+2 > 6$ 이므로 x 의 값의 범위에 5보다 큰 정수가 적어도 하나 포함된다.

$$\begin{aligned} 2a^2+3-(a^2-1) &= a^2+4 > 0 \\ \therefore 2a^2+3 > a^2-1 \end{aligned}$$

a 가 정수이므로 $2a, a^2-a$ 도 정수이다.

$$\therefore a < 1$$

그런데 $0 < a < 2$ 이므로 $0 < a < 1$

(ii) $a \geq 2$ 일 때,

$$a-2+1-2a > 0 \quad \therefore a < -1$$

그런데 $a \geq 2$ 이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 $0 < a < 1$

답 $0 < a < 1$

18 [전략] 손해를 보지 않기 위한 할인율과 이윤 사이의 대소 관계를 이용하여 n 에 대한 이차부등식을 세운다.

[풀이] 손해를 보지 않고 사탕을 판매하려면 할인율이 25% 이하가 되어야 하므로

$$\frac{(n-20)^2}{100} \leq 25 \quad \dots ①$$

$$(n-20)^2 \leq 2500, \quad n^2 - 40n - 2100 \leq 0$$

$$(n+30)(n-70) \leq 0 \quad \therefore -30 \leq n \leq 70$$

그런데 $n > 20$ 이므로 $20 < n \leq 70$... ②

따라서 손해를 보지 않으려면 고객이 한 번에 구입하는 사탕 A는 최대 70개로 제한해야 한다.

... ③

답 70개

채점 기준	비율
① n 에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	30%
② n 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ 한 번에 구입하는 사탕 A는 최대 몇 개로 제한해야 하는지 구할 수 있다.	20%

19 [전략] 주어진 이차부등식의 해가 $4 \leq x \leq 7$ 을 포함하도록 하는 a 의 값의 범위를 구한다.

[풀이] $x^2 - (3a^2+2)x + 2a^4 + a^2 - 3 \leq 0$ 에서

$$x^2 - (3a^2+2)x + (2a^2+3)(a^2-1) \leq 0$$

$$\{x - (2a^2+3)\} \{x - (a^2-1)\} \leq 0$$

$$\therefore a^2-1 \leq x \leq 2a^2+3 \quad \dots \dots \dots ①$$

따라서 $4 \leq x \leq 7$ 인 모든 실수 x 가 ①을 만족시키려면

$$a^2-1 \leq 4, \quad 7 \leq 2a^2+3$$

이어야 한다.

(i) $a^2-1 \leq 4$ 에서 $a^2 \leq 5$

$$\therefore -\sqrt{5} \leq a \leq \sqrt{5}$$

(ii) $2a^2+3 \geq 7$ 에서 $a^2 \geq 2$

$$\therefore a \leq -\sqrt{2} \text{ 또는 } a \geq \sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 공통부분을 구하면

$$-\sqrt{5} \leq a \leq -\sqrt{2} \text{ 또는 } \sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{5}$$

이므로 정수 a 는 $-2, 2$ 의 2개이다.

답 2

20 [전략] $a^2-a \geq 2a$ 일 때와 $a^2-a < 2a$ 일 때로 나누어 조건을 만족시키는 정수 a 의 값을 구한다.

[풀이] (i) $a^2-a \geq 2a$ 일 때,

$$\text{주어진 이차부등식의 해는 } 2a \leq x \leq a^2-a$$

이를 만족시키는 정수 x 의 개수가 5이므로

$$(a^2-a) - 2a + 1 = 5$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0, \quad (a+1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 4 \quad \dots \dots \dots ①$$

일품 BOX

한편 $a^2 - a \geq 2a$ 에서 $a^2 - 3a \geq 0$

$a(a-3) \geq 0$

$\therefore a \leq 0$ 또는 $a \geq 3$ ㉔

㉓, ㉔에서 $a = -1$ 또는 $a = 4$

(ii) $a^2 - a < 2a$ 일 때,

주어진 이차부등식의 해는 $a^2 - a \leq x \leq 2a$

이를 만족시키는 정수 x 의 개수가 5이므로

$2a - (a^2 - a) + 1 = 5, \quad a^2 - 3a + 4 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 = -7 < 0$

이므로 실근을 갖지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = -1$ 또는 $a = 4$

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$-1 + 4 = 3$

답 3

21 [전략] 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $px^2 + qx + r > 0$ 이 성립하려면 $p > 0, q^2 - 4pr < 0$ 이어야 함을 이용한다.

[풀이] 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 3 > 0$ 이 성립하므로

$a-2 > 0 \quad \therefore a > 2$ ㉑

이차방정식 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - 3(a-2) < 0$

$a^2 - 7a + 10 < 0, \quad (a-2)(a-5) < 0$

$\therefore 2 < a < 5$ ㉒

㉑, ㉒의 공통부분을 구하면 $2 < a < 5$ ㉓

$2|a+1| + 3|a-6| \leq 17$ 에서 $a+1 > 0, a-6 < 0$ 이므로

$2(a+1) - 3(a-6) \leq 17, \quad -a \leq -3$

$\therefore a \geq 3$

그런데 $2 < a < 5$ 이므로 $3 \leq a < 5$ ㉔

따라서 실수 a 의 최솟값은 3이다. ㉕

답 3

채점 기준	비율
① 주어진 이차부등식이 성립하는 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
② 조건을 모두 만족시키는 a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
③ a 의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

22 [전략] 두 부등식의 해를 각각 구한 후 a 의 값의 범위를 나누어 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

[풀이] $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ 에서 $(x+2)(x-5) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 5$

$x^2 - (a+3)x + 3a > 0$ 에서

$(x-3)(x-a) > 0$ ㉑

(i) $a < 3$ 일 때,

㉑의 해는 $x < a$ 또는 $x > 3$ 이므로 주어진 연립부등식

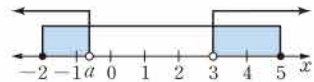
정수 x 는
 $-2, -1, 4, 5$

정수 x 는
 $-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5$

최소 5개에 포함되는 정수 x 는
 $-2, -1, 0, 1, 2$

을 만족시키는 정수 x 가 4개이려면 다음 그림에서

$-1 < a \leq 0$



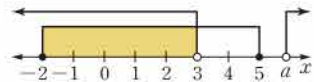
(ii) $a = 3$ 일 때,

㉑의 해는 $x \neq 3$ 인 모든 실수이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 7개이다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a > 3$ 일 때,

㉑의 해는 $x < 3$ 또는 $x > a$ 이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 다음 그림과 같이 최소 5개이다.



따라서 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $-1 < a \leq 0$

답 $-1 < a \leq 0$

23 [전략] a 를 포함하지 않은 두 부등식의 공통부분을 먼저 구한 후 나머지 부등식의 해와 공통부분이 없을 조건을 생각해 본다.

[풀이] $x^2 + x - 42 < 0$ 에서 $(x+7)(x-6) < 0$

$\therefore -7 < x < 6$ ㉑

$x^2 + 3x - 4 \geq 0$ 에서 $(x+4)(x-1) \geq 0$

$\therefore x \leq -4$ 또는 $x \geq 1$ ㉒

$(a^2 - 8) - (2a - 10) = a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 > 0$ 이므로 $a^2 - 8 > 2a - 10$

즉 부등식 $(x-2a+10)(x-a^2+8) < 0$ 의 해는

$2a-10 < x < a^2-8$ ㉓

두 부등식 ㉑, ㉒을 동시에 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는

$-7 < x \leq -4$ 또는 $1 \leq x < 6$

이므로 세 부등식 ㉑, ㉒, ㉓을 동시에 만족시키는 실수 x 가 존재하지 않는 경우는 다음 세 가지 중 하나이다.

(i) $a^2 - 8 \leq -7$ 일 때, $a^2 \leq 1 \quad \therefore -1 \leq a \leq 1$

(ii) $-4 \leq 2a-10 < a^2-8 \leq 1$ 일 때,

$-4 \leq 2a-10$ 에서 $a \geq 3$ ㉔

$a^2-8 \leq 1$ 에서 $a^2 \leq 9$

$\therefore -3 \leq a \leq 3$ ㉕

㉔, ㉕의 공통부분을 구하면 $a = 3$

(iii) $6 \leq 2a-10$ 일 때, $a \geq 8$

이상에서 $-1 \leq a \leq 1$ 또는 $a = 3$ 또는 $a \geq 8$ ㉖

따라서 10 이하의 자연수 a 는 1, 3, 8, 9, 10의 5개이다. ㉗

답 5

채점 기준	비율
① 세 부등식의 해를 각각 구할 수 있다.	30%
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%
③ 10 이하의 자연수 a 의 개수를 구할 수 있다.	10%

24 **전략** 부등식 $f(x) < y < g(x)$ 를 만족시키는 y 가 항상 존재하려면 부등식 $f(x) < g(x)$ 가 항상 성립해야 한다.

풀이 $f(x) = -x^2 + 2(a-1)x + 2a-1$,
 $g(x) = x^2 - 2(a-3)x + 9$ 라 하면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < y < g(x)$ 를 만족시키는 y 가 존재해야 하므로 부등식 $g(x) - f(x) > 0$ 이 항상 성립해야 한다.

즉 $2x^2 - 4(a-2)x - 2a + 10 > 0$ 에서

$$x^2 - 2(a-2)x - a + 5 > 0 \quad \cdots ①$$

이차방정식 $x^2 - 2(a-2)x - a + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(a-2)\}^2 - (-a+5) < 0$$

$$a^2 - 3a - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{3-\sqrt{13}}{2} < a < \frac{3+\sqrt{13}}{2} \quad \cdots ②$$

따라서 $m = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $n = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ 이므로

$$n - m = \sqrt{13} \quad \cdots ③$$

답 $\sqrt{13}$

채점 기준	비율
① 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하는 이차부등식을 세울 수 있다.	40%
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
③ $n-m$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

25 **전략** 이차방정식의 판별식의 부호, 두 근의 합 또는 곱의 부호를 이용하여 a 의 값의 범위를 구한다.

풀이 이차방정식

$$x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 3a - 4 = 0 \quad \cdots ①$$

의 두 근을 α , β 라 하고, 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - (a^2 - 3a - 4) = -a + 8,$$

$$\alpha + \beta = -2(a-2),$$

$$\alpha\beta = a^2 - 3a - 4 = (a+1)(a-4)$$

(i) ①이 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때,

$$\frac{D}{4} = -a + 8 > 0 \text{에서} \quad a < 8$$

$$\alpha + \beta = -2(a-2) > 0 \text{에서} \quad a < 2$$

$$\alpha\beta = (a+1)(a-4) > 0 \text{에서}$$

$$a < -1 \text{ 또는 } a > 4$$

따라서 $a < -1$ 이므로 정수 a 의 최댓값은 -2 이다.

(ii) ①이 서로 다른 두 음의 실근을 가질 때,

$$\frac{D}{4} = -a + 8 > 0 \text{에서} \quad a < 8$$

$$\alpha + \beta = -2(a-2) < 0 \text{에서} \quad a > 2$$

$$\alpha\beta = (a+1)(a-4) > 0 \text{에서}$$

$$a < -1 \text{ 또는 } a > 4$$

따라서 $4 < a < 8$ 이므로 정수 a 의 최솟값은 5 이다.

(i), (ii)에서 $M = -2$, $m = 5$ 이므로

$$Mm = -10 \quad \text{답 } -10$$

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= x^2 - 2(a-3)x + 9 \\ &\quad - \{-x^2 + 2(a-1)x + 2a-1\} \\ &= 2x^2 - 4(a-2)x - 2a + 10 \\ &\quad - 2a + 10 \end{aligned}$$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없다.

→ 합의 법칙 이용

$$2^2 - 4ac \geq 0 \text{이므로} \quad ac \leq 1$$

$$3^2 - 4ac \geq 0 \text{이므로} \quad ac \leq \frac{9}{4}$$

$$4^2 - 4ac \geq 0 \text{이므로} \quad ac \leq 4$$

$$5^2 - 4ac \geq 0 \text{이므로} \quad ac \leq \frac{25}{4}$$

$b=1$ 일 때, $1-4ac \geq 0$,
 즉 $ac \leq \frac{1}{4}$ 을 만족시키는
 순서쌍 (a, c) 는 존재하
 지 않는다.

IV 순열과 조합

09 순열과 조합

개념 & 핵심 기출

본책 88쪽

01 뽑힌 카드에 적힌 세 수의 평균이 4 또는 5가 되려면 세 수의 합은 12 또는 15가 되어야 한다.

(i) 세 수의 합이 12인 경우

3, 4, 5의 1가지

(ii) 세 수의 합이 15인 경우

3, 4, 8 또는 3, 5, 7 또는 4, 5, 6의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $1+3=4$ **답 4**

02 (i) $a < b$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 는

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4),

(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)의 15개

(ii) $ab < 6$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 는

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),

(2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1), (5, 1)의 10개

(iii) $a < b$, $ab < 6$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 는

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)의 4개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$15 + 10 - 4 = 21 \quad \text{답 ④}$$

03 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 실근을 가지려면 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$D = b^2 - 4ac \geq 0$$

(i) $b=2$ 일 때, 순서쌍 (a, c) 는

(1, 1)의 1개

(ii) $b=3$ 일 때, 순서쌍 (a, c) 는

(1, 1), (1, 2), (2, 1)의 3개

(iii) $b=4$ 일 때, 순서쌍 (a, c) 는

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1),

(2, 2), (3, 1), (4, 1)의 8개

(iv) $b=5$ 일 때, 순서쌍 (a, c) 는

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2),

(4, 1), (5, 1)의 12개

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$1 + 3 + 8 + 12 = 24 \quad \text{답 ④}$$

04 (i) 갑이 B 지점, 을이 C 지점을 지날 때,

갑이 $A \rightarrow B \rightarrow D$ 로 가는 경우의 수는 $1 \cdot 4 = 4$

을이 $A \rightarrow C \rightarrow D$ 로 가는 경우의 수는 $2 \cdot 3 = 6$

따라서 경우의 수는 $4 \cdot 6 = 24$

- (ii) 갑이 C 지점, 을이 B 지점을 지날 때,
 갑이 $A \rightarrow C \rightarrow D$ 로 가는 경우의 수는 $2 \cdot 3 = 6$
 을이 $A \rightarrow B \rightarrow D$ 로 가는 경우의 수는 $1 \cdot 4 = 4$
 따라서 경우의 수는 $6 \cdot 4 = 24$
 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $24 + 24 = 48$ 답 48

- 05** (i) $2\square\square$ 꼴의 짝수
 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 4, 6, 8의 4가지,
 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로
 $4 \cdot 8 = 32$
 (ii) $3\square\square$ 꼴의 짝수
 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지,
 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로
 $5 \cdot 8 = 40$
 (iii) $4\square\square$ 꼴의 짝수
 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 6, 8의 4가지,
 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이므로
 $4 \cdot 8 = 32$
 이상에서 구하는 수의 개수는
 $32 + 40 + 32 = 104$ 답 ③

- 06** A 도시에 칠할 수 있는 색은 4가지, D 도시에 칠할 수 있는 색은 A 도시에 칠한 색을 제외한 3가지, B 도시에 칠할 수 있는 색은 A 도시와 D 도시에 칠한 색을 제외한 2가지, C 도시에 칠할 수 있는 색은 B 도시와 D 도시에 칠한 색을 제외한 2가지이다.
 따라서 구하는 경우의 수는
 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ 답 48

- 07** ${}_nP_3 = 3 \cdot {}_nP_2 + 21 \cdot {}_nP_1$ 에서
 $n(n-1)(n-2) = 3n(n-1) + 21n$
 ${}_nP_3$ 에서 $n \geq 3$ 이므로 양변을 n 으로 나누어 정리하면
 $n^2 - 6n - 16 = 0, \quad (n+2)(n-8) = 0$
 $\therefore n = 8$ ($\because n \geq 3$) 답 8

- 08** ${}_nP_{r+1} + (r+1) \cdot {}_nP_r$
 $= \frac{n!}{(n-r-1)!} + (r+1) \cdot \frac{n!}{(n-r)!}$
 $= \frac{(n-r)n!}{(n-r)(n-r-1)!} + (r+1) \cdot \frac{n!}{(n-r)!}$
 $= \frac{(\overbrace{n-r}^{\cancel{n-r}})n!}{(n-r)!} + \frac{(r+1)n!}{(n-r)!}$
 $= \frac{n!(n-r+r+1)}{(n-r)!} = \frac{(n+1)!}{(n-r)!}$
 $= \frac{(n+1)!}{\{(n+1)-(r+1)\}!}$
 $= \frac{(n+1)!}{(n-r)!} = {}_{n+1}P_{r+1}$
 $\therefore \textcircled{B} {}_{n+1}P_{r+1} \quad \textcircled{A} n-r$ 답 ⑤

0, 1, 2, ..., 9의 10개의 숫자 중 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 숫자

남학생을 ○라 하면
 $\vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee$

- 09** 2300보다 큰 자연수는 $23\square\square, 24\square\square, 3\square\square\square, 4\square\square\square$ 꼴이다.
 $23\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $2! = 2$
 $24\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $2! = 2$
 $3\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $3! = 6$
 $4\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $3! = 6$
 따라서 구하는 자연수의 개수는
 $2 + 2 + 6 + 6 = 16$ 답 16

- 10** 7개의 문자 중 모음은 A, E이고, 자음은 B, C, D, F, G이다.
 양 끝에 5개의 자음 중 두 개의 문자를 나열하는 경우의 수는
 ${}_5P_2 = 20$
 2개의 모음을 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과 3개의 자음을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $4! = 24$
 이때 A와 E가 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $20 \cdot 24 \cdot 2 = 960$ 답 ⑤

- 11** 남학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
 $4! = 24$
 남학생 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리 중 3개의 자리에 여학생 3명을 세우는 경우의 수는
 ${}_5P_3 = 60$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \cdot 60 = 1440$ 답 1440

- 12** i와 o 사이에 i와 o를 제외한 나머지 7개의 문자 중 3개의 문자를 택하여 나열하는 경우의 수는
 ${}_7P_3 = 210$
 i, o와 그 사이의 3개의 문자를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $5! = 120$
 이때 i와 o가 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $210 \cdot 120 \cdot 2 = 50400$ 답 50400

- 13** $3 \cdot {}_nC_3 = 4 \cdot {}_nC_2 + 18 \cdot {}_nC_1$ 에서
 $3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 18n$
 ${}_nC_3$ 에서 $n \geq 3$ 이므로 양변을 n 으로 나누어 정리하면
 $n^2 - 7n - 30 = 0, \quad (n+3)(n-10) = 0$
 $\therefore n = 10$ ($\because n \geq 3$) 답 ④

14 꺼낸 공에 적힌 두 수의 곱이 양수이면 두 수가 모두 음수 또는 양수이어야 한다.

(i) 두 수가 모두 음수인 경우의 수

$${}_3C_2=3$$

(ii) 두 수가 모두 양수인 경우의 수

$${}_4C_2=6$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$3+6=9$$

답 ③

15 $n=2k+1$ (k 는 자연수)이라 하면 가위바위보를 하여 이긴 사람의 수는 $\frac{n-1}{2}=k$

따라서 모인 사람은 $(k+1)$ 명이고, 악수의 총횟수는 $(k+1)$ 명 중에서 서로 다른 두 명을 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_{k+1}C_2=190, \quad \frac{(k+1)k}{2}=190$$

$$(k+1)k=20 \cdot 19 \quad \therefore k=19$$

$$\therefore n=2k+1=2 \cdot 19+1=39$$

답 39

16 9명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_9C_3=84$$

남학생만 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3=4$$

여학생만 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$84-(4+10)=70$$

답 70

다른 풀이 남학생 1명, 여학생 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_1 \cdot {}_5C_2=40$$

남학생 2명, 여학생 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_2 \cdot {}_5C_1=30$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$40+30=70$$

17 A, B 두 상자에서 각각 두 장씩 카드를 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2 \cdot {}_4C_2=60$$

B 상자에서 뽑힌 카드 2장을 한 묶음으로 생각하여 카드 3장을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3!=6$$

이때 B 상자에서 뽑힌 카드 2장이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2!=2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60 \cdot 6 \cdot 2=720$$

답 ③

18 12개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_4=495$$

-3, -2, -1의 정수가 적힌 3개의 공 중에서 2개를 택하는 경우의 수

1, 2, 3, 4의 정수가 적힌 4개의 공 중에서 2개를 택하는 경우의 수

한 직선 위에 있는 4개의 점 또는 한 직선 위에 있는 3개의 점과 나머지 한 점으로는 사각형을 만들 수 없다.

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_4=5$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하고 나머지 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 \cdot {}_1C_1=70$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$$495-5-70=420$$

답 420

1등급을 위한 고난도 문제

본책 외쪽

01 $|ax-a|<b$ 에서 $a>0, b>0$ 이므로

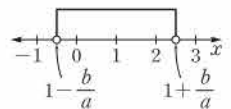
$$-b<ax-a<b, \quad a-b<ax<a+b$$

$$\therefore 1-\frac{b}{a}<x<1+\frac{b}{a}$$

따라서 부등식 $|ax-a|<b$ 를

만족시키는 정수 x 의 개수가 3

이 되려면 오른쪽 그림에서



$$2<1+\frac{b}{a}\leq 3, \quad 1<\frac{b}{a}\leq 2$$

$$\therefore a<b\leq 2a$$

(i) $a=1$ 일 때, $1<b\leq 2$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 2)$ 의 1개

(ii) $a=2$ 일 때, $2<b\leq 4$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 3), (2, 4)$ 의 2개

(iii) $a=3$ 일 때, $3<b\leq 6$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(3, 4), (3, 5), (3, 6)$ 의 3개

(iv) $a=4$ 일 때, $4<b\leq 8$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(4, 5), (4, 6)$ 의 2개

(v) $a=5$ 일 때, $5<b\leq 10$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(5, 6)$ 의 1개

(vi) $a=6$ 일 때, $6<b\leq 12$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 존재하지 않는다.

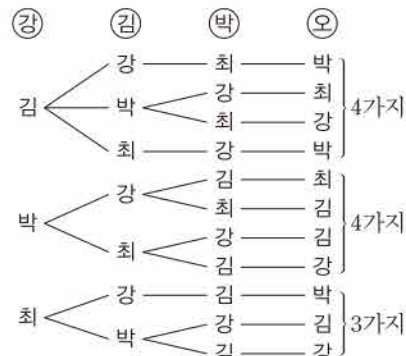
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$1+2+3+2+1=9$$

답 ④

n 번째에는 n 이 오지 않도록 배열하는 경우의 수는 수형도를 이용한다.

02 남자 4명에 대하여 여자 4명을 짝으로 정하는 경우는 다음과 같다.



일품 BOX

따라서 구하는 경우의 수는

$$4+4+3=11$$

답 11

03 ab 의 값이 4의 배수인 경우는 a, b 의 값 중 적어도 한 개가 4이거나 a, b 의 값이 2 또는 6인 경우이다. → ①

(i) a, b 의 값 중 적어도 한 개가 4일 때,

$a+b$ 의 값이 4의 배수인 경우를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면

$$(4, 4)$$

(ii) a, b 의 값이 2 또는 6일 때,

$a+b$ 의 값은 항상 4의 배수이므로 이 경우를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면

$$(2, 2), (2, 6), (6, 2), (6, 6)$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$1+4=5$$

답 5

채점 기준	비율
① ab 의 값이 4의 배수인 경우를 구할 수 있다.	20%
② 각 경우의 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 구할 수 있다.	60%
③ $a+b$ 와 ab 의 값이 모두 4의 배수인 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

04 (i) $a < b, c < b, c < d$ 인 경우

c 가 b, d 보다 작으므로 c 가 될 수 있는 것은 1, 2이다.
 c 가 1일 때, d 가 될 수 있는 것은 2, 3, 4이고 c, d 를 제외하고 남은 2개의 숫자 중에서 작은 수를 a , 큰 수를 b 라 하면 된다.

또 c 가 2일 때, d 가 될 수 있는 것은 3, 4이고 c, d 를 제외하고 남은 2개의 숫자 중에서 작은 수를 a , 큰 수를 b 라 하면 된다.

따라서 $a < b, c < b, c < d$ 인 자연수의 개수는

$$3+2=5$$

(ii) $b < a, b < c, d < c$ 인 경우

b 가 a, c 보다 작으므로 b 가 될 수 있는 것은 1, 2이다.
 b 가 1일 때, a 가 될 수 있는 것은 2, 3, 4이고 a, b 를 제외하고 남은 2개의 숫자 중에서 작은 수를 d , 큰 수를 c 라 하면 된다.

또 b 가 2일 때, a 가 될 수 있는 것은 3, 4이고 a, b 를 제외하고 남은 2개의 숫자 중에서 작은 수를 d , 큰 수를 c 라 하면 된다.

따라서 $b < a, b < c, d < c$ 인 자연수의 개수는

$$3+2=5$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$5+5=10$$

답 ③

05 천의 자리에는 0이 올 수 없고, 조건 (나)에 의하여 일의 자리에는 0 또는 5가 올 수 없으므로 조건 (가), (나)를 만족시키는 네 자리 자연수의 개수는

$$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 720$$

일의 자리의 숫자와 천의 자리의 숫자가 모두 홀수인 경우

a, b 중 하나가 4일 때, $a+b$ 가 4의 배수이면 나머지 하나는 4의 배수이어야 한다.

$ab=16$ 이므로 4의 배수이다.

조건을 만족시키는 자연수 n 은

$$2^0 3^{18}, 2^1 3^9, 2^2 3^4, 2^3 3^1, 2^4 3^0$$

의 6개이다.

이 중에서 일의 자리의 숫자와 천의 자리의 숫자를 곱한 수가 홀수인 네 자리 자연수의 개수는

$$3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 216$$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$$720 - 216 = 504$$

답 504

06 $n=2^x 3^y$ 이라 하면 n 의 양의 약수의 개수가 20이므로 $(x+1)(y+1)=20$

이 등식을 만족시키는 경우를 순서쌍 (x, y) 로 나타내면

$$(0, 19), (1, 9), (3, 4), (4, 3), (9, 1), (19, 0)$$

따라서 자연수 n 의 개수는 6이다.

답 ③

07 $a+b$ 의 값이 짝수이면 a, b 가 모두 홀수이거나 a, b 가 모두 짝수이어야 한다.

(i) a, b 가 모두 홀수일 때,

$2n$ 이하의 자연수 중 홀수는 n 개이므로 순서쌍

(a, b) 의 개수는

$$n \cdot n = n^2$$

(ii) a, b 가 모두 짝수일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$n \cdot n = n^2$$

(i), (ii)에서 $a+b$ 의 값이 짝수가 되도록 하는 순서쌍

(a, b) 의 개수는

$$n^2 + n^2 = 2n^2$$

따라서 $2n^2=50$ 이므로

$$n=5 (\because n \text{은 자연수})$$

답 ②

08 abc 가 홀수이면 a, b, c 가 모두 홀수이므로

$abc+a+b+c$ 는 짝수이다.

즉 $abc+a+b+c$ 가 홀수가 되려면 abc 는 짝수,

$a+b+c$ 는 홀수이어야 한다.

따라서 a, b, c 중 하나만 홀수이어야 하므로 조건을 만족시키는 경우는 순서쌍 (a, b, c) 가

(홀수, 짝수, 짝수), (짝수, 홀수, 짝수),

(짝수, 짝수, 홀수)

인 경우이다.

이때 위의 각 경우의 눈이 나오는 경우의 수는

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$27 \cdot 3 = 81$$

답 81

채점 기준	비율
① $abc+a+b+c$ 의 값이 홀수가 되는 순서쌍 (a, b, c) 의 경우를 생각할 수 있다.	40%
② ①의 각 경우의 눈이 나오는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
③ $abc+a+b+c$ 의 값이 홀수가 되는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%

1등 비밀노트

네 수의 합이 홀수가 되려면 네 수 중 1개 또는 3개가 홀수이어야 하고, a, b, c, abc 중 1개 또는 3개가 홀수가 되는 경우는 다음과 같다.

- (i) a, b, c 중 1개의 수가 홀수이면 abc 는 짝수
 $\Rightarrow a, b, c, abc$ 중 1개의 수가 홀수이므로 조건을 만족시킨다.
- (ii) a, b, c 중 2개의 수가 홀수이면 abc 는 짝수
 $\Rightarrow a, b, c, abc$ 중 2개의 수가 홀수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
- (iii) a, b, c 모두 홀수이면 abc 는 홀수
 $\Rightarrow a, b, c, abc$ 가 모두 홀수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
- 이상에서 조건을 만족시키는 경우는 a, b, c 중 1개는 홀수, 나머지 2개는 짝수인 경우이다.

09 (i) 첫 번째 카드로 2, 4, 6, 8을 선택한 경우
 9장의 카드를 모두 가져오는 경우는 없다. ①

(ii) 첫 번째 카드로 5를 선택한 경우
 두 번째 카드를 선택하는 경우는 2, 4, 6, 8의 4가지가 있고, 두 번째 카드가 2인 경우의 수형도를 그려 보면

$$5-2 \begin{cases} 1-4-7-8-9-6-3 \\ 3-6-9-8-7-4-1 \end{cases}$$

의 2가지가 있다.

두 번째 카드가 4, 6, 8인 경우도 마찬가지로 9장의 카드를 모두 가져오는 경우의 수는

$$4 \cdot 2 = 8 \quad \rightarrow ②$$

(iii) 첫 번째 카드로 1, 3, 7, 9를 선택한 경우
 두 번째 카드를 선택하는 경우는 2가지가 있고, 첫 번째 카드가 1, 두 번째 카드가 2인 경우의 수형도를 그려 보면

$$1-2 \begin{cases} 5-4-7-8-9-6-3 \\ 3-6 \begin{cases} 5-4-7-8-9 \\ 9-8 \begin{cases} 5-4-7 \\ 7-4-5 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

의 4가지가 있다.

첫 번째 카드가 3, 7, 9인 경우도 마찬가지로 9장의 카드를 모두 가져오는 경우의 수는

$$4 \cdot 2 \cdot 4 = 32 \quad \rightarrow ③$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$8 + 32 = 40 \quad \rightarrow ④$$

답 40

채점 기준	비율
① 첫 번째 카드로 2, 4, 6, 8을 선택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
② 첫 번째 카드로 5를 선택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
③ 첫 번째 카드로 1, 3, 7, 9를 선택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
④ 9장의 카드를 모두 가져오는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

10 $x = {}_{30}P_{10}, y = {}_{20}P_{10}$ 이므로 $xy = {}_{30}P_n$ 에서
 ${}_{30}P_{10} \cdot {}_{20}P_{10} = {}_{30}P_n$
 $\frac{30!}{20!} \cdot \frac{20!}{10!} = \frac{30!}{(30-n)!}$
 $(30-n)! = 10! \quad \therefore n = 20$ ①

답 20

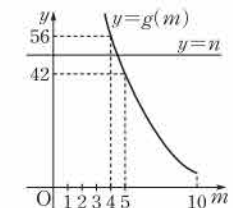
11 $n \cdot {}_{12}P_m < {}_{12}P_{m+2}$ 에서

$$n \cdot \frac{12!}{(12-m)!} < \frac{12!}{(10-m)!}$$

$$\therefore n < (12-m)(11-m) \quad \dots\dots ⑦$$

${}_{12}P_{m+2}$ 에서 $12 \geq m+2$ 이므로 $m \leq 10$

$g(m) = (12-m)(11-m)$ 이라 하면 $m \leq 10$ 에서 $y = g(m)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 이때 부등식 ⑦을 만족시키는 자연수 m 의 개수가 4이려면 $y = g(m)$ 의 그래프에서 직선 $y = n$ 보다 위쪽에 있는 부분의 m 의 값에 1, 2, 3, 4가 포함되어야 한다.



따라서 $g(5) \leq n < g(4)$, 즉 $42 \leq n < 56$ 이므로 자연수 n 의 최댓값은 55, 최솟값은 42이다.

즉 구하는 합은 $55 + 42 = 97$

답 ④

12 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$${}_3P_3 = 60$$

60개의 자연수 중에서 백의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 자연수가 각각 12개씩이므로 백의 자리의 합은

$$(1+2+3+4+5) \cdot 12 \cdot 100 = 18000$$

60개의 자연수 중에서 십의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 자연수가 각각 12개씩이므로 십의 자리의 합은

$$(1+2+3+4+5) \cdot 12 \cdot 10 = 1800$$

60개의 자연수 중에서 일의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 자연수가 각각 12개씩이므로 일의 자리의 합은

$$(1+2+3+4+5) \cdot 12 = 180$$

따라서 구하는 자연수의 총합은

$$18000 + 1800 + 180 = 19980$$

답 19980

13 A 반 학생 3명은 각각 서로 다른 조에 속해야 하므로 이 3개의 조에 B 반 학생 1명씩과 C 반 학생 1명씩을 각각 배정하고, 남은 2명이 1개의 조를 이루면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_3P_3 \cdot {}_4P_3 = 576$$

답 576

다른 풀이 2명으로 이루어진 조에 들어갈 B 반 학생 1명과 C 반 학생 1명을 택하는 경우의 수는

$$4 \cdot 4 = 16$$

A 반 학생이 1명씩 속한 3개의 조에 B 반 학생 1명씩과 C 반 학생 1명씩을 각각 배정하는 경우의 수는

$$3! \cdot 3! = 36$$

따라서 구하는 경우의 수는 $16 \cdot 36 = 576$

백의 자리의 숫자를 제외한 4개의 수 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4P_2 = 12$$

백의 자리의 합이므로 자리의 값을 곱하는 것을 빼뜨리지 않도록 한다.

남은 2명은 B 반 학생 1명과 C 반 학생 1명이므로 같은 조에 속할 수 있다.

3명으로 이루어진 조에는 A 반, B 반, C 반 학생이 각각 1명씩 속해야 하므로 2명으로 이루어진 조에는 B 반 학생 1명과 C 반 학생 1명이 속해야 한다.

일품 BOX

14 $1+2+3+4+5=15$ 이므로 일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 8 또는 9일 때 나머지 세 자리의 숫자의 합보다 크다.

(i) 일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 8일 때, 일의 자리와 십의 자리에 3, 5를 나열하고, 나머지 세 자리에 1, 2, 4를 나열하면 되므로

$$2! \cdot 3! = 12$$

(ii) 일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 9일 때, 일의 자리와 십의 자리에 4, 5를 나열하고, 나머지 세 자리에 1, 2, 3을 나열하면 되므로

$$2! \cdot 3! = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$12+12=24$$

답 24

채점 기준	비율
① 일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 나머지 세 자리의 숫자의 합보다 큰 경우를 구할 수 있다.	20%
② 각 경우의 자연수의 개수를 구할 수 있다.	60%
③ 일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 나머지 세 자리의 숫자의 합보다 큰 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20%

15 학생 10명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $10!$

양 끝에 A 반 학생 2명을 세우는 경우의 수는

$${}_3P_2 \cdot 8!$$

양 끝에 B 반 학생 2명을 세우는 경우의 수는

$${}_3P_2 \cdot 8!$$

양 끝에 C 반 학생 2명을 세우는 경우의 수는

$${}_4P_2 \cdot 8!$$

따라서 양 끝에 선 두 학생의 반이 서로 다른 경우의 수는

$$10! - {}_3P_2 \cdot 8! - {}_3P_2 \cdot 8! - {}_4P_2 \cdot 8!$$

$$= (90 - 6 - 6 - 12) \cdot 8!$$

$$= 66 \cdot 8!$$

$$\therefore a = 66$$

→ ①

→ ③

→ ④

답 66

채점 기준	비율
① 학생 10명을 일렬로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
② 양 끝에 A 반, B 반, C 반 학생을 세우는 경우의 수를 각각 구할 수 있다.	30%
③ 양 끝에 선 두 학생의 반이 서로 다른 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
④ a의 값을 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 양 끝에 A 반 학생과 B 반 학생을 세우는 경우의 수는

$${}_3P_1 \cdot {}_3P_1 \cdot 2! \cdot 8! = 18 \cdot 8!$$

양 끝에 A 반 학생과 C 반 학생을 세우는 경우의 수는

$${}_3P_1 \cdot {}_4P_1 \cdot 2! \cdot 8! = 24 \cdot 8!$$

양 끝에 B 반 학생과 C 반 학생을 세우는 경우의 수는

$${}_3P_1 \cdot {}_4P_1 \cdot 2! \cdot 8! = 24 \cdot 8!$$

일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 $\frac{15}{2}$ 보다 커야 한다.

할아버지, 아버지, 아들이 자리를 바꾸는 경우의 수 $3!$

나머지 가족이 자리를 바꾸는 경우의 수 $3!$

할아버지, 아버지, 아들이 자리를 바꾸는 경우의 수 $3!$

어머니와 딸 중 b에 앉을 사람을 정하는 경우의 수 ${}_2P_1$

d, e에 앉는 두 사람이 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8! = 90 \cdot 8!$$

끝에 세울 A 반 학생을 택하는 경우의 수 ${}_3P_1$
 끝에 세울 B 반 학생을 택하는 경우의 수 ${}_3P_1$
 양 끝의 학생들이 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!$
 양 끝의 2명을 제외한 나머지 학생들을 일렬로 세우는 경우의 수 $8!$

따라서 양 끝에 선 두 학생의 반이 서로 다른 경우의 수는 $18 \cdot 8! + 24 \cdot 8! + 24 \cdot 8! = 66 \cdot 8! \therefore a = 66$

16 6개의 좌석을 왼쪽부터 차례대로 a, b, c, d, e, f라 하자.

할아버지, 아버지, 아들은 서로 이웃하지 않게 앉으려면

$$a, c, e \text{ 또는 } a, c, f \text{ 또는 } a, d, f \text{ 또는 } b, d, f$$

에 앉아야 한다.

(i) a, c, e에 앉는 경우

어머니와 딸이 항상 서로 이웃하지 않게 되므로 경우의 수는

$$3! \cdot 3! = 36$$

(ii) a, c, f에 앉는 경우

어머니와 딸 중 1명은 b에 앉아야 하므로 경우의 수는

$$3! \cdot {}_2P_1 \cdot 2! = 24$$

(iii) a, d, f에 앉는 경우

어머니와 딸 중 1명은 e에 앉아야 하므로 경우의 수는

$$3! \cdot {}_2P_1 \cdot 2! = 24$$

(iv) b, d, f에 앉는 경우

어머니와 딸이 항상 서로 이웃하지 않게 되므로 경우의 수는

$$3! \cdot 3! = 36$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$36 + 24 + 24 + 36 = 120$$

답 ⑤

17 각 자리의 숫자는 차례대로 홀수, 짝수, 홀수, 짝수, 홀수 또는 짝수, 홀수, 짝수, 홀수, 짝수이어야 한다.

(i) 홀수, 짝수, 홀수, 짝수, 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 만의 자리, 백의 자리, 일의 자리에 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_3 = 60$

2, 4, 6, 8의 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 천의 자리와 십의 자리에 나열하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 12$$

따라서 자연수의 개수는

$$60 \cdot 12 = 720$$

→ ①

(ii) 짝수, 홀수, 짝수, 홀수, 짝수인 경우

2, 4, 6, 8의 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 만의 자리, 백의 자리, 일의 자리에 나열하는 경우의 수는

$${}_4P_3 = 24$$

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 천의 자리와 십의 자리에 나열하는 경우의 수는

$${}_5P_2 = 20$$

따라서 자연수의 개수는

$$24 \cdot 20 = 480$$

→ ②

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$720 + 480 = 1200$$

→ ③

답 1200

채점 기준	비율
① 각 자리의 숫자가 차례대로 홀수, 짝수, 홀수, 짝수, 홀수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40%
② 각 자리의 숫자가 차례대로 짝수, 홀수, 짝수, 홀수, 짝수인 자연수의 개수를 구할 수 있다.	40%
③ 각 자리의 숫자가 홀수와 짝수가 번갈아 나오는 자연수의 개수를 구할 수 있다.	20%

18 3의 배수인 3, 6, 9를 한 묶음으로 생각하여 A라 하자.

1, 2, 5, 7, A를 일렬로 나열하는 경우의 수는 5!

1, 2, 5, 7, A의 5개의 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리 중 2개의 자리에 4의 배수인 4, 8을 나열하는 경우의 수는 ${}_6P_2$

묶음 A 안에서 3, 6, 9를 일렬로 나열하는 경우의 수는 3!

$$\therefore N = 5! \cdot {}_6P_2 \cdot 3!$$

$$= (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (6 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

따라서 N의 양의 약수의 개수는

$$(5+1) \cdot (3+1) \cdot (2+1) = 72 \quad \text{답 ③}$$

19 $\frac{{}_nC_r}{5} = \frac{{}_nC_{r+1}}{3}$ 에서 $3 \cdot {}_nC_r = 5 \cdot {}_nC_{r+1}$

$$3 \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} = 5 \cdot \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$$

$$3(r+1) = 5(n-r)$$

$$\therefore 5n - 8r = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\frac{{}_nC_{r+1}}{3} = \frac{{}_nC_{r+2}}{3}$ 에서 ${}_nC_{r+1} = 3 \cdot {}_nC_{r+2}$

$$\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = 3 \cdot \frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!}$$

$$r+2 = 3(n-r-1)$$

$$\therefore 3n - 4r = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $n=7, r=4$

$$\therefore n+r=11 \quad \text{답 ①}$$

20 20 미만의 소수는

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19의 8개

서로 다른 두 소수를 택하여 곱한 결과는 모두 다르므로 구하는 수의 개수는

$${}_8C_2 = 28 \quad \text{답 ⑤}$$

21 (i) A를 선출하는 경우

B는 선출하고 C는 선출하지 않는 경우의 수는 D, E, F, G, H의 5명 중에서 2명을 선출하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_2 = 10$$

C를 선출하는 경우의 수는 B, F, G, H의 4명 중에서 2명을 선출하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_2 = 6$$

따라서 경우의 수는 $10+6=16$

3의 배수인 3, 6, 9와 4의 배수인 4, 8을 제외한 수

B와 C를 모두 선출하는 경우와 B는 선출하지 않고 C는 선출하는 경우를 포함한다.

(ii) A는 선출하지 않고 C는 선출하는 경우

B, F, G, H의 4명 중에서 3명을 선출하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_3 = 4$$

(iii) A와 C를 모두 선출하지 않는 경우

B, D, E, F, G, H의 6명 중에서 4명을 선출하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_4 = 15$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$16+4+15=35 \quad \text{답 35}$$

22 조건 ㉞, ㉟에 의하여 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 중에서 가장 큰 수는 a_5 이므로

$$a_5 = 9 \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

1, 2, 3, ..., 8의 8개 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4 로 놓고, 나머지 4개의 수를 큰 수부터 차례대로 a_6, a_7, a_8, a_9 로 놓으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_8C_4 = 70 \quad \rightarrow \textcircled{3}$$

답 70

채점 기준	비율
① a_5 의 값을 구할 수 있다.	30%
② a_5 를 제외한 나머지 8개의 수를 나열하는 경우를 구할 수 있다.	40%
③ 9개의 수를 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%

23 7개의 공 중에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_7C_3 = 35$$

3개의 공에 적힌 수를 각각 a, b, c ($a < b < c$)라 하면 순서쌍 (a, b, c) 는 다음과 같다.

(i) 세 수의 합이 10 미만인 경우

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6),
(1, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 3, 4)의 7개

(ii) 세 수의 합이 17 초과인 경우

(5, 6, 7)의 1개

(i), (ii)에서 세 수의 합이 10 미만 또는 17 초과인 경우의 수는

$$7+1=8$$

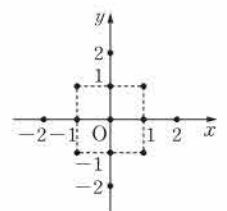
따라서 구하는 경우의 수는

$$35-8=27 \quad \text{답 ③}$$

24 $|x| + |y| \leq 2$ 를 만족시키는 점은 오른쪽 그림과 같이 13개가 있다.

이 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{13}C_3 = 286 \quad \rightarrow \textcircled{1}$$



일품 BOX

이때 5개의 점이 한 직선 위에 있는 경우가 2가지이므로 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$2 \cdot {}_5C_3 = 20$$

또 3개의 점이 한 직선 위에 있는 경우가 10가지이므로 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$10 \cdot {}_3C_3 = 10$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$286 - (20 + 10) = 256$$

→ 2

→ 3

답 256

채점 기준	비율
① 서로 다른 3개의 점을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
② 한 직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50%
③ 삼각형의 개수를 구할 수 있다.	30%

1등급 비밀노트

서로 다른 n 개의 점 중에서 r ($3 \leq r \leq n$)개의 점이 한 직선 위에 있을 때

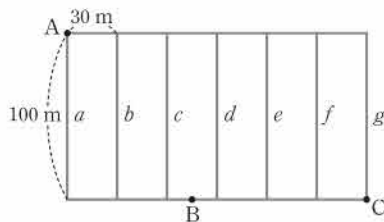
① 만들 수 있는 삼각형의 개수

$$\Rightarrow {}_nC_3 - {}_rC_3$$

② 만들 수 있는 직선의 개수

$$\Rightarrow {}_nC_2 - {}_rC_2 + 1$$

25 다음 그림과 같이 세로로 놓인 도로를 왼쪽부터 차례대로 a, b, c, d, e, f, g 라 하자.



분속 60 m의 속력으로 10분 이내로 이동하기 위해서는 움직인 거리가 $60 \cdot 10 = 600$ (m) 이하가 되어야 한다. 이때 가로로 놓인 도로의 길이가 180 m이므로 세로로 놓인 도로는 1번 또는 3번 이용할 수 있다.

(i) 세로로 놓인 도로를 1번 이용하는 경우

a, b, c 중에서 1개를 택하면 되므로

$${}_3C_1 = 3$$

(ii) 세로로 놓인 도로를 3번 이용하는 경우

① a, b, c 중에서 1개를 택하고 d, e, f, g 중에서 2개를 택하면 되므로

$${}_3C_1 \cdot {}_4C_2 = 18$$

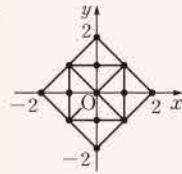
② a, b, c 를 모두 택하면 되므로

$${}_3C_3 = 1$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$3 + 18 + 1 = 22$$

답 22



한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없다.

1, 2가 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!$
가운데 놓인 카드를 뽑는 경우의 수 7

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수

내신 + 수능

1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 96쪽

01 홀수가 아닌 소수는 2뿐이므로 구하는 경우의 수는 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 2 또는 홀수가 되는 경우의 수와 같다.

(i) 두 수의 곱이 2인 경우

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수가 1, 2이어야 하므로 경우의 수는

$$2! \cdot 7 = 14$$

(ii) 두 수의 곱이 홀수인 경우

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수가 모두 홀수이어야 하므로 경우의 수는

$${}_3P_2 \cdot 7 = 140$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$14 + 140 = 154$$

답 154

02 (i) 막대 A에 1개, 막대 B에 5개의 링을 꽂는 경우 6개의 링 중에서 1개를 택하고 남은 5개의 링을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6P_1 \cdot 5! = 720$$

(ii) 막대 A에 2개, 막대 B에 4개의 링을 꽂는 경우

6개의 링 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하고 남은 4개의 링을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6P_2 \cdot 4! = 720$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$720 + 720 = 1440$$

답 1440

03 (k) 에 들어가는 수를 x , (k) 를 포함한 가로줄의 칸에 쓴 5개의 수의 합을 y 라 하면

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + x = 2y \quad \cdots \textcircled{1}$$

가로줄의 수의 합과 세로줄의 수의 합이 같다.

$$\therefore y = \frac{35 + x}{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $35 + x$ 는 짝수이므로 x 는 홀수이다.

(i) $x = 3$ 일 때,

$$y = \frac{35 + 3}{2} = 19 \text{에서 합이 16인 두 수는 존재하지 않}$$

으므로 세로줄을 채울 수 없다.

(ii) $x = 5$ 일 때,

$$y = \frac{35 + 5}{2} = 20 \text{에서 } (k) \text{를 제외한 세로줄의 칸에는 7}$$

과 8을, (k) 를 제외한 가로줄의 칸에는 2, 3, 4, 6을 쓰면 된다.

세로줄에 7, 8을 써넣는 경우의 수는 $2! = 2$

가로줄에 2, 3, 4, 6을 써넣는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 이때의 경우의 수는 $2 \cdot 24 = 48$

(iii) $x = 7$ 일 때,

$$y = \frac{35 + 7}{2} = 21 \text{에서 } (k) \text{를 제외한 세로줄의 칸에는 6}$$

과 8을, (k) 를 제외한 가로줄의 칸에는 2, 3, 4, 5를 쓰면 된다.

따라서 (ii)와 같은 방법으로 하면 이때의 경우의 수는
48

이상에서 구하는 경우의 수는

$$48 + 48 = 96$$

답 96

04 남학생 9명을 일렬로 세우는 경우의 수는

9!

이때 다음 그림과 같이 남학생 9명을 3명씩 묶어서 그 사이사이 및 양 끝의 네 자리에 여학생 4명을 세우는 경우의 수는 4!



따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$9! \cdot 4!$$

즉 $a=9$, $b=4$ 이므로

$$a-b=5$$

답 5

05 두 명이 이웃하게 앉는 경우는 다음과 같다.

$(A-1, A-2)$, $(A-2, A-3)$, $(A-3, A-4)$,

$(B-1, B-2)$, $(B-2, B-3)$, $(B-3, B-4)$

(i) 엄마와 막내아들이

$(A-1, A-2)$ 또는 $(A-3, A-4)$

또는 $(B-1, B-2)$ 또는 $(B-3, B-4)$

에 앉는 경우

엄마와 막내아들이 $(A-1, A-2)$ 에 앉을 때 할아버지와 할머니가 앉을 수 있는 경우는

$(A-3, A-4)$, $(B-1, B-2)$,

$(B-2, B-3)$, $(B-3, B-4)$ 의 4가지

엄마와 막내아들, 할아버지와 할머니가 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각 $2! = 2$

남은 자리에 나머지 가족 4명이 앉는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 24 = 384$$

엄마와 막내아들이 $(A-3, A-4)$ 또는

$(B-1, B-2)$ 또는 $(B-3, B-4)$ 에 앉을 때에도 경우의 수는 동일하므로 $384 \cdot 4 = 1536$

(ii) 엄마와 막내아들이

$(A-2, A-3)$ 또는 $(B-2, B-3)$

에 앉는 경우

엄마와 막내아들이 $(A-2, A-3)$ 에 앉을 때 할아버지와 할머니가 앉을 수 있는 경우는

$(B-1, B-2)$, $(B-2, B-3)$,

$(B-3, B-4)$ 의 3가지

엄마와 막내아들, 할아버지와 할머니가 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각 $2! = 2$

남은 자리에 나머지 가족 4명이 앉는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 24 = 288$$

$4-1=3$, $5-1=4$ 이므로 1은 4, 5와 이웃하지 않아야 한다.

여학생끼리 이웃하지 않고 남학생끼리 이웃한 학생 수가 항상 3명 이상인 경우는 남학생이 3명, 3명, 3명으로 서는 경우뿐이다.

$5-2=3$ 이므로 2, 5는 이웃하지 않아야 한다.

42135, 53124

엄마와 막내아들이 $(B-2, B-3)$ 에 앉을 때에도 경우의 수는 동일하므로 $288 \cdot 2 = 576$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$1536 + 576 = 2112$$

답 ②

06 (i) 1을 첫 번째 자리에 나열하는 경우

두 번째 자리에 2를 나열하면 세 번째 자리에 올 수 있는 수는 3, 4이고, 나머지 자리에 남은 2개를 나열하면 된다.

또 두 번째 자리에 3을 나열하면 2, 5가 이웃하지 않아야 하므로 네 번째 자리에 4를 나열하고 나머지 자리에 2, 5를 나열하면 된다.

따라서 이때의 경우의 수는

$$2 \cdot 2! + 2! = 6$$

(ii) 1을 두 번째 자리에 나열하는 경우

첫 번째 자리에 2, 세 번째 자리에 3을 나열하면 나머지 자리에 남은 2개를 나열하면 된다.

또 첫 번째 자리에 3, 세 번째 자리에 2를 나열하면 2와 5가 이웃하지 않아야 하므로 네 번째 자리에 4, 마지막 자리에 5를 나열해야 한다.

따라서 이때의 경우의 수는

$$2! + 1 = 3$$

(iii) 1을 세 번째 자리에 나열하는 경우

1의 양 옆자리에는 2, 3을 나열해야 하고, 2, 5가 이웃하지 않아야 하므로 4, 5의 자리가 정해진다.

따라서 이때의 경우의 수는

$$2! = 2$$

(iv) 1을 네 번째 자리에 나열하는 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 이때의 경우의 수는

$$3$$

(v) 1을 마지막 자리에 나열하는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 이때의 경우의 수는

$$6$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 3 + 2 + 3 + 6 = 20$$

답 ①

07 그을 수 있는 선분은 $\triangle ABC$ 의 세 변과 $\triangle ABC$ 의 세 꼭짓점에서 내부의 한 점 O 를 잇는 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ 의 6개이다.

(i) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ 중 한 선분만 긋는 경우

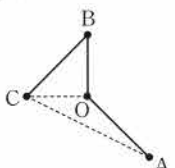
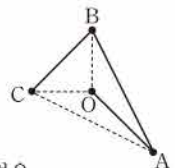
오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 세 변 중에서 두 변을 그으면 되므로 경우의 수는

$${}_3C_1 \cdot {}_2C_2 = 9$$

(ii) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ 중 두 선분만 긋는 경우

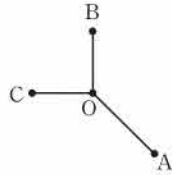
오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 세 변 중에서 연결되지 않은 점을 지나는 한 변을 그으면 되므로 경우의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_2C_1 = 6$$



일품 BOX

- (iii) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ 세 선분을 모두 긋는 경우
오른쪽 그림과 같은 1가지뿐이다.



이상에서 구하는 경우의 수는

$$9+6+1=16$$

답 ②

- 다른 풀이** (i) 네 점 O, A, B, C를 일렬로 잇는 경우
네 점을 일렬로 나열하는 경우의 수에서 거꾸로 나열
하였을 때 일치하는 경우가 2가지씩 있으므로

$$\frac{4!}{2}=12$$

- (ii) 한 점과 나머지 세 점을 잇는 경우

네 점 중 나머지 세 점과 이을 한 점을 택하는 경우의
수와 같으므로

$${}_4C_1=4$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12+4=16$$

네 종류의 과일 중 세 종류의
의 과일을 택하는 경우의
수 ${}_4C_3$
이때 세 종류의 과일 중 2
개를 택할 과일을 정하는
경우의 수 3

O-A-B-C와
C-B-A-O는 서로
같은 경우이다.

- 10 (i) 네 종류의 과일을 택하는 경우

과일을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$4!=24$$

- (ii) 세 종류의 과일을 택하는 경우

세 종류의 과일을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 \cdot 3=12$$

4명의 학생 중 동일한 과일을 받을 2명을 택하는 경우
의 수는

$${}_4C_2=6$$

이때 남은 2명에게 두 종류의 과일을 나누어 주는 경
우의 수는

$$2!=2$$

따라서 세 종류의 과일을 4명의 학생에게 나누어 주
는 경우의 수는

$$12 \cdot 6 \cdot 2=144$$

- (iii) 두 종류의 과일을 택하는 경우

두 종류의 과일을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

4명의 학생 중 특정 과일을 받을 2명을 택하는 경우의
수는

$${}_4C_2=6$$

따라서 두 종류의 과일을 4명의 학생에게 나누어 주
는 경우의 수는

$$6 \cdot 6=36$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$24+144+36=204$$

답 ③

- 08 각 자리의 숫자를 각각 a, b, c, d, e 라 하면

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e=1000=2^3 \cdot 5^3$$

따라서 a, b, c, d, e 중에서 3개는 5이고 나머지 두 개
는 1과 8 또는 2와 4이어야 한다.

- (i) 다섯 자리 중에서 세 자리에는 5가 들어가고, 나머지
두 자리에는 1과 8이 들어가는 경우의 수는

$${}_5C_3 \cdot 2!=20$$

- (ii) 다섯 자리 중에서 세 자리에는 5가 들어가고, 나머지
두 자리에는 2와 4가 들어가는 경우의 수는

$${}_5C_3 \cdot 2!=20$$

- (i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$20+20=40$$

답 40

a, b, c, d, e 는 다섯 자
리 자연수의 각 자리의 숫
자이므로 각각 한 자리 자
연수이다.

- 09 뽑힌 4명이 앉을 의자를 제외한 나머지 6개의 의자
를 나열하고 6개의 의자 사이사이 및 양 끝의 7개의 자리
중에서 4개의 자리에 뽑힌 4명이 앉을 의자 4개를 놓으면
된다.

6명 중 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_4=15$$

7개의 자리 중에서 4개를 택하여 4명을 앉히는 경우의 수
는 ${}_7P_4=840$

따라서 $n=15 \cdot 840=12600$ 이므로

$$\frac{n}{100}=126$$

답 126

의자를 ○라 하면
VOVOVOVOVOVO

15급 비밀노트

일렬로 나열된 n 개의 의자에 r 명이 이웃하지 않도록 앉는 경우의
수는 $(n-r)$ 개의 의자를 먼저 나열한 뒤, $(n-r)$ 개의 의자 사이
사이 및 양 끝의 $(n-r+1)$ 개의 자리에 r 명이 앉을 의자를 나열
하면 되므로

$${}_{n-r+1}P_r \text{ (단, } n-r+1 \geq r \text{)}$$

- 11 A, B, D, C, E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수
있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을
제외한 4가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색
을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한
색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠
한 색을 제외한 3가지이므로 구하는 경우의 수는

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3=540$$

답 ③

- 다른 풀이** (i) 다섯 가지 색을 모두 사용하는 경우
칠하는 경우의 수는

$$5!=120$$

- (ii) 네 가지 색을 사용하는 경우

네 가지 색을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_4=5$$

이때 네 가지 색 중에서 두 영역에 칠할 색을 택하는
경우의 수는

$${}_4C_1=4$$

같은 색을 칠할 두 영역을 정하는 경우의 수는

$$A, C \text{ 또는 } A, E \text{ 또는 } B, E \text{ 의 } 3$$

남은 세 영역에 세 가지 색을 칠하는 경우의 수는

$$3!=6$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6=360$$

(iii) 세 가지 색을 사용하는 경우

세 가지 색을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

이때 세 가지 색 중에서 두 영역에 칠할 두 가지 색을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

같은 색을 칠할 수 있는 영역은 A, C와 B, E이므로 위에서 택한 두 가지 색을 칠하는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 이때의 경우의 수는

$$10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$$

이상에서 구하는 경우의 수는 $120 + 360 + 60 = 540$

12 a, b 가 모두 홀수이면 a^3, b^3 도 모두 홀수이므로 a^3+b^3 은 짝수이다.

이때 a^3+b^3 이 4의 배수이면 $\frac{a^3+b^3}{2}$ 이 짝수이므로

$\frac{a^3+b^3}{2}$ 이 홀수이려면 a^3+b^3 은 4의 배수가 아닌 짝수여야 한다.

자연수 m, n 에 대하여

(i) $a=4m+1, b=4n+1$ 일 때,

$$a^3+b^3$$

$$= (4m+1)^3 + (4n+1)^3$$

$$= 4(16m^3+12m^2+3m+16n^3+12n^2+3n)+2$$

따라서 a^3+b^3 은 4의 배수가 아닌 짝수이다.

(ii) $a=4m+1, b=4n-1$ 일 때,

$$a^3+b^3$$

$$= (4m+1)^3 + (4n-1)^3$$

$$= 4(16m^3+12m^2+3m+16n^3-12n^2+3n)$$

따라서 a^3+b^3 은 4의 배수이다.

(iii) $a=4m-1, b=4n+1$ 일 때,

$$a^3+b^3$$

$$= (4m-1)^3 + (4n+1)^3$$

$$= 4(16m^3-12m^2+3m+16n^3+12n^2+3n)$$

따라서 a^3+b^3 은 4의 배수이다.

(iv) $a=4m-1, b=4n-1$ 일 때,

$$a^3+b^3$$

$$= (4m-1)^3 + (4n-1)^3$$

$$= 4(16m^3-12m^2+3m+16n^3-12n^2+3n)-2$$

따라서 a^3+b^3 은 4의 배수가 아닌 짝수이다.

이상에서 $\frac{a^3+b^3}{2}$ 이 홀수이려면 a, b 를 각각 4로 나누었을 때의 나머지가 모두 1이거나 3이어야 한다.

이때 주어진 자연수 중에서 4로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는 5, 9, 13이고, 3인 수는 3, 7, 11, 15이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_3C_2 + {}_4C_2 = 9$$

답 9

참고 조건을 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 다음과 같다.

$$(9, 5), (13, 5), (13, 9), (7, 3), (11, 3), (11, 7), (15, 3), (15, 7), (15, 11)$$

A, E에 같은 색을 칠하면 남은 세 영역 중에서 같은 색을 칠할 수 있는 영역이 존재하지 않는다.

$$4k-1=4(k-1)+3 \text{ 꼴 (단, } k \text{는 자연수)}$$

하의를 사용하는 경우의 수
머리띠를 사용하는 경우의 수

내신 수학

1등급을 굳히는 실전 마무리 문제

본책 97쪽

01 **전략** 삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 짧아야 함을 이용하여 a 의 값의 범위를 구한다.

풀이 a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이이고 조건 (나)에서 a 가 가장 긴 변의 길이이므로

$$a < b+c$$

이때 조건 (다)에서 $b+c=12-a$ 이므로

$$a < 12-a \quad \therefore a < 6$$

또 조건 (나), (다)에서

$$a+b+c \leq 3a, \quad 12 \leq 3a \quad \therefore a \geq 4$$

$$\therefore 4 \leq a < 6$$

(i) $a=4$ 일 때, $b+c=8$ 이므로

$$b=4, c=4$$

(ii) $a=5$ 일 때, $b+c=7$ 이므로

$$b=5, c=2 \text{ 또는 } b=4, c=3$$

(i), (ii)에서 서로 다른 삼각형의 개수는

$$1+2=3$$

답 ①

02 **전략** 최대한 많은 공을 꺼내면서 어느 2개의 공에 적힌 두 수의 합도 20이 될 수 없는 경우를 생각해 본다.

풀이 2개의 공에 적힌 두 수 a, b 의 합이 20이 되는 순서쌍 (a, b) 는

$$(5, 15), (6, 14), (7, 13), (8, 12), (9, 11)$$

의 5개이다.

이때 최대한 많은 공을 꺼내면서 어느 2개의 공에 적힌 두 수의 합도 20이 될 수 없는 경우는 각 순서쌍에서 하나씩의 숫자가 적힌 5개의 공과 1, 2, 3, 4, 10이 적힌 5개의 공을 꺼내는 경우이다.

따라서 적어도 11개의 공을 꺼내면 2개의 공에 적힌 두 수의 합이 20이 되는 경우가 항상 존재하므로 n 의 최소값은 11이다.

답 ④

03 **전략** 자연수를 $abcba$ 로 놓고 a, b, c 에 올 수 있는 수의 개수를 각각 구한다.

풀이 다섯 자리 자연수를 $abcba$ 라 하면 a 에 올 수 있는 수는 1부터 9까지의 9개이고, b, c 에 올 수 있는 수는 각각 0부터 9까지의 10개이므로 구하는 자연수의 개수는

$$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$$

답 ④

04 **전략** 머리띠, 상의, 하의를 사용하여 인형을 꾸미는 전체 경우의 수에서 색상이 겹치는 경우의 수를 뺀다.

풀이 머리띠, 상의, 하의를 각각 한 개씩 사용하여 인형을 꾸미는 전체 경우의 수는

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

이때 머리띠와 상의의 색상이 노랑으로 같은 경우는 4가지, 상의와 하의의 색상이 하양으로 같은 경우는 2가지이므로 색상이 겹치는 경우의 수는

$$4+2=6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 - 6 = 18$$

답 ④

다른 풀이 (i) 머리띠의 색상이 노랑인 경우

상의의 색상이 빨강이면 사용할 수 있는 하의는 4가지이고, 상의의 색상이 하양이면 사용할 수 있는 하의는 3가지이므로 경우의 수는

$$4 + 3 = 7$$

(ii) 머리띠의 색상이 파랑인 경우

상의의 색상이 노랑, 빨강이면 사용할 수 있는 하의는 각각 4가지씩이고, 상의의 색상이 하양이면 사용할 수 있는 하의는 3가지이므로 경우의 수는

$$2 \cdot 4 + 3 = 11$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$7 + 11 = 18$$

05 **전략** 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4이어야 함을 이용한다.

풀이 $1\square\square\square 0$ 또는 $1\square\square\square 2$ 또는

$1\square\square\square 4$ 꼴의 수의 개수는

$$3 \cdot 4! = 72$$

$20\square\square 4$ 또는 $21\square\square 0$ 또는 $21\square\square 4$ 꼴의 수의 개수는

$$3 \cdot 3! = 18$$

$230\square\square 4$ 또는 $231\square\square 0$ 또는 $231\square\square 4$ 또는

$234\square\square 0$ 꼴의 수의 개수는

$$4 \cdot 2! = 8$$

이때 $100 - (72 + 18 + 8) = 2$ 이므로 구하는 수는

$235\square\square\square$ 꼴의 짝수 중 2번째로 작은 수이다.

따라서 235014, 235104, ...에서 구하는 수는

$$235104$$

답 ③

06 **전략** 주어진 숫자 중에서 두 수의 합이 10 이상인 경우는 $4+6=10$, $5+6=11$ 의 2가지임을 이용한다.

풀이 주어진 숫자 중에서 두 수의 합이 10 이상인 경우는 $4+6=10$, $5+6=11$ 의 2가지이다.

(i) 4, 6은 이웃하고 5, 6은 이웃하지 않는 경우

4, 6을 한 숫자로 생각하여 5를 제외한 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

4와 6이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

4개의 숫자 사이사이 및 양 끝의 자리 중 6의 옆자리를 제외한 4개의 자리에 5를 나열하는 경우의 수는

$${}_4P_1 = 4$$

따라서 자연수의 개수는

$$24 \cdot 2 \cdot 4 = 192$$

(ii) 5, 6은 이웃하고 4, 6은 이웃하지 않는 경우

5, 6을 한 숫자로 생각하여 4를 제외한 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

5와 6이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

4개의 숫자 사이사이 및 양 끝의 자리 중 6의 옆자리를 제외한 4개의 자리에 4를 나열하는 경우의 수는

$${}_4P_1 = 4$$

따라서 자연수의 개수는

$$24 \cdot 2 \cdot 4 = 192$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$192 + 192 = 384$$

답 ④

07 **전략** 먼저 서로 이웃하지 않는 세 사물함을 택하는 경우의 수를 구해 본다.

풀이 오른쪽 그림과 같이

사물함의 가장 왼쪽부터 순서

대로 1행, 2행, 3행이라 하면

서로 이웃하지 않는 세 사물

함을 택하는 경우의 수는 다

음과 같다.

1행	1	2	3
2행	4	5	6
3행	7	8	9

(i) 1행, 2행, 3행에서 각각 1칸씩 택하는 경우

1행에서 1칸을 택하는 경우의 수는

$$3$$

2행에서 1칸을 택하는 경우의 수는 1행에서 택한 사물함과 이웃하는 사물함을 제외해야 하므로

$$2$$

3행에서 1칸을 택하는 경우의 수는 2행에서 택한 사물함과 이웃하는 사물함을 제외해야 하므로

$$2$$

즉 사물함을 택하는 경우의 수는

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

(ii) 1행과 2행 또는 2행과 3행에서 3칸을 택하는 경우

1행과 2행에서 3칸을 택하는 경우는 1번, 3번, 5번 사물함 또는 2번, 4번, 6번 사물함을 택하는 경우의 2가지이다.

같은 방법으로 하면 2행과 3행에서 3칸을 택하는 경우의 수는

$$2$$

즉 사물함을 택하는 경우의 수는

$$2 + 2 = 4$$

(iii) 1행과 3행에서 3칸을 택하는 경우

1행에서 1칸, 3행에서 2칸을 택하는 경우의 수는 1번, 2번, 3번 사물함 중에서 1칸을 택하고 7번, 9번 사물함을 택해야 하므로

$$3$$

같은 방법으로 하면 1행에서 2칸, 3행에서 1칸을 택하는 경우의 수는

$$3$$

즉 사물함을 택하는 경우의 수는

$$3 + 3 = 6$$

4번, 6번, 8번 사물함 또는 5번, 7번, 9번 사물함을 택하는 경우

1번, 3번 사물함

이상에서 구하는 경우의 수는

$$(12+4+6) \cdot 3! = 132$$

답 ②

08 [전략] 자연수 n 에 대하여 ${}_nC_r$ 의 값이 존재하려면 $0 \leq r \leq n$ 이어야 함을 이용한다.

[풀이] ${}_n C_{n+12}$ 에서

$$3n \geq n+12 \quad \therefore n \geq 6$$

${}_n C_{n+21}$ 에서

$$n+21 \geq 4n \quad \therefore n \leq 7$$

따라서 $6 \leq n \leq 7$ 이므로 자연수 n 의 값은 6 또는 7이다.

즉 $k=6+7=13$ 이므로

$${}_{k+1}C_k + {}_k C_{k-2} = {}_{14}C_{13} + {}_{13}C_{11} \\ = 92$$

답 ②

09 [전략] 5번 사용하는 숫자의 사이사이 및 양 끝에 3번 사용하는 숫자를 배치한다.

[풀이] (i) 1을 5번, 2를 3번 사용하는 경우

5개의 1 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리 중에서 3개의 자리에 2를 배치하면 되므로 만들 수 있는 비밀번호의 개수는

$${}_6 C_3 = 20$$

(ii) 1을 3번, 2를 5번 사용하는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 만들 수 있는 비밀번호의 개수는

$$20$$

(i), (ii)에서 구하는 비밀번호의 개수는

$$20+20=40$$

답 ③

10 [전략] 먼저 꺼내는 공의 3가지 색을 택하는 경우의 수를 구한다.

[풀이] 빨강, 주황, 노랑, 초록의 4가지 색 중에서 꺼내는 공의 3가지의 색을 택하는 경우의 수는

$${}_4 C_3 = 4$$

각 색깔에서 1개의 공을 택하는 경우의 수는

$${}_3 C_1 = 3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \cdot 3^3 = 108$$

답 ③

11 [전략] 우리나라 남자 선수와 미국 여자 선수, 우리나라 여자 선수와 미국 남자 선수가 악수하는 경우의 수를 각각 구한다.

[풀이] (i) 우리나라 남자 선수 4명과 미국 여자 선수 6명이 서로 악수를 하는 경우의 수는

$${}_4 C_1 \cdot {}_6 C_1 = 24$$

(ii) 우리나라 여자 선수 4명과 미국 남자 선수 6명이 서로 악수를 하는 경우의 수는

$${}_4 C_1 \cdot {}_6 C_1 = 24$$

(i), (ii)에서 구하는 악수의 총횟수는

$$24+24=48$$

답 ④

택한 세 사물함을 세 사람이 각각 하나씩 사용하는 경우의 수

(0, 0, 0)인 경우 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 6, 9의 3가지, 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리의 숫자를 제외한 3가지이다.

$$\square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square$$

백의 자리에 0이 오는 경우의 수

12 [전략] 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수임을 이용한다.

[풀이] 어떤 수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

0부터 9까지의 정수 중 세 정수의 합이 3의 배수인 경우를 세 정수를 3으로 나누었을 때의 나머지의 순서쌍으로 나타내면

$$(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 1, 2)$$

이때 주어진 10개의 정수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가

0인 수는 0, 3, 6, 9

1인 수는 1, 4, 7

2인 수는 2, 5, 8

(i) (0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2)인 경우

3의 배수의 개수는

$${}_3 P_1 \cdot {}_3 P_2 + 3! + 3! = 30$$

(ii) (0, 1, 2)인 경우

3의 배수의 개수는

$${}_4 C_1 \cdot {}_3 C_1 \cdot {}_3 C_1 \cdot 3! - 1 \cdot {}_3 C_1 \cdot {}_3 C_1 \cdot 2! = 198$$

(i), (ii)에서 3의 배수의 개수는

$$30+198=228$$

답 ①

13 [전략] 이웃하게 앉는 부부를 기준으로 왼쪽과 오른쪽을 나누어 생각한다.

[풀이] 세 쌍의 부부 중 이웃하게 앉는 한 쌍의 부부를 택하는 경우의 수는

$${}_3 C_1 = 3$$

이 부부가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

이웃하게 앉는 부부를 기준으로

(i) 왼쪽에 0명, 오른쪽에 4명이 앉는 경우

남은 두 쌍의 부부가 번갈아 앉아야 하므로 경우의 수는

$$2 \cdot 2! \cdot 2! = 8$$

(ii) 왼쪽에 1명, 오른쪽에 3명이 앉는 경우

왼쪽에 앉은 1명과 부부인 사람이 오른쪽에서 남은 한 쌍의 부부 사이에 앉아야 하므로 경우의 수는

$${}_4 C_1 \cdot 2! = 8$$

(iii) 왼쪽에 2명, 오른쪽에 2명이 앉는 경우

부부가 아닌 2명을 택하여 왼쪽에 앉게 하고, 나머지 2명이 오른쪽에 앉아야 하므로 경우의 수는

$${}_2 C_1 \cdot {}_2 C_1 \cdot 2! \cdot 2! = 16$$

(iv) 왼쪽에 3명, 오른쪽에 1명이 앉는 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 경우의 수는

$$8$$

(v) 왼쪽에 4명, 오른쪽에 0명이 앉는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 경우의 수는

$$8$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$3 \cdot 2 \cdot (8+8+16+8+8) = 288$$

답 ③

14 [전략] 20개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 중복되는 직선의 개수를 뺀다.

[풀이] 20개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

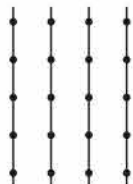
$${}_{20}C_2 = 190$$

(i) 한 직선 위에 5개의 점이 있는 경우

5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

이고, 한 직선 위에 5개의 점이 있는 직선은 4개이다.

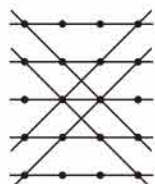


(ii) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 9개이다.

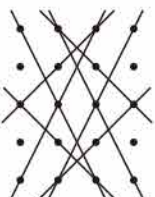


(iii) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = 3$$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 8개이다.



이상에서 구하는 직선의 개수는

$$190 - 10 \cdot 4 - 6 \cdot 9 - 3 \cdot 8 + 4 + 9 + 8 = 93$$

답 ②

15 [전략] 주어진 도형을 직사각형을 찾기 쉬운 형태로 나눈다.

[풀이] (i) 오른쪽 도형에서 찾을 수 있는 직사각형의 개수는



$${}_4C_2 \cdot {}_7C_2 = 126$$

(ii) 오른쪽 도형에서 찾을 수 있는 직사각형의 개수는



$${}_5C_2 \cdot {}_6C_2 = 150$$

(iii) 오른쪽 도형에서 찾을 수 있는 직사각형의 개수는



$${}_8C_2 \cdot {}_3C_2 = 84$$

(iv) 오른쪽 도형에서 찾을 수 있는 직사각형의 개수는



$${}_4C_2 \cdot {}_3C_2 = 18$$

(v) 오른쪽 도형에서 찾을 수 있는 직사각형의 개수는



$${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 = 30$$

이상에서 구하는 직사각형의 개수는

$$126 + 150 + 84 - (18 + 30) = 312$$

답 ①

a, b, c, d, e, f, g, h 에 들어갈 수가 정해지면 나머지 4개의 정사각형에 들어갈 수도 정해진다.

16 [전략] 먼저 숫자가 적힌 4개의 칸에 이웃한 8개의 칸에 들어갈 수를 정한다.

[풀이] 오른쪽 그림과 같이 8개의 정사각형을 각각 a, b, c, d, e, f, g, h 라 하면 a, b 에 각각 들어갈 수 있는 수는

	a	c	
e	1	4	f
g	2	3	h
	b	d	

3, 4 또는 4, 3의 2가지

c, d 에 각각 들어갈 수 있는 수는

1, 2 또는 2, 1의 2가지

e, f 에 각각 들어갈 수 있는 수는

2, 3 또는 3, 2의 2가지

g, h 에 각각 들어갈 수 있는 수는

1, 4 또는 4, 1의 2가지

따라서 8개의 정사각형에 들어갈 수를 정하는 경우의 수는

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

이때 다음 그림과 같은 경우는 나머지 4개의 정사각형에 조건을 만족시키도록 수를 적을 수 없다.

	3	1	
3	1	4	2
1	2	3	4
	4	2	

	3	1	
2	1	4	3
4	2	3	1
	4	2	

	4	2	
2	1	4	3
4	2	3	1
	3	1	

	4	2	
3	1	4	2
1	2	3	4
	3	1	

따라서 구하는 경우의 수는

$$16 - 4 = 12$$

답 12

17 [전략] 평행한 두 직선에서 각각 두 점을 택하여 만들어진 사각형이 사다리꼴임을 이용한다.

[풀이] 평행한 두 직선에서 각각 두 점을 택하면 사각형이 만들어지고, 직선 위의 두 변이 서로 평행하므로 이 사각형은 사다리꼴이다.

윗변의 길이를 a , 아랫변의 길이를 b 라 하면 사각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot 1 = 3$$

이므로

$$a+b=6, 1 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 4$$

(i) $a=2, b=4$ 일 때,

$a=2$ 인 경우는 3가지, $b=4$ 인 경우는 1가지이므로

$$3 \cdot 1 = 3$$

(ii) $a=3, b=3$ 일 때,

$a=3$ 인 경우는 2가지, $b=3$ 인 경우도 2가지이므로

$$2 \cdot 2 = 4$$

(iii) $a=4, b=2$ 일 때,

$a=4$ 인 경우는 1가지, $b=2$ 인 경우는 3가지이므로

$$1 \cdot 3 = 3$$

이상에서 구하는 사각형의 개수는

$$3+4+3=10$$

정답 ②

답 10

채점 기준	비율
① 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형이 사다리꼴임을 알 수 있다.	30%
② 넓이가 3인 사각형의 개수를 구할 수 있다.	70%

18 [전략] $a^m b^n c^k$ (a, b, c 는 서로 다른 소수, m, n, k 는 음이 아닌 정수)이 어떤 자연수의 제곱이 되려면 m, n, k 가 모두 0 또는 짝수이어야 함을 이용한다.

[풀이] $2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^9$ 의 양의 약수는 $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$ ($0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq 7, 0 \leq k \leq 9, i, j, k$ 는 정수) 꼴이므로 이 수가 어떤 자연수의 제곱이 되려면 i, j, k 가 모두 0 또는 짝수이어야 한다.

따라서 i 의 값이 될 수 있는 수는 0, 2, 4의 3가지, j 의 값이 될 수 있는 수는 0, 2, 4, 6의 4가지, k 의 값이 될 수 있는 수는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지이므로 구하는 수의 개수는

$$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

답 60

19 [전략] 먼저 엄마, 아빠가 좌석에 앉는 경우의 수를 구한다.

[풀이] 엄마, 아빠가 앉을 수 있는 좌석은

(1, 2), (2, 3), (4, 5)의 3가지

이고, 엄마, 아빠가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

이므로 엄마, 아빠가 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는

$$3 \cdot 2 = 6$$

이때 할머니는 엄마, 아빠가 앉은 두 좌석과 6번 좌석을 제외한 세 좌석에 앉을 수 있고, 자녀 3명은 남은 세 좌석에 앉으면 되므로 할머니와 자녀 3명이 앉는 경우의 수는

$$3 \cdot 3! = 18$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \cdot 18 = 108$$

답 108

20 [전략] 11월 6일의 전입생의 반을 배정한 후에 10일, 20일의 순서대로 전입생의 반을 배정하는 경우의 수를 구한다.

[풀이] (i) 11월 6일의 전입생 1명이 배정받는 반은 1반 또는 4반이므로

2가지

정답 ①

(ii) 11월 10일의 전입생 1명이 배정받는 반은 1반 또는 4반 중 11월 6일의 전입생 1명이 배정받지 않은 반이므로

1가지

정답 ②

(iii) 11월 20일의 전입생 2명이 배정받는 반은 1, 2, 3, 4, 8, 10반 중 두 반이므로

$${}_6P_2 = 30$$

정답 ③

이상에서 전입생 4명이 반을 배정받는 경우의 수는

$$2 \cdot 1 \cdot 30 = 60$$

정답 ④

답 60

채점 기준	비율
① 11월 6일의 전입생 1명이 반을 배정받는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
② 11월 10일의 전입생 1명이 반을 배정받는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
③ 11월 20일의 전입생 2명이 반을 배정받는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
④ 전입생 4명이 반을 배정받는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

21 [전략] 가로줄에 있는 세 수의 합이 150이어야 함을 이용한다.

[풀이] $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ 이므로 각 가로줄에 있는 세 수의 합은 $\frac{45}{3} = 15$ 이어야 한다.

이때 7, 8, 9는 서로 다른 가로줄에 있어야 하므로 세 수의 합이 15가 되도록 나누는 경우의 수는

(7, 2, 6), (8, 3, 4), (9, 1, 5)

또는 (7, 3, 5), (8, 1, 6), (9, 2, 4)의 2가지

정답 ①

(i) (7, 2, 6), (8, 3, 4), (9, 1, 5)인 경우

위의 세 묶음을 각 줄에 나열하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

이고, 각 줄에서 세 수를 나열하는 경우의 수는

$$3! \cdot 3! \cdot 3! = 216$$

이므로 이때의 경우의 수는

$$6 \cdot 216 = 1296$$

(ii) (7, 3, 5), (8, 1, 6), (9, 2, 4)인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 경우의 수는

$$1296$$

정답 ②

이상에서 구하는 경우의 수는

$$1296 + 1296 = 2592$$

정답 ③

답 2592

채점 기준	비율
① 세 수의 합이 15가 되도록 나누는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
② ①의 각 경우에 따라 수를 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.	40%
③ 각 가로줄에 있는 세 수의 합이 서로 같은 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

22 [전략] ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ ($0 \leq r \leq n$)임을 이용한다.

[풀이] $\frac{n+2}{n!} \cdot \frac{P_{n-1}}{n!} + 40 = {}_{n+1}C_{n-1}$ 에서

$$\frac{(n+2)!}{n!(n+2-n+1)!} + 40 = {}_{n+1}C_2$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 40 = \frac{(n+1)n}{2 \cdot 1}$$

$$(n+2)(n+1) + 240 = 3n(n+1)$$

$$n^2 = 121$$

$$\therefore n = 11 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 11

$${}_{n+1}C_{n-1} = {}_{n+1}C_{n+1-n+1} = {}_{n+1}C_2$$

23 [전략] 세 자연수의 곱을 3으로 나누었을 때의 나머지가 2가 되려면 세 자연수는 어떤 꼴이어야 하는지 생각해 본다.

[풀이] 곱하는 세 자연수 중 적어도 하나가 3의 배수이면 세 자연수의 곱은 항상 3의 배수이다.

음이 아닌 세 정수 l, m, n 에 대하여

$$\begin{aligned} & (3l+1)(3m+1)(3n+1) \\ &= 3(9lmn+3lm+3mn+3nl+l+m+n)+1 \\ & (3l+1)(3m+1)(3n+2) \\ &= 3(9lmn+6lm+3mn+3nl+2l+2m+n)+2 \\ & (3l+1)(3m+2)(3n+2) \\ &= 3(9lmn+6lm+3mn+6nl+4l+2m+2n+1) \\ & \quad +1 \\ & (3l+2)(3m+2)(3n+2) \\ &= 3(9lmn+6lm+6mn+6nl+4l+4m+4n+2) \\ & \quad +2 \end{aligned}$$

즉 세 자연수의 곱을 3으로 나누었을 때의 나머지가 2가 되려면 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 자연수 2개와 나머지가 2인 자연수 1개를 곱하거나 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수 3개를 곱해야 한다.

이때 주어진 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는 1, 4, 7이고, 나머지가 2인 수는 2, 5, 8이므로 구하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_3C_1 + {}_3C_3 = 10 \quad \text{답 10}$$

24 [전략] 천의 자리의 숫자가 1로 홀수이므로 가운데 세 자리의 숫자의 합이 홀수이어야 함을 이용한다.

[풀이] 1000부터 1999까지의 수는 천의 자리의 숫자가 1로 홀수이므로 가운데 세 자리의 숫자의 합이 홀수이면 세 자리의 숫자가 모두 달라야 한다. ... ①

(i) 세 자리의 숫자가 모두 홀수인 경우

홀수인 1, 3, 5, 7, 9 중 3개를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로

$${}_5P_3 = 60 \quad \text{... ②}$$

(ii) 세 자리의 숫자 중 0 또는 짝수가 2개, 홀수가 1개인 경우

0과 짝수인 2, 4, 6, 8 중 2개를 뽑고, 홀수인 1, 3, 5, 7, 9 중 1개를 뽑은 후 일렬로 나열하면 되므로

$${}_5C_2 \cdot {}_5C_1 \cdot 3! = 300 \quad \text{... ③}$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 300 = 360 \quad \text{... ④}$$

답 360

채점 기준	비율
① 가운데 세 자리의 숫자의 조건을 구할 수 있다.	20%
② 가운데 세 자리의 숫자가 모두 홀수인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
③ 가운데 세 자리의 숫자가 0 또는 짝수가 2개, 홀수가 1개인 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
④ 가운데 세 자리의 숫자가 모두 다른 경우의 수를 구할 수 있다.	20%

행렬에서 성분을 가로로 배열한 줄을 행, 세로로 배열한 줄을 열이라 한다.

행렬을 포함한 식이 주어지면 먼저 식을 간단히 한 후 행렬을 대입한다.

끝에 0을 덧붙였으므로 각 자리의 숫자의 합이 짝수이다.

두 행렬 X, Y 에 대한 두 등식이 주어질 때
 $\Rightarrow X, Y$ 에 대한 방정식으로 생각하고 연립하여 풀어 X, Y 를 구한다.

V 행렬

10 행렬과 그 연산

개념 & 핵심 기출

본책 102쪽

01 행렬 A 의 제2열의 성분은 a_{12}, a_{22} 이고

$$a_{12} = b_{21} = 2^1 = 2, a_{22} = b_{22} = 2^2 = 4$$

따라서 구하는 합은

$$a_{12} + a_{22} = 6 \quad \text{답 ④}$$

02 $a_{11} = a_{22} = 0$ 이므로 점 P_1 에서 점 P_1 , 점 P_2 에서 점 P_2 를 연결한 곡선은 없다.

$a_{12} = a_{21} = 2$ 이므로 두 점 P_1, P_2 를 연결한 곡선의 개수는 2이다.

$a_{13} = a_{31} = 1$ 이므로 두 점 P_1, P_3 를 연결한 곡선의 개수는 1이다.

$a_{23} = a_{32} = 1$ 이므로 두 점 P_2, P_3 를 연결한 곡선의 개수는 1이다.

$a_{33} = 1$ 이므로 점 P_3 에서 점 P_3 을 연결한 곡선의 개수는 1이다.

따라서 행렬 A 를 나타낸 그림은 ③이다. ... ③

03 $A - 2B + 3X = 2(A + X) - C$ 에서

$$A - 2B + 3X = 2A + 2X - C$$

$$\therefore X = A + 2B - C$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X 의 모든 성분의 합은

$$3 + 3 + 6 + (-3) = 9 \quad \text{답 9}$$

04 $2A + 3B = C$ 에서

$$2 \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & 3a \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ b & \frac{1}{2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 10 & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a-6 & 7 \\ -2+3b & 6a+\frac{3}{2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 10 & x \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2a-6=-4, -2+3b=10, 6a+\frac{3}{2}b=x$$

$$\therefore a=1, b=4, x=12 \quad \text{답 12}$$

05 $X + 2Y = A - 4B$... ㉠

$$2X + Y = 2A + B \quad \dots \dots \dots \text{㉡}$$

㉠ - ㉡ $\times 2$ 를 하면

$$-3X = -3A - 6B$$

$$\therefore X = A + 2B \quad \dots \dots \dots \text{㉢}$$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$\begin{aligned}(A+2B)+2Y &= A-4B \quad \therefore 2Y = -6B \\ \therefore X-2Y &= (A+2B) - (-6B) = A+8B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 34 & -13 \\ 19 & -6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 행렬 $X-2Y$ 의 모든 성분의 합은

$$34 + (-13) + 19 + (-6) = 34 \quad \text{답 34}$$

06 $A+B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ㉔$

$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ㉕$

㉔+㉕을 하면

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad \therefore A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

㉔-㉕을 하면

$$2B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \therefore B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore AB+BA &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{답 } \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

07 건설 회사가 구입해야 하는 철재의 양과 시멘트의 양은

철재: $20 \times 5 + 0.5 \times 70$ (kg)

시멘트: $20 \times 30 + 0.5 \times 50$ (kg)

$$\therefore X = (20 \ 0.5) \begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 70 & 50 \end{pmatrix} = AB$$

또 철재와 시멘트를 구입하는 데 드는 자재비와 운반비는

$$\begin{aligned}\text{자재비: } &(20 \times 5 + 0.5 \times 70) \times 42 \\ &+ (20 \times 30 + 0.5 \times 50) \times 13 \text{ (천 원)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{운반비: } &(20 \times 5 + 0.5 \times 70) \times 7 \\ &+ (20 \times 30 + 0.5 \times 50) \times 2 \text{ (천 원)}\end{aligned}$$

$$\therefore Y = (20 \ 0.5) \begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 70 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 42 & 7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} = ABC$$

답 ㉕

08 $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$
 $\therefore A^{10} = (A^2)^5 A = E^5 A = A$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

행렬 A 와 단위행렬 E 에 대하여
 $AE = EA = A$
 이므로
 $(A+E)^2$
 $= A^2 + 2A + E$

$A^n = E$ 이면
 $A^{n+1} = A$,
 $A^{n+2} = A^2$,
 $\dots$, $A^{2n} = E$

$$\therefore B^{20} = \begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore A^{19} B^{20} &= AB^{20} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -20 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 행렬 $A^{19} B^{20}$ 의 (2, 2) 성분은 -20이다.

답 -20

09 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\begin{aligned}\therefore A^{18} + A + E &= (A^3)^6 + A + E \\ &= E^6 + A + E \\ &= E + A + E = A + 2E \quad \text{답 ㉕}\end{aligned}$$

10 ㄱ. $(A+E)^2 = A^2 + 2A + E = A + 2A + E = 3A + E$

ㄴ. $A^3 = A^2 A = AA = A^2 = A$ 이므로
 $(A+E)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + E = 7A + E$
 $(A-E)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - E = A - E$
 $\therefore (A+E)^3 \neq -(A-E)^3$

ㄷ. $(A-E)^2 = A^2 - 2A + E = A - 2A + E = E - A$ 이므로

$$\begin{aligned}(A-E)^4 &= (A-E)^2 (A-E)^2 \\ &= (E-A)^2 = E - 2A + A^2 \\ &= E - A \\ (A-E)^6 &= (A-E)^4 (A-E)^2 = (E-A)^2 \\ &= E - A\end{aligned}$$

$$\therefore (A-E)^{2n} = E - A$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㉔

다른 풀이 ㄴ. $A = E$ 이면

$$\begin{aligned}(A+E)^3 &= (2E)^3 = 8E, \quad (A-E)^3 = 0 \\ \therefore (A+E)^3 &\neq -(A-E)^3\end{aligned}$$

💡 비밀노트

888

직접 증명하기 어려울 때에는 성분이 0, 1, -1과 같이 간단한 수인 행렬을 구한 후 등식이 성립하지 않는 경우를 찾아 문제를 해결할 수도 있다.

11 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 에서
 $A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$
 $\therefore AB = BA$

$$AB = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & ab+1 \\ 7 & 2b-3 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2b & -2+3b \\ a-2 & -4 \end{pmatrix}$$

이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2a-1=2a+2b, ab+1=-2+3b,$$

$$7=a-2, 2b-3=-4$$

따라서 $a=9, b=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$a+b=\frac{17}{2} \quad \text{답 ④}$$

12 $\neg, A+B=E$ 에서 $B=E-A$ 이므로

$$AB=A(E-A)=A-A^2=(E-A)A \\ =BA$$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 이면 $A^2=E$ 이지만

$$A \neq E, A \neq -E$$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이면

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이지만

$$BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

답 ①

참고 같은 꼴의 두 정사각행렬 A, B 에 대하여

$$kA+lB=E \quad (k, l \text{은 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

이면 $AB=BA$ 이다.

13 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2-4A+3E=O$$

$$\therefore A^2=4A-3E \quad \begin{array}{l} \rightarrow 2+2=4 \\ \rightarrow 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 \end{array}$$

위의 식의 양변에 행렬 A 를 곱하면

$$A^3=4A^2-3A=4(4A-3E)-3A=13A-12E$$

$$\therefore A^3-2A^2-6A+5E$$

$$=13A-12E-2(4A-3E)-6A+5E$$

$$=-A-E$$

$$=-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{답 ①}$$

다른 풀이 $A^3-2A^2-6A+5E$

$$=(A^2-4A+3E)(A+2E)-A-E$$

$$=-A-E$$

14 $B=E-aA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1-a & -a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$$

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$B^2-(2-2a)B+(1-2a)E=O \quad \dots\dots ⑦$$

이때 $a \neq 0$ 에서 $B \neq kE$ (k 는 실수)이므로 ⑦이

$B(B-E)=O$, 즉 $B^2-B=O$ 와 같아야 한다.

따라서 $2-2a=1, 1-2a=0$ 이므로

$$a=\frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} (1-a)^2 - (-a)^2 \\ = a^2 - 2a + 1 - a^2 \\ = 1 - 2a \end{aligned}$$

다른 풀이 $B(B-E)=O$ 에서 $B^2=B$

이것을 ⑦에 대입하면

$$B-(2-2a)B+(1-2a)E=O$$

$$(1-2a)B-(1-2a)E=O$$

$$(1-2a)(B-E)=O$$

이때 $a \neq 0$ 이면 $B \neq E$ 이므로

$$1-2a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

15 (i) $A \neq kE$ (k 는 실수)일 때,

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$ad-bc=6$$

(ii) $A=kE$ (k 는 실수)일 때,

$A=kE$ 를 $A^2-5A+6E=O$ 에 대입하면

$$k^2E-5kE+6E=O$$

$$(k^2-5k+6)E=O$$

$$(k-2)(k-3)E=O$$

$$\therefore k=2 \text{ 또는 } k=3$$

$$\text{즉 } A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ 또는 } A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$ad-bc=4 \text{ 또는 } ad-bc=9$$

(i), (ii)에서 $ad-bc$ 의 최댓값은 9이다.

답 9

1등급 비밀노트

688

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A^2-pA+qE=O$ (p, q 는 실수)

를 만족시키는 행렬 A 를 구할 때에는 다음과 같이 $A \neq kE$ 인 경우와 $A=kE$ 인 경우로 나누어 생각한다. (단, k 는 실수)

(i) $A \neq kE$ 일 때 $\Rightarrow a+d=p, ad-bc=q$

(ii) $A=kE$ 일 때 $\Rightarrow A=kE$ 를 $A^2-pA+qE=O$ 에 대입하여 k 의 값을 구한다.

1등급을 위한 고난도 문제

본책 105쪽

01 $a_{11}=2 \cdot 1 + 1 + 2k = 2k + 3,$

$a_{12}=2 \cdot 1 + 2 + 2k = 2k + 4$ 이므로

$$(2k+3) + (2k+4) = 15 \quad \therefore k=2$$

$$\therefore b_{32}=2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 = 10$$

답 ⑤

02 1번 출입구와 연결된 전시관은 P_2 이므로

$$a_{11}=0, a_{12}=1, a_{13}=0$$

2번 출입구와 연결된 전시관은 P_1, P_3 이므로

$$a_{21}=1, a_{22}=0, a_{23}=1$$

3번 출입구와 연결된 전시관은 P_2, P_3 이므로

$$a_{31}=0, a_{32}=1, a_{33}=1$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{답 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

03 조건 (가)에 의하여 $b_{12}=b_{21}$ 이므로

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

또 $c_{11}=-c_{11}$, $c_{22}=-c_{22}$, $c_{12}=-c_{21}$ 이므로

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -c_{21} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 조건 (나)에 의하여

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c_{21} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}-c_{21} \\ b_{12}+c_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$b_{11}=2, b_{12}-c_{21}=1, b_{12}+c_{21}=5, b_{22}=3$$

따라서 $b_{12}=3$, $c_{21}=2$ 이므로

$$b_{12}c_{21}=6$$

답 6

04 $a_{11}=1^2+1^2=2$, $a_{12}=1^2+2^2=5$, $a_{21}=2^2+1^2=5$,
 $a_{22}=2^2+2^2=8$ 이므로

$$A+2B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$b_{11}=1 \cdot 1=1$, $b_{12}=1 \cdot 2=2$, $b_{21}=2 \cdot 1=2$, $b_{22}=2 \cdot 2=4$
이므로

$$2A-B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2$ 를 하면

$$5A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 16 \end{pmatrix} \\ \therefore A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{16}{5} \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

따라서 행렬 A의 제2행의 모든 성분의 합은

$$\frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 5

채점 기준	비율
① $A+2B$ 를 구할 수 있다.	30%
② $2A-B$ 를 구할 수 있다.	30%
③ A를 구할 수 있다.	30%
④ A의 제2행의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	10%

다른 풀이 $A+2B+2(2A-B)=5A$ 이므로 행렬 A의
(i, j) 성분을 c_{ij} 라 하면

$$5c_{ij} = i^2 + j^2 + 2ij \quad \therefore c_{ij} = \frac{i^2 + j^2 + 2ij}{5}$$

따라서 구하는 합은

$$c_{21} + c_{22} = \frac{2^2 + 1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1}{5} + \frac{2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2}{5} \\ = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$$

05 $BA = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha\beta & \alpha^2 + \beta \\ \alpha + \beta^2 & 1 + \alpha\beta \end{pmatrix}$

이므로 행렬 BA의 모든 성분의 합은

$$2\alpha\beta + (\alpha^2 + \beta) + (\alpha + \beta^2) + (1 + \alpha\beta) \\ = 3\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 α, β 가 이차방정식 $x^2 - 4x - 4 = 0$ 의 두 근이므로
근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 행렬 BA의 모든 성분의 합은

$$3\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta + 1 \\ = \alpha\beta + (\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta) + 1 \\ = -4 + 4^2 + 4 + 1 \\ = 17 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 17

채점 기준	비율
① BA의 모든 성분의 합을 α, β 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
② $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ BA의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	50%

06 $\begin{pmatrix} x & \\ x-1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 2 \\ & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2x \\ -x & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ x^2-x & 2x-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2x \\ -x & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} x^2+2 & 4x \\ x^2-2x & 2x-1 \end{pmatrix}$

따라서 주어진 행렬의 모든 성분의 합은

$$(x^2+2) + 4x + (x^2-2x) + (2x-1) \\ = 2x^2 + 4x + 1 \\ = 2(x+1)^2 - 1$$

이므로 구하는 최솟값은 -1이다.

답 ②

07 $\neg$. A 지역에서 작년 하반기에 판매된 전기 자동차
수는 b이므로 행렬 P의 (1, 2) 성분이다.

$$\therefore PQ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1a + 1.1b \\ 1.1c + 1.1d \end{pmatrix} \text{이므로 행렬} \\ PQ \text{의 } (1, 1) \text{ 성분은 } 1.1a + 1.1b \text{이다.}$$

한편 올해 A 지역의 전기 자동차 판매량이 작년보다
상반기와 하반기 모두 10%씩 늘었으므로 A 지역에서
올해 판매된 전기 자동차 수는

$$1.1a + 1.1b$$

따라서 행렬 PQ의 (1, 1) 성분과 같다.

$$\therefore PR = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85a + 0.95b \\ 0.85c + 0.95d \end{pmatrix}$$

행렬 PR의 (2, 1) 성분이 2.65d이므로

$$0.85c + 0.95d = 2.65d, \quad 1.7d = 0.85c$$

$$\therefore d = \frac{1}{2}c$$

따라서 B 지역에서 작년 하반기에 판매된 전기 자
동 차 수는 B 지역에서 작년 상반기에 판매된 전기 자
동 차 수의 $\frac{1}{2}$ 이다.

이상에서 옳은 것은 $\neg, \textcircled{2}$ 이다.

답 $\neg, \textcircled{2}$

두 행렬 A, B가 모두 이
차 정사각행렬이므로 두
행렬 $A+2B, 2A-B$
도 모두 이차 정사각행
렬이다.

$$(2 \times 1 \text{ 행렬}) \\ \times (1 \times 2 \text{ 행렬}) \\ = (2 \times 2 \text{ 행렬})$$

올해 B 지역의 전기 자
동 차 판매량

일품 BOX

08 방정식 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$ 의 한 해근이 ω 이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$$\begin{aligned} \therefore A^2 &= \begin{pmatrix} \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^4+\omega & \omega^3+\omega^2+\omega \\ \omega^2+\omega+1 & \omega^2+3\omega+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega \end{pmatrix} \\ &= 2\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\omega E \end{aligned}$$

$$\therefore A^6 = (A^2)^3 = (2\omega E)^3 = 8\omega^3 E^3 = 8E \quad \text{답 ③}$$

💡 비밀노트

방정식 $x^3-1=0$ 의 한 해근을 ω 라 하면

$$\omega^2+\omega+1=0, \omega^3=1$$

이므로

$$\omega^2=-\omega-1, \omega^3=1, \omega^4=\omega, \omega^5=\omega^2=-\omega-1, \omega^6=1, \dots$$

즉 ω^n (n 은 자연수)은 ω 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{09} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E,$$

$$A^4 = A^3 A = -E A = -A, A^5 = A^4 A = -A^2,$$

$$A^6 = (A^3)^2 = (-E)^2 = E$$

따라서 $A^n=E$ 를 만족시키는 자연수 n 은 6의 배수이다.

이때 100 이하의 자연수 중 6의 배수는

$$6, 12, 18, \dots, 96$$

의 16개이므로 자연수 n 의 개수는 16이다.

답 16

채점 기준	비율
① 자연수 n 이 6의 배수임을 알 수 있다.	80%
② 자연수 n 의 개수를 구할 수 있다.	20%

$$\mathbf{10} \quad \neg. A^2 B^2 = A A B B = A B A B = B A B A \\ = B B A A = B^2 A^2$$

$$\neg. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{이면 } A^2=E \text{ 이므로}$$

$$A^2 B^2 = B^2 A^2 \text{이지만}$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$BA^2 = BE = B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{이므로 } AB^2 \neq BA^2$$

$$\neg. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{이면 } A^2=B^2=E \text{이지만}$$

$$A \neq B, A \neq -B$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

$$\begin{aligned} &\omega^3+\omega^2+\omega \\ &= \omega(\omega^2+\omega+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &X^2 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)X \\ &+ \left[\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)\right]E \\ &= 0 \end{aligned}$$

행렬의 곱셈에서는 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않으므로 행렬을 곱하는 순서에 주의한다.

$$\begin{aligned} &A^2 - (a-a)A \\ &+ \{-a^2 - (-a^2-1)\}E \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{11} \quad A+B=E \text{ 이므로 } B=E-A$$

$$\begin{aligned} \therefore A^2-B^2 &= A^2-(E-A)^2 \\ &= A^2-(E-2A+A^2) \\ &= 2A-E \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 2A-E = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A 의 모든 성분의 합은

$$5+(-4)+4+4=9$$

답 9

채점 기준	비율
① A^2-B^2 을 A, E 로 나타낼 수 있다.	40%
② A 를 구할 수 있다.	40%
③ A 의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	20%

$$\text{다른 풀이} \quad A+B=E \text{ 이므로 } B=E-A$$

$A+B=E$ 의 양변의 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$A^2+AB=A \quad \therefore AB=-A^2+A$$

$A+B=E$ 의 양변의 오른쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$A^2+BA=A \quad \therefore BA=-A^2+A$$

따라서 $AB=BA$ 이므로

$$\begin{aligned} A^2-B^2 &= (A+B)(A-B) \\ &= E(A-B) = A-B \\ &= A-(E-A) = 2A-E \end{aligned}$$

$$\mathbf{12} \quad X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ 이므로 케일리-해밀턴 정}$$

리에 의하여

$$\begin{aligned} &X^2+X+E=O \\ \therefore X^{2028} &+ X^{2027} + X^{2026} + \dots + X + E \\ &= X^{2026}(X^2+X+E) + X^{2023}(X^2+X+E) \\ &\quad + \dots + X(X^2+X+E) + E \\ &= E \end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이 $X^2+X+E=O$ 의 양변에 행렬 X 를 곱하면

$$\begin{aligned} X^3+X^2+X &= O \quad \therefore X^3 = -X^2-X = E \\ \therefore X^{2028} &+ X^{2027} + X^{2026} + \dots + X + E \\ &= (X^3)^{676} + (X^3)^{675} X^2 + (X^3)^{675} X + (X^3)^{675} \\ &\quad + \dots + X + E \\ &= E + (X^2+X+E) + \dots + (X^2+X+E) \\ &= E \end{aligned}$$

13 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2+E=O, \text{ 즉 } A^2=-E$$

이므로

$$A^4 = (A^2)^2 = (-E)^2 = E$$

$$\begin{aligned}\therefore A^5 &= A^4 A = EA = A, \\ A^9 &= (A^4)^2 A = EA = A, \\ A^{13} &= (A^4)^3 A = EA = A, \dots\end{aligned}$$

즉 $A^n = A$ 를 만족시키는 자연수 n 은 $4k+1$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴이다.

따라서 두 자리 자연수 n 은 13, 17, 21, ..., 97의 22개이다. 13=4·3+1
97=4·24+1

답 22

(1, 1) 성분이 (1, 2) 성분보다 작으므로 행렬 A_2 는 조건 ②를 만족시킨다.

(1, 1) 성분이 (1, 2) 성분보다 크므로 행렬 A_3 은 조건 ④를 만족시킨다.

03 A_1 에서 $1 < 2$ 이므로

$$A_2 = A_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

A_2 에서 $2 > 1$ 이므로

$$A_3 = -PA_2 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

A_3 에서 $-4 < -3$ 이므로

$$A_4 = A_3 P = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

A_4 에서 $-3 > -4$ 이므로

$$\begin{aligned}A_5 &= -PA_4 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= A_1\end{aligned}$$

즉 자연수 k 에 대하여

$$A_{4k+1} = A_1, A_{4k+2} = A_2, A_{4k+3} = A_3, A_{4k+4} = A_4$$

$$\therefore A_{100} = A_{4 \cdot 24 + 4} = A_4 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A_{100} 의 (2, 1) 성분은 -1이다. 답 -1

04 $A+2B=E$ 에서 $A=E-2B$ 이므로

$$AB = (E-2B)B = B-2B^2$$

$$BA = B(E-2B) = B-2B^2$$

$$\therefore AB = BA$$

$$\begin{aligned}\neg. (A+2B)^2 &= A^2 + 2AB + 2BA + 4B^2 \\ &= -E + 4AB \quad (\because AB = BA)\end{aligned}$$

따라서 $-E + 4AB = E$ 이므로

$$4AB = 2E \quad \therefore AB = \frac{1}{2}E$$

$\neg. AB = BA$ 이므로

$$\begin{aligned}A^2 - 4B^2 &= (A-2B)(A+2B) \\ &= (A-2B)E = A-2B\end{aligned}$$

$\neg. A+2B=E$ 에서 $2B=E-A$ 이므로

$$4B^2 = (E-A)^2 = A^2 - 2A + E$$

또 $A^2 + 4B^2 = -E$ 에서 $4B^2 = -A^2 - E$ 이므로

$$A^2 - 2A + E = -A^2 - E$$

$$2A^2 - 2A + 2E = 0$$

$$\therefore A^2 - A + E = 0$$

이때 $(A+E)(A^2-A+E) = (A+E)0 = 0$ 에서

$$A^3 + E = 0 \quad \therefore A^3 = -E$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다. 답 ③

05 $T(X) = a+d=a$, $S(X) = ad-bc=\beta$ 라 하면 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$X^2 - aX + \beta E = 0, \text{ 즉 } X^2 = aX - \beta E$$

이므로

$$\begin{aligned}X^2 Y - Y X^2 &= (aX - \beta E)Y - Y(aX - \beta E) \\ &= a(XY - YX)\end{aligned}$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\because \text{조건 ⑦})$$

대신 + 수능

1등급을 결정하는 사고력 통합 문제

본책 107쪽

01 직선 l_1 의 방정식은 $y=2x+4$ 이므로

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

직선 l_2 의 방정식은 $y = -\frac{1}{4}x + 1$ 이므로

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A - 4AB = A(E - 4B)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A-4AB$ 가 나타내는 직선의 방정식은

$y=4x-12$ 이므로 구하는 x 절편은 3이다. 답 3

$$\frac{4-0}{0-(-2)} = 2$$

$$\frac{1-0}{0-4} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}A+2B &= E \text{ 이므로} \\ (A+2B)^2 &= E^2 = E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x-12 &= 0 \text{ 에서} \\ 4x &= 12 \quad \therefore x=3\end{aligned}$$

02 $(A+B)^2 = (A-B)^2$, $AB=BA$ 이므로

$$A^2 + 2AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2, \quad 4AB = 0$$

$$\therefore AB = 0$$

따라서

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + B^2,$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$= A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$$

$$= A^3 + B^3,$$

$$(A+B)^5 = (A+B)^2(A+B)^3$$

$$= (A^2 + B^2)(A^3 + B^3)$$

$$= A^5 + B^5 + AB(AB^2 + A^2B)$$

$$= A^5 + B^5,$$

$$(A+B)^{10} = [(A+B)^5]^2 = (A^5 + B^5)^2$$

$$= A^{10} + B^{10} + 2(AB)^5$$

$$= A^{10} + B^{10}$$

이므로 $= A+B$

답 ③

$$\begin{aligned}\therefore (X^2Y - YX^2)^2 &= a^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a^2 E\end{aligned}$$

따라서 조건 (나)에서 $a^2=1$ 이므로 $a=\pm 1$

$$\therefore T(X) = -1 \text{ 또는 } T(X) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편

$$\begin{aligned}X^4 &= (\alpha X - \beta E)^2 \\ &= \alpha^2 X^2 - 2\alpha\beta X + \beta^2 E \\ &= \alpha X - \beta E - 2\alpha\beta X + \beta^2 E \\ &= (\alpha - 2\alpha\beta)X + (\beta^2 - \beta)E\end{aligned}$$

이므로 조건 (다)에서

$$\begin{aligned}\{(\alpha - 2\alpha\beta)X + (\beta^2 - \beta)E\} + (\alpha X - \beta E) + E &= O \\ 2\alpha(1 - \beta)X + (\beta^2 - 2\beta + 1)E &= O \\ \therefore (1 - \beta)\{2\alpha X + (\beta^2 - 2\beta + 1)E\} &= O \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

그런데 조건 (가)에 의하여 $X \neq kE$ (k 는 0이 아닌 실수)

이므로 행렬 $2\alpha X + (\beta^2 - 2\beta + 1)E$ 는 영행렬이 아니다.

즉 $\textcircled{2}$ 이 성립하려면 $\beta=1$

$$\therefore S(X) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{3}$ 에서 $T(X) + S(X)$ 의 최댓값은

$$1 + 1 = 2 \quad \text{답 ⑤}$$

참고 조건 (가)에서 $X = kE$ (k 는 0이 아닌 실수)이면

$$kEY - Y(kE) = kY - kY = O$$

$$\therefore X \neq kE$$

$$\begin{aligned}a^2=10 \text{이므로} \\ a^2 X^2 &= X^2 \\ &= \alpha X - \beta E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^2 - 2\beta + 1 &= (\beta - 1)^2 \\ &= (1 - \beta)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\alpha X + (1 - \beta)E &= O \text{이면} \\ 2\alpha X &= (\beta - 1)E\end{aligned}$$

$$\therefore X = \frac{\beta - 1}{2\alpha} E$$

즉 $X \neq kE$ (k 는 0이 아닌 실수)이면

$$2\alpha X + (1 - \beta)E \neq O$$

(ii) $i=1, j=2$ 일 때,

$$D = (2+2)^2 - 16 = 0 \quad \therefore a_{12} = 1$$

(iii) $i=2, j=1$ 일 때,

$$D = (4+1)^2 - 16 = 9 > 0 \quad \therefore a_{21} = 2$$

(iv) $i=2, j=2$ 일 때,

$$D = (4+2)^2 - 16 = 20 > 0 \quad \therefore a_{22} = 2$$

$$\text{이상에서 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

답 ②

03 **전략** 다항식 $P(x)$ 를 일차식 $x-\alpha$ 로 나누었을 때의 나머지는 $P(\alpha)$ 임을 이용하여 행렬 A 를 구한다.

풀이 x^2+x 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 2이므로 $a_{11}=2$

x^3+x^2 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 2이므로

$$a_{12}=2$$

x^3+x^2 을 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 12이므로

$$a_{21}=12$$

$2x^4$ 을 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 32이므로

$$a_{22}=32$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 12 & 32 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$3B = 2A - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 12 & 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 21 & 60 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 B 의 모든 성분의 합은

$$1 + 7 + 20 = 28$$

답 ③

04 **전략** 먼저 전체 학생의 중간고사 성적과 기말고사 성적의 총점을 행렬의 곱셈을 이용하여 나타낸다.

풀이 전체 학생의 중간고사 성적과 기말고사 성적의 총점은 각각

$$80 \times 75 + 70 \times 85, 80 \times 60 + 70 \times 65$$

이를 행렬을 이용하여 나타내면

$$\begin{pmatrix} 80 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 & 60 \\ 85 & 65 \end{pmatrix}$$

이때 산출된 총점은

$$(80 \times 75 + 70 \times 85) \times 0.4$$

$$+ (80 \times 60 + 70 \times 65) \times 0.6$$

이므로 구하는 행렬의 곱은

$$\begin{pmatrix} 80 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 & 60 \\ 85 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

답 ③

참고 산출된 총점을 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 & 85 \\ 60 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 70 \end{pmatrix}$$

내신 수학

1등급을 굳히는 실전 마무리 문제

본책 108쪽

01 **전략** 주어진 행렬 P 에서 이차함수의 식을 구한 후 최솟값을 구한다.

풀이 행렬 $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & k \end{pmatrix}$ 에서 이차함수의 식은

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

이므로 이 이차함수는 $x=1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

$$\therefore k=2 \quad \text{답 ②}$$

02 **전략** 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 의 교점의 개수는 이차방정식 $f(x)=g(x)$ 의 판별식을 이용하여 구한다.

풀이 이차함수 $y=x^2-2ix$ 의 그래프와 직선

$y=jx-4$ 의 교점의 개수는 이차방정식

$$x^2 - 2ix = jx - 4, \text{ 즉 } x^2 - (2i+j)x + 4 = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(2i+j)\}^2 - 4 \cdot 4$$

$$= (2i+j)^2 - 16$$

(i) $i=1, j=1$ 일 때,

$$D = (2+1)^2 - 16 = -7 < 0 \quad \therefore a_{11} = 0$$

계수가 모두 실수인 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, 이 이차방정식의 서로 다른 실근의 개수는

$$\textcircled{1} D > 0 \rightarrow 2$$

$$\textcircled{2} D = 0 \rightarrow 1$$

$$\textcircled{3} D < 0 \rightarrow 0$$

05 [전략] $A^2, A^3, \dots$ 을 차례대로 구하여 규칙을 찾아 A^{10} 을 구한다.

풀이 $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

따라서 $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (n 은 자연수)이므로

$A^{10} = \begin{pmatrix} 1024 & 1023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^{10}B = \begin{pmatrix} 1024 & 1023 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ x & -2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1024 + 1023x & 1024x^2 - 2046 \\ x & -2 \end{pmatrix}$

이때 행렬 $A^{10}B$ 의 모든 성분의 합은

$1024x^2 + 1024x - 1024$ 이므로

$1024x^2 + 1024x - 1024 = 0$

$\therefore x^2 + x - 1 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 x 의 값의 합은 -1 이다. **답 ③**

06 [전략] $A+B=2E$ 의 양변의 왼쪽, 오른쪽에 각각 A 를 곱해 AB, BA 를 구한다.

풀이 $A+B=2E$ 의 양변의 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면

$A^2 + AB = 2A \quad \therefore AB = -A^2 + 2A$

$A+B=2E$ 의 양변의 오른쪽에 행렬 A 를 곱하면

$A^2 + BA = 2A \quad \therefore BA = -A^2 + 2A$

따라서 $AB=BA$ 이므로

$A^3 + B^3 = (A+B)^3 - 3AB(A+B)$
 $= (2E)^3 - 3(3E)(2E) = -10E$

$\therefore k = -10$ **답 ④**

07 [전략] 행렬의 연산의 성질을 이용한다.

풀이 $\neg$. $A=E$ 이면 $A^2 + BA = B^2 + AB$ 에서

$E + B = B^2 + B \quad \therefore B^2 = E$

그런데 $B = -E$ 이면 $B^2 = E$ 이지만 $B \neq E$ 이다.

$\therefore A^2 + BA = B^2 + AB$ 에서

$(A+B)A = (B+A)B$

이때 $A+B=E$ 이면

$EA = EB \quad \therefore A = B$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 이면

$A^2 + BA = B^2 + AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이지만

$(A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

이므로 $(A-B)(A+B) \neq O$

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다. **답 ②**

참고 $\square$. $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$

이때 $A^2 + BA = B^2 + AB$ 에서 $A^2 - B^2 = AB - BA$ 이므로

$(A-B)(A+B) = 2(AB - BA)$

그런데 일반적으로 $AB \neq BA$ 이므로 $2(AB - BA) \neq O$ 임을 알 수 있다.

08 [전략] $A^3 - A^2, A^4 - A^3, \dots, A^7 - A^6$ 을 두 행렬 A, E 로 나타낸 후 주어진 등식과 모두 더하여 A^7 에 대한 등식을 구한다.

풀이 $A^2 - A = -3(A - E)$ 에서

$A^3 - A^2 = -3(A^2 - A) = -3\{-3(A - E)\}$
 $= (-3)^2(A - E),$

$A^4 - A^3 = (-3)^2(A^2 - A) = (-3)^2\{-3(A - E)\}$
 $= (-3)^3(A - E),$

$\vdots$

$A^7 - A^6 = (-3)^6(A - E)$

이므로

$(A^7 - A^6) + (A^6 - A^5) + \dots + (A^2 - A)$

$= (-3)^6(A - E) + (-3)^5(A - E)$
 $+ \dots - 3(A - E)$

$A^7 - A = (-3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - 3^5 + 3^6)(A - E)$

$= 546A - 546E$

$\therefore A^7 - 547A + 546E = O$

$\therefore k = 546$ **답 ⑤**

다른 풀이 $A^2 - A = -3(A - E)$ 에서

$A^2 = -2A + 3E$

$A^3 = -2A^2 + 3A = -2(-2A + 3E) + 3A$
 $= 7A - 6E$

$A^6 = (7A - 6E)^2 = 49A^2 - 84A + 36E$
 $= 49(-2A + 3E) - 84A + 36E$

$= -182A + 183E$

$A^7 = -182A^2 + 183A$

$= -182(-2A + 3E) + 183A$

$= 547A - 546E$

따라서 $A^7 - 547A + 546E = O$ 이므로

$k = 546$

09 [전략] 두 행렬 $AB, A+B$ 를 구하여 $D(AB), D(A+B)$ 를 k 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $AB = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k-1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 3k & k^2 + 2 \\ k^2 - k + 4 & 4k - 2 \end{pmatrix}$

이므로

$D(AB) = 3k(4k - 2) - (k^2 + 2)(k^2 - k + 4)$
 $= -k^4 + k^3 + 6k^2 - 4k - 8$

$A+B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k-1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & k+2 \\ k+1 & k+2 \end{pmatrix}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 D(A+B) &= (k+1)(k+2) - (k+2)(k+1) = 0 \\
 D(AB) &= D(A+B) \text{에서} \\
 -k^4 + k^3 + 6k^2 - 4k - 8 &= 0 \\
 k^4 - k^3 - 6k^2 + 4k + 8 &= 0 \\
 (k+2)(k+1)(k-2)^2 &= 0 \\
 \therefore k &= -2 \text{ 또는 } k = -1 \text{ 또는 } k = 2 \\
 \text{따라서 모든 실수 } k \text{의 값의 합은} \\
 -2 + (-1) + 2 &= -1
 \end{aligned}$$

답 ②

10 [전략] 단위행렬 E 를 포함한 식에서는 곱셈 공식이 성립함을 이용한다.

[풀이] $(A^2 - A + E)(A^2 + A + E) = A^4 + A^2 + E$
이때

$$\begin{aligned}
 A^4 &= A^2 A^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2a+9 & 2a \\ 4 & 2a+1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 A^4 + A^2 + E &= \begin{pmatrix} 2a+9 & 2a \\ 4 & 2a+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2a+13 & 3a \\ 6 & 2a+1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

이때 행렬 $(A^2 - A + E)(A^2 + A + E)$ 의 모든 성분의 합이 41이므로

$$\begin{aligned}
 (2a+13) + 3a + 6 + (2a+1) &= 41 \\
 7a + 21 &= 41 \quad \therefore a = 3
 \end{aligned}$$

답 ③

11 [전략] $A \neq kE$ 인 경우에는 케일리-해밀턴 정리를 이용한다.

[풀이] $\neg, A = kE$ (k 는 실수)이면 $A^2 - A - 6E = O$ 에서

$$\begin{aligned}
 (kE)^2 - kE - 6E &= O \\
 \therefore (k^2 - k - 6)E &= O
 \end{aligned}$$

따라서 $k^2 - k - 6 = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 (k+2)(k-3) &= 0 \\
 \therefore k &= -2 \text{ 또는 } k = 3
 \end{aligned}$$

$\therefore \neg$ 에서 $A = -2E$ 또는 $A = 3E$ 이면 $a+d \neq 1$ 이므로

$$A \neq kE$$

즉 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

이므로

$$a+d=1, ad-bc=-6$$

$\therefore a+d \neq 1$ 이면 $A = kE$ (k 는 실수) 풀이므로 $\neg$ 에 의하여

$$A = -2E \text{ 또는 } A = 3E$$

따라서 행렬 A 는 2개가 존재한다.

이상에서 옳은 것은 $\neg, \perp$ 이다.

답 ③

$$P(k) = k^4 - k^3 - 6k^2 + 4k + 8$$

이라 하면

$$P(-2) = 0,$$

$$P(-1) = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(k)$ 를 인수분해할 수 있다.

12 [전략] 주어진 조건을 이용하여 행렬 B 의 성분을 행렬 A 의 성분으로 나타낸 후 그 합이 50임을 이용한다.

[풀이] $a_{11} = -a_{11}$ 이므로 $a_{11} = 0$

$a_{22} = -a_{22}$ 이므로 $a_{22} = 0$

또 $a_{21} = -a_{12}$ 이므로 $a_{21}^2 = a_{12}^2$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^2 \\ a_{12}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

이때 행렬 B 의 모든 성분의 합이 50이므로

$$2a_{12}^2 = 50$$

$$\therefore b_{12} = a_{12}^2 = 25$$

답 25

13 [전략] 행렬 A 의 거듭제곱을 A, E 에 대한 간단한 식이 될 때까지 차례대로 구해 본다.

$$[풀이] A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\therefore A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}$$

$$= A + E + A + E + \cdots + A + E$$

$$= 50A + 50E$$

$$= 50 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 50 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 100 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}$ 의 $(2, 1)$ 성분은 100이다.

답 100

14 [전략] $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 이라 하고 $B^2, B^3, \dots$ 을 구하여 규칙을 찾는다.

[풀이] $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 이라 하면

$$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

→ ①

$A = 2B$ 에서 $A^n = 2^n B^n$ 이므로

(i) $n = 3k - 2$ (k 는 자연수)일 때,

$B^n = B$ 이므로 행렬 A^n 의 모든 성분의 합은

$$2^n \{-2+1+(-3)+1\} = -3 \cdot 2^n$$

(ii) $n = 3k - 1$ (k 는 자연수)일 때,

$B^n = B^2$ 이므로 행렬 A^n 의 모든 성분의 합은

$$2^n \{1+(-1)+3+(-2)\} = 2^n$$

(iii) $n = 3k$ (k 는 자연수)일 때,

$B^n = E$ 이므로 행렬 A^n 의 모든 성분의 합은

$$2^n (1+1) = 2^{n+1}$$

이상에서 행렬 A^n 의 모든 성분의 합이 2^{n+1} 이 되는 자연수 n 은 3의 배수이므로 100 이하의 자연수 n 은

$$3, 6, 9, \dots, 99$$

의 33개이다.

→ ②

답 33

채점 기준	비율
① $B^3=E$ 임을 알 수 있다.	30%
② 자연수 n 의 개수를 구할 수 있다.	70%

15 [전략] 이차 정사각행렬 A 에 대하여 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$,

$A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ 이면 $A\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+r \\ q+s \end{pmatrix}$ 임을 이용한다.

[풀이] $A\begin{pmatrix} 3a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ 의 양변의 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$A^2\begin{pmatrix} 3a \\ b \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A^2\begin{pmatrix} 3a \\ b \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$ 을 변끼리 더하면

$$A^2\begin{pmatrix} 4a \\ 4b \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합은

$$6+10=16$$

답 16

채점 기준	비율
① $A^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 를 구할 수 있다.	80%
② $A^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	20%

16 [전략] 먼저 주어진 규칙에 따라 두 행렬 A, B 를 구한다.

[풀이] $a_{11}=3^1-2^2=-1$, $a_{12}=3^1-2^3=-5$,

$a_{21}=3^2-2^2=5$, $a_{22}=3^2-2^3=1$ 이므로

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{11}=\frac{|-1|-1}{2}=0, b_{12}=\frac{|-5|-1}{2}=2,$$

$$b_{21}=\frac{|5|-1}{2}=2, b_{22}=\frac{|1|-1}{2}=0\text{이므로}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서

$$A^2+B^2$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$$

$$=-20E$$

이므로

$$\frac{1}{5}(A^2+B^2)=-4E$$

$$\therefore \left\{\frac{1}{5}(A^2+B^2)\right\}^n=(-4E)^n=(-4)^nE$$

즉 행렬 $\left\{\frac{1}{5}(A^2+B^2)\right\}^n$ 의 모든 성분의 합은

$$n=1\text{일 때, } 2\cdot(-4)=-8$$

$$n=2\text{일 때, } 2\cdot(-4)^2=32$$

$$n=3\text{일 때, } 2\cdot(-4)^3=-128$$

$$n=4\text{일 때, } 2\cdot(-4)^4=512$$

$$n=5\text{일 때, } 2\cdot(-4)^5=-2048$$

:

따라서 행렬 $\left\{\frac{1}{5}(A^2+B^2)\right\}^n$ 의 모든 성분의 합의 절댓값이 세 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 값은 3, 4이므로 구하는 합은

$$3+4=7$$

답 7

17 [전략] 케일리-해밀턴 정리를 이용한다.

[풀이] 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2+A-2aE=O \quad \therefore A^2+A=2aE$$

$$\therefore A^3+A^2-6A=A(A^2+A)-6A$$

$$=A(2aE)-6A$$

$$=(2a-6)A$$

따라서 $(2a-6)A=O$ 이고 $A \neq O$ 이므로

$$2a-6=0 \quad \therefore a=3$$

답 3

채점 기준	비율
① 케일리-해밀턴 정리를 이용하여 A^2+A 를 E 로 나타낼 수 있다.	30%
② a 의 값을 구할 수 있다.	70%