

정답 및 풀이

I 도형의 방정식

01	평면좌표	2
02	직선의 방정식	9
03	원의 방정식	20
04	도형의 이동	36

II 집합과 명제

05	집합의 뜻과 표현	45
06	집합의 연산	52
07	명제	60

III 함수

08	함수	74
09	유리식과 유리함수	88
10	무리식과 무리함수	101

* 정답을 확인하려 할 때는 「빠른 정답 찾기」를 이용하면 편리합니다.

01 평면좌표

I. 도형의 방정식

개념정리

본책 6쪽

- ① $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ② 내분 ③ 내분점
 ④ $\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$ ⑤ $\frac{my_2+ny_1}{m+n}$
 ⑥ $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$

유형 쏘개기

본책 7쪽

01 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$ 이므로

$$\sqrt{(a-1-2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$$

양변을 제곱하면

$$(a-3)^2+4=20, \quad a^2-6a-7=0$$

$$(a+1)(a-7)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$-1+7=6$$

답 ③

02 $\overline{AB}=2\overline{OC}$ 에서 $\overline{AB}^2=4\overline{OC}^2$ 이므로

$$(a-1)^2+(-1-a)^2=4\{3^2+(-4)^2\}$$

$$2a^2+2=100, \quad a^2=49$$

$$\therefore a=7 (\because a>0)$$

답 7

03 $\overline{OB}=\sqrt{(-7)^2+3^2}=\sqrt{58}$

정사각형 OABC의 한 변의 길이를 a 라 하면

$$a^2+a^2=(\sqrt{58})^2 \quad \therefore a^2=29$$

따라서 구하는 넓이는 $a^2=29$

답 ⑤

다른 풀이 정사각형의 두 대각선은 서로를 수직이등분하고 그 길이가 같으므로

$$\overline{AC}=\overline{OB}=\sqrt{(-7)^2+3^2}=\sqrt{58}$$

$$\therefore \square OABC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{58} \cdot \sqrt{58} = 29$$

04 $0 \leq \overline{AB} \leq 6$ 에서 $\overline{AB}^2 \leq 6^2$ 이므로

$$(t+1)^2+(5-t)^2 \leq 36, \quad t^2-4t-5 \leq 0$$

$$(t+1)(t-5) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq t \leq 5$$

따라서 정수 t 는 $-1, 0, 1, \dots, 5$ 의 7개이다.

답 7

05 두 점 A, B가 동시에 출발한 지 t 초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0, 10-4t), (2t, 0)$ 이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(2t)^2+(-10+4t)^2}$$

$$=\sqrt{20t^2-80t+100}$$

$$=\sqrt{20(t-2)^2+20}$$

... ②

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $t=2$ 일 때 최솟값 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 를 갖는다.

... ③

답 $2\sqrt{5}$

채점 기준

비율

- ① t 초 후의 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다. 30 %
 ② 두 점 A, B 사이의 거리를 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다. 50 %
 ③ 두 점 A, B 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다. 20 %

06 점 P(a, b)가 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$$b=a-1$$

..... ㉠

또 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$(a+2)^2+(b-3)^2=(a-4)^2+(b-5)^2$$

$$a^2+4a+b^2-6b+13=a^2-8a+b^2-10b+41$$

$$\therefore 3a+b=7$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$$\therefore a+b=3$$

답 ③

07 P($a, 0$)이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-5)^2+(-2)^2=(a+1)^2+(-4)^2$$

$$a^2-10a+29=a^2+2a+17$$

$$-12a=-12 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore P(1, 0)$$

답 (1, 0)

08 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$a^2+(b-1)^2=a^2+(b-7)^2$$

$$a^2+b^2-2b+1=a^2+b^2-14b+49$$

$$12b=48 \quad \therefore b=4$$

한편 $\overline{OP}=5$ 에서 $\overline{OP}^2=25$ 이므로

$$a^2+b^2=25$$

위의 식에 $b=4$ 를 대입하면

$$a^2+16=25 \quad \therefore a^2=9$$

$$\therefore b^2-a^2=16-9=7$$

답 ②

09 $\triangle ABC$ 의 외심을 P(a, b)라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$ 이므로

$$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$$

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 에서 $(a+1)^2+(b-4)^2=a^2+(b+3)^2$

$$a^2+2a+b^2-8b+17=a^2+b^2+6b+9$$

$$\therefore a-7b=-4$$

..... ㉠

$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$ 에서 $a^2+(b+3)^2=(a-8)^2+(b-1)^2$

$$a^2+b^2+6b+9=a^2-16a+b^2-2b+65$$

$$\therefore 2a+b=7$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=1$

따라서 P(3, 1)이므로 외접원의 반지름의 길이는

$$\overline{BP}=\sqrt{3^2+(1+3)^2}=5$$

답 5

삼각형의 외심

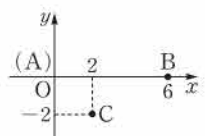
- ① 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
 ② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

10 오른쪽 그림과 같이 A 지점이 원점,

B 지점이 x 축 위에 오도록 좌표평면을

잡으면

$$A(0, 0), B(6, 0), C(2, -2)$$



자전거 대여소를 만든 지점을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} \text{이므로 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$$

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{에서 } a^2 + b^2 = (a-6)^2 + b^2$$

$$12a = 36 \quad \therefore a = 3$$

$$\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 \text{에서 } 3^2 + b^2 = (3-2)^2 + (b+2)^2$$

$$4b = 4 \quad \therefore b = 1$$

따라서 $P(3, 1)$ 이므로 구하는 거리는

$$\overline{AP} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ (km)} \quad \text{답 } \sqrt{10} \text{ km}$$

11 $O(0, 0)$, $P(a, b)$, $Q(-2, 4)$ 라 하면

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \overline{OP}, \sqrt{(a+2)^2 + (b-4)^2} = \overline{PQ}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b-4)^2} &= \overline{OP} + \overline{PQ} \\ &\geq \overline{OQ} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다. 답 ⑤

12 $P(1, -7)$, $Q(x, y)$, $R(k, 5)$ 라 하면

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+7)^2} = \overline{PQ}, \sqrt{(x-k)^2 + (y-5)^2} = \overline{QR}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y+7)^2} + \sqrt{(x-k)^2 + (y-5)^2} &= \overline{PQ} + \overline{QR} \\ &\geq \overline{PR} = \sqrt{(k-1)^2 + (5+7)^2} \\ &= \sqrt{k^2 - 2k + 145} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

따라서 $\sqrt{k^2 - 2k + 145} = 13$ 이므로 양변을 제곱하면 \dots \textcircled{2}

$$k^2 - 2k + 145 = 169, \quad k^2 - 2k - 24 = 0$$

$$(k+4)(k-6) = 0$$

$$\therefore k = 6 \quad (\because k > 0) \quad \dots \textcircled{3} \quad \text{답 } 6$$

13 $O(0, 0)$, $P(a, b)$, $Q(-2, -5)$, $R(3, -6)$, $S(4, -2)$ 라 하면

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \overline{OP}, \sqrt{(a+2)^2 + (b+5)^2} = \overline{PQ},$$

$$\sqrt{(a-3)^2 + (b+6)^2} = \overline{PR}, \sqrt{(a-4)^2 + (b-2)^2} = \overline{PS}$$

이므로 주어진 식은 $\overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{PS}$ 이다.

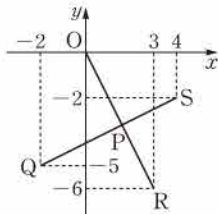
$\overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{PS}$ 의 값이 최소이려면 오른쪽 그림과 같이 점 P 가 $\overline{OR}$ 위에 있으면서 $\overline{QS}$ 위에 있어야 한다.

$$\therefore \overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{PS}$$

$$\geq \overline{OR} + \overline{QS}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-6)^2} + \sqrt{(4+2)^2 + (-2+5)^2}$$

$$= 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} \quad \text{답 } \textcircled{3}$$



14 $P(0, a)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (-5)^2 + (a-3)^2 + 1^2 + (a+1)^2$$

$$= 2a^2 - 4a + 36$$

$$= 2(a-1)^2 + 34$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $a=1$ 일 때 최솟값 34를 갖는다. 답 ③

15 점 P 가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $P(a, a+1)$ 이라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (a-4)^2 + (a+2)^2 + (a+2)^2 + (a+4)^2$$

$$= 4a^2 + 8a + 40$$

$$= 4(a+1)^2 + 36$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값은 $a=-1$ 일 때 최소이므로 점 P 의 x 좌표는 -1 이다. 답 ②

16 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= (a-2)^2 + (b-1)^2 + (a-5)^2 + (b+4)^2 + (a+1)^2 + b^2$$

$$= 3a^2 - 12a + 3b^2 + 6b + 47$$

$$= 3(a-2)^2 + 3(b+1)^2 + 32$$

이때 a, b 가 실수이므로 $(a-2)^2 \geq 0, (b+1)^2 \geq 0$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값은 $a=2, b=-1$ 일 때 최소이므로 $P(2, -1)$ 답 ②, -1

$$17 \overline{AB} = \sqrt{(2+2)^2 + (-3+1)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-2)^2 + (3+3)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-2-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{65}$$

$$\therefore \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다. 답 ④

18 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$ 이므로

$$(3-a)^2 + (6+1)^2 = (-1-a)^2 + (4+1)^2$$

$$a^2 - 6a + 58 = a^2 + 2a + 26$$

$$-8a = -32 \quad \therefore a = 4 \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

19 $C(x, y) (x > 0, y > 0)$ 라 하면 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(-3-3)^2 + (1+1)^2 = (x+3)^2 + (y-1)^2$$

$$\therefore x^2 + 6x + y^2 - 2y - 30 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

또 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로

$$(-3-3)^2 + (1+1)^2 = (3-x)^2 + (-1-y)^2$$

$$\therefore x^2 - 6x + y^2 + 2y - 30 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } 12x - 4y = 0 \quad \therefore y = 3x$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x^2 + 6x + 9x^2 - 6x - 30 = 0, \quad x^2 = 3$$

$$\therefore x = \sqrt{3} \quad (\because x > 0)$$

따라서 $y = 3\sqrt{3}$ 이므로

$$C(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}) \quad \text{답 } (\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$$

20 (1) $\overline{OA} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + (-a-b)^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$$

$$\overline{OB} = \sqrt{b^2 + (-a)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\therefore \overline{OA} = \overline{OB}, \overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

따라서 $\triangle OAB$ 는 $\angle O=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다. ... ②

(2) $\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \overline{OA}^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$... ③

답 (1) $\angle O=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 (2) $\frac{1}{2} (a^2 + b^2)$

채점 기준	비율
① 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
② $\triangle OAB$ 가 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	20 %
③ $\triangle OAB$ 의 넓이를 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %

21 (1) 직선 BC를 x 축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이다.

이때 $\triangle ABC$ 의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 (a, b) , $(c, 0)$ 이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $(-c, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\} \\ &= (a^2 + 2ac + c^2 + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2 + b^2) \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)\end{aligned}$$

또 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2$, $\overline{BM}^2 = c^2$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ \therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \\ \therefore (가) M (나) (-c, 0) (다) 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ (라) a^2 + b^2 + c^2\end{aligned}$$

(2) $\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 4$ 이므로 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 에서

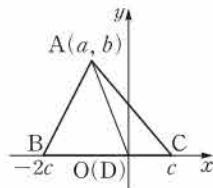
$$\begin{aligned}5^2 + 7^2 &= 2(\overline{AM}^2 + 4^2), \quad \overline{AM}^2 + 16 = 37 \\ \overline{AM}^2 &= 21 \quad \therefore \overline{AM} = \sqrt{21}\end{aligned}$$

답 풀이 참조

참고 이와 같은 삼각형의 성질을 파푸스(Pappus) 정리 또는 중선 정리라 한다.

22 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축으로 하고, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이다.

이때 $\triangle ABC$ 의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-2c, 0)$, $C(c, 0)$ 이라 하면

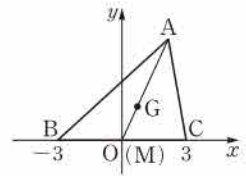


$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 &= \{(a+2c)^2 + b^2\} + 2\{(a-c)^2 + b^2\} \\ &= 3a^2 + 3b^2 + 6c^2 \\ &= 3(a^2 + b^2 + 2c^2) \quad \dots ② \\ 3\overline{AD}^2 + 6\overline{CD}^2 &= 3(a^2 + b^2) + 6c^2 \\ &= 3(a^2 + b^2 + 2c^2) \quad \dots ③ \\ \therefore \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 &= 3\overline{AD}^2 + 6\overline{CD}^2 \quad \dots ④\end{aligned}$$

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① $\triangle ABC$ 를 좌표평면 위에 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 정할 수 있다.	30 %
② $\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2$ 을 a, b, c 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ $3\overline{AD}^2 + 6\overline{CD}^2$ 을 a, b, c 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
④ $\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 3\overline{AD}^2 + 6\overline{CD}^2$ 이 성립함을 확인할 수 있다.	10 %

23 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이고 $B(-3, 0)$, $C(3, 0)$ 이다.



점 G는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이므로

$$\overline{AM} = 3\overline{MG} = 3\sqrt{3}$$

즉 $\overline{AM}^2 = 27$ 이므로 $A(a, b)$ 라 하면

$$a^2 + b^2 = 27 \quad \dots ⑦$$

$\overline{AB} = 7$ 에서 $\overline{AB}^2 = 49$ 이므로

$$\begin{aligned}(a+3)^2 + b^2 &= 49 \\ \therefore a^2 + 6a + b^2 &= 40 \quad \dots ⑧\end{aligned}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$a = \frac{13}{6}, b = \pm \frac{\sqrt{803}}{6}$$

따라서 $A\left(\frac{13}{6}, \frac{\sqrt{803}}{6}\right)$ 또는 $A\left(\frac{13}{6}, -\frac{\sqrt{803}}{6}\right)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(3 - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{803}}{6}\right)^2} = \sqrt{23} \quad \text{답 ④}$$

다른 풀이 $\overline{AM} = 3\overline{MG} = 3\sqrt{3}$, $\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 3$ 이고, 파푸스 정리에 의하여 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$$\begin{aligned}7^2 + \overline{AC}^2 &= 2\{(3\sqrt{3})^2 + 3^2\}, \quad 49 + \overline{AC}^2 = 72 \\ \overline{AC}^2 &= 23 \quad \therefore \overline{AC} = \sqrt{23}\end{aligned}$$

24 직선 BC를 x 축으로 하고, 직선 AB를 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.

이때 나머지 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $A(0, b)$, $C(a, 0)$, $D(a, b)$ 라 하고 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= \{x^2 + (y-b)^2\} + \{(x-a)^2 + y^2\} \\ &= x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 \\ \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 &= x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 \\ \therefore \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 \\ \therefore (가) B (나) x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 \\ (다) x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2\end{aligned}$$

답 풀이 참조

$$25 \quad \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2}{2+1} = 0, \quad \frac{2 \cdot 6 + 1 \cdot (-3)}{2+1} = 3 \text{이므로}$$

$P(0, 3)$

따라서 $\overline{OP}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0}{2}, \frac{3}{2}\right), \text{ 즉 } \left(0, \frac{3}{2}\right) \quad \text{답 } \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

26 $A(a)$, $B(b)$ 라 하면 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표가 $-\frac{3}{2}$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} = -\frac{3}{2} \quad \therefore a+b = -3 \quad \dots ⑦$$

$\overline{AB}$ 를 3:2로 내분하는 점의 좌표가 -1이므로

$$\frac{3b+2a}{3+2} = -1 \quad \therefore 2a+3b = -5 \quad \dots ⑧$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4, b=1$

따라서 $A(-4), B(1)$ 이므로

$$\overline{AB}=|-4-1|=5$$

답 ③

27 수직선 위의 두 점 $P(\sqrt{5}), Q(\sqrt{7})$ 에 대하여 점 A는 $\overline{PQ}$ 의 중점이다.

$B\left(\frac{3\cdot\sqrt{7}+1\cdot\sqrt{5}}{3+1}\right)$ 이므로 점 B는 $\overline{PQ}$ 를 3:1로 내분하는 점이다.

$C\left(\frac{2\cdot\sqrt{7}+3\cdot\sqrt{5}}{2+3}\right)$ 이므로 점 C는 $\overline{PQ}$ 를 2:3으로 내분하는 점이다.

따라서 세 점 A, B, C를

수직선 위에 나타내면 오

른쪽 그림과 같으므로 왼쪽에 있는 것부터 차례대로 나열하면 C, A, B이다.



답 C, A, B

28 $\overline{AB}$ 를 3:b로 내분하는 점의 좌표가 $(-1, 1)$ 이므로

$$\frac{3\cdot 1+b\cdot(-4)}{3+b}=-1, \frac{3\cdot a+b\cdot 7}{3+b}=1$$

$$3-4b=-3-b, 3a+7b=3+b$$

$$\therefore a=-3, b=2$$

→ ①

$$\therefore B(1, -3), C(-5, 3)$$

→ ②

따라서 $\overline{BC}$ 를 5:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{5\cdot(-5)+1\cdot 1}{5+1}, \frac{5\cdot 3+1\cdot(-3)}{5+1}\right), \text{ 즉 } (-4, 2)$$

답 $(-4, 2)$

채점 기준	비율
① a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
② 두 점 B, C의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
③ $\overline{BC}$ 를 5:1로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %

29 점 $P(a, b)$ 는 $\overline{AB}$ 를 1:2로 내분하는 점이므로

$$a=\frac{1\cdot 7+2\cdot(-2)}{1+2}=1, b=\frac{1\cdot 4+2\cdot 1}{1+2}=2$$

점 $Q(c, d)$ 는 $\overline{AB}$ 를 2:1로 내분하는 점이므로

$$c=\frac{2\cdot 7+1\cdot(-2)}{2+1}=4, d=\frac{2\cdot 4+1\cdot 1}{2+1}=3$$

$$\therefore bc-ad=5$$

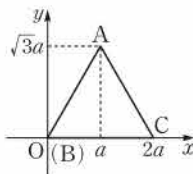
답 ⑤

30 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $2a$ 라 하면 $A(a, \sqrt{3}a), C(2a, 0)$

$\overline{BC}$ 위의 점 P의 좌표를 $(k, 0) (0 \leq k \leq 2a)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= (k-a)^2 + (-\sqrt{3}a)^2 + (k-2a)^2 \\ &= 2k^2 - 6ak + 8a^2 \\ &= 2\left(k - \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{7}{2}a^2 \end{aligned}$$



따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값은 $k = \frac{3}{2}a$ 일 때 최소이므로

$$\begin{aligned} \overline{BP} : \overline{CP} &= \frac{3}{2}a : \left(2a - \frac{3}{2}a\right) \\ &= \frac{3}{2}a : \frac{1}{2}a \\ &= 3 : 1 \end{aligned}$$

즉 점 P는 $\overline{BC}$ 를 3:1로 내분하는 점이므로

$$m=3, n=1$$

$$\therefore mn=3$$

답 ②

31 $\overline{AB}$ 를 $a:(1-a)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{a\cdot 1+(1-a)\cdot(-4)}{a+(1-a)}, \frac{a\cdot 3+(1-a)\cdot(-1)}{a+(1-a)}\right)$$

$$\therefore (5a-4, 4a-1)$$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$5a-4 < 0, 4a-1 > 0$$

$$\therefore \frac{1}{4} < a < \frac{4}{5}$$

답 $\frac{1}{4} < a < \frac{4}{5}$

32 $\overline{PQ}$ 를 1:k로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{7-2k}{1+k}, \frac{-4+2k}{1+k}\right)$$

이 점이 직선 $4x+y=-1$ 위에 있으므로

$$4\cdot\frac{7-2k}{1+k} + \frac{-4+2k}{1+k} = -1$$

$$-6k+24=-1-k, -5k=-25$$

$$\therefore k=5$$

답 5

33 $\overline{AB}$ 를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{9m-3n}{m+n}, \frac{2m-4n}{m+n}\right)$$

→ ①

이 점이 x축 위에 있으므로

$$\frac{2m-4n}{m+n}=0 \quad (y\text{좌표})=0$$

$$2m-4n=0 \quad \therefore m=2n$$

$$\therefore m:n=2:1$$

→ ②

이때 m, n 은 서로소인 자연수이므로

$$m=2, n=1$$

$$\therefore m-n=1$$

→ ③

답 1

채점 기준	비율
① $\overline{AB}$ 를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
② $m:n$ 을 구할 수 있다.	40 %
③ $m-n$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

34 $\overline{AB}$ 를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3m+an}{m+n}, \frac{-2m+bn}{m+n}\right)$$

이 점이 x축 위에 있으므로

$$\frac{-2m+bn}{m+n}=0, \quad -2m+bn=0$$

$$\therefore m=\frac{1}{2}bn \quad \dots\dots ㉞$$

$\overline{AC}$ 를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{-4m+an}{m+n}, \frac{6m+bn}{m+n} \right)$$

이 점이 y 축 위에 있으므로

$$\frac{-4m+an}{m+n}=0, \quad -4m+an=0$$

$$\therefore m=\frac{1}{4}an \quad \dots\dots ㉟$$

$$\textcircled{㉞}, \textcircled{㉟} \text{에서} \quad \frac{1}{2}bn=\frac{1}{4}an \quad \therefore a=2b \quad (\because n>0)$$

이때 a, b 는 10 이하의 자연수이므로 점 A는

$$(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5)$$

의 5개이고 만들 수 있는 $\triangle ABC$ 의 개수도 5이다. 답 ③

35 $\overline{AB}=2\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$

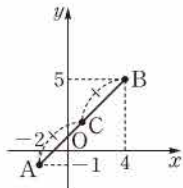
(i) 점 C가 $\overline{AB}$ 위의 점일 때,

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 를 1:1

로 내분하는 점이므로

$$\frac{-2+4}{2}=1, \quad \frac{-1+5}{2}=2$$

$$\therefore C(1, 2)$$



(ii) 점 C가 $\overline{AB}$ 의 연장선 위의 점일 때,

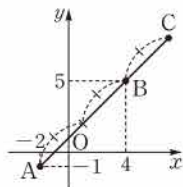
점 B는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 를 2:1로 내분하는 점이므로 C(a, b)라 하면

$$\frac{2a-2}{2+1}=4, \quad \frac{2b-1}{2+1}=5$$

$$2a-2=12, \quad 2b-1=15$$

$$\therefore a=7, b=8$$

$$\therefore C(7, 8)$$



(i), (ii)에서 점 C의 좌표는 (1, 2), (7, 8)이다.

답 (1, 2), (7, 8)

예제 B **탐구**

두 점 A, B를 지나는 직선 위의 점 C에 대하여

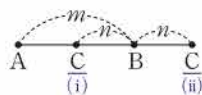
$$\overline{AB}:\overline{BC}=m:n$$

을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

① $m>n$ 일 때

(i) 점 C는 $\overline{AB}$ 를 $(m-n):n$ 으로 내분하는 점

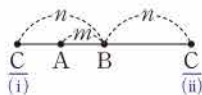
(ii) 점 B는 $\overline{AC}$ 를 $m:n$ 으로 내분하는 점



② $m<n$ 일 때

(i) 점 A는 $\overline{CB}$ 를 $(n-m):m$ 으로 내분하는 점

(ii) 점 B는 $\overline{AC}$ 를 $m:n$ 으로 내분하는 점



36 $\triangle OBC$ 의 넓이가 $\triangle AOC$ 의 넓이의 3배이므로

$$\overline{AO}:\overline{BO}=1:3$$

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$a>0$ 에서 원점 O는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 를 1:3으로 내분하는 점이므로

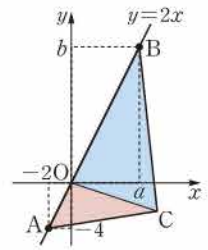
$$\frac{a+3\cdot(-2)}{1+3}=0,$$

$$\frac{b+3\cdot(-4)}{1+3}=0$$

$$\therefore a=6, b=12$$

$$\therefore a-b=-6$$

답 ①



37 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$ 이므로

$$\triangle OAB:\triangle OAC=6:24=1:4$$

$$\therefore \overline{AB}:\overline{AC}=1:4$$

$b>0$ 에서 점 B는 오른쪽 그림과 같이

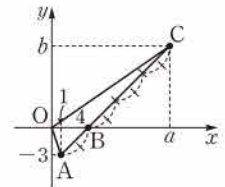
$\overline{AC}$ 를 1:3으로 내분하는 점이므로

$$\frac{a+3}{1+3}=4, \quad \frac{b-9}{1+3}=0$$

$$\therefore a=13, b=9$$

$$\therefore a-2b=-5$$

답 ⑤



38 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표가 (-3, 4)이므로

$$\frac{-3+a-1-2b}{3}=-3, \quad \frac{5+b+3+a}{3}=4$$

$$\therefore a-2b=-5, a+b=4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

$$\therefore ab=3$$

답 ①

39 $\triangle OAB$ 의 무게중심의 좌표가 (-6, 8)이므로

$$\frac{0+x_1+x_2}{3}=-6, \quad \frac{0+y_1+y_2}{3}=8$$

$$x_1+x_2=-18, y_1+y_2=24$$

$$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=-9, \quad \frac{y_1+y_2}{2}=12$$

따라서 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는 (-9, 12)이다. 답 (-9, 12)

40 $\triangle ABC$ 의 무게중심을 G, $\overline{AC}$ 의 중점을 M이라 하면 점 G는 $\overline{BM}$ 을 2:1로 내분하는 점이다.

이때 B(a, b)라 하면

$$\frac{2\cdot 3+1\cdot a}{2+1}=5, \quad \frac{2\cdot 6+1\cdot b}{2+1}=1$$

$$6+a=15, 12+b=3$$

$$\therefore a=9, b=-9$$

따라서 점 B의 좌표는 (9, -9)이다. 답 (9, -9)

다른 풀이 A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)라 하면 $\overline{AC}$ 의 중점의 좌표가 (3, 6)이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3, \quad \frac{y_1+y_2}{2}=6$$

$$\therefore x_1+x_2=6, y_1+y_2=12$$

B(a, b)라 하면 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표가 (5, 1)이므로

$$\frac{x_1+x_2+a}{3}=5, \quad \frac{y_1+y_2+b}{3}=1$$

$$6+a=15, 12+b=3 \quad \therefore a=9, b=-9$$

$$\therefore B(9, -9)$$

41 세 점 D, E, F는

$$D\left(\frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 10}{1+2}, \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 5}{1+2}\right), \text{ 즉 } D(6, 4)$$

$$E\left(\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2)}{1+2}, \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2}{1+2}\right), \text{ 즉 } E(0, 1)$$

$$F\left(\frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 4}{1+2}, \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1)}{1+2}\right), \text{ 즉 } F(6, 1)$$

따라서 $\triangle DEF$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{6+0+6}{3}, \frac{4+1+1}{3}\right), \text{ 즉 } (4, 2) \quad \text{답 (4, 2)}$$

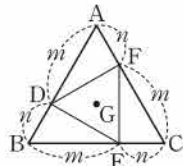
다른 풀이 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{10-2+4}{3}, \frac{5+2-1}{3}\right), \text{ 즉 } (4, 2)$$

예제 B $\frac{m}{n}$

삼각형의 무게중심의 성질

$\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA를 $m : n (m > 0, n > 0)$ 으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 할 때, $\triangle ABC$ 와 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 일치한다.



42 $P(x, y)$ 라 하면

$$\begin{aligned} & \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \\ &= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 \\ & \quad + (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 \\ &= 3x^2 - 2(x_1+x_2+x_3)x + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ & \quad + 3y^2 - 2(y_1+y_2+y_3)y + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ &= 3\left(x - \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ & \quad + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - \frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3} - \frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값은 $x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$,

$y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 일 때 최소이므로 점 P는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이다. 답 ②

43 $D(a, b)$ 라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-1+4}{2} = \frac{1+a}{2}, \quad \frac{2+1}{2} = \frac{0+b}{2}$$

$$\therefore a=2, b=3$$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 (2, 3)이다. 답 (2, 3)

44 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$ 라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 각각의 중점이다. → ①

$\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+x_1}{2}, \frac{6+y_1}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{3+x_1}{2} = 3, \quad \frac{6+y_1}{2} = 3$$

$$\therefore x_1=3, y_1=-3$$

$$\therefore C(3, -3) \quad \text{→ ②}$$

$\overline{BD}$ 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+x_2}{2}, \frac{3+y_2}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{-1+x_2}{2} = 3, \quad \frac{3+y_2}{2} = 3$$

$$\therefore x_2=7, y_2=0$$

$$\therefore D(7, 0) \quad \text{→ ③}$$

$$\text{답 } C(3, -3), D(7, 0)$$

채점 기준	비율
① 두 대각선 AC, BD의 교점이 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 각각의 중점임을 알 수 있다.	20 %
② 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
③ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

45 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 x 좌표에서

$$\frac{a}{2} = \frac{4+b}{2} \quad \therefore b=a-4 \quad \text{..... ①}$$

또 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(4-a)^2 + (-5+2)^2 = (-4)^2 + (-2+5)^2$$

$$a^2 - 8a = 0, \quad a(a-8) = 0$$

$$\therefore a=8 \quad (\because a \neq 0)$$

$a=8$ 을 ①에 대입하면 $b=4$ $a=0$ 이면 점 A와 점 C가 일치하므로 사각형 ABCD가 만들어지지 않는다.

$$\therefore a+b=12 \quad \text{답 ③}$$

다른 풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$$\frac{a}{2} = \frac{4+b}{2}, \quad b=4 \quad \text{직선 AC와 직선 BD가 수직이고 직선 AC의 방정식이 } y=-2 \text{이므로 직선 BD의 방정식은 } x=4$$

$$\therefore a=8, b=4$$

46 $C(c, d)$ 라 하면 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표가 (2, 1)이므로

$$\frac{-3+4+c}{3} = 2, \quad \frac{-1+1+d}{3} = 1$$

$$\therefore c=5, d=3$$

$$\therefore C(5, 3)$$

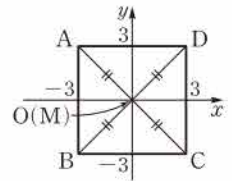
$\square ABCD$ 에서 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-3+5}{2} = \frac{4+a}{2}, \quad \frac{-1+3}{2} = \frac{1+b}{2}$$

$$\therefore a=-2, b=1$$

$$\therefore ab=-2 \quad \text{답 -2}$$

47 오른쪽 그림과 같이 점 M을 지나고 두 직선 AB, AD에 수직인 직선을 각각 x 축, y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이고 $A(-3, 3)$, $B(-3, -3)$, $C(3, -3)$, $D(3, 3)$ 이므로



$$G\left(\frac{-3-3+3}{3}, \frac{3-3+3}{3}\right),$$

$$G'\left(\frac{-3+3+0}{3}, \frac{-3-3+0}{3}\right)$$

$$\therefore G(-1, 1), G'(0, -2)$$

$$\therefore \overline{GG'} = \sqrt{(0+1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10} \quad \text{답 ②}$$

48 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2+5)^2 + (-1-3)^2} = 5,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(7+5)^2 + (8-3)^2} = 13 \text{이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 5 : 13$$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$ 를 5 : 13으로 내분하는 점이므로

$$\frac{5 \cdot 7 + 13 \cdot (-2)}{5+13} = \frac{1}{2}, \quad \frac{5 \cdot 8 + 13 \cdot (-1)}{5+13} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore D\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad \text{답 } \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$49 \quad \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{CD}$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2 + (-2+5)^2} = 5,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-7+1)^2 + (3+5)^2} = 10 \text{이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 5 : 10 = 1 : 2$$

$$\text{따라서 } S_1 : S_2 = 1 : 2 \text{이므로} \quad \frac{S_2}{S_1} = 2 \quad \text{답 } 2$$

50 점 I는 $\triangle ABC$ 의 내심이므로 직선 AI는 $\angle A$ 의 이등분선이다.

$$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5-1)^2 + (-9)^2} = 3\sqrt{13},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{13} \text{이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 3\sqrt{13} : \sqrt{13} = 3 : 1$$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$ 를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$a = \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot (-5)}{3+1} = 1, \quad b = \frac{3 \cdot 6 + 1 \cdot 0}{3+1} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore ab = \frac{9}{2} \quad \text{답 } 4$$

B $\frac{9}{2}$

삼각형의 내심

- ① 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이다.
- ② 삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 같다.

51 $\overline{AC}$ 는 $\angle A$ 의 외각의 이등분선이므로

$$\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{BC} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overline{AO} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{AB} = \sqrt{(3-4)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10} \text{이므로}$$

$$\overline{OC} : \overline{BC} = 2\sqrt{5} : \sqrt{10} = \sqrt{2} : 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

따라서 점 B는 $\overline{OC}$ 를 $(\sqrt{2}-1) : 1$ 로 내분하는 점이므로

$$\frac{(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}-1+1} = 3, \quad \frac{(\sqrt{2}-1)b}{\sqrt{2}-1+1} = -1$$

$$\therefore a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 6+3\sqrt{2}, \quad b = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = -2-\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\therefore a-b = 8+4\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{답 } 8+4\sqrt{2}$$

채점 기준	비율
① $\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{BC}$ 임을 알 수 있다.	30 %
② $\overline{OC} : \overline{BC}$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

52 $P(a, b)$ 라 하면 점 P는 직선 $x+3y-6=0$ 위의 점이므로

$$a+3b-6=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$Q(x, y)$ 라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{1 \cdot a + 3 \cdot 3}{1+3} = \frac{a+9}{4}, \quad y = \frac{1 \cdot b + 3 \cdot 5}{1+3} = \frac{b+15}{4}$$

$$\therefore a=4x-9, \quad b=4y-15 \quad \dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$(4x-9)+3(4y-15)-6=0$$

$$\therefore x+3y-15=0 \quad \text{답 } 3$$

53 $P(x, y)$ 라 하면 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 2$ 이므로

$$(x+4)^2 + (y+2)^2 - \{(x-1)^2 + (y+1)^2\} = 2$$

$$x^2 + 8x + y^2 + 4y + 20 - (x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2) = 2$$

$$10x + 2y + 16 = 0$$

$$\therefore 5x + y + 8 = 0 \quad \text{답 } 5x+y+8=0$$

54 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(x-7)^2 + (y+3)^2 = (x+1)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 - 14x + y^2 + 6y + 58 = x^2 + 2x + y^2 - 10y + 26$$

$$-16x + 16y + 32 = 0$$

$$\therefore x-y-2=0 \quad \text{답 } x-y-2=0$$

02 직선의 방정식

I. 도형의 방정식

개념정리

본책 16쪽

- ① $y - y_1 = m(x - x_1)$ ② $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
 ③ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ④ = ⑤ ≠ ⑥ -1
 ⑦ $ax_1 + by_1 + c$

유형 뽀개기

본책 17쪽

01 두 점 $(-7, 2), (3, -4)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는 $(\frac{-7+3}{2}, \frac{2-4}{2})$, 즉 $(-2, -1)$
 따라서 기울기가 -3 이고 점 $(-2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-1) = -3[x - (-2)]$$

$$\therefore y = -3x - 7$$

02 직선 $2x - 5y + 4 = 0$ 의 기울기는 $\frac{2}{5}$ 이므로 기울기가 $\frac{2}{5}$ 이고 점 $(3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{2}{5}(x - 3)$$

$$\therefore -2x + 5y + 1 = 0$$

따라서 $a = -2, b = 5$ 이므로

$$ab = -10$$

03 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$(\frac{-2+3-4}{3}, \frac{-1-3+5}{3}), \text{ 즉 } (-1, \frac{1}{3}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

따라서 점 $(-1, \frac{1}{3})$ 을 지나고 x 축에 수직인 직선의 방정식은

$$x = -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

답 $x = -1$

채점 기준	비율
① $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
② 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %

04 점 $(1, -2)$ 를 지나고 기울기가 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y - (-2) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

$$\therefore x - \sqrt{3}y - 1 - 2\sqrt{3} = 0$$

따라서 $a = -\sqrt{3}, b = -1 - 2\sqrt{3}$ 이므로

$$a - b = 1 + \sqrt{3}$$

05 두 직선 $x = 2, y = -1$ 은 서로 수직이고 점 $(2, -1)$ 에서 만난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 이므로 직선 l 의 기울기는

$$\tan 45^\circ = 1$$

이때 직선 l 은 점 $(2, -1)$ 을 지나므로 직선 l 의 방정식은

$$y - (-1) = 1 \cdot (x - 2) \quad \therefore y = x - 3$$

따라서 직선 l 의 x 절편, y 절편이 각각 $3, -3$ 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

답 ②

06 두 점 $(4, 1), (-2, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{-2-1}{-2-4}(x - 4) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - 1$$

두 점 $(a, -5), (6, b)$ 가 직선 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 위에 있으므로

$$-5 = \frac{1}{2}a - 1, b = \frac{1}{2} \cdot 6 - 1$$

따라서 $a = -8, b = 2$ 이므로 $a + b = -6$

답 ②

07 직선 AC의 방정식은 $y = \frac{0-4}{3-(-3)}(x - 3)$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

직선 BD의 방정식은 $y = \frac{6-0}{2-(-4)}(x - (-4))$

$$\therefore y = x + 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $x = -\frac{6}{5}, y = \frac{14}{5}$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-\frac{6}{5}, \frac{14}{5})$ 이다.

$$\text{답 } (-\frac{6}{5}, \frac{14}{5})$$

08 $\overline{AB}$ 를 $1:2$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$(\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5)}{1+2}, \frac{1 \cdot (-7) + 2 \cdot (-1)}{1+2}),$$

$$\text{즉 } (-2, -3)$$

따라서 두 점 $(-2, -3), (1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{3 - (-3)}{1 - (-2)}(x - 1)$$

$$\therefore y = 2x + 1$$

답 $y = 2x + 1$

09 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 y 축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 x 축에 내린 수선의 발을 F라 하면

$$\triangle AOB \cong \triangle BEC \cong \triangle DFA$$

(RHA 합동)

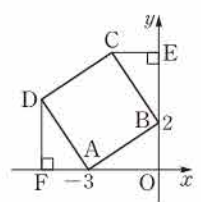
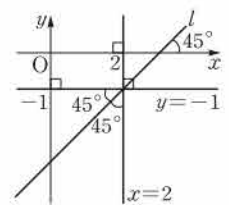
즉 $\overline{CE} = 2, \overline{BE} = 3$ 이므로

$$C(-2, 2+3), \text{ 즉 } C(-2, 5)$$

$\overline{FA} = 2, \overline{DF} = 3$ 이므로

$$D(-3-2, 3), \text{ 즉 } D(-5, 3)$$

→ ①



따라서 직선 CD의 방정식은

$$y-5 = \frac{3-5}{-5-(-2)}\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}x + \frac{19}{3} \quad \dots ②$$

이 직선의 x 절편은 $-\frac{19}{2}$, y 절편은 $\frac{19}{3}$ 이므로 구하는 합은

$$-\frac{19}{2} + \frac{19}{3} = -\frac{19}{6} \quad \dots ③$$

답 $-\frac{19}{6}$

채점 기준	비율
① 두 점 C, D의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
② 직선 CD의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
③ 직선 CD의 x 절편과 y 절편의 합을 구할 수 있다.	20 %

10 (i) 세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있지 않을 때,

$\triangle ABP$ 에서

$$\overline{AP} < \overline{AB} + \overline{BP} \text{이므로 } \overline{AP} - \overline{BP} < \overline{AB}$$

$$\overline{BP} < \overline{AB} + \overline{AP} \text{이므로 } -\overline{AB} < \overline{AP} - \overline{BP}$$

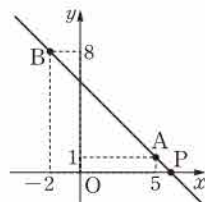
$$\therefore |\overline{AP} - \overline{BP}| < \overline{AB}$$

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

(ii) 세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있을 때,

오른쪽 그림과 같이 점 P는 직선 AB와 x 축의 교점이므로

$$|\overline{AP} - \overline{BP}| = \overline{BP} - \overline{AP} = \overline{AB}$$



(i), (ii)에서 $|\overline{AP} - \overline{BP}| \leq \overline{AB}$ 이므로

$|\overline{AP} - \overline{BP}|$ 의 값은 세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있을 때 최대이다.

직선 AB의 방정식은

$$y-1 = \frac{8-1}{-2-5}(x-5) \quad \therefore y = -x+6$$

따라서 $|\overline{AP} - \overline{BP}|$ 의 값은 P(6, 0)일 때 최대이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{(6-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \text{답 } ③$$

11 x 절편이 5, y 절편이 -2인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1$$

이 직선이 점 $(2k, k)$ 를 지나므로

$$\frac{2k}{5} - \frac{k}{2} = 1, \quad -\frac{k}{10} = 1$$

$$\therefore k = -10 \quad \text{답 } ①$$

12 직선 $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$ 의 x 절편이 5이므로 P(5, 0)

직선 $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3$, 즉 $\frac{x}{6} - \frac{y}{9} = 1$ 의 y 절편이 -9이므로 Q(0, -9)
 $\hookrightarrow$ 우변이 1이 되도록 양변을 3으로 나눈다.

따라서 직선 PQ의 방정식은

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{9} = 1 \quad \text{답 } \frac{x}{5} - \frac{y}{9} = 1$$

13 x 절편을 a ($a \neq 0$)라 하면 y 절편은 $3a$ 이므로 직선 l 의 방정

$$\text{식은 } \frac{x}{a} + \frac{y}{3a} = 1$$

이 직선이 점 (1, 6)을 지나므로

$$\frac{1}{a} + \frac{6}{3a} = 1, \quad \frac{3}{a} = 1 \quad \therefore a = 3$$

따라서 구하는 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1 \quad \text{답 } \frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$$

14 $x+ay=2a$ 에서 $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2} = 1$

이 직선과 x 축, y 축의 교점을 각각 A, B라 하면

$$A(2a, 0), B(0, 2)$$

이때 $\overline{AB} = 10$ 이므로

$$\sqrt{(-2a)^2 + 2^2} = 10, \quad 2\sqrt{a^2 + 1} = 10$$

$$a^2 + 1 = 25 \quad \therefore a = 2\sqrt{6} (\because a > 0) \quad \text{답 } 2\sqrt{6}$$

15 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{6-k}{8-(-7)} = \frac{6-3}{8-(-k)}, \quad \text{즉 } \frac{6-k}{15} = \frac{3}{8+k}$$

$$(6-k)(8+k) = 45, \quad k^2 + 2k - 3 = 0$$

$$(k+3)(k-1) = 0 \quad \therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 1$$

따라서 모든 k 의 값의 곱은 $-3 \cdot 1 = -3$

답 ②

예제 B $\frac{6-k}{15} = \frac{3}{8+k}$

세 직선 AB, BC, AC 중 두 직선의 기울기가 같음을 이용하여 식을 세울 때, x 좌표와 y 좌표가 모두 주어진 점을 지나는 직선을 선택하는 것이 계산이 편리하다.

16 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{2-3}{a-4} = \frac{-a-3}{-6-4}, \quad \text{즉 } \frac{-1}{a-4} = \frac{a+3}{10} \quad \dots\dots ① \quad \dots ①$$

$$(a+3)(a-4) = -10, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0) \quad \dots ②$$

①에서 직선 l 의 기울기는 $\frac{2+3}{10} = \frac{1}{2}$ 이고 점 A(4, 3)을 지나므로 직선 l 의 방정식은

$$y-3 = \frac{1}{2}(x-4) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 1$$

따라서 직선 l 의 x 절편은 -2이다.

답 -2

채점 기준	비율
① 기울기를 이용하여 a 에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 직선 l 의 x 절편을 구할 수 있다.	30 %

17 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{3}{a-3-2} = \frac{1-a}{-2-2}, \text{ 즉 } \frac{3}{a-5} = \frac{a-1}{4}$$

$$(a-5)(a-1)=12, \quad a^2-6a-7=0$$

$$(a+1)(a-7)=0 \quad \therefore a=7 (\because a>0)$$

답 7

18 점 A를 지나면서 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나야 한다.

이때 $\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-7+5}{2}, \frac{0-2}{2} \right), \text{ 즉 } (-1, -1)$$

따라서 두 점 $(-3, 5), (-1, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-5 = \frac{-1-5}{-1-(-3)} \{x-(-3)\}$$

$$\therefore y = -3x-4$$

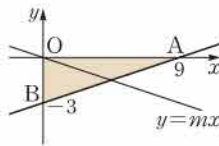
즉 $a=-3, b=-4$ 이므로 $a+b=-7$

답 ②

19 직선 $\frac{x}{9} - \frac{y}{3} = 1$ 과 x 축, y 축의 교점을 각각 A, B라 하면

A(9, 0), B(0, -3)

직선 $\frac{x}{9} - \frac{y}{3} = 1$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$ 가 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx$ 가 $\overline{AB}$ 의 중점을 지나야 한다.



이때 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{9+0}{2}, \frac{0-3}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

$x = \frac{9}{2}, y = -\frac{3}{2}$ 을 $y=mx$ 에 대입하면

$$-\frac{3}{2} = \frac{9}{2}m \quad \therefore m = -\frac{1}{3}$$

답 $-\frac{1}{3}$

20 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다. ... ①

두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각

$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+4}{2} \right), \left(\frac{2+7}{2}, \frac{4+7}{2} \right)$$

$$\therefore (1, 2), \left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2} \right)$$

... ②

따라서 두 점 $(1, 2), \left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2} \right)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = \frac{\frac{11}{2}-2}{\frac{9}{2}-1} (x-1) \quad \therefore y = x+1$$

... ③

이 직선이 점 $(k, 2k-1)$ 을 지나므로

$$2k-1 = k+1 \quad \therefore k=2$$

... ④

답 2

채점 기준	비율
① 조건을 만족시키는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 함을 알 수 있다.	30 %
② 두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
③ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
④ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

21 $\triangle ABD : \triangle ADC = 3 : 2$ 이므로 점 D는 $\overline{BC}$ 를 3 : 2로 내분하는 점이다.

B(-1, 2), C(4, -3)이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1)}{3+2}, \frac{3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2}{3+2} \right), \text{ 즉 } (2, -1)$$

따라서 두 점 A(3, 3), D(2, -1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{-1-3}{2-3} (x-3)$$

$$\therefore y = 4x-9$$

답 $y = 4x-9$

22 $b \neq 0$ 이므로 $ax+by-c=0$ 에서 $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$

이때 $ab > 0, ac < 0$ 에서 b, c 의 부호가 서로 다르므로

$$-\frac{a}{b} < 0, \frac{c}{b} < 0 \quad \begin{matrix} a > 0, b > 0, c < 0 \\ \text{또는 } a < 0, b < 0, c > 0 \end{matrix}$$

따라서 주어진 직선의 기울기와 y 절편이 모두 음수이므로 직선의 개형은 ④이다. ... ④

23 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 의 기울기와 y 절편이 모두 양수이므로

$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} > 0$$

즉 $ab < 0, bc < 0$ 에서 a, c 의 부호가 서로 같으므로

$$ac > 0$$

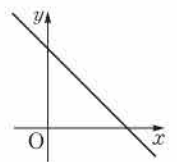
$a \neq 0$ 이므로 $cx+ay+b=0$ 에서

$$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$$

이때 $-\frac{c}{a} < 0, -\frac{b}{a} > 0$ 이므로 직선

$cx+ay+b=0$ 의 기울기는 음수, y 절편은 양수이다.

따라서 직선 $cx+ay+b=0$ 은 오른쪽 그림과 같이 제3사분면을 지나지 않는다.



답 제3사분면

24 직선 $ax+by+c=0$ 에서 $b \neq 0$ 이면

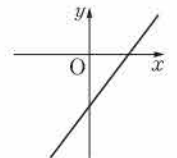
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

..... ㉠

㉠. $ab < 0, bc > 0$ 이면

$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0 \quad \begin{matrix} \text{기울기는 양수,} \\ \text{y절편은 음수} \end{matrix}$$

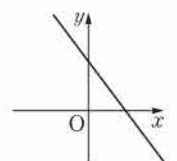
따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는다.



㉡. $ac < 0, bc < 0$ 에서 $ab > 0$ 이므로

$$-\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} > 0 \quad \begin{matrix} \text{기울기는 음수,} \\ \text{y절편은 양수} \end{matrix}$$

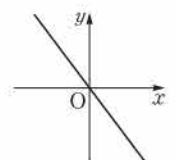
따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지난다.



㉢. $ab > 0, bc = 0$ 이면

$$-\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} = 0 \quad \begin{matrix} \text{기울기는 음수,} \\ \text{y절편은 0} \end{matrix}$$

따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제2사분면과 제4사분면을 지난다.



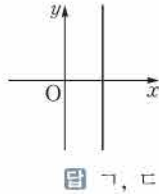
ㄹ. $ab=0$, $ac<0$ 이면 $b=0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서

$$x = -\frac{c}{a}$$

$$ac<0 \text{에서} \quad -\frac{c}{a} > 0$$

따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면과 제4사분면을 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



답 ㄱ, ㄴ

25 주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(4x+y-2)k + (x-2y-5) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$4x+y-2=0, \quad x-2y-5=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=1, \quad y=-2$$

따라서 $P(1, -2)$ 이므로 구하는 기울기는

$$\frac{-2-0}{1-0} = -2$$

답 ①

26 주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(x+y-2)k + (-x-2y+a) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+y-2=0, \quad -x-2y+a=0$$

이때 점 $(b, -3)$ 은 위의 두 직선의 교점이므로

$$b-3-2=0, \quad -b+6+a=0$$

따라서 $a=-1$, $b=5$ 이므로 $ab=-5$

답 ①

27 주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(2x-y+4)k + (-3x-4y+5) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x-y+4=0, \quad -3x-4y+5=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=-1, \quad y=2$$

따라서 $P(-1, 2)$ 이므로 기울기가 -3 이고 점 P 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = -3\{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = -3x - 1$$

답 $y = -3x - 1$

28 ㄱ. 주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(2x-5y+7)k + (3y-9) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x-5y+7=0, \quad 3y-9=0$$

$$\therefore x=4, \quad y=3$$

따라서 주어진 직선은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(4, 3)$ 을 지난다.

ㄴ. $k=0$ 일 때,

$$3y-9=0 \quad \therefore y=3$$

따라서 주어진 직선은 x 축에 평행하다.

ㄷ. 두 점 $(-3, -5)$, $(4, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = \frac{2+5}{4+3}(x-4) \quad \therefore y = x - 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$2kx - (5k-3)y + 7k-9 = 0 \text{에서 } k \neq \frac{3}{5} \text{이면}$$

$$y = \frac{2k}{5k-3}x + \frac{7k-9}{5k-3} \quad \dots\dots ㉡$$

$$\frac{2k}{5k-3} = 1, \text{ 즉 } k=1 \text{이면 두 직선 ㉠, ㉡은 만나지 않는다.}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

29 점 (a, b) 가 직선 $2x-y-3=0$ 위에 있으므로

$$2a-b-3=0 \quad \therefore b=2a-3$$

이것을 $ax-2by=6$ 에 대입하면

$$ax-2(2a-3)y=6$$

이 식을 a 에 대하여 정리하면

$$(x-4y)a + (6y-6) = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-4y=0, \quad 6y-6=0$$

$$\therefore x=4, \quad y=1$$

따라서 직선 $ax-2by=6$ 은 항상 점 $(4, 1)$ 을 지난다.

답 $(4, 1)$

30 $mx+y-2m+2=0$ 에서

$$(x-2)m + (y+2) = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

이므로 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, -2)$ 를 지난다.

한편 $2x-y+4=0$ 에서 $y=2x+4$ 이므로

오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 $(-2, 0)$ 을 지날 때,

$$-4m+2=0 \quad \therefore m = \frac{1}{2}$$

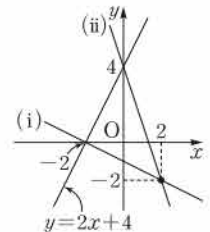
(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 4)$ 를 지날 때,

$$-2m+6=0 \quad \therefore m=3$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} < m < 3$$

답 $\frac{1}{2} < m < 3$



31 $y=(2-m)x+3m$ 에서

$$(x-3)m + (-2x+y) = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x-3=0, \quad -2x+y=0 \text{에서} \quad x=3, \quad y=6$$

즉 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 6)$ 을 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 원점을 지날 때,

$$-3m=0 \quad \therefore m=0$$

(ii) 직선 ㉠이 x 축에 평행할 때,

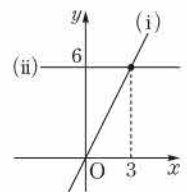
$$2-m=0 \quad \therefore m=2$$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는 $0 \leq m \leq 2$

따라서 정수 m 은 0, 1, 2이므로 구하는 합은

$$0+1+2=3$$

답 3



32 $mx-y+3m-2=0$ 에서

$$(x+3)m - (y+2) = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

이므로 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, -2)$ 를 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 A(5, 0)을 지날 때,

$$8m-2=0 \quad \therefore m=\frac{1}{4}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 B(-1, 2)를 지날 때,

$$2m-4=0 \quad \therefore m=2$$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는 $\frac{1}{4} \leq m \leq 2$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=2$ 이므로

$$ab=\frac{1}{2}$$

답 ④

33 $(m+1)x+y-(2m-1)=0$ 에서

$$(x-2)m+(x+y+1)=0 \quad \dots\dots ㉠$$

$x-2=0$, $x+y+1=0$ 에서

$$x=2, y=-3$$

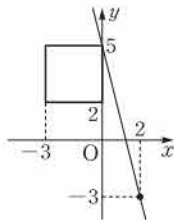
즉 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 (2, -3)을 지난다.

→ ①

직선 ㉠의 기울기가 $-m-1$ 이므로 m 의 값은 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 점 (0, 5)를 지날 때 최대이다.

따라서 $-2m+6=0$ 에서 $m=3$ 이므로 m 의 최댓값은 3이다.

→ ②
답 3



채점 기준	비율
① 직선 $(m+1)x+y-(2m-1)=0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
② m 의 최댓값을 구할 수 있다.	60 %

참고 (i) 직선 ㉠이 점 (0, 5)를 지날 때,

$$m=3$$

(ii) 직선 ㉠이 점 (-3, 2)를 지날 때,

$$-5m=0 \quad \therefore m=0$$

(i), (ii)에서 직선 ㉠이 주어진 정사각형과 만나도록 하는 m 의 값의 범위는 $0 \leq m \leq 3$

34 $y=mx-4m+3$ 에서

$$(x-4)m-(y-3)=0 \quad \dots\dots ㉠$$

이므로 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 (4, 3)을 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 A(1, 4)를 지날 때,

$$-3m-1=0$$

$$\therefore m=-\frac{1}{3}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 B(5, -1)을 지날 때,

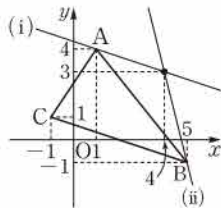
$$m+4=0 \quad \therefore m=-4$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$-4 < m < -\frac{1}{3}$$

$$\text{답 } -4 < m < -\frac{1}{3}$$

참고 직선 ㉠이 $\triangle ABC$ 와 만나도록 하는 m 의 값의 범위는 $m \leq -4$ 또는 $m \geq -\frac{1}{3}$ 이다.



35 직선 $mx+3y+m-6=0$ 이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 대각선 AC의 중점을 지나야 한다.

C(a, b)라 하면 AC의 중점의 좌표는 $(\frac{2+a}{2}, \frac{5+b}{2})$ 이므로

$$m \cdot \frac{2+a}{2} + 3 \cdot \frac{5+b}{2} + m - 6 = 0$$

$$\therefore (4+a)m + (3+3b) = 0$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$4+a=0, 3+3b=0$$

$$\therefore a=-4, b=-1$$

따라서 점 C의 좌표는 (-4, -1)이다.

답 (-4, -1)

참고 직선 $mx+3y+m-6=0$, 즉 $(x+1)m+(3y-6)=0$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 (-1, 2)를 지나므로 이 점이 대각선 AC의 중점이어야 한다.

36 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x-y+1+k(3x-2y-2)=0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \dots\dots ㉠$$

이라 하면 이 직선이 점 (1, -1)을 지나므로

$$1+1+1+k(3+2-2)=0$$

$$3+3k=0 \quad \therefore k=-1$$

$k=-1$ 을 ㉠에 대입하면

$$x-y+1-(3x-2y-2)=0$$

$$-2x+y+3=0 \quad \therefore 2x-y-3=0$$

따라서 $a=2$, $b=-1$ 이므로 $a+2b=0$

답 ①

다른 풀이 두 직선 $x-y+1=0$, $3x-2y-2=0$ 의 교점의 좌표는

$$(4, 5)$$

두 점 (4, 5), (1, -1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{-1-5}{1-4}(x-4) \quad \therefore 2x-y-3=0$$

37 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x+y+3+k(2x+3y+4)=0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \dots\dots ㉠$$

이라 하면 이 직선이 점 (-6, 4)를 지나므로

$$-6+4+3+k(-12+12+4)=0$$

$$1+4k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{4}$$

$k=-\frac{1}{4}$ 을 ㉠에 대입하면

$$x+y+3-\frac{1}{4}(2x+3y+4)=0$$

$$\therefore 2x+y+8=0$$

→ ①

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면 $2x+8=0 \quad \therefore x=-4$

$$\therefore A(-4, 0)$$

또 $x=0$ 을 대입하면 $y+8=0 \quad \therefore y=-8$

$$\therefore B(0, -8)$$

→ ②

$$\therefore AB=\sqrt{4^2+(-8)^2}=4\sqrt{5}$$

→ ③

답 $4\sqrt{5}$

채점 기준	비율
① 두 직선의 교점과 점 (-6, 4)를 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
② 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
③ AB의 길이를 구할 수 있다.	20 %

- 38 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을
 $(a-1)x + (5a+3)y + 4 + k(x+ay+2) = 0$ (k 는 실수)
 ㉠

이라 하면 이 직선이 원점을 지나므로

$$4+2k=0 \quad \therefore k=-2$$

$k=-2$ 를 ㉠에 대입하면

$$(a-1)x + (5a+3)y + 4 - 2(x+ay+2) = 0$$

$$\therefore (a-3)x + (3a+3)y = 0$$

이 직선의 기울기가 -1 이므로

$$-\frac{a-3}{3a+3} = -1, \quad a-3=3a+3$$

$$2a=-6 \quad \therefore a=-3$$

답 ③

- 39 직선 $3x + (k+3)y - 1 = 0$ 과 직선 $2x + (k-4)y + 3 = 0$ 이

(i) 평행하려면 $\frac{3}{2} = \frac{k+3}{k-4} \neq \frac{-1}{3}$

$$3k-12=2k+6$$

$$\therefore k=18$$

(ii) 수직이려면 $3 \cdot 2 + (k+3)(k-4) = 0$

$$k^2 - k - 6 = 0, \quad (k+2)(k-3) = 0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=3$$

(i), (ii)에서 $a=18, \beta=3$ ($\because \beta > 0$)

$$\therefore a-\beta=15$$

답 15

- 40 두 직선 $y=ax+b, y=\frac{1}{3}x-1$ 이 수직이므로

$$\frac{1}{3}a = -1 \quad \therefore a = -3$$

따라서 직선 $y=-3x+b$ 가 점 $(-2, 4)$ 를 지나므로

$$4=6+b \quad \therefore b=-2$$

$$\therefore ab=6$$

답 ④

- 41 두 직선 $ax+2y+b=0, bx-y-a=0$ 이 만나지 않으면 평행하므로

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{-1} \neq \frac{b}{-a} \quad \therefore a = -2b$$

$a = -2b$ 를 $bx+ay=0$ 에 대입하면

$$bx-2by=0, \quad 2by=bx$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x \quad (\because b \neq 0)$$

따라서 구하는 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

답 $\frac{1}{2}$

- 42 직선 $4x+ay+6=0$ 이 점 $(-3, 2)$ 를 지나므로

$$-12+2a+6=0 \quad \therefore a=3$$

직선 $bx+cy+17=0$ 도 점 $(-3, 2)$ 를 지나므로

$$-3b+2c+17=0$$

..... ㉠

두 직선 $4x+3y+6=0, bx+cy+17=0$ 이 수직이므로

$$4b+3c=0$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$b=3, c=-4$$

$$\therefore a-b+c=-4$$

답 -4

- 43 직선 $ax-2y+3=0$ 이 직선 $bx+4y+5=0$ 과 수직이므로
 $ab+(-2) \cdot 4=0 \quad \therefore ab=8$ ①

또 직선 $ax-2y+3=0$ 이 직선 $(b+2)x-2y-1=0$ 과 평행하므로

$$\frac{a}{b+2} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{3}{-1}$$

$$a=b+2 \quad \therefore a-b=2$$

..... ②

$$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$

$$=2^3+3 \cdot 8 \cdot 2=56$$

..... ③

답 56

채점 기준	비율
① ab 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ a^3-b^3 의 값을 구할 수 있다.	20 %

- 44 ㄱ. $a=0$ 일 때,

$$l: 2x-4=0, \text{ 즉 } x=2$$

$$m: -3y-3=0, \text{ 즉 } y=-1$$

따라서 두 직선 l, m 은 각각 y 축, x 축에 평행하므로 수직이다.

ㄴ. $ax-3y+4a-3=0$ 에서

$$(x+4)a-(3y+3)=0$$

이므로 직선 m 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(-4, -1)$ 을 지난다.

ㄷ. (i) $a=0$ 일 때,

두 직선 l, m 은 수직이다. ($\because$ ㄱ)

(ii) $a \neq 0$ 일 때,

두 직선 l, m 이 평행하려면

$$\frac{2}{a} = \frac{a}{-3} \neq \frac{a-4}{4a-3}$$

$$\therefore a^2 = -6$$

이를 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

- 45 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=ax+4$ 가 직선 $y=2x$ 또는 $y=-x+2$ 와 평행할 때,

$$a=2 \text{ 또는 } a=-1$$

(ii) 직선 $y=ax+4$ 가 두 직선 $y=2x, y=-x+2$ 의 교점을 지날 때,

$$y=2x, y=-x+2 \text{를 연립하여 풀면}$$

$$x=\frac{2}{3}, y=\frac{4}{3}$$

직선 $y=ax+4$ 가 점 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ 를 지나려면

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{3}a + 4 \quad \therefore a = -4$$

(i), (ii)에서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$2+(-1)+(-4)=-3$$

답 ③

- 46 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $ax-y-5=0$ 이

두 직선 $x-y-1=0, x+2y-4=0$ 의 교점을 지나야 한다.

$x-y-1=0$, $x+2y-4=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1$$

직선 $ax-y-5=0$ 이 점 (2, 1)을 지나므로

$$2a-1-5=0 \quad \therefore a=3$$

답 3

47 두 직선 $2x-5y+1=0$, $3x+y+2=0$ 이 한 점에서 만나므로 직선 $ax+2y+6=0$ 이 위의 두 직선 중 하나와 평행해야 한다.

→ ①

(i) 두 직선 $2x-5y+1=0$, $ax+2y+6=0$ 이 평행할 때,

$$\frac{2}{a} = \frac{-5}{2} \neq \frac{1}{6} \quad \therefore a = -\frac{4}{5}$$

(ii) 두 직선 $3x+y+2=0$, $ax+2y+6=0$ 이 평행할 때,

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{6} \quad \therefore a=6$$

→ ②

(i), (ii)에서 양수 a 의 값은 6이다.

→ ③

답 6

채점 기준	비율
① 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개일 때의 조건을 알 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 양수 a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

48 주어진 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $2x+ay-1=0$, $x+2y+3=0$ 이 평행하려면

$$\frac{2}{1} = \frac{a}{2} \neq \frac{-1}{3} \quad \therefore a=4$$

두 직선 $bx+y+5=0$, $x+2y+3=0$ 이 평행하려면

$$\frac{b}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{3} \quad \therefore b=\frac{1}{2}$$

$$\therefore ab=2$$

답 ①

49 주어진 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 어느 두 직선이 수직이어야 한다.

두 직선 $3x+2y+5=0$, $ax-y+3=0$ 이 수직이려면

$$3a-2=0 \quad \therefore a=\frac{2}{3}$$

두 직선 $x+4y+5=0$, $ax-y+3=0$ 이 수직이려면

$$a-4=0 \quad \therefore a=4$$

그런데 $a=4$ 이면 세 직선은 한 점에서 만나므로 구하는 상수 a 의 값은 $\frac{2}{3}$ 이다.
 세 직선이 점 $(-1, -1)$ 에서 만나므로 삼각형을 이루지 않는다.

답 $\frac{2}{3}$

50 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{7-1}{1-(-2)}=2$$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

한편 $\overline{AB}$ 를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{2+1}, \frac{2 \cdot 7 + 1 \cdot 1}{2+1} \right), \text{ 즉 } (0, 5)$$

따라서 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 (0, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x+5$$

$$\text{답 } y=-\frac{1}{2}x+5$$

51 주어진 두 직선이 x 축에서 만나므로 두 직선의 x 절편은 같다.

$x+(5k+2)y+4=0$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$x+4=0 \quad \therefore x=-4$$

따라서 두 점 $(-4, 0)$, $(0, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$-\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore 3x-4y+12=0$$

두 직선 $x+(5k+2)y+4=0$, $3x-4y+12=0$ 이 수직이므로

$$3-4(5k+2)=0$$

$$-20k-5=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{4}$$

$$\text{답 } -\frac{1}{4}$$

52 직선 $3x+y-6=0$ 의 x 절편은 2, y 절편은 6이므로 이 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$$

두 직선 $3x+y-6=0$ 과 $ax+y+b=0$ 이 평행하므로

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{1} \neq \frac{-6}{b}$$

$$\therefore a=3, b \neq -6$$

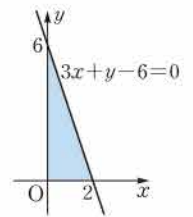
따라서 직선 $3x+y+b=0$ 의 x 절편은 $-\frac{b}{3}$, y 절편은 $-b$ 이고 이 직선이 색칠한 부분의 넓이를 이등분하므로

$$\frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{b}{3} \right| \cdot |-b| = \frac{1}{2} \cdot 6$$

$$\frac{b^2}{6} = 3 \quad \therefore b^2 = 18$$

$$\therefore b^2 - a^2 = 18 - 3^2 = 9$$

답 ①



53 $\angle OAB = \angle OCA$ 에서

$$\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC = \angle OCA + \angle OAC = 90^\circ$$

이므로 두 직선 l , m 은 수직이다.

$\triangle AOC$ 에서 $\angle AOC = 90^\circ$ 이므로

이때 직선 l 의 기울기는

$$\angle OCA + \angle OAC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\frac{0-3}{4-0} = -\frac{3}{4}$$

이므로 직선 m 의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이다.

따라서 직선 m 은 기울기가 $\frac{4}{3}$ 이고 점 A(4, 0)을 지나므로 그 방정식은

$$y = \frac{4}{3}(x-4)$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$$

$$\text{답 } y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$$

54 직선 $2x+y-5=0$, 즉 $y=-2x+5$ 의 기울기가 -2 이므로 직선 AH의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 직선 AH의 방정식은

$$y-5=\frac{1}{2}(x-5) \quad \therefore x-2y+5=0$$

$2x+y-5=0$, $x-2y+5=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=1, y=3 \quad \begin{array}{l} \text{수선의 발 H는 직선 AH와} \\ \text{직선 } 2x+y-5=0 \text{의 교점이다.} \end{array}$$

즉 점 H의 좌표는 (1, 3)이다.

답 (1, 3)

다른 풀이 H(a, b)라 하면 점 H는 직선 $2x+y-5=0$ 위의 점
이므로

$$2a+b-5=0 \quad \dots\dots ㉠$$

직선 $2x+y-5=0$, 즉 $y=-2x+5$ 의 기울기가 -2 이므로 직선
AH의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{즉 } \frac{b-5}{a-5}=\frac{1}{2} \text{이므로 } a-5=2b-10 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

55 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 2) \quad \begin{array}{l} \text{(AC의 중점)=(BD의 중점)} \end{array}$$

직선 $y=mx$ 가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 점
(3, 2)를 지나야 하므로

$$2=3m \quad \therefore m=\frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

따라서 직선 $y=\frac{2}{3}x$ 와 직선 $y=ax+b$ 가 수직이므로

$$a=-\frac{3}{2}$$

이때 직선 $y=-\frac{3}{2}x+b$ 가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하
려면 점 (3, 2)를 지나야 하므로

$$2=-\frac{9}{2}+b \quad \therefore b=\frac{13}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

$$\therefore a+b-m=\frac{13}{3} \quad \dots\dots ㉢$$

답 $\frac{13}{3}$

채점 기준	비율
① m의 값을 구할 수 있다.	30 %
② a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ a+b-m의 값을 구할 수 있다.	20 %

56 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+4}{2}\right), \text{ 즉 } (2, 3)$$

직선 AB의 기울기는 $\frac{4-2}{5-(-1)}=\frac{1}{3}$

따라서 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기가 -3 이고 점 (2, 3)을 지
나므로 그 방정식은

$$y-3=-3(x-2) \quad \therefore 3x+y-9=0$$

즉 $a=3, b=1$ 이므로 $a+b=4$ 답 ⑤

57 직선 $y=-2x+b$ 의 기울기가 -2 이므로 직선 AB의 기울
기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{즉 } \frac{a-3}{3+1}=\frac{1}{2} \text{이므로 } a-3=2 \quad \therefore a=5$$

$\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+5}{2}\right), \text{ 즉 } (1, 4)$$

직선 $y=-2x+b$ 가 이 점을 지나므로

$$4=-2+b \quad \therefore b=6$$

$$\therefore ab=30$$

답 ④

58 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1-4}{2}, \frac{7+2}{2}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-7}{-4-1}=1$

따라서 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기가 -1 이고 점 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$
를 지나므로 그 방정식은

$$y-\frac{9}{2}=-\left(x+\frac{3}{2}\right) \quad \therefore x+y-3=0 \quad \dots\dots ㉠$$

$\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{7-1}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 3)$$

직선 AC의 기울기는 $\frac{-1-7}{5-1}=-2$

따라서 $\overline{AC}$ 의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 (3, 3)을 지
나므로 그 방정식은

$$y-3=\frac{1}{2}(x-3) \quad \therefore x-2y+3=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=2$

따라서 D(1, 2)이므로 $a=1, b=2$

$$\therefore a-b=-1$$

답 -1

예제 B $\frac{5}{3}$

삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만나므로 삼
각형의 세 변의 수직이등분선의 교점을 구할 때는 두 변의 수직
이등분선의 교점을 구하면 된다.

59 $\overline{AC}=10$ 이므로 $\sqrt{(n-1)^2+(-6)^2}=10$

양변을 제곱하면 $n^2-2n+1+36=100$

$$n^2-2n-63=0, \quad (n+7)(n-9)=0$$

$$\therefore n=9 \quad (\because n>0)$$

$$\therefore C(9, 0)$$

$\square ABCD$ 가 마름모이므로 직선 l은 대각선 AC의 수직이등분선
이다. 두 대각선이 서로 수직이등분한다.

$\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+9}{2}, \frac{6+0}{2}\right), \text{ 즉 } (5, 3)$

직선 AC의 기울기는 $\frac{0-6}{9-1}=-\frac{3}{4}$

따라서 직선 l은 기울기가 $\frac{4}{3}$ 이고 점 (5, 3)을 지나므로 그 방정
식은

$$y-3=\frac{4}{3}(x-5) \quad \therefore 4x-3y-11=0$$

즉 $a=-3, b=-11$ 이므로 $ab=33$

답 33

60 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y=m(x-4) \quad \therefore mx-y-4m=0$$

점 $(0, 3)$ 과 직선 l 사이의 거리가 5이므로

$$\frac{|-3-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5, \quad |4m+3|=5\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2-24m+16=0$

$$(3m-4)^2=0 \quad \therefore m=\frac{4}{3}$$

따라서 직선 l 의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이다. 답 ⑤

61 $\frac{|12-3a+2|}{\sqrt{4^2+a^2}}=1$ 이므로 $|14-3a|=\sqrt{16+a^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $2a^2-21a+45=0$

$$(a-3)(2a-15)=0 \quad \therefore a=3 (\because a \text{는 정수}) \quad \text{답 ⑤}$$

62 $\triangle ABC$ 의 무게중심 G 의 좌표는

$$\left(\frac{0+6-3}{3}, \frac{-8+4+1}{3}\right), \text{ 즉 } (1, -1) \quad \cdots ①$$

직선 BC 의 방정식은

$$y-4=\frac{1-4}{-3-6}(x-6) \quad \therefore x-3y+6=0 \quad \cdots ②$$

직선 $x-3y+6=0$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PG}$ 의 길이의 최솟값은 점 $G(1, -1)$ 과 직선 $x-3y+6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1+3+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \quad \cdots ③$$

답 $\sqrt{10}$

채점 기준	비율
① 점 G 의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
② 직선 BC 의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
③ $\overline{PG}$ 의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

63 직선 $x+2y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=2x+a$, 즉 $2x-y+a=0$ (a 는 상수)으로 놓을 수 있다.

원점과 이 직선 사이의 거리가 $3\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3\sqrt{5}, \quad |a|=15 \quad \therefore a=\pm 15$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x-15$, $y=2x+15$ 이다.

$$\text{답 } y=2x-15, y=2x+15$$

64 점 $(0, k)$ 에서 두 직선 $3x-y+3=0$, $x+3y+5=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|-k+3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3k+5|}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$|k-3|=|3k+5|$$

$$k-3=-(3k+5) \text{ 또는 } k-3=3k+5$$

$$\therefore k=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } k=-4$$

따라서 모든 k 의 값의 곱은

$$-\frac{1}{2} \cdot (-4)=2 \quad \text{답 ②}$$

65 $2(k+2)x+(3k+5)y+k+5=0$ 에서

$$(2x+3y+1)k+(4x+5y+5)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x+3y+1=0, \quad 4x+5y+5=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-5, y=3$

$$\therefore A(-5, 3)$$

직선 $ax+y+b=0$ 이 점 A 를 지나므로

$$-5a+3+b=0 \quad \therefore b=5a-3$$

즉 직선 $ax+y+5a-3=0$ 과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|5a-3|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{2}, \quad |5a-3|=\sqrt{2(a^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $23a^2-30a+7=0$

$$(a-1)(23a-7)=0 \quad \therefore a=1 (\because a \text{는 정수})$$

따라서 $b=5-3=2$ 이므로

$$a+b=3 \quad \text{답 3}$$

66 $k(x-2)+2y-4=0$ 에서

$$kx+2y-2k-4=0$$

$$\therefore f(k)=\frac{|2k+10-2k-4|}{\sqrt{k^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{k^2+4}}$$

$f(k)$ 는 $\sqrt{k^2+4}$ 의 값이 최소일 때 최대이므로 $f(k)$ 의 최댓값은

$$f(0)=\frac{6}{\sqrt{4}}=3 \quad \text{답 3}$$

다른 풀이 직선 $k(x-2)+2y-4=0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 2)$ 를 지난다.

따라서 주어진 직선과 점 $(2, 5)$ 사이의 거리의 최댓값은 두 점 $(2, 2)$, $(2, 5)$ 사이의 거리와 같으므로

$$|5-2|=3$$

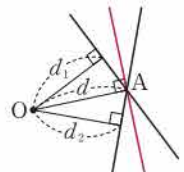
예제 B $\frac{1}{\sqrt{2}}$

점과 직선 사이의 거리의 최댓값

오른쪽 그림에서

$$d_1 < d, d_2 < d$$

이므로 점 A 를 지나고 임의의 직선과 점 O 사이의 거리의 최댓값은 점 O 로부터 OA 와 수직인 직선에 이르는 거리 d , 즉 두 점 O, A 사이의 거리와 같다.



67 원점과 직선 $(k+4)x+ky-4=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 하면

$$f(k)=\frac{|-4|}{\sqrt{(k+4)^2+k^2}}=\frac{4}{\sqrt{2k^2+8k+16}}$$

$f(k)$ 는 $\sqrt{2k^2+8k+16}$ 의 값이 최소일 때 최대이고

$$\sqrt{2k^2+8k+16}=\sqrt{2(k+2)^2+8}$$

이므로 $f(k)$ 의 최댓값은

$$f(-2)=\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$$

따라서 $a=-2, b=\sqrt{2}$ 이므로

$$a^2+b^2=6 \quad \text{답 ③}$$

68 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x+3y-5+k(2x-y-3)=0 \quad (k \text{는 실수})$$

이라 하면

$$(1+2k)x+(3-k)y-5-3k=0$$

점 (1, -1)과 이 직선 사이의 거리를 $f(k)$ 라 하면

$$f(k)=\frac{|1+2k-3+k-5-3k|}{\sqrt{(1+2k)^2+(3-k)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5k^2-2k+10}}$$

$f(k)$ 는 $\sqrt{5k^2-2k+10}$ 의 값이 최소일 때 최대이고

$$\sqrt{5k^2-2k+10}=\sqrt{5\left(k-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}$$

이므로 $f(k)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{7}{\sqrt{\frac{49}{5}}}=\sqrt{5} \quad \text{답 } \sqrt{5}$$

69 $\overline{AB}=\sqrt{(4+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{29}$

직선 AB의 방정식은

$$y-1=\frac{-1-1}{4+1}(x+1) \quad \therefore 2x+5y-3=0$$

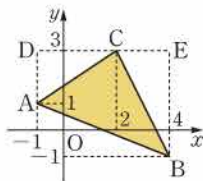
점 C(2, 3)과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|4+15-3|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{16}{\sqrt{29}}=\frac{16\sqrt{29}}{29}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{16\sqrt{29}}{29}=8 \quad \text{답 } ③$$

다른 풀이 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \square ABED - (\triangle ACD + \triangle BEC) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2+4) \cdot 5 - \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \right) \\ &= 15 - 7 = 8 \end{aligned}$$



70 $\overline{AB}=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6}=1 \quad \therefore 2x-y+6=0$$

점 C(3, a)와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|6-a+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|12-a|}{\sqrt{5}}$$

$\triangle ABC$ 의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{|12-a|}{\sqrt{5}}=15, \quad |12-a|=10$$

$$12-a=-10 \text{ 또는 } 12-a=10$$

$$\therefore a=22 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 구하는 합은 $22+2=24$

... ①

... ②

... ③

답 24

71 (1) 직선 AC의 방정식은

$$y-2=\frac{3-2}{-3-4}(x-4) \quad \therefore x+7y-18=0$$

따라서 점 B(1, 5)와 대각선 AC 사이의 거리는

$$\frac{|1+35-18|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{18}{5\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{5}$$

$$(2) \overline{AC}=\sqrt{(-3-4)^2+(3-2)^2}=5\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{5}=9$$

$$\therefore \square OABC=2\triangle ABC=18 \quad \square \triangle ABC \equiv \triangle COA \quad \text{답 } (1) \frac{9\sqrt{2}}{5} \quad (2) 18$$

72 $\begin{cases} x-2y=0 & \dots\dots ㉠ \\ 2x+3y-21=0 & \dots\dots ㉡ \\ 4x-y+7=0 & \dots\dots ㉢ \end{cases}$

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는

$$(6, 3)$$

두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는

$$(0, 7)$$

두 직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는

$$(-2, -1)$$

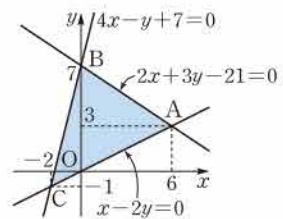
A(6, 3), B(0, 7), C(-2, -1)이라 하면

$$\overline{AC}=\sqrt{(-2-6)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{5}$$

점 B(0, 7)과 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-14|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{14}{\sqrt{5}}=\frac{14\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \frac{14\sqrt{5}}{5}=28 \quad \text{답 } 28$$



73 두 직선이 평행하므로 직선 $3x+4y=6$ 위의 한 점 (2, 0)과 직선 $3x+4y=k$, 즉 $3x+4y-k=0$ 사이의 거리가 3이다.

$$\text{즉 } \frac{|6-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3 \text{ 이므로 } |6-k|=15$$

$$6-k=-15 \text{ 또는 } 6-k=15$$

$$\therefore k=21 \quad (\because k>0)$$

답 21

74 두 직선이 평행하므로 $\overline{AB}$ 의 길이의 최솟값은 평행한 두 직선 사이의 거리와 같다.

이때 직선 $7x-y+2=0$ 위의 한 점 (0, 2)와 직선

$7x-y-8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-8|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=\frac{10}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{AB}$ 의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

답 $\sqrt{2}$

75 두 직선이 평행하므로

$$\frac{2}{m}=\frac{-1}{2-m} \neq \frac{2}{-6}$$

$$-m=4-2m \quad \therefore m=4$$

따라서 두 직선의 방정식은 $2x-y+2=0$, $2x-y-3=0$ 이므로
직선 $2x-y+2=0$ 위의 한 점 $(0, 2)$ 와 직선 $2x-y-3=0$ 사
이의 거리는

$$\frac{|-2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \text{답 } \sqrt{5}$$

76 주어진 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 정사
각형 ABCD의 한 변의 길이와 같다.

직선 $3x-4y+8=0$ 위의 한 점 $(0, 2)$ 와 직선 $3x-4y-7=0$
사이의 거리는

$$\frac{|-8-7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 구하는 넓이
는 $3 \cdot 3 = 9$ 답 9

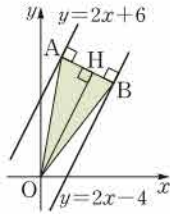
77 직선 $y=2x+6$ 위의 한 점 $(0, 6)$ 과 직선 $y=2x-4$, 즉
 $2x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \quad \therefore \overline{AB} = 2\sqrt{5} \quad \cdots ①$$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AB}$ 에 내린
수선의 발을 H라 하면 $\triangle AOB$ 의 넓이가
20이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \overline{OH} = 20$$

$$\therefore \overline{OH} = 4\sqrt{5} \quad \cdots ②$$



이때 직선 AB는 직선 $y=2x+6$ 과 수직이므로 그 방정식을

$y = -\frac{1}{2}x + k$, 즉 $x+2y-2k=0$ (k 는 상수)이라 하자.

직선 AB와 원점 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 4\sqrt{5}, \quad |2k| = 20 \quad \therefore k = \pm 10$$

그런데 두 점 A, B가 제1사분면 위의 점이므로 직선 AB의 y 절
편은 양수이다.

$$\therefore k = 10$$

따라서 직선 AB의 방정식은 $y = -\frac{1}{2}x + 10$ 이므로 구하는 x 절
편은 20이다. ... ③

답 20

채점 기준	비율
① AB의 길이를 구할 수 있다.	30 %
② OH의 길이를 구할 수 있다.	30 %
③ 직선 AB의 x 절편을 구할 수 있다.	40 %

78 $P(x, y)$ 라 하면 점 P는 주어진 두 직선으로부터 같은 거리
에 있으므로

$$\frac{|x+3y-4|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|3x+y+2|}{\sqrt{3^2+1^2}}$$

$$|x+3y-4| = |3x+y+2|$$

$$x+3y-4 = \pm(3x+y+2)$$

$$\therefore x-y+3=0 \text{ 또는 } 2x+2y-1=0$$

$$\text{답 } x-y+3=0 \text{ 또는 } 2x+2y-1=0$$

79 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하면
점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x-3y-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|3x+2y-8|}{\sqrt{3^2+2^2}}$$

$$|2x-3y-1| = |3x+2y-8|$$

$$2x-3y-1 = \pm(3x+2y-8)$$

$$\therefore x+5y-7=0 \text{ 또는 } 5x-y-9=0$$

따라서 주어진 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식
은 $\perp$, $\cap$ 이다. 답 ④

80 $P(x, y)$ 라 하면

$$\frac{|4x-y-5|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = 2 \cdot \frac{|x+4y-3|}{\sqrt{1^2+4^2}}$$

$$|4x-y-5| = 2|x+4y-3|$$

$$4x-y-5 = \pm 2(x+4y-3)$$

$$\therefore 2x-9y+1=0 \text{ 또는 } 6x+7y-11=0$$

따라서 기울기가 양수인 점 P의 자취의 방정식은

$$2x-9y+1=0$$

답 ②

81 $\overline{AB} = \sqrt{(1+3)^2 + (2+1)^2} = 5$

$\triangle ABP$ 에서 $\overline{AB}$ 를 밑변으로 하고 높이를 h 라 하면 $\triangle ABP$ 의
넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h = 15 \quad \therefore h = 6$$

즉 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 6이므로 점 P의 자취는 직선
AB와 평행하고 직선 AB와의 거리가 6인 직선이다.

이때 직선 AB의 기울기는 $\frac{2-(-1)}{1-(-3)} = \frac{3}{4}$ 이므로 점 P의 자취의
방정식을 $3x-4y+k=0$ ($k \neq 5$)이라 하면 이 직선과 점 A 사
이의 거리가 6이다. 즉 $\frac{|-9+4+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 6$, $|k-5|=30$
 $\perp$ 직선 AB의 방정식이 $3x-4y+5=0$ 이므로 $k \neq 5$

$$\frac{|-9+4+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 6, \quad |k-5|=30$$

$$k-5 = -30 \text{ 또는 } k-5 = 30$$

$$\therefore k = -25 \text{ 또는 } k = 35$$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$$3x-4y-25=0 \text{ 또는 } 3x-4y+35=0$$

$$\text{답 } 3x-4y-25=0 \text{ 또는 } 3x-4y+35=0$$

03 원의 방정식

I. 도형의 방정식

개념정리

본책 30쪽

- ① r^2 ② $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ ③ -1 ④ $=$
 ⑤ m ⑥ r^2 ⑦ 반지름

유형 뚫개기

본책 31쪽

01 $\overline{AB}$ 를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4)}{1+2}, \frac{1 \cdot 7 + 2 \cdot (-2)}{1+2}\right), \text{ 즉 } (-2, 1)$$

이므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = r^2$$

이 원이 점 $A(-4, -2)$ 를 지나므로

$$r^2 = 4 + 9 = 13$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13 \quad \text{답 } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$$

02 원 $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$ 의 중심의 좌표는 $(2, -4)$ 이고 원 $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$ 의 반지름의 길이는 5이므로 주어진 조건을 만족시키는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$$

이 원이 점 $(7, k)$ 를 지나므로 $25 + (k+4)^2 = 25$

$$(k+4)^2 = 0 \quad \therefore k = -4 \quad \text{답 } -4$$

03 직선 $\frac{x}{5} - \frac{y}{12} = -1$, 즉 $-\frac{x}{5} + \frac{y}{12} = 1$ 이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$(-5, 0), (0, 12)$$

중심의 좌표가 $(0, 12)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$x^2 + (y-12)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-5, 0)$ 을 지나므로

$$r^2 = 25 + 144 = 169$$

$$\therefore x^2 + (y-12)^2 = 169 \quad \dots \textcircled{1}$$

이 원이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$(a-12)^2 = 169, \quad a-12 = \pm 13$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 25 \quad \dots \textcircled{2}$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$-1 + 25 = 24 \quad \dots \textcircled{3} \quad \text{답 } 24$$

채점 기준

비율

① 원의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 모든 a 의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

04 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = r^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 - r^2 = 0$$

이 식이 $x^2 + y^2 - 10x + ay + 3a + 1 = 0$ 과 일치하므로

$$4 = a, 29 - r^2 = 3a + 1 \quad \therefore a = 4, r^2 = 16$$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 16$$

① $x=1, y=-2$ 를 $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 16$ 에 대입하면

$$(1-5)^2 + (-2+2)^2 = 16$$

이므로 점 $(1, -2)$ 는 원 위의 점이다. 답 ①

다른 풀이 $x^2 + y^2 - 10x + ay + 3a + 1 = 0$ 에서

$$(x-5)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - 3a + 24$$

이 원의 중심의 좌표가 $(5, -2)$ 이므로

$$-\frac{a}{2} = -2 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore (x-5)^2 + (y+2)^2 = 16$$

05 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{-3-1}{2}\right), \text{ 즉 } (3, -2)$$

직선 AB 의 기울기는 $\frac{-1-(-3)}{5-1} = \frac{1}{2}$

따라서 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기가 -2 이고 점 $(3, -2)$ 를 지나므로 그 방정식은

$$y+2 = -2(x-3) \quad \therefore y = -2x+4$$

이 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$-2x+4=0 \quad \therefore x=2$$

즉 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선과 x 축의 교점의 좌표가 $(2, 0)$ 이므로 이 점을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 원점을 지나므로

$$r^2 = (-2)^2 = 4 \quad \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는 $2\pi \cdot 2 = 4\pi$ 답 4π

06 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$x^2 + (y-a)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(0, 5)$ 를 지나므로

$$(5-a)^2 = r^2$$

$$\therefore a^2 - 10a + 25 = r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

또 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$9 + (2-a)^2 = r^2$$

$$\therefore a^2 - 4a + 13 = r^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=2, r^2=9$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$x^2 + (y-2)^2 = 9$$

ㄱ. $(-1)^2 + (4-2)^2 \neq 9$ 이므로 주어진 원은 점 $(-1, 4)$ 를 지나지 않는다.

ㄴ. 원의 넓이는 9π 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

07 원의 중심의 좌표를 $(a, a+5)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a-5)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$(-2-a)^2 + (-a-5)^2 = r^2$$

$$\therefore 2a^2 + 14a + 29 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$(-1-a)^2 + (-a-2)^2 = r^2$$

$$\therefore 2a^2 + 6a + 5 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a = -3, r^2 = 5$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이다. 답 $\sqrt{5}$

08 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 점 $(3, -7)$ 을 지나므로

$$(3-a)^2 + 49 = r^2$$

$$\therefore a^2 - 6a + 58 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

또 점 $(9, -1)$ 을 지나므로

$$(9-a)^2 + 1 = r^2$$

$$\therefore a^2 - 18a + 82 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}$, $\textcircled{10}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, r^2 = 50$

즉 주어진 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + y^2 = 50 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x=7$ 을 원의 방정식에 대입하여 정리하면

$$y^2 = 25 \quad \therefore y = \pm 5$$

따라서 $A(7, -5), B(7, 5)$ 또는 $A(7, 5), B(7, -5)$ 이므로

$$\overline{AB} = |5 - (-5)| = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\dots\dots \textcircled{3}$

답 10

채점 기준	비율
① 원의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
② 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
③ $\overline{AB}$ 의 길이를 구할 수 있다.	10 %

09 원의 중심을 $C(2a, a)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-2a)^2 + (y-a)^2 = r^2$$

이 원이 원점을 지나므로

$$r^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$$

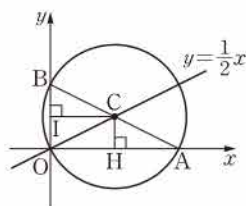
오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면

$$H(2a, 0), I(0, a)$$

$\triangle COA$ 와 $\triangle CBO$ 는 모두 이등변삼각형이므로

$$\overline{OH} = \overline{HA}, \overline{OI} = \overline{IB}$$

$\therefore A(4a, 0), B(0, 2a)$ 이등변삼각형의 꼭짓각의 꼭짓점에서 밑변에 그은 수선은 밑변의 중점을 지난다.



이때 $\overline{OA} - \overline{OB} = 4$ 이므로

$$4a - 2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

따라서 $r^2 = 5 \cdot 2^2 = 20$ 이므로 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이다.

답 ②

다른 풀이 $\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 $\overline{AB}$ 는 원의 지름이다.

$A(t, 0)$ 이라 하면 $B(0, \frac{t-4}{2})$ 이고, $\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심이므로 그 좌표는 $(\frac{t}{2}, \frac{t-4}{2})$

이때 원의 중심이 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위에 있으므로

$$\frac{t-4}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{2}, \quad 2t - 8 = t \quad \therefore t = 8$$

따라서 원의 중심의 좌표가 $(4, 2)$ 이고, 이 원이 원점을 지나므로 반지름의 길이는

$$\sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

10 $\overline{AB}$ 의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로

$$a = \frac{5-1}{2} = 2, b = \frac{-2+4}{2} = 1$$

또 $\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-1-5)^2 + (4+2)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore r^2 = 18$$

$$\therefore a + b + r^2 = 21$$

답 ④

11 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 13$$

따라서 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표가 $(2, -1)$ 이므로

$$\frac{a+5}{2} = 2, \frac{b+1}{2} = -1$$

$$\therefore a = -1, b = -3$$

$$\therefore a + b = -4$$

답 -4

12 $P(6, 0), Q(0, 12)$ 이고 $\overline{PQ}$ 의 중점이 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$$(\frac{6}{2}, \frac{12}{2}), \text{ 즉 } (3, 6)$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

또 $\overline{PQ}$ 가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 12^2} = 3\sqrt{5}$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 45$$

$\dots\dots \textcircled{3}$

$$\text{답 } (x-3)^2 + (y-6)^2 = 45$$

채점 기준	비율
① 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
② 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %
③ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

13 $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$$

$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

A(4, -3), B(-2, 1)이라 하고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원을 O라 하면 $\overline{AB}$ 의 중점이 원 O의 중심이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{4-2}{2}, \frac{-3+1}{2}\right), \text{ 즉 } (1, -1)$$

또 $\overline{AB}$ 가 원 O의 지름이므로 원 O의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2-4)^2 + \{1-(-3)\}^2} = \sqrt{13}$$

따라서 원 O의 방정식은 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x + 2y - 11 = 0$$

즉 $a = -2, b = 2, c = -11$ 이므로

$$abc = 44$$

답 44

14 원의 중심을 P(a, b)라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(a-3)^2 + b^2 = (a+3)^2 + (b-2)^2$$

$$\therefore 3a - b + 1 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\overline{PA} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$$(a-3)^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b-4)^2$$

$$\therefore a - 2b + 2 = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 0, b = 1$

따라서 원의 중심은 P(0, 1)이고 반지름의 길이는

$$\overline{PA} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

이므로 구하는 원의 넓이는 10π 이다.

답 ③

15 세 집의 위치를 좌표로 나타내면

$$A(1, 1), B(7, -7), C(8, -6)$$

도서관의 위치를 P(a, b)라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = (a-7)^2 + (b+7)^2$$

$$\therefore 3a - 4b - 24 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\overline{PA} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = (a-8)^2 + (b+6)^2$$

$$\therefore a - b - 7 = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 4, b = -3$

따라서 도서관의 위치를 좌표로 나타내면 (4, -3)이다. 답 ④

16 원의 중심을 P(a, b)라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$\overline{PA} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$$(a+4)^2 + (b+2)^2 = a^2 + (b+4)^2$$

$$\therefore 2a - b + 1 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\overline{PB} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$$(a-3)^2 + (b-5)^2 = a^2 + (b+4)^2$$

$$\therefore a + 3b - 3 = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 0, b = 1$

즉 원의 중심은 P(0, 1)이고 반지름의 길이는

$$\overline{PC} = |1 - (-4)| = 5$$

이므로 원의 방정식은 $x^2 + (y-1)^2 = 25$

이 원이 점 (k, 1)을 지나므로

$$k^2 = 25 \quad \therefore k = \pm 5$$

따라서 모든 k의 값의 곱은 -25이다.

답 -25

$$17 \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 & \dots\dots \text{㉠} \\ x - y - 2 = 0 & \dots\dots \text{㉡} \\ 2x + y + 5 = 0 & \dots\dots \text{㉢} \end{cases}$$

두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B, 두 직선 ㉠, ㉢의 교점을 C라 하면

$$A(6, 4), B(-1, -3), C(-3, 1)$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 중심을 P(a, b)라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(a-6)^2 + (b-4)^2 = (a+1)^2 + (b+3)^2$$

$$\therefore a + b - 3 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\overline{PA} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$$(a-6)^2 + (b-4)^2 = (a+3)^2 + (b-1)^2$$

$$\therefore 3a + b - 7 = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 1$

따라서 $\triangle ABC$ 의 외접원의 중심은 P(2, 1)이고 반지름의 길이는

$$\overline{PA} = \sqrt{(2-6)^2 + (1-4)^2} = 5$$

이므로 구하는 외접원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$\text{답 } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

심각형의 외심

삼각형의 외심의 성질

- ① 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.
- ② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다.

18 $x^2 + y^2 - 2(a+1)x + 2ay + 3a^2 - 2 = 0$ 에서

$$(x-a-1)^2 + (y+a)^2 = -a^2 + 2a + 3$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-a^2 + 2a + 3 > 0, \quad a^2 - 2a - 3 < 0$$

$$(a+1)(a-3) < 0 \quad \therefore -1 < a < 3$$

답 ③

19 ① $x^2 + y^2 + 4y = 0$ 에서 $x^2 + (y+2)^2 = 4$

$$\text{② } x^2 + y^2 + 2x - y + 1 = 0 \text{에서 } (x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{③ } x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0 \text{에서 } (x+1)^2 + (y+1)^2 = 0$$

$$\text{④ } x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0 \text{에서 } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$\text{⑤ } x^2 + y^2 + 4x + 4y + 2 = 0 \text{에서 } (x+2)^2 + (y+2)^2 = 6$$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

참고 ③ 방정식 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 0$ 은 점 (-1, -1)을 나타낸다.

20 $x^2 + y^2 + 4x + k^2 - 12k + 36 = 0$ 에서

$(x+2)^2 + y^2 = -k^2 + 12k - 32$ ①

이 방정식이 원을 나타내려면

$-k^2 + 12k - 32 > 0, \quad k^2 - 12k + 32 < 0$

$(k-4)(k-8) < 0 \quad \therefore 4 < k < 8$ ②

원의 넓이는 반지름의 길이가 최대일 때 최대이고, 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{-k^2 + 12k - 32} = \sqrt{-(k-6)^2 + 4}$

이므로 $4 < k < 8$ 에서 $k=6$ 일 때 최대이다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 2이다. ③

답 2

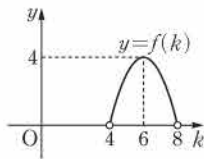
채점 기준	비율
① 주어진 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
② 원의 방정식이 되기 위한 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 넓이가 최대인 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %

참고 원의 반지름의 길이를

$r = \sqrt{-k^2 + 12k - 32}, \quad f(k) = -k^2 + 12k - 32$

라 하면 $4 < k < 8$ 에서 함수 $y=f(k)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 원의 반지름의 길이의 범위는

$0 < r \leq \sqrt{4}, \quad \text{즉 } 0 < r \leq 2$



21 $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 2k + 17 = 0$ 에서

$(x-5)^2 + (y+3)^2 = -2k + 17$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-2k + 17 > 0 \quad \therefore k < \frac{17}{2}$ ①

한편 원 위의 모든 점이 제4사분면 위에 있으려면 원의 반지름의 길이가 3보다 작아야 하므로

$\sqrt{-2k + 17} < 3$

$-2k + 17 < 9 \quad \therefore k > 4$ ②

①, ②에서 $4 < k < \frac{17}{2}$

따라서 정수 k 는 5, 6, 7, 8의 4개이다. ③

답 4

22 $x^2 + y^2 - 6x + ky + 4 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + \left(y + \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4} + 5$

원의 중심 $\left(3, -\frac{k}{2}\right)$ 가 제4사분면 위에 있으므로

$-\frac{k}{2} < 0 \quad \therefore k > 0$

또 원이 y 축에 접하므로

$\sqrt{\frac{k^2}{4} + 5} = |3| \quad \left(\text{반지름의 길이} = |(\text{중심의 } x\text{좌표})| \right)$

위의 식의 양변을 제곱하면 $\frac{k^2}{4} + 5 = 9$

$k^2 = 16 \quad \therefore k = \pm 4$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 4$ ③

답 ③

23 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 넓이가 25π 이므로

$\pi r^2 = 25\pi \quad \therefore r = 5 \quad (\because r > 0)$

이 원이 점 $(-3, 0)$ 에서 x 축에 접하고, 중심이 제2사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-3, 5)$ 이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$ ③

24 원 $x^2 + y^2 - 2ax + 2y + b = 0$ 이 점 $(-1, -2)$ 를 지나므로

$1 + 4 + 2a - 4 + b = 0$

$\therefore 2a + b = -1$ ① ①

$x^2 + y^2 - 2ax + 2y + b = 0$ 에서

$(x-a)^2 + (y+1)^2 = a^2 - b + 1$ ②

이 원이 y 축에 접하므로

$\sqrt{a^2 - b + 1} = |a|$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - b + 1 = a^2 \quad \therefore b = 1$

$b=1$ 을 ①에 대입하면

$2a + 1 = -1 \quad \therefore a = -1$ ③

$\therefore b - a = 2$ ④

답 2

채점 기준	비율
① a, b 에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30 %
② 주어진 원의 방정식을 $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
④ $b-a$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

25 원의 방정식을 $\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2}{\text{y축에 접하는 원의 방정식}}$ 이라 하면 이 원이 점 $(8, 4)$ 를 지나므로

$(8-a)^2 + (4-b)^2 = a^2$

$\therefore b^2 - 16a - 8b + 80 = 0$ ①

또 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$(4-a)^2 + (-b)^2 = a^2$

$b^2 - 8a + 16 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{8}b^2 + 2$ ②

①을 ②에 대입하여 정리하면

$b^2 + 8b - 48 = 0, \quad (b+12)(b-4) = 0$

$\therefore b = -12 \text{ 또는 } b = 4$

$b = -12$ 를 ②에 대입하면 $a = 20$

$b = 4$ 를 ②에 대입하면 $a = 4$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$20 + 4 = 24$ ④

답 ④

26 원의 중심이 직선 $2x + y + 3 = 0$, 즉 $y = -2x - 3$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, -2a-3)$ 이라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2 + \{y - (-2a-3)\}^2 = (-2a-3)^2$

이 원이 점 $(-3, -2)$ 를 지나므로

$(-3-a)^2 + (1+2a)^2 = (2a+3)^2$

$a^2 - 2a + 1 = 0, \quad (a-1)^2 = 0$

$\therefore a = 1$

따라서 원의 반지름의 길이는 $|-2 \cdot 1 - 3| = 5$ 이므로 구하는 원의 넓이는

$$\pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

답 25π

27 △OAB에서

$$\overline{OA} = |2-0| = 2, \overline{AB} = \sqrt{(1-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\overline{BO} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

이므로 △OAB는 정삼각형이다.

→ ①

정삼각형의 내심은 무게중심과 일치하므로 △OAB의 내심의 좌표는

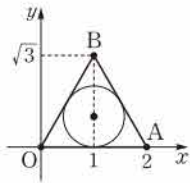
$$\left(\frac{0+2+1}{3}, \frac{0+0+\sqrt{3}}{3} \right), \text{ 즉 } \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

→ ②

오른쪽 그림과 같이 내접원이 x축에 접하므로 구하는 내접원의 방정식은

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$$

$$\therefore (x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow ③$$



$$\text{답 } (x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

채점 기준	비율
① △OAB가 정삼각형임을 알 수 있다.	30 %
② △OAB의 내심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
③ 내접원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

▶ E 눈

- 이등변삼각형의 무게중심, 외심, 내심은 모두 꼭지각의 이등분선 위에 있다.
- 정삼각형의 무게중심, 외심, 내심은 모두 일치한다.

28 원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 (a>0)$ 이라 하면 이 원이 점 (6, 3)을 지나므로 두 원의 중심은 모두 제1사분면 위에 있다.

$$(6-a)^2 + (3-a)^2 = a^2, \quad a^2 - 18a + 45 = 0$$

$$(a-3)(a-15) = 0 \quad \therefore a=3 \text{ 또는 } a=15$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 (3, 3), (15, 15)이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(15-3)^2 + (15-3)^2} = 12\sqrt{2} \quad \text{답 } 12\sqrt{2}$$

29 $x^2 + y^2 + 4x - 2ay - 1 + b = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-a)^2 = a^2 - b + 5$$

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$$|-2| = |a| = \sqrt{a^2 - b + 5}$$

$$|-2| = |a| \text{에서 } a=2 (\because a>0)$$

$$\sqrt{a^2 - b + 5} = 2 \text{에서 } 4 - b + 5 = 4 \quad \therefore b=5$$

$$\therefore ab=10$$

답 10

30 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이다.

이때 원의 중심 (r, r)가 직선 $5x - 3y = 6$ 위에 있으므로

$$5r - 3r = 6 \quad \therefore r=3$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$\text{답 } (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

31 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있으므로 주어진 원의 중심은 곡선

$$y=x^2-12 \text{와 직선 } y=x \text{ 또는 } y=-x$$

의 교점이다.

$$(i) x^2 - 12 = x \text{에서 } x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x+3)(x-4) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 4$$

$$(ii) x^2 - 12 = -x \text{에서 } x^2 + x - 12 = 0$$

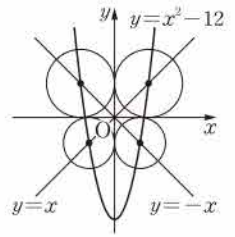
$$(x+4)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 3$$

(i), (ii)에서 네 원의 중심의 좌표는 각각 (-4, 4), (-3, -3), (3, -3), (4, 4)이므로 반지름의 길이는 각각 4, 3, 3, 4이다.

따라서 네 원의 넓이의 합은

$$\pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 4^2 = 50\pi$$

답 ③



32 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

이므로 원의 중심의 좌표는 (-2, 1)이다.

점 A(2, 5)와 원의 중심 (-2, 1) 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2-2)^2 + (1-5)^2} = 4\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$M = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}, m = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore Mm = 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 24$$

답 24

33 $x^2 + y^2 + 6x - 16y + 69 = 0$ 에서

$$(x+3)^2 + (y-8)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$$

두 원의 중심의 좌표가 각각 (-3, 8), (2, -4)이므로 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(2+3)^2 + (-4-8)^2} = 13$$

이때 두 원의 반지름의 길이가 각각 2, 5

이므로 주어진 두 원 위의 점 사이의 거리
의 최댓값은

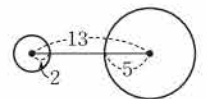
$$13 + 2 + 5 = 20$$

이고, 최솟값은

$$13 - 2 - 5 = 6$$

따라서 구하는 곱은 $20 \cdot 6 = 120$

답 ⑤



34 (1) 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{6}{2}, \frac{8}{2} \right), \text{ 즉 } (3, 4)$$

→ ①

(2) 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 점 M은 PQ의 중점이다.

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{MP}$$

→ ②

이때 점 M(3, 4)와 원의 중심 O(0, 0) 사이의 거리는

$$\overline{OM} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

이고 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{MP}$ 의 길이의 최댓값은 $5+2=7$, 최솟값은 $5-2=3$ 이다.
따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최댓값은 $2 \cdot 7=14$, 최솟값은 $2 \cdot 3=6$ 이다.

답 (1) (3, 4) (2) 최댓값: 14, 최솟값: 6

채점 기준	비율
① 점 M의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
② $PQ=2MP$ 임을 알 수 있다.	20 %
③ PQ의 길이의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

35 $P(a, b)$ 라 하고, $\overline{AP}$ 의 중점을 $Q(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{2+a}{2}, y = \frac{1+b}{2}$$

$$\therefore a = 2(x-1), b = 2y-1 \quad \dots\dots ㉠$$

점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2+y^2-2x+2y-6=0$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2-2a+2b-6=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4(x-1)^2 + (2y-1)^2 - 4(x-1) + 2(2y-1) - 6 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 2$$

따라서 점 Q의 자취는 중심이 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$$2\pi \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi \quad \text{답 ⑤}$$

36 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 26$ 에서

$$a^2 + (b+3)^2 + a^2 + (b-3)^2 = 26$$

$$2a^2 + 2b^2 = 8 \quad \therefore a^2 + b^2 = 4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

이때 $(a+3)^2 + (b+4)^2$ 은 두 점 $P(a, b)$, $(-3, -4)$ 사이의 거리의 제곱과 같으므로 구하는 최댓값은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점과 점 $(-3, -4)$ 사이의 거리의 최댓값의 제곱과 같다.

점 $(-3, -4)$ 와 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

이고 원의 반지름의 길이가 2이므로 구하는 최댓값은

$$(5+2)^2 = 7^2 = 49 \quad \text{답 ④}$$

37 $P(\alpha, \beta)$, $G(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{11+4+\alpha}{3}, y = \frac{2+10+\beta}{3}$$

$$\therefore \alpha = 3(x-5), \beta = 3(y-4) \quad \dots\dots ㉠$$

점 $P(\alpha, \beta)$ 가 원 $x^2+y^2=81$ 위의 점이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 81 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$9(x-5)^2 + 9(y-4)^2 = 81$$

$$\therefore (x-5)^2 + (y-4)^2 = 9$$

따라서 무게중심 G의 자취는 중심이 점 $(5, 4)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이므로

$$a=5, b=4, r=3$$

$$\therefore a+b+r=12 \quad \text{답 12}$$

38 직각삼각형 POA에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OA}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{AP}^2$$

$P(x, y)$ 라 하면

$$(-6)^2 = x^2 + y^2 + (x+6)^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + 6x = 0$$

$$\therefore (x+3)^2 + y^2 = 9$$

이때 세 점 O, A, P가 삼각형을 이루려면 세 점이 한 직선 위에 있지 않아야 하므로

$$y \neq 0 \quad \text{두 점 O, A를 지나는 직선의 방정식이 } y=0 \text{이다.}$$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$$(x+3)^2 + y^2 = 9 \quad (\text{단, } y \neq 0) \quad \text{답 ③}$$

다른 풀이 $\angle OPA = 90^\circ$ 이므로 점 $P(x, y)$ 는 $\overline{OA}$ 를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{OA}$ 의 중점의 좌표는 $(-3, 0)$ 이고 $\frac{1}{2}\overline{OA}=3$ 이므로 점 P의 자취의 방정식은

$$(x+3)^2 + y^2 = 9 \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

39 $P(x, y)$ 라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}, \quad \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4\{(x-5)^2 + (y-2)^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 14x - 4y + 37 = 0$$

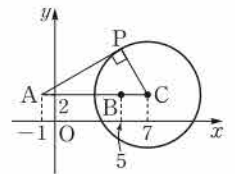
$$\therefore (x-7)^2 + (y-2)^2 = 16 \quad \dots\dots ①$$

따라서 점 P는 중심이 점 $(7, 2)$ 이고 반지름의 길이가 4인 원 위의 움직이므로 $\angle PAB$ 의 크기는 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때 최대이다. 이때 원의 중심을 C라 하면 직각삼각형 PAC에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2}$$

$$= \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{답 } 4\sqrt{3}$$



채점 기준	비율
① 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
② $\angle PAB$ 의 크기가 최대일 때 AP의 길이를 구할 수 있다.	50 %

40 $(x-1)^2 + (y+a)^2 = 6$ 에서

$$x^2 + y^2 - 2x + 2ay + a^2 - 5 = 0$$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 에서

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x + 2ay + a^2 - 5 - (x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4) = 0$$

$$\therefore 2x + 2(a+1)y + a^2 - 9 = 0$$

이 직선이 직선 $3x-y=-4$ 와 수직이므로

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 2(a+1) \cdot (-1) &= 0 \\ 4 - 2a &= 0 \quad \therefore a=2 \end{aligned}$$

답 ④

B $\frac{1}{2}$

두 직선이 수직일 조건

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 이 수직이면
 $aa'+bb'=0$

41 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} x^2+y^2+ax-4y+2-(x^2+y^2-8x+ay-5) &= 0 \\ \therefore (a+8)x-(a+4)y+7 &= 0 \end{aligned}$$

이 직선이 점 (1, 2)를 지나므로

$$\begin{aligned} (a+8)-2(a+4)+7 &= 0 \\ -a+7 &= 0 \quad \therefore a=7 \end{aligned}$$

답 7

42 원 $x^2+y^2+2x+ay+4=0$ 이 원 $x^2+y^2+4x-8y+16=0$ 의 둘레를 이등분하려면 두 원의 공통인 현이 원 $x^2+y^2+4x-8y+16=0$ 의 지름이어야 한다.

두 원의 공통인 현의 방정식은

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2x+ay+4-(x^2+y^2+4x-8y+16) &= 0 \\ \therefore 2x-(a+8)y+12 &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$x^2+y^2+4x-8y+16=0$ 에서

$$(x+2)^2+(y-4)^2=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 원 $\textcircled{2}$ 의 중심 $(-2, 4)$ 를 지나야 하므로

$$\begin{aligned} -4-4(a+8)+12 &= 0 \\ -4a-24 &= 0 \quad \therefore a=-6 \end{aligned}$$

답 -6

43 PQ는 오른쪽 그림과 같이 점 (1, 0)에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 2인 원의 일부이므로 그 원의 방정식은

$$\begin{aligned} (x-1)^2+(y-2)^2 &= 4 \\ \therefore x^2+y^2-2x-4y+1 &= 0 \end{aligned}$$

이때 PQ는 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 의 공통인 현이므로 직선 PQ의 방정식은

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x-4y+1) &= 0 \\ \therefore 2x+4y-5 &= 0 \end{aligned}$$

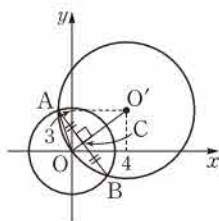
위의 식에 $x=0$ 을 대입하면 $y=\frac{5}{4}$ 이므로 구하는 y절편은 $\frac{5}{4}$ 이다.

답 $\frac{5}{4}$

44 오른쪽 그림과 같이 두 원

$x^2+y^2=10$, $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ 의 중심을 각각 O, O'이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, OO'와 AB의 교점을 C라 하자.

$$\begin{aligned} (x-4)^2+(y-3)^2 &= 25 \text{에서} \\ x^2+y^2-8x-6y &= 0 \end{aligned}$$



이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$\begin{aligned} x^2+y^2-10-(x^2+y^2-8x-6y) &= 0 \\ \therefore 4x+3y-5 &= 0 \end{aligned}$$

이 직선과 점 O 사이의 거리는

$$OC = \frac{|-5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 1$$

직각삼각형 OCA에서

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{OA^2 - OC^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} = 3 \end{aligned}$$

원 $x^2+y^2=10$ 의 반지름의 길이

따라서 공통인 현의 길이는

$$AB = 2AC = 6$$

답 ④

45 $x^2+(y-2)^2=6$ 에서

$$x^2+y^2-4y-2=0$$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

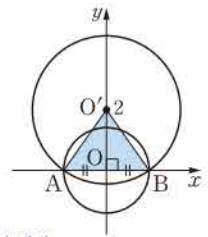
$$\begin{aligned} x^2+y^2-2-(x^2+y^2-4y-2) &= 0 \\ \therefore y &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

따라서 $AB=2AO=2\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \triangle O'AB &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OO' \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

원 O의 반지름의 길이

답 $2\sqrt{2}$



채점 기준	비율
① 공통인 현의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
② $\triangle O'AB$ 의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

46 두 원의 교점을 지나는 원의 넓이는 공통인 현이 지름일 때 최소이다.

오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=8$, $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 의 중심을 각각 O, O'이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, OO'와 AB의 교점을 C라 하자.

$(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 에서

$$x^2+y^2-4x+4y+4=0$$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$\begin{aligned} x^2+y^2-8-(x^2+y^2-4x+4y+4) &= 0 \\ \therefore x-y-3 &= 0 \end{aligned}$$

이 직선과 점 O 사이의 거리는

$$OC = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

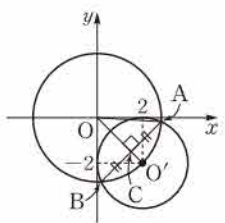
직각삼각형 OCA에서

$$AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

따라서 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{14}}{2}$ 이므로 구하는 넓이는

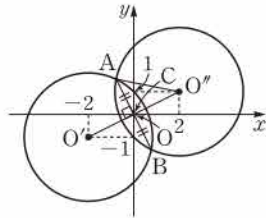
$$\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}\pi$$

답 $\frac{7}{2}\pi$



47 오른쪽 그림과 같이 두 원

$x^2+y^2+4x+2y+k=0$,
 $x^2+y^2-4x-2y-3=0$ 의 중심을
 각각 O' , O'' 이라 하고, 두 원의
 교점을 A, B, $\overline{O'O''}$ 과 $\overline{AB}$ 의 교
 점을 C라 하자.



$x^2+y^2-4x-2y-3=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y-1)^2=8$$

$$\therefore O''(2, 1), \overline{O'A}=2\sqrt{2}$$

이때 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}$

직각삼각형 $O''AC$ 에서

$$\begin{aligned}\overline{O''C}&=\sqrt{\overline{O''A}^2-\overline{AC}^2} \\ &=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}\end{aligned}$$

한편 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2+y^2+4x+2y+k-(x^2+y^2-4x-2y-3)=0$$

$$\therefore 8x+4y+k+3=0$$

이 직선과 점 O'' 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|16+4+k+3|}{\sqrt{8^2+4^2}}=\sqrt{5}, \quad |k+23|=20$$

$$k+23=\pm 20 \quad \therefore k=-43 \text{ 또는 } k=-3$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 -46 이다.

답 -46

48 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-8x+2y-5+k(x^2+y^2+2x-4y+2)=0 \quad (k \neq -1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이라 하면 이 원이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$3+2k=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$$

$k=-\frac{3}{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2+22x-16y+16=0$$

$$\therefore (x+11)^2+(y-8)^2=169$$

따라서 구하는 원의 넓이는 169π 이다.

답 169π

49 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+2y-4+k(x^2+y^2+ax-18y+4)=0 \quad (k \neq -1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이라 하면 이 원이 원점을 지나므로

$$-4+4k=0 \quad \therefore k=1$$

$k=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2+\frac{a}{2}x-8y=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{a}{4}\right)^2+(y-4)^2=\frac{a^2}{16}+16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 원의 넓이가 17π 이므로

$$\frac{a^2}{16}+16=17, \quad a^2=16$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

답 4

채점 기준

비율

① 주어진 두 원의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식을 구할 수 있다. 60 %

② 양수 a 의 값을 구할 수 있다. 40 %

50 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-6x+k(x^2+y^2+3x-6y-2)=0 \quad (k \neq -1)$$

이라 하면

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(3k-6)x-6ky-2k=0$$

이때 $k \neq -1$ 이므로

$$x^2+y^2+\frac{3k-6}{k+1}x-\frac{6k}{k+1}y-\frac{2k}{k+1}=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 원의 중심이 y 축 위에 있으므로 원의 중심의 x 좌표는 0이다.

즉 $\textcircled{1}$ 의 x 의 계수가 0이어야 하므로

$$\frac{3k-6}{k+1}=0, \quad 3k-6=0$$

$$\therefore k=2$$

$k=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x^2+y^2-4y-\frac{4}{3}=0$$

$$\therefore x^2+(y-2)^2=\frac{16}{3}$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\frac{16}{3}\pi$ 이다.

답 $\frac{16}{3}\pi$

51 원의 중심 $(0, 2)$ 와 직선 $y=-3x+k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|k-2|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k-2|}{\sqrt{10}}<\sqrt{10}, \quad |k-2|<10$$

$$-10<k-2<10$$

$$\therefore -8<k<12$$

따라서 정수 k 는 $-7, -6, -5, \dots, 11$ 의 19개이다.

답 ⑤

다른 풀이 $y=-3x+k$ 를 $x^2+(y-2)^2=10$ 에 대입하면

$$x^2+(-3x+k-2)^2=10$$

$$\therefore 10x^2-6(k-2)x+k^2-4k-6=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=\{-3(k-2)\}^2-10(k^2-4k-6)>0$$

$$k^2-4k-96<0, \quad (k+8)(k-12)<0$$

$$\therefore -8<k<12$$

52 원의 중심 $(4, 3)$ 과 직선 $3x+4y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12+12-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{18}{5}$$

원의 반지름의 길이가 r 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$r > \frac{18}{5}$$

따라서 자연수 r 의 최솟값은 4이다.

답 ②

53 원의 중심 $(a, 2)$ 와 직선 $6x - 8y - a = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6a - 16 - a|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|5a - 16|}{10}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|5a - 16|}{10} < 1, \quad |5a - 16| < 10$$

$$-10 < 5a - 16 < 10 \quad \therefore \frac{6}{5} < a < \frac{26}{5} \quad \cdots ①$$

따라서 정수 a 는 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$$2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

답 ②

답 14

채점 기준	비율
① a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %
② 모든 정수 a 의 값의 합을 구할 수 있다.	30 %

54 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 $C(-3, 3)$ 이라 하고, 점 C 에서 직선 $y = x + 4$, 즉 $x - y + 4 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$CH = \frac{|-3 - 3 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

직각삼각형 CAH 에서

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore AB = 2AH = 6\sqrt{2}$$

답 ③

예 B 53

현의 성질

- ① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.
또 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.
- ② 한 원 또는 합동인 두 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.
또 한 원 또는 합동인 두 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

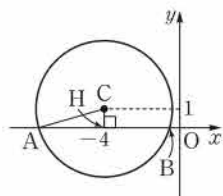
55 $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 13$$

오른쪽 그림과 같이 이 원의 중심을

$C(-4, 1)$, 점 C 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 원과 x 축의 두 교점을 A, B 라 하면

$$CH = 1$$



직각삼각형 CAH 에서

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 현의 길이는

$$AB = 2AH = 4\sqrt{3}$$

답 $4\sqrt{3}$

다른 풀이 $y = 0$ 을 $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4 = 0$ 에 대입하면

$$x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$\therefore x = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

따라서 주어진 원과 x 축의 교점의 좌표가 $(-4 - 2\sqrt{3}, 0)$,

$(-4 + 2\sqrt{3}, 0)$ 이므로 구하는 현의 길이는

$$|-4 + 2\sqrt{3} - (-4 - 2\sqrt{3})| = 4\sqrt{3}$$

56 오른쪽 그림과 같이 주어진

원과 직선의 두 교점을 A, B 라

하고, 원의 중심 O 에서 직선

$x - 3y + k = 0$ 에 내린 수선의 발

을 H 라 하자.

$AB = 2\sqrt{6}$ 이므로

$$AH = \frac{1}{2}AB = \sqrt{6}$$

직각삼각형 OHA 에서

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$$

답 ①

따라서 점 O 와 직선 $x - 3y + k = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10}, \quad |k| = 10$$

$$\therefore k = 10 \quad (\because k > 0)$$

답 ②

답 10

채점 기준	비율
① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %
② 양수 k 의 값을 구할 수 있다.	50 %

57 $\widehat{AB}$ 와 $\widehat{AB}$ 로 둘러싸인 부분

중 원점 O 를 포함하지 않는 부분

은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과

같다.

원의 중심 O 에서 직선

$x + \sqrt{3}y + 6 = 0$ 에 내린 수선의

발을 H 라 하면

$$OH = \frac{|6|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = 3$$

직각삼각형 OAH 에서

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore AB = 2AH = 2\sqrt{3}$$

이때 $OA = OB = 2\sqrt{3}$ 이므로 $\triangle OAB$ 는 정삼각형이다.

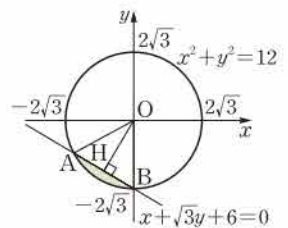
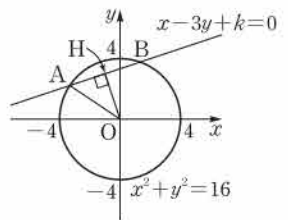
따라서 구하는 둘레의 길이는

$$\widehat{AB} + \widehat{AB} = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{60}{360} + 2\sqrt{3}$$

$\triangle OAB$ 가 정삼각형이므로
 $\angle AOB = 60^\circ$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

$$\text{답 } \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$



58 $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 에서

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

원의 반지름의 길이가 2이므로

$$\overline{CP} = \overline{CQ} = 2$$

즉 $\triangle CPQ$ 가 정삼각형이 되려면 $\overline{PQ} = 2$ 이어야 한다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심

$C(0, 2)$ 에서 PQ 에 내린 수선의

발을 H 라 하면

$$\overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

따라서 점 C 와 직선 $y = mx - 4$,

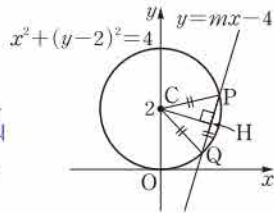
즉 $mx - y - 4 = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{|-2-4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3}, \quad 6 = \sqrt{3m^2 + 3}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $36 = 3m^2 + 3$

$$m^2 = 11 \quad \therefore m = \sqrt{11} \quad (\because m > 0)$$

답 $\sqrt{11}$



59 원 C 가 x 축에 접하므로 원의 방정식을

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2 \quad (a > 0, b > 0)$$

이라 하자.

오른쪽 그림과 같이 원 C 와 y 축의 두 교

점을 A, B 라 하고, 원의 중심 C 에서 y

축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{AB} = 8\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 4\sqrt{2}$$

직각삼각형 ACH 에서

$$b^2 = a^2 + 32 \quad \overline{AC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 \quad \dots\dots ①$$

또 점 $C(a, b)$ 가 직선 $x + y - 8 = 0$ 위에 있으므로

$$a + b - 8 = 0 \quad \therefore b = -a + 8 \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하여 정리하면 $a^2 - 16a + 64 = a^2 + 32$

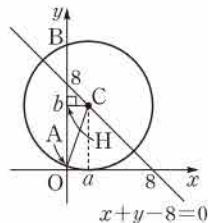
$$-16a = -32 \quad \therefore a = 2$$

$a = 2$ 를 ②에 대입하면 $b = 6$

따라서 원 C 의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$$

답 $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$



60 원의 중심 $(1, -4)$ 와 직선 $2x + y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-4+k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|k-2|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \quad |k-2| = 5$$

$$k-2 = \pm 5 \quad \therefore k = 7 \quad (\because k > 0)$$

답 ④

다른 풀이 $y = -2x - k$ 를 $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 5$ 에 대입하면

$$(x-1)^2 + (-2x-k+4)^2 = 5$$

$$\therefore 5x^2 + 2(2k-9)x + k^2 - 8k + 12 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4} = (2k-9)^2 - 5(k^2 - 8k + 12) = 0$$

$$k^2 - 4k - 21 = 0, \quad (k+3)(k-7) = 0$$

$$\therefore k = 7 \quad (\because k > 0)$$

61 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = -x + 4$, 즉 $x + y - 4 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가 r 이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$$r = 2\sqrt{2} \quad \text{답 } 2\sqrt{2}$$

62 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\pi r^2 = 40\pi \quad \therefore r = 2\sqrt{10} \quad (\because r > 0)$$

원의 중심 $(2, 1)$ 과 직선 $x - 3y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-3+k|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{10}}$$

이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}, \quad |k-1| = 20$$

$$k-1 = \pm 20$$

$$\therefore k = -19 \text{ 또는 } k = 21$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-19 + 21 = 2$$

답 ①

63 원의 중심이 제2사분면 위에 있고 x 축, y 축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$ 이다. → ①

원의 중심 $(-r, r)$ 와 직선 $4x - 3y + 8 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4r-3r+8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-7r+8|}{5}$$

이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-7r+8|}{5} = r, \quad |-7r+8| = 5r$$

$$-7r+8 = \pm 5r$$

$$\therefore r = \frac{2}{3} \text{ 또는 } r = 4$$

→ ②

따라서 두 원의 반지름의 길이의 곱은

$$\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$$

→ ③

답 $\frac{8}{3}$

채점 기준	비율
① 원의 반지름의 길이를 이용하여 중심의 좌표를 나타낼 수 있다.	30 %
② 두 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	50 %
③ 두 원의 반지름의 길이의 곱을 구할 수 있다.	20 %

64 직선 $y = mx + n$, 즉 $mx - y + n = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하려면

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\therefore |n| = 2\sqrt{m^2+1} \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

또 직선 $mx-y+n=0$ 이 원 $(x-2)^2+y^2=1$ 에 접하려면

$$\frac{|2m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \quad \begin{array}{l} \text{중심의 좌표: } (2, 0) \\ \text{반지름의 길이: } 1 \end{array}$$

$$\therefore |2m+n| = \sqrt{m^2+1} \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒에서 $|n| = 2|2m+n|$

$$\therefore n = \pm(4m+2n)$$

(i) $n = -(4m+2n)$, 즉 $n = -\frac{4}{3}m$ 일 때,

$n = -\frac{4}{3}m$ 을 ㉑에 대입하면

$$\left| -\frac{4}{3}m \right| = 2\sqrt{m^2+1}, \quad \left| -\frac{2}{3}m \right| = \sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\frac{4}{9}m^2 = m^2+1, \quad m^2 = -\frac{9}{5}$$

이를 만족시키는 실수 m 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $n = 4m+2n$, 즉 $n = -4m$ 일 때,

$n = -4m$ 을 ㉑에 대입하면

$$|-4m| = 2\sqrt{m^2+1}, \quad |-2m| = \sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4m^2 = m^2+1, \quad m^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad n = \mp \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (\text{복호동순})$$

(i), (ii)에서

$$m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad n = \mp \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (\text{복호동순})$$

$$\therefore 3mn = -4$$

답 ②

65 a, b 는 0 또는 1 또는 2이므로 $ab=2$ 이라면

$$a=1, b=2 \text{ 또는 } a=2, b=1$$

이어야 한다.

(i) $a=1, b=2$ 일 때,

직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 이 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 에 접해야 하므로

$$\frac{|-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1, \quad |k-1|=\sqrt{2}$$

$$k-1=\pm\sqrt{2}$$

$$\therefore k=1\pm\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

또 직선 $x-y+k=0$ 이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{|1-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} < 1, \quad |k| < \sqrt{2}$$

$$\therefore -\sqrt{2} < k < \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒} \text{에서 } k=1-\sqrt{2}$$

(ii) $a=2, b=1$ 일 때,

직선 $x-y+k=0$ 이 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{|-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} < 1, \quad |k-1| < \sqrt{2}$$

$$\therefore 1-\sqrt{2} < k < 1+\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

또 직선 $x-y+k=0$ 이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 에 접해야 하므로

$$\frac{|1-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1, \quad |k|=\sqrt{2}$$

$$\therefore k=\pm\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉓}, \textcircled{㉔} \text{에서 } k=\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}=1$$

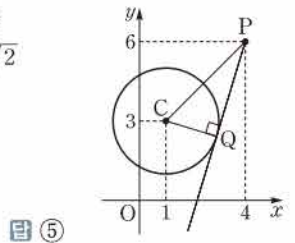
답 ④

66 원의 중심을 $C(1, 3)$ 이라 하면

$$CP = \sqrt{(4-1)^2+(6-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

직각삼각형 CQP 에서

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{CP^2 - CQ^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 2^2} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$



답 ⑤

67 $x^2+y^2-8x-6y+16=0$ 에서

$$(x-4)^2+(y-3)^2=9$$

원의 중심을 $C(4, 3)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} CP &= \sqrt{(a-4)^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{a^2-8a+25} \end{aligned}$$

접점을 Q 라 하면 직각삼각형 CPQ 에서 $CP^2 = CQ^2 + PQ^2$ 이므로

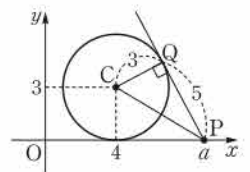
$$a^2-8a+25 = 3^2+5^2, \quad a^2-8a-9=0$$

$$(a+1)(a-9)=0 \quad \therefore a=9 \quad (\because a>0)$$

답 ⑤

다른 풀이 $R(4, 0)$ 이라 하면 $PR=5$ 이므로

$$|a-4|=5, \quad a-4=\pm 5 \quad \therefore a=9 \quad (\because a>0)$$



68 원의 중심이 $O(0, 0)$ 이므로

$$OP = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$$

직각삼각형 OPA 에서

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{OP^2 - OA^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 1^2} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

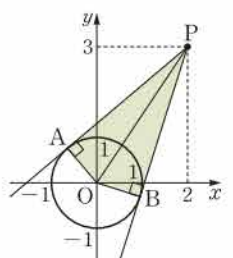
이때 $\triangle OPA \cong \triangle OPB$ (RHS 합동)

이므로

$$\square AOBP = 2\triangle OPA$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3} \right) = 2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$



69 오른쪽 그림과 같이 점 P 에서 주어진 원에 그은 두 접선의 접점을 각각

A, B 라 하고 원의 중심을 $C(2, -2)$

라 하면 두 접선이 수직이므로

$\square APBC$ 는 정사각형이다.

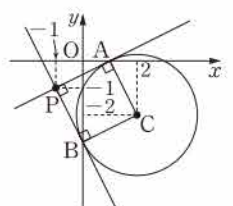
이때 $\square APBC$ 의 한 변의 길이는 r 이고,

$$CP = \sqrt{(-1-2)^2+(-1+2)^2} = \sqrt{10}$$

이므로

$$\sqrt{2}r = \sqrt{10} \quad \therefore r = \sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$



70 원의 중심이 $O(0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 3이므로

$$OP=3, OA=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

직각삼각형 OAP 에서

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{OA^2 - OP^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 3^2} = \sqrt{11} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

OA 와 PQ 의 교점을 R 라 하면 $OA \perp PQ$ 이므로 $\triangle OAP$ 의 넓이에서

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AP \cdot OP &= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot PR \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{11} \cdot 3 &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot PR \quad \therefore PR = \frac{3\sqrt{55}}{10} \end{aligned}$$

$$\therefore PQ = 2PR = \frac{3\sqrt{55}}{5} \quad \cdots ②$$

답 $\frac{3\sqrt{55}}{5}$

채점 기준	비율
① AP 의 길이를 구할 수 있다.	40 %
② PQ 의 길이를 구할 수 있다.	60 %

71 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y=k(x-2)$, 즉 $kx-y-2k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = \frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}} > 1, \quad |2k| > \sqrt{k^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned} 4k^2 &> k^2+1, \quad k^2 > \frac{1}{3} \\ \therefore k &< -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } k > \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

답 $k < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $k > \frac{\sqrt{3}}{3}$

다른 풀이 $y=k(x-2)$ 를 $x^2+y^2=1$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} x^2+k^2(x-2)^2 &= 1 \\ \therefore (1+k^2)x^2-4k^2x+4k^2-1 &= 0 \end{aligned}$$

이 x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

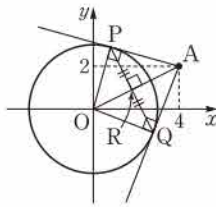
$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-2k^2)^2 - (1+k^2)(4k^2-1) < 0 \\ -3k^2+1 &< 0, \quad k^2 > \frac{1}{3} \\ \therefore k &< -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } k > \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

72 원의 중심 $(k, 0)$ 과 직선 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2k+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|2k+1|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|2k+1|}{\sqrt{5}} > 2\sqrt{5}, \quad |2k+1| > 10$$



$$2k+1 < -10 \text{ 또는 } 2k+1 > 10$$

$$\therefore k < -\frac{11}{2} \text{ 또는 } k > \frac{9}{2}$$

따라서 $\alpha = -\frac{11}{2}$, $\beta = \frac{9}{2}$ 이므로

$$\alpha + \beta = -1$$

답 ②

73 두 점 $(0, 1)$, $(2, -5)$ 를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2}{2}, \frac{1-5}{2}\right), \text{ 즉 } (1, -2)$$

이고 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-5-1)^2} = \sqrt{10} \quad \cdots ①$$

원의 중심 $(1, -2)$ 와 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+2+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|5+k|}{\sqrt{10}} \quad \cdots ②$$

이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\begin{aligned} \frac{|5+k|}{\sqrt{10}} &> \sqrt{10}, \quad |5+k| > 10 \\ 5+k &< -10 \text{ 또는 } 5+k > 10 \\ \therefore k &< -15 \text{ 또는 } k > 5 \end{aligned}$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 6이다.

③

답 6

채점 기준	비율
① 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %
② 원의 중심과 직선 사이의 거리를 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
③ 자연수 k 의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

74 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 의 중심 $(3, 2)$ 와 직선

$3x-4y+a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|9-8+a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|1+a|}{5}$$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나려면

$$\frac{|1+a|}{5} \leq 1, \quad |1+a| \leq 5 \quad \text{서로 다른 두 점에서 만나거나 접한다.}$$

$$-5 \leq 1+a \leq 5 \quad \therefore -6 \leq a \leq 4 \quad \cdots ①$$

원 $(x+2)^2+(y+2)^2=1$ 의 중심 $(-2, -2)$ 와 직선

$3x-4y+a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6+8+a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|2+a|}{5}$$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|2+a|}{5} > 1, \quad |2+a| > 5$$

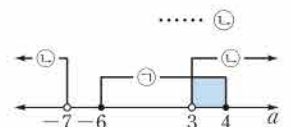
$$2+a < -5 \text{ 또는 } 2+a > 5$$

$$\therefore a < -7 \text{ 또는 } a > 3$$

①, ②에서

$$3 < a \leq 4$$

답 $3 < a \leq 4$



75 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

원의 중심 (2, 3)과 직선 $4x - 3y + 21 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|8-9+21|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 4$$

원의 반지름의 길이가 3이므로

$$M = 4 + 3 = 7, m = 4 - 3 = 1$$

$$\therefore Mm = 7$$

답 7

76 원의 중심 (0, 0)과 직선 $3x + 4y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|k|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원 위의 점 P와 직선

$3x + 4y + k = 0$ 사이의 거리의 최솟값이 1이라면

$$\frac{|k|}{5} - 4 = 1, \quad |k| = 25$$

$$\therefore k = 25 \quad (\because k > 0)$$

답 25

77 $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 10$$

원의 중심 (4, -1)과 직선 $3x - y + 7 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12+1+7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{10}$$

... ①

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 원 위의 점 P와 직선

$3x - y + 7 = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$2\sqrt{10} - \sqrt{10} \leq d \leq 2\sqrt{10} + \sqrt{10}$$

$$\therefore \sqrt{10} \leq d \leq 3\sqrt{10}$$

... ②

따라서 정수 d 는 4, 5, 6, 7, 8, 9이고 각각의 거리에 해당하는

점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 12이다.

... ③

답 12

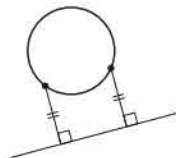
채점 기준

비율

- ① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. 30 %
- ② 점 P와 직선 사이의 거리의 범위를 구할 수 있다. 40 %
- ③ 점 P의 개수를 구할 수 있다. 30 %

풀이 B

오른쪽 그림과 같이 원 위의 점과 직선 사이의 거리가 최대일 때와 최소일 때를 제외하면 직선에서 같은 거리에 있는 원 위의 점은 2개씩 존재한다.



78 원의 중심 $O(0, 0)$ 과 직선 $y = -x - 6$, 즉 $x + y + 6 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로 점 A와 직선 BC 사이의 거리의 최솟값과 최댓값은 각각

$$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}, \quad 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이는 높이가 $\sqrt{2}$ 일 때 최소이고, 높이가 $5\sqrt{2}$ 일 때 최대이므로 구하는 넓이의 비는

$$(\sqrt{2})^2 : (5\sqrt{2})^2 = 1 : 25$$

같은 두 도형의 넓음비가 $m : n$ 이면 넓이의 비는 $m^2 : n^2$ 이다.

답 ②

다른 풀이 높이가 $\sqrt{2}$ 인 정삼각형의 한 변의 길이를 a 라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{2} \quad \therefore a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

이 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

같은 방법으로 하면 높이가 $5\sqrt{2}$ 인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{50\sqrt{3}}{3}$$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} : \frac{50\sqrt{3}}{3} = 1 : 25$$

79 두 직선 $y = x$, $x + y + 8 = 0$ 이

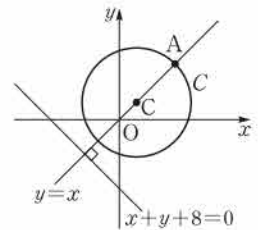
수직이므로 점 P와 직선

$x + y + 8 = 0$ 사이의 거리는 오른쪽

그림과 같이 점 P가 원 C와 직선

$y = x$ 의 교점 중 하나인 점 A와 같

을 때 최대이다.



A(a, a) ($a > 0$)라 하면 점 A와 직

선 $x + y + 8 = 0$ 사이의 거리가 $10\sqrt{2}$ 이므로

직선 $x + y + 8 = 0$ 과의 거리가 최대인 점 A는 제1사분면 위에 있다.

$$\frac{|a+a+8|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 10\sqrt{2}$$

이때 $a > 0$ 이므로 $2a + 8 = 20 \quad \therefore a = 6$

$$\therefore A(6, 6)$$

한편 C(c, c)라 하면 원 C는 점 (-2, 6)을 지나므로 원 C의

방정식은 원 C의 반지름의 길이는 점 C와 점 (-2, 6) 사이의 거리와 같다.

$$(x-c)^2 + (y-c)^2 = (c+2)^2 + (c-6)^2$$

점 A(6, 6)이 이 원 위에 있으므로

$$(6-c)^2 + (6-c)^2 = (c+2)^2 + (c-6)^2$$

$$(6-c)^2 = (c+2)^2$$

$$-16c = -32 \quad \therefore c = 2$$

$$\therefore C(2, 2)$$

따라서 원 C의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(2+2)^2 + (2-6)^2} = 4\sqrt{2}$$

이므로 원 C의 넓이는 32π 이다.

답 32π

다른 풀이 원의 중심의 좌표를 C(a, a) ($a > 0$)라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$$

이 원이 점 (-2, 6)을 지나므로

$$(-2-a)^2 + (6-a)^2 = r^2$$

$$\therefore 2a^2 - 8a + 40 = r^2$$

..... ㉠

또 중심 (a, a)와 직선 $x + y + 8 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a+a+8|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}a + 4\sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

이고 점 P와 직선 $x + y + 8 = 0$ 사이의 거리의 최댓값이 $10\sqrt{2}$ 이

므로

$$\sqrt{2}a + 4\sqrt{2} + r = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore r = -\sqrt{2}a + 6\sqrt{2}$$

㉔을 ㉓에 대입하면

$$2a^2 - 8a + 40 = (-\sqrt{2}a + 6\sqrt{2})^2$$

$$2a^2 - 8a + 40 = 2a^2 - 24a + 72$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 원 C의 반지름의 길이는

$$r = -\sqrt{2} \cdot 2 + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

이므로 구하는 원의 넓이는 32π 이다.

80 원점과의 거리가 최대인 직선 l 은 원점과 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선과 수직이고, 원점과 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기는 -2 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \quad \therefore x - 2y + 5 = 0$$

따라서 원의 중심 $(6, -2)$ 와 직선 $l: x - 2y + 5 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6 + 4 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 3\sqrt{5}$$

이고, 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$$3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

답 2√5

81 직선 $x + 3y + 1 = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ 에 수직인 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2 + y^2 = 10$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{10} \cdot \sqrt{3^2 + 1}$$

$$\therefore y = 3x \pm 10$$

답 y=3x±10

82 직선 $y = 2x - 3$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이고, 원 $x^2 + y^2 = 5$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{5} \cdot \sqrt{2^2 + 1} \quad \therefore y = 2x \pm 5$$

따라서 두 직선이 y 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0, 5)$, $(0, -5)$ 이므로

$$PQ = |5 - (-5)| = 10$$

답 ②

83 접선의 방정식을 $y = 4x + k$ (k 는 상수)라 하면 원의 중심 $(-3, 1)$ 과 직선 $y = 4x + k$, 즉 $4x - y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-12 - 1 + k|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{|k - 13|}{\sqrt{17}}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k - 13|}{\sqrt{17}} = 2, \quad |k - 13| = 2\sqrt{17}$$

$$k - 13 = \pm 2\sqrt{17} \quad \therefore k = 13 \pm 2\sqrt{17}$$

따라서 두 직선의 y 절편은 각각 $13 + 2\sqrt{17}$, $13 - 2\sqrt{17}$ 이므로 구하는 합은

$$(13 + 2\sqrt{17}) + (13 - 2\sqrt{17}) = 26$$

답 26

84 $\triangle ABP$ 의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행하면서 y 절편이 음수일 때 최대이다.

직선 AB의 기울기는

$$\frac{5 - (-3)}{0 - (-4)} = 2$$

이므로 기울기가 2인 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 5\sqrt{2^2 + 1}$$

$$\therefore y = 2x \pm 5\sqrt{5}$$

즉 점 P를 지나는 접선의 방정식은 $y = 2x - 5\sqrt{5}$ 이고 점

$B(0, 5)$ 와 직선 $2x - y - 5\sqrt{5} = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5 - 5\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5 + 5\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 5$$

이때 $AB = \sqrt{4^2 + (5+3)^2} = 4\sqrt{5}$ 이므로 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} + 5) = 10 + 10\sqrt{5}$$

따라서 $a = 10$, $b = 10$ 이므로

$$ab = 100$$

답 100

85 원 $x^2 + y^2 = 40$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax + by = 40$$

$$\therefore y = -\frac{a}{b}x + \frac{40}{b}$$

이 접선의 기울기가 3이므로

$$-\frac{a}{b} = 3 \quad \therefore a = -3b$$

..... ㉔

한편 점 (a, b) 는 원 $x^2 + y^2 = 40$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 40$$

..... ㉓

㉓, ㉔을 연립하여 풀면

$$a = 6, b = -2 \text{ 또는 } a = -6, b = 2$$

$$\therefore ab = -12$$

답 -12

86 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(3, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3x + 4y = 25$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이므로 기울기가 $\frac{4}{3}$ 이고 원

$x^2 + y^2 = 25$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y = \frac{4}{3}x \pm 5\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}x \pm \frac{25}{3}$$

$$\text{답 } y = \frac{4}{3}x \pm \frac{25}{3}$$

87 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x + 3y = 13$$

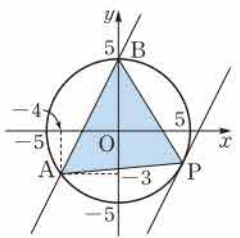
$$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$$

..... ㉔ → ㉓

$x^2 + y^2 + 4x + 6y + k = 0$ 에서

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 13 - k$$

..... ㉓



원 ㉔의 중심 $(-2, -3)$ 과 직선 ㉑ 사이의 거리는

$$\frac{|-4-9-13|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13} \quad \dots ㉒$$

이때 직선 ㉑과 원 ㉔이 접하므로

$$\sqrt{13-k} = 2\sqrt{13}, \quad 13-k=52$$

$$\therefore k=-39 \quad \dots ㉓$$

답 -39

채점 기준	비율
① 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
② 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

88 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $P(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x+y=5 \quad \dots\dots ㉑$$

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $Q(-1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-x+2y=5 \quad \dots\dots ㉒$$

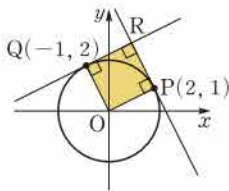
이때 $2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$ 이므로 두 직선 ㉑, ㉒은 수직이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 $\square OPRQ$

는 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 정사각형이
반지름의 길이

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$$

답 ④



89 $x^2+y^2-4x+4y-12=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y+2)^2=20$$

원의 중심 $(2, -2)$ 와 점 $(6, 0)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{0-(-2)}{6-2} = \frac{1}{2}$$

따라서 점 $(6, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 -2 이므로 접선의 방정식은

$$y=-2(x-6) \quad \therefore y=-2x+12$$

이 직선이 점 $(a, 10)$ 을 지나므로

$$10=-2a+12 \quad \therefore a=1$$

답 1

90 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=1$$

$$\therefore Q\left(\frac{1}{a}, 0\right), R\left(0, \frac{1}{b}\right)$$

$\overline{QR}=2$ 에서 $\overline{QR}^2=4$ 이므로

$$\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = 4, \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 4$$

$$\therefore a^2+b^2=4a^2b^2 \quad \dots\dots ㉑$$

한편 점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=1 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑을 ㉒에 대입하여 정리하면 $a^2b^2=\frac{1}{4}$

$$\therefore ab=\frac{1}{2} \quad (\because a>0, b>0)$$

답 ④

91 접선의 기울기를 m 이라 하면 기울기가 m 이고 점 $(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=m(x-2) \quad \therefore mx-y-2m+3=0$$

원의 중심의 좌표가 $(-1, 2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 이 직선이 접하려면

$$\frac{|-m-2-2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}, \quad |-3m+1| = \sqrt{5m^2+5}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$9m^2-6m+1=5m^2+5$$

$$2m^2-3m-2=0, \quad (2m+1)(m-2)=0$$

$$\therefore m=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } m=2$$

따라서 두 접선의 기울기의 합은

$$-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

답 ⑤

92 직선 l 이 원 O' 의 넓이를 이등분하므로 직선 l 은 원 O' 의 중심 $(4, 0)$ 을 지난다.

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y=m(x-4) \quad \therefore mx-y-4m=0$$

원 O 의 중심의 좌표가 $(0, 0)$, 반지름의 길이가 2이므로 원 O 와 직선 l 이 접하려면

$$\frac{|-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2, \quad |4m| = 2\sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$16m^2=4m^2+4, \quad m^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 직선 l 의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}, y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{답 } y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}, y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

93 (1) 접선의 기울기를 m 이라 하면 기울기가 m 이고 점

$P(2, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=m(x-2)$$

$$\therefore mx-y-2m+1=0$$

원의 중심의 좌표가 $(0, 0)$, 반지름의 길이가 1이므로 원과

이 직선이 접하려면

$$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1, \quad |-2m+1| = \sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4m^2-4m+1=m^2+1$$

$$3m^2-4m=0, \quad m(3m-4)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{4}{3}$$

따라서 접선의 방정식은

$$-y+1=0, \quad \frac{4}{3}x-y-\frac{5}{3}=0$$

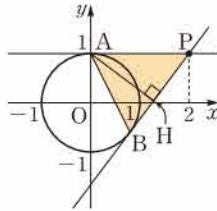
$$\therefore y=1, 4x-3y-5=0$$

답 ①

(2) 직선 BP의 방정식이

$4x-3y-5=0$ 이므로 점 A(0, 1)에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|-3-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{8}{5}$$



(3) $\overline{BP} = \overline{AP} = 2$ 이므로 원 밖의 한 점에서 두 점까지의 거리는 같다.

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{8}{5}$$

답 (1) $y=1$, $4x-3y-5=0$ (2) $\frac{8}{5}$ (3) $\frac{8}{5}$

채점 기준	비율
① 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
② 점 A와 직선 BP 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %
③ $\triangle ABP$ 의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

94 접선의 기울기를 m 이라 하면 기울기가 m 이고 점 $(0, a)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = mx + a$$

$$\therefore mx - y + a = 0$$

원의 중심의 좌표가 $(0, 3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 이 직선이 접하려면

$$\frac{|-3+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}, \quad |-3+a| = \sqrt{5m^2+5}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$a^2 - 6a + 9 = 5m^2 + 5$$

$$\therefore 5m^2 - (a^2 - 6a + 4) = 0 \quad \dots\dots ①$$

m 에 대한 이차방정식 ①의 두 근을 m_1, m_2 라 하면 두 접선이 수직이므로

$$m_1 m_2 = -1$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{a^2 - 6a + 4}{5} = -1$$

$$a^2 - 6a + 4 = 5, \quad a^2 - 6a - 1 = 0$$

$$\therefore a = 3 \pm \sqrt{10}$$

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$(3 + \sqrt{10})(3 - \sqrt{10}) = -1 \quad \text{답 } -1$$

95 두 원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$,

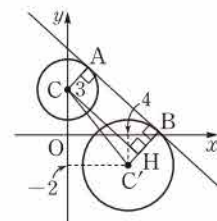
$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$ 의 중심을 각각 C(0, 3), C'(4, -2)라 하면

$$\overline{CC'} = \sqrt{4^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{41}$$

점 C에서 $\overline{C'B}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{C'H} = 3 - 2 = 1$$

직각삼각형 CC'H에서 $\overline{C'H} = \overline{C'B} - \overline{HB} = \overline{C'B} - \overline{CA}$



$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{CH} \\ &= \sqrt{\overline{CC'}^2 - \overline{C'H}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{41})^2 - 1^2} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

답 ③

96 두 원 O, O'의 중심 O, O'의 좌표는

$$O(0, 0), O'(-8, 4)$$

$$\therefore \overline{OO'} = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

점 O'에서 OA의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH} = r + 2 \quad (\because r > 0)$$

$\overline{O'H} = \overline{AB} = \sqrt{31}$ 이므로 직각삼각형 OO'H에서

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{O'H}^2} \\ &= \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - (\sqrt{31})^2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

따라서 $r + 2 = 7$ 이므로

$$r = 5$$

답 5

97 $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 58 = 0$ 에서

$$(x-5)^2 + (y+7)^2 = 16$$

$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$$

두 원의 중심을 각각 P(5, -7), Q(-2, -3)이라 하면

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-2-5)^2 + (-3+7)^2} = \sqrt{65}$$

점 Q에서 PA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PH} = 4 - 3 = 1$$

직각삼각형 QPH에서

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{QH} \\ &= \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{PH}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{65})^2 - 1^2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

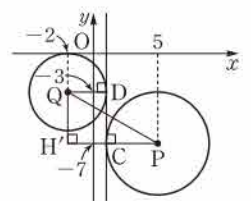
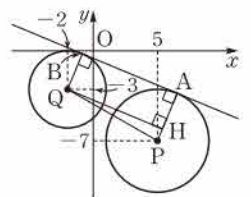
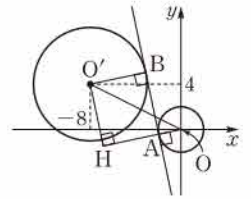
한편 점 Q에서 PC의 연장선에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$$\overline{PH'} = 4 + 3 = 7$$

직각삼각형 QH'P에서

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \overline{QH'} \\ &= \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{PH'}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{65})^2 - 7^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

답 8, 4



04 도형의 이동

I. 도형의 방정식

개념정리

본책 46쪽

- ① $x+a$ ② $y+b$ ③ $x-a$ ④ $y-b$ ⑤ $\frac{x+x'}{2}$
⑥ $\frac{y+y'}{2}$ ⑦ -1

유형 소개

본책 47쪽

01 점 (a, b) 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a+2, b-3)$$

따라서 $a+2=-3, b-3=4$ 이므로

$$a=-5, b=7 \quad \therefore b-a=12$$

답 12

02 점 $(2, a)$ 가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(2+1, a-6), \text{ 즉 } (3, a-6)$$

이 점이 직선 $y=-2x+5$ 위의 점이므로

$$a-6=-2 \cdot 3+5 \quad \therefore a=5$$

답 ③

03 주어진 평행이동을 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 라 하면

$$-1+a=3, 2+b=-4 \quad \therefore a=4, b=-6$$

구하는 점의 좌표를 (m, n) 이라 하면

$$m+4=5, n-6=-7 \quad \therefore m=1, n=-1$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1, -1)$

답 ③

04 주어진 평행이동을 $(x, y) \rightarrow (x+m, y+n)$ 이라 하면

$$a+m=-2, 3+n=4, -1+m=-4, b+n=7$$

$$\therefore a=1, b=6, m=-3, n=1$$

따라서 점 $(6, 1)$ 이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(6-3, 1+1), \text{ 즉 } (3, 2)$$

답 (3, 2)

05 점 $A(3, 1)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 점을 A' 이라 하면

$$A'(3+a, 1-3), \text{ 즉 } A'(3+a, -2)$$

이때 $\overline{OA'}=2\overline{OA}$ 에서 $\overline{OA'}^2=4\overline{OA}^2$ 이므로

$$(3+a)^2+(-2)^2=4(3^2+1^2)$$

$$a^2+6a-27=0, \quad (a+9)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 (\because a>0)$$

답 ②

06 점 $(12, 2)$ 가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$\left(12-\frac{1}{3}a, 2+\frac{3}{2}b\right)$$

따라서 $12-\frac{1}{3}a=9, 2+\frac{3}{2}b=14$ 이므로

$$a=9, b=8$$

$$\therefore ab=72$$

답 ③

07 도형을 평행이동해도 그 모양은 변하지 않으므로 $\triangle OAB$ 는 정삼각형이다.

→ ①

정삼각형 OAB 의 한 변의 길이는 $\overline{OA}=4$ 이므로

$$a=\frac{1}{2} \cdot 4=2, b=\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4=2\sqrt{3} \quad \therefore B(2, 2\sqrt{3}) \quad \rightarrow ②$$

따라서 $2+m=5, 2\sqrt{3}+n=4\sqrt{3}$ 이므로 $m=3, n=2\sqrt{3}$

$$\therefore m^2+n^2=21$$

→ ③

답 21

채점 기준	비율
① $\triangle OAB$ 가 정삼각형임을 알 수 있다.	20 %
② 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
③ m^2+n^2 의 값을 구할 수 있다.	40 %

08 평행이동한 직선의 방정식은

$$3(x-a)+4(y+a)+5=0$$

$$\therefore 3x+4y+a+5=0$$

이 직선이 원 $(x+5)^2+(y-2)^2=16$ 의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(-5, 2)$ 를 지난다.

$$\text{즉 } -15+8+a+5=0 \text{이므로 } a=2$$

답 2

09 평행이동한 직선의 방정식은

$$k(x-m)-2(y-4)+k-1=0$$

$$\therefore kx-2y-km+k+7=0$$

이 직선이 직선 $2x-y+3=0$, 즉 $4x-2y+6=0$ 과 일치하므로

$$k=4, -km+k+7=6$$

$$\text{따라서 } k=4, m=\frac{5}{4} \text{이므로 } k-m=\frac{11}{4}$$

답 ④

10 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-b=-3(x-a)+4$$

$$\therefore y=-3x+3a+b+4$$

→ ①

이 직선이 처음 직선과 일치하므로

$$3a+b+4=4, \quad b=-3a$$

$$\therefore \frac{b}{a}=-3 (\because a \neq 0)$$

→ ②

답 -3

채점 기준	비율
① 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
② $\frac{b}{a}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

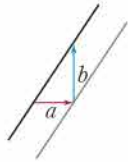
예제 B

직선을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선이 처음 직선과 일치하려면 오른쪽 그림과 같이

$$\frac{b}{a} = (\text{직선의 기울기})$$

이어야 한다.

따라서 10번에서 $\frac{b}{a} = -3$ 임을 알 수 있다.



11 평행이동한 직선의 방정식은

$$x - 2(y - k) + 1 = 0$$

$$\therefore x - 2y + 2k + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 직선 $\textcircled{1}$, $2x - 3y + 11 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ 의 기울기가 모두 다르므로 삼각형을 이루지 않으려면 직선 $\textcircled{1}$ 이 나머지 두 직선의 교점을 지나야 한다.

$2x - 3y + 11 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = -1, y = 3$$

따라서 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-1, 3)$ 을 지나야 하므로

$$-1 - 6 + 2k + 1 = 0$$

$$\therefore k = 3 \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

12 주어진 평행이동을 $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ 라 하면

$$-2 + a = -6, 1 + b = 5$$

$$\therefore a = -4, b = 4$$

직선 $2x - 5y - 3 = 0$ 을 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x + 4) - 5(y - 4) - 3 = 0$$

$$\therefore 2x - 5y + 25 = 0$$

따라서 $p = -5$, $q = 25$ 이므로 $p + q = 20$ 답 20

13 직선 l' 의 방정식은

$$y + 1 = a(x - 3) + b$$

$$\therefore y = ax - 3a + b - 1$$

직선 l' 은 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 과 x 축 위의 점에서 수직으로 만나므로 기울기는 2 이고, x 절편은 2 이다.

따라서 $a = 2$, $2a - 3a + b - 1 = 0$ 이므로

$$a = 2, b = 3$$

$$\therefore ab = 6 \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

14 $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 24 = 0$ 에서

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$$

이 원을 평행이동한 원의 방정식은

$$(x - a + 3)^2 + (y - b - 4)^2 = 1$$

이 원의 중심이 원점이므로

$$-a + 3 = 0, -b - 4 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -4$$

$$\therefore a + b = -1 \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

다른 풀이 원 $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 24 = 0$ 에서

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$$

이므로 중심의 좌표는 $(-3, 4)$ 이다.

따라서 점 $(-3, 4)$ 가 평행이동에 의하여 원점으로 옮겨졌으므로

$$-3 + a = 0, 4 + b = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -4$$

15 $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 25 = 0$ 에서

$$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

이 원을 평행이동한 원 C_2 의 방정식은

$$(x - 6 + 5)^2 + (y - k - 2)^2 = 4$$

$$\therefore (x - 1)^2 + (y - k - 2)^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 원 C_1 , C_2 의 중심의 좌표가 각각 $(-5, 2)$, $(1, k + 2)$ 이므로

$$\sqrt{(1 + 5)^2 + (k + 2 - 2)^2} = 10$$

$$36 + k^2 = 100, \quad k^2 = 64$$

$$\therefore k = 8 (\because k > 0) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

답 8

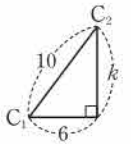
채점 기준	비율
① 원 C_2 의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
② 양수 k 의 값을 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 두 원 C_1 , C_2 의 중심을 각각 C_1 , C_2 라

하면 점 C_1 을 x 축의 방향으로 6 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 점이 점 C_2 이고, 두 점 C_1 , C_2 사이의 거리가 10 이므로 오른쪽 그림에서

$$6^2 + k^2 = 10^2, \quad k^2 = 64$$

$$\therefore k = 8 (\because k > 0)$$



16 평행이동한 원의 방정식은

$$(x - 2)^2 + (y - a)^2 = 5$$

이 원이 직선 $2x - y - 4 = 0$ 과 접하므로 원의 중심 $(2, a)$ 와 직선 $2x - y - 4 = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$ 와 같다. 즉

$$\frac{|4 - a - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, \quad |a| = 5$$

$$\therefore a = 5 (\because a > 0)$$

답 5

예제 B

원과 직선의 위치 관계

반지름의 길이가 r 인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d 라 하면
원과 직선의 위치 관계는

① $d < r \Rightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $d = r \Rightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)

③ $d > r \Rightarrow$ 만나지 않는다.

17 $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$ 에서

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

이 원을 평행이동한 원의 방정식은

$$(x - m + 3)^2 + (y - n - 4)^2 = 4$$

이 원의 중심 $(m-3, n+4)$ 가 제2사분면 위에 있으면서 이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$\begin{aligned} m-3 &= -2, n+4=2 \\ \therefore m &= 1, n = -2 \quad \begin{array}{l} \text{원의 반지름의 길이가 2이므로} \\ \text{원의 중심의 좌표는 } (-2, 2) \end{array} \\ \therefore m-n &= 3 \end{aligned}$$

답 3

18 $x^2+y^2-4x+2y+a=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y+1)^2=5-a$$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은
 $(x+2-2)^2+(y-5+1)^2=5-a$ $\begin{array}{l} x\text{축의 방향으로 } -2\text{만큼,} \\ y\text{축의 방향으로 } 5\text{만큼} \\ \text{평행이동한다.} \end{array}$
 $\therefore x^2+(y-4)^2=5-a$

따라서 중심의 좌표가 $(0, 4)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5-a}$ 이므로

$$b=0, c=4, \sqrt{5-a}=3$$

$$\therefore a=-4, b=0, c=4$$

$$\therefore a+b+c=0$$

답 ③

19 원 C 의 방정식은 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 이므로

$$C_1: (x-a-3)^2+(y-1)^2=1,$$

$$C_2: (x-3)^2+(y+2a-1)^2=1$$

두 원 C_1, C_2 가 서로 만나려면 두 원의 중심 $(a+3, 1)$,
 $(3, -2a+1)$ 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합인 2보
 다 작거나 같아야 하므로

$$\sqrt{\{3-(a+3)\}^2+(-2a+1-1)^2} \leq 2$$

$$\sqrt{5a^2} \leq 2, \quad a^2 \leq \frac{4}{5}$$

$$\therefore -\frac{2\sqrt{5}}{5} \leq a \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $a = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$a\beta = -\frac{4}{5}$$

답 $-\frac{4}{5}$

20 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-5=(x+1)^2+2(x+1)-4$$

$$\therefore y=x^2+4x+4=(x+2)^2$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 0)$ 이므로

$$a=-2, b=0$$

$$\therefore a+b=-2$$

답 ①

다른 풀이 포물선 $y=x^2+2x-4$, 즉 $y=(x+1)^2-5$ 의 꼭짓점
 의 좌표는 $(-1, -5)$ 이므로

$$a=-1-1=-2, b=-5+5=0$$

21 포물선 $y=x^2+4x-3$, 즉 $y=(x+2)^2-7$ 을 평행이동한 포
 물선의 방정식은

$$y-b=(x-a+2)^2-7$$

$$\therefore y=(x-a+2)^2-7+b$$

이 포물선이 포물선 $y=x^2$ 과 일치하므로

$$-a+2=0, -7+b=0 \quad \therefore a=2, b=7$$

$$\therefore b-a=5$$

답 ③

22 포물선 $y=-2x^2+12x-9$, 즉 $y=-2(x-3)^2+9$ 를 평행
 이동한 포물선의 방정식은

$$y-(a+3)=-2(x-a-3)^2+9$$

$$\therefore y=-2(x-a-3)^2+12+a \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 포물선의 꼭짓점 $(a+3, 12+a)$ 가 직선 $y=-x+1$ 위에 있
 으므로

$$12+a=-(a+3)+1 \quad \therefore a=-7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-4, 5)$ 이다.

답 $(-4, 5)$

채점 기준	비율
① 평행이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

23 포물선 $y=x^2+8x+6$, 즉 $y=(x+4)^2-10$ 을 x 축의 방
 향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정
 식은

$$y-n=(x-m+4)^2-10$$

$$\therefore y=(x-m+4)^2-10+n$$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+6x-3$, 즉 $y=(x+3)^2-12$ 와 일치
 하려면

$$-m+4=3, -10+n=-12$$

$$\therefore m=1, n=-2$$

직선 $l: 3x+4y+1=0$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방
 향으로 -2 만큼 평행이동한 직선 l' 의 방정식은

$$3(x-1)+4(y+2)+1=0$$

$$\therefore 3x+4y+6=0$$

두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l' 위의 점 $(-2, 0)$ 과 직선 l
 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-6+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{5}{5} = 1 \quad \text{답 ①}$$

24 $Q(6, 3), R(-3, 6)$ 이므로 $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{6+6-3}{3}, \frac{-3+3+6}{3}\right), \text{ 즉 } (3, 2) \quad \text{답 ⑤}$$

25 점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 $(a, -b)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$a < 0, -b > 0$$

$$\therefore a < 0, b < 0 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

점 $(a+b, ab)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-a-b, ab)$$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(a+b, -ab)$$

이때 ①에서 $a+b < 0, -ab < 0$ 이므로 점 $(a+b, -ab)$ 는 제3사
 분면 위에 있다.

답 ②

제3사분면

채점 기준	비율
① a, b 의 부호를 구할 수 있다.	40 %
② 대칭이동한 점이 어느 사분면 위에 있는지 구할 수 있다.	60 %

참고 점 $(a+b, ab)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 원점에 대하여 대칭이동한 점은 점 $(a+b, ab)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점과 같다.

- 26** 점 $P_1(3, 1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_2 의 좌표는 $(-3, -1)$
 점 $P_2(-3, -1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 P_3 의 좌표는 $(-1, -3)$
 점 $P_3(-1, -3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_4 의 좌표는 $(1, 3)$
 점 $P_4(1, 3)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 P_5 의 좌표는 $(3, 1)$ — 점 P_1 의 좌표와 같다.
 즉 점 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$ 는 4개의 점 $(3, 1), (-3, -1), (-1, -3), (1, 3)$ 이 이 순서대로 반복된다.
 이때 $111=4 \cdot 27+3$ 이므로 점 P_{111} 의 좌표는 점 P_3 의 좌표인 $(-1, -3)$ 과 같다. **답** $(-1, -3)$

- 27** 포물선 $y=x^2-2x$ 위의 한 점의 좌표를 (a, a^2-2a) 라 하면 이 점을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (a^2-2a, a)
 이 점이 포물선 $y=x^2-2x$ 위의 점이므로

$$a=(a^2-2a)^2-2(a^2-2a)$$

$$a^4-4a^3+2a^2+3a=0$$

$$a(a-3)(a^2-a-1)=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=3 \text{ 또는 } a=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
 $a=0$ 또는 $a=3$ 이면 두 점 $(a, a^2-2a), (a^2-2a, a)$ 는 서로 같은 점이므로

$$a=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
 따라서 두 점의 좌표는 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$
 이므로 구하는 곱은 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1$ **답** ②

- 28** 조건 (가)에 의하여

$$\frac{1-0}{-4-0} \cdot \frac{8-0}{a-0} = -1 \quad \therefore a=2$$
 $\therefore B(2, 8)$ — 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.
 조건 (나)에 의하여 $C(-2, 8)$ 이므로 직선 AC 의 방정식은

$$y-1 = \frac{8-1}{-2-(-4)}\{x-(-4)\} \quad \therefore y = \frac{7}{2}x+15$$
 이 식에 $x=0$ 을 대입하면 $y=15$
 따라서 직선 AC 의 y 절편은 15이다. **답** ⑤

- 29** $A(a, a+3)$ ($a>0$)이라 하면
 $B(a+3, a), C(-a-3, -a)$
 점 C 는 직선 $y=x+3$ 위의 점이고,
 $\triangle ABC$ 는 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형
 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 15$$

이때

$$\overline{AB} = \sqrt{(a+3-a)^2 + \{a-(a+3)\}^2} = 3\sqrt{2},$$

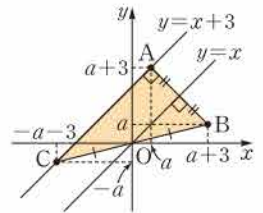
$$\overline{AC} = \sqrt{(-a-3-a)^2 + \{-a-(a+3)\}^2} = \sqrt{2}(2a+3) \quad (\because a>0)$$

이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(2a+3) = 15$$

$$2a+3=5 \quad \therefore a=1$$

따라서 점 A 의 좌표는 $(1, 4)$ 이다. **답** $(1, 4)$



- 30** 직선 $y=ax+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-y=ax+1$
 이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-x=ay+1 \quad \therefore x+ay+1=0$
 이 직선이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로
 $3+a+1=0 \quad \therefore a=-4$ **답** ②

- 31** 직선 l_1 의 방정식은
 $y-2x+7=0 \quad \therefore 2x-y-7=0$ **→ ①**
 직선 l_2 의 방정식은
 $2 \cdot (-x) - (-y) - 7 = 0$
 $\therefore 2x-y+7=0$ **→ ②**
 이 식에 $x=0$ 을 대입하면 $-y+7=0 \quad \therefore y=7$ **→ ③**
 따라서 직선 l_2 의 y 절편은 7이다. **답** 7

채점 기준	비율
① 직선 l_1 의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
② 직선 l_2 의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
③ 직선 l_2 의 y 절편을 구할 수 있다.	20 %

- 32** 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $y=-\frac{1}{3} \cdot (-x)+2 \quad \therefore y=\frac{1}{3}x+2$
 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 -3 이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=-3x+a$, 즉 $3x+y-a=0$ (a 는 상수)이라 하자.
 이 직선과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|-a|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \sqrt{10}, \quad |a|=10$$

$$\therefore a=\pm 10$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$3x+y+10=0 \text{ 또는 } 3x+y-10=0$$

답 ⑤

33 직선 $ax+(b-1)y-1=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-ax-(b-1)y-1=0$$

$$\therefore ax+(b-1)y+1=0$$

이 직선이 직선 $(b+1)x-(a-4)y+1=0$ 과 일치하므로

$$a=b+1, b-1=-(a-4)$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=2$$

$$\therefore ab=6$$

답 6

34 직선 $4x-y+k=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-4x-y+k=0 \quad \therefore 4x+y-k=0$$

이때 $\square OABC$ 는 정사각형이고 직선 $4x+y-k=0$ 이 $\square OABC$ 의 넓이를 이등분하므로 직선 $4x+y-k=0$ 은 $\square OABC$ 의 대각선의 중점을 지난다.

따라서 $\square OABC$ 의 대각선의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+6}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 3) \quad \text{--- } (\overline{OB} \text{의 중점}) = (\overline{AC} \text{의 중점})$$

이므로

$$12+3-k=0 \quad \therefore k=15$$

답 15

35 원 $(x+2)^2+(y-5)^2=8$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-5)^2+(y+2)^2=8$$

이 원이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$(x-5)^2+4=8, \quad (x-5)^2=4 \quad \text{--- 원의 방정식에 } y=0 \text{을 대입한다.}$$

$$x-5=\pm 2$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=7$$

따라서 두 점의 좌표는 $(3, 0), (7, 0)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$$|7-3|=4$$

답 ③

36 중심의 좌표가 $(-1, k)$ 이고 반지름의 길이가 5인 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-k)^2=25$$

이 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(-y-k)^2=25$$

$$\therefore (x+1)^2+(y+k)^2=25$$

이 원이 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$(2+1)^2+(2+k)^2=25$$

$$(k+2)^2=16, \quad k+2=\pm 4$$

$$\therefore k=2 (\because k>0)$$

답 2

37 $x^2+y^2-6x+8y+16=0$ 에서

$$(x-3)^2+(y+4)^2=9$$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원 O' 의 방정식은

$$(-x-3)^2+(-y+4)^2=9$$

$$\therefore (x+3)^2+(y-4)^2=9$$

$\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은 두 원 O, O' 의 중심 $(3, -4), (-3, 4)$

를 이은 선분의 길이에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 것이므로

$$\sqrt{(-3-3)^2+(4+4)^2}-(3+3)=4$$

답 4

예제 B

두 원 위의 점 사이의 거리의 최대·최소

반지름의 길이가 r 인 원 O 위의 점

P 와 반지름의 길이가 r' 인 원 O'

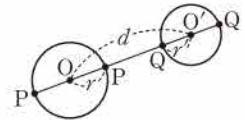
위의 점 Q 에 대하여 두 원 O, O' 의

중심 사이의 거리를 $d (d>r+r')$

라 할 때, $\overline{PQ}$ 의 길이의

① (최댓값) $=d+(r+r')$

② (최솟값) $=d-(r+r')$



38 $x^2+y^2+6x-8y=0$ 에서

$$(x+3)^2+(y-4)^2=25$$

이 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(-y-4)^2=25$$

$$\therefore (x+3)^2+(y+4)^2=25$$

→ ①

이 원이 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 과 만나려면 원의 중심 $(-3, -4)$ 와 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 5보다 작거나 같아야 하므로

$$\frac{|-6+4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} \leq 5, \quad |k-2| \leq 5\sqrt{5}$$

$$-5\sqrt{5} \leq k-2 \leq 5\sqrt{5}$$

$$\therefore 2-5\sqrt{5} \leq k \leq 2+5\sqrt{5}$$

→ ②

따라서 $M=2+5\sqrt{5}, m=2-5\sqrt{5}$ 이므로

$$Mm=-121$$

→ ③

답 -121

채점 기준	비율
① 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ Mm 의 값을 구할 수 있다.	10 %

39 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$ 을 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 각각

$$(x-2)^2+(y+2)^2=8,$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2=8,$$

$$(x+2)^2+(y+2)^2=8$$

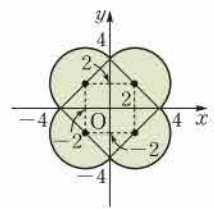
따라서 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 색

칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2}{2} = 16\pi + 32$$

$$\text{--- } 2 \times (\text{원의 넓이}) + (\text{정사각형의 넓이})$$

답 $16\pi + 32$



40 포물선 $y=x^2+4ax-1$, 즉 $y=(x+2a)^2-1-4a^2$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=(-x+2a)^2-1-4a^2$$

$$\therefore y=(x-2a)^2-1-4a^2$$

이 포물선의 꼭짓점 $(2a, -1-4a^2)$ 이 직선 $y=-x-3$ 위에 있으므로

$$-1-4a^2=-2a-3, \quad 2a^2-a-1=0$$

$$(2a+1)(a-1)=0 \quad \therefore a=1 (\because a>0) \quad \text{답 ③}$$

41 포물선 $y=2x^2+6x-7$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=2x^2+6x-7$$

$$\therefore y=-2x^2-6x+7$$

이 포물선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a=-2-6+7=-1 \quad \text{답 -1}$$

42 포물선 $y=x^2+ax+b$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=(-x)^2-ax+b, \quad y=-x^2+ax-b$$

$$\therefore y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(4, -5)$ 이므로

$$\frac{a}{2}=4, \quad \frac{a^2}{4}-b=-5 \quad \therefore a=8, b=21$$

$$\therefore b-a=13 \quad \text{답 ⑤}$$

43 포물선 $y=\frac{1}{3}x^2+x+k$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=\frac{1}{3}x^2+x+k$$

$$\therefore y=-\frac{1}{3}x^2-x-k$$

이 포물선을 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{3} \cdot (-x)^2-(-x)-k$$

$$\therefore y=-\frac{1}{3}x^2+x-k \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 포물선과 직선 $y=2x+1$ 이 접하려면 이차방정식

$-\frac{1}{3}x^2+x-k=2x+1$, 즉 $\frac{1}{3}x^2+x+k+1=0$ 이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=1^2-4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (k+1)=0$$

$$\frac{4}{3}k+\frac{1}{3}=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{답 } -\frac{1}{4}$$

채점 기준	비율
① 대칭이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

44 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y-1=m(x+4)$$

$$\therefore y=mx+4m+1$$

이 직선을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+3=m(x-2)+4m+1$$

$$\therefore y=mx+2m-2$$

이 직선을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y=-mx+2m-2$$

이 직선이 점 $(3, -1)$ 을 지나므로

$$-1=-3m+2m-2$$

$$\therefore m=-1 \quad \text{답 -1}$$

45 점 $(-2, a)$ 를 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-a, 2)$$

이 점을 x 축의 방향으로 -4만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-a-4, 3)$$

이 점이 점 $(b, 3)$ 과 일치하므로

$$-a-4=b \quad \therefore a+b=-4 \quad \text{답 ③}$$

46 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-1)^2+(-y+3)^2=10$$

$$\therefore (x+1)^2+(y-3)^2=10 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

원 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a-1)^2+(y-b+3)^2=10 \quad \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②이 일치하므로

$$-a-1=1, \quad -b+3=-3$$

$$\therefore a=-2, b=6$$

$$\therefore a+b=4 \quad \cdots \textcircled{3} \quad \text{답 4}$$

채점 기준	비율
① 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
② 평행이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

47 포물선 $y=3x^2-6x+a$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=3x^2-6x+a$$

$$\therefore y=-3x^2+6x-a$$

이 포물선을 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y+2=-3x^2+6x-a$$

$$\therefore y=-3x^2+6x-a-2$$

이 포물선의 y 절편이 $-a-2$ 이므로

$$-a-2=-5 \quad \therefore a=3 \quad \text{답 ③}$$

48 직선 l 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-4=a(x+3)+1 \quad \therefore y=ax+3a+5$$

이 직선을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선 l' 의 방정식은

$$y=-ax+3a+5$$

두 직선 l, l' 이 y 축 위의 점 $(0, 1)$ 에서 만나므로

$$1=3a+5 \quad \therefore a=-\frac{4}{3} \quad \text{답 } -\frac{4}{3}$$

49 중심이 점 $(5, -3)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-5)^2+(y+3)^2=r^2$$

이 원을 x 축의 방향으로 -6 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+6-5)^2+(y+3)^2=r^2$$

$$\therefore (x+1)^2+(y+3)^2=r^2$$

이 원을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-y+1)^2+(-x+3)^2=r^2$$

$$\therefore (x-3)^2+(y-1)^2=r^2$$

이 원과 직선 $4x+3y+15=0$ 이 만나지 않으려면 원의 중심 $(3, 1)$ 과 직선 $4x+3y+15=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 r 보다 커야 하므로

$$\frac{|12+3+15|}{\sqrt{4^2+3^2}} > r$$

$$\therefore 0 < r < 6 \quad (\because r > 0) \quad \text{답 } 0 < r < 6$$

50 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭 이동하면

$$f(x, -y)=0$$

방정식 $f(x, -y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면

$$f(x-1, -y)=0$$

따라서 방정식 $f(x-1, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 주어진 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 ⑤이다. **답 ⑤**

다른 풀이 주어진 도형은 네 직선

$$x=1, x=3, y=1, y=4 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

로 둘러싸인 도형이다.

①에 x 대신 $x-1, y$ 대신 $-y$ 를 각각 대입하면

$$x-1=1, x-1=3, -y=1, -y=4$$

$$\therefore x=2, x=4, y=-1, y=-4$$

따라서 방정식 $f(x-1, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 ⑤이다.

51 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$f(-y, -x)=0$$

방정식 $f(-y, -x)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면

$$f(-(y-1), -x)=0 \quad \therefore f(1-y, -x)=0$$

따라서 방정식 $f(1-y, -x)=0$ 이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 ④이다. **답 ④**

다른 풀이 주어진 도형은 세 직선

$$y=-x+1, x=1, y=1 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

로 둘러싸인 도형이다.

①에 x 대신 $1-y, y$ 대신 $-x$ 를 각각 대입하면

$$-x=-(1-y)+1, 1-y=1, -x=1$$

$$\therefore y=-x, y=0, x=-1$$

따라서 방정식 $f(1-y, -x)=0$ 이 나타내는 도형은 ④이다.

52 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $g(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다. 방정식 $g(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$g(y, x)=0$$

방정식 $g(y, x)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면

$$g(y+2, x+5)=0 \quad \text{답 ⑤}$$

53 $\neg$. 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$f(x, -y)=0$$

방정식 $f(x, -y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면

$$f(x-1, -y)=0$$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.

$\perp$. 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭 이동하면

$$f(-x, -y)=0$$

방정식 $f(-x, -y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면

$$f(-(x-1), -y)=0 \quad \therefore f(1-x, -y)=0$$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.

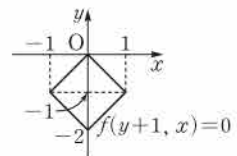
$\cap$. 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$f(y, x)=0$$

방정식 $f(y, x)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$f(y+1, x)=0$$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다.



이상에서 [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식인 것은 $\neg, \perp$ 이다. **답 ④**

54 $x^2+y^2-8x+12=0$ 에서
 $(x-4)^2+y^2=4$

이 원의 중심 (4, 0)을 점 (1, -3)에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$$\frac{4+a}{2}=1, \frac{b}{2}=-3$$

$$\therefore a=-2, b=-6$$

원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 (-2, -6)이고 반지름의 길이가 2이다. 따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y+6)^2=4$$

$$\text{답 } (x+2)^2+(y+6)^2=4$$

$$55 \quad \frac{a-2}{2}=3, \frac{9+b}{2}=5 \text{이므로} \quad a=8, b=1$$

$$\therefore a+b=9$$

답 9

$$56 \quad \text{포물선 } y=x^2+4x+3=(x+2)^2-1 \text{의 꼭짓점의 좌표는} \\ (-2, -1)$$

$$\text{포물선 } y=-x^2+10x-20=-(x-5)^2+5 \text{의 꼭짓점의 좌표는} \\ (5, 5) \quad \cdots \textcircled{1}$$

두 포물선이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (a, b)에 대하여 대칭이다.

따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점의 좌표가 (a, b)이므로

$$a=\frac{-2+5}{2}=\frac{3}{2}, b=\frac{-1+5}{2}=2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore ab=3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

답 3

채점 기준	비율
① 두 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
② a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

57 포물선 $y=x^2-ax$ 위의 임의의 점 P(x, y)를 점 (1, 2)에 대하여 대칭이동한 점을 P'(x', y')이라 하면 점 (1, 2)는 PP'의 중점이므로

$$\frac{x+x'}{2}=1, \frac{y+y'}{2}=2$$

$$\therefore x=2-x', y=4-y'$$

$y=x^2-ax$ 에 위의 식을 대입하면

$$4-y'=(2-x')^2-a(2-x')$$

$$\therefore y'=-x'^2-(a-4)x'+2a$$

따라서 점 P'(x', y')은 포물선 $y=-x^2-(a-4)x+2a$ 위의 점이므로 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=-x^2-(a-4)x+2a$$

이 포물선과 직선 $y=3x$ 가 만나는 두 점이 원점에 대하여 대칭이므로 이차방정식 $-x^2-(a-4)x+2a=3x$, 즉 $x^2+(a-1)x-2a=0$ 의 두 실근의 합이 0이다.

즉 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-(a-1)=0 \quad \therefore a=1$$

답 ①

58 두 점 (-3, 7), (5, 3)을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right), \text{ 즉 } (1, 5)$$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$$5=a+b \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 두 점 (-3, 7), (5, 3)을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$ 와 수직이므로

$$\frac{3-7}{5-(-3)} \cdot a = -1$$

$$\therefore a=2 \quad \text{수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.}$$

$$a=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \quad b=3$$

$$\therefore b-a=1$$

답 ④

59 점 (-2, 4)를 직선 $y=-x+5$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 (-2, 4), (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{4+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=-x+5$ 위의 점이므로

$$\frac{4+b}{2}=-\frac{-2+a}{2}+5$$

$$\therefore a+b=8 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 두 점 (-2, 4), (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=-x+5$ 와 수직이므로

$$\frac{b-4}{a-(-2)} \cdot (-1) = -1$$

$$\therefore a-b=-6 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1, b=7$

따라서 대칭이동한 점의 좌표는 (1, 7)이다.

답 (1, 7)

$$60 \quad x^2+y^2+2x-4y-11=0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=16$$

$$x^2+y^2-10x+8y+c=0 \text{에서}$$

$$(x-5)^2+(y+4)^2=41-c$$

두 원의 반지름의 길이가 같으므로

$$4=\sqrt{41-c} \quad \therefore c=25$$

두 원의 중심 (-1, 2), (5, -4)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right), \text{ 즉 } (2, -1)$$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$$-1=2a+b \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 두 원의 중심 (-1, 2), (5, -4)를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$ 와 수직이므로

$$\frac{-4-2}{5-(-1)} \cdot a = -1 \quad \therefore a=1$$

$a=1$ 을 ①에 대입하면

$$-1=2+b \quad \therefore b=-3$$

$$\therefore abc=-75$$

답 -75

61 C(a, b)라 하면 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=3x+4$ 위의 점이므로

$$\frac{3+b}{2} = 3 \cdot \frac{3+a}{2} + 4$$

$$\therefore 3a-b=-14 \quad \dots\dots ㉑$$

또 직선 BC가 직선 $y=3x+4$ 와 수직이므로

$$\frac{b-3}{a-3} \cdot 3 = -1$$

$$\therefore a+3b=12 \quad \dots\dots ㉒$$

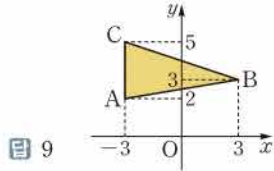
㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=5$$

$$\therefore C(-3, 5)$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$$



62 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2$ 의 중심 $(-2, 3)$ 을 직선 $y=x-2$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라 하면 두 점 $(-2, 3), (a, b)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{3+b}{2} \right)$$

이 점이 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로

$$\frac{3+b}{2} = \frac{-2+a}{2} - 2$$

$$\therefore a-b=9 \quad \dots\dots ㉑$$

또 두 점 $(-2, 3), (a, b)$ 를 지나는 직선이 직선 $y=x-2$ 와 수직이므로

$$\frac{b-3}{a-(-2)} \cdot 1 = -1$$

$$\therefore a+b=1 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면 $a=5, b=-4$

원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(5, -4)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이다.

이 원이 직선 $x+y+k=0$ 과 접하므로

$$\frac{|5-4+k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}, \quad |k+1|=2$$

$$k+1=\pm 2 \quad \therefore k=1 \quad (\because k>0)$$

답 1

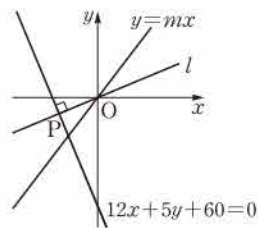
63 직선 $x=0$ 을 직선 $y=mx$ 에 대하여 대칭이동한 직선을 l 이라 하면 $\overline{OP}$ 의 길이는 오른쪽 그림과 같이 직선 l 이 직선 $12x+5y+60=0$ 과 수직일 때 최소이다.

직선 $12x+5y+60=0$, 즉

$$y = -\frac{12}{5}x - 12 \text{의 기울기는 } -\frac{12}{5} \text{이므로 직선 } l \text{의 방정식은}$$

$$y = \frac{5}{12}x$$

이때 직선 $y=mx$ 는 두 직선 $x=0, y=\frac{5}{12}x$ 가 이루는 각의 이등분선이므로 직선 $y=mx$ 위의 점 $(1, m)$ 에서 두 직선 $x=0, y=\frac{5}{12}x$ 에 이르는 거리가 같다.



따라서 $|1| = \frac{|5-12m|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}$ 이므로 점 $(1, m)$ 과 직선 $y=\frac{5}{12}x$, 즉 $5x-12y=0$ 사이의 거리
 $|5-12m|=13, \quad 5-12m=\pm 13$
 $\therefore m=\frac{3}{2} \quad (\because m>0)$

답 $\frac{3}{2}$

참고 직선 $y=mx$ 위의 임의의 점에서 두 직선 $x=0, y=\frac{5}{12}x$ 에 이르는 거리가 같으므로 점 $(1, m)$ 이 아닌 다른 점을 택하여 문제를 해결할 수도 있다.

$$\left(-1, -m \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) \text{ 등}$$

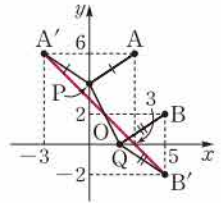
64 점 A를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' , 점 B를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

$$A'(-3, 6), B'(5, -2)$$

$$\overline{AP} = \overline{A'P}, \overline{QB} = \overline{QB'} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{(5+3)^2 + (-2-6)^2} \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 $8\sqrt{2}$



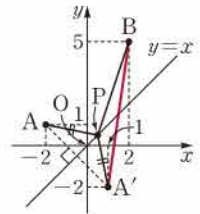
65 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$$A'(1, -2)$$

$$\overline{AP} = \overline{A'P} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(2-1)^2 + (5+2)^2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ⑤



66 점 A를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$$A'(-3, 1)$$

$$\overline{AP} = \overline{A'P} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \end{aligned}$$

직선 $A'B$ 의 방정식은

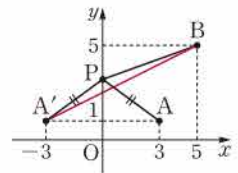
$$y-1 = \frac{5-1}{5+3}(x+3)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(0, \frac{5}{2})$ 이다.

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 는 직선 $A'B$ 가 y 축과 만나는 점 P일 때 최소이다.

답 $(0, \frac{5}{2})$



→ ①

→ ②

→ ③

채점 기준	비율
① $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 $\overline{A'B}$ 의 길이임을 알 수 있다.	50 %
② 직선 $A'B$ 의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
③ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

67 점 A(6, 2)를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A', x축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면

$$A'(2, 6), A''(6, -2)$$

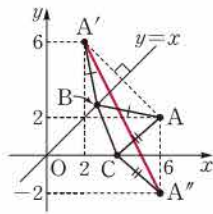
$$\overline{AB} = \overline{A'B}, \overline{CA} = \overline{CA''} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \\ = \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CA''} \\ \geq \overline{A'A''} \end{aligned}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이의 최솟값은

$$\overline{A'A''} = \sqrt{(6-2)^2 + (-2-6)^2} = 4\sqrt{5}$$

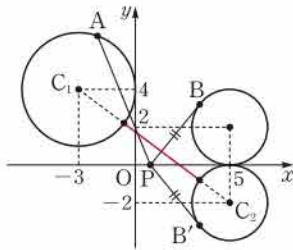
답 4√5



68 원 $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 4$ 를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4$$

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 점 B'은 원 $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4$ 위의 점이고, $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이다.



두 원 $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$, $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4$ 의 중심을 각각 $C_1(-3, 4)$, $C_2(5, -2)$ 라 하면 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 는 세 점 A, P, B'이 $\overline{C_1C_2}$ 위에 있을 때 최소이다.

이때 $\overline{C_1C_2} = \sqrt{(5+3)^2 + (-2-4)^2} = 10$ 이므로 구하는 최솟값은 $10 - (3+2) = 5$

C_1C_2 의 길이에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 값

답 ②

05 집합의 뜻과 표현

II. 집합과 명제

개념정리

본책 60쪽

- ① 조건제시법 ② 부분집합 ③ $A \subset C$ ④ $B \subset A$
⑤ $A \neq B$ ⑥ $2^n - 1$ ⑦ 2^{n-k}

유형 뽀개기

본책 61쪽

01 '큰', '가까운', '맑은', '잘하는'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ④

02 $x^2 + 2x - 3 < 0$ 에서

$$(x+3)(x-1) < 0 \quad \therefore -3 < x < 1$$

$$\therefore A = \{x \mid -3 < x < 1\}$$

$$\neg, -2 \in A \quad \text{ㄹ, } 1 \notin A$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

03 ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 는 무리수이므로

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \notin Q$$

② $\sqrt{4} = 2$ 는 유리수이므로

$$\sqrt{4} \in Q$$

③ $\frac{i^2}{2} = -\frac{1}{2}$ 은 실수이므로

$$\frac{i^2}{2} \in R$$

④ $i^3 = -i$ 는 허수이므로

$$i^3 \notin R$$

⑤ $\sqrt{2} - 1$ 은 실수이므로

$$\sqrt{2} - 1 \in R$$

답 ⑤

04 (i) $i=j$ 일 때,

$$a_{11} = \frac{1}{a_{11}} \text{에서} \quad a_{11}^2 = 1$$

$$\therefore a_{11} = -1 \text{ 또는 } a_{11} = 1$$

$$a_{22} = \frac{1}{a_{22}} \text{에서} \quad a_{22}^2 = 1$$

$$\therefore a_{22} = -1 \text{ 또는 } a_{22} = 1$$

(ii) $i \neq j$ 일 때, $a_{12} = \frac{1}{a_{21}}$

(i), (ii)에서 집합 A의 원소인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

05 ① $A = \{1, 2, 4, 8\}$

② $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

③ $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

④ $A = \{2, 4, 6, \dots, 16\}$

⑤ $A = \{4, 8, 12, 16\}$

답 ②

06 ③ {1, 3, 9}

답 ③

07 □ 이하의 소수인 자연수가 2, 3, 5, 7이므로 □ 안에 들어갈 수 있는 자연수는 7, 8, 9, 10의 4개이다.

답 4

참고 □=11일 때, $\{x|x \text{는 } 11 \text{ 이하의 소수인 자연수}\}$ 를 원소나열법으로 나타내면 {2, 3, 5, 7, 11}

08 ② {7, 14, 21, 28, ...}: 무한집합

③ {2, 4, 8, 16, ...}: 무한집합

④ {-1, 1}: 유한집합

⑤ $|x| > 2$ 에서 $x < -2$ 또는 $x > 2$
 $\therefore \{\dots, -4, -3, 3, 4, \dots\}$: 무한집합

답 ④

09 ⑤ {0}이므로 공집합이 아니다.

답 ⑤

10 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이므로 집합 A가 공집합이 되려면 $1 \notin A, 2 \notin A, 4 \notin A, 8 \notin A, 16 \notin A$ 이어야 한다.

따라서 k의 값이 될 수 있는 자연수는 5, 6, 7, 8이므로 구하는 합은

$$5+6+7+8=26$$

답 ②

참고 k=8일 때, $A=\{x|x \text{는 } 4 < x < 8 \text{인 } 16 \text{의 양의 약수}\}$ 이므로

$$A=\emptyset$$

k=9일 때, $A=\{x|x \text{는 } 4 < x < 9 \text{인 } 16 \text{의 양의 약수}\}$ 이므로 $A=\{8\}$

11 $7x+2a-1=13x-3bx$ 에서

$$(3b-6)x=-2a+1$$

→ ①

집합 S가 무한집합이 되려면 위의 방정식의 해가 무수히 많아야 하므로

$$3b-6=0, -2a+1=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}, b=2$$

→ ②

$$\therefore ab=1$$

→ ③

답 1

채점 기준	비율
① $7x+2a-1=13x-3bx$ 를 $Ax=B$ 꼴로 정리할 수 있다.	20 %
② a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

12 $A=\{4, 7, 10\}, B=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

$i^1=i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i, \dots$ 이므로

$$C=\{i, -1, -i, 1\}$$

따라서 $n(A)=3, n(B)=6, n(C)=4$ 이므로

$$n(A)+n(B)-n(C)=5$$

답 ④

13 ① $n(\{10\})=n(\{15\})=1$

② $n(\{1, 2, 3\})-n(\{1, 2\})=3-2=1$

④ $n(\emptyset)+n(\{7\})=0+1=1$

⑤ $A=\{\emptyset\}$ 이면 $n(A)=1$ 이다.

답 ③

14 $A=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\}$ 이므로

$$n(A)=5$$

→ ①

또 $n(B)=k-1$ 이므로 $n(A)+n(B)=12$ 에서

$$5+k-1=12 \quad \therefore k=8$$

→ ②

답 8

채점 기준	비율
① $n(A)$ 를 구할 수 있다.	50 %
② k의 값을 구할 수 있다.	50 %

15 $x^2-8x+16=0$ 에서

$$(x-4)^2=0 \quad \therefore x=4$$

즉 $A=\{4\}$ 이므로 $n(A)=1$

이때 $n(A)=n(B)$ 가 되려면 $n(B)=1$ 이어야 하므로 이차방정식 $x^2+4kx-2k+2=0$ 은 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+4kx-2k+2=0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-(-2k+2)=0$$

$$4k^2+2k-2=0, \quad 2k^2+k-1=0$$

$$(k+1)(2k-1)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=\frac{1}{2}$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$$-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

16 $\sqrt{10}$ 이하의 짝수인 자연수는 2의 1개이므로

$$n(A_{10})=1$$

$\sqrt{36}=6$ 이하의 짝수인 자연수는 2, 4, 6의 3개이므로

$$n(A_{36})=3$$

$$\therefore n(A_k)=n(A_{10})+n(A_{36})=4$$

즉 $\sqrt{k}$ 이하의 짝수인 자연수가 4개이어야 하므로

$$8 \leq \sqrt{k} < 10 \quad \begin{matrix} \text{2, 4, 6, 8의 4개이다.} \end{matrix}$$

$$\therefore 64 \leq k < 100$$

따라서 자연수 k는 64, 65, 66, ..., 99의 36개이다.

답 36

17 집합 A의 두 원소 a, b에 대하여

$2a-b$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같

으므로

$$X=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$$-2+(-1)+0+1+2+3+4=7$$

답 7

$a \backslash b$	0	1	2
0	0	-1	-2
1	2	1	0
2	4	3	2

18 $B=\{1, 2, 4, 8\}$

$x \in A, y \in B$ 인 x, y에 대하여

xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같

으므로

$$C=\left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\right\}$$

$$\therefore n(C)=6$$

답 ③

$x \backslash y$	1	2	4	8
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
0	0	0	0	0
1	1	2	4	8

19 $x \in A, y \in B$ 인 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
11, $a+3, a+6, a+9$

→ ①

이때 $n(X)=11$ 이 되려면 $a+3, a+6, a+9$ 중 하나만 3, 4, 5, ..., 11 중 하나와 같아야 한다.

한편 a 는 자연수이므로

$$4 \leq a+3 < a+6 < a+9$$

즉 $a+3$ 만 4, 5, 6, ..., 11 중 하나와 같아야 하므로

$$4 \leq a+3 \leq 11, a+6 > 11$$

$$\therefore 5 < a \leq 8$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 6이다.

→ ②

답 6

채점 기준	비율
① $x+y$ 의 값을 모두 구할 수 있다.	40 %
② 자연수 a 의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

[참고] $a+9$ 가 3, 4, 5, ..., 11 중 하나와 같은 경우 $n(X)=11$ 이 되려면 $a+6 < 3$, 즉 $a < -3$ 이어야 하고, 이는 a 가 자연수라는 조건에 맞지 않는다.

20 집합 A 의 두 원소 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

이때 $a < b < c$ 이므로 집합 B 의 원소의 최댓값은 $2c$ 이다.

즉 $2c=20$ 이므로

$$c=10$$

즉 $a < b < 10$ 이므로

$$2a < a+b < a+10,$$

$$a+b < 2b < b+10,$$

$$a+10 < b+10 < 20$$

그런데 $a+10$ 과 $2b$ 의 대소 관계는 알 수 없다.

(i) $a+10=2b$ 일 때,

$B=\{2a, a+b, a+10, b+10, 20\}$ 이므로 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$2a + (a+b) + (a+10) + (b+10) + 20 = 80$$

$$4a + 2b = 40, \quad 4a + (a+10) = 40$$

$$5a = 30 \quad \therefore a = 6$$

즉 $6+10=2b$ 이므로

$$b=8$$

따라서 순서쌍 (a, b, c) 는

(6, 8, 10)의 1개

(ii) $a+10 \neq 2b$ 일 때,

$B=\{2a, a+b, a+10, 2b, b+10, 20\}$ 이므로 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$2a + (a+b) + (a+10) + 2b + (b+10) + 20 = 80$$

$$4a + 4b = 40$$

$$\therefore a+b=10$$

이때 $a < b$ 이므로 순서쌍 (a, b, c) 는

(1, 9, 10), (2, 8, 10), (3, 7, 10), (4, 6, 10)의 4개

(i), (ii)에서 구하는 집합 A 의 개수는

$$1+4=5 \quad \text{순서쌍 } (a, b, c) \text{의 개수와 같다.}$$

답 5

21 ① a 는 집합 A 의 원소가 아니므로

$$a \notin A$$

② $\{b\}$ 는 집합 A 의 원소가 아니므로

$$\{b\} \notin A$$

③ $\{a, b, c\}$ 는 집합 A 의 원소가 아니므로

$$\{a, b, c\} \notin A$$

④ $a \notin A$ 이므로 $\{a, b\} \not\subset A$

⑤ $b \in A, c \in A$ 이므로 $\{b, c\} \subset A$

답 ⑤

예 B 특강

집합을 원소로 갖는 집합

집합 $A=\{\{a\}, b, c\}$ 는 집합을 원소로 갖는 집합이다. 집합 A 의 원소는 $\{a\}, b, c$ 이고, 집합 $\{\{a\}\}$ 는 집합 A 의 부분집합이다. 즉

$$\{a\} \in A, b \in A, c \in A, \{\{a\}\} \subset A$$

22 $A=\{4, 5\}, B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

⑤ $\{1, 3, 5\} \subset B$

답 ⑤

23 $\neg. \emptyset$ 은 집합 A 의 원소이므로

$$\emptyset \in A$$

ㄷ. $\{b\}$ 는 집합 A 의 원소가 아니므로

$$\{b\} \notin A$$

ㄴ. $c \notin A$ 이므로 $\{a, c\} \not\subset A$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㅂ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㅂ

24 $X=\{-1, 0, 1\}, Y=\{-2, -1, 0, 1, 2\}, Z=\{0, 1\}$ 이므로

$$Z \subset X \subset Y$$

답 ④

25 주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $A \subset B$ 이다.

① $B \subset A$

② $A=\{1, 2, 5, 10\}, B=\{1, 2, 4\}$ 이므로

$$A \not\subset B, B \not\subset A$$

③ $A=\{2, 4, 6, 8, \dots\}, B=\{4, 6, 8, 10, \dots\}$ 이므로

$$B \subset A$$

⑤ $A=\{-1, 0, 1\}, B=\{-1, 1\}$ 이므로

$$B \subset A$$

답 ④

26 $(-1)^2-2=-1, 1^2-2=-1, 2^2-2=2$ 이므로

$$B=\{-1, 2\}$$

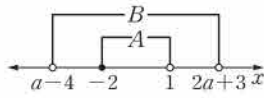
또 집합 A 의 두 원소 x, y 에 대하여 xy 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$$C = \{-2, -1, 1, 2, 4\}$$

$$\therefore B \subset A \subset C \quad \text{답 ③}$$

$x \backslash y$	-1	1	2
-1	1	-1	-2
1	-1	1	2
2	-2	2	4

27 $A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



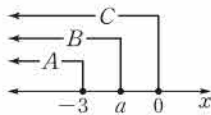
$$a-4 < -2, 2a+3 \geq 1$$

즉 $a < 2, a \geq -1$ 이므로

$$-1 \leq a < 2$$

따라서 정수 a 는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 3

28 $A \subset B \subset C$ 가 성립하도록 세 집합 A, B, C 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$-3 \leq a \leq 0$$

따라서 정수 a 는 -3, -2, -1, 0의 4개이다. 답 ③

29 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 에서

$$(x-2)(x-6) = 0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=6$$

$$\therefore B = \{2, 6\}$$

$B \subset A$ 이라면 $a < 2$

따라서 정수 a 의 최댓값은 1이다. 답 1

채점 기준	비율
① 집합 B 를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ 정수 a 의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

30 $A \subset B$ 이므로 $2 \in A$ 에서 $2 \in B$

$$\therefore a-1=2 \text{ 또는 } b=2$$

(i) $a-1=2$, 즉 $a=3$ 일 때,

$$A = \{2, 7\}, B = \{2, 6, b\} \text{이므로 } A \subset B \text{이라면}$$

$$b=7$$

$$\therefore a+b=10$$

(ii) $b=2$ 일 때,

$$A = \{2, 2a+1\}, B = \{2, 6, a-1\} \text{이므로 } A \subset B \text{이라면}$$

$$2a+1=6 \text{ 또는 } 2a+1=a-1$$

$$\therefore a = \frac{5}{2} \text{ 또는 } a = -2$$

$$\therefore a+b = \frac{9}{2} \text{ 또는 } a+b=0$$

(i), (ii)에서 $M=10, m=0$ 이므로

$$M+m=10 \quad \text{답 ③}$$

31 $x^2 - 6x + 5 < 0$ 에서 $(x-1)(x-5) < 0$

$$\therefore 1 < x < 5$$

즉 주어진 집합은 $\{2, 3, 4\}$

따라서 구하는 부분집합은

$$\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}$$

답 풀이 참조

32 집합 $P(A)$ 는 집합 A 의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로 $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

ㄱ. b 는 $P(A)$ 의 원소가 아니므로 $b \notin P(A)$

ㄴ. $\emptyset$ 은 $P(A)$ 의 원소이므로

$$\emptyset \in P(A) \text{ 또는 } \{\emptyset\} \subset P(A)$$

ㄷ. a 는 $P(A)$ 의 원소가 아니므로 $\{a\} \not\subset P(A)$

ㄹ. $\{a, b\}$ 는 $P(A)$ 의 원소이므로

$$\{a, b\} \in P(A) \text{ 또는 } \{\{a, b\}\} \subset P(A)$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

33 $A = \{3, 5, 7, 11, 13\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중에서 모든 원소의 합이 25보다 크려면 원소가 3개 이상이어야 한다.

(i) 원소가 3개일 때,

$$\{3, 11, 13\}, \{5, 11, 13\}, \{7, 11, 13\} \text{의 3개이다.} \quad \cdots \text{ ①}$$

(ii) 원소가 4개일 때,

$$\{3, 5, 7, 11\}, \{3, 5, 7, 13\}, \{3, 5, 11, 13\},$$

$$\{3, 7, 11, 13\}, \{5, 7, 11, 13\} \text{의 5개이다.} \quad \cdots \text{ ②}$$

(iii) 원소가 5개일 때,

$$\{3, 5, 7, 11, 13\} \text{의 1개이다.} \quad \cdots \text{ ③}$$

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$$3+5+1=9 \quad \cdots \text{ ④}$$

답 9

채점 기준	비율
① 원소가 3개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
② 원소가 4개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
③ 원소가 5개일 때의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	30 %
④ 모든 원소의 합이 25보다 큰 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	10 %

34 $A = B$ 이므로 $a^2 - a + 1 = 3$

$$a^2 - a - 2 = 0, \quad (a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = -1$ 일 때,

$$A = \{-5, 1, 3\}, B = \{-2, 3, 4\} \text{이므로}$$

$$A \neq B$$

(ii) $a = 2$ 일 때,

$$A = \{-5, 1, 3\}, B = \{-5, 1, 3\} \text{이므로}$$

$$A = B$$

(i), (ii)에서 $a = 2$ 답 2

35 $A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A = B$

이때 $x-3 < x-2 < x+2$ 이므로

$$x-3 = -2, x-2 = -1, x+2 = 3$$

$$\therefore x = 1 \quad \text{답 ④}$$

36 ㄱ. {1, 3, 5} ㄴ. {3, 5} ㄷ. {1, 3} ㄹ. {3, 5}

이상에서 집합 A와 서로 같은 집합인 것은 ㄴ, ㄹ이다. [답] ④

37 $A=B$ 이므로
 $a^2-2a=3, b^2-5=11$... ①
 $a^2-2a=3$ 에서
 $a^2-2a-3=0, (a+1)(a-3)=0$
 $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
 $b^2-5=11$ 에서 $b^2=16$
 $\therefore b=\pm 4$... ②

따라서 $a=3, b=4$ 일 때 $a+b$ 의 값이 최대이므로 구하는 최댓값은
 $3+4=7$... ③
 [답] 7

채점 기준	비율
① a, b에 대한 두 방정식을 세울 수 있다.	40 %
② a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ a+b의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

38 $A=B$ 이므로
 $3x-1=2x+2$ 또는 $3x-1=x+9$
 (i) $3x-1=2x+2$, 즉 $x=3$ 일 때,
 $A=\{3, 8, 12\}, B=\{3, 8, 12\}$ 이므로
 $A=B$
 (ii) $3x-1=x+9$, 즉 $x=5$ 일 때,
 $A=\{5, 14, 28\}, B=\{5, 12, 14\}$ 이므로
 $A \neq B$
 (i), (ii)에서 $A=\{3, 8, 12\}$ 이므로 구하는 합은
 $3+8+12=23$ [답] ②

39 $n(A)=a, n(B)=b$ 라 하면
 $2^a=128, 2^b-1=31$
 $2^a=128=2^7$ 에서 $a=7$
 $2^b=32=2^5$ 에서 $b=5$
 $\therefore n(A)+n(B)=12$ [답] ③

40 $x^3-2x^2-8x=0$ 에서
 $x(x+2)(x-4)=0$
 $\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$... ①
 $\therefore A=\{-2, 0, 4\}$... ②
 이때 집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는
 $(2^3-1)-1=6$... ③
 [답] 6

채점 기준	비율
① 방정식 $x^3-2x^2-8x=0$ 의 해를 구할 수 있다.	40 %
② 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
③ 집합 X의 개수를 구할 수 있다.	40 %

41 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
 집합 A의 원소 중에서 4의 배수는
 $4, 8, 12, 24$
 구하는 부분집합의 개수는 집합 $\{4, 8, 12, 24\}$ 의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 집합의 개수이므로
 $2^4-1=15$ [답] ①

42 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
 집합 X는 집합 A의 진부분집합이고, 1, 9를 반드시 원소로 가지므로 구하는 집합의 개수는
 $2^{8-2}-1=2^6-1=63$ 집합 $\{3, 5, 7, 11, 13, 15\}$ 의 진부분집합의 개수와 같다. [답] 63

43 0을 반드시 원소로 갖고 -1, 1을 원소로 갖지 않는 부분집합 X의 개수는
 $2^{5-1-2}=2^2=4$ [답] ②

44 $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$
 집합 A의 원소 중에서 6의 배수는 6, 12, 18이므로 이를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
 $2^{7-3}=2^4=16$ [답] 16

45 $A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ 이므로 소수인 원소가 2개 이려면 집합 A의 소수인 원소 2, 3, 5 중에서 2, 3 또는 2, 5 또는 3, 5만을 원소로 가져야 한다. ... ①
 2, 3을 반드시 원소로 갖고 5를 원소로 갖지 않는 집합 A의 부분집합의 개수는
 $2^{3-2-1}=2^0=1$ 2, 3, 5 중에서 2, 3만을 원소로 갖는 부분집합
 마찬가지로 2, 3, 5 중에서 2, 5 또는 3, 5만을 원소로 갖는 집합 A의 부분집합의 개수도 각각 32이므로 구하는 부분집합의 개수는
 $32 \cdot 3=96$... ②
 [답] 96

채점 기준	비율
① 소수인 원소가 2개인 부분집합의 조건을 알 수 있다.	30 %
② 소수인 원소가 2개인 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	70 %

46 $n(A)=k-1$ 이고 집합 A의 부분집합 중에서 가장 작은 원소가 4인 집합은 4를 반드시 원소로 갖고 1, 2, 3을 원소로 갖지 않아야 하므로
 $2^{(k-1)-1-3}=128=2^7$
 $k-5=7 \therefore k=12$ [답] ③

47 $x^2-10x+16=0$ 에서
 $(x-2)(x-8)=0$
 $\therefore x=2$ 또는 $x=8$
 $\therefore A=\{2, 8\}$
 $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 2, 8을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같다.
 $\therefore 2^{5-2}=2^3=8$ [답] ②

48 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 3, 5를 반드시 원소로 갖고 7을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로
 $2^{7-2-1}=2^4=16$ 답 ⑤

49 $|x| \leq k$ 에서 $-k \leq x \leq k$
 $\therefore A = \{-k, -k+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k-1, k\}$
 이때 $n(A) = 2k+1$ 이고 집합 X 의 개수는 집합 A 의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로
 $2^{(2k+1)-2} = 32 = 2^5$
 $2k-1=5 \quad \therefore k=3$ 답 3

50 $X = \{1, 3, 9\}$ 9의 양의 약수의 집합 ... ①
 이때 $A \subset B \subset X, X \neq B$ 이므로 집합 B 는 집합 X 의 진부분집합이다. ... ②
 (i) 집합 B 의 원소가 0개일 때,
 두 집합 A, B 가 모두 공집합이어야 하므로 순서쌍 (A, B) 의 개수는 1
 (ii) 집합 B 의 원소가 1개일 때,
 집합 B 는 $\{1\}, \{3\}, \{9\}$ 의 3개이고, 각각의 집합 B 에 대하여 집합 A 의 개수는 $2^1=2$ 이므로 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $3 \cdot 2 = 6$
 (iii) 집합 B 의 원소가 2개일 때,
 집합 B 는 $\{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}$ 의 3개이고, 각각의 집합 B 에 대하여 집합 A 의 개수는 $2^2=4$ 이므로 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $3 \cdot 4 = 12$
 이상에서 순서쌍 (A, B) 의 개수는
 $1 + 6 + 12 = 19$... ③

답 19

채점 기준	비율
① 집합 X 를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	20 %
② 집합 B 가 집합 X 의 진부분집합임을 알 수 있다.	20 %
③ 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구할 수 있다.	60 %

51 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$
 구하는 부분집합의 개수는 집합 A 의 부분집합의 개수에서 집합 $\{2, 5, 7, 11, 17\}$ 의 부분집합의 개수를 빼면 되므로
 $2^7 - 2^5 = 128 - 32 = 96$ 답 ①
다른 풀이 3 또는 13을 원소로 갖는 부분집합은 집합 $\{2, 5, 7, 11, 17\}$ 의 부분집합에 3만 추가하거나 13만 추가하거나 3, 13을 모두 추가하면 된다.
 따라서 구하는 부분집합의 개수는
 $2^5 \cdot 3 = 96$

52 구하는 부분집합의 개수는 집합 A 의 부분집합의 개수에서 집합 $\{8, 10, 14, 16\}$ 의 부분집합의 개수를 빼면 되므로
 $2^6 - 2^4 = 64 - 16 = 48$ 답 48

53 $m(X) \leq 2$ 를 만족시키려면 집합 X 는 0, 1, 2 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.
 따라서 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합의 개수에서 집합 $\{3, 4\}$ 의 부분집합의 개수를 빼면 되므로
 $2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28$ 답 ④

54 조건 ㉔, ㉕를 모두 만족시키려면 집합 A 의 원소는 24의 양의 약수이어야 한다.
 이때 24의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이고 조건 ㉕에 의하여 1과 24, 2와 12, 3과 8, 4와 6은 어느 하나가 집합 A 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A 의 원소이다.
 따라서 공집합이 아닌 집합 A 의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로
 $2^4 - 1 = 15$ 답 ③

참고 집합 A 를 구하면 다음과 같다.
 (i) $n(A) = 2$ 인 경우
 $\{1, 24\}, \{2, 12\}, \{3, 8\}, \{4, 6\}$
 (ii) $n(A) = 4$ 인 경우
 $\{1, 2, 12, 24\}, \{1, 3, 8, 24\}, \{1, 4, 6, 24\},$
 $\{2, 3, 8, 12\}, \{2, 4, 6, 12\}, \{3, 4, 6, 8\}$
 (iii) $n(A) = 6$ 인 경우
 $\{1, 2, 3, 8, 12, 24\}, \{1, 2, 4, 6, 12, 24\}, \{1, 3, 4, 6, 8, 24\},$
 $\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$
 (iv) $n(A) = 8$ 인 경우
 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

55 조건 ㉔, ㉕에 의하여 x 와 $10-x$ 가 모두 자연수이므로
 $x \geq 1, 10-x \geq 1 \quad \therefore 1 \leq x \leq 9$
 즉 집합 B 의 원소가 될 수 있는 것은
 $1, 2, 3, \dots, 9$
 이때 조건 ㉕에 의하여 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 어느 하나가 집합 B 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 B 의 원소이다.

(i) $n(B) = 2$ 일 때,
 집합 B 는
 $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}$
 이므로 $a_2 = 4$
 (ii) $n(B) = 4$ 일 때,
 집합 B 는
 $\{1, 2, 8, 9\}, \{1, 3, 7, 9\}, \{1, 4, 6, 9\},$
 $\{2, 3, 7, 8\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{3, 4, 6, 7\}$
 이므로 $a_4 = 6$
 (i), (ii)에서 $a_2 + a_4 = 10$ 답 10

56 조건 ㉔, ㉕를 모두 만족시키려면 집합 A 의 원소는 64의 양의 약수이어야 한다.
 이때 64의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64이고 조건 ㉕에 의하여 1과 64, 2와 32, 4와 16은 어느 하나가 집합 A 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A 의 원소이다.

따라서 $n(A)$ 가 홀수가 되는 집합 A 의 개수는 집합 $\{1, 2, 4, 8\}$ 의 부분집합 중에서 8을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{4-1} = 2^3 = 8 \quad \text{답 8}$$

57 조건 (가)에서 $2 \in A$ 이고, $6 \in U$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $6 \in A$

또 $18 \in U$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $18 \in A$

이와 같이 계속하면

$$\{2, 6, 18, 54\} \subset A \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편 조건 (가)에서 $4 \in A$ 이고, $12 \in U$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $12 \in A$

또 $36 \in U$ 이므로 조건 (나)에 의하여 $36 \in A$

$$\therefore \{4, 12, 36\} \subset A \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서

$$\{2, 4, 6, 12, 18, 36, 54\} \subset A$$

이므로 원소의 개수가 최소인 집합 A 는

$$A = \{2, 4, 6, 12, 18, 36, 54\}$$

따라서 $n(A)$ 의 최솟값은 7이다. 답 ②

58 $1 \notin X$, $9 \in X$ 인 집합 X 의 개수는

$$2^{5-1-1} = 2^3 = 8$$

한편 8개의 집합 중에서 3을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$1 \notin X$, $3 \in X$, $9 \in X$ 인 집합 X 의 개수와 같으므로

$$2^{5-1-2} = 2^2 = 4$$

마찬가지로 5, 7을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 4이므로 구하는 $S(X)$ 의 합은

$$8 \cdot 9 + 4(3 + 5 + 7) = 132 \quad \text{답 132}$$

59 집합 B_k 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합은

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \\ &\{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 6\}, \\ &\{1, 3, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

의 10개이다.

마찬가지로 2, 3, 4, 5, 6을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 10이므로

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{15} &= 10(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \\ &= 210 \end{aligned} \quad \text{답 ⑤}$$

60 집합 A_k 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{5-1} = 2^4 = 16$$

마찬가지로 4, 6, 8, 10을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 16이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{32} &= 16(2 + 4 + 6 + 8 + 10) \\ &= 480 \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

61 집합 B_k 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

마찬가지로 3, 9, 27을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 8이므로

$$\begin{aligned} b_1 \times b_2 \times b_3 \times \dots \times b_{15} &= 1^8 \cdot 3^8 \cdot 9^8 \cdot 27^8 \\ &= 3^8 \cdot (3^2)^8 \cdot (3^3)^8 \\ &= 3^8 \cdot 3^{16} \cdot 3^{24} \\ &= 3^{8+16+24} \\ &= 3^{48} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 48$$

답 48

06 집합의 연산

II. 집합과 명제

개념정리

본책 72쪽

- ① $\emptyset$ ② $B \cap C$ ③ $A \cap B$ ④ $\cap$ ⑤ $\not\subset$
 ⑥ $\in$ ⑦ A ⑧ $\emptyset$ ⑨ $\cap$
 ⑩ $A^c \cup B^c$ ⑪ $A \cap B$ ⑫ $n(A)$

유형 뽀개기

본책 73쪽

01 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$, $C=\{2, 4, 6, 8\}$ 이므로

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 6\} \\ = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

답 {1, 2, 3, 4, 6}

02 $B=\{1, 3, 9\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$

③ $B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

답 ③

03 집합 B 는 a, c 를 반드시 원소로 갖고, b, d, e 를 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 B 가 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

04 ① $x^2 - 9 = 0$ 에서 $x^2 = 9$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 $A = \{-3, 3\}$ 이므로 $A \cap B = \{3\}$

② $B = \{x \mid x < -1 \text{ 또는 } x > 1\}$ 이므로

$$A \cap B = \emptyset$$

③ $A \cap B = \{x \mid x \text{는 } 35 \text{의 양의 배수}\}$ 5, 7의 최소공배수

④ $A = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ 이므로

$$A \cap B = \{2\}$$

⑤ $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ 이므로

$$A \cap B = \{1, 9, 25, \dots\}$$

답 ②

참고 ⑤ $(\text{짝수})^2 = (\text{짝수})$, $(\text{홀수})^2 = (\text{홀수})$ 이므로

$$A \cap B = \{x \mid x = m^2, m \text{은 홀수인 자연수}\}$$

05 $\neg$. $\{2, 3, 5, 7, \dots\}$ $\neg$. $\{1, 2\}$

$\cap$. $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ $\cap$. $\{5\}$

$\cap$. $\{1, 2, 4, 8\}$ $\cap$. $\{1, 3, 7, 21\}$

이상에서 집합 $\{3, 5, 7\}$ 과 서로소인 집합은 $\neg$, $\cap$, $\cap$ 이다.

답 ③

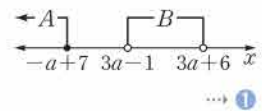
06 구하는 집합의 개수는 집합 A 의 부분집합 중 i, e 를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 집합의 개수는 집합 $\{f, r, n, d\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$$2^{6-2} = 2^4 = 16$$

답 16

07 두 집합 A, B 가 서로소이므로 두 집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $-a+7 < 3a-1$ 에서

$$-4a < -8 \quad \therefore a > 2$$

따라서 a 의 최솟값은 2이다.

→ ①

→ ②

→ ③

답 2

채점 기준	비율
① 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타낼 수 있다.	40 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ a 의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

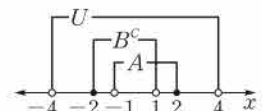
08 $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로 $B - A = \{1, 5, 7\}$

$$\therefore (B - A)^c = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

따라서 집합 $(B - A)^c$ 의 원소의 개수는 6이다.

답 6

09 $B^c = \{x \mid -2 \leq x < 1\}$ 이므로 오른쪽 그림에서



$$A \cup B^c = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

답 ④

10 $A - B = \{a, b\}$ 이므로

$$(A - B)^c = \{c, d, e, f, g\}$$

$B^c = \{a, b, f, g\}$ 이므로

$$A - B^c = \{c, d\}$$

$$\therefore (A - B)^c \cap (A - B^c) = \{c, d\}$$

답 {c, d}

11 $U = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$, $A = \{2, 5, 8, 11\}$,

$B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ 이므로

$$A - B = \{2, 8\}, B - A = \{3, 7, 9\}$$

$$\therefore (A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 7, 8, 9\}$$

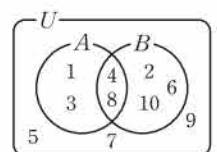
답 {2, 3, 7, 8, 9}

채점 기준	비율
① 두 집합 A, B 를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
② 두 집합 $A - B, B - A$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ 집합 $(A - B) \cup (B - A)$ 를 구할 수 있다.	30 %

12 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$A = \{1, 3, 4, 8\}$$

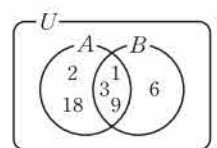
답 ④



13 $U = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,

$$A \cap B = \{1, 3, 9\}$$

이때 $(A \cup B)^c = \emptyset$ 에서 $A \cup B = U$ 이므로 오른쪽 벤 다이어그램에서



$$B = \{1, 3, 6, 9\}$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$1+3+6+9=19$$

답 ④

14 집합 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 는 오른쪽

벤 다이어그램의 색칠한 부분과 같고

$A = \{a, b, c, d\}$ 이므로

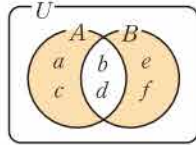
$$A - B = \{a, c\},$$

$$B - A = \{e, f\}$$

이때 $A \cap B = \{b, d\}$ 이므로

$$B = \{b, d, e, f\}$$

$$\hookrightarrow B = (B - A) \cup (A \cap B)$$



→ ①

→ ②

답 $\{b, d, e, f\}$

채점 기준	비율
① 두 집합 $A - B, B - A$ 를 구할 수 있다.	60 %
② 집합 B 를 구할 수 있다.	40 %

15 $A \cap B = \{1, 2\}$,

$A \cup B = \{1, 2, 4, 7, 8\}$ 이므로 오른쪽

벤 다이어그램의 색칠한 부분에 들어갈

원소는 4, 7, 8이다.

$$\therefore S(A - B) + S(B - A)$$

$$= 4 + 7 + 8 = 19$$

..... ㉠

$3S(A) = 2S(B)$ 에서 $\hookrightarrow 1+2=3$

$$3\{S(A - B) + S(A \cap B)\} = 2\{S(B - A) + S(A \cap B)\}$$

$$3S(A - B) + 9 = 2S(B - A) + 6$$

$$\therefore 3S(A - B) - 2S(B - A) = -3$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$S(A - B) = 7, S(B - A) = 12$$

따라서 $A - B = \{7\}$, $B - A = \{4, 8\}$ 이므로 집합 $B - A$ 의 가장 작은 원소는 4이다.

답 4

다른 풀이 $S(A) + S(B) = S(A \cup B) + S(A \cap B)$

$$= (1+2+4+7+8) + (1+2) = 25$$

이때 $3S(A) = 2S(B)$ 에서 $S(B) = \frac{3}{2}S(A)$ 이므로

$$\frac{5}{2}S(A) = 25 \quad \therefore S(A) = 10$$

$$\therefore S(B) = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$$

따라서 $A = \{1, 2, 7\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로

$$B - A = \{4, 8\}$$

16 $A \cap B = \{1, 4\}$ 이므로 $4 \in B$

즉 $a^2 - 2a + 1 = 4$ 이므로 $a^2 - 2a - 3 = 0$

$$(a+1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

(i) $a = -1$ 일 때,

$$A = \{-3, 4, 6\}, B = \{-3, 1, 4\}$$
이므로

$$A \cap B = \{-3, 4\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 3$ 일 때,

$$A = \{1, 2, 4\}, B = \{-3, 1, 4\}$$
이므로

$$A \cap B = \{1, 4\}$$

(i), (ii)에서 $a = 3$

답 3

17 $A - B = \{-1, 2\}$ 이므로 9, $2a + b$ 는 집합 B 의 원소이다.

이때 $B = \{4, a - 3b\}$ 이므로

$$a - 3b = 9, 2a + b = 4$$

→ ①

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 3, b = -2$$

→ ②

$$\therefore ab = -6$$

→ ③

답 -6

채점 기준	비율
① a, b 에 대한 두 방정식을 세울 수 있다.	60 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	10 %

18 $A \cup B = \{0, 2, 3, 5\}$ 이고 $A = \{0, 3, -a + 4\}$ 이므로

$$-a + 4 = 2 \text{ 또는 } -a + 4 = 5$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -1$$

(i) $a = 2$ 일 때,

$$A = \{0, 2, 3\}, B = \{-4, 0, 5\}$$
이므로

$$A \cup B = \{-4, 0, 2, 3, 5\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = -1$ 일 때,

$$A = \{0, 3, 5\}, B = \{0, 2, 5\}$$
이므로

$$A \cup B = \{0, 2, 3, 5\}$$

(i), (ii)에서

$$B = \{0, 2, 5\}$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$0 + 2 + 5 = 7$$

답 7

19 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나

타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $2a - 1$ 은

집합 B 의 원소이다.

이때 $2a - 1 \neq 2a + 7$ 이므로

$$2a - 1 = a^2 + a - 13$$

$$a^2 - a - 12 = 0, \quad (a+3)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 4$$

(i) $a = -3$ 일 때,

$$A = \{-7, 1, 5\}, B = \{-7, 1\}$$
이므로

$$(A - B) \cup (B - A) = \{5\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 4$ 일 때,

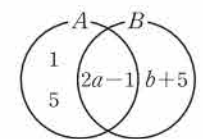
$$A = \{1, 5, 7\}, B = \{7, 15\}$$
이므로

$$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 5, 15\}$$

(i), (ii)에서 $a = 4$ 이고, $b + 5 = 15$ 에서 $b = 10$ 이므로

$$a + b = 14$$

답 14



20 ② $U^c = \emptyset$ 이므로 $U^c \subset A$

③ $A \cap (B \cup B^c) = A \cap U = A$

④ $A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B$

답 ④

21 ① $A \cap \emptyset = \emptyset$

② $B \cup B^c = U$

③ $(U - A)^c = (A^c)^c = A$

④ $A - \emptyset^c = A - U = \emptyset$

⑤ $U = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ 이면 $A \cap B = \{2\}$ 이므로
 $(A \cap B)^c = \{1, 3\}$
 $\therefore (A \cap B)^c \not\subset A$

답 ③

참고 집합 A 의 여집합 A^c 는 전체집합 U 에 대한 집합 A 의 차집합으로 생각할 수 있다.

$\Rightarrow A^c = U - A$

22 $\neg$. $B^c - A^c = B^c \cap (A^c)^c = B^c \cap A = A - B$

$\sqsubset$. $A \cap (U \cap B^c) = A \cap B^c = A - B$

$\sqsupset$. $A \cap (U - B^c) = A \cap B$

이상에서 $A - B$ 와 항상 같은 집합인 것은 $\neg$, $\sqsubset$ 이다.

답 ③

23 $A \cap B = B$ 이므로 $B \subset A$

②, ④ $B \subset A$ 이므로 $A^c \subset B^c$

$\therefore A^c - B^c = \emptyset$

⑤ $B \subset A$ 이고 $A \neq B$ 이므로

$(A \cup B) = A \not\subset B$

답 ⑤

24 $B^c \subset A^c$ 이므로 $A \subset B$

① $A \cup B = B$

② $A \cup (A \cap B) = A \cup A = A$

③ $(A \cup B) \cap B = B \cap B = B$

④ $(A - B) \cup B = \emptyset \cup B = B$

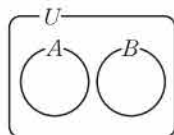
⑤ $(A \cup B) \cup (A \cap B) = B \cup A = B$

답 ②

25 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore B \cap A^c = B$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\sqsubset$, $\sqsupset$ 이다.



답 ⑤

26 $(A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset$ 이므로

$(A \cup B) \subset (A \cap B)$

..... ㉠

한편 두 집합 A, B 에 대하여

$(A \cap B) \subset (A \cup B)$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $A \cap B = A \cup B$

$\therefore A = B$

답 ①

27 $(A \cap B^c) \cup X = (A - B) \cup X = X$ 이므로

$(A - B) \subset X$

$\therefore \{1\} \subset X$

..... ㉠

$B \cap X = B$ 이므로 $B \subset X$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 집합 X 는 1, 2, 3, 5, 7을 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 X 의 개수는

$2^{7-5} = 2^2 = 4$

답 4

28 $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

$A \cup B = U$ 이므로 집합 B 는 집합 A^c 의 원소

1, 3, 5, 7, 9

를 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 B 의 개수는

$2^{9-5} = 2^4 = 16$

답 ③

29 $A - (A \cap X) \neq A$ 이므로

$A \cap (A \cap X) \neq \emptyset$

$\therefore A \cap X \neq \emptyset$

..... ①

즉 집합 X 는 -2 또는 2를 원소로 가져야 한다.

..... ②

따라서 집합 X 의 개수는 집합 U 의 부분집합의 개수에서 집합 $\{-1, 0, 1\}$ 의 부분집합의 개수를 빼면 되므로

$2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$

..... ③

답 24

채점 기준	비율
① $A \cap X \neq \emptyset$ 임을 알 수 있다.	30 %
② 집합 X 가 ①을 만족시키기 위한 조건을 구할 수 있다.	40 %
③ 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	30 %

30 집합 U 의 부분집합 X 가

$\{a, b, c\} \cup X = \{a, c, e, f, h\} \cup X$

를 만족시키려면 집합 X 는 두 집합 $\{a, b, c\}$, $\{a, c, e, f, h\}$ 의 공통인 원소 a, c 를 제외한 나머지 원소 b, e, f, h 를 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 X 의 개수는

$2^{8-4} = 2^4 = 16$

답 ②

31 $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

$x^2 - 10x + 16 = 0$ 에서 $(x-2)(x-8) = 0$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 8$

$\therefore B = \{2, 8\}$

이때 $X \cap (A - B) = X$ 이므로 $X \subset (A - B)$

$A - B = \{1, 4, 16\}$ 이고 $n(X) = 2$ 이므로 집합 X 의 개수는 집합 $\{1, 4, 16\}$ 의 부분집합 중 원소가 2개인 집합의 개수와 같다.

$\therefore {}_3C_2 = 3$

답 3

32 $(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$

$\therefore \{0, 1\} \subset X$

..... ㉠

$B-A = \{-3, 3\}$ 이고 $(B-A) \cap X = \{3\}$ 이므로

$$-3 \notin X, 3 \in X \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡에서 집합 X 는 0, 1, 3을 반드시 원소로 갖고 -3을 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 X 의 개수는

$$2^{7-3-1} = 2^3 = 8 \quad \text{답 8}$$

33 조건 ㉡의 $\{(A \cup B) - (A \cap B)\} \subset (B - A)$ 에서

$$\begin{aligned} & \{(A-B) \cup (B-A)\} \subset (B-A) \\ \therefore A-B &= \emptyset \quad \begin{array}{l} \text{---} (A-B) \subset (B-A) \text{이고, 두 집합 } A-B, \\ \quad \quad \quad B-A \text{는 서로소이므로} \\ \quad \quad \quad A-B = \emptyset \end{array} \\ \therefore A &\subset B \end{aligned}$$

조건 ㉡에서 $B = \{1, 2, 4\}$ 이고, 집합 A 는 공집합이 아닌 집합 B 의 진부분집합이므로 집합 A 의 개수는

$$2^3 - 1 - 1 = 6 \quad \text{답 6}$$

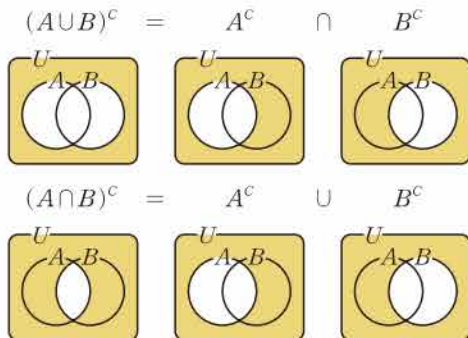
$$\begin{aligned} 34 \quad (A^c \cap B^c)^c \cap (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B) \\ &= A \cap B \quad \begin{array}{l} \text{---} (A \cap B) \subset (A \cup B) \end{array} \\ &= \{3, 5, 7\} \end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$$3 + 5 + 7 = 15 \quad \text{답 ⑤}$$

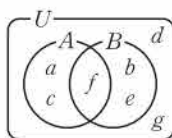
㉡ B E-1

드모르간의 법칙은 벤 다이어그램을 이용하면 쉽게 이해할 수 있다.



35 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\begin{aligned} \therefore A^c \cap B^c &= (A \cup B)^c \\ &= \{d, g\} \end{aligned}$$



답 {d, g}

$$\begin{aligned} 36 \quad A \cap (B^c \cup C^c) &= A \cap (B \cap C)^c \\ &= A - (B \cap C) \end{aligned}$$

이므로 $A - (B \cap C) = \{3, 4, 5\}$

이때 $A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$ 이므로

$$1 \in (B \cap C), 7 \in (B \cap C) \quad \text{답 ①}$$

$$\begin{aligned} 37 \quad A \cap B &= A^c \cap B^c \text{에서 } A \cap B = (A \cup B)^c \text{이므로} \\ A \cap B &= \emptyset, A \cup B = U = \{1, 3, 5, 7, 9\} \end{aligned}$$

따라서 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \quad \text{답 25}$$

$$\begin{aligned} 38 \quad (A-B) \cup (A \cap C) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \\ &= A \cap (B^c \cup C) \\ &= A \cap (B \cap C^c)^c \\ &= A - (B - C) \end{aligned} \quad \text{답 ⑤}$$

$$\begin{aligned} 39 \quad \neg, (A^c \cap B)^c \cap B &= (A \cup B^c) \cap B \\ &= (A \cap B) \cup (B^c \cap B) \\ &= (A \cap B) \cup \emptyset \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg, (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) &= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cup (A^c \cap B) \\ &= A \cup (A^c \cap B) \quad \begin{array}{l} \text{---} A \cap (B \cup B^c) = A \cap U = A \end{array} \\ &= (A \cup A^c) \cap (A \cup B) \\ &= U \cap (A \cup B) \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg, (A \cap C) - (B \cap C) &= (A \cap C) \cap (B \cap C)^c \\ &= (A \cap C) \cap (B^c \cup C^c) \\ &= \{(A \cap C) \cap B^c\} \cup \{(A \cap C) \cap C^c\} \\ &= \{(A \cap C) \cap B^c\} \cup \emptyset \quad \begin{array}{l} \text{---} (A \cap C) \cap C^c \\ \quad \quad \quad = A \cap (C \cap C^c) \\ \quad \quad \quad = A \cap \emptyset \\ \quad \quad \quad = \emptyset \end{array} \\ &= (A \cap C) - B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg, (A-B) - (A-C) &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c)^c \\ &= (A \cap B^c) \cap (A^c \cup C) \\ &= \{(A \cap B^c) \cap A^c\} \cup \{(A \cap B^c) \cap C\} \\ &= \{(A \cap A^c) \cap B^c\} \cup \{(A \cap C) \cap B^c\} \\ &= \emptyset \cup \{(A \cap C) \cap B^c\} \quad \begin{array}{l} \text{---} (A \cap A^c) \cap B^c \\ \quad \quad \quad = \emptyset \cap B^c = \emptyset \end{array} \\ &= (A \cap C) - B \end{aligned}$$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

$$\begin{aligned} 40 \quad (A-B) \cup (A-C) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \\ &= A \cap (B \cap C)^c \\ &= A - (B \cap C) \end{aligned}$$

이때 $B - C = B$ 에서 $B \cap C = \emptyset$ 이므로

$$A - (B \cap C) = A \quad \text{답 ②}$$

$$\begin{aligned} 41 \quad \text{조건 ㉡에서 } A^c \cap B^c &= (A \cup B)^c \text{이므로} \\ (A \cup B)^c &= \{5\} \end{aligned}$$

$$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \quad \dots\dots \textcircled{A} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 ㉡에서

$$\begin{aligned} & (B-A) \cup \{(A \cup B^c) \cap B\} \\ &= (B-A) \cup (A \cap B) \cup (B^c \cap B) \\ &= (B-A) \cup (A \cap B) \cup \emptyset \\ &= (B \cap A^c) \cup (B \cap A) \\ &= B \cap (A^c \cup A) \\ &= B \cap U = B \end{aligned}$$

$$\therefore B = \{1, 3\} \quad \dots\dots \textcircled{C} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서

$$A - B = (A \cup B) - B = \{2, 4\} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

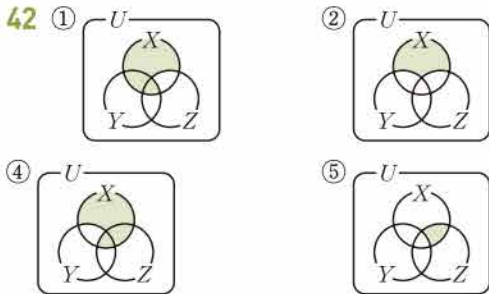
따라서 집합 $A-B$ 의 모든 원소의 합은

$$2+4=6$$

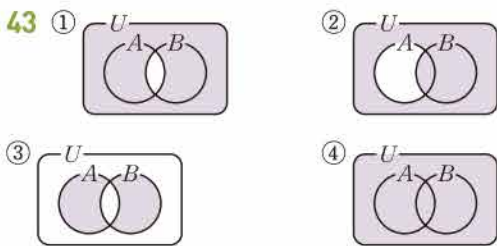
→ 4

답 6

채점 기준	비율
① 집합 $A \cup B$ 를 구할 수 있다.	20 %
② $(B-A) \cup \{(A \cup B^c) \cap B\}$ 를 간단히 할 수 있다.	50 %
③ 집합 $A-B$ 를 구할 수 있다.	20 %
④ 집합 $A-B$ 의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %



답 ③



답 ⑤

$$\begin{aligned} 44 \quad (A-C) \cap (B-C) &= (A \cap C^c) \cap (B \cap C^c) \\ &= (A \cap B) \cap C^c \\ &= (A \cap B) - C \end{aligned}$$

따라서 집합 $(A-C) \cap (B-C)$ 를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ③이다. 답 ③

$$\begin{aligned} 45 \quad \neg. A \cap (A^c \cup B)^c &= A \cap (A \cap B^c) \\ &= (A \cap A) \cap B^c \\ &= A \cap B^c = A - B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. (B-A) \cup B^c &= (B \cap A^c) \cup B^c \\ &= (B \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= U \cap (A \cap B)^c \\ &= U - (A \cap B) \\ \therefore (A \cap B) \cup (A \cup B^c)^c &= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \\ &= (A \cup A^c) \cap B \\ &= U \cap B = B \end{aligned}$$

이상에서 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합과 항상 같은 집합인 것은 $\neg$ 이다. 답 ①

$$\begin{aligned} 46 \quad (A_2 \cup A_9) \cap A_4 &= (A_2 \cap A_4) \cup (A_9 \cap A_4) \\ &= \underline{A_4 \cup A_{36}} \quad A_{36} \subset A_4 \\ &= A_4 \end{aligned}$$

전체집합 U 의 원소 중 4의 배수는 25개이므로 구하는 원소의 개수는 25이다. 답 25

배수

배수와 약수의 집합

① 자연수 k 의 양의 배수의 집합을 A_k 라 할 때, 자연수 m 이 자연수 n 의 배수이면 $A_m \subset A_n$ 이므로

$$A_m \cap A_n = A_m, A_m \cup A_n = A_n$$

예 4는 2의 배수이므로

$$A_4 \subset A_2 \Rightarrow A_4 \cap A_2 = A_4, A_4 \cup A_2 = A_2$$

② 자연수 k 의 양의 약수의 집합을 B_k 라 할 때, 자연수 m 이 자연수 n 의 약수이면 $B_m \subset B_n$ 이므로

$$B_m \cap B_n = B_m, B_m \cup B_n = B_n$$

예 2는 4의 약수이므로

$$B_2 \subset B_4 \Rightarrow B_2 \cap B_4 = B_2, B_2 \cup B_4 = B_4$$

47 집합 $A_{27} \cap A_{36} \cap A_{45}$ 는 27, 36, 45의 양의 공약수의 집합이고, 27, 36, 45의 최대공약수는 9이므로

$$A_{27} \cap A_{36} \cap A_{45} = A_9$$

$$\therefore k=9$$

답 9

$$\begin{aligned} 48 \quad (A_3 \cup A_{21}) \cap (A_5 \cup A_{10}) &= A_3 \cap A_5 \\ &= A_{15} \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 49 \quad A_4 \cap A_{10} &= A_{20} \text{이므로 } A_p \subset (A_4 \cap A_{10}) \text{에서} \\ A_p &\subset A_{20} \end{aligned}$$

즉 p 는 20의 양의 배수이어야 하므로 자연수 p 의 최솟값은 20이다. $\neg p=20, 40, 60, \dots$ → ①

$$\begin{aligned} \text{또 } B_{16} \cap B_{24} &= B_8 \text{이므로 } B_q \subset (B_{16} \cap B_{24}) \text{에서} \\ B_q &\subset B_8 \end{aligned}$$

즉 q 는 8의 양의 약수이어야 하므로 자연수 q 의 최댓값은 8이다. $\neg q=1, 2, 4, 8$ → ②

$$\text{따라서 구하는 합은 } 20+8=28$$

→ ③

답 28

채점 기준	비율
① 자연수 p 의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
② 자연수 q 의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %
③ 자연수 p 의 최솟값과 자연수 q 의 최댓값의 합을 구할 수 있다.	20 %

$$50 \quad x^2 - 4x - 12 \leq 0 \text{에서 } (x+2)(x-6) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 6$$

$$\therefore A = \{x \mid -2 \leq x \leq 6\}$$

$$A \cap B = \{x \mid -2 \leq x \leq 1\},$$

$$A \cup B = \{x \mid -3 \leq x \leq 6\} \text{이려면}$$

집합 B 는 오른쪽 그림과 같아야

하므로

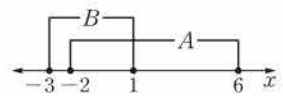
$$B = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$$

$$= \{x \mid (x+3)(x-1) \leq 0\}$$

$$= \{x \mid x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$$

$$\text{따라서 } p=2, q=-3 \text{이므로 } p+q=-1$$

답 -1

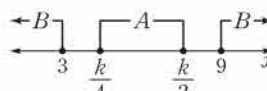


- 51 $x^3+x^2-4x-4=0$ 에서
 $x^2(x+1)-4(x+1)=0, \quad (x+1)(x^2-4)=0$
 $(x+1)(x+2)(x-2)=0$
 $\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$
 $\therefore A=\{-2, -1, 2\}$ ①
 $A-B=\{2\}$ 이므로 $-2 \in B, -1 \in B$
 $-2 \in B$ 에서 $4-2a+b=0$
 $\therefore 2a-b=4$ ⑦
 $-1 \in B$ 에서 $1-a+b=0$
 $\therefore a-b=1$ ⑧
 ⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a=3, b=2$ ②
 $\therefore ab=6$ ③

답 6

채점 기준	비율
① 집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	30 %
② a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
③ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

- 다른 풀이** $-2 \in B, -1 \in B$ 이므로 $-2, -1$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은
 $(x+2)(x+1)=0$
 $\therefore x^2+3x+2=0$
 위의 식이 $x^2+ax+b=0$ 과 일치하므로
 $a=3, b=2 \quad \therefore ab=6$

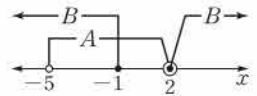
- 52 $(4x-k)(2x-k) \leq 0$ 에서
 $\frac{k}{4} \leq x \leq \frac{k}{2}$ k 는 자연수이므로 $\frac{k}{4} < \frac{k}{2}$
 $\therefore A=\{x \mid \frac{k}{4} \leq x \leq \frac{k}{2}\}$
 $x^2-12x+27 \geq 0$ 에서 $(x-3)(x-9) \geq 0$
 $\therefore x \leq 3$ 또는 $x \geq 9$
 $\therefore B=\{x \mid x \leq 3 \text{ 또는 } x \geq 9\}$
 $A \cap B = \emptyset$ 이 되려면 집합 A는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

 $\frac{k}{4} > 3, \frac{k}{2} < 9$
 $\therefore 12 < k < 18$
 따라서 자연수 k 는 13, 14, 15, 16, 17의 5개이다. ④

- 53 $A \cap B = A$ 이므로 $A \subset B$
 (i) $A = \emptyset$ 일 때,
 방정식 $2x-1=ax$, 즉 $(2-a)x=1$ 의 해가 존재하지 않아야 하므로
 $2-a=0 \quad \therefore a=2$
 (ii) $A \neq \emptyset$ 일 때,
 $-2 \in A$ 또는 $1 \in A$ 또는 $2 \in A$ 이어야 하므로
 $-4-1=-2a$ 또는 $2-1=a$ 또는 $4-1=2a$
 $\therefore a=\frac{5}{2}$ 또는 $a=1$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

- (i), (ii)에서
 $a=1$ 또는 $a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=2$ 또는 $a=\frac{5}{2}$
 따라서 모든 실수 a 의 값의 합은
 $1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}=7$ ⑦

- 54 $x^2+3x-10 < 0$ 에서 $(x+5)(x-2) < 0$
 $\therefore -5 < x < 2$
 $\therefore A=\{x \mid -5 < x < 2\}$

이때 $A \cup B = R$,
 $A \cap B = \{x \mid -5 < x \leq -1\}$ 이라면
 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$B=\{x \mid x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2\}$$

$$=\{x \mid (x+1)(x-2) \geq 0\}$$

$$=\{x \mid x^2-x-2 \geq 0\}$$

- 따라서 $a=-1, b=-2$ 이므로
 $a-b=1$ ③

- 55 $\neg, A * \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A)$
 $= A \cup \emptyset = A$

- $\neg, A * U = (A - U) \cup (U - A)$
 $= \emptyset \cup A^c = A^c$

- $\neg, A * A^c = (A - A^c) \cup (A^c - A)$
 $= A \cup A^c = U$ $A \cap A^c = \emptyset$ 이므로
 $A - A^c = A, A^c - A = A^c$

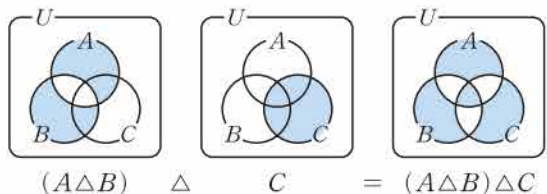
- $\neg, A^c * B^c = (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c)$
 $= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A)$
 $= (B - A) \cup (A - B)$
 $= (A - B) \cup (B - A)$
 $= A * B$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다. ④

- 56 $A \odot B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
 $= (A \cup A^c) \cap B$
 $= U \cap B = B$
 $\therefore (A \odot B) \odot A = B \odot A$
 $= A$ ①

- 57 $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$
 $= (A - B) \cup (B - A)$

이므로 집합 $(A \triangle B) \triangle C$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



..... ④

58 $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$

이때

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ = 12 + 13 - 5 = 20$$

이므로

$$n(A^c \cap B^c) = 26 - 20 = 6$$

답 ②

59 $B - A = B$ 이므로 $A \cap B = \emptyset$

따라서 $n(A \cap B) = 0$ 이므로

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \\ = 16 + 8 \\ = 24$$

답 24

60 $n((A - B) \cup (B - A)) = n((A \cup B) - (A \cap B)) \\ = n(A \cup B) - n(A \cap B)$

이므로

$$40 = 50 - n(A \cap B) \\ \therefore n(A \cap B) = 10$$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$50 = 31 + n(B) - 10 \quad \therefore n(B) = 29$$

답 29

[다른 풀이] 두 집합 $A - B$, $B - A$ 가 서로소이므로

$$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A - B) + n(B - A)$$

이때

$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 50 - n(B), \\ n(B - A) = n(A \cup B) - n(A) = 50 - 31 = 19$$

이므로

$$40 = 50 - n(B) + 19 \quad \therefore n(B) = 29$$

61 $A = \{1, 3, 5, \dots, 49\}$ 이므로 $n(A) = 25$

$B = \{3, 6, 9, \dots, 48\}$ 이므로 $n(B) = 16$

$A \cap B = \{3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45\}$ 이므로

$$n(A \cap B) = 8 \\ \therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ = 25 + 16 - 8 \\ = 33$$

답 33

62 $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$ 이므로

$$15 = 45 - n(A \cup B)$$

$$\therefore n(A \cup B) = 30$$

→ ①

이때

$$n(A \cup B) = n(A \cap B^c) + n(B \cap A^c) + n(A \cap B)$$

이므로

$$30 = 6 + 20 + n(A \cap B) \\ \therefore n(A \cap B) = 4$$

→ ②

답 4

채점 기준	비율
① $n(A \cup B)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $n(A \cap B)$ 를 구할 수 있다.	60 %

63 두 집합 A 와 B 가 서로소이므로

$$A \cap B = \emptyset, A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$\therefore n(A \cap B) = 0, n(A \cap B \cap C) = 0$$

이때

$$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C) \\ = 6 + 10 - 14 = 2,$$

$$n(C \cap A) = n(C) + n(A) - n(C \cup A) \\ = 10 + 5 - 12 = 3$$

이므로

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ = 5 + 6 + 10 - 0 - 2 - 3 + 0 \\ = 16$$

답 ④

64 $n(X \cap Y)$ 는 $X \subset Y$ 일 때 최대이므로

$$M = n(X) = 9$$

$n(X \cap Y)$ 는 $X \cup Y = U$ 일 때 최소이므로

$$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$$

$$m = 9 + 16 - 22 = 3$$

$$\therefore M - m = 6$$

답 ⑤

[다른 풀이] $n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$

$$= 9 + 16 - n(X \cup Y)$$

$$= 25 - n(X \cup Y)$$

$X \subset (X \cup Y)$, $Y \subset (X \cup Y)$ 이므로

$$n(X) \leq n(X \cup Y), n(Y) \leq n(X \cup Y) \quad \dots\dots ㉠$$

$(X \cup Y) \subset U$ 이므로

$$n(X \cup Y) \leq n(U) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $16 \leq n(X \cup Y) \leq 22$ 이므로

$$-22 \leq -n(X \cup Y) \leq -16$$

$$3 \leq 25 - n(X \cup Y) \leq 9$$

$$\therefore 3 \leq n(X \cap Y) \leq 9$$

따라서 $M = 9$, $m = 3$ 이므로

$$M - m = 6$$

65 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$= 11 + 5 - n(A \cap B)$$

$$= 16 - n(A \cap B)$$

→ ①

한편 $(A \cap B) \subset A$, $(A \cap B) \subset B$ 이므로

$$n(A \cap B) \leq n(A), n(A \cap B) \leq n(B)$$

이때 $n(A \cap B) \geq 2$ 이므로 $\begin{cases} n(A) = 11, n(B) = 5 \\ n(A \cap B) \leq 5 \end{cases}$ 이므로

$$2 \leq n(A \cap B) \leq 5$$

→ ②

$$-5 \leq -n(A \cap B) \leq -2$$

$$11 \leq 16 - n(A \cap B) \leq 14$$

$$\therefore 11 \leq n(A \cup B) \leq 14$$

→ ③

따라서 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 14, 최솟값은 11이므로 구하는 합은

$$14 + 11 = 25$$

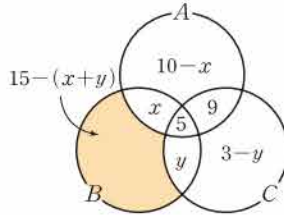
→ ④

답 25

채점 기준	비율
① $n(A \cup B)$ 를 $n(A \cap B)$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	10 %
② $n(A \cap B)$ 의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ $n(A \cup B)$ 의 범위를 구할 수 있다.	40 %
④ $n(A \cup B)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

66 $n((A \cap B) - C) = x$,

$n((B \cap C) - A) = y$ 라 하고 각 부분에 속하는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램으로 나타내면 집합



$B - (A \cup C)$ 는 색칠한 부분과

같으므로 $n(B - (A \cup C))$ 는 $x+y$ 가 최대일 때 최소이고, $x+y$ 가 최소일 때 최대이다.

$x \geq 0, y \geq 0, 10-x \geq 0, 3-y \geq 0$ 에서

$$0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 3 \quad \begin{cases} \text{집합의 원소의 개수는 항상} \\ \text{0보다 크거나 같다.} \end{cases}$$

$$\therefore 0 \leq x+y \leq 13$$

따라서 $n(B - (A \cup C))$ 의 최댓값과 최솟값은 각각

$$15-0=15, 15-13=2$$

이므로 구하는 곱은 $15 \cdot 2 = 30$

답 ③

67 학생 전체의 집합을 U , A 회사의 휴대폰을 사용해 본 학생의 집합을 A, B 회사의 휴대폰을 사용해 본 학생의 집합을 B라 하면

$$n(U) = 35, n(A) = 18, n(B) = 15, n(A^c \cap B^c) = 5$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{에서}$$

$$5 = 35 - n(A \cup B)$$

$$\therefore n(A \cup B) = 30$$

따라서 A 회사와 B 회사의 휴대폰을 모두 사용해 본 학생 수는

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 18 + 15 - 30 \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ①

68 회원 전체의 집합을 U , 추리 소설을 좋아하는 회원의 집합을 A, 과학 소설을 좋아하는 회원의 집합을 B라 하면

$$n(U) = 30, n(A) = 13, n(B) = 20,$$

$$n(A^c \cap B^c) = 3 \quad \cdots ①$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{에서}$$

$$3 = 30 - n(A \cup B)$$

$$\therefore n(A \cup B) = 27 \quad \cdots ②$$

따라서 추리 소설만 좋아하는 회원 수는

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A \cup B) - n(B) \\ &= 27 - 20 = 7 \end{aligned}$$

③

답 7

채점 기준	비율
① 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	30 %
② $n(A \cup B)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ 추리 소설만 좋아하는 회원 수를 구할 수 있다.	40 %

69 학생 전체의 집합을 U , 골프를 선택한 학생의 집합을 A, 수영을 선택한 학생의 집합을 B라 하면

$$n(U) = 40, n(A) = 17, n(A - B) = 14, n(A^c \cap B^c) = 11$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$14 = 17 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 3$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{에서}$$

$$11 = 40 - n(A \cup B)$$

$$\therefore n(A \cup B) = 29$$

$$\text{이때 } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{이므로}$$

$$29 = 17 + n(B) - 3$$

$$\therefore n(B) = 15$$

따라서 수영을 선택한 학생 수는 15이다.

답 ④

70 학생 전체의 집합을 U , 세 단체 A, B, C를 신청한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$$n(U) = n(A \cup B \cup C) = 50, n(A) = 24, n(B) = 19,$$

$$n(C) = 25, n(A \cap B \cap C) = 5 \quad \begin{cases} \text{모든 학생이 한 개 이상의 단체를} \\ \text{신청했으므로 } U = A \cup B \cup C \end{cases}$$

세 단체 중 두 단체만 신청한 학생 수는

$$\begin{aligned} &n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3 \times n(A \cap B \cap C) \\ &\quad \cdots \cdots ① \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ &\quad - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

이므로

$$50 = 24 + 19 + 25 - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + 5$$

$$\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 23$$

따라서 ①에서 구하는 학생 수는

$$23 - 3 \cdot 5 = 8$$

답 8

71 학생 전체의 집합을 U , 버스를 이용하여 등교하는 학생의 집합을 A, 지하철을 이용하여 등교하는 학생의 집합을 B라 하면

$$n(U) = 110, n(A) = 65, n(B) = 58$$

버스와 지하철을 모두 이용하여 등교하는 학생 수는 $n(A \cap B)$

이고 $n(A \cap B)$ 는 $B \subset A$ 일 때 최대이다.

$$\therefore M = n(B) = 58$$

또 $n(A \cap B)$ 는 $A \cup B = U$ 일 때 최소이므로

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \text{에서}$$

$$m = 65 + 58 - 110 = 13$$

$$\therefore M - m = 45$$

답 ④

72 회원 전체의 집합을 U , 피아노를 갖고 있는 회원의 집합을 A, 바이올린을 갖고 있는 회원의 집합을 B라 하면

$$n(U) = 60, n(A) = 36, n(B) = 28$$

피아노만 갖고 있는 회원 수는

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= 36 - n(A \cap B) \end{aligned} \quad \cdots \cdots ①$$

이므로 $n(A \cap B)$ 가 최소일 때 최대이다.

$n(A \cap B)$ 는 $A \cup B = U$ 일 때 최소이므로 $n(A \cap B)$ 의 최솟값을 m 이라 하면 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ 에서
 $m = 36 + 28 - 60 = 4$
 따라서 ㉠에서 구하는 최댓값은
 $36 - 4 = 32$ 답 ⑤

73 고객 전체의 집합을 U , 멜론 빙수를 주문한 고객의 집합을 A , 망고 빙수를 주문한 고객의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 42, n(A) = 15, n(B) = 21$
 멜론 빙수와 망고 빙수 중 어느 것도 주문하지 않은 고객 수는
 $a = n(A^c \cap B^c)$
 $= n((A \cup B)^c)$
 $= n(U) - n(A \cup B)$
 $= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\}$
 $= 42 - 15 - 21 + n(A \cap B)$
 $= 6 + n(A \cap B)$ ㉠

이므로 $n(A \cap B)$ 가 최대일 때 최대이고, $n(A \cap B)$ 가 최소일 때 최소이다.
 한편 $n(A \cap B)$ 는 $A \subset B$ 일 때 최대이고, $A \cap B = \emptyset$ 일 때 최소
 이므로 $n(A \cap B)$ 의 최댓값과 최솟값은 각각
 $n(A) = 15, n(\emptyset) = 0$
 따라서 ㉠에서 a 의 최댓값과 최솟값은 각각
 $6 + 15 = 21, 6 + 0 = 6$
 이므로 구하는 합은
 $21 + 6 = 27$ 답 27
참고 $n(A) + n(B) = 36, n(U) = 42$ 이므로
 $n(A \cup B) < n(U)$
 $\therefore A \cup B \neq U$
 따라서 $n(A \cap B)$ 는 $A \cap B = \emptyset$ 일 때 최소이다.

07 명제

II. 집합과 명제

개념정리

본책 86쪽

- | | | | | |
|---------------|---------------|-------------------|-------|--------------|
| ① 정리 | ② 거짓 | ③ P^c | ④ 그리고 | ⑤ 또는 |
| ⑥ 결론 | ⑦ 참 | ⑧ $P = \emptyset$ | ⑨ 모든 | ⑩ $\sim q$ |
| ⑪ 거짓 | ⑫ 필요조건 | ⑬ 대우 | ⑭ 0 | ⑮ $\sqrt{b}$ |
| ⑯ $\sqrt{ab}$ | ⑰ $a^2 + b^2$ | | | |

유형 뽐내기

본책 88쪽

001 ①, ⑤ 참인 명제이다.
 ②, ④ 거짓인 명제이다.
 ③ x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다. 답 ③

002 ㄱ. 참인 명제이다.
 ㄴ. 거짓인 명제이다.
 ㄷ. x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
 ㄹ. $3x = 3(x-2)$ 에서 $0 = -6$ 이므로 거짓인 명제이다.
 이상에서 참인 명제인 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

003 ① $0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 이므로 참인 명제이다.
 ②, ④ x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
 ③ 거짓인 명제이다.
 ⑤ $2x > x - (2-x)$ 에서 $0 > -2$ 이므로 참인 명제이다. 답 ③

004 ' $\sim p$ 또는 q '의 부정은 ' p 그리고 $\sim q$ '
 $p: -1 \leq x \leq 3, \sim q: 2 < x \leq 6$ 이므로 ' p 그리고 $\sim q$ '는
 $2 < x \leq 3$ 답 ①

005 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.
 ① $-2 \geq 5$ (거짓)
 ② $\{1, 5\} \subset \{1, 2, 5, 8\}$ (거짓)
 ③ 0은 자연수이다. (거짓)
 ④ 15는 3의 배수가 아니다. (거짓)
 ⑤ 정사각형은 마름모이다. (참)

답 ⑤

다른 풀이 명제가 거짓이면 그 부정은 참이다.

주어진 명제 중 ①, ②, ③, ④는 참이고 ⑤는 거짓이므로 명제의 부정이 참인 것은 ⑤이다.

006 ' $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \neq 0$ '의 부정은
 $'(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0'$
 이므로 $\perp (a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$

$$(a-b)^2=0 \text{이고 } (b-c)^2=0 \text{이고 } (c-a)^2=0$$

$$\therefore a=b \text{이고 } b=c \text{이고 } c=a$$

$$\therefore a=b=c$$

답 ①

007 $x^2-10x+21 \leq 0$ 에서

$$(x-3)(x-7) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq x \leq 7$$

$U=\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 이므로 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P=\{2, 3, 5, 7\}, Q=\{3, 4, 5, 6, 7\}$$

① 조건 $\sim p$ 의 진리집합은 $P^c=\{1, 4, 6, 8, 9\}$ 이므로

$$n(P^c)=5$$

② 조건 $\sim q$ 의 진리집합은 $Q^c=\{1, 2, 8, 9\}$ 이므로

$$n(Q^c)=4$$

③ 조건 ' p 이고 q '의 진리집합은 $P \cap Q=\{3, 5, 7\}$ 이므로

$$n(P \cap Q)=3$$

④ 조건 ' p 이고 $\sim q$ '의 진리집합은 $P \cap Q^c=\{2\}$ 이므로

$$n(P \cap Q^c)=1$$

⑤ 조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 진리집합은

$$P^c \cup Q=\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
이므로

$$n(P^c \cup Q)=8$$

답 ④

008 두 진리집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

또 조건 ' $-2 < x \leq 1$ '의 진리집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 집합은

$$P \cap Q^c$$

참고 ① $P \cap Q=\{x|x>1\}$

② $P \cup Q=\{x|x>-2\}$

④ $P^c \cup Q=\{x|x \leq -2 \text{ 또는 } x>1\}$

⑤ $(P \cap Q)^c=\{x|x \leq 1\}$

009 $|x| \leq 2$ 에서 $-2 \leq x \leq 2$

$$\therefore U=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$x^3-4x=0 \text{에서}$$

$$x(x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P=\{-2, 0, 2\}$$

→ ①

$$x^2-3x+2=0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q=\{1, 2\}$$

→ ②

이때 조건 ' $\sim p$ 또는 $\sim q$ '의 진리집합은 $P^c \cup Q^c$, 즉 $(P \cap Q)^c$

이고 $P \cap Q=\{2\}$ 이므로

$$(P \cap Q)^c=\{-2, -1, 0, 1\}$$

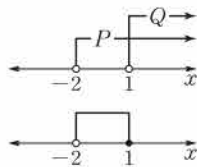
→ ③

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$$-2+(-1)+0+1=-2$$

→ ④

답 -2



답 ③

채점 기준	비율
① 조건 p 의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
② 조건 q 의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
③ 조건 ' $\sim p$ 또는 $\sim q$ '의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
④ 조건 ' $\sim p$ 또는 $\sim q$ '의 진리집합의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10 %

010 $x^2-9 \leq 0$ 에서 $(x+3)(x-3) \leq 0$

$$\therefore -3 \leq x \leq 3$$

$$\therefore P=\{x|-3 \leq x \leq 3\}$$

$$|x-a| \leq 1 \text{에서 } -1 \leq x-a \leq 1$$

$$\therefore a-1 \leq x \leq a+1$$

$$\therefore Q=\{x|a-1 \leq x \leq a+1\}$$

조건 ' p 또는 q '의 진리집합이 P 가 되려면

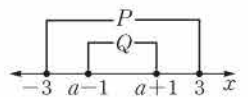
$$P \cup Q=P$$

$$\therefore Q \subset P$$

즉 오른쪽 그림에서

$$a-1 \geq -3, a+1 \leq 3$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 2$$



따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

답 5

011 ① [반례] $x=1$ 이면 $-x^2+x=0$ 이지만 $x>0$ 이다.

② [반례] $x=-2, y=-1$ 이면 $x<y$ 이지만 $x^2>y^2$ 이다.

④ [반례] $x=2, y=-1$ 이면 $x+y>0$ 이지만 $xy<0$ 이다.

⑤ [반례] $x=2$ 이면 x 는 6의 약수이지만 9의 약수는 아니다.

답 ③

012 $\neg$. 두 조건 p, q 를

p : x 는 14의 양의 배수이다.

q : x 는 7의 양의 배수이다.

라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P=\{14, 28, 42, 56, \dots\}, Q=\{7, 14, 21, 28, \dots\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. [반례] $x=2$ 이면 x 는 소수이지만 $x+1=3$ 은 홀수이다.

ㄷ. 사각형 ABCD가 정사각형이면

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

따라서 $\angle A = \angle D$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄹ. [반례] $x=0$ 이면 $-1 < x < 1$ 이지만 $x^2=0$ 이다.

이상에서 거짓인 명제는 ㄴ, ㄹ의 2개이다.

답 2

013 $|x| \leq 3$ 에서

$$-3 \leq x \leq 3$$

$$x^2-9 > 0 \text{에서 } (x+3)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 3$$

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P=\{x|-3 \leq x \leq 3\}, Q=\{x|x < -3 \text{ 또는 } x > 3\},$$

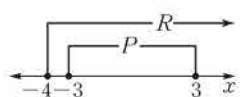
$$R=\{x|x \geq -4\}$$

$\neg$. 두 진리집합 P, R 를 수직선 위에

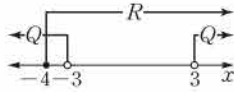
나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$P \subset R$$

따라서 명제 $p \rightarrow r$ 는 참이다.



ㄴ. 두 진리집합 Q, R 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $Q \not\subset R$



따라서 명제 $q \rightarrow r$ 는 거짓이다.

ㄷ. $Q^c = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$ 이므로 $Q^c = P$

따라서 $Q^c \subset P$ 이므로 명제 $\sim q \rightarrow p$ 는 참이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. [답] ㄱ, ㄷ

[다른 풀이] ㄴ. [반례] $x = -5$ 이면 $x^2 - 9 > 0$ 이지만 $x < -4$ 이다.

014 명제 'q이면 p이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 Q 의 원소 중에서 집합 P 의 원소가 아닌 것, 즉 집합 $P^c \cap Q$ 의 원소를 찾으려 한다.

따라서 구하는 원소는 c, d 이다. [답] ②

015 두 조건 p, q 를

p : n 은 24의 약수이다.

q : n 은 18의 약수이다.

라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$,

$Q = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

이때 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P 에는 속하고 집합 Q 에는 속하지 않는 집합 $P \cap Q^c$ 의 원소이다.

따라서 구하는 반례는 4, 8, 12, 24이다.

[답] 4, 8, 12, 24

016 명제 'p이면 q 또는 $\sim r$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P 에는 속하고 집합 $Q \cup R^c$ 에는 속하지 않는다.

따라서 구하는 집합은

$$P \cap (Q \cup R^c)^c = P \cap (Q^c \cap R) = (P \cap R) \cap Q^c = (P \cap R) - Q$$

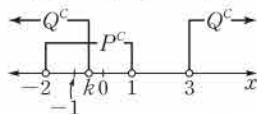
[답] ③

017 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{x | x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 1\}$, $Q = \{x | k \leq x \leq 3\}$

이때 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P^c 에는 속하고 집합 Q 에는 속하지 않는 집합 $P^c \cap Q^c$ 의 원소이다.

$P^c = \{x | -2 < x < 1\}$, $Q^c = \{x | x < k \text{ 또는 } x > 3\}$ 이므로 집합 $P^c \cap Q^c$ 의 정수인 원소가 -1뿐이



려면 오른쪽 그림에서

$$-1 < k \leq 0$$

따라서 k 의 최댓값은 0이다.

[답] 0

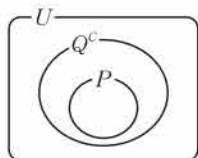
018 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로

$$P \subset Q^c$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$P \cap Q = \emptyset$$

[답] ③



019 주어진 벤 다이어그램에서

$$P \subset R^c, Q \subset P, R \subset Q^c, P^c \subset Q^c$$

이므로 네 명제

$$p \rightarrow \sim r, q \rightarrow p, r \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow \sim q$$

도 모두 참이다.

그러나 $Q^c \not\subset R^c$ 이므로 명제 $\sim q \rightarrow \sim r$ 는 거짓이다.

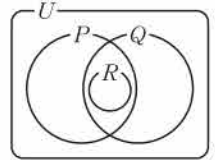
[답] ⑤

020 $R \subset (P \cap Q)$ 를 만족시키도록 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 $R \subset Q$, $P^c \subset R^c$ 이므로 두 명제

$r \rightarrow q$, $\sim p \rightarrow \sim r$ 는 모두 참이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.



[답] ③

021 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면

$$P \subset Q$$

이때 $P = \{1, 2, 4\}$ 이므로 집합 Q 는 집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ 의 부분집합 중 1, 2, 4를 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 Q 의 개수는

$$2^{7-3} = 2^4 = 16$$

[답] 16

022 $x^2 - 9x + 18 > 0$ 에서

$$(x-3)(x-6) > 0$$

$$\therefore x < 3 \text{ 또는 } x > 6$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | x < 3 \text{ 또는 } x > 6\},$$

$$Q = \{x | x \geq k\}$$

$P^c = \{x | 3 \leq x \leq 6\}$ 이고 명제

$\sim p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P^c \subset Q$ 이어

야 하므로 오른쪽 그림에서

$$k \leq 3$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 3 = 6$$

[답] 6

예제 B

두 집합 A, B 에 대하여 $B \subset A$ 가 되도록 하는 a 의 값의 범위는 다음과 같다.

① $A = \{x | x > a\}$, $B = \{x | x > k\}$ 일

때,

$$a \leq k$$

② $A = \{x | x > a\}$, $B = \{x | x \geq k\}$ 일

때,

$$a < k$$

③ $A = \{x | x \geq a\}$, $B = \{x | x > k\}$ 일

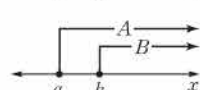
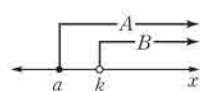
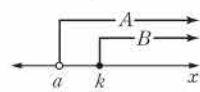
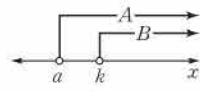
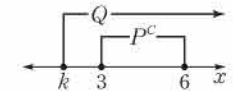
때,

$$a \leq k$$

④ $A = \{x | x \geq a\}$, $B = \{x | x \geq k\}$ 일

때,

$$a \leq k$$



023 주어진 명제가 참이 되려면

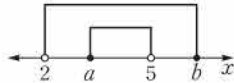
$$\{x|a \leq x < 5\} \subset \{x|2 < x \leq b\}$$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a > 2, b \geq 5$$

따라서 $a+b$ 는 $a=3, b=5$ 일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$$3+5=8$$



답 8

024 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x|x < a\},$$

$$Q = \{x|x \leq -1 \text{ 또는 } 2 < x < 4\},$$

$$R = \{x|x \leq b\}$$

두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ 가 모두

참이 되려면

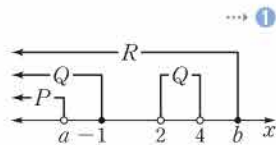
$$P \subset Q, Q \subset R$$

이어야 하므로 위의 그림에서

$$a \leq -1, b \geq 4$$

따라서 a 의 최댓값은 $-1, b$ 의 최솟값은 4 이므로 구하는 합은

$$-1+4=3$$



답 1

답 2

답 3

답 3

025 $\sim p: |x-2| \geq k$ 에서 k 는 양수이므로

$$x-2 \leq -k \text{ 또는 } x-2 \geq k$$

$$\therefore x \leq -k+2 \text{ 또는 } x \geq k+2$$

$$x^2+8x+15 < 0 \text{에서}$$

$$(x+5)(x+3) < 0$$

$$\therefore -5 < x < -3$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P^c = \{x|x \leq -k+2 \text{ 또는 } x \geq k+2\},$$

$$Q = \{x|-5 < x < -3\}$$

명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이 되려면 $Q \subset P^c$ 이어야 한다.

이때 $k > 0$ 에서 $k+2 > 2$ 이므로 두

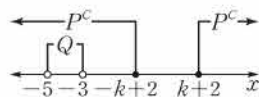
집합 P^c, Q 는 오른쪽 그림과 같아

야 한다.

즉 $-k+2 \geq -3$ 이므로

$$0 < k \leq 5 \quad (\because k > 0)$$

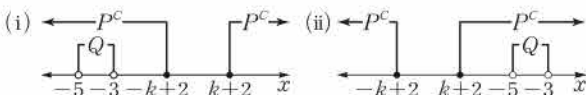
따라서 k 의 최댓값은 5 이다.



답 5

예제 B

$Q \subset P^c$ 인 경우는 다음과 같이 두 가지가 있다.



그런데 $k+2 > 2$ 에서 $k+2$ 의 값은 -5 보다 작을 수 없으므로

(ii)의 경우는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

026 ① [반례] 2 는 소수이지만 짝수이다.

② [반례] $x=0$ 이면 $|x|=0$ 이다.

③ $x < 0$ 이면 $x^2 > 0$ 이므로 모든 음의 실수 x 에 대하여 $x^2 > x$ 이다. 따라서 주어진 명제는 거짓이다.

④ $x=3$ 이면 $x^2=x+6$

⑤ [반례] $x=\sqrt{2}$ 이면 $x^2=2$ 는 유리수이다.

답 4

027 ③ $-2 \leq x \leq 2$ 에서

$$3 \leq x+5 \leq 7$$

따라서 모든 x 에 대하여 $x+5 \notin U$ 이므로 거짓이다.

④ $x=2, y=2$ 이면 $x+y=4$ 이므로 참이다.

⑤ 모든 x, y 에 대하여 $x^2 \leq 4, y^2 \leq 4$ 이므로 $x^2+y^2 \leq 8$ 이다.

답 3

028 주어진 명제의 부정은

$$\text{'모든 실수 } x \text{에 대하여 } x^2-kx+k+3 \geq 0 \text{이다.'}$$

이다.

위의 명제가 참이므로 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-k)^2 - 4(k+3) \leq 0, \quad k^2 - 4k - 12 \leq 0$$

$$(k+2)(k-6) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq 6$$

따라서 k 의 최댓값은 6 이다.

답 2

답 6

채점 기준	비율
① 주어진 명제의 부정을 구할 수 있다.	40 %
② k 의 최댓값을 구할 수 있다.	60 %

029 $f(x)=x^2-8x+n$ 이라 하면 $3 \leq x \leq 6$ 인 어떤 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이어야 하므로 $3 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 0 이상이어야 한다.

$$f(x)=x^2-8x+n=(x-4)^2+n-16 \text{이고}$$

$$f(3)=n-15, f(4)=n-16, f(6)=n-12$$

이므로 $3 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=6$ 일 때 최댓값 $n-12$ 를 갖는다.

따라서 $n-12 \geq 0$ 이어야 하므로 $n \geq 12$

즉 자연수 n 의 최솟값은 12 이다.

답 12

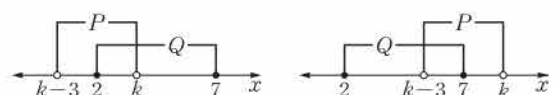
030 두 조건 p, q 를

$$p: k-3 < x < k, q: 2 \leq x \leq 7$$

이라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x|k-3 < x < k\}, Q = \{x|2 \leq x \leq 7\}$$

주어진 명제가 참이 되려면 $P \cap Q \neq \emptyset$ 이어야 하므로 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $k > 2, k-3 < 7$ 이어야 하므로

$$2 < k < 10$$

답 $2 < k < 10$

031 ① 역: $x=2$ 이면 $x^2=4$ 이다. (참)

② 역: $x<3$ 이면 $5-2x<0$ 이다.

[반례] $x=\frac{5}{2}$ 이면 $x<3$ 이지만 $5-2x=0$ 이다.

③ 역: x, y 가 모두 짝수이면 $x+y$ 는 짝수이다. (참)

④ 역: $x>0, y<0$ 이면 $xy<0$ 이다. (참)

⑤ 역: $x^2+y^2=0$ 이면 $x=0, y=0$ 이다. (참)

답 ②

032 명제 $q \rightarrow p$ 의 역 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우

$\sim q \rightarrow \sim p$ 도 항상 참이다.

답 ⑤

033 $\neg$. 명제: [반례] $a=1+\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$ 이면 $a+b=1$ 은 유리수이지만 a, b 는 유리수가 아니다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

ㄴ. 대우: $a<1$ 이고 $b<1$ 이면 $a+b<2$ 이다. (참)

ㄷ. 대우: $a>2$ 이면 $a>3$ 이다.

[반례] $a=2.5$ 이면 $a>2$ 이지만 $a<3$ 이다.

이상에서 대우가 거짓인 명제인 것은 $\neg, \vdash$ 이다. 답 $\neg, \vdash$

034 ① 역: $a-b>0$ 이면 $a<b$ 이다.

[반례] $a=2, b=1$ 이면 $a-b>0$ 이지만 $a>b$ 이다.

명제: [반례] $a=1, b=2$ 이면 $a<b$ 이지만 $a-b<0$ 이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

② 역: $x^2-x=0$ 이면 $x=1$ 이다.

[반례] $x=0$ 이면 $x^2-x=0$ 이지만 $x \neq 1$ 이다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

③ 역: $ab=0$ 이면 $a=0$ 이다.

[반례] $a=1, b=0$ 이면 $ab=0$ 이지만 $a \neq 0$ 이다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

④ 역: $a+c=b+c$ 이면 $a=b$ 이다. (참)

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

⑤ 역: x 가 10의 약수이면 x 는 20의 약수이다. (참)

명제: [반례] $x=20$ 이면 x 는 20의 약수이지만 10의 약수는 아니다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

따라서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ④이다. 답 ④

035 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P=\{x|a-5<x<a+5\}, Q=\{x|-b<x<3b\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 의 역 $q \rightarrow p$ 가 참이므로

$$Q \subset P$$

또 명제 $p \rightarrow q$ 의 대우가 참이면 명제 $p \rightarrow q$ 도 참이므로

$$P \subset Q$$

따라서 $P=Q$ 이므로

$$a-5=-b, a+5=3b$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{5}{2}, b=\frac{5}{2}$$

$$\therefore ab=\frac{25}{4}$$

답 $\frac{25}{4}$

036 주어진 명제가 참이므로 그 대우

$$'a<-2 \text{이고 } b<k \text{이면 } a+b<-5 \text{이다.}'$$

도 참이다.

$$a<-2, b<k \text{에서 } a+b<k-2 \text{이므로}$$

$$k-2 \leq -5 \quad \therefore k \leq -3$$

따라서 k 의 최댓값은 -3 이다.

답 -3

037 주어진 명제가 참이므로 그 대우

$$'x+6=0 \text{이면 } x^2+kx-6=0 \text{이다.}'$$

도 참이다.

$x+6=0$ 에서 $x=-6$ 이므로 이것을 $x^2+kx-6=0$ 에 대입하면

$$36-6k-6=0, \quad 6k=30 \quad \therefore k=5 \quad \text{답 ⑤}$$

038 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면 그 대우 $q \rightarrow p$ 가 참이 되어야 한다. $\rightarrow$ ①

$$|x-5|<1 \text{에서} \quad -1<x-5<1$$

$$\therefore 4<x<6$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

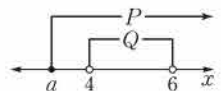
$$P=\{x|x \geq a\}, Q=\{x|4<x<6\}$$

명제 $q \rightarrow p$ 가 참이 되려면 $Q \subset P$ 이

여야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a \leq 4$$

$\rightarrow$ ③



$$\text{답 } a \leq 4$$

채점 기준	비율
① 주어진 명제의 대우가 참이 되어야 함을 알 수 있다.	10 %
② 두 조건 p, q 의 진리집합을 구할 수 있다.	50 %
③ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

다른 풀이 $\sim p: x < a$

$$\sim q: |x-5| \geq 1 \text{이므로} \quad x-5 \leq -1 \text{ 또는 } x-5 \geq 1$$

$$\therefore x \leq 4 \text{ 또는 } x \geq 6$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

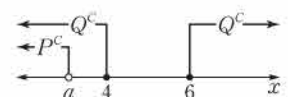
$$P^c=\{x|x < a\},$$

$$Q^c=\{x|x \leq 4 \text{ 또는 } x \geq 6\}$$

명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면

$P^c \subset Q^c$ 이어야 하므로 오른쪽 그

림에서 $a \leq 4$



039 두 명제 $p \rightarrow q, r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참이므로 각각의 대우

$\sim q \rightarrow \sim p, q \rightarrow \sim r$ 도 모두 참이다.

또 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 모두 참이므로 명제

$p \rightarrow \sim r$ 가 참이고, 그 대우 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $q \rightarrow r$ 이다.

답 ②

040 $\neg$. 두 명제 $p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 가 모두 참이므로 명제

$p \rightarrow \sim r$ 가 참이다. $\neg$ $r \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우

$\sim q \rightarrow \sim r$ 도 참이다.

ㄴ. 두 명제 $q \rightarrow \sim p, \sim p \rightarrow s$ 가 모두 참이므로 명제

$q \rightarrow s$ 가 참이다. $\neg$ $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

ㄷ. $\neg$ 에서 명제 $p \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 그 대우 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다. 이때 명제 $\sim p \rightarrow s$ 가 참이므로 명제 $r \rightarrow s$ 는 참이지만 명제 $r \rightarrow \sim s$ 의 참, 거짓은 추론할 수 없다.
이상에서 항상 참인 명제인 것은 $\neg$, $\neg$ 이다. **답 ③**

041 명제 $\sim s \rightarrow r$ 가 참이므로 그 대우 $\sim r \rightarrow s$ 도 참이다. 두 명제 $p \rightarrow q$, $\sim r \rightarrow s$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow s$ 가 참이면 명제 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이어야 한다.
따라서 명제 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이면 그 대우 $r \rightarrow \sim q$ 도 참이므로 명제 $p \rightarrow s$ 가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 $r \rightarrow \sim q$ 이다. **답 ④**

042 세 조건 p, q, r 를
 p : 사과를 좋아한다.
 q : 배를 좋아한다.
 r : 수박을 좋아한다.

라 하면 두 명제 $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ 가 모두 참이므로 명제 $p \rightarrow r$ 가 참이고, 그 대우 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ③이다. **답 ③**

참고 주어진 명제를 p, q, r 로 나타내면 다음과 같다.

- ① $p \rightarrow \sim r$ ② $q \rightarrow p$ ③ $\sim r \rightarrow \sim p$
④ $r \rightarrow q$ ⑤ $q \rightarrow \sim r$

043 (i) C가 1반일 때,
(라)에 의하여 A가 1반이므로 (바)에 의하여 B도 1반이다.
즉 A, B, C 모두 1반이므로 (나)에 모순이다. **→ ①**
(ii) C가 2반일 때,
(가), (바)에 의하여 A, B가 모두 1반이거나 2반이다.
이때 A, B, C 모두 2반이면 (나)에 모순이므로 A, B는 모두 1반이다. **→ ②**
(i), (ii)에서 1반인 학생은 A, B이다. **→ ③**
답 A, B

채점 기준	비율
① C가 1반일 때, 모순임을 알 수 있다.	40 %
② C가 2반일 때, A, B의 반을 알 수 있다.	50 %
③ 1반인 학생을 모두 고를 수 있다.	10 %

다른 풀이 (i) A, B가 모두 1반일 때,

(가), (바)에 의하여 C는 2반이다.
(ii) A, B가 모두 2반일 때,
(가), (바)에 의하여 C는 1반이다. 이때 (라)의 대우에 모순이다.
(i), (ii)에서 1반인 학생은 A, B이다. ⌊ A가 1반이 아니면 C도 1반이 아니다. 즉 A가 2반이면 C도 2반이다.

044 A와 B는 영재가 가방을 잃어버린 것에 대해 반대되는 말을 하였으므로 한 사람은 진실, 한 사람은 거짓을 말하였다.
이때 진실을 말한 사람은 단 한 명이므로 C는 거짓을 말하였다.
따라서 진실을 말한 사람은 A이고, 영재는 도서관에서 가방을 잃어버렸다. **답 A, 도서관**

045 ① $xy=0$ 이면 $x=0$ 또는 $y=0$ 이고, $|x|+|y|=0$ 이면 $x=0, y=0$ 이므로 $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이다.
따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

② $z>0$ 이므로 $x>y \Leftrightarrow \frac{x}{z}>\frac{y}{z}$, 즉 $p \Leftrightarrow q$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

③ $x^2=1$ 이면 $x=-1$ 또는 $x=1$ 이므로 $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

④ 모든 정수는 유리수이므로 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ $x-y<0 \Leftrightarrow x<y$, 즉 $p \Leftrightarrow q$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다. **답 ④**

046 ① $x-y=0$, 즉 $x=y$ 이면 $|x|=|y|$ 이므로 $p \Rightarrow q$
 $x=-1, y=1$ 이면 $|x|=|y|$ 이지만 $x-y \neq 0$ 이다.

$\therefore q \not\Rightarrow p$

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② $x \leq 0, y \leq 0$ 이면 $xy \geq 0$ 이므로 $p \Rightarrow q$

$x=1, y=1$ 이면 $xy \geq 0$ 이지만 $x > 0, y > 0$ 이다.

$\therefore q \not\Rightarrow p$

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

③ $p: x^2=y^2 \Leftrightarrow q: |x|=|y|$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ $x=0, y=1$ 이면 $x^2+y^2 > 0$ 이지만 $x=0$ 이다.

$\therefore p \not\Rightarrow q$

$x \neq 0, y \neq 0$ 이면 $x^2+y^2 > 0$ 이므로 $q \Rightarrow p$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

⑤ $x=4$ 이면 $x < 5$ 이지만 $x > 3$ 이다.

$\therefore p \not\Rightarrow q$

$x < 3$ 이면 $x < 5$ 이므로 $q \Rightarrow p$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다. **답 ③**

047 $\neg, a=b=c$ 이면

$$(a-b)(b-c)(c-a)=0$$

이므로 $p \Rightarrow q$

$$(a-b)(b-c)(c-a)=0 \text{ 이면}$$

$$a=b \text{ 또는 } b=c \text{ 또는 } c=a \quad \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} a-b=0 \text{ 또는 } b-c=0 \\ \text{또는 } c-a=0 \end{matrix}$$

이므로 $q \not\Rightarrow p$

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $a=1, b=2, c=0$ 이면 $a>c$ 이지만 $a<b$ 이다.

$\therefore p \not\Rightarrow q$

$a>b, b>c$ 이면 $a>b>c$ 이므로

$$q \Rightarrow p$$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $a=-3, b=-3$ 이면 $ab>6$ 이지만 $a<2, b<3$ 이다.

$\therefore p \not\Rightarrow q$

$a > 2, b > 3$ 이면 $ab > 6$ 이므로

$$q \Rightarrow p$$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

이상에서 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 $\neg, \supset$ 이다. 답 ⑤

048 $p: a^2 + b^2 = 0$ 에서 $a = 0, b = 0$

$q: a^2 - ab = 0$ 에서 $a(a - b) = 0$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = b$$

$r: a^3 = b^3$ 에서 $a = b$

$\neg. p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

$\neg. q \not\Rightarrow r, r \Rightarrow q$ 이므로 q 는 r 이기 위한 필요조건이다.

$\supset. p$ 이고 $r: a = b = 0$

따라서 $(p \text{이고 } r) \Rightarrow q, q \not\Rightarrow (p \text{이고 } r)$ 이므로 p 이고 r 는 q 이기 위한 충분조건이다.

이상에서 옳은 것은 $\neg, \supset$ 이다. 답 $\neg, \supset$

049 ① $q \Rightarrow r, r \Rightarrow p$ 이므로 $q \Rightarrow p$

④ $r \Rightarrow p$ 이므로 $\sim p \Rightarrow \sim r$

답 ⑤

050 $\neg. r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

$\neg. q \Rightarrow \sim p$ 이므로 $p \Rightarrow \sim q$

따라서 p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

$\supset. r \Rightarrow p$ 이므로 $\sim p \Rightarrow \sim r$

$q \Rightarrow \sim p, \sim p \Rightarrow \sim r$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$

따라서 q 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다.

이상에서 $\neg, \supset, \supset$ 모두 옳다. 답 ⑤

051 p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset R$

r 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $R \subset Q$

따라서 $P \subset R \subset Q$ 이므로 항상 옳은 것은 ③이다. 답 ③

052 ① $R \not\subset P$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이 아니다.

② $P \subset R^c$ 이므로 p 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다.

③ $P \subset Q$ 이므로 q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

④ $P^c \neq Q$ 이므로 $\sim p$ 는 q 이기 위한 필요충분조건이 아니다.

⑤ $Q^c \subset P^c$ 이므로 $\sim q$ 는 $\sim p$ 이기 위한 충분조건이다. 답 ②

053 $\sim q$ 는 p 이기 위한 필요조건이므로

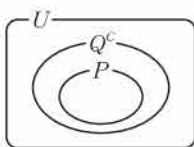
$$P \subset Q^c$$

따라서 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\neg. P - Q = P \cap Q^c = P$$

$$\supset. P \cup Q \neq U$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \supset$ 이다. 답 $\neg, \supset$

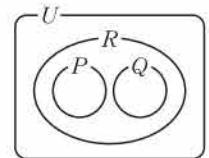


054 $(P \cup Q) - R = \emptyset$ 이므로 $(P \cup Q) \subset R$

$Q - P^c = \emptyset$ 이므로

$$P \cap Q = \emptyset \quad Q - P^c = Q \cap (P^c)^c = P \cap Q$$

따라서 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $P \not\subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이 아니다.

② $P \subset R$ 이므로 p 는 r 이기 위한 충분조건이다.

③ $Q \subset R$ 이므로 r 는 q 이기 위한 필요조건이다.

④ $Q \subset P^c$ 이므로 q 는 $\sim p$ 이기 위한 충분조건이다.

⑤ $R \neq Q^c$ 이므로 r 는 $\sim q$ 이기 위한 필요충분조건이 아니다. 답 ④

055 $|x - k| \leq 3$ 에서

$$-3 \leq x - k \leq 3$$

$$\therefore k - 3 \leq x \leq k + 3$$

또 $x - 8 < 2(5 - x)$ 에서

$$x - 8 < 10 - 2x$$

$$3x < 18 \quad \therefore x < 6$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | k - 3 \leq x \leq k + 3\}, Q = \{x | x < 6\}$$

p 가 q 이기 위한 충분조건이 되려면

$P \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

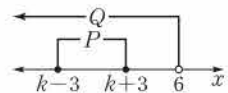
$$k + 3 < 6$$

$$\therefore k < 3$$

따라서 자연수 k 는 1, 2이므로 구하는 합은

$$1 + 2 = 3$$

답 3



056 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되려면 명제

' $3x^2 + x - a \neq 0$ 이면 $3x - 2 \neq 0$ 이다.'가 참이어야 하고, 이 명제의 대우 ' $3x - 2 = 0$ 이면 $3x^2 + x - a = 0$ 이다.'도 참이어야 한다. → ①

$3x - 2 = 0$ 에서 $x = \frac{2}{3}$ 이므로 $x = \frac{2}{3}$ 를 $3x^2 + x - a = 0$ 에 대입하면

$$3 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} - a = 0, \quad 2 - a = 0$$

$$\therefore a = 2$$

→ ②

답 2

채점 기준	비율
① p 가 q 이기 위한 필요조건임을 이용하여 참인 명제를 찾을 수 있다.	50 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	50 %

057 $7x + 2 = 5x + 3$ 에서

$$2x = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

이때 $7x + 2 = 5x + 3$ 은 $4x^2 - ax + b = 0$ 이기 위한 필요충분조건

이므로 이차방정식 $4x^2 - ax + b = 0$ 의 해는 $x = \frac{1}{2}$ 뿐이다.

중근 $x = \frac{1}{2}$ 을 갖고 x^2 의 계수가 4인 이차방정식은

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \therefore 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

따라서 $a=4, b=1$ 이므로 $a-b=3$

답 ⑤

058 q 는 p 이기 위한 충분조건이므로

$$Q \subset P$$

..... ㉠

또 r 는 q 이기 위한 필요조건이므로

$$Q \subset R$$

..... ㉡

㉠에서 $-3 \in P$ 이므로

$$a^2 - 4 = -3 \text{ 또는 } b + 2 = -3$$

(i) $a^2 - 4 = -3$ 일 때, 즉 $a = \pm 1$ 일 때,

$$P = \{-3, b+2\}, R = \{0, b-5\}$$

$$\text{또는 } P = \{-3, b+2\}, R = \{-2, b-5\}$$

㉡에서 $-3 \in R$ 이므로

$$b - 5 = -3 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 3 \text{ 또는 } a + b = 1$$

(ii) $b + 2 = -3$ 일 때, 즉 $b = -5$ 일 때,

$$P = \{a^2 - 4, -3\}, R = \{a - 1, -10\}$$

㉡에서 $-3 \in R$ 이므로

$$a - 1 = -3 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore a + b = -7$$

(i), (ii)에서 $a+b$ 의 최솟값은 -7 이다.

답 ①

다른 풀이 ㉡에서 $-3 \in R$ 이므로

$$a - 1 = -3 \text{ 또는 } b - 5 = -3$$

(i) $a - 1 = -3$ 일 때, 즉 $a = -2$ 일 때,

$$P = \{0, b+2\}, R = \{-3, b-5\}$$

㉠에서 $-3 \in P$ 이므로

$$b + 2 = -3 \quad \therefore b = -5$$

$$\therefore a + b = -7$$

(ii) $b - 5 = -3$ 일 때, 즉 $b = 2$ 일 때,

$$P = \{a^2 - 4, 4\}, R = \{a - 1, -3\}$$

㉠에서 $-3 \in P$ 이므로

$$a^2 - 4 = -3 \quad \therefore a = \pm 1$$

$$\therefore a + b = 3 \text{ 또는 } a + b = 1$$

059 $\sim p: x \geq a$

$\sim r: (x-b)(x-b-2) < 0$ 이므로 $b < x < b+2$

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P^c = \{x | x \geq a\},$$

$$Q = \{x | -4 < x < 0 \text{ 또는 } x \geq 2\},$$

$$R^c = \{x | b < x < b+2\}$$

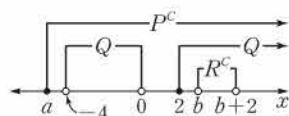
이때 q 는 $\sim p$ 이기 위한 충분조건이고 q 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건
이므로

$$Q \subset P^c, R^c \subset Q \quad \therefore R^c \subset Q \subset P^c$$

오른쪽 그림에서 $a \leq -4, b \geq 2$

이므로

$$a \leq -4, -b \leq -2$$



$$\therefore a - b \leq -6$$

따라서 $a-b$ 의 최댓값은 -6 이다.

답 -6

$$\begin{aligned} 060 \quad (A \cup B) - (A - B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B^c)^c \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup B \\ &= \emptyset \cup B = B \end{aligned}$$

따라서 $B = A \cap B$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 $B \subset A$ 이다.

답 ②

$$061 \quad \neg, (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \text{이면}$$

$$A - B = \emptyset, B - A = \emptyset$$

$$\text{즉 } A \subset B, B \subset A \text{ 이므로 } A = B$$

따라서 $p \iff q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

$$\neg, B - A^c = B \cap A \text{ 이므로}$$

$$A \cap B = B \quad \therefore B \subset A$$

$$A \cup B = A \text{ 이면 } B \subset A$$

따라서 $p \iff q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

$$\neg, (A \cup B) \cap C = C \text{ 이면 } C \subset (A \cup B)$$

$$A \cap B = C \text{ 이면 } C \subset (A \cap B)$$

따라서 $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이
다.

이상에서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ④

062 주어진 명제의 대우는 ' n 이 홀수'이면 n^2 도 홀수이다.'이다.
 $n = 2k - 1$ (k 는 자연수)이라 하면

$$n^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 - 2k) + 1 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 k 가 자연수이므로 $2k^2 - 2k$ 는 0 또는 자연수이다.

따라서 ㉠에서 n^2 은 홀수이다.

$$\therefore \text{(가) 홀수 (나) } 4k^2 - 4k + 1 \text{ (다) } 2k^2 - 2k \text{ (라) } 0 \text{ (마) } n^2$$

답 ③

063 ' x, y 중 적어도 하나는 양수이다.'는 ' $x > 0$ 또는 $y > 0$ 이
다.'와 같다.

즉 주어진 명제는

$$'x + y > 0 \text{ 이면 } x > 0 \text{ 또는 } y > 0 \text{ 이다.}'$$

이므로 그 대우는

$$'x \leq 0 \text{ 이고 } y \leq 0 \text{ 이면 } x + y \leq 0 \text{ 이다.}'$$

이때 위의 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

064 (1) 주어진 명제의 대우는

$$'a, b \text{ 가 모두 유리수이면 } ab \text{ 도 유리수이다.}'$$

... ①

(2) $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}$ (m, n, p, q 는 정수, $n \neq 0, q \neq 0$)라 하면

$$ab = \frac{mp}{nq}$$

이때 m, n, p, q 가 정수이고 $n \neq 0, q \neq 0$ 이므로 mp, nq 도 정수이고 $nq \neq 0$ 이다. 즉 ab 도 유리수이다. $\cdots$ ②
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. $\cdots$ ③

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① 주어진 명제의 대우를 말할 수 있다.	30 %
② 주어진 명제의 대우가 참임을 보일 수 있다.	50 %
③ 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

065 $\sqrt{3}$ 이 유리수라고 가정하면

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \quad (a, b \text{는 서로소인 자연수})$$

로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 = 3b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 a^2 이 3의 배수이므로 a 도 3의 배수이다.

$a = 3k$ (k 는 자연수)로 놓으면 $\textcircled{1}$ 에서

$$9k^2 = 3b^2 \quad \therefore b^2 = 3k^2$$

따라서 b^2 이 3의 배수이므로 b 도 3의 배수이다.

이것은 a, b 가 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{3}$ 은 무리수이다.

$\therefore$ (가) 유리수 (나) 서로소 (다) 3의 배수 $\text{답 } \textcircled{2}$

066 $a^2 + b^2 = 0$ 일 때, $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이라 가정하자.

(i) $a \neq 0, b = 0$ 이면 $a^2 > 0, b^2 = 0$ 이므로 $a^2 + b^2 > 0$

(ii) $a = 0, b \neq 0$ 이면 $a^2 = 0, b^2 > 0$ 이므로 $a^2 + b^2 > 0$

(iii) $a \neq 0, b \neq 0$ 이면 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 $a^2 + b^2 > 0$

이상에서 $a^2 + b^2 > 0$, 즉 $a^2 + b^2 \neq 0$ 이므로 $a^2 + b^2 = 0$ 임에 모순이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

답 풀이 참조

067 이차방정식 $ax^2 + ax - b = 0$, 즉 $a(x^2 + x) = b$ 가 자연수인 해 $x = k$ 를 갖는다고 가정하면 $a(k^2 + k) = b$ 이다. $\cdots$ ①

(i) $k = 2n - 1$ (n 은 자연수)일 때,

$$2a(2n^2 - n) = b$$

위의 등식에서 좌변은 짝수이고, 우변은 홀수이므로 모순이다.

(ii) $k = 2n$ (n 은 자연수)일 때,

$$2a(2n^2 + n) = b$$

위의 등식에서 좌변은 짝수이고, 우변은 홀수이므로 모순이다. $\cdots$ ②

(i), (ii)에서 b 가 홀수이면 이차방정식 $ax^2 + ax - b = 0$ 은 자연수인 해를 갖지 않는다. $\cdots$ ③

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① 결론의 부정을 구할 수 있다.	20 %
② 가정에 모순이 생김을 보일 수 있다.	60 %
③ 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

$$\begin{aligned} 068 \quad (\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &= (a-b) - (a - 2\sqrt{ab} + b) \\ &= 2\sqrt{ab} - 2b \\ &= 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \end{aligned}$$

$a > b > 0$ 이므로 $\sqrt{b} > 0, \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$

즉 $2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) > 0$ 이므로

$$(\sqrt{a-b})^2 > (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

이때 $\sqrt{a-b} > 0, \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$ 이므로

$$\sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\therefore \text{(가)} 2\sqrt{ab} \quad \text{(나)} \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad \text{답 } \textcircled{2} \quad \text{(다)} 2\sqrt{ab} \quad \text{(라)} \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$069 \quad \neg, x = -4 \text{이면 } x^2 + 16 = -8x$$

따라서 $x^2 + 16 > -8x$ 는 절대부등식이 아니다.

$$\neg, x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

x 가 실수이므로 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ 에서

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

즉 $x^2 - x + 1 > 0$ 이므로 $x - 1 < x^2$

$$\begin{aligned} \neg, x^2 + 2y^2 - 2xy &= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 \\ &= (x-y)^2 + y^2 \end{aligned}$$

x, y 가 실수이므로 $(x-y)^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ 에서

$$(x-y)^2 + y^2 \geq 0$$

$\therefore x^2 + 2y^2 \geq 2xy$ (단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

이상에서 절대부등식인 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ④

$$\begin{aligned} 070 \quad A - B &= a(3a + 2b) - (2a + b)^2 \\ &= 3a^2 + 2ab - (4a^2 + 4ab + b^2) \\ &= -a^2 - 2ab - b^2 \\ &= -(a+b)^2 \end{aligned}$$

a, b 가 실수이므로 $(a+b)^2 \geq 0$ 에서

$$-(a+b)^2 \leq 0$$

$\therefore A \leq B$ (단, 등호는 $a = -b$ 일 때 성립)

답 ④

$$\begin{aligned} 071 \quad (a^2 + b^2 + 4) - (ab + 2a + 2b) &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 - 2ab - 4a - 4b + 8) \\ &= \frac{1}{2}\{(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 4a + 4) + (b^2 - 4b + 4)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (a-2)^2 + (b-2)^2\} \end{aligned}$$

a, b 가 실수이므로 $(a-b)^2 \geq 0, (a-2)^2 \geq 0, (b-2)^2 \geq 0$ 에서

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (a-2)^2 + (b-2)^2\} \geq 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2a + 2b \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 등호는 $a-b=0, a-2=0, b-2=0$, 즉 $a=b=2$ 일 때 성립한다. $\cdots$ ②

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2a + 2b$ 임을 증명할 수 있다.	70 %
② 등호가 성립하는 경우를 구할 수 있다.	30 %

- 072** (i) $|a| \geq |b|$ 일 때,
 $|a-b|^2 - (|a| - |b|)^2$
 $= (a-b)^2 - (|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2)$
 $= (a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 - 2|ab| + b^2)$
 $= 2(|ab| - ab) \geq 0$ ($\because |ab| \geq ab$)
 $\therefore |a-b|^2 \geq (|a| - |b|)^2$ 모든 실수 A에 대하여 $|A| \geq A$
 그런데 $|a-b| \geq 0, |a| - |b| \geq 0$ 이므로
 $|a-b| \geq |a| - |b|$
 (ii) $|a| < |b|$ 일 때,
 $|a-b| > 0, |a| - |b| < 0$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.
 (i), (ii)에서
 $|a-b| \geq |a| - |b|$
 (단, 등호는 $|ab| = ab$, 즉 $ab \geq 0$ 일 때 성립)
 $\therefore$ (㉞) $|ab| - ab$ (㉝) $ab \geq 0$

답 ②

- 073** $\neg. (|a| + |b|)^2 - |a+b|^2$
 $= (|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2) - (a+b)^2$
 $= (a^2 + 2|ab| + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2)$
 $= 2(|ab| - ab) \geq 0$ ($\because |ab| \geq ab$)
 $\therefore (|a| + |b|)^2 \geq |a+b|^2$
 그런데 $|a| + |b| \geq 0, |a+b| \geq 0$ 이므로
 $|a| + |b| \geq |a+b|$
 (단, 등호는 $|ab| = ab$, 즉 $ab \geq 0$ 일 때 성립)
 $\therefore a=1, b=-1$ 이면
 $|2a+b| = 1, |a-2b| = 3$ $|2a+b|^2 - |a-2b|^2$ 의 부호는 알 수 없으므로 ㉞과 같은 방법으로 증명하기 어렵다.
 $\therefore |2a+b| < |a-2b|$
 $\therefore (\sqrt{a^2+b^2})^2 - (|a| + |b|)^2$
 $= (a^2 + b^2) - (|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2)$
 $= a^2 + b^2 - (a^2 + 2|ab| + b^2)$
 $= -2|ab| \leq 0$
 $\therefore (\sqrt{a^2+b^2})^2 \leq (|a| + |b|)^2$
 그런데 $\sqrt{a^2+b^2} \geq 0, |a| + |b| \geq 0$ 이므로
 $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b|$ (단, 등호는 $ab=0$ 일 때 성립)
 이상에서 옳은 것은 ㉞, ㉝이다.

답 ㉞, ㉝

- 074** $x > 0, y > 0$ 에서 $xy > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $\left(x + \frac{12}{y}\right)\left(y + \frac{3}{x}\right) = xy + 3 + 12 + \frac{36}{xy}$
 $\geq 15 + 2\sqrt{xy \cdot \frac{36}{xy}}$
 $= 15 + 2 \cdot 6$ $xy > 0$ 이므로 $\frac{36}{xy} > 0$ 이다.
 $= 27$
 등호는 $xy = \frac{36}{xy}$ 일 때 성립하므로 $(xy)^2 = 36$ 에서
 $xy = 6$ ($\because xy > 0$)

- 따라서 $\left(x + \frac{12}{y}\right)\left(y + \frac{3}{x}\right)$ 은 $xy=6$ 일 때 최솟값 27을 가지므로
 $a=6, b=27$
 $\therefore a+b=33$

답 33

예제 B

$x + \frac{12}{y} \geq 2\sqrt{\frac{12x}{y}}$... ㉠, $y + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{\frac{3y}{x}}$... ㉡
 ㉠, ㉡을 변끼리 곱하면
 $\left(x + \frac{12}{y}\right)\left(y + \frac{3}{x}\right) \geq 4\sqrt{\frac{12x}{y} \cdot \frac{3y}{x}} = 24$
 하지만 $\left(x + \frac{12}{y}\right)\left(y + \frac{3}{x}\right)$ 의 최솟값을 24라 하면 잘못된 풀이이다.
 ㉠에서 등호가 성립하는 것은 $x = \frac{12}{y}$ 일 때이고 ㉡에서 등호가 성립하는 것은 $y = \frac{3}{x}$ 일 때인데 ㉠, ㉡의 등호가 동시에 성립하도록 하는 양수 x, y 가 존재하지 않기 때문이다.

- 075** $a > 0$ 에서 $a^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{9}{a}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) &= a^2 + 1 + 9 + \frac{9}{a^2} \\ &\geq 10 + 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{9}{a^2}} \\ &= 10 + 2 \cdot 3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

등호는 $a^2 = \frac{9}{a^2}$ 일 때 성립하므로 $a^4 = 9$ 에서

$$\begin{aligned} a^2 &= 3 \quad (\because a^2 > 0) \\ \therefore a &= \sqrt{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

답 $\sqrt{3}$

- 076** $x > 0, y > 0, z > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{z}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{z}\right) &\geq 2\sqrt{1 \cdot \frac{y}{x}} \cdot 2\sqrt{1 \cdot \frac{z}{y}} \cdot 2\sqrt{1 \cdot \frac{x}{z}} \\ &= 8\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z}} \\ &= 8\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z}} \\ &= 8 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $x=y=z$ 일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다.

답 ⑤

참고 등호는 $1 = \frac{y}{x}, 1 = \frac{z}{y}, 1 = \frac{x}{z}$ 일 때 성립하므로

$$\begin{aligned} x &= y, y = z, x = z \\ \therefore x &= y = z \end{aligned}$$

예제 B

이 문제에서는 세 식 $1 + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{1 \cdot \frac{y}{x}}, 1 + \frac{z}{y} \geq 2\sqrt{1 \cdot \frac{z}{y}}, 1 + \frac{x}{z} \geq 2\sqrt{1 \cdot \frac{x}{z}}$ 의 등호가 동시에 성립하도록 하는 양수 x, y, z 가 존재하므로 074번과 다르게 위와 같이 풀 수 있다.

077 $a>0, b>0, c>0$ 에서 $\frac{2}{a(b+c)}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a}+2b+2c\right)\left(a+\frac{2}{b+c}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a}+2(b+c)\right)\left(a+\frac{2}{b+c}\right) \\ &= 1+\frac{2}{a(b+c)}+2a(b+c)+4 \\ &= 5+\frac{2}{a(b+c)}+2a(b+c) \quad \dots ① \\ &\geq 5+2\sqrt{\frac{2}{a(b+c)} \cdot 2a(b+c)} \\ &= 5+2 \cdot 2 \\ &= 9 \quad (\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{b+c} \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 9이다. 답 9

채점 기준	비율
① 주어진 식을 변형할 수 있다.	60 %
② 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

참고 등호는 $\frac{2}{a(b+c)}=2a(b+c)$ 일 때 성립하므로 $a^2=\frac{1}{(b+c)^2}$ 에서 $a=\frac{1}{b+c}$ ($\because a>0, \frac{1}{b+c}>0$)

078 $x>4$ 에서 $x-4>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 3x+\frac{3}{x-4} &= 3(x-4)+\frac{3}{x-4}+12 \\ &\geq 2\sqrt{3(x-4) \cdot \frac{3}{x-4}}+12 \\ &= 2 \cdot 3+12 \\ &= 18 \end{aligned}$$

등호는 $3(x-4)=\frac{3}{x-4}$ 일 때 성립하므로 $(x-4)^2=1$ 에서 $x-4=1$ ($\because x-4>0$) $\therefore x=5$

따라서 $3x+\frac{3}{x-4}$ 은 $x=5$ 일 때 최솟값 18을 가지므로 $m=18, n=5$
 $\therefore m-n=13$ 답 13

079 $x>0, y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 6x+5y+\frac{6}{x}+\frac{5}{y} &= \left(6x+\frac{6}{x}\right)+\left(5y+\frac{5}{y}\right) \\ &\geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{6}{x}}+2\sqrt{5y \cdot \frac{5}{y}} \\ &= 2 \cdot 6+2 \cdot 5 \\ &= 22 \quad (\text{단, 등호는 } x=y=1 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 22이다. 답 ④

참고 등호는 $6x=\frac{6}{x}, 5y=\frac{5}{y}$ 일 때 성립하므로 $x^2=y^2=1$ $\therefore x=y=1$ ($\because x>0, y>0$)

080 $\sqrt{x^2}=x, x \neq 0$ 에서 $x>0, x^2+4>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x+\frac{4}{x}+\frac{16x}{x^2+4} &= \frac{x^2+4}{x}+\frac{16x}{x^2+4} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x} \cdot \frac{16x}{x^2+4}} \\ &= 2 \cdot 4 \\ &= 8 \quad (\text{단, 등호는 } x=2 \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 $x+\frac{4}{x}+\frac{16x}{x^2+4}$ 의 최솟값은 8이다. 답 8

참고 등호는 $\frac{x^2+4}{x}=\frac{16x}{x^2+4}$ 일 때 성립하므로 $(x^2+4)^2=16x^2, x^4-8x^2+16=0$
 $(x^2-4)^2=0, x^2=4$
 $\therefore x=2$ ($\because x>0$)

081 $x=2a+\frac{1}{b}, y=2b+\frac{1}{a}$ 이고, $a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \left(2a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(2b+\frac{1}{a}\right)^2 \\ &= \left(4a^2+\frac{4a}{b}+\frac{1}{b^2}\right)+\left(4b^2+\frac{4b}{a}+\frac{1}{a^2}\right) \\ &= \left(4a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}\right)+\left(4b^2+\frac{1}{b^2}\right) \\ &\geq 2\sqrt{4a^2 \cdot \frac{1}{a^2}}+2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{4b}{a}}+2\sqrt{4b^2 \cdot \frac{1}{b^2}} \\ &= 2 \cdot 2+2 \cdot 4+2 \cdot 2=16 \end{aligned}$$

등호는 $4a^2=\frac{1}{a^2}, \frac{4a}{b}=\frac{4b}{a}, 4b^2=\frac{1}{b^2}$ 일 때 성립하므로

$$\begin{aligned} a^4 &= \frac{1}{4}, a^2=b^2, b^4=\frac{1}{4} \\ \therefore a=b &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because a>0, b>0) \end{aligned}$$

따라서 x^2+y^2 은 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 최솟값 16을 가지므로

$$\begin{aligned} \alpha &= 16, \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \alpha+\beta^2+\gamma^2 &= 16+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=17 \end{aligned}$$

다른 풀이 $x^2>0, y^2>0, a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} \quad \dots\dots ㉠ \\ &= 2xy \\ &= 2\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(2b+\frac{1}{a}\right) \\ &= 2\left(4ab+\frac{1}{ab}+4\right) \\ &\geq 2\left(2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{ab}}+4\right) \quad \dots\dots ㉡ \\ &= 2(2 \cdot 2+4)=16 \end{aligned}$$

㉠에서 등호는 $x=y$ 일 때, ㉡에서 등호는 $ab=\frac{1}{2}$ 일 때 성립한다.

$$\begin{aligned} x=y \text{에서} \quad 2a+\frac{1}{b} &= 2b+\frac{1}{a} \\ \frac{2ab+1}{b} &= \frac{2ab+1}{a} \quad \therefore a=b \end{aligned}$$

이때 $ab = \frac{1}{2}$ 이므로 등호는 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 성립한다.

082 $x>0, y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5x+2y \geq 2\sqrt{5x \cdot 2y} = 2\sqrt{10xy}$$

그런데 $5x+2y=20$ 이므로

$$20 \geq 2\sqrt{10xy}, \quad 10 \geq \sqrt{10xy}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $100 \geq 10xy$

$$\therefore xy \leq 10$$

이때 등호는 $5x=2y$ 일 때 성립하고 $5x+2y=20$ 이므로

$$5x=10, 2y=10 \quad \therefore x=2, y=5$$

따라서 xy 는 $x=2, y=5$ 일 때 최댓값 10을 가지므로

$$\alpha=10, \beta=2, \gamma=5$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=17$$

답 ④

083 $a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+4b \geq 2\sqrt{3a \cdot 4b} = 2\sqrt{12ab}$$

그런데 $ab=3$ 이므로

$$3a+4b \geq 2\sqrt{12 \cdot 3}$$

$$=12 \quad (\text{단, 등호는 } 3a=4b \text{일 때 성립})$$

따라서 $3a+4b$ 의 최솟값은 12이다.

답 12

다른 풀이 $ab=3$ 에서 $a>0$ 이므로 $b=\frac{3}{a}$

$$\therefore 3a+4b=3a+4 \cdot \frac{3}{a}=3a+\frac{12}{a}$$

$$\geq 2\sqrt{3a \cdot \frac{12}{a}}$$

$$=2 \cdot 6 \quad \left[\begin{array}{l} 3a=\frac{12}{a} \text{에서 } a^2=4 \\ \therefore a=2 (\because a>0) \end{array} \right]$$

$$=12 \quad (\text{단, 등호는 } a=2 \text{일 때 성립})$$

084 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{12}{ab}$ ㉠

한편 $a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

그런데 $a+b=12$ 이므로

$$12 \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립})$$

$6 \geq \sqrt{ab}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$36 \geq ab \quad \therefore \frac{12}{ab} \geq \frac{1}{3} \quad (\because ab>0)$$

따라서 ㉠에서 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

답 $\frac{1}{3}$

085 $x^2>0, y^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$25x^2+4y^2 \geq 2\sqrt{25x^2 \cdot 4y^2} = 20|xy|$$

..... ①

그런데 $25x^2+4y^2=30$ 이므로

$$30 \geq 20|xy|, \quad |xy| \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq xy < 0 \text{ 또는 } 0 < xy \leq \frac{3}{2} \quad \left[\begin{array}{l} 25x^2=4y^2 \text{에서} \\ (5x)^2=(2y)^2 \\ \therefore 5|x|=2|y| \end{array} \right]$$

(단, 등호는 $5|x|=2|y|$ 일 때 성립)

..... ②

따라서 xy 의 최댓값은 $\frac{3}{2}$, 최솟값은 $-\frac{3}{2}$ 이므로 구하는 곱은

$$\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

..... ③

$$\text{답 } -\frac{9}{4}$$

채점 기준	비율
① 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	50 %
② xy 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
③ xy 의 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

086 두 직선 $y=\frac{2}{a}x-4, y=\frac{b}{3}x+2$ 가 평행하므로

$$\frac{2}{a} = \frac{b}{3} \quad \therefore ab=6$$

$$\therefore (a+3)(b+2) = ab+2a+3b+6 = 12+2a+3b$$

$a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$12+2a+3b \geq 12+2\sqrt{6ab}$$

그런데 $ab=6$ 이므로

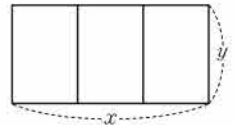
$$12+2a+3b \geq 12+2\sqrt{6 \cdot 6} = 24$$

(단, 등호는 $2a=3b$ 일 때 성립)

따라서 $(a+3)(b+2)$ 의 최솟값은 24이다.

답 24

087 오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라 하면 구역의 전체 넓이는



xy

줄의 전체 길이가 32이므로

$$2x+4y=32 \quad \therefore x+2y=16$$

$x>0, y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+2y \geq 2\sqrt{x \cdot 2y} = 2\sqrt{2xy}$$

그런데 $x+2y=16$ 이므로

$$16 \geq 2\sqrt{2xy} \quad (\text{단, 등호는 } x=2y \text{일 때 성립})$$

$$8 \geq \sqrt{2xy} \text{이므로 양변을 제곱하면 } 64 \geq 2xy \quad \therefore xy \leq 32$$

따라서 구역의 전체 넓이의 최댓값은 32이다.

답 32

다른 풀이 $x+2y=16$ 에서 $y=8-\frac{1}{2}x$ 이므로 구역의 전체 넓이를 S 라 하면

$$S = x\left(8-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}(x-8)^2+32 \quad (0 < x < 16)$$

따라서 구역의 전체 넓이 S 의 최댓값은 32이다.

088 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=x,$

$\overline{BO}=y$ 라 하면 직사각형의 넓이는

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = x \cdot 2y = 2xy$$

한편 직사각삼각형 ABO에서

$$x^2+y^2=36$$

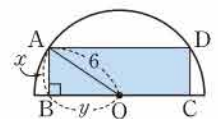
..... ①

$x^2>0, y^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy$$

등호는 $x^2=y^2$, 즉 $x=y$ 일 때 성립하고 이때 직사각형의 넓이가 최대가 되므로 ①에서

$$x^2=y^2=18 \quad \therefore x=y=3\sqrt{2}$$



따라서 직사각형의 넓이가 최대일 때 둘레의 길이는

$$2(x+2y)=2(3\sqrt{2}+2\cdot 3\sqrt{2})=18\sqrt{2} \quad \text{답 ①}$$

089 상자의 밑면의 세로의 길이와 높이를 각각 x m, y m라 하면 상자를 만드는 비용은

$$2\cdot 1\cdot x + \frac{1}{2}\cdot 2(1+x)y = 2x + y + xy$$

에 비례한다.

또 상자의 부피가 8m^3 이므로

$$xy=8 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 $x>0, y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x+y+xy \geq 2\sqrt{2x\cdot y} + xy \\ = 2\sqrt{2\cdot 8} + 8 = 16$$

등호는 $2x=y$ 일 때 성립하고 이때 비용이 최소가 되므로 ㉠에 $y=2x$ 를 대입하면

$$x\cdot 2x=8, \quad x^2=4 \quad \therefore x=2 (\because x>0)$$

따라서 비용이 최소일 때 상자의 높이는

$$y=2x=2\cdot 2=4 \text{ (m)} \quad \text{답 4 m}$$

090 직선 OP의 기울기는 $\frac{ab}{b^2} = \frac{a}{b}$ 이므로 점 P를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$$y-ab = -\frac{b}{a}(x-b^2) \quad \therefore y = -\frac{b}{a}x + \frac{b^3}{a} + ab$$

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = -\frac{b}{a}x + \frac{b^3}{a} + ab \quad \therefore x = a^2 + b^2$$

즉 $Q(a^2+b^2, 0)$ 이므로 $\triangle OQR$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot (a^2+b^2) \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

$a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \quad \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \text{에서 } a^2=b^2 \\ \therefore a=b (\because a>0, b>0) \end{array} \right] \\ = 1 \text{ (단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립)}$$

따라서 $\triangle OQR$ 의 넓이의 최솟값은 1이다. 답 1

091 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=100$ 이므로

$$25\cdot 100 \geq (3x+4y)^2, \quad 2500 \geq (3x+4y)^2 \\ \therefore -50 \leq 3x+4y \leq 50$$

등호는 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$, 즉 $y = \frac{4}{3}x$ 일 때 성립하므로 $y = \frac{4}{3}x$ 를

$x^2+y^2=100$ 에 대입하면

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 100, \quad x^2 = 36$$

$$\therefore x = \pm 6, y = \pm 8 \text{ (복호동순)}$$

따라서 $3x+4y$ 는 $x=6, y=8$ 일 때 최댓값 50을 가지므로

$$\alpha=50, \beta=6, \gamma=8$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=64 \quad \text{답 64}$$

092 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (2x+3y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=26$ 이므로

$$13\cdot 26 \geq (2x+3y)^2$$

$$\therefore -13\sqrt{2} \leq 2x+3y \leq 13\sqrt{2} \text{ (단, 등호는 } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \text{일 때 성립)}$$

따라서 $M=13\sqrt{2}, m=-13\sqrt{2}$ 이므로

$$M-m=26\sqrt{2} \quad \text{답 ④}$$

093 x, y, z 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\{1^2+(-1)^2+2^2\}(x^2+y^2+z^2) \geq (x-y+2z)^2$$

그런데 $x^2+y^2+z^2=4$ 이므로

$$6\cdot 4 \geq (x-y+2z)^2, \quad 24 \geq (x-y+2z)^2$$

$$\therefore -2\sqrt{6} \leq x-y+2z \leq 2\sqrt{6}$$

$$\text{(단, 등호는 } x=-y=\frac{z}{2} \text{일 때 성립)}$$

따라서 $x-y+2z$ 의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

094 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(2^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (2x+y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=a$ 이므로

$$5a \geq (2x+y)^2$$

$$\therefore -\sqrt{5a} \leq 2x+y \leq \sqrt{5a} \text{ (단, 등호는 } \frac{x}{2} = y \text{일 때 성립)}$$

→ ①

따라서 $2x+y$ 의 최댓값은 $\sqrt{5a}$, 최솟값은 $-\sqrt{5a}$ 이고 그 곱이 -20 이므로

$$-5a = -20 \quad \therefore a = 4 \quad \text{→ ②}$$

답 4

채점 기준	비율
① $2x+y$ 의 값의 범위를 a 를 이용하여 나타낼 수 있다.	60 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	40 %

095 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\} \{x^2 + (3\sqrt{3}y)^2\} \geq (x+3y)^2$$

그런데 $x^2+27y^2=108$ 이므로

$$144 \geq (x+3y)^2$$

이때 $x>0, y>0$ 이므로

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{1} = \frac{3\sqrt{3}y}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \text{에서 } x=9y \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right]$$

$$0 < x+3y \leq 12 \text{ (단, 등호는 } x=9y \text{일 때 성립)} \dots\dots \text{㉠}$$

또 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\} \{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3}y)^2\} \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

$$\therefore \frac{4}{3}(x+3y) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

$$\text{㉠에서 } 0 < \frac{4}{3}(x+3y) \leq 16 \text{이므로}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 16$$

이때 $x>0, y>0$ 이므로

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{3}y}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \text{에서 } \sqrt{x}=3\sqrt{y} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right] \therefore x=9y$$

$$0 < \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 4 \text{ (단, 등호는 } x=9y \text{일 때 성립)}$$

따라서 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 의 최댓값은 4이다. 답 4

096 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(5^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (5x+2y)^2$$

그런데 $5x+2y=29$ 이므로

$$29(x^2+y^2) \geq 29^2$$

$$\therefore x^2+y^2 \geq 29 \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{5} = \frac{y}{2} \text{ 일 때 성립} \right)$$

따라서 x^2+y^2 의 최솟값은 29이다. 답 ④

097 a, b 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left[\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] (a^2+b^2) \geq \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{4} \right)^2$$

그런데 $\frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{5}{3}$ 이므로

$$\frac{25}{9 \cdot 16} (a^2+b^2) \geq \frac{25}{9}$$

$$\therefore a^2+b^2 \geq 16 \quad \left(\text{단, 등호는 } 3a=4b \text{ 일 때 성립} \right)$$

따라서 a^2+b^2 의 최솟값은 16이다. 답 ③

098 (가) $x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+4y \geq 2\sqrt{x \cdot 4y} = 4\sqrt{xy}$$

그런데 $x+4y=\sqrt{17}$ 이므로 $\sqrt{17} \geq 4\sqrt{xy}$

$$\therefore \sqrt{xy} \leq \frac{\sqrt{17}}{4} \quad \left(\text{단, 등호는 } x=4y \text{ 일 때 성립} \right)$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

(나) x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (x+4y)^2$$

$$17(x^2+y^2) \geq (x+4y)^2$$

그런데 $x+4y=\sqrt{17}$ 이므로 $17(x^2+y^2) \geq 17$

$$\therefore x^2+y^2 \geq 1 \quad \left(\text{단, 등호는 } x = \frac{y}{4} \text{ 일 때 성립} \right)$$

$$\therefore b=1$$

(다) $\sqrt{x}, 2\sqrt{y}$ 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)\{(\sqrt{x})^2+(2\sqrt{y})^2\} \geq (\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2$$

$$2(x+4y) \geq (\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2$$

그런데 $x+4y=\sqrt{17}$ 이므로

$$(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2 \leq 2\sqrt{17} \quad \left(\text{단, 등호는 } \sqrt{x}=2\sqrt{y} \text{ 일 때 성립} \right)$$

$$\therefore c=2\sqrt{17}$$

$$\therefore ac+b = \frac{\sqrt{17}}{4} \cdot 2\sqrt{17} + 1 = \frac{19}{2}$$

답 ②

099 $\overline{BC}=x, \overline{AC}=y$ 라 하면 $\angle ACB=90^\circ$ 이므로

$$x^2+y^2=16$$

한편 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$$

$$2 \cdot 16 \geq (x+y)^2 \quad \therefore (x+y)^2 \leq 32$$

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로

$$0 < x+y \leq 4\sqrt{2} \quad \left(\text{단, 등호는 } x=y \text{ 일 때 성립} \right)$$

삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $x+y+4$ 이므로

$$4 < x+y+4 \leq 4\sqrt{2}+4$$

따라서 구하는 최댓값은 $4(\sqrt{2}+1)$ 이다. 답 ③

100 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c 라 하면 직육면체의 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=6$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=36$$

... ①

한편 a, b, c 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

$$3 \cdot 36 \geq (a+b+c)^2$$

$$\therefore (a+b+c)^2 \leq 108$$

이때 $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로

$$0 < a+b+c \leq 6\sqrt{3} \quad \left(\text{단, 등호는 } a=b=c \text{ 일 때 성립} \right) \quad \dots ②$$

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$ 이므로

$$0 < 4(a+b+c) \leq 24\sqrt{3}$$

따라서 구하는 최댓값은 $24\sqrt{3}$ 이다. ... ③

답 $24\sqrt{3}$

채점 기준	비율
① $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $a+b+c$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

101 세 구 O_1, O_2, O_3 의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3 이라 하면 $\overline{PQ}=18$ 이므로

$$r_1+2r_2+r_3=18$$

..... ①

한편 r_1, r_2, r_3 이 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+2^2+1^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2) \geq (r_1+2r_2+r_3)^2$$

$$6(r_1^2+r_2^2+r_3^2) \geq 18^2$$

$$\therefore r_1^2+r_2^2+r_3^2 \geq 54$$

세 구의 겹넓이의 합은 $4\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)$ 이므로

$$4\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2) \geq 216\pi$$

$$\therefore a=216$$

등호는 $r_1=\frac{r_2}{2}=r_3$ 일 때 성립하므로 ①에 $r_1=\frac{r_2}{2}, r_3=\frac{r_2}{2}$ 를 대입하면

$$\frac{r_2}{2}+2r_2+\frac{r_2}{2}=18, \quad 3r_2=18$$

$$\therefore r_2=6$$

따라서 세 구의 겹넓이의 합은 $r_1=3, r_2=6, r_3=3$ 일 때 최소이므로

$$b=3+6+3=12$$

$$\therefore a+b=228$$

답 228

08 함수

III. 함수

개념정리

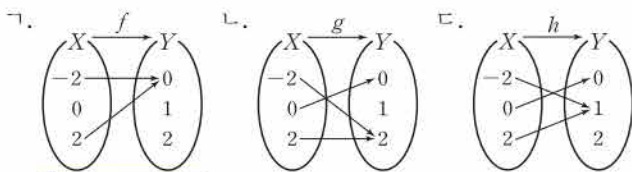
본책 106쪽

- ① $f(x)$ ② $(x, f(x))$ ③ $f(x_1) \neq f(x_2)$
- ④ 공역 ⑤ x ⑥ c ⑦ f
- ⑧ $y=f^{-1}(x)$ ⑨ f^{-1} ⑩ (b, a) ⑪ y 축
- ⑫ x 축

유형 뽐내기

본책 108쪽

001 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이상에서 함수인 것은 나, 다이다.

답 ④

002 가, 나. 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

다. 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 그래프가 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

르. 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 그래프가 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

이상에서 함수의 그래프인 것은 가, 나이다.

답 가, 나

003 ① $-1 \leq x \leq 4$ 에서 $\frac{1}{2} \leq x + \frac{3}{2} \leq \frac{11}{2}$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{11}{2}$$

② $-1 \leq x \leq 4$ 에서 $-4 \leq -x \leq 1$

$$1 \leq 5-x \leq 6$$

$$\therefore 1 \leq f(x) \leq 6$$

③ $-1 \leq x \leq 4$ 에서 $-4 \leq x-3 \leq 1$

$$0 \leq |x-3| \leq 4, \quad -2 \leq |x-3| - 2 \leq 2$$

$$\therefore -2 \leq f(x) \leq 2 \quad \{f(x) \mid -2 \leq f(x) \leq 2\} \subset Y$$

④ $-1 \leq x \leq 4$ 에서 $0 \leq x^2 \leq 16$

$$0 \leq \frac{1}{4}x^2 \leq 4, \quad 1 \leq \frac{1}{4}x^2 + 1 \leq 5$$

$$\therefore 1 \leq f(x) \leq 5$$

⑤ $-1 \leq x \leq 4$ 에서 $-2 \leq x-1 \leq 3$

$$0 \leq (x-1)^2 \leq 9, \quad 0 \leq \frac{1}{3}(x-1)^2 \leq 3$$

$$\therefore 0 \leq f(x) \leq 3$$

따라서 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

$$004 \quad f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$f(19) = f(19-3) = f(16-3) = \dots = f(4-3)$$

$$= f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\therefore f(2) - f(19) = 3 - 1 = 2$$

답 2

$$005 \quad \frac{x-5}{2} = -4 \text{에서} \quad x-5 = -8 \quad \therefore x = -3$$

$$f\left(\frac{x-5}{2}\right) = 2x^2 - 10 \text{의 양변에 } x = -3 \text{을 대입하면}$$

$$f(-4) = 2 \cdot (-3)^2 - 10 = 8$$

답 ⑤

006 이차방정식 $x^2 - 8x - 2 = 0$ 에서 $x = 4 \pm 3\sqrt{2}$ 이므로 α, β 는 무리수이다.

→ ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 8, \quad \alpha\beta = -2$$

→ ②

$$\therefore f(\alpha\beta) - f(\alpha) - f(\beta) = (\alpha\beta - 2) + 2\alpha + 2\beta$$

무리수

$$= (\alpha\beta - 2) + 2(\alpha + \beta)$$

$$= (-2 - 2) + 2 \cdot 8 = 12$$

→ ③

답 12

채점 기준	비율
① α, β 가 무리수임을 알 수 있다.	20 %
② $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $f(\alpha\beta) - f(\alpha) - f(\beta)$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

탐구 B

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 상수)의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

007 주어진 그림에서 $f(1)=3, f(2)=2, f(3)=1$ 이므로

$$a_{11}=0, a_{12}=0, a_{13}=1, a_{21}=0, a_{22}=1, a_{23}=1,$$

$$a_{31}=1, a_{32}=1, a_{33}=1$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{답} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

008 $x^{100} = (x^{98} - x)x^2 + x^3$ 이므로 x^{100} 을 $x^{98} - x$ 로 나누었을 때의 나머지는 x^3 이다.

즉 $f(x) = x^3$ 이므로

$$f(2) + f(3) + f(4) = 8 + 27 + 64$$

$$= 99$$

답 99

009 주어진 식의 양변에 $x=2, y=2$ 를 대입하면

$$f(2+2) = f(2) + f(2) = 1 + 1 = 2 \quad \therefore f(4) = 2$$

주어진 식의 양변에 $x=4, y=4$ 를 대입하면

$$f(4+4) = f(4) + f(4) = 2 + 2 = 4 \quad \therefore f(8) = 4$$

주어진 식의 양변에 $x=8, y=8$ 을 대입하면

$$f(8+8) = f(8) + f(8) = 4 + 4 = 8 \quad \therefore f(16) = 8$$

주어진 식의 양변에 $x=8, y=16$ 을 대입하면

$$f(24)=f(8)+f(16)=4+8=12$$

답 12

다른 풀이 $f(24)=f(2)+f(22)=f(2)+f(2)+f(20)$

$$=\dots=f(2)+f(2)+\dots+f(2)$$

$$=12f(2)=12 \cdot 1=12$$

010 $f(600)=f(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2)=f(2^3 \cdot 3)+f(5^2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{f(2^3)+f(3)+f(5^2)}{3} \\ &= \frac{3f(2)+f(3)+2f(5)}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2^2)&=f(2 \cdot 2)=f(2 \cdot 2)+f(2) \\ &=f(2)+f(2)+f(2) \\ &=3f(2) \end{aligned}$$

답 19

011 $f(x+y)=f(x)f(y)$

..... ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=1, y=0$ 을 대입하면

$$f(1)=f(1)f(0), \quad 3=3f(0)$$

$$\therefore f(0)=1$$

ㄴ. ㉠의 양변에 $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$f(2)=f(1)f(1)=3 \cdot 3=9$$

㉠의 양변에 $x=-2, y=2$ 를 대입하면

$$f(0)=f(-2)f(2)$$

$$1=f(-2) \cdot 9 \quad \therefore f(-2)=\frac{1}{9}$$

ㄷ. $f(2x)=f(x+x)=f(x)f(x)=[f(x)]^2$

$$f(3x)=f(x+2x)=f(x)f(2x)=f(x)[f(x)]^2=[f(x)]^3$$

$$f(4x)=f(x+3x)=f(x)f(3x)=f(x)[f(x)]^3=[f(x)]^4$$

⋮

$$\therefore f(nx)=f(x+(n-1)x)=f(x)f((n-1)x)$$

$$=f(x)[f(x)]^{n-1}=[f(x)]^n$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 4

다른 풀이 ㄴ. $f(0)=1$ 이므로 ㉠의 양변에 $x=-1, y=1$ 을 대입하면

$$f(0)=f(-1)f(1)$$

$$1=f(-1) \cdot 3 \quad \therefore f(-1)=\frac{1}{3}$$

㉠의 양변에 $x=-1, y=-1$ 을 대입하면

$$f(-2)=f(-1)f(-1)=\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

012 (i) $a > 0$ 일 때,

$f(x)=ax+b$ 의 공역과 치역이 같으므로

$$f(-5)=-5, f(1)=1$$

$$-5a+b=-5, a+b=1$$

$$\therefore a=1, b=0$$

그런데 $ab=0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a < 0$ 일 때,

$f(x)=ax+b$ 의 공역과 치역이 같으므로

$$f(-5)=1, f(1)=-5$$

$$-5a+b=1, a+b=-5$$

$$\therefore a=-1, b=-4$$

(i), (ii)에서 $a=-1, b=-4$ 이므로

$$a-b=3$$

답 3

013 $f(-2)=k \cdot (-2)^2-5=4k-5$

$$f(-1)=k \cdot (-1)^2-5=k-5$$

$$f(0)=k \cdot 0^2-5=-5$$

$$f(1)=k \cdot 1^2-5=k-5$$

$k=0$ 이면 치역은 $\{-5\}$ 이므로 모든 원소의 합은 -5 이다.

따라서 $k \neq 0$ 이므로 치역은 $\{4k-5, k-5, -5\}$ 이다. ... 1

이때 치역의 모든 원소의 합이 5이므로

$$(4k-5)+(k-5)+(-5)=5$$

$$5k=20 \quad \therefore k=4$$

... 2

답 4

채점 기준	비율
1 치역을 구할 수 있다.	50 %
2 k의 값을 구할 수 있다.	50 %

014 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같으려면 정의역의 5개의 원소 중 4개는 6, 7, 8, 9에 각각 하나씩 대응하고 나머지 1개는 6, 7, 8, 9 중 하나에 대응하면 된다.

따라서 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$ 의 값이 최소이려면 1, 2, 3, 4 중 2개가 6에 대응하고 나머지 2개는 7, 8에 각각 하나씩 대응하고 5는 9에 대응하면 되므로 구하는 최솟값은

$$6+6+7+8=27$$

답 27

015 (i) $a > 0$ 일 때, 치역은 $\{y \mid 2a-1 \leq y \leq 4a-1\}$ 이므로

$$2a-1 \geq 1, 4a-1 \leq 7$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2$$

... 1

(ii) $a < 0$ 일 때, 치역은 $\{y \mid 4a-1 \leq y \leq 2a-1\}$ 이므로

$$4a-1 \geq 1, 2a-1 \leq 7$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq a \leq 4$$

그런데 $a < 0$ 이므로 실수 a 의 값은 존재하지 않는다. ... 2

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는

$$1 \leq a \leq 2$$

이므로 a 의 최댓값은 2이다.

... 3

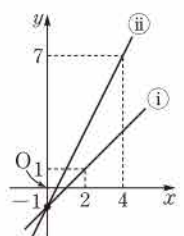
답 2

채점 기준	비율
1 $a > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
2 $a < 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
3 a 의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

참고 $y=ax-1$ 은 일차함수이므로 $a \neq 0$

다른 풀이 일차함수 $y=ax-1$ 의 그래프는 a

의 값에 관계없이 항상 점 $(0, -1)$ 을 지나
는 직선이므로 정의역이 $\{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$, 공
역이 $\{y \mid 1 \leq y \leq 7\}$ 이라면 직선 ㉠의
기울기가 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉡의
기울기보다 크거나 같고 직선 ㉡의 기울기
보다 작거나 같아야 한다.



직선 ①의 방정식은 $y=x-1$, 직선 ②의 방정식은 $y=2x-1$ 이므로 a 의 값의 범위는
 $1 \leq a \leq 2$
 따라서 a 의 최댓값은 2이다.

016 $f(x)=x^2-2ax+1$ 이라 하면 $f(x)=(x-a)^2+1-a^2$ 이므로 정의역이 $\{x|a \leq x \leq 7\}$, 치역이 $\{y|-8 \leq y \leq b\}$ 이라면
 $f(a)=-8, f(7)=b$
 $f(a)=-8$ 에서 $1-a^2=-8, a^2=9$
 $\therefore a=3 (\because a>0)$
 $f(7)=b$ 에서 $b=7^2-2 \cdot 3 \cdot 7+1=8$
 $\therefore ab=24$ 답 ③

017 $f(-1)=g(-1)$ 에서 $-a+b=8$ ㉠
 $f(2)=g(2)$ 에서 $2a+b=-1$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3, b=5$
 $\therefore a+b=2$ 답 ④

018 $\neg, f(-1)=g(-1)=0, f(0)=g(0)=1,$
 $f(1)=g(1)=2$ 이므로 $f=g$
 $\neg, f(-1)=0, g(-1)=2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$
 $\therefore f \neq g$
 $\vdash, f(-1)=g(-1)=2, f(0)=g(0)=1, f(1)=g(1)=2$ 이므로
 $f=g$
 이상에서 $f=g$ 인 것은 $\neg, \vdash$ 이다. 답 ③

019 $f(-2)=g(-2)$ 에서 $8-6a-4b=-2b-a$
 $\therefore 5a+2b=8$ ㉠
 $f(3)=g(3)$ 에서 $-27+9a-4b=3b-a$
 $\therefore 10a-7b=27$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$
 $\therefore f(-2)=g(-2)=0, f(3)=g(3)=-5$
 따라서 함수 f 의 치역은 $\{-5, 0\}$ 답 {-5, 0}

020 $-x^2=3x-10$ 에서 $x^2+3x-10=0$
 $(x+5)(x-2)=0$
 $\therefore x=-5$ 또는 $x=2$ ①
 따라서 집합 X 는 집합 $\{-5, 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는
 $2^2-1=3$ ② 답 3

채점 기준	비율
① $f(x)=g(x)$ 를 만족시키는 x 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	50 %

문제 B 탐구

부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 에 대하여

- ① 집합 A 의 부분집합의 개수: 2^n
 ② 집합 A 의 진부분집합의 개수: 2^n-1

021 ① $f(x)=1$ 이라 하면 $x_1=1, x_2=2$ 일 때 $x_1 \neq x_2$ 이지만
 $f(x_1)=1, f(x_2)=1$
 $\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=1$ 은 일대일대응이 아니다.

③ $f(x)=|x+5|$ 라 하면 $x_1=-6, x_2=-4$ 일 때 $x_1 \neq x_2$ 이지만
 $f(x_1)=|-6+5|=1, f(x_2)=|-4+5|=1$
 $\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=|x+5|$ 는 일대일대응이 아니다.

④ $f(x)=2(x-2)^2$ 이라 하면 $x_1=1, x_2=3$ 일 때 $x_1 \neq x_2$ 이지만
 $f(x_1)=2 \cdot (1-2)^2=2, f(x_2)=2 \cdot (3-2)^2=2$
 $\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=2(x-2)^2$ 은 일대일대응이 아니다.

⑤ $f(x)=\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases}$ 라 하면 $x_1=2, x_2=-1$ 일 때 $x_1 \neq x_2$ 이지만
 $f(x_1)=2, f(x_2)=-2 \cdot (-1)=2$
 $\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases}$ 는 일대일대응이 아니다.

답 ②

022 $\neg, \vdash, \vdash, \vdash$ 실수 k 에 대하여 직선 $y=k$ 과 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

$\neg$ 음수 k 에 대하여 직선 $y=k$ 과 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다. 그런데 치역이 $\{y|y<0\}$ 이므로 일대일대응은 아니다.

$\vdash$ 음수 k 에 대하여 직선 $y=k$ 과 그래프가 두 점에서 만나므로 일대일함수가 아니다.

$\vdash$ 실수 k 에 대하여 직선 $y=k$ 과 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

이상에서 일대일함수의 그래프인 것은 $\neg, \vdash, \vdash, \vdash$ 의 4개, 일대일대응의 그래프인 것은 $\neg, \vdash, \vdash$ 의 3개이다.

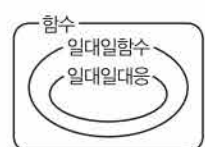
따라서 $a=4, b=3$ 이므로

$$a+b=7$$

답 7

문제 B 탐구

일대일대응이면 일대일함수이지만 일대일함수라고 해서 모두 일대일대응인 것은 아니다.



023 $f(2)-f(3)=1$ 이고 $f(x)$ 가 일대일대응이므로

$$f(2)=5, f(3)=4 \text{ 또는 } f(2)=6, f(3)=5$$

(i) $f(2)=5, f(3)=4$ 일 때,

$$f(1)+f(2)=11 \text{에서 } f(1)+5=11$$

$$\therefore f(1)=6$$

(ii) $f(2)=6, f(3)=5$ 일 때,

$$f(1)+f(2)=11 \text{에서 } f(1)+6=11$$

$$\therefore f(1)=5$$

이때 $f(x)$ 가 일대일대응이 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(1)=6, f(2)=5, f(3)=4$ 이므로

$$f(1)-f(2)-f(3)=-3 \quad \text{답 -3}$$

024 $a < 0$ 이므로 함수 f 가 일대일대응이려면

$$f(-1)=4, f(2)=-5$$

$$-a+b=4, 2a+b=-5$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3, b=1$

$$\therefore a+b=-2 \quad \text{답 -2}$$

025 함수 f 가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$

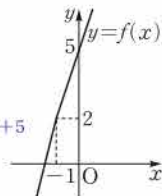
의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 직선 $y=4x+a$ 가 점 $(-1, 2)$ 를 지나야 하므로

$$4 \cdot (-1) + a = 2$$

$$\therefore a=6$$

답 ④



026 $f(x)=x^2+6x+5=(x+3)^2-4$ 이므로 함수 f 가 일대일 대응이려면 $a \geq -3$ 이어야 한다.

이때 함수 f 의 치역이 $\{y|y \geq f(a)\}$ 이므로 $b=f(a)$ 에서

$$\begin{aligned} 2a-b &= 2a-f(a) \\ &= 2a-(a^2+6a+5) \\ &= -a^2-4a-5 \\ &= -(a+2)^2-1 \quad (a \geq -3) \end{aligned}$$

따라서 $2a-b$ 는 $a=-2$ 일 때 최댓값 -1 을 갖는다. **답 -1**

027 (i) $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$f(x)=a(2x+1)-6x+3=2(a-3)x+a+3$$

(ii) $x < -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= -a(2x+1)-6x+3 \\ &= -2(a+3)x-a+3 \end{aligned} \quad \dots \text{①}$$

(i), (ii)에서 함수 f 가 일대일대응이 되려면 $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때와 $x < -\frac{1}{2}$ 일 때의 직선 $y=f(x)$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.

즉 $2(a-3) \cdot \{-2(a+3)\} > 0$ 이어야 하므로

$$(a+3)(a-3) < 0 \quad \therefore -3 < a < 3$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다. **답 5**

채점 기준

비율

① $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때와 $x < -\frac{1}{2}$ 일 때로 나누어 $f(x)$ 를 구할 수 있다.

40 %

② 정수 a 의 개수를 구할 수 있다.

60 %

028 함수 f 는 항등함수이므로

$$f(-3)=-3, f(2)=2$$

$f(-3)-g(3)=1$ 에서

$$-3-g(3)=1 \quad \therefore g(3)=-4$$

함수 g 는 상수함수이므로

$$g(-2)=g(3)=-4$$

$$\therefore f(2)-g(-2)=2-(-4)=6 \quad \text{답 6}$$

029 함수 f 가 항등함수이려면 $f(x)=x$ 이어야 하므로

$$x^2+6x-14=x, \quad x^2+5x-14=0$$

$$(x+7)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-7 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 집합 X 는 집합 $\{-7, 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이므로 $\{-7\}, \{2\}, \{-7, 2\}$

답 $\{-7\}, \{2\}, \{-7, 2\}$

030 함수 f 는 상수함수이므로

$$f(-2)=f(0)=f(2)$$

$$f(-2)=f(2) \text{에서 } 4-2a+b=-3$$

$$\therefore 2a-b=7$$

..... ㉠

$$f(0)=f(2) \text{에서 } b=-3$$

$$b=-3 \text{을 ㉠에 대입하면 } 2a+3=7$$

$$\therefore a=2$$

$$\therefore ab=-6 \quad \text{답 ①}$$

031 함수 h 는 항등함수이므로

$$h(2)=2, h(3)=3$$

... ①

$$f(3)=g(6)=h(2) \text{에서 } f(3)=g(6)=2$$

$$g(2)g(6)=g(3) \text{에서 } 2g(2)=g(3)$$

함수 g 는 일대일대응이므로

$$g(2)=3, g(3)=6 \text{ 또는 } g(2)=6, g(3)=3$$

그런데 $g(2)=6, g(3)=3$ 이면 $2g(2) \neq g(3)$ 이므로

$$g(2)=3, g(3)=6 \quad \dots \text{②}$$

함수 f 는 상수함수이므로

$$f(6)=f(3)=2$$

... ③

$$\therefore f(6)+g(3)+h(3)=2+6+3=11$$

... ④

답 11

채점 기준

비율

① $h(3)$ 의 값을 구할 수 있다.

20 %

② $g(3)$ 의 값을 구할 수 있다.

40 %

③ $f(6)$ 의 값을 구할 수 있다.

20 %

④ $f(6)+g(3)+h(3)$ 의 값을 구할 수 있다.

20 %

032 함수 f 가 항등함수이므로

(i) $x < -2$ 일 때, $x = -3$ $f(x) = x$

(ii) $-2 \leq x < 3$ 일 때,

$$-2x + 6 = x, \quad 3x = 6 \quad \therefore x = 2$$

(iii) $x \geq 3$ 일 때,

$$x^2 - 2x - 4 = x, \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 4 (\because x \geq 3)$$

이상에서 $X = \{-3, 2, 4\}$ 이므로

$$a + b + c = -3 + 2 + 4 = 3$$

답 3

033 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수는

$$4! = 24$$

또 항등함수는 1개, 상수함수는 4개이므로

$$p = 24, q = 1, r = 4$$

$$\therefore p + q + r = 29$$

답 29

다른 풀이 일대일대응을 $f: X \rightarrow X$ 라 하면

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 4개

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$ 의 값을 제외한 3개

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 2개

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한

1개

따라서 일대일대응의 개수는 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

034 구하는 함수의 개수는 X 에서 Y 로의 함수의 개수에서 상수 함수의 개수를 뺀 것과 같으므로

$$2^5 - 2 = 30$$

답 30

035 주어진 조건을 만족시키려면 공역의 5개의 원소 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 -2, 2에 대응시키면 된다.

즉 $f(-2), f(2)$ 의 값을 정하는 방법의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

이때 $f(-1), f(0), f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 각각 -2, -1, 0, 1, 2 중 하나이므로 함수 f 의 개수는

$$10 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1250$$

답 ④

해설 B $\frac{5}{3}$ 점

두 집합 X, Y 의 원소의 개수가 각각 n, m ($m \geq n$)일 때, X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 원소 a, b 에 대하여 $a < b$ 이면 $f(a) < f(b)$ 를 만족시키는 함수의 개수는 공역의 원소 중에서 정의역의 원소의 개수만큼 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_mC_n$$

036 조건 (가)에서 함수 f 는 일대일함수이고, 조건 (나)에서 $f(x)$ 의 값이 될 수 있는 것은 -4, -2, 0, 2, 4이다.

따라서 -4, -2, 0, 2, 4의 5개의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 함수 f 의 개수는

$${}_5P_3 = 60$$

답 ①

037 (i) x 가 짝수일 때,

$x + f(x)$ 가 짝수이려면 $f(x)$ 가 짝수이어야 한다.

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 2, 4 중 하나이므로 2개

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(2)$ 의 값을 제외한 1개

(ii) x 가 홀수일 때,

$x + f(x)$ 가 짝수이려면 $f(x)$ 가 홀수이어야 한다.

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5 중 하나이므로 3개

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$ 의 값을 제외한 2개

$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(1), f(3)$ 의 값을 제외한

1개

(i), (ii)에서 함수 f 의 개수는

$$(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 12$$

답 ④

038 $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ 에서 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 -1, $\frac{1}{2}$, 1, 2 중 하나이므로

4개

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f(2)}$ 에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $f(2)$ 의 값의 역수이므로 1개

$f(1)f(1) = 1$ 에서 $\{f(1)\}^2 = 1 \quad \therefore f(1) = \pm 1$

즉 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 -1, 1 중 하나이므로

2개

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$$

답 8

참고 주어진 조건을 만족시키는 $f(2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)$ 의 값을 수형도로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{array}{ccc} f(2) & f\left(\frac{1}{2}\right) & f(1) \\ -1 & \text{---} & -1 < \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \\ \frac{1}{2} & \text{---} & 2 < \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \\ 1 & \text{---} & 1 < \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \\ 2 & \text{---} & \frac{1}{2} < \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

039 $g(-3) = -(-3)^2 + 5 = -4$ 이므로

$$(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(-4) = -1$$

$f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ 이므로

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(5)$$

$$= -5^2 + 5 = -20$$

$$\therefore (f \circ g)(-3) - (g \circ f)(4) = -1 - (-20)$$

$$= 19$$

답 ⑤

해설 B $\frac{5}{3}$ 점

두 함수 f, g 에 대하여 $(f \circ g)(a)$ 의 값은 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 를 직접 구하여 x 대신 a 를 대입하여 구할 수도 있지만 $(f \circ g)(a) = f(g(a))$ 이므로 $g(a)$ 의 값을 구한 후 $f(x)$ 에 x 대신 $g(a)$ 의 값을 대입하여 구하는 것이 더 편리하다.

040 $f(1)=2$ 이고

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 4,$$

$$(f \circ f \circ f)(1) = f((f \circ f)(1)) = f(4) = 1$$

이므로 (주어진 식) $= 2 + 4 + 1 = 7$

답 ①

041 $f(-3)=a$ 이므로

$$(f \circ f)(-3) = f(f(-3)) = f(a) \\ = a^2 + 3a + a = a^2 + 4a$$

→ ①

$f(-1)=a-2$ 이므로

$$(f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = f(a-2) \\ = (a-2)^2 + 3(a-2) + a \\ = a^2 - 2$$

→ ②

$(f \circ f)(-3) = (f \circ f)(-1)$ 에서

$$a^2 + 4a = a^2 - 2$$

$$4a = -2 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

→ ③

따라서 $f(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{7}{2}$$

→ ④

답 $\frac{7}{2}$

채점 기준	비율
① $(f \circ f)(-3)$ 을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② $(f \circ f)(-1)$ 을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ $f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

042 $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$

$$= f((g \circ h)(x))$$

$$= f(x-4)$$

$$= -2(x-4) + 5$$

$$= -2x + 13$$

즉 $-2a + 13 = 7$ 이므로

$$-2a = -6 \quad \therefore a = 3$$

답 3

043 $f(3)=g(1)=2$ 이므로

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(2) \quad \therefore g(2) = 3$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) \quad \therefore f(2) = 1$$

이때 두 함수 f, g 는 각각 일대일대응이므로

$$f(1) = 3, g(3) = 1$$

$$\therefore f(1) - g(3) = 3 - 1 = 2$$

답 ⑤

044 $f(x) = ax - 2, g(x) = 3x + 1$ 에서

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a(3x + 1) - 2 = 3ax + a - 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3(ax - 2) + 1 = 3ax - 5$$

$f \circ g = g \circ f$ 이므로 $3ax + a - 2 = 3ax - 5$

$$a - 2 = -5 \quad \therefore a = -3$$

따라서 $f(x) = -3x - 2$ 이므로

$$f(-1) = 3 - 2 = 1$$

답 ④

045 주어진 그림에서

$$f(1)=3, f(2)=1, f(3)=4, f(4)=2$$

$$f \circ g = g \circ f \text{에서} \quad f(g(x)) = g(f(x)) \quad \dots\dots ①$$

①의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $f(g(2)) = g(f(2))$

$$f(4) = g(1) \quad \therefore g(1) = 2$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(g(1)) = g(f(1))$

$$f(2) = g(3) \quad \therefore g(3) = 1$$

①의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $f(g(3)) = g(f(3))$

$$f(1) = g(4) \quad \therefore g(4) = 3$$

$$\therefore g(1) - g(4) = 2 - 3 = -1$$

답 ②

046 $f(x) = -2x + 6, g(x) = ax + b$ 에서

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -2(ax + b) + 6$$

$$= -2ax - 2b + 6$$

→ ①

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a(-2x + 6) + b$$

$$= -2ax + 6a + b$$

→ ②

$f \circ g = g \circ f$ 이므로

$$-2ax - 2b + 6 = -2ax + 6a + b$$

$$-2b + 6 = 6a + b, \quad 3b = -6a + 6$$

$$\therefore b = -2a + 2$$

$g(x) = ax + b$ 에 $b = -2a + 2$ 를 대입하면

$$g(x) = ax - 2a + 2 = a(x - 2) + 2$$

이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점

$(2, 2)$ 를 지난다.

→ ③

답 $(2, 2)$

채점 기준	비율
① $(f \circ g)(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $(g \circ f)(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

047 $f(3) = -1$ 이므로 $-3 + a = -1 \quad \therefore a = 2$

$$\therefore f(x) = -x + 2$$

또 $(f \circ g)(x) = 3x + 5$ 에서

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(bx + c)$$

$$= -bx - c + 2$$

따라서 $-bx - c + 2 = 3x + 5$ 이므로

$$-b = 3, -c + 2 = 5$$

$$\therefore b = -3, c = -3$$

$$\therefore a + b + c = -4$$

답 -4

048 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 + a) = (x^2 + a)^2 + a$

$$= x^4 + 2ax^2 + a^2 + a$$

$(f \circ f)(x)$ 가 $x-3$ 으로 나누어떨어지므로

$$(f \circ f)(3) = 81 + 18a + a^2 + a = 0$$

$$\therefore a^2 + 19a + 81 = 0 \quad \text{[판별식]} > 0 \text{이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a 의 값의 곱은 81이다.

답 ④

049 $(g \circ f)(x)$ 가 항등함수이므로

$$(g \circ f)(1)=1, (g \circ f)(3)=3$$

$$f(1)=a-3a=-2a \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(1)=g(f(1))=g(-2a)=1$$

$$\therefore 4a^2+6a+b-1=0$$

..... ㉠

$$f(3)=3a-3a=0 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(3)=g(f(3))=g(0)=3$$

$$\therefore b=3$$

$$b=3 \text{을 ㉠에 대입하면 } 2a^2+3a+1=0$$

$$(2a+1)(a+1)=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=-1$$

이때 a 는 정수이므로 $a=-1$

$$\therefore ab=-3$$

답 -3

050 $g(x)=(f \circ f \circ f)(x)=f(f(f(x)))$

$$=f(f(3x+a))=f(3(3x+a)+a)$$

$$=f(9x+4a)=3(9x+4a)+a$$

$$=27x+13a$$

... 1

함수 $g(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 $g(x)$ 의 값도 증가하므로
 $x=-1$ 에서 최솟값 -1 을 갖는다.

$$\text{즉 } g(-1)=-1 \text{이므로}$$

$$-27+13a=-1, \quad 13a=26$$

$$\therefore a=2$$

... 2

따라서 $g(x)=27x+26$ 이고 함수 $g(x)$ 는 $x=b$ 에서 최댓값 53
을 가지므로 $g(b)=53$ 에서

$$27b+26=53, \quad 27b=27$$

$$\therefore b=1$$

... 3

$$\therefore a-b=1$$

... 4

답 1

채점 기준	비율
1 $g(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
2 a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
3 b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
4 $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

051 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} x+4 & (x<0) \\ -x^2+4ax+4 & (x\geq 0) \end{cases}$

$a<0$ 이면 함수

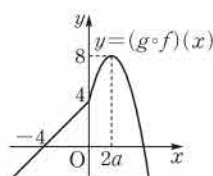
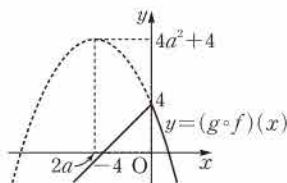
$$y=-x^2+4ax+4=-(x-2a)^2+4a^2+4$$

의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표가
음수이므로 합성함수

$y=(g \circ f)(x)$ 의 그래프는 오른쪽
쪽 그림과 같다.

즉 치역이 $\{y|y\leq 4\}$ 가 되어 주
어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a>0$ 이고, 합성함수 $(g \circ f)(x)$
의 치역이 $\{y|y\leq 8\}$ 이라면 오른쪽 그림
과 같이 함수 $y=-x^2+4ax+4$ 의 그래
프의 꼭짓점의 y 좌표가 8이어야 하므로



$$4a^2+4=8, \quad 4a^2=4, \quad a^2=1$$

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

답 1

052 $(g \circ h)(x)=f(x)$ 이므로 $g(h(x))=f(x)$

$$-2h(x)+5=4x^2-3, \quad -2h(x)=4x^2-8$$

$$\therefore h(x)=-2x^2+4$$

답 2

053 $(h \circ g \circ f)(x)=((h \circ g) \circ f)(x)=(h \circ g)(f(x))$

이므로

$$6x-3=-3f(x)+9, \quad 3f(x)=-6x+12$$

$$\therefore f(x)=-2x+4$$

$$\therefore f(6)=-2 \cdot 6+4=-8$$

답 -8

다른 풀이 $(h \circ g \circ f)(6)=(h \circ g)(f(6))$ 에서

$$6 \cdot 6-3=-3f(6)+9 \quad \therefore f(6)=-8$$

054 (1) $(f \circ h)(x)=g(x)$ 이므로 $f(h(x))=g(x)$

$$-2h(x)+1=4x-5, \quad -2h(x)=4x-6$$

$$\therefore h(x)=-2x+3$$

... 1

(2) $(k \circ f)(x)=g(x)$ 이므로 $k(f(x))=g(x)$

$$k(-2x+1)=4x-5$$

$$-2x+1=t \text{로 놓으면}$$

$$2x=-t+1 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } k(t)=4\left(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)-5=-2t-3 \text{이므로}$$

$$k(x)=-2x-3$$

... 2

$$\text{답 (1) } h(x)=-2x+3 \quad (2) k(x)=-2x-3$$

채점 기준	비율
1 $h(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
2 $k(x)$ 를 구할 수 있다.	60 %

055 $(g \circ f)(x)=6x-8$ 에서 $g(f(x))=6x-8$

$$g\left(\frac{3x-1}{4}\right)=6x-8$$

$$\frac{3x-1}{4}=t \text{로 놓으면 } 3x-1=4t \quad \therefore x=\frac{4}{3}t+\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } g(t)=6\left(\frac{4}{3}t+\frac{1}{3}\right)-8=8t-6 \text{이므로}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=8 \cdot \frac{1}{2}-6=-2$$

답 -2

다른 풀이 $g\left(\frac{3x-1}{4}\right)=6x-8$

..... 1

$$\frac{3x-1}{4}=\frac{1}{2} \text{에서 } 3x-1=2 \quad \therefore x=1$$

$$\text{1의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면 } g\left(\frac{1}{2}\right)=-2$$

056 $f^1(7)=f(7)=9$ 이므로

$$f^2(7)=f(f(7))=f(9)=1$$

$$f^3(7)=f(f^2(7))=f(1)=3$$

$$f^4(7)=f(f^3(7))=f(3)=5$$

$$f^5(7)=f(f^4(7))=f(5)=7$$

$$f^6(7)=f(f^5(7))=f(7)=9$$

...

즉 $f^n(7)$ 의 값은 9, 1, 3, 5, 7이 이 순서대로 반복된다.

이때 $100=5 \cdot 20$ 이므로

$$f^{100}(7)=f^5(7)=7$$

답 7

057 $f^1(1)=f(1)=2$ 이므로

$$f^2(1)=(f \circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$$

$$f^3(1)=(f \circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(3)=4$$

$$f^4(1)=(f \circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(4)=1$$

$$f^5(1)=(f \circ f^4)(1)=f(f^4(1))=f(1)=2$$

$\vdots$

즉 $f^n(1)$ 의 값은 2, 3, 4, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $30=4 \cdot 7+2$ 이므로

$$f^{30}(1)=f^2(1)=3$$

또 $f^1(3)=f(3)=4$ 이므로

$$f^2(3)=(f \circ f)(3)=f(f(3))=f(4)=1$$

$$f^3(3)=(f \circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f(1)=2$$

$$f^4(3)=(f \circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(2)=3$$

$$f^5(3)=(f \circ f^4)(3)=f(f^4(3))=f(3)=4$$

$\vdots$

즉 $f^n(3)$ 의 값은 4, 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.

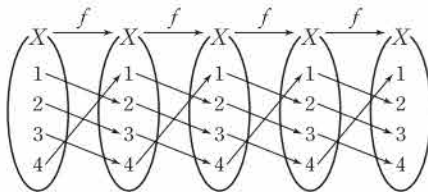
이때 $45=4 \cdot 11+1$ 이므로

$$f^{45}(3)=f^1(3)=4$$

$$\therefore f^{30}(1)-f^{45}(3)=-1$$

답 ②

다른 풀이 f^1, f^2, f^3, f^4 의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉 $f^4(x)=x$ 이므로

$$f^{30}(1)=f^{4 \cdot 7+2}(1)=f^2(1)=3$$

$$f^{45}(3)=f^{4 \cdot 11+1}(3)=f^1(3)=4$$

$$\therefore f^{30}(1)-f^{45}(3)=-1$$

058 (1) $f(x)=-x+3$ 에서

$$f_1(x)=f(x)=-x+3$$

$$f_2(x)=(f \circ f)(x)=-(-x+3)+3=x$$

따라서 $f_3(x)=f(x), f_4(x)=f_2(x), \dots$ 이므로

$$f_n(x)=\begin{cases} -x+3 & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

(2) $f_{11}(11)+f_{22}(22)=(-11+3)+22=14$

$$\text{답 ① } f_n(x)=\begin{cases} -x+3 & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases} \quad (2) 14$$

채점 기준	비율
① $f_1(x), f_2(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $f_n(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %
③ $f_{11}(11)+f_{22}(22)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

059 $f^{n+1}=f^n \circ f=f \circ f^n$ 이고

$$f^1(99)=f(99)=\frac{99}{3}=33 \text{이므로}$$

$$f^2(99)=(f \circ f)(99)=f(f(99))$$

$$=f(33)=\frac{33}{3}=11$$

$$f^3(99)=(f \circ f^2)(99)=f(f^2(99))$$

$$=f(11)=\frac{11+1}{3}=4$$

$$f^4(99)=(f \circ f^3)(99)=f(f^3(99))$$

$$=f(4)=\frac{4+2}{3}=2$$

$$f^5(99)=(f \circ f^4)(99)=f(f^4(99))$$

$$=f(2)=\frac{2+1}{3}=1$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

답 ③

참고 $f^5(99)=10$ 이므로

$$f^6(99)=(f \circ f^5)(99)=f(f^5(99))$$

$$=f(1)=\frac{1+2}{3}=1$$

$$f^7(99)=(f \circ f^6)(99)=f(f^6(99))$$

$$=f(1)=\frac{1+2}{3}=1$$

$\vdots$

따라서 $n \geq 5$ 일 때, $f^n(99)=10$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

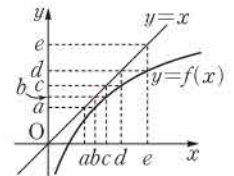
060 오른쪽 그림에서

$$(f \circ f \circ f)(d)=f(f(f(d)))$$

$$=f(f(c))$$

$$=f(b)$$

$$=a$$



답 ①

061 $f(a)=b$ 라 하면 $(f \circ f)(a)=3$ 에서

$$f(f(a))=f(b)=3$$

주어진 그래프에서 $f(b)=3$ 을 만족시키는 b 의 값은

$$b=3 \text{ 또는 } b=5, \text{ 즉 } f(a)=3 \text{ 또는 } f(a)=5$$

(i) $f(a)=3$ 일 때, $a=3$ 또는 $a=5$

(ii) $f(a)=5$ 일 때, $a=6$

(i), (ii)에서 모든 a 의 값의 합은

$$3+5+6=14$$

답 14

062 $f^1(0)=f(0)=2$ 이고

$$f^2(0)=(f \circ f)(0)=f(f(0))=f(2)=1$$

$$f^3(0)=(f \circ f^2)(0)=f(f^2(0))=f(1)=4$$

$$f^4(0)=(f \circ f^3)(0)=f(f^3(0))=f(4)=0$$

$$f^5(0)=(f \circ f^4)(0)=f(f^4(0))=f(0)=2$$

$\vdots$

즉 $f^n(0)$ 의 값은 2, 1, 4, 0이 이 순서대로 반복된다.

이때 $1000=4 \cdot 250$ 이므로

$$f^{1000}(0)=f^4(0)=0$$

답 0

063 $f(a)=t$ 라 하면 $(g \circ f)(a)=5$ 에서

$$g(f(a))=g(t)=5$$

주어진 그래프에서 $g(t)=5$ 를 만족시키는 t 의 값은

$$t=8$$

즉 $f(a)=8$ 이므로

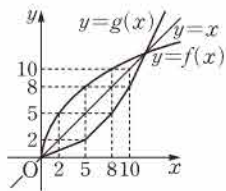
$$a=5$$

또 $(f \circ g \circ f)(8)=b$ 에서

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ f)(8) &= f(g(f(8))) \\ &= f(g(10)) \\ &= f(8)=10\end{aligned}$$

$$\therefore b=10$$

$$\therefore a+b=15$$



15

064 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (-1 \leq x < 0) \\ -x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$ 에서

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} \{f(x)\}^2 & (-1 \leq f(x) < 0) \\ -f(x) & (0 \leq f(x) \leq 1) \end{cases}$$

(i) $-1 \leq x < 0$ 일 때, $0 < f(x) \leq 1$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = -x^2$$

(ii) $x=0$ 일 때, $f(0)=0$ 이므로

$$(f \circ f)(0) = -f(0) = 0$$

(iii) $0 < x \leq 1$ 일 때, $-1 \leq f(x) < 0$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = (-x)^2 = x^2$$

이상에서

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} -x^2 & (-1 \leq x < 0) \\ x^2 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=(f \circ f)(x)$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

2

065 $f(x)=\begin{cases} -2x+2 & (0 \leq x < 1) \\ 2x-2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 이므로

$$f(f(x)) = \begin{cases} -2f(x)+2 & (0 \leq f(x) < 1) \\ 2f(x)-2 & (1 \leq f(x) \leq 2) \end{cases}$$

(i) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 일 때, $1 \leq f(x) \leq 2$ 이므로

$$f(f(x)) = 2(-2x+2)-2 = -4x+2$$

(ii) $\frac{1}{2} < x < 1$ 일 때, $0 < f(x) < 1$ 이므로

$$f(f(x)) = -2(-2x+2)+2 = 4x-2$$

(iii) $1 \leq x < \frac{3}{2}$ 일 때, $0 \leq f(x) < 1$ 이므로

$$f(f(x)) = -2(2x-2)+2 = -4x+6$$

(iv) $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 일 때, $1 \leq f(x) \leq 2$ 이므로

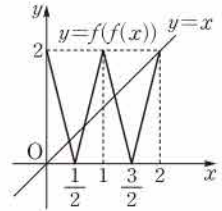
$$f(f(x)) = 2(2x-2)-2 = 4x-6$$

이상에서

$$f(f(x)) = \begin{cases} -4x+2 & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 4x-2 & (\frac{1}{2} < x < 1) \\ -4x+6 & (1 \leq x < \frac{3}{2}) \\ 4x-6 & (\frac{3}{2} \leq x \leq 2) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(f(x))$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

방정식 $f(f(x))=x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(f(x))$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 개수와 같고, 직선 $y=x$ 는 점 $(2, 2)$ 를 지나므로 구하는 실근의 개수는 4이다.



4

다른 풀이 $f(f(x))=x$ 에서

$$-2f(x)+2=x \text{ 또는 } 2f(x)-2=x$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}x+1 \text{ 또는 } f(x) = \frac{1}{2}x+1$$

(i) $f(x) = -\frac{1}{2}x+1$ 일 때,

$0 \leq x < 1$ 에서

$$-2x+2 = -\frac{1}{2}x+1 \quad \therefore x = \frac{2}{3}$$

$1 \leq x \leq 2$ 에서

$$2x-2 = -\frac{1}{2}x+1 \quad \therefore x = \frac{6}{5}$$

(ii) $f(x) = \frac{1}{2}x+1$ 일 때,

$0 \leq x < 1$ 에서

$$-2x+2 = \frac{1}{2}x+1 \quad \therefore x = \frac{2}{5}$$

$1 \leq x \leq 2$ 에서

$$2x-2 = \frac{1}{2}x+1 \quad \therefore x = 2$$

(i), (ii)에서 $x = \frac{2}{5}$ 또는 $x = \frac{2}{3}$ 또는 $x = \frac{6}{5}$ 또는 $x = 2$

따라서 방정식 $f(f(x))=x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

066 $f(x)=\begin{cases} -x+3 & (0 \leq x < 3) \\ 2x-6 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$,

$$g(x) = \begin{cases} -x+2 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 \leq x < 2) \\ x-1 & (2 \leq x < 3) \\ 2x-4 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases} \text{이므로}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -g(x)+3 & (0 \leq g(x) < 3) \\ 2g(x)-6 & (3 \leq g(x) \leq 4) \end{cases}$$

(i) $0 \leq x < 1$ 일 때, $1 < g(x) \leq 2$ 이므로

$$(f \circ g)(x) = -(-x+2)+3 = x+1$$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $g(x)=1$ 이므로

$$(f \circ g)(x) = -1+3 = 2$$

(iii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $1 \leq g(x) < 2$ 이므로

$$(f \circ g)(x) = -(x-1)+3 = -x+4$$

(iv) $3 \leq x < \frac{7}{2}$ 일 때, $2 \leq g(x) < 3$ 이므로

$$(f \circ g)(x) = -(2x-4) + 3 = -2x+7$$

(v) $\frac{7}{2} \leq x \leq 4$ 일 때, $3 \leq g(x) \leq 4$ 이므로

$$(f \circ g)(x) = 2(2x-4) - 6 = 4x-14$$

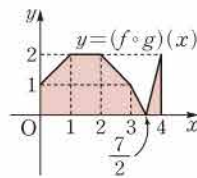
이상에서

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \leq x < 1) \\ 2 & (1 \leq x < 2) \\ -x+4 & (2 \leq x < 3) \\ -2x+7 & (3 \leq x < \frac{7}{2}) \\ 4x-14 & (\frac{7}{2} \leq x \leq 4) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot (1+3) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \\ & = \frac{23}{4} \end{aligned}$$



답 $\frac{23}{4}$

채점 기준	비율
① $y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	70 %
② 넓이를 구할 수 있다.	30 %

067 $f^{-1}(-1)=2$ 이므로 $f(2)=-1$

$$\therefore 2a+b=-1 \quad \dots\dots ㉠$$

$f^{-1}(9)=-\frac{1}{2}$ 이므로 $f(-\frac{1}{2})=9$

$$-\frac{1}{2}a+b=9 \quad \therefore a-2b=-18 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4, b=7$

$$\therefore a+b=3 \quad \text{답 3}$$

068 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0, a, b, c$ 는 상수)라 하면

$f(0)=0$ 이므로 $c=0 \quad \therefore f(x)=ax^2+bx$

$f^{-1}(-12)=-4$ 이므로 $f(-4)=-12$

$$16a-4b=-12 \quad \therefore 4a-b=-3 \quad \dots\dots ㉠$$

$f^{-1}(3)=2$ 이므로 $f(2)=3$

$$\therefore 4a+2b=3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{4}, b=2$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$ 이므로

$$f(-6)=-\frac{1}{4} \cdot (-6)^2 + 2 \cdot (-6) = -21 \quad \text{답 ①}$$

069 $f(x)=ax+b$ ($a \neq 0, a, b$ 는 상수)라 하면

$f^{-1}(-1)=1$ 에서 $f(1)=-1$ 이므로

$$a+b=-1 \quad \dots\dots ㉠$$

$(f \circ f)(1)=f(f(1))=f(-1)$ 이므로 $f(-1)=-7$

$$\therefore -a+b=-7 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=-4$

따라서 $f(x)=3x-4$ 이므로 $f(2)=2$

한편 $f^{-1}(5)=k$ 라 하면 $f(k)=5$ 이므로

$$3k-4=5 \quad \therefore k=3$$

$$\therefore f(2)+f^{-1}(5)=2+3=5 \quad \text{답 5}$$

070 $\frac{1-2x}{3}=t$ 로 놓으면 $1-2x=3t \quad \therefore x=\frac{1-3t}{2}$

따라서 $f(t)=4 \cdot \frac{1-3t}{2} + 8 = -6t+10$ 이므로

$$f(x)=-6x+10 \quad \dots\dots ①$$

$f^{-1}(-2)=k$ 라 하면 $f(k)=-2$ 이므로

$$-6k+10=-2 \quad \therefore k=2$$

$$\therefore f^{-1}(-2)=2 \quad \dots\dots ②$$

답 2

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %
② $f^{-1}(-2)$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $f^{-1}(-2)=k$ 라 하면 $f(k)=-2$

$$4x+8=-2 \text{에서} \quad 4x=-10 \quad \therefore x=-\frac{5}{2}$$

$x=-\frac{5}{2}$ 를 $f(\frac{1-2x}{3})=4x+8$ 의 양변에 대입하면

$$f(2)=-2 \quad \therefore k=2, \text{ 즉 } f^{-1}(-2)=2$$

071 $x < -1$ 일 때, $f(x)=-x+4 > 5$

$x \geq -1$ 일 때, $f(x)=-3x+2 \leq 5$

$f^{-1}(-4)=m$ 이라 하면 $f(m)=-4$ 이므로

$$-3m+2=-4 \quad \therefore m=2 \quad \begin{matrix} -4 \leq 5 \text{이므로 } f(x)=-3x+2 \text{에} \\ \text{대입한다.} \end{matrix}$$

$f^{-1}(8)=n$ 이라 하면 $f(n)=8$ 이므로

$$-n+4=8 \quad \therefore n=-4 \quad \begin{matrix} 8 > 5 \text{이므로 } f(x)=-x+4 \text{에 대입한다.} \end{matrix}$$

$$\therefore f^{-1}(-4)+f^{-1}(8)=2+(-4)=-2 \quad \text{답 ②}$$

072 함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이다.

$y=f(x)$ 의 그래프의 기울기가 음수이므로

$$f(-3)=b, f(4)=a \quad \begin{matrix} x \text{의 값이 증가하면 } y \text{의 값은 감소한다.} \end{matrix}$$

이때 $f(-3)=-2 \cdot (-3)+5=11, f(4)=-2 \cdot 4+5=-3$ 이므로

$$a=-3, b=11$$

$$\therefore a+b=8 \quad \text{답 ②}$$

073 $f(x)=x^2-10x+28=(x-5)^2+3$ 이고, 함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이므로

$$a \geq 5, f(a)=a$$

$$f(a)=a \text{에서} \quad a^2-10a+28=a$$

$$a^2-11a+28=0, \quad (a-4)(a-7)=0$$

$$\therefore a=7 (\because a \geq 5) \quad \text{답 7}$$

074 함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이므로

$$3f(1)+f(7)=26 \text{에서}$$

$$f(1)=7, f(7)=5$$

$$\therefore f^{-1}(7)=1, f^{-1}(5)=7$$

$$f^{-1}(5)-f^{-1}(3)=2 \text{에서}$$

$$7-f^{-1}(3)=2 \quad \therefore f^{-1}(3)=5$$

즉 $f(5)=3$ 이고, f 가 일대일대응이므로

$$f(3)=1$$

$$\therefore f(3)-f^{-1}(7)=1-1=0$$

답 0

075 $f(x)=3x+k|x-2|-1$ 에서

(i) $x \geq 2$ 일 때,

$$f(x)=3x+k(x-2)-1=(3+k)x-2k-1$$

(ii) $x < 2$ 일 때,

$$f(x)=3x-k(x-2)-1=(3-k)x+2k-1$$

(i), (ii)에서 함수 f 의 역함수가 존재하려면 f 가 일대일대응이어야 하므로 $x \geq 2$ 일 때와 $x < 2$ 일 때의 직선 $y=f(x)$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.

$$\text{즉 } (3+k)(3-k) > 0 \text{이어야 하므로 } (k+3)(k-3) < 0$$

$$\therefore -3 < k < 3$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 2이다.

답 2

076 함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이므로

$$-1+a=-2 \cdot 1+8 \quad \therefore a=7$$

$$x < 1 \text{일 때, } f(x)=-x+7 > 6$$

$$x \geq 1 \text{일 때, } f(x)=-2x+8 \leq 6$$

$$f^{-1}(-10)=m \text{이라 하면 } f(m)=-10 \text{이므로}$$

$$-2m+8=-10 \quad \therefore m=9 \quad \text{--- } -10 \leq 6 \text{이므로 } f(x)=-2x+8 \text{에}$$

대입한다.

$$f^{-1}(9)=n \text{이라 하면 } f(n)=9 \text{이므로}$$

$$-n+7=9 \quad \therefore n=-2 \quad \text{--- } 9 > 6 \text{이므로 } f(x)=-x+7 \text{에}$$

대입한다.

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(-10)=f^{-1}(f^{-1}(-10))$$

$$=f^{-1}(9)=-2$$

답 ③

077 $y=ax+2$ 라 하면 $ax=y-2$

$$\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{2}{a} \quad (\because \frac{1}{a}y-\frac{2}{a} \text{는 일차함수이므로 } a \neq 0)$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{a}x-\frac{2}{a}=-\frac{1}{3}x+b \text{이므로}$$

$$\frac{1}{a}=-\frac{1}{3}, -\frac{2}{a}=b \quad \therefore a=-3, b=\frac{2}{3}$$

$$\therefore b-a=\frac{11}{3}$$

답 ④

078 $h(x)=(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-2)$

$$=-2(3x-2)+1=-6x+5$$

$$y=-6x+5 \text{라 하면 } 6x=-y+5$$

$$\therefore x=-\frac{1}{6}y+\frac{5}{6}$$

... ①

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}$$

$$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}$$

... ②

$$\text{답 } h^{-1}(x)=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}$$

채점 기준	비율
① $h(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %
② $h^{-1}(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %

079 $(f \circ f)(x)=x$ 에서 $f=f^{-1}$

$$y=ax-3 \text{이라 하면 } ax=y+3$$

$$\therefore x=\frac{1}{a}y+\frac{3}{a} \quad (\because a \neq 0)$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y=\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+\frac{3}{a}$$

$$f=f^{-1} \text{에서 } ax-3=\frac{1}{a}x+\frac{3}{a} \text{이므로}$$

$$a=\frac{1}{a}, -3=\frac{3}{a} \quad \therefore a=-1$$

따라서 $f(x)=-x-3$ 이므로

$$f(a)=f(-1)=-(-1)-3=-2$$

답 ②

다른 풀이 $f(x)=ax-3$ 에서

$$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(ax-3)$$

$$=a(ax-3)-3=a^2x-3a-3$$

$$\text{따라서 } a^2x-3a-3=x \text{이므로 } a^2=1, -3a-3=0$$

$$\therefore a=-1$$

$$\text{즉 } f(x)=-x-3 \text{이므로 } f(a)=f(-1)=-2$$

080 $1-3x=t$ 로 놓으면 $3x=-t+1$

$$\therefore x=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } f(t)=6\left(-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\right)+2=-2t+4 \text{이므로}$$

$$f(x)=-2x+4$$

$$y=-2x+4 \text{라 하면 } 2x=-y+4 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}y+2$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y=-\frac{1}{2}x+2$$

$$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+2$$

따라서 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 x 절편은 4, y 절편은 2이므로 구하는 합은

$$4+2=6$$

답 6

다른 풀이 $f(x)=-2x+4$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프의 x 절편은 2,

y 절편은 4이므로 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 x 절편은 4, y 절편은 2이다. $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(2, 0)$, $(0, 4)$ 를 지나므로 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 두 점 $(0, 2)$, $(4, 0)$ 을 지난다.

따라서 구하는 합은 $4+2=6$

081 $(f^{-1} \circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=-1$ 에서

$$f(-1)=g(a)$$

$$-4 \cdot (-1) + 5 = \frac{1}{2}a + 3, \quad \frac{1}{2}a = 6$$

$$\therefore a = 12$$

답 ③

082 $(f \circ g^{-1})(0) = f(g^{-1}(0))$

이때 $g(1) = 0$ 이므로 $g^{-1}(0) = 1$

$$\therefore (f \circ g^{-1})(0) = f(1) = 2$$

답 ⑤

083 $(f \circ g^{-1} \circ f)(1) = f(g^{-1}(f(1))) = 4$ 에서

$g^{-1}(f(1)) = k$ 라 하면 $f(k) = 4$ 이므로

$$-3k + 1 = 4 \quad \therefore k = -1$$

따라서 $g^{-1}(f(1)) = -1$ 에서 $g(-1) = f(1)$ 이므로

$$-a + 2 = -2 \quad \therefore a = 4$$

답 4

084 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = -x^2 + 1 \leq 1$

$x < 0$ 일 때, $f(x) = -3x + 1 > 1$

$g(5) = -2 \cdot 5 + 7 = -3$ 이므로

$$(f^{-1} \circ g)(5) = f^{-1}(g(5)) = f^{-1}(-3)$$

$f^{-1}(-3) = k$ 라 하면 $f(k) = -3$ 이므로

$$-k^2 + 1 = -3, \quad k^2 = 4 \quad \begin{matrix} -3 \leq 10 \text{이므로} \\ \text{대입한다.} \end{matrix} \quad f(x) = -x^2 + 10$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k \geq 0$ 이므로 $k = 2$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(5) = 2$$

답 2

085 (1) $g^{-1}(-1) = 4$ 이므로 $g(4) = -1$

$$-\frac{1}{2} \cdot 4 + b = -1 \quad \therefore b = 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -3x + c \text{이므로}$$

$$a\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) - 5 = -3x + c$$

$$-\frac{a}{2}x + a - 5 = -3x + c$$

따라서 $-\frac{a}{2} = -3, a - 5 = c$ 이므로 $a = 6, c = 1$

$$\therefore a + b + c = 8$$

→ ①

(2) $g^{-1}(f(2)) = k$ 라 하면 $g(k) = f(2)$

이때 $f(x) = 6x - 5, g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ 이므로

$$-\frac{1}{2}k + 1 = 6 \cdot 2 - 5, \quad -\frac{1}{2}k = 6$$

$$\therefore k = -12$$

$$\therefore g^{-1}(f(2)) = -12$$

→ ②

답 (1) 8 (2) -12

채점 기준	비율
① $a + b + c$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② $g^{-1}(f(2))$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

086 $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(4) = (f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(4)$

$$= (f \circ g^{-1})(4) = f(g^{-1}(4))$$

$g^{-1}(4) = k$ 라 하면 $g(k) = 4$

$$-2k + 10 = 4 \quad \therefore k = 3$$

$$\therefore (f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(4) = f(g^{-1}(4)) = f(3)$$

$$= 5 \cdot 3 - 2 = 13$$

답 13

087 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 이므로

$$(f \circ g)^{-1}(10) + (g^{-1} \circ f^{-1})(10)$$

$$= (g^{-1} \circ f^{-1})(10) + (g^{-1} \circ f^{-1})(10)$$

$$= 2(g^{-1} \circ f^{-1})(10)$$

$$= 2g^{-1}(f^{-1}(10))$$

$f^{-1}(10) = a$ 라 하면 $f(a) = 10$

$$2a^2 - 8 = 10, \quad a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a \geq 0)$$

$g^{-1}(3) = b$ 라 하면 $g(b) = 3$

$$-b + 4 = 3 \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 2g^{-1}(f^{-1}(10)) = 2g^{-1}(3)$$

$$= 2 \cdot 1 = 2$$

답 ③

088 $f(1) = -1, g(0) = 1$ 이고, 두 함수 f, g 의 역함수가 모두 존재하므로

$$f^{-1}(-1) = 1, g^{-1}(1) = 0$$

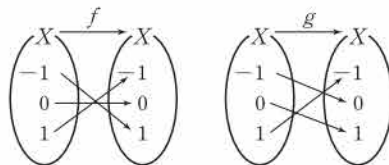
$$(g \circ f^{-1})(-1) = -1 \text{이므로} \quad g(f^{-1}(-1)) = -1$$

$$\therefore g(1) = -1$$

$$(g \circ f^{-1})^{-1}(1) = 0 \text{에서 } (f \circ g^{-1})(1) = 0 \text{이므로}$$

$$f(g^{-1}(1)) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

두 함수 f, g 의 역함수가 모두 존재하므로 두 함수 f, g 는 일대 일 대응이다. 즉 두 함수 f, g 의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$$\therefore f(-1) + g^{-1}(0) = 1 + (-1) = 0$$

답 0

089 $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$ 이고

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x + 1)$$

$$= 2(-x + 1) - 3 = -2x - 1$$

$y = -2x - 1$ 이라 하면

$$2x = -y - 1 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\therefore (g \circ f)^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g^{-1} \circ h)(x) = (g \circ f)^{-1}(h(x))$$

$$= -\frac{1}{2}h(x) - \frac{1}{2}$$

즉 $-\frac{1}{2}h(x) - \frac{1}{2} = f(x)$ 이므로

$$-\frac{1}{2}h(-6) - \frac{1}{2} = f(-6)$$

$$-\frac{1}{2}h(-6) - \frac{1}{2} = 7$$

$$\therefore h(-6) = -15$$

답 ①

다른 풀이 $((g \circ f)^{-1} \circ h)(x) = f(x)$ 에서
 $((g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} \circ h)(x) = (g \circ f \circ f)(x)$
 $\therefore h(x) = (g \circ f \circ f)(x)$
 $\therefore h(-6) = g(f(f(-6)))$
 $= g(f(7))$
 $= g(-6) = -15$

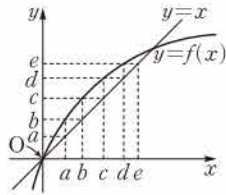
090 $f^{-1}(c) = k$ 라 하면

$$f(k) = c \quad \therefore k = b$$

$f^{-1}(b) = l$ 이라 하면

$$f(l) = b \quad \therefore l = a$$

$$\begin{aligned} \therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(c) &= f^{-1}(f^{-1}(c)) \\ &= f^{-1}(b) \\ &= a \end{aligned}$$



답 ①

091 $f^{-1}(2) = a, f^{-1}(5) = b$ 라 하면

$$f(a) = 2, f(b) = 5$$

함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이므로

$$a = 1, b = 4 \text{ 또는 } a = 4, b = 1$$

$$\therefore |f^{-1}(2) - f^{-1}(5)| = |a - b| = 3$$

답 3

092 $f^{-1}(c) = s$ 이므로

$$f(s) = c$$

$$\therefore (f \circ f)(s) = f(f(s)) = f(c) = r$$

또 $f(a) = q$ 이므로

$$f^{-1}(q) = a$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ f)^{-1}(q) &= (f^{-1} \circ f^{-1})(q) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(q)) \\ &= f^{-1}(a) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore (f \circ f)(s) + (f \circ f)^{-1}(q) = r$$

답 ④

093 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 함수

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 에 대하여

대칭이므로 오른쪽 그림과 같고,

$y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점

의 좌표는 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선

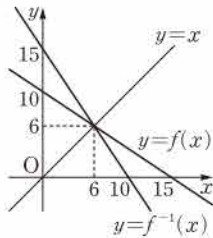
$y = x$ 의 교점의 좌표와 같으므로

$$-\frac{2}{3}x + 10 = x \text{에서} \quad -\frac{5}{3}x = -10 \quad \therefore x = 6$$

따라서 교점의 좌표는 $(6, 6)$ 이므로 $a = 6, b = 6$

$$\therefore a + b = 12$$

답 ⑤



094 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $(13, a)$ 를 지나므로 함수

$y = f(x)$ 의 그래프는 점 $(a, 13)$ 을 지난다.

즉 $f(a) = 13$ 이므로

$$-5a + 3 = 13 \quad \therefore a = -2$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 점 $(b, -2)$ 를 지나므로

$$-5b + 3 = -2 \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore ab = -2$$

답 -2

다른 풀이 $y = -5x + 3$ 이라 하면 $x = -\frac{1}{5}y + \frac{3}{5}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$

따라서 $g(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$ 이므로 $g(13) = a$ 에서

$$a = -\frac{1}{5} \cdot 13 + \frac{3}{5} = -2$$

095 방정식 $f(x) = f^{-1}(x)$ 의 근은 방정식 $f(x) = x$ 의 근과 같

으므로 $x^2 - 6x + 12 = x$ 에서

$$x^2 - 7x + 12 = 0, \quad (x-3)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 모든 근의 합은 $3 + 4 = 7$

답 ③

참고 함수 f 는 집합 $X = \{x | x \geq 3\}$ 에서 정의되므로 3, 4 모두 근이 된다.

096 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 함수

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 에 대

하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고,

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교

점의 좌표는 $y = f(x)$ 의 그래프와 직

선 $y = x$ 의 교점의 좌표와 같으므로

$$\frac{1}{5}(x^2 + 4) = x \text{에서} \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

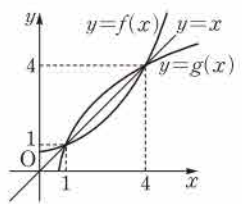
→ ①

따라서 두 교점의 좌표는 $(1, 1), (4, 4)$ 이므로 구하는 거리는

$$\sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

→ ②

답 $3\sqrt{2}$



채점 기준

비율

① 두 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.

70 %

② 두 교점 사이의 거리를 구할 수 있다.

30 %

예제 B

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

097 $f(x) = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4 \quad (x \geq 2)$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그

림과 같고, 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래

프는 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선

$y = x$ 에 대하여 대칭이므로 $y = f(x)$

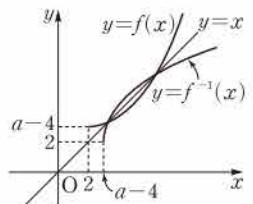
의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가

서로 다른 두 점에서 만나려면

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2 - 4x + a = x$, 즉 $x^2 - 5x + a = 0$ 이 2보다 크거나 같은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식의 판별식을 D 라 하면



$$D = (-5)^2 - 4a > 0$$

$$-4a > -25 \quad \therefore a < \frac{25}{4}$$

$$(ii) \frac{2^2 - 5 \cdot 2 + a \geq 0}{\text{이므로}} \quad a \geq 6$$

$g(x) = x^2 - 5x + a$ 라 하면 $g(2) \geq 0$ 이어야 한다.

$$(iii) \frac{5}{2} > 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 - 5x + a = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + a \text{의 그래프} \\ \text{축의 방정식은 } x = \frac{5}{2} \text{이다.} \end{array} \right.$$

이상에서 $6 \leq a < \frac{25}{4}$ 이므로 구하는 a 의 최솟값은 6이다.

답 6

098 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

(i) $x \geq 0$ 일 때,

$$\frac{2}{3}x + 4 = x \text{에서} \quad x = 12$$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$$\frac{3}{2}x + 4 = x \text{에서} \quad x = -8$$

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

따라서 구하는 넓이는

$$2\left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12\right) = 80$$

답 80

다른 풀이 $y=g(x)$ 의 그래프는

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형은 마름모이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2} \cdot \sqrt{(12+8)^2 + (12+8)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 20\sqrt{2} = 80 \end{aligned}$$

099 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ③이다.

답 ③

100 $y=f(|x|)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $x \geq 0$ 인 부분만 남기고, $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ㄱ이다.

또 $|y|=f(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분만 남기고, $y < 0$ 인 부분은 $y \geq 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ㄹ이다.

따라서 구하는 그래프의 개형은 차례대로 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

101 $y=2|x+2|$ 에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값이 -2 이므로

$$(i) x < -2 \text{일 때,} \quad y = -2(x+2) = -2x-4$$

$$(ii) x \geq -2 \text{일 때,} \quad y = 2(x+2) = 2x+4$$

(i), (ii)에서 $y=2|x+2|$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같다.

한편 직선

$$y=m(x-3)+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

은 m 의 값에 관계없이 항상 점

(3, 1)을 지난다.

① 직선 ㉠이 직선 $y=2x+4$ 와 평행할 때,

$$m=2$$

② 직선 ㉠이 점 $(-2, 0)$ 을 지날 때,

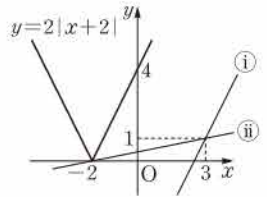
$$0 = -5m + 1 \quad \therefore m = \frac{1}{5}$$

①, ②에서 주어진 함수의 그래프와 직선 ㉠이 만나려면

$$m \leq \frac{1}{5} \text{ 또는 } m > 2$$

따라서 m 의 값이 아닌 것은 ③이다.

답 ③



102 $y=|x-4|-|x+5|$ 에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값이 $-5, 4$ 이므로

$$(i) x < -5 \text{일 때,} \quad y = -(x-4) + x + 5 = 9$$

$$(ii) -5 \leq x < 4 \text{일 때,} \quad y = -(x-4) - (x+5) = -2x-1$$

$$(iii) x \geq 4 \text{일 때,} \quad y = x-4 - (x+5) = -9$$

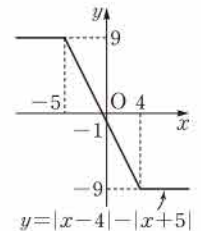
이상에서 $y=|x-4|-|x+5|$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$$M=9, m=-9$$

$$\therefore M-m=18$$

답 18



103 $y=-|x-5|+3$ 에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값이 5이므로

$$(i) x < 5 \text{일 때,} \quad y = x-5+3 = x-2$$

$$(ii) x \geq 5 \text{일 때,} \quad y = -(x-5)+3 = -x+8$$

(i), (ii)에서 $y=-|x-5|+3$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같다.

이 그래프와 직선 $y=a$ ($a < 0$)의 교점의

x 좌표는 $-|x-5|+3=a$ 에서

$$|x-5| = -a+3$$

$$x-5 = -a+3 \text{ 또는 } x-5 = a-3$$

$$\therefore x = -a+8 \text{ 또는 } x = a+2$$

→ ②

이때 색칠한 부분의 넓이가 49이므로

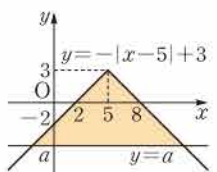
$$\frac{1}{2} \{ -a+8 - (a+2) \} (3-a) = 49$$

$$(a-3)^2 = 49, \quad a-3 = \pm 7 \quad a < 0 \text{이므로} \quad -a+8 > a+2$$

$$\therefore a = -4 \quad (\because a < 0)$$

→ ③

답 -4



채점 기준	비율
① $y = - x-5 + 3$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
② $y = - x-5 + 3$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	30 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	40 %

B **탐구**

함수 $y = -|x-5| + 3$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ 이므로 함수 $y = -|x-5| + 3$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 49이려면 $a < 0$ 이어야 한다.

104 $y = |x+4| + |x+2| + |x-3|$ 에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값이 $-4, -2, 3$ 이므로

(i) $x < -4$ 일 때,

$$y = -(x+4) - (x+2) - (x-3) = -3x-3$$

(ii) $-4 \leq x < -2$ 일 때,

$$y = x+4 - (x+2) - (x-3) = -x+5$$

(iii) $-2 \leq x < 3$ 일 때,

$$y = x+4 + x+2 - (x-3) = x+9$$

(iv) $x \geq 3$ 일 때,

$$y = x+4 + x+2 + x-3 = 3x+3$$

이상에서

$$y = |x+4| + |x+2| + |x-3| \text{의}$$

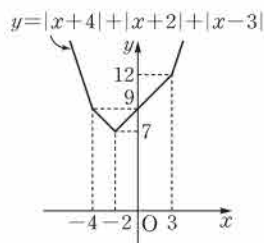
그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x = -2$ 일 때 최솟값 7을 갖는다.

따라서 $a = -2, b = 7$ 이므로

$$a+b=5$$

답 ⑤



09 유리식과 유리함수

III. 함수

개념정리

본책 126쪽

- ① $\frac{A}{B}$ ② $B-A$ ③ 역수 ④ $\frac{c}{d}$ ⑤ $\frac{c}{f}$
 ⑥ 다항식 ⑦ 제2사분면 ⑧ $y = -x$ ⑨ q
 ⑩ $x = p$

B 유형 뽀개기

본책 127쪽

$$\begin{aligned} 01 \quad & \frac{3}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{x+3}{x^2+x+1} \quad \left[x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) \right] \\ &= \frac{3 - (x^2+x+1) + (x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{3 - (x^2+x+1) + (x^2+2x-3)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{x^2+x+1}$

$$\begin{aligned} 02 \quad & \frac{a}{(a+b)(a-c)} - \frac{b}{(a+b)(b+c)} + \frac{c}{(c-a)(b+c)} \\ &= \frac{-a(b+c) - b(c-a) + c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c-a)} \\ &= \frac{-ab - ca - bc + ab + ca + bc}{(a+b)(b+c)(c-a)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 03 \quad & \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \\ &= \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{-2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} \quad \left[\text{간단한 식이 되도록 적당히 두 개씩 묶어서 계산한다.} \right] \\ &= \frac{-2(x^2-1) + 2(x^2+2x)}{x(x+2)(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2(2x+1)}{x(x+2)(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

답 $\frac{2(2x+1)}{x(x+2)(x+1)(x-1)}$

$$\begin{aligned} 04 \quad & \frac{a^2+3a-10}{a^2-2a-3} \div \frac{a-2}{a^2+a} \times \frac{a-3}{a^2+4a} \\ &= \frac{(a+5)(a-2)}{(a+1)(a-3)} \times \frac{a(a+1)}{a-2} \times \frac{a-3}{a(a+4)} \\ &= \frac{a+5}{a+4} \end{aligned}$$

답 $\frac{a+5}{a+4}$

$$\begin{aligned}
 05 \quad \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} &= \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{-4ab}{(a+b)(a-b)} \\
 \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} &= \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)} \\
 \therefore \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} \right) \div \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} \right) \\
 &= \frac{-4ab}{(a+b)(a-b)} \times \frac{(a-b)(a+b)}{2(a^2+b^2)} \\
 &= \frac{-2ab}{a^2+b^2} \\
 &= \frac{-4}{10} \\
 &= -\frac{2}{5} \quad \text{답 } -\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 06 \quad A \times \frac{x^2-4}{x^4+4x^2+16} \div \frac{x^2+2x}{x^3-8} \\
 = A \times \frac{(x+2)(x-2)}{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)} \times \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x+2)} \\
 = A \times \frac{(x-2)^2}{x(x^2-2x+4)} \quad \dots ① \\
 \text{따라서 } A \times \frac{(x-2)^2}{x(x^2-2x+4)} = \frac{x-2}{x^2-2x+4} \text{ 이므로} \\
 A = \frac{x-2}{x^2-2x+4} \times \frac{x(x^2-2x+4)}{(x-2)^2} = \frac{x}{x-2} \quad \dots ② \\
 \text{답 } \frac{x}{x-2}
 \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	50 %
② A를 구할 수 있다.	50 %

07 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 이므로 주어진 식의 양변에 x^3+1 을 곱하면

$$\begin{aligned}
 2x^2-5 &= a(x^2-x+1) + (3x+b)(x+1) \\
 \therefore 2x^2-5 &= (a+3)x^2 + (-a+b+3)x + a+b
 \end{aligned}$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+3=2, -a+b+3=0, a+b=-5$$

$$a+3=2 \text{에서 } a=-1$$

$$a+b=-5 \text{에서 } -1+b=-5 \quad \therefore b=-4$$

$$\therefore ab=4$$

답 ③

예제 B

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식

$$\iff a=b=c=0$$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 이 x 에 대한 항등식

$$\iff a=a', b=b', c=c'$$

③ $ax+by+c=0$ 이 x, y 에 대한 항등식

$$\iff a=b=c=0$$

④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$ 이 x, y 에 대한 항등식

$$\iff a=a', b=b', c=c'$$

08 주어진 식의 양변에 $x(x-2)^2$ 을 곱하면

$$4=a(x-2)^2+bx(x-2)+cx$$

$$\therefore 4=(a+b)x^2-(4a+2b-c)x+4a$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$4a+2b-c=0$$

답 0

참고 $4=(a+b)x^2-(4a+2b-c)x+4a$ 가 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b=0, 4a+2b-c=0, 4a=4$$

$$\therefore a=1, b=-1, c=2$$

$$\begin{aligned}
 09 \quad \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^4+1} - \frac{4}{x^8+1} \\
 = \frac{2}{x^4-1} - \frac{2}{x^4+1} - \frac{4}{x^8+1} \\
 = \frac{4}{x^8-1} - \frac{4}{x^8+1} \\
 = \frac{8}{x^{16}-1} \quad \dots ①
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{8}{x^{16}-1} = \frac{a}{x^b-1}$ 이고, 이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=8, b=16 \quad \dots ②$$

$$\therefore \frac{b}{a}=2 \quad \dots ③$$

답 2

채점 기준	비율
① 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
② a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $\frac{b}{a}$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

10 주어진 식의 양변에 $(x-3)^6$ 을 곱하면

$$x^5+3=a_1(x-3)^5+a_2(x-3)^4+\dots+a_5(x-3)+a_6$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로 양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$4^5+3=a_1+a_2+\dots+a_6$$

$$\therefore a_1+a_2+\dots+a_6=1027$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 11 \quad \frac{x-2}{x-3} + \frac{3x+10}{x+3} - \frac{3x-2}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} \\
 = \frac{(x-3)+1}{x-3} + \frac{3(x+3)+1}{x+3} - \frac{3(x-1)+1}{x-1} - \frac{(x+1)+1}{x+1} \\
 = \left(1 + \frac{1}{x-3}\right) + \left(3 + \frac{1}{x+3}\right) - \left(3 + \frac{1}{x-1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \\
 = \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}\right) \\
 = \frac{4}{(x-3)(x+1)} + \frac{-4}{(x+3)(x-1)} \\
 = \frac{4(x^2+2x-3)-4(x^2-2x-3)}{(x-3)(x+1)(x+3)(x-1)} \\
 = \frac{16x}{(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)} \quad \text{답 ⑤}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12 \quad & \frac{4x^2-2}{x^2-1} - \frac{8x^2+4x-1}{2x^2+x-1} \\
 &= \frac{4(x^2-1)+2}{x^2-1} - \frac{4(2x^2+x-1)+3}{2x^2+x-1} \\
 &= 4 + \frac{2}{x^2-1} - \left(4 + \frac{3}{2x^2+x-1}\right) \\
 &= \frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{2x^2+x-1} \\
 &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{3}{(x+1)(2x-1)} \\
 &= \frac{2(2x-1)-3(x-1)}{(x+1)(x-1)(2x-1)} \\
 &= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)(2x-1)} \\
 &= \frac{1}{(x-1)(2x-1)}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(2x-1)}}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad & \frac{3x^2-9x+1}{x-3} - \frac{3x^2+12x+2}{x+4} \\
 &= \frac{3x(x-3)+1}{x-3} - \frac{3x(x+4)+2}{x+4} \\
 &= 3x + \frac{1}{x-3} - \left(3x + \frac{2}{x+4}\right) \\
 &= \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+4} \\
 &= \frac{x+4-2(x-3)}{(x-3)(x+4)} \\
 &= \frac{-x+10}{(x-3)(x+4)}
 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = -x+10$ 이므로

$$f(7) = 3$$

$\boxed{3}$

$$\begin{aligned}
 14 \quad & x^3 = x(x^2+2x+4) - 2(x^2+2x+4) + 8 \\
 &= (x^2+2x+4)(x-2) + 8
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \frac{x^3}{x^2+2x+4} &= x-2 + \frac{8}{x^2+2x+4} \\
 x^3 &= x(x^2-2x+4) + 2(x^2-2x+4) - 8 \\
 &= (x^2-2x+4)(x+2) - 8
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \frac{x^3}{x^2-2x+4} &= x+2 - \frac{8}{x^2-2x+4} \\
 \therefore \frac{x^3}{x^2+2x+4} + \frac{x^3}{x^2-2x+4} - 2x \\
 &= \left(x-2 + \frac{8}{x^2+2x+4}\right) + \left(x+2 - \frac{8}{x^2-2x+4}\right) - 2x \\
 &= \frac{8}{x^2+2x+4} - \frac{8}{x^2-2x+4} \\
 &= \frac{8(x^2-2x+4) - 8(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)} \\
 &= \frac{-32x}{x^4+4x^2+16}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{-32x}{x^4+4x^2+16}}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad & \frac{3}{x(x+3)} + \frac{2}{(x+3)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} \\
 &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5}\right) + \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6}\right) \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} \\
 &= \frac{6}{x(x+6)}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{6}{x(x+6)} = \frac{a}{x(x+b)}$ 이고, 이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=6, b=6$$

$$\therefore ab=36$$

$\boxed{36}$

$$16 \quad f(n) = \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 & f(5) + f(6) + f(7) + \cdots + f(20) \\
 &= \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}\right) + \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6}\right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7}\right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{x+19} - \frac{1}{x+20}\right) \\
 &= \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+20} \\
 &= \frac{16}{(x+4)(x+20)}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{16}{(x+4)(x+20)} = \frac{c}{(x+a)(x+b)}$ 이고, 이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=4, b=20, c=16 \text{ 또는 } a=20, b=4, c=16$$

$$\therefore a+b-c=8$$

$\boxed{8}$

$$\begin{aligned}
 17 \quad & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{675} \\
 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{25 \cdot 27} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{27}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{27}\right) = \frac{13}{27}
 \end{aligned}$$

따라서 $p=27, q=13$ 이므로

$$p-q=14$$

$\boxed{14}$

$$\begin{aligned}
 18 \quad & \frac{1}{x^2+3x} + \frac{1}{x^2+9x+18} + \frac{1}{x^2+15x+54} \\
 &= \frac{1}{x(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+9)} \\
 &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6}\right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+9}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+9}\right) \\
 &= \frac{3}{x(x+9)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉 } \frac{3}{x(x+9)} &= \frac{1}{30} \text{ 이므로 } x(x+9)=90 \\ x^2+9x-90 &= 0, \quad (x+15)(x-6)=0 \\ \therefore x &= -15 \quad (\because x < 0) \end{aligned}$$

답 -15

19 $f(x)=4x^2+8x+3=(2x+1)(2x+3)$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{(2x+1)(2x+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+3} \right) \quad \cdots ① \\ \therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(100)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{201} - \frac{1}{203} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{203} \right) \\ &= \frac{100}{609} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

답 $\frac{100}{609}$

채점 기준	비율
① $\frac{1}{f(x)}$ 을 부분분수로 변형할 수 있다.	40 %
② 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

20 $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{x}{x+1}}} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{x+1}}} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x+1} \\ &= 1 - \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{x+1}{x+2} \end{aligned}$$

답 $\frac{x+1}{x+2}$

21 $f(x) = 1 - \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{1 + \frac{1}{x+1}} = 1 - \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+2}{x+1}}$

$$= 1 - \frac{x}{x+2} = \frac{2}{x+2}$$

따라서 $\frac{2}{k+2} = \frac{1}{10}$ 에서 $k+2=20$

$$\therefore k=18$$

답 ⑤

22 $\frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+6}}{\frac{1}{n+6} - \frac{1}{n+11}} = \frac{\frac{5}{(n+1)(n+6)}}{\frac{5}{(n+6)(n+11)}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{n+11}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)+10}{n+1} \\ &= 1 + \frac{10}{n+1} \end{aligned}$$

이것이 자연수가 되려면 $n+1$ 이 10의 양의 약수이어야 하므로

$$n+1=1, 2, 5, 10$$

따라서 정수 n 은 0, 1, 4, 9 이므로 구하는 합은

$$0+1+4+9=14$$

답 14

다른 풀이 주어진 식 $= \frac{n+11}{n+1} = k$ (k 는 자연수)라 하면

$$\begin{aligned} n+11 &= k(n+1), \quad (k-1)n = -k+11 \\ \therefore n &= \frac{-k+11}{k-1} = \frac{-(k-1)+10}{k-1} \quad \begin{array}{l} k=1 \text{ 이면 } 0 \cdot n = 10 \\ \text{이므로 } k \neq 1 \end{array} \\ &= -1 + \frac{10}{k-1} \end{aligned}$$

n 이 정수이려면 $k-1$ 이 10의 약수이어야 하고 $k-1 > 0$ 이므로

$$k-1=1, 2, 5, 10$$

따라서 정수 n 은 9, 4, 1, 0 이므로 구하는 합은

$$9+4+1+0=14$$

23 $\frac{59}{11} = 5 + \frac{4}{11} = 5 + \frac{1}{\frac{11}{4}} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4}}$

$$= 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

따라서 $a=5, b=2, c=1, d=3$ 이므로

$$abcd=30$$

답 ③

24 $x^2-4x+1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x-4+\frac{1}{x}=0, \quad x-4=-\frac{1}{x} \quad \begin{array}{l} x^2-4x+1=0 \text{ 에 } x=0 \text{ 을 대입하면 } \\ 1 \neq 0 \therefore x \neq 0 \end{array}$$

$$\therefore \frac{1}{4-x} = x$$

$$\begin{aligned} \therefore 4 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4-x}}}} &= 4 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4-x}}} \\ &= 4 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4-x}} \\ &= 4 - \frac{1}{4-x} \\ &= 4 - x = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

답 ③

25 $\frac{x+y}{4} = \frac{y+z}{5} = \frac{z+x}{7} = k$ ($k \neq 0$)라 하면

$$x+y=4k, \quad y+z=5k, \quad z+x=7k \quad \cdots \cdots ㉠$$

세 식을 변끼리 더하면 $2(x+y+z)=16k$

$$\therefore x+y+z=8k \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $x=3k, y=k, z=4k$

$$\therefore \frac{x^2+y^2+z^2}{xy-yz-zx} = \frac{9k^2+k^2+16k^2}{3k^2-4k^2-12k^2} = \frac{26k^2}{-13k^2} = -2$$

답 -2

예제 B

$$\frac{x+y}{4} = \frac{y+z}{5} = \frac{z+x}{7} = k \text{라 할 때 } k=0 \text{이면}$$

$$x+y=0, y+z=0, z+x=0$$

$$\therefore x=y=z=0$$

그런데 $xyz \neq 0$ 에서 $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ 이므로 $k \neq 0$

26 $x=4k, y=k, z=3k (k \neq 0)$ 라 하면

$$\frac{x-2y-4z}{3x+y-z} = \frac{4k-2k-12k}{12k+k-3k} = \frac{-10k}{10k} = -1$$

답 ①

27 $x:y=5:6$ 에서 $6x=5y \therefore x=\frac{5}{6}y$

$y:z=3:2$ 에서 $2y=3z \therefore z=\frac{2}{3}y$

$$\therefore x:y:z = \frac{5}{6}y:y:\frac{2}{3}y = 5:6:4$$

... ①

$x=5k, y=6k, z=4k (k \neq 0)$ 라 하면

$$\frac{x-y+4z}{2x+y-z} = \frac{5k-6k+16k}{10k+6k-4k} = \frac{15k}{12k} = \frac{5}{4}$$

... ②

답 ⑤/4

채점 기준	비율
① $x:y:z$ 를 구할 수 있다.	50 %
② $\frac{x-y+4z}{2x+y-z}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

다른 풀이 $x=\frac{5}{6}y, z=\frac{2}{3}y$ 이므로

$$\frac{x-y+4z}{2x+y-z} = \frac{\frac{5}{6}y-y+\frac{8}{3}y}{\frac{5}{3}y+y-\frac{2}{3}y} = \frac{\frac{5}{2}y}{\frac{5}{2}y} = \frac{5}{4}$$

28 $\frac{y+z}{2x} = \frac{z+2x}{y} = \frac{2x+y}{z} = k (k \neq 0)$ 라 하면

$$y+z=2kx, z+2x=ky, 2x+y=kz$$

..... ㉠

위의 세 식을 변끼리 더하면

$$2(2x+y+z) = k(2x+y+z)$$

$$(k-2)(2x+y+z) = 0$$

$$\therefore k=2 \text{ 또는 } 2x+y+z=0$$

(i) $k=2$ 일 때,

㉠에서 $y+z=4x, z+2x=2y, 2x+y=2z$ 이므로

$$\frac{(2x+y)(y+z)(z+2x)}{xyz} = \frac{2z \cdot 4x \cdot 2y}{xyz} = 16$$

$$\therefore p=16$$

(ii) $2x+y+z=0$ 일 때,

$$2x+y=-z, y+z=-2x, z+2x=-y \text{이므로}$$

$$\frac{(2x+y)(y+z)(z+2x)}{xyz} = \frac{(-z) \cdot (-2x) \cdot (-y)}{xyz} = -2$$

$$\therefore p=-2$$

(i), (ii)에서 모든 p 의 값의 곱은

$$16 \cdot (-2) = -32$$

답 -32

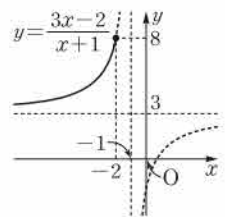
29 $y = \frac{3x-2}{x+1} = \frac{3(x+1)-5}{x+1} = -\frac{5}{x+1} + 3$

이므로 함수 $y = \frac{3x-2}{x+1}$ 의 그래프는 $y = -\frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $x \leq -2$ 에서 $y = \frac{3x-2}{x+1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$$\{y \mid 3 < y \leq 8\}$$

답 ③



30 $y = \frac{bx-5}{x+2a} = \frac{b(x+2a)-2ab-5}{x+2a} = -\frac{2ab+5}{x+2a} + b$

이므로

정의역: $\{x \mid x \neq -2a \text{인 실수}\}$

치역: $\{y \mid y \neq b \text{인 실수}\}$

따라서 $-2a=4, b=-3$ 이므로 $a=-2, b=-3$

$$\therefore ab=6$$

답 6

31 $y = \frac{2x-5}{x-4} = \frac{2(x-4)+3}{x-4} = \frac{3}{x-4} + 2$

이므로 함수 $y = \frac{2x-5}{x-4}$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

$$\frac{2x-5}{x-4} = 1 \text{에서 } 2x-5=x-4 \therefore x=1$$

$$\frac{2x-5}{x-4} = 3 \text{에서 } 2x-5=3x-12 \therefore x=7$$

$y \leq 1$ 또는 $y \geq 3$ 에서 $y = \frac{2x-5}{x-4}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

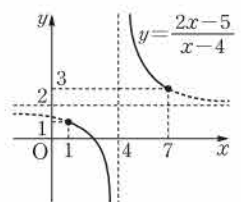
$$\{x \mid 1 \leq x < 4 \text{ 또는 } 4 < x \leq 7\}$$

따라서 정의역에 속하는 정수는 $1, 2,$

$3, 5, 6, 7$ 이므로 구하는 합은

$$1+2+3+5+6+7=24$$

답 ④



32 $y = \frac{bx-4}{x+a}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{b(x+2)-4}{(x+2)+a} - 3 = \frac{b(x+2+a)-4-ab}{x+2+a} - 3$$

$$= \frac{-4-ab}{x+2+a} + b - 3$$

이 함수의 그래프가 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 일치하므로

$$2+a=0, b-3=0, -4-ab=2$$

$$\therefore a=-2, b=3$$

$$\therefore a+b=1$$

답 ④

다른 풀이 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{2}{x-2} + 3 = \frac{2+3(x-2)}{x-2} = \frac{3x-4}{x-2}$$

이 함수의 그래프가 $y = \frac{bx-4}{x+a}$ 의 그래프와 일치하므로

$$a=-2, b=3$$

33 $y = -\frac{8}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\frac{8}{x-4} - 1$$

→ ①

이 함수의 그래프가 점 (2, k)를 지나므로

$$k = -\frac{8}{2-4} - 1 = 3$$

→ ②

답 3

채점 기준	비율
① 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
② k의 값을 구할 수 있다.	60 %

34 $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a만큼, y 축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{4}{x-a} + b = \frac{4+b(x-a)}{x-a} = \frac{bx-ab+4}{x-a}$$

이 함수의 그래프가 $y = \frac{3x-8}{x-4}$ 의 그래프와 일치하므로

$$a=4, b=3, -ab+4=-8$$

$$\therefore a-b=1$$

답 1

35 $\therefore y = \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{3(x-\frac{1}{3})}$

따라서 $y = \frac{1}{3x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore y = \frac{9x+2}{3x} = \frac{3 \cdot 3x+2}{3x} = \frac{2}{3x} + 3$$

따라서 $y = \frac{9x+2}{3x}$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{3x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore y = \frac{6x-7}{3x-3} = \frac{2(3x-3)-1}{3x-3} = -\frac{1}{3(x-1)} + 2$$

따라서 $y = \frac{6x-7}{3x-3}$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore y = \frac{7-3x}{3x-6} = \frac{-(3x-6)+1}{3x-6} = \frac{1}{3(x-2)} - 1$$

따라서 $y = \frac{7-3x}{3x-6}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동에 의하여 $y = \frac{1}{3x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은

ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

36 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3, y=-1$ 이므로 주어진 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-3} - 1 \quad (k \neq 0)$$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 (4, 4)를 지나므로

$$4 = \frac{k}{4-3} - 1 \quad \therefore k=5$$

$$\therefore y = \frac{5}{x-3} - 1 = \frac{5-(x-3)}{x-3} = \frac{-x+8}{x-3}$$

따라서 $a=-1, b=8, c=-3$ 이므로

$$abc=24$$

답 ④

다른 풀이 $y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$

$$= \frac{-ac+b}{x+c} + a$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-c, y=a \quad \therefore c=-3, a=-1$$

또 $y = \frac{-x+b}{x-3}$ 의 그래프가 점 (4, 4)를 지나므로

$$4 = \frac{-4+b}{4-3} \quad \therefore b=8$$

37 $y = \frac{-2x+1}{x+1} = \frac{-2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} - 2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-1, y=-2$$

→ ①

$$y = \frac{bx-7}{2x+a} = \frac{\frac{b}{2}(2x+a) - \frac{ab}{2} - 7}{2x+a} = \frac{-\frac{ab}{2} - 7}{2x+a} + \frac{b}{2}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$$

→ ②

따라서 $-\frac{a}{2} = -1, \frac{b}{2} = -2$ 이므로

$$a=2, b=-4$$

$$\therefore a-b=6$$

→ ③

답 6

채점 기준	비율
① $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ 의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
② $y = \frac{bx-7}{2x+a}$ 의 그래프의 점근선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
③ $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

38 $y = \frac{k}{x-1} + 2$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{k}{x-1} + 2, \quad x-1 = -\frac{k}{2}$$

$$\therefore x = 1 - \frac{k}{2} \quad \therefore A\left(1 - \frac{k}{2}, 0\right)$$

$y = \frac{k}{x-1} + 2$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$y = -k + 2 \quad \therefore B(0, -k + 2)$$

함수 $y = \frac{k}{x-1} + 2$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=1, y=2$$

이므로 $C(1, 2)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{2-0}{1-\left(1-\frac{k}{2}\right)} = \frac{2-(-k+2)}{1-0}$$

$$\frac{4}{k} = k, \quad k^2 = 4 \quad \text{⌊ (직선 AC의 기울기) = (직선 BC의 기울기)}$$

$$\therefore k = -2 \quad (\because k < 0)$$

답 ④

39 $y = \frac{3x+2}{x+a} = \frac{3(x+a)-3a+2}{x+a} = \frac{-3a+2}{x+a} + 3$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -a, y = 3$$

$$y = \frac{5-ax}{x-1} = \frac{-a(x-1)-a+5}{x-1} = \frac{-a+5}{x-1} - a$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=1, y=-a$$

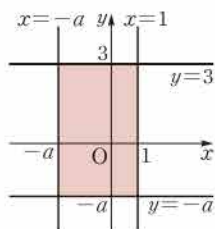
따라서 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 15이므로

$$(a+1)(a+3) = 15$$

$$a^2 + 4a - 12 = 0$$

$$(a+6)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$



답 2

40 주어진 함수의 그래프가 점 $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ 에 대하여 대칭이므로
그래프의 점근선의 방정식은

$$x=1, y=\frac{5}{3}$$

주어진 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-1} + \frac{5}{3} \quad (k \neq 0)$$

라 하면 이 함수의 그래프가 y 축과 만나는 점의 y 좌표가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3} = -k + \frac{5}{3} \quad \therefore k = \frac{4}{3}$$

$$\therefore y = \frac{\frac{4}{3}}{x-1} + \frac{5}{3} = \frac{4+5(x-1)}{3(x-1)} = \frac{5x-1}{3x-3}$$

따라서 $a=5, b=-1, c=-3$ 이므로

$$a+b+c=1$$

답 ④

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 y 축과 만나는 점의 y 좌표가

$\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3} = \frac{b}{c} \quad \therefore c = 3b$$

$y = \frac{ax+b}{3x+c}$ 에 $c=3b$ 를 대입하면

$$y = \frac{ax+b}{3x+3b}$$

$$= \frac{\frac{a}{3}x + \frac{b}{3}}{x+b}$$

$$= \frac{\frac{a}{3}(x+b) - \frac{ab}{3} + \frac{b}{3}}{x+b}$$

$$= \frac{-\frac{ab}{3} + \frac{b}{3}}{x+b} + \frac{a}{3}$$

이 함수의 그래프가 점 $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ 에 대하여 대칭이므로

$$-b = 1, \quad \frac{a}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore a = 5, b = -1, c = -3$$

41 $y = \frac{-6x+1}{3x+4} = \frac{-2(3x+4)+9}{3x+4} = \frac{9}{3x+4} - 2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{4}{3}, y = -2$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $\left(-\frac{4}{3}, -2\right)$ 에 대하여 대칭

이므로

$$a = -\frac{4}{3}, b = -2$$

또 점 $\left(-\frac{4}{3}, -2\right)$ 는 직선 $y = x + c$ 위의 점이므로

$$-2 = -\frac{4}{3} + c \quad \therefore c = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore a + b + c = -4$$

답 -4

42 $y = \frac{bx+1}{x+a} = \frac{b(x+a)-ab+1}{x+a} = \frac{-ab+1}{x+a} + b$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -a, y = b$$

이때 점 $(-a, b)$ 가 두 직선 $y = x - 2, y = -x - 1$ 의 교점이므로

$$b = -a - 2, b = a - 1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore ab = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

43 $y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\frac{3}{x-a} + 4$$

이므로 점근선의 방정식은 $x = a, y = 4$

이때 점 $(a, 4)$ 는 직선 $y=x+6$ 위의 점이므로

$$4=a+6 \quad \therefore a=-2$$

따라서 $y=-\frac{3}{x+2}+4$ 의 그래프는 점 $(-2, 4)$ 를 지나고 기울기가 -1 인 직선에 대하여 대칭이다.

점 $(-2, 4)$ 를 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y-4=-(x+2) \quad \therefore y=-x+2$$

이 직선이 직선 $y=mx+n$ 과 일치하므로

$$m=-1, n=2$$

$$\therefore a-m-n=-3$$

답 ③

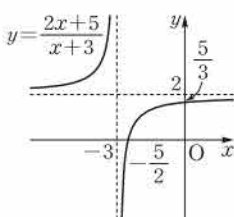
$$44 \quad y=\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2(x+3)-1}{x+3}=-\frac{1}{x+3}+2$$

이므로 함수 $y=\frac{2x+5}{x+3}$ 의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의

방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제4사분면이다.

답 제4사분면



45 $y=\frac{1}{x-a}+3$ 의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

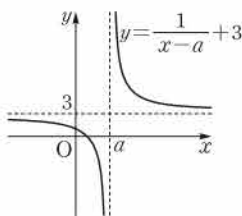
함수 $y=\frac{1}{x-a}+3$ 의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $a>0$ 이고 $x=0$ 에서의 함숫값이 0 보다 크거나 같아야 하므로

$$-\frac{1}{a}+3 \geq 0, \quad \frac{1}{a} \leq 3$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{3}$$

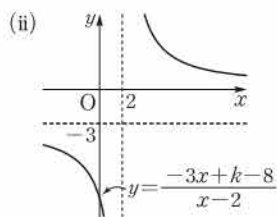
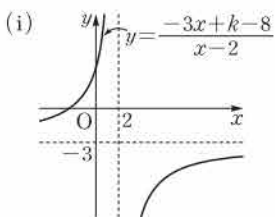
따라서 실수 a 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

답 $\frac{1}{3}$



$$46 \quad y=\frac{-3x+k-8}{x-2}=\frac{-3(x-2)+k-14}{x-2}=\frac{k-14}{x-2}-3$$

따라서 $y=\frac{-3x+k-8}{x-2}$ 의 그래프는 $y=\frac{k-14}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.



(i) $k-14<0$ 일 때,

그래프가 모든 사분면을 지나려면 $x=0$ 에서의 함숫값이 0 보다 커야 하므로

$$\frac{k-8}{-2} > 0 \quad \therefore k < 8$$

함숫값이 0 보다 작거나 같으면 제2사분면을 지나지 않는다.

(ii) $k-14>0$ 일 때,

그래프는 k 의 값에 관계없이 항상 제2사분면을 지나지 않는다.

(i), (ii)에서 $k<8$

따라서 자연수 k 는 $1, 2, 3, \dots, 7$ 의 7 개이다.

답 ④

참고 $k-14=0$ 이면 주어진 함수는 $y=-3$ 이므로 제1사분면과 제2사분면을 지나지 않는다.

47 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4, y=-3$ 이므로 주어진 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x-4}-3 \quad (k<0)$$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1=\frac{k}{-4}-3 \quad \therefore k=-8$$

$$\therefore y=-\frac{8}{x-4}-3=\frac{-8-3(x-4)}{x-4}=\frac{-3x+4}{x-4}$$

따라서 $a=-3, b=4, c=-4$ 이므로

$$abc=48$$

답 48

48 $y=\frac{k}{x+a}+b$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1, y=-2$

이므로

$$a=-1, b=-2$$

따라서 함수 $y=\frac{k}{x-1}-2$ 의 그래프가 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0=\frac{k}{3-1}-2 \quad \therefore k=4$$

$$\therefore a+b+k=1$$

답 ③

49 $y=\frac{b}{x+a}+c$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-a, y=c$$

이므로 주어진 그래프에서

$$-a<0, c<0 \quad \therefore a>0, c<0$$

또 $y=\frac{b}{x}$ 의 그래프가 제1사분면과 제3사분면을 지나므로

$$b>0$$

ㄱ. $a>0, b>0, c<0$ 이므로 $abc<0$

ㄴ. $b>0, c<0$ 이므로 $b-c>0$

ㄷ. 함수 $y=\frac{b}{x+a}+c$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$\frac{b}{a}+c=0, \quad \frac{b}{a}=-c \quad \therefore b=-ac$$

ㄹ. $\frac{a}{c}<0, \frac{b}{c}<0$ 이므로 $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

$$50 \quad y=\frac{2x-3}{x-4}=\frac{2(x-4)+5}{x-4}=\frac{5}{x-4}+2$$

① 그래프는 $y=\frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

② $x-4=0$ 에서 $x=4$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x \neq 4 \text{인 실수}\}$ 이다.

③ 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4, y=2$ 이므로 그래프는 점 $(4, 2)$ 에 대하여 대칭이다.

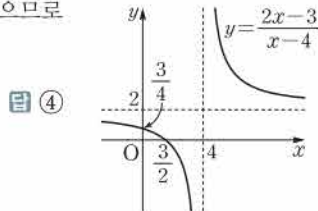
④ $y=\frac{2x-3}{x-4}$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$0=\frac{2x-3}{x-4}, \quad 2x-3=0$$

$$\therefore x=\frac{3}{2}$$

따라서 그래프와 x 축의 교점의 좌표는 $(\frac{3}{2}, 0)$ 이다.

⑤ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 4사분면을 지난다.



51 $\neg$. $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2, y=-2$ 이므로 치역은 $\{y|y \neq -2 \text{인 실수}\}$ 이다.

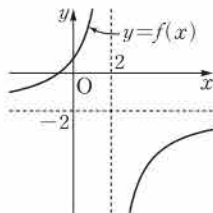
$\perp$. $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(2, -2)$ 를 지나고 기울기가 -1 인 직선, 즉 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이다.

$\sqcap$. $f(0)=-\frac{k}{2}-2$ 이고 $k < -4$ 이면

$$-\frac{k}{2} > 2$$

$$\therefore -\frac{k}{2}-2 > 0$$

즉 $f(0) > 0$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 그래프는 모든 사분면을 지난다.



이상에서 옳은 것은 $\perp, \sqcap$ 이다.

답 ④

52 $y=\frac{a}{x}, y=\frac{b}{x}$ 의 그래프는 제 3사분면을 지나므로 $a > 0, b > 0$

이때 $y=\frac{b}{x}$ 의 그래프가 $y=\frac{a}{x}$ 의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$$|b| > |a| \quad \therefore 0 < a < b \quad \dots ①$$

$y=\frac{c}{x}, y=\frac{d}{x}$ 의 그래프는 제 4사분면을 지나므로 $c < 0, d < 0$

이때 $y=\frac{c}{x}$ 의 그래프가 $y=\frac{d}{x}$ 의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$$|c| > |d| \quad \therefore c < d < 0 \quad \dots ②$$

$$\therefore c < d < a < b \quad \dots ③$$

$$\text{답 } c < d < a < b$$

채점 기준	비율
① $0 < a < b$ 임을 알 수 있다.	40 %
② $c < d < 0$ 임을 알 수 있다.	40 %
③ a, b, c, d 의 대소를 비교할 수 있다.	20 %

53 $y=\frac{2x-8}{x-2}=\frac{2(x-2)-4}{x-2}=-\frac{4}{x-2}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x-8}{x-2}$ 의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4 \leq x \leq 1$ 에서 $y=\frac{2x-8}{x-2}$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

주어진 함수는

$x=1$ 일 때 최댓값 6,

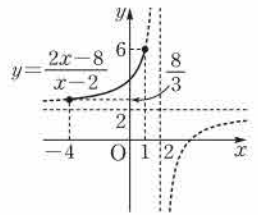
$x=-4$ 일 때 최솟값 $\frac{8}{3}$

을 갖는다.

즉 $a=6, b=\frac{8}{3}$ 이므로

$$ab=16$$

답 16



54 $y=\frac{-2x+10}{x-3}=\frac{-2(x-3)+4}{x-3}=\frac{4}{x-3}-2$

이므로 함수 $y=\frac{-2x+10}{x-3}$ 의 그래프는 $y=\frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a \leq x \leq 2$ 에서

$y=\frac{-2x+10}{x-3}$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 주어진 함수는

$x=a$ 일 때 최댓값 -3 ,

$x=2$ 일 때 최솟값 -6

을 갖는다.

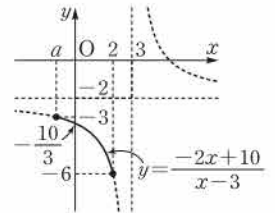
$$\text{즉 } \frac{-2a+10}{a-3} = -3 \text{이므로}$$

$$-2a+10 = -3a+9 \quad \therefore a = -1$$

이때 $m=-6$ 이므로

$$am=6$$

답 ①



55 조건 (가)에서 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2, y=2$ 이므로 $f(x)=\frac{k}{x+2}+2$ ($k \neq 0$)라 하자.

이때 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = \frac{k}{2} + 2 \quad \therefore k = -4$$

$$\therefore f(x) = -\frac{4}{x+2} + 2 \quad \dots ①$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $y=f(x)$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수

$f(x)$ 는

$x=2$ 일 때 최댓값 1,

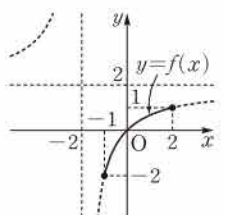
$x=-1$ 일 때 최솟값 -2

를 갖는다.

즉 구하는 합은

$$1 + (-2) = -1$$

답 -1



채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	60 %
② 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	40 %

56 함수 $y = \frac{6}{x+4} + a$ 의 그래프는 $y = \frac{6}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3 \leq x \leq 2$ 에서

$y = \frac{6}{x+4} + a$ 의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$x = -3$ 일 때 최댓값 $6+a$,

$x = 2$ 일 때 최솟값 $1+a$

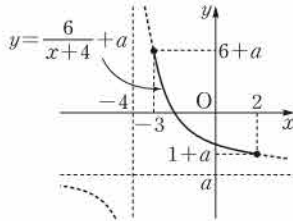
를 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 1이므로

$$(6+a) + (1+a) = 1, \quad 2a = -6$$

$$\therefore a = -3$$

답 ①



57 함수 $y = \frac{4x-5}{x-1}$ 의 그래프와 직선 $y = kx+4$ 가 한 점에서 만

나므로 $\frac{4x-5}{x-1} = kx+4$ 에서

$$4x-5 = (kx+4)(x-1)$$

$$4x-5 = kx^2 + (4-k)x - 4$$

$$\therefore kx^2 - kx + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-k)^2 - 4k = 0$$

$$k(k-4) = 0 \quad \therefore k = 4 \quad (\because k > 0)$$

답 4

58 함수 $y = \frac{x}{x+3}$ 의 그래프와 직선 $y = mx+3m$ 이 만나므로

$$\frac{x}{x+3} = mx+3m \text{에서} \quad x = m(x+3)^2$$

$$\therefore mx^2 + (6m-1)x + 9m = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (6m-1)^2 - 36m^2 \geq 0$$

$$-12m + 1 \geq 0 \quad \therefore m \leq \frac{1}{12}$$

따라서 m 의 최댓값은 $\frac{1}{12}$ 이다.

답 ①

참고 $m=0$ 이면 함수 $y = \frac{x}{x+3}$ 의 그래프와 직선 $y = mx+3m$ 은 원점에서 만난다.

59 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 함수 $y = \frac{-2x+4}{x}$ 의 그래프와 직선

$y = -ax-2$ 는 만나지 않는다.

$y = \frac{-2x+4}{x}$, 즉 $y = \frac{4}{x} - 2$ 의 그래

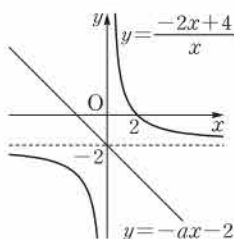
프는 오른쪽 그림과 같고, 직선

$y = -ax-2$ 는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-a \leq 0$$

$$\therefore a \geq 0$$

답 $a \geq 0$



$$60 \quad y = \frac{3x+8}{x+1} = \frac{3(x+1)+5}{x+1} = \frac{5}{x+1} + 3$$

이므로 $-6 \leq x \leq -2$ 에서

$y = \frac{3x+8}{x+1}$ 의 그래프는 오른쪽 그

림과 같고, 직선 $y = ax+3$ 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 3)$ 을 지난다.

(i) 직선 $y = ax+3$ 이 점 $(-6, 2)$ 를 지날 때,

$$2 = -6a + 3 \quad \therefore a = \frac{1}{6}$$

(ii) 직선 $y = ax+3$ 이 점 $(-2, -2)$ 를 지날 때,

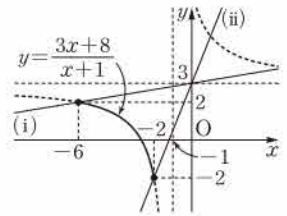
$$-2 = -2a + 3 \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

(i), (ii)에서 $-6 \leq x \leq -2$ 일 때, 함수 $y = \frac{3x+8}{x+1}$ 의 그래프와 직선 $y = ax+3$ 이 한 점에서 만나려면

$$\frac{1}{6} \leq a \leq \frac{5}{2}$$

따라서 정수 a 는 1, 2의 2개이다.

답 ②



61 $y = \frac{3x+12}{x+2}$ 라 하면

$$y = \frac{3x+12}{x+2} = \frac{3(x+2)+6}{x+2} = \frac{6}{x+2} + 3$$

이므로 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $y = \frac{3x+12}{x+2}$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같다. ... ①

이때 두 직선 $y = ax+2$, $y = bx+2$ 는 a , b 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$ 를 지난다.

(i) 직선 $y = ax+2$ 가 점 $(4, 4)$ 를 지날 때,

$$4 = 4a + 2 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

따라서 $ax+2 \leq \frac{3x+12}{x+2}$ 이려면

$$a \leq \frac{1}{2}$$

... ②

(ii) 직선 $y = bx+2$ 가 점 $(1, 5)$ 를 지날 때,

$$5 = b + 2 \quad \therefore b = 3$$

따라서 $\frac{3x+12}{x+2} \leq bx+2$ 이려면

$$b \geq 3$$

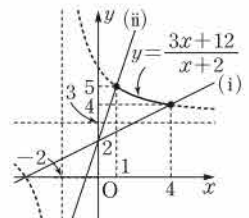
... ③

(i), (ii)에서 $a-b$ 의 최댓값은

$$\frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

... ④

답 $-\frac{5}{2}$



채점 기준	비율
① $1 \leq x \leq 4$ 에서 $y = \frac{3x+12}{x+2}$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
③ b 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
④ $a-b$ 의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

62 점 P의 좌표를 $(k, \frac{4}{k+3}+2)$ ($k > -3$)라 하면

$$Q(k, 2), R(-3, \frac{4}{k+3}+2)$$

$\overline{PQ} = (\frac{4}{k+3}+2) - 2 = \frac{4}{k+3}$, $\overline{PR} = k+3$ 이고 $k > -3$ 에서 $k+3 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PQ} + \overline{PR} &= \frac{4}{k+3} + k+3 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{4}{k+3} \cdot (k+3)} \\ &= 2 \cdot 2 \\ &= 4 \quad \left[\begin{array}{l} \frac{4}{k+3} = k+3 \text{에서 } (k+3)^2 = 4 \\ \therefore k = -1 (\because k > -3) \end{array} \right] \\ &= 4 \text{ (단, 등호는 } k = -1 \text{일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PQ} + \overline{PR}$ 의 최솟값은 4이다.

답 ④

63 $y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{(x-1)+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$ 이므로

$P(k, \frac{3}{k-1}+1)$ ($k \neq 1$)이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{(k-1)^2 + (\frac{3}{k-1}+1-1)^2} \\ &= \sqrt{(k-1)^2 + \frac{9}{(k-1)^2}} \end{aligned}$$

이때 $k \neq 1$ 에서 $(k-1)^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} (k-1)^2 + \frac{9}{(k-1)^2} &\geq 2\sqrt{(k-1)^2 \cdot \frac{9}{(k-1)^2}} \\ &= 2 \cdot 3 \\ &= 6 \quad \left(\text{단, 등호는 } k-1 = \pm\sqrt{3} \text{일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}$ 의 길이의 최솟값은 $\sqrt{6}$ 이다. $\left[\begin{array}{l} (k-1)^2 = \frac{9}{(k-1)^2} \text{에서} \\ (k-1)^2 = 3 \\ \therefore k = 1 \pm \sqrt{3} \end{array} \right]$ 답 ⑤

다른 풀이 $y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$ 이므로 점근선의 방정식은

$x=1, y=1$ 이다.

즉 점 A(1, 1)은 두 점근선의 교점

이고 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프가 직선

$y-1=x-1$, 즉 $y=x$ 에 대하여 대

칭이므로 $\overline{AP}$ 의 길이는 오른쪽 그림

과 같이 점 P가 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 의 그래프

와 직선 $y=x$ 의 교점인 P_1 또는 P_2 일 때 최소이다.

$$\frac{x+2}{x-1} = x \text{에서 } x+2 = x(x-1)$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \therefore x = 1 \pm \sqrt{3}$$

따라서 $P_1(1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}), P_2(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$ 이므로 $\overline{AP}$ 의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{(1+\sqrt{3}-1)^2 + (1+\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{6}$$

64 두 점 P, Q의 좌표를

$$P(a, \frac{10}{a}), Q(-b, -\frac{10}{b}) \quad (a > 0, b > 0)$$

이라 하면

$$A(a, 0), B(0, \frac{10}{a}), C(-b, 0), D(0, -\frac{10}{b})$$

육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$$S = \square OAPB + \square OCQD + \triangle OBC + \triangle ODA$$

$$= a \cdot \frac{10}{a} + b \cdot \frac{10}{b} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{10}{a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{10}{b}$$

$$= 20 + 5\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$$

이때 $a > 0, b > 0$ 에서 $\frac{b}{a} > 0, \frac{a}{b} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} S &= 20 + 5\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \\ &\geq 20 + 5 \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} \\ &= 20 + 5 \cdot 2 \\ &= 30 \quad \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \text{에서 } a^2 = b^2 \\ \therefore a = b (\because a > 0, b > 0) \end{array} \right] \\ &= 30 \text{ (단, 등호는 } a = b \text{일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 30이다. 답 30

65 점 A의 좌표를 $(a, \frac{2}{a})$ ($a > 0$)라 하면 점 B의 y좌표는 $\frac{2}{a}$

이므로 $\frac{2}{a} = \frac{k}{x}$ 에서

$$x = \frac{ak}{2} \quad \therefore B\left(\frac{ak}{2}, \frac{2}{a}\right)$$

또 점 C의 x좌표가 a이므로 점 C의 좌표는 $(a, \frac{k}{a})$

$$\therefore \overline{AB} = \frac{ak}{2} - a = \frac{a}{2}(k-2),$$

$$\overline{AC} = \frac{k}{a} - \frac{2}{a} = \frac{1}{a}(k-2)$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 49이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 49$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}(k-2) \cdot \frac{1}{a}(k-2) = 49$$

$$(k-2)^2 = 196, \quad k-2 = \pm 14$$

$$\therefore k = 16 (\because k > 2)$$

답 ⑤

66 $f(x) = \frac{2x-4}{x}$ 에서

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2 \cdot \frac{2x-4}{x} - 4}{\frac{2x-4}{x}} = \frac{-4}{x-2}$$

$$f^3(x) = (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = \frac{-4}{\frac{2x-4}{x} - 2} = x$$

따라서 함수 $f^{3n}(x)$ (n 은 자연수)는 항등함수이므로

$$f^{500}(x) = f^{3 \cdot 166 + 2}(x) = f^2(x)$$

$$\therefore f^{500}(4) = f^2(4) = \frac{-4}{4-2} = -2$$

답 -2

참고 $f^1(4)=1, f^2(4)=-2, f^3(4)=4, f^4(4)=1, \dots$ 이므로 $f^n(4)$ 의 값은 1, -2, 4가 이 순서대로 반복된다.

$$67 \quad (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x+3}{x-1} + 3}{\frac{x+3}{x-1} - 1} = x$$

즉 $(f \circ f)(k) = 2 - k^2$ 에서

$$k = 2 - k^2, \quad k^2 + k - 2 = 0$$

$$(k+2)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -2 \quad (\because k \neq 1)$$

$f(x)$ 의 정의역이 $\{x \mid x \neq 1 \text{인 실수}\}$ 이므로 $k \neq 1$

답 ①

$$68 \quad f(x) = \frac{x}{x+1} \text{에서}$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{x}{2x+1}$$

→ ①

$$f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} = \frac{x}{3x+1}$$

→ ②

같은 방법으로 하면

$$f^{99}(x) = \frac{x}{99x+1}$$

→ ③

따라서 $a=1, b=0, c=99$ 이므로

$$a+b+c=100$$

→ ④

답 100

채점 기준	비율
① $f^2(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $f^3(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ $f^{99}(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
④ $a+b+c$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$ (단, n 은 자연수)

69 주어진 그래프에서

$$f^1(0) = f(0) = -2, \quad f^1(-2) = f(-2) = 0$$

이므로

$$f^2(-2) = (f \circ f^1)(-2) = f(f^1(-2)) = f(0) = -2$$

$$f^3(-2) = (f \circ f^2)(-2) = f(f^2(-2)) = f(-2) = 0$$

$$f^4(-2) = (f \circ f^3)(-2) = f(f^3(-2)) = f(0) = -2$$

$$f^5(-2) = (f \circ f^4)(-2) = f(f^4(-2)) = f(-2) = 0$$

⋮

$$\therefore f^n(-2) = \begin{cases} 0 & (n \text{은 홀수}) \\ -2 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f^{1024}(-2) = -2$$

답 -2

다른 풀이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$,

$y=-3$ 이므로 $f(x) = \frac{k}{x+3} - 3$ ($k>0$)이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$k-3=0 \quad \therefore k=3$$

$$\text{즉 } f(x) = \frac{3}{x+3} - 3 \text{이므로}$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{3}{\frac{3}{x+3} - 3 + 3} - 3$$

$$= x$$

따라서 함수 $f^{2n}(x)$ (n 은 자연수)는 항등함수이므로

$$f^{1024}(x) = f^{2 \cdot 512}(x) = x$$

$$\therefore f^{1024}(-2) = -2$$

$$70 \quad y = \frac{ax}{3x-1} \text{라 하면 } y(3x-1) = ax$$

$$(3y-a)x = y \quad \therefore x = \frac{y}{3y-a}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{x}{3x-a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{3x-a}$$

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$ 이므로

$$\frac{ax}{3x-1} = \frac{x}{3x-a}$$

$$\therefore a=1$$

답 ④

다른 풀이 $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$$= \frac{a \cdot \frac{ax}{3x-1}}{3 \cdot \frac{ax}{3x-1} - 1}$$

$$= \frac{a^2x}{3(a-1)x+1}$$

따라서 $\frac{a^2x}{3(a-1)x+1} = x$ 이므로

$$3(a-1)x^2 + x = a^2x$$

$$\therefore 3(a-1)x^2 + (1-a^2)x = 0$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a-1=0, \quad 1-a^2=0$$

$$\therefore a=1$$

$$71 \quad y = \frac{2x-5}{x+a} \text{라 하면 } y(x+a) = 2x-5$$

$$(y-2)x = -ay-5 \quad \therefore x = \frac{-ay-5}{y-2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{-ax-5}{x-2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-ax-5}{x-2}$$

따라서 $\frac{-ax-5}{x-2} = \frac{-3x+b}{x+c}$ 이므로

$$-a=-3, \quad b=-5, \quad c=-2$$

$$\therefore a=3, \quad b=-5, \quad c=-2$$

$$\therefore abc=30$$

답 ⑤

$$72 \quad f(x) = \frac{ax+b}{x+3} \text{의 그래프가 점 } (-1, 2) \text{를 지나므로}$$

$$2 = \frac{-a+b}{-1+3} \quad \therefore a-b=-4$$

..... ㉠

또 $f(x) = \frac{ax+b}{x+3}$ 의 역함수의 그래프가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$f(x) = \frac{ax+b}{x+3}$ 의 그래프는 점 $(2, -1)$ 을 지난다. 즉

$$-1 = \frac{2a+b}{2+3} \quad \therefore 2a+b = -5 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉓, ㉔을 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 1$$

$$\therefore a+b = -2 \quad \text{답 ③}$$

73 유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 직선 $y=x-4$, $y=-x+2$ 에 대하여 대칭이므로 그 역함수의 그래프는 두 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 두 직선

$$x=y-4, x=-y+2,$$

$$\text{즉 } y=x+4, y=-x+2$$

에 대하여 대칭이다.

따라서 $a=1, b=4, c=-1, d=2$ 또는 $a=-1, b=2, c=1, d=4$ 이므로

$$a-b+c-d = -6 \quad \text{답 -6}$$

74 $f^{-1} \circ f = I$ (항등함수)이므로

$$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(3) = (f^{-1} \circ I)(3) \\ = f^{-1}(3)$$

$f^{-1}(3) = k$ 라 하면 $f(k) = 3$

$$\frac{k-7}{2k+1} = 3, \quad k-7 = 6k+3$$

$$\therefore k = -2$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(3) = -2 \quad \text{답 -2}$$

75 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ 이므로 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

$g(2) = k$ 라 하면 $f(k) = 2$

$$\frac{3k-6}{k-1} = 2, \quad 3k-6 = 2k-2$$

$$\therefore k = 4, \text{ 즉 } g(2) = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$g(4) = t$ 라 하면 $f(t) = 4$

$$\frac{3t-6}{t-1} = 4, \quad 3t-6 = 4t-4$$

$$\therefore t = -2, \text{ 즉 } g(4) = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore (g \circ g)(2) = g(g(2)) = g(4) = -2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 -2

채점 기준	비율
① $g(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $g(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $(g \circ g)(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이므로 $y = \frac{3x-6}{x-1}$ 이라 하면

$$y(x-1) = 3x-6, \quad (y-3)x = y-6$$

$$\therefore x = \frac{y-6}{y-3}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{x-6}{x-3}$

$$\therefore g(x) = \frac{x-6}{x-3}$$

따라서 $g(2) = \frac{2-6}{2-3} = 4, g(4) = \frac{4-6}{4-3} = -2$ 이므로

$$(g \circ g)(2) = g(g(2)) = g(4) = -2$$

76 $(g^{-1} \circ f)^{-1}(-1) = (f^{-1} \circ g)(-1)$

$$= f^{-1}(g(-1))$$

$$= f^{-1}(3) \quad \text{--- } g(-1) = \frac{-1-2}{-1} = 3$$

$f^{-1}(3) = k$ 라 하면 $f(k) = 3$

$$\frac{k+3}{k-1} = 3, \quad k+3 = 3k-3$$

$$\therefore k = 3$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(-1) = 3$$

답 ②

10 무리식과 무리함수

III. 함수

개념정리

본책 140쪽

- ① 유리식 ② 양수 ③ 분모의 유리화 ④ $\sqrt{ab}$
 ⑤ 무리식 ⑥ x 축 ⑦ p ⑧ q

유형 변개기

본책 141쪽

01 $8x^2 - 10x - 3 \geq 0$ 이므로

$$(4x+1)(2x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -\frac{1}{4} \text{ 또는 } x \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{답 } x \leq -\frac{1}{4} \text{ 또는 } x \geq \frac{3}{2}$$

02 $|x-2| - 3 \geq 0$ 이므로 $|x-2| \geq 3$

$$x-2 \leq -3 \text{ 또는 } x-2 \geq 3$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$4 - |x-3| \geq 0$ 이므로 $|x-3| \leq 4$

$$-4 \leq x-3 \leq 4$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $\sqrt{|x-2|-3} + \sqrt{4-|x-3|}$ 의 값이 실수가 되도록 하는 x 의 값의 범위는

$$x = -1 \text{ 또는 } 5 \leq x \leq 7$$

따라서 정수 x 는 $-1, 5, 6, 7$ 이므로 구하는 합은

$$-1 + 5 + 6 + 7 = 17$$

답 17

03 $x+1 \geq 0$ 이므로 $x \geq -1$ $\dots\dots \textcircled{1}$

$2-x > 0$ 이므로 $x < 2$ $\dots\dots \textcircled{2}$

①, ②에서 $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2-x}}$ 의 값이 실수가 되도록 하는 x 의 값의 범위는

$$-1 \leq x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$-1 \leq x < 2$ 일 때, $3x+8 > 0$, $x-3 < 0$ 이므로

$$|3x+8| - \sqrt{x^2-6x+9} = |3x+8| - \sqrt{(x-3)^2}$$

$$= |3x+8| - |x-3|$$

$$= 3x+8 + (x-3)$$

$$= 4x+5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

답 $4x+5$

채점 기준	비율
① x 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
② 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %

04 $2n+x \geq 0$ 이므로 $x \geq -2n$ $\dots\dots \textcircled{1}$

$2n-x \geq 0$ 이므로 $x \leq 2n$ $\dots\dots \textcircled{2}$

①, ②에서 $\sqrt{2n+x} - \sqrt{2n-x}$ 의 값이 실수가 되도록 하는 x 의 값의 범위는

$$-2n \leq x \leq 2n$$

$n=5$ 일 때 x 의 값의 범위는 $-10 \leq x \leq 10$ 이므로

$$f(5)=21$$

$n=3$ 일 때 x 의 값의 범위는 $-6 \leq x \leq 6$ 이므로

$$f(3)=13$$

$$\therefore f(5)-f(3)=8$$

답 ④

참고 $-2n \leq x \leq 2n$ 을 만족시키는 정수 x 는

$$-2n, -(2n-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, 2n-1, 2n \text{의 } (4n+1) \text{개이므로}$$

$$f(n)=4n+1$$

05 모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{kx^2-2kx+4}$ 의 값이 실수하려면 $kx^2-2kx+4 \geq 0$ 이어야 한다.

(i) $k=0$ 일 때,

$$kx^2-2kx+4=4>0 \text{이므로 } \sqrt{kx^2-2kx+4} \text{의 값은 실수이다.}$$

(ii) $k \neq 0$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여 $kx^2-2kx+4 \geq 0$ 이라면

$$k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $kx^2-2kx+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - k \cdot 4 \leq 0$$

$$k(k-4) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq k \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 0 < k \leq 4$$

(i), (ii)에서 $0 \leq k \leq 4$

따라서 정수 k 는 $0, 1, 2, 3, 4$ 의 5개이다.

답 ③

$$\begin{aligned} 06 \quad & \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) - (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{x+1-x} \\ &= 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

답 ⑤

$$07 \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{에서}$$

$$a > 0, b < 0$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$$\therefore \sqrt{a^2} - 3|b| - \sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}$$

$$= \sqrt{a^2} - 3|b| - \sqrt{(a-2b)^2}$$

$$= |a| - 3|b| - |a-2b|$$

$$= a+3b - (a-2b) \quad \text{--- } a-2b > 0$$

$$= 5b$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

답 5b

채점 기준	비율
① a, b 의 부호를 구할 수 있다.	40 %
② 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %

$$\begin{aligned} 08 \quad \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\ &= \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y} \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

이때

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = (5\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 8 = 18$$

$$\text{이므로 } x-y = -3\sqrt{2} \quad (\because x < y)$$

따라서 ①에서

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{5\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}} = -\frac{1}{3} \quad \text{답 ④}$$

$$\begin{aligned} 09 \quad \sqrt{10}-3 &= \frac{1}{6+a_1} \text{에서} \\ 6+a_1 &= \frac{1}{\sqrt{10}-3} = \frac{\sqrt{10}+3}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)} = \sqrt{10}+3 \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 = \sqrt{10}+3-6 = \sqrt{10}-3$$

$$a_1 = \frac{1}{6+a_2}, \text{ 즉 } \sqrt{10}-3 = \frac{1}{6+a_2} \text{에서}$$

$$6+a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}-3} = \sqrt{10}+3$$

$$\therefore a_2 = \sqrt{10}-3$$

$$a_2 = \frac{1}{6+a_3}, \text{ 즉 } \sqrt{10}-3 = \frac{1}{6+a_3} \text{에서}$$

$$6+a_3 = \frac{1}{\sqrt{10}-3} = \sqrt{10}+3$$

$$\therefore a_3 = \sqrt{10}-3$$

$\vdots$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{10}-3 \\ \therefore a_{10}+a_{20} &= (\sqrt{10}-3) + (\sqrt{10}-3) \\ &= 2\sqrt{10}-6 \quad \text{답 ⑤} \end{aligned}$$

10 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{4n^2} < \sqrt{4n^2+2n} < \sqrt{4n^2+4n+1}$ 이므로

$$2n < \sqrt{4n^2+2n} < 2n+1$$

따라서 $\sqrt{4n^2+2n}$ 의 정수 부분이 $2n$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n) &= \sqrt{4n^2+2n}-2n \\ \therefore \frac{2n}{f(n)} &= \frac{2n}{\sqrt{4n^2+2n}-2n} \\ &= \frac{2n(\sqrt{4n^2+2n}+2n)}{(\sqrt{4n^2+2n}-2n)(\sqrt{4n^2+2n}+2n)} \\ &= \frac{2n(\sqrt{4n^2+2n}+2n)}{4n^2+2n-4n^2} \\ &= \sqrt{4n^2+2n}+2n \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{2n}{f(n)} \text{의 정수 부분은 } 2n+2n=4n \quad \text{답 ④}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{x}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} - \text{통분한다.} \\ &= \frac{x+2\sqrt{3x}+3+x-2\sqrt{3x}+3}{x-3} \\ &= \frac{2(x+3)}{x-3} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 3-2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{2(x+3)}{x-3} &= \frac{2(3-2\sqrt{2}+3)}{3-2\sqrt{2}-3} \\ &= \frac{2(6-2\sqrt{2})}{-2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-6}{\sqrt{2}} \\ &= 2-3\sqrt{2} \quad \text{답 ①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \quad \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} + \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}} &= \frac{(\sqrt{2-x})^2 + (\sqrt{2+x})^2}{\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}} \\ &= \frac{(2-x) + (2+x)}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} - x = \frac{2\sqrt{5}}{3} \text{를 대입한다.} \\ &= \frac{4}{\sqrt{4-\frac{20}{9}}} \\ &= \frac{4}{\frac{2}{3}} \\ &= 3 \quad \text{답 ②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \quad \frac{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}} &- \text{분모를 유리화하여 식을 간단히 한다.} \\ &= \frac{(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x})^2}{(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x})(\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x})} \\ &= \frac{5+x+2\sqrt{25-x^2}+5-x}{5+x-(5-x)} \\ &= \frac{10+2\sqrt{25-x^2}}{2x} \\ &= \frac{5+\sqrt{25-x^2}}{x} - x = 2\sqrt{6} \text{을 대입한다.} \\ &= \frac{5+\sqrt{25-24}}{2\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14 \quad \sqrt{2x+3} &= 3 \text{의 양변을 제곱하면} \\ 2x+3 &= 9 \quad \therefore x=3 \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}-(\sqrt{3}+2)} \\ &= -\frac{1}{2} \quad \text{답 ②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad f(n) &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
 &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} \\
 &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \cdots ① \\
 \therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\
 &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 &= \sqrt{n+1} - 1 \quad \cdots ②
 \end{aligned}$$

이때 $\sqrt{n+1} - 1 < 6$ 이므로 $\sqrt{n+1} < 7$

$$n+1 < 49 \quad \therefore n < 48$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 47이다.

$\cdots ③$

답 47

채점 기준	비율
① $f(n)$ 을 간단히 할 수 있다.	40 %
② $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$ 을 간단히 할 수 있다.	30 %
③ 자연수 n 의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

$$\begin{aligned}
 16 \quad x+y=2\sqrt{10}, \quad x-y=2\sqrt{5}, \quad xy=5 \text{이므로} \\
 \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\
 = \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-y} = \frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\
 = \sqrt{2}-1 \quad \cdots ⑤
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad x &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2+\sqrt{3}, \\
 y &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 2-\sqrt{3} \text{이므로} \\
 x+y &= 4, \quad xy=1 \quad \cdots ① \\
 \therefore (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 &= x+y-2\sqrt{xy} = 4-2=2
 \end{aligned}$$

이때 $x > y > 0$ 에서 $\sqrt{x} > \sqrt{y}$ 이므로 $\sqrt{x}-\sqrt{y} > 0$

$$\therefore \sqrt{x}-\sqrt{y} = \sqrt{2}$$

$\cdots ②$

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
① $x+y, xy$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %

$$\begin{aligned}
 18 \quad x &= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{7}}{7}, \\
 y &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{7} \text{이므로} \\
 x+y &= \frac{2\sqrt{14}}{7}, \quad x-y = \frac{2\sqrt{7}}{7} \\
 \therefore \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\
 &= \frac{x+y}{x-y} = \frac{\frac{2\sqrt{14}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} \\
 &= \sqrt{2} \quad \cdots ②
 \end{aligned}$$

답 $\sqrt{2}$

$$19 \quad -3x-6 \geq 0 \text{이므로} \quad 3x \leq -6$$

$$\therefore x \leq -2$$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\{x | x \leq -2\}$ 이므로

$$a = -2$$

또 함수 $y = \sqrt{-3x-6} - b$ 의 치역은 $\{y | y \geq -b\}$ 이므로

$$-b = -4 \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore ab = -8$$

답 ①

20 함수 $y = -\sqrt{x+a} + a + 4$ 의 그래프가 점 $(-a, -a-2)$ 를 지나므로

$$-a-2 = -\sqrt{-a+a} + a + 4, \quad 2a = -6$$

$$\therefore a = -3$$

따라서 $y = -\sqrt{x-3} - 3 + 4$, 즉 $y = -\sqrt{x-3} + 1$ 이므로 이 함수의 치역은 $\{y | y \leq 1\}$ 이다.

답 ③

$$21 \quad ax+3a \geq 0 \text{이므로} \quad ax \geq -3a$$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x | x \geq -3\}$ 이므로

$$a > 0$$

또 함수 $y = \sqrt{ax+3a} + 2b$ 의 치역은 $\{y | y \geq 2b\}$ 이므로

$$2b = 6 \quad \therefore b = 3$$

즉 $y = \sqrt{ax+3a} + 6$ 의 그래프의 y 절편은 $\sqrt{3a} + 6$ 이므로

$$\sqrt{3a} + 6 = 9, \quad \sqrt{3a} = 3$$

$$3a = 9 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a+b = 6$$

답 ⑤

$$22 \quad 5x+7 \geq 0 \text{에서} \quad 5x \geq -7 \quad \therefore x \geq -\frac{7}{5}$$

$$\therefore A = \left\{ x \mid x \geq -\frac{7}{5} \right\}$$

$$-4x+13 \geq 0 \text{에서} \quad 4x \leq 13 \quad \therefore x \leq \frac{13}{4}$$

$$\therefore B = \left\{ x \mid x \leq \frac{13}{4} \right\}$$

따라서 $A \cap B = \left\{ x \mid -\frac{7}{5} \leq x \leq \frac{13}{4} \right\}$ 이므로 집합 $A \cap B$ 의 정수인 원소는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

답 ③

$$23 \quad y = \frac{-2x+7}{x+4} = \frac{-2(x+4)-1}{x+4} = \frac{1}{x+4} - 2$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -4, \quad y = -2$$

$$\therefore a = -4, \quad b = -2$$

$\cdots ①$

$$f(x) = \sqrt{-4x-2} + c \text{에서 } f\left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \text{이므로}$$

$$\sqrt{-4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 2} + c = -1 \quad \therefore c = -2$$

$\cdots ②$

$$\therefore f(x) = \sqrt{-4x-2} - 2$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 정의역은 $\left\{ x \mid x \leq -\frac{1}{2} \right\}$ 이고, 치역은 $\{y | y \geq -2\}$ 이다.

$\cdots ③$

정의역: $\left\{ x \mid x \leq -\frac{1}{2} \right\}$, 치역: $\{y | y \geq -2\}$

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② c 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ 함수 $y=f(x)$ 의 정의역과 치역을 구할 수 있다.	40 %

$$24 \quad y = \frac{ax-4}{x+b} = \frac{a(x+b)-4-ab}{x+b} = \frac{-4-ab}{x+b} + a$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -b, y = a$$

$$\text{즉 } -b = -5, a = -2 \text{이므로 } a = -2, b = 5$$

따라서 함수 $y = \sqrt{5x-2}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \geq \frac{2}{5}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최솟값은 1이다. 답 1

25 $y = \sqrt{a(x-3)} - 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{a(x-b-3)} - 5 + c$$

이 함수의 그래프가

$$y = \sqrt{4-2x} = \sqrt{-2(x-2)}$$

의 그래프와 일치하므로

$$a = -2, -b-3 = -2, -5+c = 0$$

따라서 $a = -2, b = -1, c = 5$ 이므로

$$abc = 10$$

답 10

26 $\neg$. $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$$\text{즉 } y = 3\sqrt{\frac{1}{9}x-1} = \sqrt{9\left(\frac{1}{9}x-1\right)} = \sqrt{x-9}$$

따라서 $y = 3\sqrt{\frac{1}{9}x-1}$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 9만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 함수 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 $\neg$, ㄹ 이다. 답 ②

27 $y = \sqrt{x+a}-1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \sqrt{x+a}-1 \quad \therefore y = -\sqrt{x+a}+1$$

따라서 $y = -\sqrt{x+a}+1$ 의 그래프가 점 $(5, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\sqrt{5+a}+1, \quad \sqrt{5+a} = 1$$

$$5+a = 1 \quad \therefore a = -4$$

또 $y = -\sqrt{x-4}+1$ 의 그래프가 점 $(b, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = -\sqrt{b-4}+1, \quad \sqrt{b-4} = 2$$

$$b-4 = 4 \quad \therefore b = 8$$

$$\therefore a+b = 4$$

답 4

28 $y = \sqrt{-5x+6}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-5(x-1)+6} - 2 = \sqrt{-5x+11} - 2$$

... ①

이 함수의 그래프를 다시 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{5x+11} - 2$$

... ②

따라서 $a=5, b=11, c=-2$ 이므로

$$a-b-c = -4$$

... ③

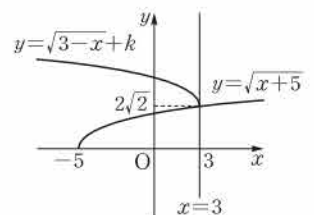
답 -4

채점 기준	비율
① 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
② 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
③ $a-b-c$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

29 함수 $y = \sqrt{x+5}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이고, 함수

$y = \sqrt{3-x} + k = \sqrt{-(x-3)} + k$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y = \sqrt{x+5}$ 의 그래프와 직선 $x=3$ 의 교점의 좌표가 $(3, 2\sqrt{2})$ 이므로 k 의 값은 오른쪽 그림과 같이 함수



$y = \sqrt{3-x} + k$ 의 그래프가 점 $(3, 2\sqrt{2})$ 를 지날 때 최대이다.

즉 $2\sqrt{2} = \sqrt{3-3} + k$ 에서

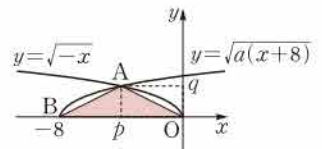
$$k = 2\sqrt{2}$$

따라서 k 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다. 답 $2\sqrt{2}$

참고 함수 $y = \sqrt{3-x} + k$ 의 그래프가 점 $(-5, 0)$ 을 지날 때 $k = -2\sqrt{2}$ 이므로 두 함수의 그래프가 만나도록 하는 k 의 값의 범위는 $-2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$

30 $y = \sqrt{a(x+8)}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 점 A의 좌표를 (p, q) ($p < 0, q > 0$)라 하면 $OB=8$ 이고 $\triangle AOB$ 의 넓이가 8이므로



$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot q = 8$$

$$\therefore q = 2$$

이때 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프가 점 $A(p, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \sqrt{-p}, \quad -p = 4 \quad \therefore p = -4$$

$$\therefore A(-4, 2)$$

따라서 $y = \sqrt{a(x+8)}$ 의 그래프가 점 $A(-4, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \sqrt{4a} \quad \therefore a = 1$$

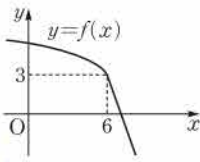
답 1

31 $x \leq 6$ 에서 함수 $y = \sqrt{6-x} + a = \sqrt{-(x-6)} + a$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 6만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

이때 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(6, 3)$ 을 지나야 한다.

즉 $\sqrt{6-6}+a=3$ 이므로

$$a=3$$



답 ③

$$32 \quad y = \frac{9-x}{x-4} = \frac{-(x-4)+5}{x-4} = \frac{5}{x-4} - 1$$

이므로 함수 $y = \frac{9-x}{x-4}$ 의 그래프는 $y = \frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

또 $y = \sqrt{5x+k}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{5x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 k 의 값은 오른쪽 그림과 같이 함수 $y = \sqrt{5x+k}$ 의 그래프가 점 $(5, 4)$ 를 지날 때 최대이다.

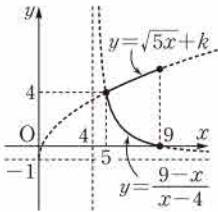
즉 $4 = \sqrt{5 \cdot 5} + k$ 에서

$$k = -1$$

따라서 k 의 최댓값은 -1 이다. 답 -1

참고 함수 $y = \sqrt{5x+k}$ 의 그래프가 점 $(9, 0)$ 을 지날 때 $k = -3\sqrt{5}$ 이므로 두 함수의 그래프가 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

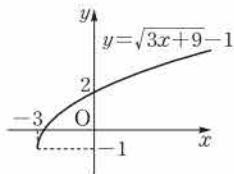
$$-3\sqrt{5} \leq k \leq -1$$



33 $y = \sqrt{3x+9} - 1 = \sqrt{3(x+3)} - 1$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = \sqrt{3x+9} - 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 3사분면을 지난다.

답 ④



34 $y = -\sqrt{5x+10} + a = -\sqrt{5(x+2)} + a$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{5x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

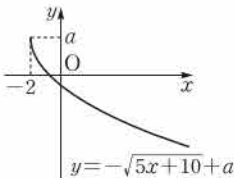
함수 $y = -\sqrt{5x+10} + a$ 의 그래프가 제 2, 3, 4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $a > 0$ 이고, $x=0$ 일 때 $y < 0$ 이어야 하므로

$$a > 0, -\sqrt{10} + a < 0$$

$$\therefore 0 < a < \sqrt{10}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 3이다.

답 3



35 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\sqrt{a(x-2)} - 2$$

$$y = \frac{8-3x}{x-2} = \frac{-3(x-2)+2}{x-2} = \frac{2}{x-2} - 3$$

이므로 함수 $y = \frac{8-3x}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = \frac{8-3x}{x-2}$ 의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$y = -\sqrt{a(x-2)} - 2$ 의 그래프가

$y = \frac{8-3x}{x-2}$ 의 그래프와 제 4사분면

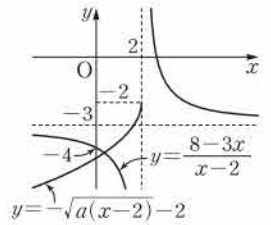
에서 만나려면 $x=0$ 일 때 $y < -4$ 이어야 한다.

즉 $-\sqrt{-2a} - 2 < -4$ 이므로

$$\sqrt{-2a} > 2, \quad -2a > 4$$

$$\therefore a < -2$$

답 ④



36 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 -6 만큼 평행이동한 것이므로

$$y = \sqrt{a(x+5)} - 6$$

..... ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = \sqrt{5a} - 6, \quad \sqrt{5a} = 5$$

$$5a = 25 \quad \therefore a = 5$$

$a=5$ 를 ㉠에 대입하면

$$y = \sqrt{5(x+5)} - 6 = \sqrt{5x+25} - 6$$

$$\therefore b = 25, c = -6$$

$$\therefore a+b+c = 24$$

답 24

37 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{ax}$ ($a < 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이므로

$$y = -\sqrt{a(x-p)} + q$$

... ①

이 함수가 $y = -\sqrt{a(x-b)} - c$ 와 같으므로

$$b=p, c=-q$$

... ②

이때 $p > 0, q > 0$ 이므로

$$a < 0, b > 0, c < 0$$

... ③

$$\text{답 } a < 0, b > 0, c < 0$$

채점 기준	비율
① 주어진 함수의 그래프의 식을 $y = -\sqrt{a(x-p)} + q$ 로 나타낼 수 있다.	40 %
② b, c 를 p, q 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ a, b, c 의 부호를 구할 수 있다.	30 %

참고 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x \leq p\}$ 이므로 $a < 0$ 임을 알 수 있다.

38 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1, y=2$ 이므로 함수의 식을 $y = \frac{k}{x-1} + 2$ ($k < 0$)라 할 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 = -k + 2 \quad \therefore k = -2$$

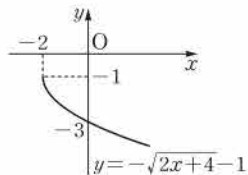
즉 $y = -\frac{2}{x-1} + 2 = \frac{2x-4}{x-1}$ 이므로

$$a=2, b=-4, c=-1$$

$y = -\sqrt{2x+4} - 1 = -\sqrt{2(x+2)} - 1$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = -\sqrt{2x+4}-1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3, 4사분면을 지난다.

답 ③



39 주어진 그래프의 모양에서

$$-b > 0 \quad \therefore b < 0$$

$y = -\frac{b}{x+a} - c$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x = -a$, $y = -c$ 이므로

$$-a > 0, -c > 0 \quad \therefore a < 0, c < 0$$

$y = \sqrt{ax-b}+c = \sqrt{a\left(x-\frac{b}{a}\right)}+c$ 이므로 $y = \sqrt{ax-b}+c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a < 0$, $\frac{b}{a} > 0$, $c < 0$ 이므로 함수 $y = \sqrt{ax-b}+c$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다. $a < 0, b < 0$ 이므로 $\frac{b}{a} > 0$

답 ②

40 ① $3x+12 \geq 0$ 이므로

$$3x \geq -12 \quad \therefore x \geq -4$$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x \geq -4\}$ 이다.

② $\sqrt{3x+12} \geq 0$ 이므로 $\sqrt{3x+12}-2 \geq -2$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y \geq -2\}$ 이다.

③ $y = \sqrt{3x+12}-2$ 에 $x = -1$ 을 대입하면

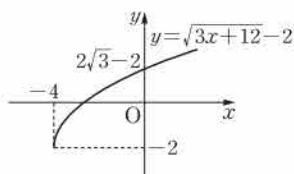
$$y = 1$$

따라서 그래프는 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

④ $y = \sqrt{3x+12}-2 = \sqrt{3(x+4)}-2$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{3x+12}-2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.

답 ⑤



41 ① $5-2x \geq 0$ 이므로 $-2x \geq -5 \quad \therefore x \leq \frac{5}{2}$

$$\text{또 } \sqrt{5-2x} \geq 0 \text{이므로 } -\sqrt{5-2x} \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{5-2x}+1 \leq 1$$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x \mid x \leq \frac{5}{2}\right\}$ 이고, 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.

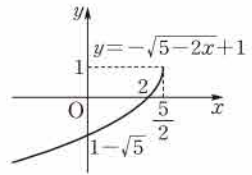
② $y = -\sqrt{5-2x}+1$ 에 $x=2$ 를 대입하면 $y=0$

따라서 그래프는 점 $(2, 0)$ 을 지난다.

③ $y = -\sqrt{5-2x}+1 = -\sqrt{-2\left(x-\frac{5}{2}\right)}+1$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{5}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

④, ⑤ $y = -\sqrt{5-2x}+1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않고, y 축과 음의 부분에서 만난다.

답 ③



42 $\therefore a < 0, b > 0$ 이면 정의역이 $\{x|x \geq 0\}$, 치역이 $\{y|y \leq 0\}$ 이므로 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

ㄷ. 그래프는 $y = a\sqrt{-bx}$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

참고 ㄷ. 그래프는 $y = -a\sqrt{-bx}$ 의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

43 $y = -\sqrt{6x+k}-2 = -\sqrt{6\left(x+\frac{k}{6}\right)}-2$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{6x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{k}{6}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1 \leq x \leq 3$ 에서

$y = -\sqrt{6x+k}-2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x = -1$ 일 때 최댓값

$$-\sqrt{-6+k}-2,$$

$x = 3$ 일 때 최솟값

$$-\sqrt{18+k}-2$$

를 갖는다.

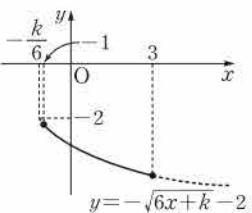
$$\text{즉 } -\sqrt{-6+k}-2 = -3 \text{이므로 } \sqrt{-6+k} = 1$$

$$-6+k = 1 \quad \therefore k = 7$$

따라서 구하는 최솟값은

$$-\sqrt{18+7}-2 = -7$$

답 ②



44 $y = \sqrt{4x+5}+a = \sqrt{4\left(x+\frac{5}{4}\right)}+a$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y = \sqrt{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{5}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \sqrt{4x+5}+a$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x = -\frac{5}{4}$

일 때 최솟값 -6 을 갖는다.

$$\therefore a = -6$$

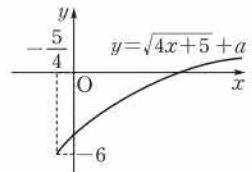
즉 $y = \sqrt{4x+5}-6$ 의 그래프가 점 $(b, -1)$ 을 지나므로

$$\sqrt{4b+5}-6 = -1, \quad \sqrt{4b+5} = 5$$

$$4b+5 = 25 \quad \therefore b = 5$$

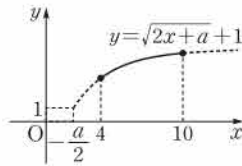
$$\therefore a+b = -1$$

답 ③



45 $y = \sqrt{2x+a}+1 = \sqrt{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}+1$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $4 \leq x \leq 10$ 에서 $y = \sqrt{2x+a}+1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $x=10$ 일 때 최댓값 $\sqrt{20+a}+1$,
 $x=4$ 일 때 최솟값 $\sqrt{8+a}+1$ 을 갖는다.



즉 $\sqrt{20+a}+1=5$ 이므로

$$\sqrt{20+a}=4, \quad 20+a=16$$

$$\therefore a=-4$$

따라서 구하는 최솟값은

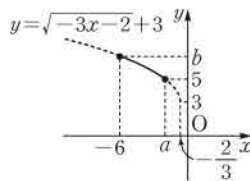
$$\sqrt{8-4}+1=3$$

답 3

46 $y = \sqrt{-3x-2}+3 = \sqrt{-3(x+\frac{2}{3})}+3$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{2}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-6 \leq x \leq a$ 에서

$y = \sqrt{-3x-2}+3$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-6$ 일 때 최댓값 b ,

$x=a$ 일 때 최솟값 5

를 갖는다.

$$\therefore b = \sqrt{-3 \cdot (-6)-2}+3=7$$

또 $5 = \sqrt{-3a-2}+3$ 이므로

$$\sqrt{-3a-2}=2$$

$$-3a-2=4 \quad \therefore a=-2$$

$$\therefore ab=-14$$

답 -14

47 $y = -\sqrt{-x+a}+1 = -\sqrt{-(x-a)}+1$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$y = -\sqrt{-x+a}+1$ 의 그래프가

제4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $a > 0$ 이고, $x=0$ 일 때

$y < 0$ 이어야 하므로

$$-\sqrt{a}+1 < 0, \quad \sqrt{a} > 1$$

$$\therefore a > 1$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 2이므로 $k=2$

→ 1

즉 $3 \leq x \leq 11$ 에서 함수 $y = \sqrt{x-2}+3$ 은

$x=11$ 일 때 최댓값 $\sqrt{9}+3=6$,

$x=3$ 일 때 최솟값 $\sqrt{1}+3=4$

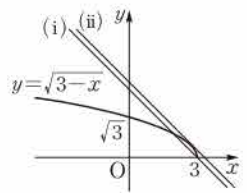
를 가지므로 구하는 합은

$$6+4=10$$

→ 2

답 10

48 $y = \sqrt{3-x} = \sqrt{-(x-3)}$ 이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, $y = -x+k$ 는 기울기가 -1 이고 y 절편이 k 인 직선이다.



(i) 직선 $y = -x+k$ 가 점 $(3, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = -3+k \quad \therefore k=3$$

(ii) 함수 $y = \sqrt{3-x}$ 의 그래프와 직선 $y = -x+k$ 가 접할 때,

$\sqrt{3-x} = -x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$3-x = x^2-2kx+k^2$$

$$\therefore x^2-(2k-1)x+k^2-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(2k-1)\}^2 - 4(k^2-3) = 0$$

$$-4k+13=0 \quad \therefore k = \frac{13}{4}$$

(i), (ii)에서 $3 \leq k < \frac{13}{4}$

답 4

예제 5

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

49 $y = -\sqrt{2x-8}+6 = -\sqrt{2(x-4)}+6$ 이므로 이 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y = mx-m$, 즉 $y = m(x-1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 직선

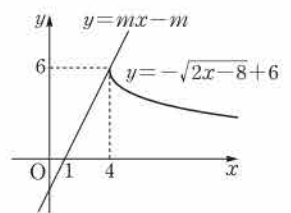
$y = mx-m$ 이 점 $(4, 6)$ 을 지날

때 m 의 값이 최대이므로

$$6 = 4m-m, \quad 3m=6$$

$$\therefore m=2$$

즉 m 의 최댓값은 2이다.



답 2

50 함수 $y = \sqrt{x+4}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이고, $y = -\frac{1}{2}x+k$ 는 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 y 절편이 k 인 직선이다.

이때 $A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 함수 $y = \sqrt{x+4}$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{1}{2}x+k$ 가 만나야 한다.

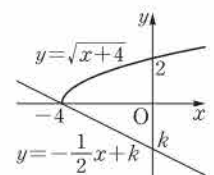
따라서 k 의 값은 오른쪽 그림과 같이 직선

$y = -\frac{1}{2}x+k$ 가 점 $(-4, 0)$ 을 지날 때 최

소이다.

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + k \text{에서} \quad k = -2$$

따라서 k 의 최솟값은 -2 이다.

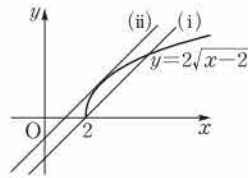


답 -2

참고 함수 $y = \sqrt{x+4}$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}x+k$ 가 만나도록 하는 k 의 값의 범위는 $k \geq -2$ 이다.

채점 기준	비율
① k 의 값을 구할 수 있다.	60 %
② 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	40 %

51 함수 $y=2\sqrt{x-2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$ 는 기울기가 1이고 y 절편이 k 인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지날 때,

$$0=2+k$$

$$\therefore k=-2$$

... ①

(ii) 함수 $y=2\sqrt{x-2}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 접할 때,

$$2\sqrt{x-2}=x+k \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$4(x-2)=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+2(k-2)x+k^2+8=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+8)=0$$

$$-4k-4=0$$

$$\therefore k=-1$$

... ②

(i), (ii)에서

$$f(k)=\begin{cases} 0 & (k>-1) \\ 1 & (k=-1 \text{ 또는 } k<-2) \\ 2 & (-2\leq k<-1) \end{cases}$$

... ③

$$\therefore f(-2)-f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1)-f(1)=2-0+1-0$$

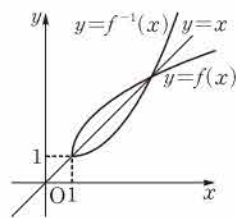
$$=3$$

... ④

답 3

채점 기준	비율
① 직선 $y=x+k$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지날 때 k 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② 주어진 함수의 그래프와 직선이 접할 때 k 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $f(k)$ 를 구할 수 있다.	20 %
④ $f(-2)-f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1)-f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

52 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표는 함수 $y=\sqrt{3x-3}+1$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표와 같다.



$$\sqrt{3x-3}+1=x \text{에서}$$

$$\sqrt{3x-3}=x-1$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$3x-3=x^2-2x+1$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$(x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 두 교점 A, B의 좌표는 $(1, 1)$, $(4, 4)$ 이므로 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+4}{2}, \frac{1+4}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

답 ③

53 $y=\sqrt{2-x}+5$ ($y\geq 5$)라 하면

$$y-5=\sqrt{2-x}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$(y-5)^2=2-x \quad \therefore x=-(y-5)^2+2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=-(x-5)^2+2 \quad (x\geq 5)$$

$$\therefore g(x)=-(x-5)^2+2 \quad (x\geq 5)$$

이때 $y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 $y=-x^2$ 의 그래프의 일부와 겹쳐진다.

따라서 $a=-1$, $p=-5$, $q=-2$ 이므로

$$apq=-10$$

답 -10

54 $y=\sqrt{ax+b}+2$ 의 그래프가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$$4=\sqrt{2a+b}+2, \quad \sqrt{2a+b}=2$$

$$\therefore 2a+b=4$$

..... ㉠

역함수의 그래프가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로 $y=\sqrt{ax+b}+2$ 의 그래프는 점 $(4, 2)$ 를 지난다. 즉

$$2=\sqrt{4a+b}+2, \quad \sqrt{4a+b}=0$$

$$\therefore 4a+b=0$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=8$

$$\therefore a-b=-10$$

답 ②

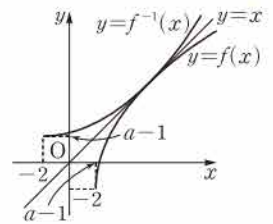
55 $y=4\sqrt{x+1}-2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=4\sqrt{x-a+1}-2$$

$$\therefore f(x)=4\sqrt{x-a+1}-2$$

... ①

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 접한다.



... ②

$$4\sqrt{x-a+1}-2=x \text{에서}$$

$$4\sqrt{x-a+1}=x+2$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$16(x-a+1)=x^2+4x+4$$

$$\therefore x^2-12x+16a-12=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-6)^2-(16a-12)=0$$

$$-16a+48=0$$

$$\therefore a=3$$

... ③

답 3

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
② $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 접함을 알 수 있다.	30 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	50 %

56 함수 $y = \frac{x^2}{4} + \frac{k}{4}$ ($x \geq 0$)는 집합 $\{x | x \geq 0\}$ 에서 집합

$\{y | y \geq \frac{k}{4}\}$ 로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{k}{4} \text{에서} \quad x^2 = 4y - k$$

$$\therefore x = \sqrt{4y - k} \quad (\because x \geq 0)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \sqrt{4x - k}$

즉 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이다.

이때 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭
이므로 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표는
 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점의 좌표와 같다.

따라서 이차방정식 $\frac{x^2}{4} + \frac{k}{4} = x$, 즉 $x^2 - 4x + k = 0$ 이 음이 아닌
서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2 - 4x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - k > 0 \quad \therefore k < 4$$

(ii) (두 근의 합) $= 4 > 0$

(iii) (두 근의 곱) ≥ 0 에서 $k \geq 0$

이상에서 $0 \leq k < 4$

따라서 정수 k 는 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

답 ④

57 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 두 점 (1, -2), (-1, 0)을
지나므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 두 점 (-2, 1), (0, -1)을
지난다.

또 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역이 $\{x | x \leq 1\}$, 치역이 $\{y | y \geq -2\}$
이므로 함수 $y = f(x)$ 의 정의역은 $\{x | x \geq -2\}$, 치역은
 $\{y | y \leq 1\}$ 이다.

즉 $y = -\sqrt{ax - b} + c = -\sqrt{a\left(x - \frac{b}{a}\right)} + c$ 는 $y = -\sqrt{ax}$ ($a > 0$)의

그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이
동한 그래프의 식이므로

$$\frac{b}{a} = -2, c = 1$$

또 $y = -\sqrt{ax - b} + 1$ 의 그래프가 점 (0, -1)을 지나므로

$$-1 = -\sqrt{-b} + 1, \quad \sqrt{-b} = 2$$

$$-b = 4 \quad \therefore b = -4$$

$\frac{b}{a} = -2$ 에 $b = -4$ 를 대입하면

$$-\frac{4}{a} = -2 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

답 ②

다른 풀이 $f^{-1}(x) = k(x-1)^2 - 2$ ($k > 0, x \leq 1$)라 하면

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 (-1, 0)을 지나므로 꼭짓점의 좌표가
(1, -2)이고 아래
로 볼록한 이차함수
의 그래프 중 $x \leq 1$ 인
부분이다.

$$0 = k(-1-1)^2 - 2, \quad 4k = 2$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 \quad (x \leq 1)$$

$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$ 라 하면 $(x-1)^2 = 2y + 4$
 $x-1 = \pm\sqrt{2y+4}$

$$x-1 = -\sqrt{2y+4} \quad (\because x \leq 1)$$

$$\therefore x = -\sqrt{2y+4} + 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = -\sqrt{2x+4} + 1$$

$$\therefore f(x) = -\sqrt{2x+4} + 1$$

따라서 $a = 2, b = -4, c = 1$ 이므로

$$a + b + c = -1$$

예제 B $\frac{b}{a}$

$y = -\sqrt{ax-b} + c$ ($a \neq 0, y \leq c$)라 하면

$$y - c = -\sqrt{ax - b}, \quad (y - c)^2 = ax - b$$

$$\therefore x = \frac{1}{a} \{ (y - c)^2 + b \}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{a} \{ (x - c)^2 + b \}$

즉 $y = -\sqrt{ax-b} + c$ ($a \neq 0$)의 역함수는

$$y = \frac{1}{a} (x - c)^2 + \frac{b}{a} \quad (x \leq c)$$

따라서 주어진 함수 $f(x) = -\sqrt{ax-b} + c$ 의 역함수를

$f^{-1}(x) = k(x-1)^2 - 2$ ($k > 0, x \leq 1$)로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} 58 \quad (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(6) &= (g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g)(6) \\ &= (f^{-1} \circ g)(6) \\ &= f^{-1}(g(6)) \end{aligned}$$

이때 $g(6) = \sqrt{5 \cdot 6 + 6} = 6$ 이므로

$$f^{-1}(g(6)) = f^{-1}(6)$$

$f^{-1}(6) = k$ 라 하면 $f(k) = 6$

$$\frac{4k}{k-2} = 6, \quad 4k = 6k - 12$$

$$\therefore k = 6$$

$$\therefore (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(6) = 6$$

답 6

59 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ 이므로 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함
수이다.

$g(5) = k$ 라 하면 $f(k) = 5$

$$\sqrt{3k+1} = 5, \quad 3k+1 = 25$$

$$\therefore k = 8$$

$g(8) = m$ 이라 하면 $f(m) = 8$

$$\sqrt{3m+1} = 8, \quad 3m+1 = 64$$

$$\therefore m = 21$$

$$\therefore (g \circ g)(5) = g(g(5))$$

$$= g(8) = 21$$

답 ⑤

60 $f^{-1}(g(x)) = 6x$ 에서

$$f(f^{-1}(g(x))) = f(6x)$$

$$\therefore g(x) = f(6x)$$

$$\therefore g(3) = f(18) = \sqrt{2 \cdot 18 - 12} = 2\sqrt{6}$$

답 ②

다른 풀이 $y = \sqrt{2x-12}$ ($y \geq 0$)라 하고 이 식의 양변을 제곱하면

$$y^2 = 2x - 12 \quad \therefore x = \frac{1}{2}y^2 + 6$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 6 \quad (x \geq 0)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6 \quad (x \geq 0)$$

$$f^{-1}(g(x)) = 6x \text{에서} \quad \frac{1}{2}\{g(x)\}^2 + 6 = 6x$$

$$\{g(x)\}^2 = 12x - 12$$

이때 $x \geq 1$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이므로

$$g(x) = \sqrt{12x - 12}$$

$$\therefore g(3) = \sqrt{12 \cdot 3 - 12} = 2\sqrt{6}$$

61 $(f^{-1} \circ f^{-1})(a) = 12$ 에서

$$(f \circ f)^{-1}(a) = 12$$

$$\therefore (f \circ f)(12) = a$$

... ①

이때 $f(12) = 2 - \sqrt{3 \cdot 12} = -4$ 이고, $f(-4) = \sqrt{4 - 3 \cdot (-4)} = 4$

이므로

$$a = (f \circ f)(12) = f(f(12))$$

$$= f(-4) = 4$$

... ②

답 4

채점 기준	비율
① $(f \circ f)(12) = a$ 임을 알 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	60 %

62 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y = f(x)$ 의 정의역과 치역은 각각

$$\{x | x \geq 3\}, \{y | y \geq 2\}$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x-1} = \frac{(x-1)+3}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 1$$

이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x \geq 2$ 에서 $1 < g(x) \leq g(2)$ 이고

$$g(2) = 4 \text{이므로}$$

$$1 < g(x) \leq 4$$

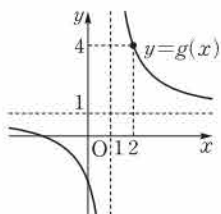
따라서 함수 $y = (g \circ f)(x)$ 의 치역은

$$\{y | 1 < y \leq 4\}$$

이므로 $a = 1, b = 4$

$$\therefore b - a = 3$$

답 3



ME
MO

ME
MO