베이직쎈 공통수학2

정답 및 풀이

Ⅰ 도형의 방정식

01 평면좌표 2
02 직선의 방정식 10
03 원의 방정식 21
04 도형의 이동 38

Ⅱ 집합과 명제

05 집합의 뜻과 표현 48
06 집합의 연산 55
07 명제 64
08 명제의 역과 대우 71

Ⅲ 함수

09 함수 78
10 유리식과 유리함수 91
11 무리식과 무리함수 101

* 정답을 확인하려 할 때에는 「빠른 정답 찾기」를 이용하면 편리합니다.

베이직쎈 BOX

I. 도형의 방정식

01 평면좌표

01 두 점 사이의 거리

개념 01 두 점 사이의 거리

본책 8쪽

① x축 위의 점 ➡ $(a, 0)$
② y축 위의 점 ➡ $(0, a)$
③ 직선 $y=mx+n$ 위의 점 ➡ $(a, am+n)$

01 $\overline{AB}=|8-1|=7$ 답 7

02 $\overline{AB}=|-2-2|=4$ 답 4

03 $\overline{AB}=|-2-(-7)|=5$ 답 5

04 $\overline{OA}=|9|=9$ 답 9

05 $\overline{OA}=|-3|=3$ 답 3

06 $\overline{AB}=\sqrt{(8-2)^2+(7-7)^2}=6$ 답 6

07 $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-3)\}^2+(6-0)^2}$
$=2\sqrt{13}$ 답 $2\sqrt{13}$

$\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$
$=2\sqrt{13}$

08 $\overline{AB}=\sqrt{(5-4)^2+\{3-(-2)\}^2}=\sqrt{26}$ 답 $\sqrt{26}$

09 $\overline{AB}=\sqrt{\{-4-(-7)\}^2+\{1-(-1)\}^2}=\sqrt{13}$
답 $\sqrt{13}$

10 $\overline{OA}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$ 답 10

11 답 2, 14 ◎ −6, 6, 14, 2

12 $\overline{AB}=|a|$이므로 $|a|=3$
$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$ 답 −3, 3

13 $\overline{AB}=|a-2|$이므로 $|a-2|=8$
$a-2=-8$ 또는 $a-2=8$
$\therefore a=-6$ 또는 $a=10$ 답 −6, 10

14 답 0, 6 ◎ 6, 0, 6

15 $\overline{AB}=\sqrt{(a-2)^2+(3-6)^2}$이므로
$\sqrt{(a-2)^2+9}=3$
양변을 제곱하면 $(a-2)^2+9=9$
$(a-2)^2=0$ $\therefore a=2$ 답 2

16 $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(2-a)^2}$이므로
$\sqrt{4+(2-a)^2}=2\sqrt{2}$
양변을 제곱하면 $4+(2-a)^2=8$
$a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$
$\therefore a=0$ 또는 $a=4$ 답 0, 4

17 $\overline{AB}=\sqrt{4^2+a^2}$이므로
$\sqrt{16+a^2}=2\sqrt{5}$
양변을 제곱하면
$16+a^2=20$, $a^2=4$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$ 답 −2, 2

18 답 (14, 0) ◎ −5, 25, 28, 14, 14

19 구하는 점을 $P(a, 0)$이라 하면
$\overline{AP}=\sqrt{(a-2)^2+(-1)^2}$,
$\overline{BP}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+(-3)^2}$
이때 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-2)^2+1=(a+2)^2+9$
$a^2-4a+5=a^2+4a+13$
$8a=-8$ $\therefore a=-1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1, 0)$
답 $(-1, 0)$

20 구하는 점을 $P(a, 0)$이라 하면
$\overline{AP}=\sqrt{\{a-(-4)\}^2+\{-(-3)\}^2}$,
$\overline{BP}=\sqrt{\{a-(-1)\}^2+(-2)^2}$
이때 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a+4)^2+9=(a+1)^2+4$
$a^2+8a+25=a^2+2a+5$
$6a=-20$ $\therefore a=-\frac{10}{3}$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$
답 $\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$

21 답 (0, 9) ◎ 2, 2, 18, 9, 9

22 구하는 점을 $P(0, a)$라 하면
$\overline{AP}=\sqrt{(-3)^2+\{a-(-1)\}^2}$,
$\overline{BP}=\sqrt{\{-(-1)\}^2+(a-1)^2}$
이때 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$9+(a+1)^2=1+(a-1)^2$
$a^2+2a+10=a^2-2a+2$
$4a=-8$ $\therefore a=-2$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, -2)$
답 $(0, -2)$

23 구하는 점을 $P(0, a)$라 하면
$\overline{AP}=\sqrt{(-1)^2+\{a-(-4)\}^2}$,
$\overline{BP}=\sqrt{\{-(-2)\}^2+\{a-(-5)\}^2}$
이때 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$1+(a+4)^2=4+(a+5)^2$
$a^2+8a+17=a^2+10a+29$
$2a=-12$ $\therefore a=-6$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, -6)$
답 $(0, -6)$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 10쪽

01 $\overline{AB}=|3-x|$이므로
$|3-x|=5$
$3-x=-5$ 또는 $3-x=5$
$\therefore x=-2$ ($\because x<0$)
$\therefore \overline{OA}=|-2|=2$

답 ①

02 $\overline{AB}=|7-2|=5$, $\overline{BC}=|x-7|$
이때 $\overline{AB}+\overline{BC}=9$이므로
$5+|x-7|=9$, $|x-7|=4$
$x-7=-4$ 또는 $x-7=4$
$\therefore x=3$ 또는 $x=11$
따라서 모든 x의 값의 합은
$3+11=14$

답 14

03 $\overline{AB}=\sqrt{17}$에서 $\overline{AB}^2=17$이므로
$(a+2)^2+(4-3)^2=17$
$a^2+4a-12=0$, $(a+6)(a-2)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

답 ①

04 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로
$(1+1)^2+(2+1)^2=(a+1)^2+(-3+1)^2$
$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$
$\therefore a=-4$ ($\because a<0$)

답 -4

05 $\overline{AB}=\sqrt{(5-a)^2+(a+1)^2}$
$=\sqrt{2a^2-8a+26}$
$=\sqrt{2(a-2)^2+18}$
따라서 $\overline{AB}$의 길이가 최소가 되도록 하는 a의 값은 2이다.

답 ⑤

06 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$1^2+(a-2)^2=(-3)^2+(a-4)^2$
$a^2-4a+5=a^2-8a+25$
$4a=20$ $\therefore a=5$

답 ⑤

07 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-2)^2+6^2=(a-1)^2+(-7)^2$
$a^2-4a+40=a^2-2a+50$
$2a=-10$ $\therefore a=-5$
따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-5, 0)$

답 $(-5, 0)$

08 점 P의 좌표를 $(0, a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(-4)^2+(a+3)^2=(-5)^2+(a+1)^2$
$a^2+6a+25=a^2+2a+26$
$4a=1$ $\therefore a=\frac{1}{4}$
따라서 $P\left(0, \frac{1}{4}\right)$이므로 $\overline{OP}=\frac{1}{4}$

답 ①

09 x축 위의 점을 $A(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=2\sqrt{5}$에서
$\overline{AP}^2=20$이므로
$(3-a)^2+2^2=20$, $a^2-6a-7=0$
$(a+1)(a-7)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=7$
따라서 두 점의 좌표는 $(-1, 0)$, $(7, 0)$이므로 두 점 사이의 거리는
$|7-(-1)|=8$

답 ③

10 점 P의 좌표를 (a, a)라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a+2)^2+(a-2)^2=(a-2)^2+(a-4)^2$
$a^2+4a+4=a^2-8a+16$
$12a=12$ $\therefore a=1$
따라서 점 P의 좌표는
$(1, 1)$

답 $(1, 1)$

11 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$에서
$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$
$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서
$(a+3)^2+(b-3)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$
$a^2+6a+9=a^2-2a+1$
$8a=-8$ $\therefore a=-1$
$\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$에서
$(a-1)^2+(b+1)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$
$b^2+2b+1=b^2-6b+9$
$8b=8$ $\therefore b=1$
$\therefore ab=-1$

답 ③

12 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(4+1)^2+(3+2)^2}=5\sqrt{2}$,
$\overline{BC}=\sqrt{(5-4)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$,
$\overline{CA}=\sqrt{(5+1)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{5}$
(2) $\overline{AB}^2=(5\sqrt{2})^2=50$,
$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=(\sqrt{5})^2+(3\sqrt{5})^2=50$
따라서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$이므로 $\triangle ABC$는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

답 (1) $\overline{AB}=5\sqrt{2}$, $\overline{BC}=\sqrt{5}$, $\overline{CA}=3\sqrt{5}$
(2) $\angle C=90°$인 직각삼각형

13 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2}=4$,
$\overline{BC}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(1+1)^2}=4$,
$\overline{CA}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(1-3)^2}=4$
따라서 $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

베이직쎈 BOX

$(a+2)^2=(a-4)^2$

$\overline{AC}^2=\overline{CA}^2$이므로
$(-1-1)^2=(1+1)^2$

$(a-2)^2\geq 0$이므로
$2(a-2)^2+18\geq 18$
따라서 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{18}$, 즉 $3\sqrt{2}$이다.

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

(2) 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이는
$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2=4\sqrt{3}$

답 (1) 정삼각형 (2) $4\sqrt{3}$

14 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$,
$\overline{BC}=\sqrt{(3-4)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$,
$\overline{CA}=\sqrt{(-4)^2+(3+1)^2}=4\sqrt{2}$
따라서 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

답 ②

15 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$이어야 하므로
$(1+2)^2+(6-1)^2$
$=(2-1)^2+(a-6)^2+(2+2)^2+(a-1)^2$
$a^2-7a+10=0$, $(a-2)(a-5)=0$
$\therefore a=2$ 또는 $a=5$
따라서 모든 a의 값의 합은
$2+5=7$

답 ⑤

16 $P(a, 0)$이라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a+5)^2+(-1)^2+(a+3)^2+(-6)^2$
$=2a^2+16a+71$
$=2(a+4)^2+39$
따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=-4$일 때 최솟값 39를 갖는다.

답 ①

17 $P(0, a)$라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=1^2+(a-4)^2+(-5)^2+(a-2)^2$
$=2a^2-12a+46$
$=2(a-3)^2+28$
따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값은 $a=3$일 때 최소이므로 점 P의 좌표는 $(0, 3)$

답 $(0, 3)$

18 $P(a, a+1)$이라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$
$=(a-1)^2+(a+1)^2+(a-4)^2+(a+1)^2$
$=4a^2-6a+19$
$=4\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{67}{4}$
따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값은 $a=\frac{3}{4}$일 때 최소이므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$

답 $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$

02 선분의 내분점

개념 02 수직선 위의 선분의 내분점 본책 13쪽

01 답 3

02 답 1

03 답 4

04 답 AQ

05 $\frac{3\cdot 5+1\cdot 1}{3+1}=4$이므로
$P(4)$

답 4

06 $\frac{3+9}{2}=6$이므로
$P(6)$

답 6

07 $\frac{2\cdot 3+3\cdot(-2)}{2+3}=0$이므로
$P(0)$

답 0

08 $\frac{1\cdot(-3)+2\cdot 6}{1+2}=3$이므로
$P(3)$

답 3

09 $\frac{4\cdot(-4)+1\cdot(-1)}{4+1}=-\frac{17}{5}$이므로
$P\left(-\frac{17}{5}\right)$

답 $-\frac{17}{5}$

개념 03 좌표평면 위의 선분의 내분점 본책 14쪽

10 $\overline{AB}$를 1 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\frac{2+5}{2}, \frac{1+7}{2}\right)$
$\therefore \left(\frac{7}{2}, 4\right)$

답 $\left(\frac{7}{2}, 4\right)$

11 $\overline{AB}$를 2 : 5로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\frac{2\cdot 9+5\cdot 2}{2+5}, \frac{2\cdot 6+5\cdot(-1)}{2+5}\right)$
$\therefore (4, 1)$

답 $(4, 1)$

12 $\overline{AB}$를 1 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\frac{1\cdot(-3)+3\cdot 5}{1+3}, \frac{1\cdot(-3)+3\cdot(-1)}{1+3}\right)$
$\therefore \left(3, -\frac{3}{2}\right)$

답 $\left(3, -\frac{3}{2}\right)$

13 $\overline{AB}$를 5 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\frac{5\cdot 5+1\cdot(-1)}{5+1}, \frac{5\cdot 0+1\cdot 6}{5+1}\right)$
$\therefore (4, 1)$

답 $(4, 1)$

14 $\overline{AB}$를 3 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\frac{3\cdot 7+2\cdot(-3)}{3+2}, \frac{3\cdot(-4)+2\cdot 1}{3+2}\right)$
$\therefore (3, -2)$

답 $(3, -2)$

15 답 $a=-3$, $b=6$
a, 1, $3a+4$, $2b+3$, -3, 6

베이직쎈 BOX

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\overline{AB}$를 1 : 1로 내분하는 점은 $\overline{AB}$의 중점이다.

$2a^2+16a+71$
$=2(a^2+8a+16-16)+71$
$=2(a^2+8a+16)-32+71$
$=2(a+4)^2+39$

점 P의 x좌표를 a라 하면 점 P가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 y좌표는 $a+1$이다.

$\frac{3a+4}{5}=-1$에서
$3a+4=-5$
$\therefore a=-3$
$\frac{2b+3}{5}=3$에서
$2b+3=15$
$\therefore b=6$

16 $\overline{AB}$를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot(-3)+1\cdot a}{3+1}, \frac{3\cdot b+1\cdot 4}{3+1}\right)$,

즉 $\left(\frac{a-9}{4}, \frac{3b+4}{4}\right)$

이 점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, 7\right)$이므로

$\frac{a-9}{4}=\frac{3}{2}$, $\frac{3b+4}{4}=7$

$a-9=6$, $3b+4=28$

$\therefore a=15$, $b=8$ 답 $a=15$, $b=8$

17 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot b+1\cdot 2}{2+1}, \frac{2\cdot(-3)+1\cdot a}{2+1}\right)$, 즉 $\left(\frac{2b+2}{3}, \frac{a-6}{3}\right)$

이 점의 좌표가 $\left(3, -\frac{5}{3}\right)$이므로

$\frac{2b+2}{3}=3$, $\frac{a-6}{3}=-\frac{5}{3}$

$2b+2=9$, $a-6=-5$

$\therefore a=1$, $b=\frac{7}{2}$ 답 $a=1$, $b=\frac{7}{2}$

개념 04 삼각형의 무게중심 본책 15쪽

18 $G\left(\frac{0+4-1}{3}, \frac{0-2+8}{3}\right)$ $\therefore G(1, 2)$

답 $(1, 2)$

19 $G\left(\frac{2+5-1}{3}, \frac{4+2+0}{3}\right)$ $\therefore G(2, 2)$

답 $(2, 2)$

20 $G\left(\frac{3+7+2}{3}, \frac{-1-2-3}{3}\right)$ $\therefore G(4, -2)$

답 $(4, -2)$

21 $G\left(\frac{1-6-4}{3}, \frac{-3-4+10}{3}\right)$ $\therefore G(-3, 1)$

답 $(-3, 1)$

22 $G\left(\frac{8+3-7}{3}, \frac{-4+7+9}{3}\right)$ $\therefore G\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

답 $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

23 답 $a=-2$, $b=13$

3, 3, 3, 3, 4, -2, 13

24 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{6+13+b}{3}, \frac{4+a-5}{3}\right)$ $\therefore \left(\frac{b+19}{3}, \frac{a-1}{3}\right)$

따라서 $\frac{b+19}{3}=6$, $\frac{a-1}{3}=-3$이므로

$b+19=18$, $a-1=-9$

$\therefore a=-8$, $b=-1$ 답 $a=-8$, $b=-1$

25 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-3+b+4}{3}, \frac{a-1+5}{3}\right)$ $\therefore \left(\frac{b+1}{3}, \frac{a+4}{3}\right)$

따라서 $\frac{b+1}{3}=2$, $\frac{a+4}{3}=2$이므로

$b+1=6$, $a+4=6$

$\therefore a=2$, $b=5$ 답 $a=2$, $b=5$

개념 05 중점의 사각형에의 활용 본책 16쪽

26 답 $a=4$, $b=5$

$\frac{5}{2}$, -1, -1, $\frac{5}{2}$, 4, 5

$\frac{3}{2}=\frac{-1+a}{2}$에서 $a-1=3$ $\therefore a=4$

$\frac{5}{2}=\frac{b}{2}$에서 $b=5$

27 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+6}{2}, \frac{4+3}{2}\right)$ $\therefore \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{5+a}{2}, \frac{-4+b}{2}\right)$

두 대각선의 중점이 일치하므로

$\frac{5}{2}=\frac{5+a}{2}$, $\frac{7}{2}=\frac{-4+b}{2}$

$\therefore a=0$, $b=11$ 답 $a=0$, $b=11$

28 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1-2}{2}, \frac{3+a}{2}\right)$ $\therefore \left(-\frac{3}{2}, \frac{3+a}{2}\right)$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-6+b}{2}, \frac{2-7}{2}\right)$ $\therefore \left(\frac{-6+b}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

두 대각선의 중점이 일치하므로

$-\frac{3}{2}=\frac{-6+b}{2}$, $\frac{3+a}{2}=-\frac{5}{2}$

$\therefore a=-8$, $b=3$ 답 $a=-8$, $b=3$

29 답 $a=6$, $b=4$

2, 2, 2, 2, 12, 6, 6, 4

$a^2-4a-12=0$에서 $(a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=6$

이때 $a>0$이므로 $a=6$

$\frac{a+11}{3}=3$에서 $a+11=9$

$\therefore a=-2$

$\frac{b-1}{3}=4$에서 $b-1=12$

$\therefore b=13$

30 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$ $\therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+1}{2}, \frac{a+0}{2}\right)$ $\therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)$

두 대각선의 중점이 일치하므로

$\frac{-1+b}{2}=\frac{a}{2}$

$\therefore b=a+1$ ····· ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{AD}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$이므로

$1^2+(a+1)^2=(1+1)^2+1^2$

$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ ($\because a<0$)

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

답 $a=-3$, $b=-2$

31 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2-10}{2}, \frac{a-3}{2}\right)$ $\therefore \left(-6, \frac{a-3}{2}\right)$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-6-6}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$ $\therefore \left(-6, \frac{b}{2}\right)$

두 대각선의 중점이 일치하므로

$\frac{a-3}{2}=\frac{b}{2}$

$\therefore b=a-3$ ····· ㉠

또 $\overline{AD}=\overline{CD}$에서 $\overline{AD}^2=\overline{CD}^2$이므로

$(-2+6)^2+a^2=(-6+10)^2+3^2$

$a^2=9$ $\therefore a=-3$ ($\because a<0$)

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=-6$

답 $a=-3$, $b=-6$

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 17쪽

01 답 (가) E (나) D

02 $a=\frac{1\cdot(-4)+4\cdot6}{1+4}=4$

$b=\frac{4\cdot(-4)+1\cdot6}{4+1}=-2$ 답 ⑤

03 점 P의 좌표는

$\frac{2\cdot8+a\cdot(-2)}{2+a}=\frac{-2a+16}{a+2}$

따라서 $\frac{-2a+16}{a+2}=2$이므로

$-2a+16=2a+4$, $4a=12$

$\therefore a=3$ 답 ③

04 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot a+1\cdot(-10)}{2+1}, \frac{2\cdot(-2)+1\cdot7}{2+1}\right)$

$\therefore \left(\frac{2a-10}{3}, 1\right)$

베이직쎈 BOX

$\overline{AB}$의 내분점의 좌표는

$\left(0, \frac{1\cdot5+3\cdot1}{1+3}\right)$

$\therefore (0, 2)$

이 점의 좌표가 $(-4, b)$이므로

$\frac{2a-10}{3}=-4$, $1=b$

$2a-10=-12$, $b=1$

$\therefore a=-1$, $b=1$ 답 $a=-1$, $b=1$

05 $\overline{AB}$를 3 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot8+2\cdot(-2)}{3+2}, \frac{3\cdot(-3)+2\cdot7}{3+2}\right)$

$\therefore (4, 1)$

따라서 이 점과 원점 사이의 거리는

$\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$ 답 $\sqrt{17}$

06 $\overline{AB}$를 1 : 3으로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로 x좌표가 0이다.

$\overline{AB}$를 1 : 3으로 내분하는 점의 x좌표는

$\frac{1\cdot(-3)+3\cdot a}{1+3}=0$

이므로

$3a-3=0$ $\therefore a=1$ 답 ③

07 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot a+2\cdot1}{1+2}, \frac{1\cdot(-3)+2\cdot3}{1+2}\right)$ $\therefore \left(\frac{a+2}{3}, 1\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

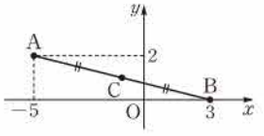
$1=-\frac{a+2}{3}$, $a+2=-3$

$\therefore a=-5$ 답 ①

08 (1) $\overline{AB}=2\overline{BC}$에서

$\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$

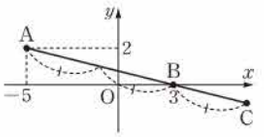
점 C가 $\overline{AB}$ 위의 점이므로 점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 1 : 1로 내분하는 점, 즉 $\overline{AB}$의 중점이다.



따라서 점 C의 좌표는

$\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2}{2}\right)$ $\therefore (-1, 1)$

(2) $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$이고 점 C가 $\overline{AB}$ 위의 점이 아니므로 점 B는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 2 : 1로 내분하는 점이다.



C(a, b)라 하면

$\frac{2\cdot a+1\cdot(-5)}{2+1}=3$, $\frac{2\cdot b+1\cdot2}{2+1}=0$

$2a-5=9$, $2b+2=0$

$\therefore a=7$, $b=-1$

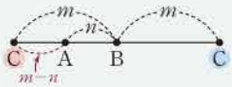
$\therefore$ C$(7, -1)$

답 (1) $(-1, 1)$ (2) $(7, -1)$

베이직쎈 TIP

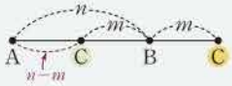
두 점 A, B를 지나는 직선 위의 점 C가
$m\overline{AB}=n\overline{BC}$, 즉 $\overline{AB}:\overline{BC}=n:m$
을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

① $m>n$일 때



➔ 점 B가 선분 AC를 $n:m$으로 내분하는 점이거나 점 A가 선분 CB를 $(m-n):n$으로 내분하는 점이다.

② $m<n$일 때

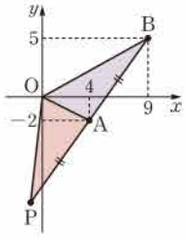


➔ 점 B가 선분 AC를 $n:m$으로 내분하는 점이거나 점 C가 선분 AB를 $(n-m):m$으로 내분하는 점이다.

베이직쎈 BOX

09 $\triangle AOP:\triangle BOP=1:2$이므로
$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$

점 P가 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점이므로 점 A는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PB}$를 1 : 1로 내분하는 점, 즉 $\overline{PB}$의 중점이다.



$P(a, b)$라 하면
$\frac{a+9}{2}=4$, $\frac{b+5}{2}=-2$
$a+9=8$, $b+5=-4$
$\therefore a=-1$, $b=-9$
$\therefore P(-1, -9)$ 답 $(-1, -9)$

△AOP와 △BOP의 높이가 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

10 $G\left(\frac{1+8+3}{3}, \frac{7-4-3}{3}\right)$ $\therefore G(4, 0)$
따라서 $a=4$, $b=0$이므로
$a-b=4$ 답 4

11 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 △ABC의 무게중심은 $\overline{AM}$을 2 : 1로 내분하는 점이므로
$\left(\frac{2\cdot(-1)+1\cdot4}{2+1}, \frac{2\cdot6+1\cdot2}{2+1}\right)$
$\therefore \left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$ 답 ④

다른 풀이 $B(a, b)$, $C(c, d)$라 하면 $\frac{a+c}{2}=-1$, $\frac{b+d}{2}=6$이므로
$a+c=-2$, $b+d=12$
따라서 △ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{4-2}{3}, \frac{2+12}{3}\right)$ $\therefore \left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$

12 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (0, 0)이므로
$\frac{a+(2b-1)+3}{3}=0$, $\frac{b+5+a}{3}=0$
$a+2b=-2$, $a+b=-5$
앞의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-8$, $b=3$ 답 $a=-8$, $b=3$

13 점 C의 좌표를 (a, b)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심이 G(1, 2)이므로
$\frac{-6+5+a}{3}=1$, $\frac{-2+8+b}{3}=2$
$a-1=3$, $b+6=6$
$\therefore a=4$, $b=0$
따라서 C(4, 0)이므로 $\overline{CG}$의 길이는
$\overline{CG}=\sqrt{(1-4)^2+2^2}=\sqrt{13}$ 답 ③

14 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표에서
$\frac{-5+2}{2}=\frac{a+b}{2}$ $\therefore a+b=-3$ 답 ④

15 점 D의 좌표를 (a, b)라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로
$\frac{-2+7}{2}=\frac{4+a}{2}$, $\frac{3+3}{2}=\frac{-1+b}{2}$
$\therefore a=1$, $b=7$
따라서 점 D의 좌표는 (1, 7) 답 ③

16 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표에서
$\frac{a+5}{2}=\frac{3+b}{2}$ $\therefore b=a+2$ …… ㉠
또 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로
$(3-a)^2+(-2)^2=(5-3)^2+1^2$
$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$
$\therefore a=2$ 또는 $a=4$
$a=2$ 또는 $a=4$를 ㉠에 대입하면
$a=2$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=6$
$\therefore a+b=6$ 또는 $a+b=10$
따라서 $a+b$의 최댓값은 10이다. 답 10

$\overline{BC}=\overline{CD}$임을 이용하여 b의 값을 먼저 구할 수도 있다.

17 (1) $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로
$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$
$\overline{AB}=\sqrt{(-4+2)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$,
$\overline{AC}=\sqrt{2^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$이므로
$\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$
$\therefore \overline{BD}:\overline{CD}=2:1$

(2) 점 D는 $\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는
$\left(\frac{2\cdot0+1\cdot(-4)}{2+1}, \frac{2\cdot2+1\cdot(-1)}{2+1}\right)$
$\therefore \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$
답 (1) 2 : 1 (2) $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$

18 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$

$\overline{AB} = \sqrt{(-2-3)^2+(-7-5)^2} = 13$,

$\overline{AC} = \sqrt{(7-3)^2+(2-5)^2} = 5$이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$

즉 점 D는 $\overline{BC}$를 13 : 5로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$\left(\frac{13\cdot 7+5\cdot(-2)}{13+5}, \frac{13\cdot 2+5\cdot(-7)}{13+5}\right)$

$\therefore \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 답 $\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP! 본책 20쪽

01 전략 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$에서 $\overline{AB}^2 = 32$이므로

$(a+3)^2+(-4)^2 = 32$

$a^2+6a-7 = 0$, $(a+7)(a-1) = 0$

$\therefore a = -7$ 또는 $a = 1$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-7+1 = -6$ 답 ①

02 전략 직선 $y = mx+n$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, am+n)$으로 놓는다.

풀이 $P(a, -a+2)$라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+(-a+2)^2 = (a-3)^2+(-a)^2$

$2a^2-2a+5 = 2a^2-6a+9$

$4a = 4$ $\therefore a = 1$

따라서 점 P의 y좌표는

$-1+2 = 1$ 답 ③

03 전략 삼각형의 외심에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리가 같음을 이용한다.

풀이 삼각형의 외심 $P(a, b)$에서 세 점 A, B, C에 이르는 거리가 모두 같으므로

$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$

$\overline{PA} = \overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$이므로

$a^2+(b-1)^2 = (a-5)^2+(b-1)^2$ ····· $a^2 = (a-5)^2$

$a^2 = a^2-10a+25$

$10a = 25$ $\therefore a = \frac{5}{2}$

$\overline{PB} = \overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$이므로

$(a-5)^2+(b+2)^2 = (a-5)^2+(b-1)^2$ ····· $(b+2)^2 = (b-1)^2$

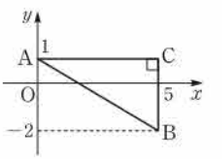
$b^2+4b+4 = b^2-2b+1$, $6b = -3$

$\therefore b = -\frac{1}{2}$

$\therefore a+b = 2$ 답 ①

베이직쎈 BOX

다른 풀이 $\triangle ABC$는 $\angle C = 90°$인 직각삼각형이므로 $\triangle ABC$의 외심은 $\overline{AB}$의 중점이다.



$\therefore a = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$,

$b = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore a+b = 2$

04 전략 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$임을 이용한다.

풀이 $\triangle ABC$가 정삼각형이므로

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$

$\overline{AB} = \sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2} = 2\sqrt{5}$이므로 $C(a, b)$라 하면

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ $(a-1)^2+(b+2)^2 = (2\sqrt{5})^2$

$\therefore a^2+b^2-2a+4b-15 = 0$ ····· ㉠

$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 또 $(a+1)^2+(b-2)^2 = (2\sqrt{5})^2$이므로

$a^2+b^2+2a-4b-15 = 0$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$4a-8b = 0$ $\therefore a = 2b$

이 식을 ㉠에 대입하여 정리하면

$5b^2-15 = 0$, $b^2 = 3$

$\therefore b = \pm\sqrt{3}$

$\therefore a = \pm 2\sqrt{3}$, $b = \pm\sqrt{3}$ (복호동순)

$b = \sqrt{3}$을 $a = 2b$에 대입하면 $a = 2\sqrt{3}$

$b = -\sqrt{3}$을 $a = 2b$에 대입하면 $a = -2\sqrt{3}$

이때 점 C는 제1사분면 위의 점이므로 x좌표는 $2\sqrt{3}$

답 ⑤

05 전략 $P(0, a)$라 하고 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 a에 대한 이차식으로 나타낸다.

풀이 $P(0, a)$라 하면 점 P가 y축 위의 점이므로 x좌표는 0이다.

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 = 2^2+(a-5)^2+(-k)^2+(a-1)^2$

$= 2a^2-12a+30+k^2$

$= 2(a-3)^2+12+k^2$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a = 3$일 때 최솟값 $12+k^2$을 가지므로

$12+k^2 = 16$, $k^2 = 4$

$\therefore k = 2$ ($\because k > 0$)

답 ②

06 전략 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{3\cdot a+2\cdot(-4)}{3+2} = 2$이므로

$3a-8 = 10$, $3a = 18$

$\therefore a = 6$ 답 ⑤

07 전략 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$임을 이용한다.

베이직쎈 BOX

풀이 $\overline{AB}$를 5 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{5\cdot5+3\cdot1}{5+3}, \frac{5\cdot(-4)+3\cdot4}{5+3}\right)$

$\therefore \left(\frac{7}{2}, -1\right)$

이 점이 직선 $y=-x+k$ 위에 있으므로

$-1=-\frac{7}{2}+k \quad \therefore k=\frac{5}{2}$ 답 ④

08 전략 세 점의 좌표를 미지수로 나타내고, 중점과 무게중심의 좌표를 이용하여 미지수에 대한 식을 세운다.

풀이 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하자.

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=2, \frac{y_1+y_2}{2}=5$

$\therefore x_1+x_2=4, y_1+y_2=10$ ····· ㉠

$\overline{BC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$이므로

$\frac{x_2+x_3}{2}=-2, \frac{y_2+y_3}{2}=1$

$\therefore x_2+x_3=-4, y_2+y_3=2$ ····· ㉡

$\overline{CA}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_3+x_1}{2}, \frac{y_3+y_1}{2}\right)$이므로

$\frac{x_3+x_1}{2}=a, \frac{y_3+y_1}{2}=-1$

$\therefore x_1+x_3=2a, y_1+y_3=-2$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$2(x_1+x_2+x_3)=2a, 2(y_1+y_2+y_3)=10$

$\therefore x_1+x_2+x_3=a, y_1+y_2+y_3=5$

따라서 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{3}, \frac{5}{3}\right)$

이므로 $\frac{a}{3}=1, \frac{5}{3}=b \quad \therefore a=3, b=\frac{5}{3}$

$\therefore ab=5$ 답 ⑤

다른 풀이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 중점을 각각 D, E, F라 하면 △ABC의 무게중심은 △DEF의 무게중심과 일치하므로

$1=\frac{2-2+a}{3}, b=\frac{5+1-1}{3}$

$\therefore a=3, b=\frac{5}{3}$

$\therefore ab=5$

09 전략 평행사변형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 중점이 같음을 이용한다.

풀이 점 D의 좌표를 (a, b)라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{4+7}{2}=\frac{2+a}{2}, \frac{3+4}{2}=\frac{-1+b}{2}$

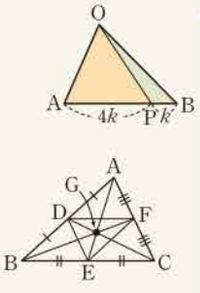
$\therefore a=9, b=8$

따라서 D(9, 8)이므로

$\overline{OD}^2=9^2+8^2=145$

답 ②

$500t^2-3000t+5000$
$=500(t^2-6t+9-9)$
$+5000$
$=500(t^2-6t+9)$
$-4500+5000$
$=500(t-3)^2+500$



두 점 A, B의 y좌표가 모두 -4이므로 점 P의 y좌표도 -4이다.

10 전략 t분 후 두 사람 사이의 거리를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 지점 O를 원점으로 하는 좌표평면을 잡으면 t분 후 윤희와 지민이의 위치는 각각

$(0, 50-10t)$, $(-50+20t, 0)$

두 사람 사이의 거리는

$\sqrt{(-50+20t)^2+(-50+10t)^2}$

$=\sqrt{500t^2-3000t+5000}$

$=\sqrt{500(t-3)^2+500}$ (m)

따라서 $t=3$일 때 두 사람 사이의 거리가 최소이므로 3분 후에 가장 가까워진다.

답 3분

11 전략 점 (a, b)가 제4사분면 위의 점이면 $a>0$, $b<0$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 m : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{m\cdot1+3\cdot2}{m+3}, \frac{m\cdot3+3\cdot(-5)}{m+3}\right)$

$\therefore \left(\frac{m+6}{m+3}, \frac{3m-15}{m+3}\right)$

이 점이 제4사분면 위에 있으므로

$\frac{m+6}{m+3}>0, \frac{3m-15}{m+3}<0$

이때 m은 자연수이므로

$m+3>0, m+6>0$

따라서 $3m-15<0$이므로

$3m<15 \quad \therefore m<5$

즉 자연수 m의 최댓값은 4이다. 답 4

12 전략 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 길이의 비와 같음을 이용한다.

풀이 △OAP : △OPB=4 : 1이므로

$\overline{AP}$: $\overline{BP}$=4 : 1 ····· ❶

점 P가 $\overline{AB}$ 위의 점이므로 점 P는 $\overline{AB}$를 4 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는

$\left(\frac{4\cdot6+1\cdot3}{4+1}, -4\right) \quad \therefore \left(\frac{27}{5}, -4\right)$

즉 $a=\frac{27}{5}$, $b=-4$이므로

$a+b=\frac{7}{5}$ ····· ❷

답 $\frac{7}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{AP}$: $\overline{BP}$를 구할 수 있다.	40 %
❷	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	60 %

13 전략 △ABC의 무게중심의 좌표를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{-1+a+2}{3}, \frac{-7-2+b}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{a+1}{3}, \frac{b-9}{3}\right)$

따라서 $\frac{a+1}{3}=2$, $\frac{b-9}{3}=-1$이므로

$a+1=6$, $b-9=-3$

$\therefore a=5$, $b=6$

즉 B(5, −2), C(2, 6)이므로

$\overline{BC}=\sqrt{(5-2)^2+(-2-6)^2}=\sqrt{73}$

답 $\sqrt{73}$

14 전략 마름모 ABCD는 두 대각선 AC, BD의 중점이 같고, 네 변의 길이가 같음을 이용한다.

풀이 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표에서

$\frac{a+3}{2}=\frac{b+1}{2}$ $\therefore b=a+2$ ··· ❶

또 $\overline{AD}=\overline{CD}$에서 $\overline{AD}^2=\overline{CD}^2$이므로

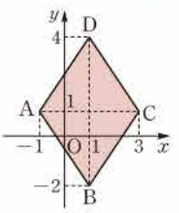
$(a-1)^2+(1-4)^2=(3-1)^2+(1-4)^2$

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a<0$)

$\therefore b=-1+2=1$ ··· ❷

따라서 A(−1, 1), B(1, −2)이므로 사각형 ABCD를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\overline{AC}=|3-(-1)|=4$, $\overline{BD}=|4-(-2)|=6$이므로 마름모 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6=12$ ··· ❸

답 12

단계	채점 기준	비율
❶	b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	□ABCD의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

베이직쎈 BOX

원점을 지나는 직선의 y절편은 0이다.

두 대각선의 길이가 a, b인 마름모의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$

$y-7=\frac{7-4}{9-3}(x-9)$에서 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

두 점의 y좌표가 일치하므로 x축에 평행한 직선이다.

두 점의 x좌표가 일치하므로 y축에 평행한 직선이다.

02 직선의 방정식

03 직선의 방정식

개념 06 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식 본책 22쪽

01 답 $y=x+2$ **02** 답 $y=-3x-1$

03 직선 $y=4x+1$의 기울기는 4이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=4x+3$ 답 $y=4x+3$

04 답 $y=-3x+4$ 1, −3, −3, 4

05 $y-6=5(x+2)$이므로

$y=5x+16$ 답 $y=5x+16$

06 답 $y=-x$

07 답 $y=\sqrt{3}x-5$ $60°$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 5

08 직선의 기울기는 $\tan 45°=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=x-4$ 답 $y=x-4$

09 답 $y=2$ **10** 답 $x=2$

11 답 $x=-3$ **12** 답 $y=-9$

개념 07 두 점을 지나는 직선의 방정식 본책 23쪽

13 답 $y=2x-3$ 1, 1, 5, 2, 3

14 $y-4=\frac{7-4}{9-3}(x-3)$이므로

$y-4=\frac{1}{2}(x-3)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

15 답 $y=1$

16 $y-3=\frac{-17-3}{4+1}(x+1)$이므로

$y-3=-4(x+1)$ $\therefore y=-4x-1$

답 $y=-4x-1$

17 답 $x=-5$

18 $y-4=\frac{1-4}{-3+4}(x+4)$이므로

$y-4=-3(x+4)$ $\therefore y=-3x-8$

답 $y=-3x-8$

19 $y+2=\frac{1+2}{-3+5}(x+5)$이므로

$y+2=\frac{3}{2}(x+5)$ $\therefore y=\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$

답 $y=\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$

20 $y+2=\frac{2+2}{8+4}(x+4)$이므로

$y+2=\frac{1}{3}(x+4)$ $\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

답 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

21 답 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

22 답 $-\frac{x}{7}+y=1$

23 x절편이 -3, y절편이 6이므로

$-\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$ 답 $-\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$

24 x절편이 5, y절편이 -2이므로

$\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$ 답 $\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$

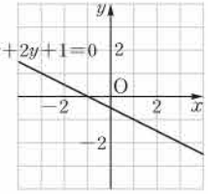
개념 08 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형

본책 24쪽

25 $x+2y+1=0$에서

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 기울기가 $-\frac{1}{2}$, y절편이 $-\frac{1}{2}$인 직선이므로 오른쪽 그림과 같다.

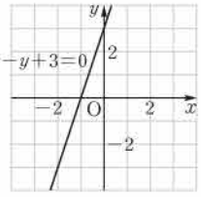


답 풀이 참조

26 $3x-y+3=0$에서

$y=3x+3$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 기울기가 3, y절편이 3인 직선이므로 오른쪽 그림과 같다.

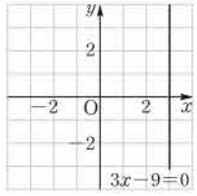


답 풀이 참조

27 $3x-9=0$에서

$x=3$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 y축에 평행한 직선이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

베이직쎈 BOX

$\begin{cases} x+2y+3=0 & \cdots ㉠ \\ x-y-3=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$3y+6=0$

$\therefore y=-2$

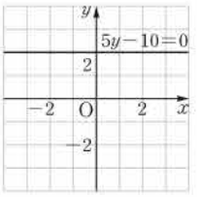
$y=-2$를 ㉡에 대입하면

$x=1$

28 $5y-10=0$에서

$y=2$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 x축에 평행한 직선이므로 오른쪽 그림과 같다.

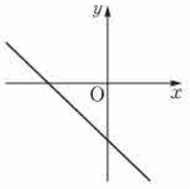


답 풀이 참조

29 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$이므로 직선의 기울기와 y절편 모두 음수이다.

따라서 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

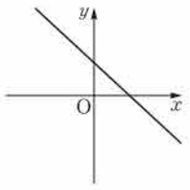


답 풀이 참조

30 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$이므로 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이다.

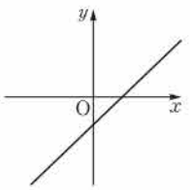
따라서 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조



31 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$이므로 직선의 기울기는 양수이고 y절편은 음수이다.

따라서 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다. 답 풀이 참조

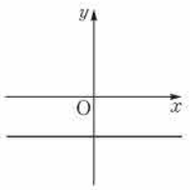


32 $ax+by+c=0$에서 $a=0$이므로 $y=-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{c}{b}<0$이고 직선은 x축에 평행한 직선이다.

따라서 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



개념 09 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

본책 25쪽

33 답 $(1, -2)$

$x+2y+3$, $x-y-3$, 1, -2, 1, -2

베셀 TIP

(1) k의 값에 관계없이 항상 한 점을 지난다.

→ k의 값에 관계없이 항상 성립한다.

→ k에 대한 항등식

(2) $f(x, y)+kg(x, y)=0$이 k에 대한 항등식

→ $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$

34 직선 $k(4x+y-2)+2x-y+5=0$이 항상 지나는 점은 두 직선

$4x+y-2=0,\ 2x-y+5=0$

의 교점이다.

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{2},\ y=4$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ 4\right)$

답 $\left(-\frac{1}{2},\ 4\right)$

35 $kx+y-4k+3=0$을 k에 대하여 정리하면

$y+3+k(x-4)=0$

이 직선이 항상 지나는 점은 두 직선

$y+3=0,\ x-4=0$

의 교점이므로 $x=4,\ y=-3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(4,\ -3)$ 답 $(4,\ -3)$

36 $(k+1)x-ky+4k-1=0$을 k에 대하여 정리하면

$x-1+k(x-y+4)=0$

이 직선이 항상 지나는 점은 두 직선

$x-1=0,\ x-y+4=0$

의 교점이다.

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=5$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1,\ 5)$ 답 $(1,\ 5)$

37 답 $3x-5y=0$ 출제율 $x-3y-1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 5$

38 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+5y-4+k(x-2y+10)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $P(0,\ 1)$을 지나므로

$1+8k=0$ $\therefore k=-\frac{1}{8}$

$k=-\frac{1}{8}$을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$x+5y-4-\frac{1}{8}(x-2y+10)=0$

$\frac{7}{8}x+\frac{21}{4}y-\frac{21}{4}=0$ $\therefore x+6y-6=0$

답 $x+6y-6=0$

다른 풀이 $x+5y-4=0,\ x-2y+10=0$을 연립하여 풀면 $x=-6,\ y=2$

따라서 두 점 $(-6,\ 2)$, $P(0,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{6}x+1$, 즉 $x+6y-6=0$

39 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$4x+y+14+k(x-6y+8)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $P(1,\ 0)$을 지나므로

$18+9k=0$ $\therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$4x+y+14-2(x-6y+8)=0$

$\therefore 2x+13y-2=0$ 답 $2x+13y-2=0$

40 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$6x-3y-2+k(3x+2y-4)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $P(2,\ 0)$을 지나므로

$10+2k=0$ $\therefore k=-5$

$k=-5$를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$6x-3y-2-5(3x+2y-4)=0$

$-9x-13y+18=0$ $\therefore 9x+13y-18=0$

답 $9x+13y-18=0$

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 26쪽

01 두 점 $(-1,\ 4)$, $(3,\ 8)$을 잇는 선분의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{4+8}{2}\right)$ $\therefore (1,\ 6)$

따라서 점 $(1,\ 6)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은 $y-6=2(x-1)$ $\therefore y=2x+4$

답 $y=2x+4$

02 점 $(2,\ -2)$를 지나고 y축에 수직인 직선의 방정식은 $y=-2$ $\therefore y+2=0$

이 방정식이 $ax+y+b=0$과 같으므로

$a=0,\ b=2$ 답 $a=0,\ b=2$

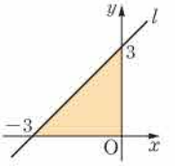
03 기울기가 -3이고 x절편이 -2인 직선의 방정식은 $y=-3(x+2)$ $\therefore y=-3x-6$

따라서 구하는 y절편은 -6이다. 답 ①

04 $\tan 45^\circ=1$이므로 직선 l의 방정식은 $y-1=x+2$ $\therefore y=x+3$

따라서 직선 l은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}$



답 ①

05 점 $(6,\ 7)$을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식은 $x=6$ …… ㉠

점 $(3,\ 5)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-5=-(x-3)$

$\therefore y=-x+8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=6,\ y=2$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는

$(6,\ 2)$ 답 $(6,\ 2)$

06 두 점 $(-3,\ 1)$, $(2,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{-4-1}{2+3}(x+3)$

$\therefore y=-x-2$

$\therefore a=-1,\ b=-2$ 답 $a=-1,\ b=-2$

베이직쎈 BOX

$\begin{cases}4x+y-2=0 & \cdots ㉠\\ 2x-y+5=0 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$6x+3=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$

$x=-\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면

$-1-y+5=0$

$\therefore y=4$

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

직선이 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

x절편이 a, y절편이 b인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}|a||b|$

주어진 두 직선의 교점의 좌표를 구한 후 교점과 점 P를 지나는 직선의 방정식을 구할 수도 있다.

베이직쎈 BOX

07 두 점 $(-4, -4)$, $(-1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{2+4}{-1+4}(x+1)$ $\therefore y=2x+4$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$2x+4=0$ $\therefore x=-2$

따라서 구하는 x절편은 -2이다. 답 -2

08 x절편이 4, y절편이 1인 직선의 방정식은

$\frac{x}{4}+y=1$

이 직선이 점 $\left(a, a+\frac{1}{4}\right)$을 지나므로

$\frac{a}{4}+a+\frac{1}{4}=1$, $\frac{5}{4}a=\frac{3}{4}$

$\therefore a=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

09 두 점 $(0, -1)$, $(4, 3)$을 잇는 선분을 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot4+3\cdot0}{1+3}, \frac{1\cdot3+3\cdot(-1)}{1+3}\right)$ $\therefore (1, 0)$

두 점 $(1, 0)$, $(5, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{2-0}{5-1}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

이 직선이 점 $(-2, a)$를 지나므로

$a=\frac{1}{2}\cdot(-2)-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$ 답 ③

10 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{4+2}{1+1}=\frac{(3k-2)-4}{3-1}$, $3k-6=6$

$3k=12$ $\therefore k=4$ 답 ④

11 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{(2k+1)-9}{-1+2}=\frac{-1-9}{k+2}$, $k-4=-\frac{5}{k+2}$

$k^2-2k-3=0$, $(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k\neq-1$) 답 3

다른 풀이 두 점 A$(-1, 2k+1)$, B$(k, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{-1-(2k+1)}{k+1}(x-k)$

$\therefore y=-2x+2k-1$

이 직선이 점 C$(-2, 9)$를 지나므로

$9=2k+3$ $\therefore k=3$

12 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{2-5}{2+a}=\frac{2-a}{2+2}$, $(2+a)(2-a)=-12$

$a^2=16$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

따라서 직선 l은 두 점 A$(-4, 5)$, B$(-2, 4)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-4=\frac{4-5}{-2+4}(x+2)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+3$ 답 $y=-\frac{1}{2}x+3$

13 (1) $\triangle ABD=\triangle ACD$, 즉 $\triangle ABD:\triangle ACD=1:1$이므로 $\overline{BD}:\overline{CD}=1:1$

(2) 점 D는 $\overline{BC}$의 중점이므로

D$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-2+2}{2}\right)$, 즉 D$(2, 0)$

(3) 두 점 A$(-3, 5)$, D$(2, 0)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y=\frac{0-5}{2+3}(x-2)$ $\therefore y=-x+2$

답 (1) 1 : 1 (2) $(2, 0)$ (3) $y=-x+2$

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

14 B$(-3, 1)$, C$(5, -3)$이므로 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면

M$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1-3}{2}\right)$ $\therefore$ M$(1, -1)$

따라서 두 점 A$(2, 3)$, M$(1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{3+1}{2-1}(x-1)$ $\therefore y=4x-5$

$\therefore a=4$, $b=-5$ 답 $a=4$, $b=-5$

삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 지나고 그 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{BC}$의 중점을 지난다.

15 B$(2, 1)$, D$(5, 3)$이므로 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ $\therefore \left(\frac{7}{2}, 2\right)$

두 점 $(0, 0)$, $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{2}{\frac{7}{2}}x$ $\therefore y=\frac{4}{7}x$

따라서 이 직선이 점 $(k, 4)$를 지나므로

$\frac{4}{7}k=4$ $\therefore k=7$ 답 ②

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 대각선의 중점을 지난다.

A$(2, 3)$, C$(5, 1)$이므로 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$

따라서 두 대각선의 중점은 일치한다.

$k=-2$이면

A$(-1, -3)$,

B$(-2, -1)$,

C$(-2, 9)$

따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.

$\therefore k\neq-2$

16 $ac=0$에서 $a=0$ 또는 $c=0$

그런데 $ab<0$에서 $a\neq0$이므로 $c=0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$, $c=0$이므로

$y=-\frac{a}{b}x$

이때 $-\frac{a}{b}>0$이므로 직선 $ax+by+c=0$의 기울기는 양수이고 원점을 지난다.

따라서 주어진 직선의 개형은 ①과 같다. 답 ①

ab의 부호와 $\frac{a}{b}$의 부호는 같다.

17 직선 $ax+by-c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$의 기울기와 y절편 모두 양수이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $\frac{c}{b}>0$ $\therefore ac<0$

직선 $bx+cy+a=0$에서 $c\neq0$이므로

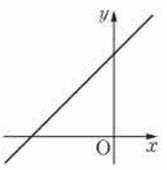
$y=-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$

$\frac{a}{b}<0$, $\frac{c}{b}>0$이므로 a와 c의 부호가 다르다.

베이직쎈 BOX

이때 $-\frac{b}{c}<0$, $-\frac{a}{c}>0$이므로 직선 $bx+cy+a=0$의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이다.
따라서 주어진 직선의 개형은 ③과 같다. 답 ③

18 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로
$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$
한편 $ac>0$, $bc<0$이므로 $ab<0$
$\therefore -\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}>0$
즉 직선의 기울기와 y절편 모두 양수이므로 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같다.
따라서 제4사분면을 지나지 않는다.
답 제4사분면



a와 c의 부호가 같고, b와 c의 부호가 다르므로 a와 b의 부호가 다르다.

19 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$2x-y-1+k(3x-2y+4)=0$ (k는 실수) …… ㉠
으로 놓으면 이 직선이 점 $(0, 5)$를 지나므로
$-6-6k=0$ $\therefore k=-1$
$k=-1$을 ㉠에 대입하면
$2x-y-1-(3x-2y+4)=0$
$\therefore x-y+5=0$
$\therefore a=1, b=-1$ 답 $a=1, b=-1$

20 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$x-2y+1+k(2x+y-3)=0$ (k는 실수) …… ㉠
으로 놓으면 이 직선이 점 $(-3, 3)$을 지나므로
$-8-6k=0$ $\therefore k=-\frac{4}{3}$
$k=-\frac{4}{3}$를 ㉠에 대입하면
$x-2y+1-\frac{4}{3}(2x+y-3)=0$
$-\frac{5}{3}x-\frac{10}{3}y+5=0$
$\therefore x+2y-3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
따라서 구하는 y절편은 $\frac{3}{2}$이다. 답 ③

21 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을
$x-y-3+l(x+3y-7)=0$ (l은 실수) …… ㉠
으로 놓으면 이 직선이 점 $(1, -1)$을 지나므로
$-1-9l=0$ $\therefore l=-\frac{1}{9}$
$l=-\frac{1}{9}$을 ㉠에 대입하면
$x-y-3-\frac{1}{9}(x+3y-7)=0$
$\frac{8}{9}x-\frac{4}{3}y-\frac{20}{9}=0$ $\therefore 2x-3y-5=0$
따라서 이 직선이 점 $(-2, k)$를 지나므로
$-3k-9=0$ $\therefore k=-3$ 답 ④

04 직선의 평행과 수직

개념 10 직선의 평행과 수직

본책 29쪽

01 직선 $y=-2x+1$과 평행한 직선의 기울기는 -2이다. 답 ㄴ

02 직선 $y=-2x+1$과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다. 답 ㄷ

03 ㄱ. $\frac{1}{1}=\frac{-5}{-5}\neq\frac{10}{-3}$
따라서 두 직선 $x-5y+10=0$, $x-5y-3=0$은 평행하다. 답 ㄱ

04 ㄹ. $5\cdot1+1\cdot(-5)=0$
따라서 두 직선 $5x+y-1=0$, $x-5y-3=0$은 수직이다. 답 ㄹ

05 답 3

06 $-1=k-2$이므로 $k=1$ 답 1

07 $\frac{1}{3}=\frac{4}{k}\neq\frac{4}{-5}$이므로 $k=12$ 답 12

08 $\frac{1}{2}=\frac{5}{k+1}\neq\frac{1}{5}$이므로 $k+1=10$, $k+1\neq25$
$\therefore k=9$ 답 9

09 $-\frac{1}{6}k=-1$이므로 $k=6$ 답 6

10 $-3k=-1$이므로 $k=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

11 $2\cdot4+k\cdot1=0$이므로 $k=-8$ 답 -8

12 $4\cdot3+k\cdot(-5)=0$이므로 $k=\frac{12}{5}$ 답 $\frac{12}{5}$

13 직선 $y=2x$와 평행한 직선의 기울기는 2이다.
따라서 점 $P(1, 0)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은
$y=2(x-1)$ $\therefore y=2x-2$
답 $y=2x-2$

14 직선 $y=-x-5$와 평행한 직선의 기울기는 -1이다.
따라서 점 $P(3, 1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은
$y-1=-(x-3)$ $\therefore y=-x+4$
답 $y=-x+4$

베이직쎈 BOX

15 직선 $3x-y=0$, 즉 $y=3x$와 평행한 직선의 기울기는 3이다.
따라서 점 P$(-2, 1)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은
$y-1=3(x+2)$ $\therefore y=3x+7$
답 $y=3x+7$

16 직선 $x-4y+4=0$, 즉 $y=\frac{1}{4}x+1$과 평행한 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이다.
따라서 점 P$(0, 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{4}$인 직선의 방정식은
$y=\frac{1}{4}x$ 답 $y=\frac{1}{4}x$

17 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 수직인 직선의 기울기는 -2이다.
따라서 점 P$(0, 2)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은
$y=-2x+2$ 답 $y=-2x+2$

직선의 기울기를 m이라 하면
$\frac{1}{2}m=-1$
$\therefore m=-2$

18 직선 $y=-5x+1$과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{5}$이다.
따라서 점 P$(5, 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{5}$인 직선의 방정식은
$y=\frac{1}{5}(x-5)$ $\therefore y=\frac{1}{5}x-1$
답 $y=\frac{1}{5}x-1$

직선의 기울기를 m이라 하면
$-5m=-1$
$\therefore m=\frac{1}{5}$

19 직선 $x-y=0$, 즉 $y=x$와 수직인 직선의 기울기는 -1이다.
따라서 점 P$(-1, 1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은
$y-1=-(x+1)$ $\therefore y=-x$
답 $y=-x$

20 직선 $x+6y+12=0$, 즉 $y=-\frac{1}{6}x-2$와 수직인 직선의 기울기는 6이다.
따라서 점 P$(0, 1)$을 지나고 기울기가 6인 직선의 방정식은
$y=6x+1$ 답 $y=6x+1$

직선의 기울기를 m이라 하면
$-\frac{1}{6}m=-1$
$\therefore m=6$

21 답 $y=2x+2$
$-3, 1, -1, 0, -\frac{1}{2}, 2, 2x+2$

기울기가 2이고 점 $(-1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은
$y=2(x+1)$
$\therefore y=2x+2$

22 선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5-7}{2}\right)$ $\therefore (1, -1)$
직선 AB의 기울기는 $\frac{-7-5}{4+2}=-2$
이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{1}{2}$
따라서 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(1, -1)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이므로
$y+1=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$
답 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

23 선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-2+0}{2}\right)$ $\therefore (2, -1)$
직선 AB의 기울기는 $\frac{0+2}{5+1}=\frac{1}{3}$
이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -3
따라서 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(2, -1)$을 지나고 기울기가 -3인 직선이므로
$y+1=-3(x-2)$
$\therefore y=-3x+5$
답 $y=-3x+5$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 31쪽

01 두 직선 $x+ay+2=0$, $3x+by-1=0$이 수직이므로
$1\cdot 3+a\cdot b=0$ $\therefore ab+3=0$
두 직선 $x+ay+2=0$, $x+(b-4)y=0$이 평행하므로
$a=b-4$
$a=b-4$를 $ab+3=0$에 대입하면
$(b-4)b+3=0$, $b^2-4b+3=0$
$(b-1)(b-3)=0$
$\therefore b=1$ 또는 $b=3$
$\therefore a=-3, b=1$ 또는 $a=-1, b=3$
답 $a=-3, b=1$ 또는 $a=-1, b=3$

02 두 점 A$(-1, 1)$, B$(5, a)$를 지나는 직선의 기울기는
$\frac{a-1}{5+1}=\frac{a-1}{6}$
또 직선 $12x+ay-1=0$, 즉 $y=-\frac{12}{a}x+\frac{1}{a}$의 기울기는 $-\frac{12}{a}$
따라서 $\frac{a-1}{6}\cdot\left(-\frac{12}{a}\right)=-1$이므로
$2a-2=a$ $\therefore a=2$ 답 ③

03 직선 $3x-y+5=0$, 즉 $y=3x+5$와 평행한 직선의 기울기는 3이다.
따라서 점 $(2, 3)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은
$y-3=3(x-2)$ $\therefore y=3x-3$

따라서 이 직선이 점 $(a, -6)$을 지나므로

$-6=3a-3 \quad \therefore a=-1$ ②

04 (1) $y=3x+5$, $y=-x+2$를 연립하여 풀면

$x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{11}{4}$

따라서 직선 $y=kx-1$이 점 $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{4}\right)$을 지나려면

$\frac{11}{4}=-\frac{3}{4}k-1, \quad -\frac{3}{4}k=\frac{15}{4}$

$\therefore k=-5$

(2) 직선 $y=kx-1$이 직선 $y=3x+5$ 또는 직선 $y=-x+2$와 평행하므로

$k=3$ 또는 $k=-1$

이때 $k>0$이므로 $k=3$

(1) -5 (2) 3

05 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=kx+3$이 두 직선 $y=x+6$, $y=-2x$의 교점을 지날 때,

$y=x+6$, $y=-2x$를 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=4$

따라서 직선 $y=kx+3$이 점 $(-2, 4)$를 지나야 하므로

$4=-2k+3 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=kx+3$이 직선 $y=x+6$ 또는 직선 $y=-2x$와 평행할 때,

$k=1$ 또는 $k=-2$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값은 $-2, -\frac{1}{2}, 1$

$-2, -\frac{1}{2}, 1$

06 주어진 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.



두 직선 $x+ay-4=0$, $2x-y+1=0$이 평행하려면

$\frac{1}{2}=\frac{a}{-1}\neq\frac{-4}{1} \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$

두 직선 $bx-y+3=0$, $2x-y+1=0$이 평행하려면

$\frac{b}{2}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{3}{1} \quad \therefore b=2$

$\therefore a+b=\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$

07 (1) 직선 $y=\frac{1}{2}x-3$과 수직인 직선 AH의 기울기는 -2

(2) 직선 AH는 점 A(2, 1)을 지나고 기울기가 -2인 직선이므로

$y-1=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x+5$

베이직쎈 BOX

$\frac{1}{2}x-3=-2x+5$에서 $\frac{5}{2}x=8 \quad \therefore x=\frac{16}{5}$

$x=\frac{16}{5}$을 $y=\frac{1}{2}x-3$에 대입하면 $y=-\frac{7}{5}$

$3x+5=-x+2$에서 $4x=-3 \quad \therefore x=-\frac{3}{4}$

$x=-\frac{3}{4}$을 $y=-x+2$에 대입하면 $y=\frac{11}{4}$

두 직선 $y=x+6$, $y=-2x$가 평행하지 않으므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 생각하지 않는다.

(3) 점 H는 두 직선 $y=\frac{1}{2}x-3$, $y=-2x+5$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=\frac{16}{5}$, $y=-\frac{7}{5}$

따라서 점 H의 좌표는 $\left(\frac{16}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

(1) -2 (2) $y=-2x+5$ (3) $\left(\frac{16}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

08 직선 AH는 점 A(3, 0)을 지나고 직선 $y=-x+5$와 수직인 직선이므로

$y=x-3$

따라서 점 H는 두 직선 $y=-x+5$, $y=x-3$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=1$

$\therefore$ H(4, 1) (4, 1)

09 직선 $x+3y+6=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x-2$와 수직인 직선 AH의 기울기는 3이므로

$\frac{2+1}{a+3}=3, \quad a+3=1$

$\therefore a=-2$ ①

10 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right) \quad \therefore (3, 3)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-4}{6-0}=-\frac{1}{3}$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 점 (3, 3)을 지나고 기울기가 3인 직선이므로 수직이등분선의 방정식은

$y-3=3(x-3) \quad \therefore 3x-y=6$

$\therefore a=3, b=-1$ $a=3, b=-1$

11 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{2+3}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{3-2}{2+1}=\frac{1}{3}$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지나고 기울기가 -3인 직선이므로 수직이등분선의 방정식은

$y-\frac{5}{2}=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore y=-3x+4$

이 직선이 점 $(3, a)$를 지나므로

$a=-3\cdot3+4=-5$ ②

12 A(a, b)라 하면 $\overline{AB}$의 중점 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b-1}{2}\right)$은 직선 $y=2x-2$ 위의 점이므로

$\frac{b-1}{2}=2\cdot\frac{a+3}{2}-2, \quad \frac{b-1}{2}=a+1$

$\therefore 2a-b=-3$ ……㉠

또 직선 AB는 직선 $y=2x-2$와 수직이므로

$\frac{b+1}{a-3}=-\frac{1}{2}$, $-2(b+1)=a-3$

$\therefore a+2b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

따라서 점 A의 좌표는 $(-1, 1)$ ②

베이직쎈 BOX

직선 $x+y=0$ 위의 점 중에서 계산이 간단한 점을 선택한다.

㉠×2+㉡을 하면

$5a=-5$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$b=1$

05 점과 직선 사이의 거리

개념 11 점과 직선 사이의 거리

본책 33쪽

01 $\frac{3}{5}$ 3, 1, 3, $\frac{3}{5}$

02 $\frac{|2\cdot(-2)+4-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ $\sqrt{5}$

03 $\frac{|3-2\cdot(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$ $2\sqrt{5}$

04 $\frac{|-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1$ 1

05 $y=x-4$에서 $x-y-4=0$

$\therefore \frac{|3-5-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$ $3\sqrt{2}$

06 $y=-3x+5$에서 $3x+y-5=0$

$\therefore \frac{|3\cdot0+3-5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

07 $y=\frac{1}{7}x-\frac{2}{7}$에서 $x-7y-2=0$

$\therefore \frac{|5-7\cdot(-1)-2|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

08 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$에서 $4x+3y-2=0$

$\therefore \frac{|4\cdot(-1)+3\cdot(-1)-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{9}{5}$ $\frac{9}{5}$

09 -6, 2 1, 4, -4, 4, -6, 2

10 $\frac{|3\cdot0-4\cdot1+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$이므로

$\frac{|k-4|}{5}=1$, $|k-4|=5$

$k-4=-5$ 또는 $k-4=5$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=9$ -1, 9

11 $\frac{|2\cdot0-k+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$이므로 $|-k+3|=5$

$-k+3=-5$ 또는 $-k+3=5$

$\therefore k=8$ 또는 $k=-2$ -2, 8

개념 12 평행한 두 직선 사이의 거리

본책 34쪽

12 1 0, $4x-3y+5=0$, 4, 1, 1

13 직선 $x+y=0$ 위의 한 점 $(0, 0)$과 직선 $x+y-10=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$ $5\sqrt{2}$

14 직선 $3x+2y-2=0$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $3x+2y+11=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot0+2\cdot1+11|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\sqrt{13}$ $\sqrt{13}$

15 직선 $x-\frac{1}{2}y+5=0$ 위의 한 점 $(-5, 0)$과 직선 $2x-y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot(-5)-0+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

$x-\frac{1}{2}y+5=0$에서 $2x-y+10=0$

이므로 직선 $2x-y+2=0$과 평행하다.

16 직선 $y=3x-1$ 위의 한 점 $(0, -1)$과 직선 $y=3x+4$, 즉 $3x-y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot0-(-1)+4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

17 직선 $y=-7x$ 위의 한 점 $(0, 0)$과 직선 $y=-7x+5$, 즉 $7x+y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

18 직선 $y=\frac{3}{2}x+4$ 위의 한 점 $(0, 4)$와 직선 $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$, 즉 $3x-2y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot0-2\cdot4-5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\sqrt{13}$ $\sqrt{13}$

19 직선 $y=-\frac{2}{5}x+7$ 위의 한 점 $(0, 7)$과 직선 $2x+5y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot0+5\cdot7-6|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\sqrt{29}$ $\sqrt{29}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 35쪽

01 두 점 $(-3, 4)$, $(0, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{2-4}{0+3}x$ $\therefore 2x+3y-6=0$

따라서 점 $(5, 3)$과 직선 $2x+3y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot5+3\cdot3-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\sqrt{13}$ $\sqrt{13}$

02 $\frac{|1+3+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$이므로 $|k+4|=4$

$k+4=-4$ 또는 $k+4=4$

$\therefore k=-8$ 또는 $k=0$

이때 $k\neq0$이므로 $k=-8$ ①

03 P$(a, 0)$이라 하면 $\frac{|4\cdot a-3\cdot0-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$

$4|a-2|=10$, $|a-2|=\frac{5}{2}$

$a-2=-\frac{5}{2}$ 또는 $a-2=\frac{5}{2}$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{9}{2}$

따라서 점 P의 좌표는

$\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{9}{2}, 0\right)$ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{9}{2}, 0\right)$

04 원점을 지나는 직선의 방정식을 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$이라 하면

$\frac{|m\cdot5-(-1)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{13}$

$\therefore |5m+1|=\sqrt{13(m^2+1)}$

양변을 제곱하면

$(5m+1)^2=13(m^2+1)$, $6m^2+5m-6=0$

$(2m+3)(3m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{3}{2}$ 또는 $m=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{2}x$, $y=\frac{2}{3}x$ $y=-\frac{3}{2}x$, $y=\frac{2}{3}x$

05 $2x-y+4=0$에서 $y=2x+4$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선의 방정식을

$y=-\frac{1}{2}x+k$, 즉 $x+2y-2k=0$

이라 하면

$\frac{|1+2\cdot0-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$, $|1-2k|=5$

$1-2k=-5$ 또는 $1-2k=5$

$\therefore k=3$ 또는 $k=-2$

따라서 두 직선의 y절편의 합은

$-2+3=1$ ③

06 점 $(0, 4)$에서 두 직선 $x-3y+5=0$, $3x+y+k=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|0-3\cdot4+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|3\cdot0+4+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}$

$7=|k+4|$

$k+4=-7$ 또는 $k+4=7$

$\therefore k=-11$ 또는 $k=3$

이때 $k>0$이므로 $k=3$ ③

베이직쎈 BOX

$\frac{3}{4}x+y=1$에서

$3x+4y=4$

$\therefore 3x+4y-4=0$

점 P는 x축 위의 점이므로 y좌표가 0이다.

원점을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식

$y=-\frac{1}{2}x+3$,

$y=-\frac{1}{2}x-2$

$y=\frac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$

07 두 직선 $3x+4y-4=0$, $3x+4y+6=0$에서

$\frac{3}{3}=\frac{4}{4}\neq\frac{-4}{6}$

이므로 두 직선은 평행하다.

따라서 직선 $\frac{3}{4}x+y=1$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $3x+4y+6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot0+4\cdot1+6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$ ①

08 직선 $y=4x-1$ 위의 한 점 $(0, -1)$과 직선 $y=4x+k$, 즉 $4x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4\cdot0-(-1)+k|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\sqrt{17}$, $|k+1|=17$

$k+1=-17$ 또는 $k+1=17$

$\therefore k=-18$ 또는 $k=16$

이때 $k<0$이므로 $k=-18$ ②

09 두 직선 $6x+(k-2)y-1=0$, $3x-4y+4=0$이 평행하므로

$\frac{6}{3}=\frac{k-2}{-4}\neq\frac{-1}{4}$

$k-2=-8$ $\therefore k=-6$

따라서 직선 $3x-4y+4=0$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $6x-8y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6\cdot0-8\cdot1-1|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{9}{10}$ $\frac{9}{10}$

10 $\overline{AB}$의 길이는 평행한 두 직선 $x+y-3=0$, $x+y+1=0$ 사이의 거리와 같다.

직선 $x+y-3=0$ 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $x+y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|0+3+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$이므로 정사각형 ABCD의 넓이는

$(2\sqrt{2})^2=8$ ④

11 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

(2) $y=\frac{4-0}{3-1}(x-1)$이므로 $y=2x-2$

(3) 점 C$(5, 1)$과 직선 $y=2x-2$, 즉 $2x-y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot5-1-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$

(4) $\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{7\sqrt{5}}{5}=7$

(1) $2\sqrt{5}$ (2) $y=2x-2$ (3) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ (4) 7

12 $\overline{OA}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

이때 직선 OA는 직선 $3x-4y+8=0$과 평행하므로 원점 O와 직선 $3x-4y+8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot0-4\cdot0+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{8}{5}$

따라서 삼각형 OAP의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot \frac{8}{5}=4$ 답 4

13 $\overline{AB}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$y-4=\frac{4-0}{0+2}x$

$\therefore 2x-y+4=0$

점 C(1, a)와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot 1-a+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|6-a|}{\sqrt{5}}$

삼각형 ABC의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{|6-a|}{\sqrt{5}}=12,\quad |6-a|=12$

$6-a=-12$ 또는 $6-a=12$

$\therefore a=18$ 또는 $a=-6$

이때 $a>0$이므로 $a=18$ 답 18

14 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-x+4$의 교점을 A라 하면 점 A의 좌표는 $\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$

두 직선 $y=-x+4$, $y=3x$의 교점을 B라 하면 점 B의 좌표는 (1, 3)

이때 직선 OA의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$이므로 점 B(1, 3)과 직선 OA 사이의 거리는

$\frac{|1-2\cdot 3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

따라서

$\overline{OA}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

이므로 △OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{3}\cdot\sqrt{5}=\frac{10}{3}$ 답 $\frac{10}{3}$

베이직쎈 BOX

두 직선 AB, AC의 기울기가 같다.

$\frac{a+4}{4-1}=\frac{11+4}{a+1-1}$

$a^2+4a-45=0,\quad (a+9)(a-5)=0$

$\therefore a=-9$ 또는 $a=5$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-9+5=-4$ 답 ②

03 전략 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 대각선의 중점을 지남을 이용한다.

풀이 제1사분면 위의 직사각형에서 대각선의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+6}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$ $\therefore (5, 4)$

제3사분면 위의 직사각형에서 대각선의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4-2}{2}, \frac{-3-1}{2}\right)$ $\therefore (-3, -2)$

따라서 두 점 (5, 4), (−3, −2)를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\frac{4+2}{5+3}(x+3)$ $\therefore 3x-4y+1=0$

답 ②

$\frac{1}{2}x=-x+4$에서 $\frac{3}{2}x=4$ $\therefore x=\frac{8}{3}$

$x=\frac{8}{3}$을 $y=\frac{1}{2}x$에 대입하면 $y=\frac{4}{3}$

$-x+4=3x$에서 $4x=4$ $\therefore x=1$

$x=1$을 $y=3x$에 대입하면 $y=3$

① $mn>0$ ➡ m, n의 부호가 서로 같다.
② $mn=0$ ➡ $m=0$ 또는 $n=0$
③ $mn<0$ ➡ m, n의 부호가 서로 다르다.

04 전략 주어진 직선의 기울기와 y절편의 부호를 구한다.

풀이 주어진 그래프에서 기울기와 y절편이 모두 양수이므로

$-\frac{a}{b}>0,\ -\frac{c}{b}>0$

$\therefore ab<0,\ bc<0$

직선 $cx+ay+b=0$에서

$y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}$

이때 $ab<0$, $bc<0$에서

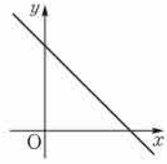
$-\frac{c}{a}<0,\ -\frac{b}{a}>0$

a와 b의 부호가 다르고 b와 c의 부호가 다르므로 a와 c의 부호는 같다.

$\therefore ac>0$

즉 직선 $cx+ay+b=0$의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제3사분면을 지나지 않는다.



답 ③

05 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식

➡ $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)

풀이 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x+y-5+k(x-2y+3)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 (2, 3)을 지나므로

$4-k=0$ $\therefore k=4$

$k=4$를 ㉠에 대입하면

$3x+y-5+4(x-2y+3)=0$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 37쪽

01 전략 먼저 $\overline{BC}$의 중점의 좌표를 구한다.

풀이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면

$M\left(\frac{7+9}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$ $\therefore M(8, 1)$

따라서 두 점 A(2, 5), M(8, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{1-5}{8-2}(x-2)$

$\therefore 2x+3y=19$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=5$ 답 ④

$\therefore\ x-y+1=0$

⑤ $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+1\neq 0$이므로 점 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$은 직선 l 위의 점이 아니다.

답 ⑤

참고 ① $-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}+1=0$ ② $-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+1=0$

③ $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$ ④ $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1=0$

06 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면 $aa'+bb'=0$임을 이용한다.

풀이 직선 $x+(4k+1)y-3=0$의 x절편이 3이므로 두 직선은 점 $(3,\ 0)$에서 만난다.

이때 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}+y=1$ $\therefore\ x+3y=3$

따라서 두 직선 $x+(4k+1)y-3=0$, $x+3y=3$이 수직이므로

$1\cdot 1+(4k+1)\cdot 3=0$, $12k+4=0$

$\therefore\ k=-\frac{1}{3}$

답 ③

07 전략 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$임을 이용한다.

풀이 $\frac{|4\cdot 3+3\cdot a-6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$이므로

$|3a+6|=15$

$3a+6=-15$ 또는 $3a+6=15$

$\therefore\ a=-7$ 또는 $a=3$

이때 $a>0$이므로 $a=3$

답 ①

08 전략 평행한 두 직선 사이의 거리는 한 직선 위의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 이용하여 구한다.

풀이 두 직선 $x+2y-5=0$, $x+2y-1=0$에서

$\frac{1}{1}=\frac{2}{2}\neq\frac{-5}{-1}$

이므로 주어진 두 직선은 평행하다.

따라서 직선 $x+2y-1=0$ 위의 한 점 $(1,\ 0)$과 직선 $x+2y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1+2\cdot 0-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

답 ②

09 전략 $\overline{AB}$를 밑변으로 하는 삼각형 ABC의 높이는 점 C와 직선 AB 사이의 거리임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$

직선 AB의 방정식은 $y-2=\frac{2+3}{-2+4}(x+2)$

$\therefore\ 5x-2y+14=0$

점 C(2, 1)과 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|5\cdot 2-2\cdot 1+14|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\frac{22}{\sqrt{29}}$

베이직쎈 BOX

$-x+3=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$에서

$\frac{3}{2}x=\frac{5}{2}$

$\therefore\ x=\frac{5}{3}$

$x=\frac{5}{3}$를 $y=-x+3$에 대입하면 $y=\frac{4}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{22}{\sqrt{29}}=11$

답 ②

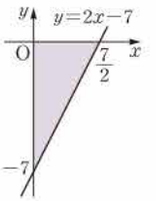
10 전략 주어진 직선의 방정식을 구하고 x절편, y절편을 이용한다.

풀이 점 $(3,\ -1)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y+1=2(x-3)$ $\therefore\ y=2x-7$

따라서 직선 $y=2x-7$은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot 7=\frac{49}{4}$



답 $\frac{49}{4}$

11 전략 세 직선이 한 점에서 만나는 경우와 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우로 나누어 k의 값을 구한다.

풀이 주어진 세 직선

$x+y-3=0$, $x-2y+1=0$, $kx-y+5=0$,

즉 $y=-x+3$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=kx+5$

가 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=kx+5$가 두 직선 $y=-x+3$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$의 교점을 지날 때,

$y=-x+3$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$을 연립하여 풀면

$x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{4}{3}$

따라서 직선 $y=kx+5$가 점 $\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)$를 지나야 하므로

$\frac{4}{3}=\frac{5}{3}k+5$, $\frac{5}{3}k=-\frac{11}{3}$

$\therefore\ k=-\frac{11}{5}$ ····❶

(ii) 직선 $y=kx+5$가 직선 $y=-x+3$ 또는 직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$과 평행할 때,

$k=-1$ 또는 $k=\frac{1}{2}$ ····❷

(i), (ii)에서 모든 상수 k의 값의 곱은

$\left(-\frac{11}{5}\right)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{10}$ ····❸

답 $\frac{11}{10}$

단계	채점 기준	비율
❶	세 직선이 한 점에서 만날 때의 k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	세 직선 중 두 직선이 평행할 때의 k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	모든 상수 k의 값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

12 전략 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{AH}\perp l$임을 이용한다.

풀이 $x+3y-6=0$에서 $y=-\frac{1}{3}x+2$

수선의 발을 H라 하면 직선 AH는 점 A(2, −2)를 지나고 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$와 수직인 직선이므로 직선 AH의 방정식은

$y+2=3(x-2)$ $\therefore y=3x-8$

이때 점 H는 두 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$, $y=3x-8$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=1$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$a+b=4$

답 4

직선 AH의 기울기를 m이라 하면 $-\frac{1}{3}m=-1$에서 $m=3$

$-\frac{1}{3}x+2=3x-8$에서 $\frac{10}{3}x=10$ $\therefore x=3$
$x=3$을 $y=3x-8$에 대입하면 $y=1$

13 전략 $\overline{AB}$의 수직이등분선 l에 대하여 $\overline{AB}\perp l$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$ $\therefore (-2, 3)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{5-1}{-1+3}=2$ ··· ❶

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 점 $(-2, 3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선이므로 수직이등분선의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{2}(x+2)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+2$ ··· ❷

즉 P(4, 0), Q(0, 2)이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$ ··· ❸

답 $2\sqrt{5}$

$y=-\frac{1}{2}x+2$에 $y=0$을 대입하면 $\frac{1}{2}x=2$ $\therefore x=4$

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{AB}$의 중점의 좌표와 직선 AB의 기울기를 구할 수 있다.	30 %
❷	수직이등분선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸	$\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %

14 전략 주어진 직선과 평행한 직선은 $2x+3y+k=0$ 꼴임을 이용한다.

풀이 $2x+3y-1=0$과 평행한 직선의 방정식을

$2x+3y+k=0$ $(k\neq -1)$

으로 놓으면

$\frac{|2\cdot 0+3\cdot 1+k|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\sqrt{13}$, $|3+k|=13$

$3+k=-13$ 또는 $3+k=13$

$\therefore k=-16$ 또는 $k=10$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$2x+3y-16=0$, $2x+3y+10=0$

답 $2x+3y-16=0$, $2x+3y+10=0$

원의 중심인 점 (−2, 1)과 원 위의 점 (0, 2) 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

원의 중심인 점 (4, 2)와 점 (1, 0) 또는 점 (7, 4) 사이의 거리를 이용하여 구할 수도 있다.

베이직쎈 BOX

03 원의 방정식

06 원의 방정식

개념 13 원의 방정식 본책 39쪽

01 답 중심의 좌표: (2, 3), 반지름의 길이: 1

02 답 중심의 좌표: (5, −1), 반지름의 길이: 2

03 답 중심의 좌표: (−4, −6), 반지름의 길이: $\sqrt{10}$

04 답 중심의 좌표: (0, 0), 반지름의 길이: $2\sqrt{3}$

05 답 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$

06 답 $(x-6)^2+(y+5)^2=8$

07 답 $(x+1)^2+(y-7)^2=36$

08 답 $(x+2)^2+(y+4)^2=4$

09 답 $(x-5)^2+y^2=16$

10 답 $x^2+(y+8)^2=3$

11 답 $x^2+y^2=9$

12 답 $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ 4, 5, 1, 5, 25

13 두 점 (−2, 1), (0, 2) 사이의 거리는

$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-1)^2=5$

답 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$

14 두 점 (3, −2), (0, 0) 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

답 $(x-3)^2+(y+2)^2=13$

개념 14 지름의 양 끝 점이 주어진 원의 방정식 본책 40쪽

15 답 $(x-1)^2+(y-4)^2=10$
1, 4, 2, $\sqrt{10}$, 1, 4, 10

16 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{4}{2}\right)$ $\therefore (4, 2)$

원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{6^2+4^2}}{2}=\sqrt{13}$

따라서 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y-2)^2=13$

답 $(x-4)^2+(y-2)^2=13$

17 원의 중심의 좌표는
$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{-5-1}{2}\right)$ $\therefore (-1, -3)$
원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{4^2+4^2}}{2}=2\sqrt{2}$
따라서 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y+3)^2=8$

답 $(x+1)^2+(y+3)^2=8$

18 원의 중심의 좌표는
$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-4+0}{2}\right)$ $\therefore (3, -2)$
원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2^2+(-4)^2}}{2}=\sqrt{5}$
따라서 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=5$

답 $(x-3)^2+(y+2)^2=5$

19 원의 중심의 좌표는
$\left(\frac{2-2}{2}, \frac{4-4}{2}\right)$ $\therefore (0, 0)$
원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{4^2+8^2}}{2}=2\sqrt{5}$
따라서 원의 방정식은
$x^2+y^2=20$

답 $x^2+y^2=20$

20 원의 중심의 좌표는
$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$ $\therefore (4, 0)$
원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2^2+(-2)^2}}{2}=\sqrt{2}$
따라서 원의 방정식은
$(x-4)^2+y^2=2$

답 $(x-4)^2+y^2=2$

21 원의 중심의 좌표는
$\left(\frac{-6-4}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$ $\therefore (-5, 5)$
원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2^2+4^2}}{2}=\sqrt{5}$
따라서 원의 방정식은
$(x+5)^2+(y-5)^2=5$

답 $(x+5)^2+(y-5)^2=5$

22 원의 중심의 좌표는
$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$ $\therefore (2, 1)$
원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{4^2+(-4)^2}}{2}=2\sqrt{2}$
따라서 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-1)^2=8$

답 $(x-2)^2+(y-1)^2=8$

베이직쎈 BOX

개념 15 좌표축에 접하는 원의 방정식 본책 41쪽

23 답 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ y, 2, 1, 2, 4

24 답 $(x+2)^2+(y+5)^2=25$

25 답 $(x+3)^2+(y-4)^2=16$

26 답 $(x-6)^2+(y+1)^2=1$

27 답 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$ x, 3, 3, 4, 9

28 답 $(x-2)^2+(y+7)^2=4$

29 답 $(x+5)^2+(y+1)^2=25$

30 답 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$

31 답 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

32 답 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

33 답 $(x-6)^2+(y+6)^2=36$

34 답 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

35 중심의 좌표가 $(5, 5)$이므로 원의 방정식은
$(x-5)^2+(y-5)^2=25$
(x좌표)>0, (y좌표)>0

답 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

36 중심의 좌표가 $(-5, 5)$이므로 원의 방정식은
$(x+5)^2+(y-5)^2=25$
(x좌표)<0, (y좌표)>0

답 $(x+5)^2+(y-5)^2=25$

37 중심의 좌표가 $(-5, -5)$이므로 원의 방정식은
$(x+5)^2+(y+5)^2=25$
(x좌표)<0, (y좌표)<0

답 $(x+5)^2+(y+5)^2=25$

38 중심의 좌표가 $(5, -5)$이므로 원의 방정식은
$(x-5)^2+(y+5)^2=25$
(x좌표)>0, (y좌표)<0

답 $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

39 답 $(x-6)^2+(y-3)^2=9$
6, 3, 3, 6, 3, 9

40 중심의 좌표가 $(-3, 2)$이고 반지름의 길이가 $|2|=2$이므로 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-2)^2=4$
$|$(중심의 y좌표)$|$

답 $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

41 중심의 좌표가 $(-1, -2)$이고 반지름의 길이가 $|-1|=1$이므로 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y+2)^2=1$

답 $(x+1)^2+(y+2)^2=1$

42 중심의 좌표가 $(2, -1)$이고 반지름의 길이가 $|2|=2$이므로 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

답 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

43 중심의 좌표가 $(3, -3)$이고 반지름의 길이가 $|3|=3$이므로 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+3)^2=9$

답 $(x-3)^2+(y+3)^2=9$

개념 16 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형

본책 43쪽

44 답 중심의 좌표: $(1, 0)$, 반지름의 길이: 1

정답률 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1

45 $x^2+y^2+4y-3=0$에서

$x^2+(y^2+4y+4)=3+4$

$\therefore x^2+(y+2)^2=7$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(0, -2)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{7}$이다.

답 중심의 좌표: $(0, -2)$, 반지름의 길이: $\sqrt{7}$

46 $x^2+y^2+2x-6y+1=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9)=-1+1+9$

$\therefore (x+1)^2+(y-3)^2=9$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-1, 3)$, 반지름의 길이는 3이다.

답 중심의 좌표: $(-1, 3)$, 반지름의 길이: 3

47 $x^2+y^2-8x-4y-5=0$에서

$(x^2-8x+16)+(y^2-4y+4)=5+16+4$

$\therefore (x-4)^2+(y-2)^2=25$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(4, 2)$, 반지름의 길이는 5이다.

답 중심의 좌표: $(4, 2)$, 반지름의 길이: 5

48 $x^2+y^2-6x+12y+7=0$에서

$(x^2-6x+9)+(y^2+12y+36)=-7+9+36$

$\therefore (x-3)^2+(y+6)^2=38$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(3, -6)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{38}$이다.

답 중심의 좌표: $(3, -6)$, 반지름의 길이: $\sqrt{38}$

49 $x^2+y^2+4x+6y-9=0$에서

$(x^2+4x+4)+(y^2+6y+9)=9+4+9$

$\therefore (x+2)^2+(y+3)^2=22$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-2, -3)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{22}$이다.

답 중심의 좌표: $(-2, -3)$, 반지름의 길이: $\sqrt{22}$

50 $x^2+y^2+8x-8y+28=0$에서

$(x^2+8x+16)+(y^2-8y+16)=-28+16+16$

$\therefore (x+4)^2+(y-4)^2=4$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-4, 4)$, 반지름의 길이는 2이다.

답 중심의 좌표: $(-4, 4)$, 반지름의 길이: 2

51 답 $k<9$ 정답률 3, 9, 9, 9

베쎈 TIP

이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$에서

$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$

① $A^2+B^2-4C>0$ ➡ 원

② $A^2+B^2-4C=0$ ➡ 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

③ $A^2+B^2-4C<0$

➡ 식을 만족시키는 실수 x, y가 존재하지 않는다.

52 $x^2+y^2-12x+2y+k=0$에서

$(x^2-12x+36)+(y^2+2y+1)=-k+36+1$

$\therefore (x-6)^2+(y+1)^2=-k+37$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면

$-k+37>0$ $\therefore k<37$

답 $k<37$

53 $x^2+y^2-4x+4y-k=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+4y+4)=k+4+4$

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=k+8$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면

$k+8>0$ $\therefore k>-8$

답 $k>-8$

54 $x^2+y^2+10x-8y+2k+1=0$에서

$(x^2+10x+25)+(y^2-8y+16)$

$=-2k-1+25+16$

$\therefore (x+5)^2+(y-4)^2=-2k+40$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면

$-2k+40>0$ $\therefore k<20$

답 $k<20$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 44쪽

01 중심이 점 $(-2, 5)$인 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r^2=(4+2)^2+(3-5)^2=40$

따라서 원 $(x+2)^2+(y-5)^2=40$이 점 $(0, a)$를 지나므로

$4+(a-5)^2=40$, $(a-5)^2=36$

$a-5=-6$ 또는 $a-5=6$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=11$

이때 $a>0$이므로

$a=11$

답 ③

$a^2-10a-11=0$이므로

$(a+1)(a-11)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=11$

02 직선 $y=-x+4$가 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$A(4, 0)$, $B(0, 4)$

원 $(x-a)^2+y^2=b$의 중심의 좌표가 $(4, 0)$이므로

$a=4$

또 이 원이 점 $B(0, 4)$를 지나므로

$b=(-4)^2+4^2=32$ 답 $a=4$, $b=32$

03 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=11$의 중심의 좌표는

$(1, -3)$

중심이 점 $(1, -3)$인 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r^2=(2-1)^2+(-1+3)^2=5$

$\therefore (x-1)^2+(y+3)^2=5$

① $x=-1$, $y=-4$를 대입하면 $4+1=5$

② $x=-1$, $y=-2$를 대입하면 $4+1=5$

③ $x=0$, $y=-5$를 대입하면 $1+4=5$

④ $x=3$, $y=-5$를 대입하면 $4+4\neq5$

⑤ $x=3$, $y=-2$를 대입하면 $4+1=5$

따라서 원 위의 점이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

04 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{-6-3}{2}\right)$ $\therefore \left(2, -\frac{9}{2}\right)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{\sqrt{4^2+3^2}}{2}=\frac{5}{2}$

따라서 $a=2$, $b=-\frac{9}{2}$, $r=\frac{5}{2}$이므로

$a+b+r=0$ 답 ②

05 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-5-3}{2}\right)$ $\therefore (4, -4)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}=\sqrt{2}$

이므로 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+4)^2=2$

$\therefore x^2+y^2-8x+8y+30=0$

따라서 $a=-8$, $b=8$, $c=30$이므로

$a+b+c=30$ 답 ②

06 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot5}{1+2}, \frac{1\cdot(-2)+2\cdot1}{1+2}\right)$

$\therefore (3, 0)$

$\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot(-1)+1\cdot5}{2+1}, \frac{2\cdot(-2)+1\cdot1}{2+1}\right)$

$\therefore (1, -1)$

따라서 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{0-1}{2}\right)$, 즉 $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

이고, 원의 반지름의 길이는

$\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

답 $(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

07 (1) $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-2)^2=(a-4)^2+b^2$

$4a-4b=8$ $\therefore a-b=2$

$\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a-4)^2+b^2=(a-6)^2+b^2$

$4a=20$ $\therefore a=5$

$a=5$를 $a-b=2$에 대입하면

$5-b=2$ $\therefore b=3$

(2) $\overline{BP}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$이므로 반지름의 길이는

$\sqrt{10}$

(3) 중심이 점 $P(5, 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원의 방정식은

$(x-5)^2+(y-3)^2=10$

답 (1) $a=5$, $b=3$ (2) $\sqrt{10}$

(3) $(x-5)^2+(y-3)^2=10$

다른 풀이 (3) 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (A, B, C는 상수)이라 하면 이 원은 두 점 $B(4, 0)$, $C(6, 0)$을 지나므로

$16+4A+C=0$, $36+6A+C=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$A=-10$, $C=24$

따라서 원 $x^2+y^2-10x+By+24=0$이 점 $A(2, 2)$를 지나므로

$12+2B=0$ $\therefore B=-6$

$\therefore x^2+y^2-10x-6y+24=0$

$x^2+y^2-10x-6y+24=0$에서 $(x-5)^2+(y-3)^2=10$

08 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$a^2+(b-3)^2=(a-4)^2+(b-3)^2$

$8a=16$ $\therefore a=2$

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$4+(b-3)^2=16+(b-1)^2$

$4b=-4$ $\therefore b=-1$

따라서 $P(2, -1)$이므로 원의 반지름의 길이는

$\overline{AP}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$ 답 ②

09 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+3)^2+(b-3)^2=(a+2)^2+(b-4)^2$

$2a+2b=2$ $\therefore a+b=1$ …… ㉠

베이직쎈 BOX

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $m : n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a+3)^2+(b-3)^2=(a-1)^2+(b-1)^2$

$8a-4b=-16$

$\therefore 2a-b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$

즉 P$(-1, 2)$이므로 원의 반지름의 길이는

$\overline{AP}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 주어진 세 점을 지나는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=5$

이므로 $y=0$을 대입하면

$(x+1)^2=1$

$x+1=-1$ 또는 $x+1=1$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 x축과의 교점의 좌표는

$(-2, 0)$, $(0, 0)$

이므로 구하는 거리는 2이다. 답 2

10 외접원의 중심을 P(a, b)라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a+5)^2+(b+2)^2=a^2+(b-3)^2$

$10a+10b=-20$

$\therefore a+b=-2$ …… ㉠

$\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a+4)^2+(b-1)^2=a^2+(b-3)^2$

$8a+4b=-8$

$\therefore 2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-2$

즉 P$(0, -2)$이므로 원의 반지름의 길이는

$\overline{CP}=|3-(-2)|=5$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\cdot5^2=25\pi$ 답 ④

11 중심이 점 $(a, 1)$이고 반지름의 길이가 $|a|$인 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-1)^2=a^2$

이 원이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$(2-a)^2+4=a^2$, $-4a+8=0$

$\therefore a=2$ 답 ②

12 주어진 원이 점 $(5, 0)$에서 x축에 접하므로 중심의 좌표를

$(5, -a)$ $(a>0)$

라 할 수 있다.

이때 이 원의 넓이가 16π이므로 반지름의 길이는 4이다.

즉 $|-a|=4$이므로 $a=4$ ($\because a>0$)

따라서 원의 방정식은

$(x-5)^2+(y+4)^2=16$

답 $(x-5)^2+(y+4)^2=16$

13 원의 중심의 좌표를 $(a, a+1)$이라 하면 y축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-1)^2=a^2$

이 원이 점 $(2, 5)$를 지나므로

$(2-a)^2+(4-a)^2=a^2$

$a^2-12a+20=0$, $(a-2)(a-10)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=10$

따라서 큰 원의 방정식은

$(x-10)^2+(y-11)^2=100$

답 $(x-10)^2+(y-11)^2=100$

14 원의 반지름의 길이를 r라 하면 이 원이 점 $(1, -2)$를 지나므로 원의 중심의 좌표는

$(r, -r)$

따라서 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$이므로

$(1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0$, $(r-1)(r-5)=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 넓이의 합은

$\pi\cdot1^2+\pi\cdot5^2=26\pi$

답 ⑤

15 $x^2+y^2-2x+2y+1=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)=-1+1+1$

$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=1$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{1}=1$

$x^2+y^2+6x-10y+18=0$에서

$(x^2+6x+9)+(y^2-10y+25)=-18+9+25$

$\therefore (x+3)^2+(y-5)^2=16$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{16}=4$

$\therefore 1+4=5$

답 ②

16 $x^2+y^2+2kx-4y+k=0$에서

$(x^2+2kx+k^2)+(y^2-4y+4)=-k+k^2+4$

따라서 $k^2-k+4=4^2$이므로

$k^2-k-12=0$, $(k+3)(k-4)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=4$

답 -3, 4

17 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=3+4+9$

$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=16$

따라서 $a=2$, $b=-3$, $r=4$이므로

$a+b+r=3$

답 ③

18 $x^2+y^2-8x+10y+11=0$에서

$(x^2-8x+16)+(y^2+10y+25)=-11+16+25$

$\therefore (x-4)^2+(y+5)^2=30$

이 원의 중심의 좌표는

$(4, -5)$

베이직쎈 BOX

원의 반지름의 길이가 $|a|$이므로 $|a|$의 값이 클수록 원이 크다.

x축 위의 점의 y좌표는 0이다.

점 $(1, -2)$는 제4사분면 위의 점이므로 원의 중심도 제4사분면 위에 있다.

세 점 A, B, C를 지나는 원

반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2

$(x+k)^2+(y-2)^2=-k+k^2+4$
이므로 중심의 좌표가 $(-k, 2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{-k+k^2+4}$인 원이다.

a의 값의 부호를 알 수 없으므로 반지름의 길이는 $|a|$이다.

제4사분면 위의 점은 (y좌표)<0

따라서 중심이 점 $(4, -5)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+5)^2=25$

답 $(x-4)^2+(y+5)^2=25$

베이직쎈 BOX

(반지름의 길이)
$=|(\text{중심의 } y\text{좌표})|$
$=5$

19 $x^2+y^2-8y+k=0$에서

$x^2+(y^2-8y+16)=-k+16$

$\therefore x^2+(y-4)^2=-k+16$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면

$-k+16>0$ $\therefore k<16$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, …, 15의 15개이다.

답 15

20 $x^2+y^2+4x-14y+45=0$에서

$(x^2+4x+4)+(y^2-14y+49)=-45+4+49$

$\therefore (x+2)^2+(y-7)^2=8$

따라서 직선 $y=-3x+k$가 주어진 원의 중심 $(-2, 7)$을 지나므로

$7=-3\cdot(-2)+k$ $\therefore k=1$

답 1

21 (1) 주어진 원의 중심의 좌표가 $(-3, 4)$이므로

$\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

(2) 주어진 원의 반지름의 길이가 1이므로 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값은

$5+1=6$

(3) 주어진 원의 반지름의 길이가 1이므로 $\overline{OP}$의 길이의 최솟값은

$5-1=4$

답 (1) 5 (2) 6 (3) 4

22 $x^2+y^2+4x-2y-3=0$에서

$(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)=3+4+1$

$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=8$

점 A$(2, 5)$와 원의 중심 $(-2, 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

또 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 $\overline{AP}$의 길이의 최댓값은

$4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

답 $6\sqrt{2}$

$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

23 점 A$(6, 8)$과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{6^2+8^2}=10$

원의 반지름의 길이가 2이므로

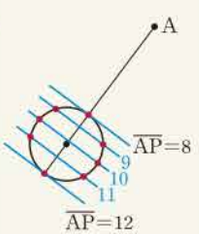
$10-2\le\overline{AP}\le10+2$, 즉 $8\le\overline{AP}\le12$

이때 $\overline{AP}=9$, 10, 11을 만족시키는 점 P는 각각 2개이고, $\overline{AP}=8$, 12를 만족시키는 점 P는 각각 1개이다.

따라서 구하는 점 P의 개수는

$3\cdot2+2\cdot1=8$

답 8



24 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$\overline{AP}=2\overline{BP}$ $\therefore \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$(x+4)^2+(y-1)^2=4\{(x-2)^2+(y+\boxed{2})^2\}$

$x^2+y^2-8x+6y+\boxed{5}=0$

$(x^2-8x+16)+(y^2+6y+9)=-5+16+9$

$\therefore (x-\boxed{4})^2+(y+3)^2=\boxed{20}$

$\therefore$ (가) 2 (나) 5 (다) 4 (라) 20

답 (가) 2 (나) 5 (다) 4 (라) 20

25 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=10$이므로

$(x-1)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=10$

$2x^2-8x+10+2y^2=10$

$x^2+y^2-4x=0$, $(x^2-4x+4)+y^2=4$

$\therefore (x-2)^2+y^2=4$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로

$a-b=-2$

답 ②

26 점 P의 좌표를 (a, b), $\overline{AP}$의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{2+a}{2}$, $y=\frac{1+b}{2}$

$\therefore a=2x-2$, $b=2y-1$ …… ㉠

이때 점 P는 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=8$ 위의 점이므로

$(a-1)^2+(b+1)^2=8$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2x-2-1)^2+(2y-1+1)^2=8$

$4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+4y^2=8$

$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=2$

답 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=2$

07 원과 직선의 위치 관계

개념 17 원과 직선의 위치 관계

본책 48쪽

01 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0, 0, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, <,
서로 다른 두 점에서 만난다.

02 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=-x+3$, 즉 $x+y-3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로

$\frac{3\sqrt{2}}{2}>1$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

베이직쎈 BOX

03 원의 중심 $(1, 0)$과 직선 $y=2x+3$, 즉 $2x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot1-0+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{5}=\sqrt{5}$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 한 점에서 만난다. (접한다.)

04 원의 중심 $(-1, 2)$와 직선 $y=-\frac{1}{3}x+1$, 즉 $x+3y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1+3\cdot2-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{10}}{5}<\sqrt{3}$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

05 $x^2+y^2-2y-4=0$에서

$x^2+(y^2-2y+1)=4+1$

$\therefore x^2+(y-1)^2=5$

원의 중심 $(0, 1)$과 직선 $x-2y+7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-2\cdot1+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{5}=\sqrt{5}$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 한 점에서 만난다. (접한다.)

06 $x^2+y^2-4x+6y+5=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=-5+4+9$

$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=8$

원의 중심 $(2, -3)$과 직선 $3x-2y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\cdot2-2\cdot(-3)+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{13}>2\sqrt{2}$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

07 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

x, $>$, 서로 다른 두 점에서 만난다.

$D=1^2-4\cdot1\cdot0=1>0$

08 $y=-x+5$를 $x^2+y^2=9$에 대입하면

$x^2+(-x+5)^2=9$, $2x^2-10x+16=0$

$\therefore x^2-5x+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot8=-7<0$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

원과 직선의 교점의 개수
① $D>0$ ➡ 2개
② $D=0$ ➡ 1개
③ $D<0$ ➡ 0개

09 $y=-2x+1$을 $x^2+(y+2)^2=4$에 대입하면

$x^2+(-2x+1+2)^2=4$

$\therefore 5x^2-12x+5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-5\cdot5=11>0$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

10 $y=\frac{1}{2}x+2$를 $(x-3)^2+(y-1)^2=5$에 대입하면

$(x-3)^2+\left(\frac{1}{2}x+2-1\right)^2=5$

$\frac{5}{4}x^2-5x+5=0$ $\therefore x^2-4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot4=0$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 한 점에서 만난다. (접한다.)

11 $2x-y-3=0$, 즉 $y=2x-3$을 $x^2+y^2+2x-1=0$에 대입하면

$x^2+(2x-3)^2+2x-1=0$

$\therefore 5x^2-10x+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-5)^2-5\cdot8=-15<0$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

12 $x+3y-8=0$, 즉 $x=-3y+8$을 $x^2+y^2-2x+2y-8=0$에 대입하면

$(-3y+8)^2+y^2-2(-3y+8)+2y-8=0$

$\therefore y^2-4y+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot4=0$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 한 점에서 만난다. (접한다.)

13 주어진 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}<2\sqrt{2}$, $|k|<2\sqrt{10}$

$\therefore -2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}$

답 $-2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}$

14 주어진 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{2}$, $|k|=2\sqrt{10}$

$\therefore k=\pm 2\sqrt{10}$ 답 $\pm 2\sqrt{10}$

15 주어진 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}>2\sqrt{2}$, $|k|>2\sqrt{10}$

$\therefore k<-2\sqrt{10}$ 또는 $k>2\sqrt{10}$

답 $k<-2\sqrt{10}$ 또는 $k>2\sqrt{10}$

16 주어진 원의 중심 $(-4, 2)$와 직선 $x+2y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4+2\cdot 2+k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{9}=3$이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{5}}<3$, $|k|<3\sqrt{5}$

$\therefore -3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$ 답 $-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$

17 $x^2+y^2-10x+21=0$에서

$(x^2-10x+25)+y^2=-21+25$

$\therefore (x-5)^2+y^2=4$

따라서 원의 중심 $(5, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|5+k|}{\sqrt{2}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{4}=2$이므로

$\frac{|5+k|}{\sqrt{2}}<2$, $|5+k|<2\sqrt{2}$

$-2\sqrt{2}<5+k<2\sqrt{2}$

$\therefore -2\sqrt{2}-5<k<2\sqrt{2}-5$

답 $-2\sqrt{2}-5<k<2\sqrt{2}-5$

18 주어진 원의 중심 $(3, -1)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3-1+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이므로

$\frac{|2+k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, $|2+k|=4$

$2+k=\pm 4$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$ 답 -6, 2

19 $x^2+y^2-6y-8=0$에서

$x^2+(y^2-6y+9)=8+9$

$\therefore x^2+(y-3)^2=17$

따라서 원의 중심 $(0, 3)$과 직선 $4x-y+k=0$ 사이의 거리는

베이직쎈 BOX

원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D<0$임을 이용할 수도 있다.

원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D>0$임을 이용할 수도 있다.

원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D=0$임을 이용할 수도 있다.

$\frac{|4\cdot 0-3+k|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|-3+k|}{\sqrt{17}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$이므로

$\frac{|-3+k|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$, $|-3+k|=17$

$-3+k=\pm 17$

$\therefore k=-14$ 또는 $k=20$

답 -14, 20

20 주어진 원의 중심 $(-1, -4)$와 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot(-1)-(-4)+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|1+k|}{\sqrt{10}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|1+k|}{\sqrt{10}}>\sqrt{5}$, $|1+k|>5\sqrt{2}$

$1+k<-5\sqrt{2}$ 또는 $1+k>5\sqrt{2}$

$\therefore k<-5\sqrt{2}-1$ 또는 $k>5\sqrt{2}-1$

답 $k<-5\sqrt{2}-1$ 또는 $k>5\sqrt{2}-1$

21 $x^2+y^2-6x-4y+8=0$에서

$(x^2-6x+9)+(y^2-4y+4)=-8+9+4$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=5$

따라서 원의 중심 $(3, 2)$와 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3-2\cdot 2+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|-1+k|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-1+k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}$, $|-1+k|>5$

$-1+k<-5$ 또는 $-1+k>5$

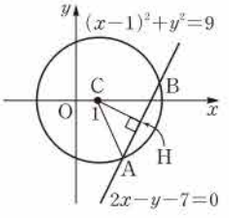
$\therefore k<-4$ 또는 $k>6$

답 $k<-4$ 또는 $k>6$

개념 18 원과 직선의 위치 관계의 응용 본책 50쪽

22 답 $4\sqrt{2}$ -4, 1, $2\sqrt{2}$, 4, $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$

23 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(1, 0)$이라 하고, 점 C에서 직선 $2x-y-7=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\frac{|2\cdot 1-0-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=3$이므로

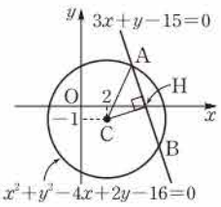
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=4$ 답 4

베이직쎈 BOX

$b>0$일 때,
$|x-a|<b$에서
$-b<x-a<b$
$\therefore a-b<x<a+b$

24 $x^2+y^2-4x+2y-16=0$에서
$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=16+4+1$
$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=21$
따라서 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(2, -1)$이라 하고, 점 C에서 직선 $3x+y-15=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\dfrac{|3\cdot2+(-1)-15|}{\sqrt{3^2+1^2}}$
$=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$
직각삼각형 CHA에서 $\overline{CA}=\sqrt{21}$이므로
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{(\sqrt{21})^2-(\sqrt{10})^2}$
$=\sqrt{11}$
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{11}$
답 $2\sqrt{11}$

25 답 최댓값: $5\sqrt{2}$, 최솟값: $3\sqrt{2}$
8, 1, $4\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$

26 원의 중심 $(0, -2)$와 직선 $2x+3y-7=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2\cdot0+3\cdot(-2)-7|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$
이때 반지름의 길이가 $\sqrt{4}=2$이므로
최댓값은 $\sqrt{13}+2$
최솟값은 $\sqrt{13}-2$
답 최댓값: $\sqrt{13}+2$, 최솟값: $\sqrt{13}-2$

27 $x^2+y^2+6x-2y+5=0$에서
$(x^2+6x+9)+(y^2-2y+1)=-5+9+1$
$\therefore (x+3)^2+(y-1)^2=5$
따라서 원의 중심 $(-3, 1)$과 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2\cdot(-3)+1-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$
이때 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로
최댓값은 $2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$
최솟값은 $2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$
답 최댓값: $3\sqrt{5}$, 최솟값: $\sqrt{5}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 51쪽

01 원의 중심 $(0, 2)$와 직선 $2x+3y+k=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2\cdot0+3\cdot2+k|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{|6+k|}{\sqrt{13}}$
이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로
$\dfrac{|6+k|}{\sqrt{13}}<\sqrt{13}$, $|6+k|<13$
$-13<6+k<13$ $\therefore -19<k<7$
$\therefore a=-19$, $b=7$ 답 $a=-19$, $b=7$

02 $x^2+y^2-8x+6y+15=0$에서
$(x^2-8x+16)+(y^2+6y+9)=-15+16+9$
$\therefore (x-4)^2+(y+3)^2=10$
따라서 원의 중심 $(4, -3)$과 직선 $x-3y+k=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|4-3\cdot(-3)+k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{|13+k|}{\sqrt{10}}$
이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로
$\dfrac{|13+k|}{\sqrt{10}}<\sqrt{10}$, $|13+k|<10$
$-10<13+k<10$ $\therefore -23<k<-3$
따라서 정수 k는
$-22, -21, -20, \cdots, -4$의 19개 답 ①

다른 풀이 $x-3y+k=0$에서 $x=3y-k$
이를 원의 방정식에 대입하면
$(3y-k)^2+y^2-8(3y-k)+6y+15=0$
$\therefore 10y^2-6(k+3)y+k^2+8k+15=0$
이 y에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=\{-3(k+3)\}^2-10(k^2+8k+15)>0$
$k^2+26k+69<0$, $(k+23)(k+3)<0$
$\therefore -23<k<-3$
따라서 정수 k의 개수는 19이다.

03 원의 중심 $(-3, 1)$과 직선 $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$, 즉 $4x-3y+1=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|4\cdot(-3)-3\cdot1+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{14}{5}$
이때 원의 반지름의 길이가 r이므로
$r>\dfrac{14}{5}$
따라서 자연수 r의 최솟값은 3이다. 답 ③

04 점 $(-1, 4)$와 직선 $2x+y+3=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|2\cdot(-1)+4+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$
따라서 중심이 점 $(-1, 4)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-4)^2=5$
답 $(x+1)^2+(y-4)^2=5$

다른 풀이 구하는 원의 방정식을 $(x+1)^2+(y-4)^2=r^2$이라 하자.
$2x+y+3=0$에서 $y=-2x-3$
이므로 이를 원의 방정식에 대입하면
$(x+1)^2+(-2x-3-4)^2=r^2$
$\therefore 5x^2+30x+50-r^2=0$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=15^2-5(50-r^2)=0 \quad \therefore r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-4)^2=5$

05 원의 중심 $(1, 1)$과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1-2\cdot1+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|-1+k|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-1+k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}, \quad |-1+k|=10$

$-1+k=\pm10$

$\therefore k=-9$ 또는 $k=11$

따라서 $k>0$이므로 $k=11$ ④

06 $x^2+y^2-2x+2y+k=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)=-k+1+1$

$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=2-k$

원의 중심 $(1, -1)$과 직선 $y=-x+6$, 즉 $x+y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1+(-1)-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2-k}$이므로

$3\sqrt{2}=\sqrt{2-k}, \quad 2-k=18$

$\therefore k=-16$ −16

07 원의 중심 $(-1, 0)$과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$, 즉 $x+2y-2k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1+2\cdot0-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-1-2k|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-1-2k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}, \quad |-1-2k|>5$

$-1-2k<-5$ 또는 $-1-2k>5$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>2$

⑤

다른 풀이 $y=-\frac{1}{2}x+k$를 원의 방정식에 대입하면

$(x+1)^2+\left(-\frac{1}{2}x+k\right)^2=5$

$\therefore 5x^2+4(2-k)x+4k^2-16=0$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{2(2-k)\}^2-5(4k^2-16)<0$

$-16k^2-16k+96<0$, 즉 $k^2+k-6>0$

$(k+3)(k-2)>0$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>2$

08 $x^2+y^2-2x+4y-5=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=5+1+4$

$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=10$

베이직쎈 BOX

$2-k>0$이므로 $k<2$

원 $(x-4)^2+(y+5)^2=36$의 반지름의 길이

$b>0$일 때, $|x-a|>b$에서 $x-a<-b$ 또는 $x-a>b$ $\therefore x<a-b$ 또는 $x>a+b$

원의 중심 $(1, -2)$와 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot1-(-2)+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|5+k|}{\sqrt{10}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|5+k|}{\sqrt{10}}>\sqrt{10}, \quad |5+k|>10$

$5+k<-10$ 또는 $5+k>10$

$\therefore k<-15$ 또는 $k>5$

따라서 음의 정수 k의 최댓값은 -16이다. ③

09 원의 중심 $(4, k)$와 직선 $x+y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4+k-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}, \quad |k-2|>4$

$k-2<-4$ 또는 $k-2>4$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>6$

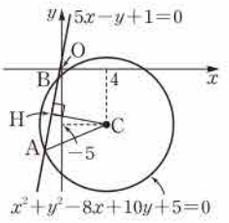
$k<-2$ 또는 $k>6$

10 $x^2+y^2-8x+10y+5=0$에서

$(x^2-8x+16)+(y^2+10y+25)=-5+16+25$

$\therefore (x-4)^2+(y+5)^2=36$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(4, -5)$라 하고, 점 C에서 직선 $5x-y+1=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



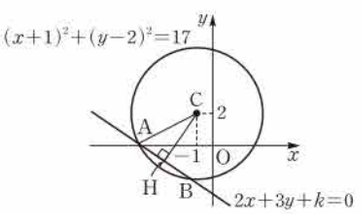
$\overline{CH}=\frac{|5\cdot4-(-5)+1|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\sqrt{26}$

직각삼각형 CHA에서 $\overline{CA}=6$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{6^2-(\sqrt{26})^2}=\sqrt{10}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{10}$ ④

11 다음 그림과 같이 원의 중심을 C$(-1, 2)$라 하고, 점 C에서 직선 $2x+3y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\frac{|2\cdot(-1)+3\cdot2+k|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|4+k|}{\sqrt{13}}$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{CA}=\sqrt{17}, \ \overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2$

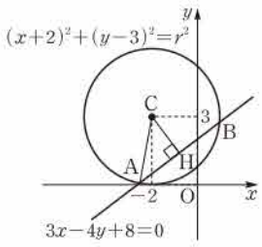
이므로

$$17=4+\frac{(4+k)^2}{13}$$

$(4+k)^2=13^2$, $4+k=\pm 13$

$\therefore k=9\ (\because k>0)$ ⑤

12 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(−2, 3)이라 하고, 점 C에서 직선 $3x-4y+8=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|3\cdot(-2)-4\cdot 3+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=r$, $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{5}$이므로

$r^2=2^2+(\sqrt{5})^2=9$

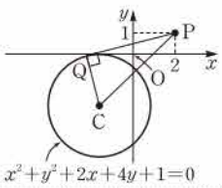
$\therefore r=3\ (\because r>0)$ 3

13 $x^2+y^2+2x+4y+1=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2+4y+4)=-1+1+4$

$\therefore (x+1)^2+(y+2)^2=4$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(−1, −2)라 하면



$\overline{CP}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

직각삼각형 CPQ에서 $\overline{CQ}=2$이므로

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-2^2}=\sqrt{14}$$ ⑤

14 원의 중심을 C(2, −4)라 하면

$\overline{CP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

직각삼각형 CQP에서 $\overline{CQ}=r$이므로

$r^2+4^2=5^2$, $r^2=9$

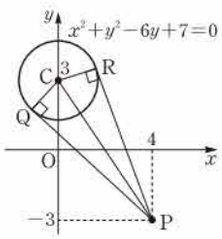
$\therefore r=3\ (\because r>0)$ ①

15 $x^2+y^2-6y+7=0$에서

$x^2+(y^2-6y+9)=-7+9$

$\therefore x^2+(y-3)^2=2$

따라서 C(0, 3)이므로 오른쪽 그림에서



$\overline{CP}=\sqrt{4^2+(-6)^2}=2\sqrt{13}$

직각삼각형 CQP에서 $\overline{CQ}=\sqrt{2}$이므로

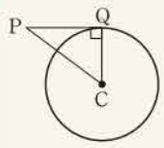
$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-(\sqrt{2})^2}=5\sqrt{2}$$

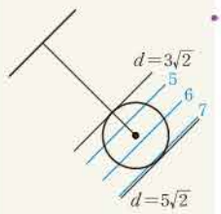
따라서 사각형 PRCQ의 둘레의 길이는

$5\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+5\sqrt{2}=12\sqrt{2}$ $12\sqrt{2}$

베이직쎈 BOX

원 $(x+1)^2+(y+2)^2=4$의 반지름의 길이





원 $x^2+(y-3)^2=2$의 반지름의 길이

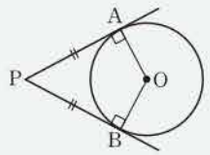
$29-k>0$이므로 $k<29$

쎈 TIP

원의 접선의 성질

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

➡ $\overline{PA}=\overline{PB}$



16 원의 중심 (5, 1)과 직선 $x+2y+8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5+2\cdot 1+8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=3\sqrt{5}$$

이때 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$M=3\sqrt{5}+\sqrt{5}=4\sqrt{5}$,

$m=3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ ④

17 $x^2+y^2+10x-4y+k=0$에서

$(x^2+10x+25)+(y^2-4y+4)=-k+25+4$

$\therefore (x+5)^2+(y-2)^2=29-k$

원의 중심 (−5, 2)와 직선 $4x-3y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\cdot(-5)-3\cdot 2+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$$

이때 반지름의 길이가 $\sqrt{29-k}$이므로

$5-\sqrt{29-k}=2$, $\sqrt{29-k}=3$

$29-k=9$ $\therefore k=20$ 20

18 원의 중심 (1, −3)과 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-(-3)+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$$

이때 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$4\sqrt{2}-\sqrt{2}\le d\le 4\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$\therefore 3\sqrt{2}\le d\le 5\sqrt{2}$

따라서 자연수 d는 5, 6, 7이고 각각의 거리에 있는 점 P가 2개씩 있으므로 점 P의 개수는

$3\cdot 2=6$ 6

08 원의 접선의 방정식

개념 19 원의 접선의 방정식

본책 54쪽

01 $y=3x\pm 1\cdot\sqrt{3^2+1}$이므로 $y=3x\pm\sqrt{10}$

$y=3x\pm\sqrt{10}$

02 $y=-2x\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{(-2)^2+1}$이므로

$y=-2x\pm\sqrt{15}$ $y=-2x\pm\sqrt{15}$

03 $y=-x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{(-1)^2+1}$이므로
$y=-x\pm\sqrt{10}$ 답 $y=-x\pm\sqrt{10}$

04 $y=4x\pm3\cdot\sqrt{4^2+1}$이므로 $y=4x\pm3\sqrt{17}$
답 $y=4x\pm3\sqrt{17}$

05 $y=2x\pm4\cdot\sqrt{2^2+1}$이므로 $y=2x\pm4\sqrt{5}$
답 $y=2x\pm4\sqrt{5}$

06 답 $x+y=2$

07 답 $x+3y=10$

08 답 $3x-2y=13$

09 답 $x+y=-4$

10 답 $3x-4y=-25$

개념 20 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식

본책 55쪽

11 (1) 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=1$
이 직선이 점 $(2, 0)$을 지나므로
$2x_1=1$ $\therefore x_1=\frac{1}{2}$
한편 점 (x_1, y_1), 즉 $\left(\frac{1}{2}, y_1\right)$이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로
$\frac{1}{4}+y_1^2=1$, $y_1^2=\frac{3}{4}$
$\therefore y_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$, $\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$
$\therefore x+\sqrt{3}y-2=0$, $x-\sqrt{3}y-2=0$

(2) 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은
$y=m(x-2)$ $\therefore mx-y-2m=0$
원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-2m=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로
$\frac{|-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $|-2m|=\sqrt{m^2+1}$
$4m^2=m^2+1$, $3m^2=1$
$m^2=\frac{1}{3}$ $\therefore m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$-\frac{\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{2\sqrt{3}}{3}=0$,
$\frac{\sqrt{3}}{3}x-y-\frac{2\sqrt{3}}{3}=0$
$\therefore x+\sqrt{3}y-2=0$, $x-\sqrt{3}y-2=0$
답 풀이 참조

베이직쎈 BOX

접선 $y=m(x+3)$과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같음을 이용할 수도 있다.

12 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=2$
이 직선이 점 $(-3, 0)$을 지나므로
$-3x_1=2$ $\therefore x_1=-\frac{2}{3}$
한편 점 (x_1, y_1), 즉 $\left(-\frac{2}{3}, y_1\right)$은 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로
$\frac{4}{9}+y_1^2=2$, $y_1^2=\frac{14}{9}$
$\therefore y_1=\pm\frac{\sqrt{14}}{3}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$-\frac{2}{3}x+\frac{\sqrt{14}}{3}y=2$, $-\frac{2}{3}x-\frac{\sqrt{14}}{3}y=2$
$\therefore 2x-\sqrt{14}y+6=0$, $2x+\sqrt{14}y+6=0$
답 $2x-\sqrt{14}y+6=0$, $2x+\sqrt{14}y+6=0$

13 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=16$
이 직선이 점 $(0, -6)$을 지나므로
$-6y_1=16$ $\therefore y_1=-\frac{8}{3}$
한편 점 (x_1, y_1), 즉 $\left(x_1, -\frac{8}{3}\right)$은 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로
$x_1^2+\frac{64}{9}=16$, $x_1^2=\frac{80}{9}$
$\therefore x_1=\pm\frac{4\sqrt{5}}{3}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$\frac{4\sqrt{5}}{3}x-\frac{8}{3}y=16$, $-\frac{4\sqrt{5}}{3}x-\frac{8}{3}y=16$
$\therefore \sqrt{5}x-2y-12=0$, $\sqrt{5}x+2y+12=0$
답 $\sqrt{5}x-2y-12=0$, $\sqrt{5}x+2y+12=0$

14 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=5$
이 직선이 점 $(3, 1)$을 지나므로
$3x_1+y_1=5$ $\therefore y_1=-3x_1+5$
한편 점 (x_1, y_1), 즉 $(x_1, -3x_1+5)$는 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로
$x_1^2+(-3x_1+5)^2=5$
$x_1^2-3x_1+2=0$, $(x_1-1)(x_1-2)=0$
$\therefore x_1=1$ 또는 $x_1=2$
따라서 접점의 좌표는 $(1, 2)$ 또는 $(2, -1)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$x+2y-5=0$, $2x-y-5=0$
답 $x+2y-5=0$, $2x-y-5=0$

$y_1=-3x_1+5$에 $x_1=1$을 대입하면
$y_1=2$
$x_1=2$를 대입하면
$y_1=-1$

15 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=4$
이 직선이 점 $(-4, -2)$를 지나므로
$-4x_1-2y_1=4$ $\therefore y_1=-2x_1-2$

한편 점 (x_1, y_1), 즉 $(x_1, -2x_1-2)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$x_1^2+(-2x_1-2)^2=4$

$5x_1^2+8x_1=0$, $x_1(5x_1+8)=0$

$\therefore x_1=0$ 또는 $x_1=-\frac{8}{5}$

따라서 접점의 좌표는 $(0, -2)$ 또는 $\left(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$-2y=4$, $-\frac{8}{5}x+\frac{6}{5}y=4$

$\therefore y+2=0$, $4x-3y+10=0$

답 $y+2=0$, $4x-3y+10=0$

$y_1=-2x_1-2$에 $x_1=0$을 대입하면 $y_1=-2$

$x_1=-\frac{8}{5}$을 대입하면 $y_1=\frac{6}{5}$

베이직쎈 BOX

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 56쪽

01 직선 $y=2x-1$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{2}$

답 $y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{2}$

두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

02 직선 $2x-3y-1=0$, 즉 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{2}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y=\frac{2}{3}x\pm\sqrt{13}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+1}$

$\therefore y=\frac{2}{3}x\pm\frac{13}{3}$

직선 $y=\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$이 점 $(1, a)$를 지나면

$a=\frac{2}{3}+\frac{13}{3}=5$

직선 $y=\frac{2}{3}x-\frac{13}{3}$이 점 $(1, a)$를 지나면

$a=\frac{2}{3}-\frac{13}{3}=-\frac{11}{3}$

이때 $a>0$이므로 $a=5$ 답 ⑤

03 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{m^2+1}$

$\therefore y=mx\pm\sqrt{10m^2+10}$

이 직선이 점 $(2, 4)$를 지나므로

$4=2m\pm\sqrt{10m^2+10}$

$4-2m=\pm\sqrt{10m^2+10}$

양변을 제곱하면

$16-16m+4m^2=10m^2+10$

$3m^2+8m-3=0$, $(m+3)(3m-1)=0$

$\therefore m=-3$ ($\because m$은 정수) 답 ①

04 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점 $(2, -2)$에서의 접선의 방정식은

$2x-2y=8$ $\therefore x-y=4$

$y=0$을 이 식에 대입하면 $x=4$ 답 ④

05 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-4, 3)$에서의 접선의 방정식은

$-4x+3y=25$ …… ㉠

또 점 $(3, 4)$에서의 접선의 방정식은

$3x+4y=25$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=7$

따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $(-1, 7)$이다.

답 $(-1, 7)$

㉠×3+㉡×4를 하면 $25y=175$ $\therefore y=7$

$y=7$을 ㉠에 대입하면 $-4x+21=25$ $\therefore x=-1$

06 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(-2, 4)$에서의 접선의 방정식은

$-2x+4y=20$ $\therefore x-2y+10=0$

$x^2+y^2-12x-4y+13k+6=0$에서

$(x^2-12x+36)+(y^2-4y+4)=-13k-6+36+4$

$\therefore (x-6)^2+(y-2)^2=34-13k$

접선과 원의 중심 $(6, 2)$ 사이의 거리는

$\frac{|6-2\cdot2+10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{12}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{34-13k}$이므로

$\sqrt{34-13k}=\frac{12}{\sqrt{5}}$, $34-13k=\frac{144}{5}$

$13k=\frac{26}{5}$ $\therefore k=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

07 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4y_1=4$ $\therefore y_1=1$

한편 점 (x_1, y_1), 즉 $(x_1, 1)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$x_1^2+1=4$, $x_1^2=3$

$\therefore x_1=\pm\sqrt{3}$

따라서 접선의 방정식은

$\sqrt{3}x+y=4$, $-\sqrt{3}x+y=4$

이므로 k의 값은 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ 답 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

08 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=25$

이 직선이 점 $(-1, 7)$을 지나므로

$-x_1+7y_1=25$ $\therefore x_1=7y_1-25$

한편 점 (x_1, y_1), 즉 $(7y_1-25, y_1)$은 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$(7y_1-25)^2+y_1^2=25$

$y_1^2-7y_1+12=0$, $(y_1-3)(y_1-4)=0$

$\therefore y_1=3$ 또는 $y_1=4$

따라서 접점의 좌표는 $(-4, 3)$ 또는 $(3, 4)$이므로 접선의 방정식은

$-4x+3y=25$, $3x+4y=25$

$\therefore 4x-3y+25=0$, $3x+4y-25=0$

$\therefore a=4$, $b=4$ 답 $a=4$, $b=4$

09 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=10$

이 직선이 점 $(2, -4)$를 지나므로

$2x_1-4y_1=10$ $\therefore x_1=2y_1+5$

한편 점 (x_1, y_1), 즉 $(2y_1+5, y_1)$은 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$(2y_1+5)^2+y_1^2=10$

$y_1^2+4y_1+3=0$, $(y_1+3)(y_1+1)=0$

$\therefore y_1=-3$ 또는 $y_1=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -3)$ 또는 $(3, -1)$이므로 접선의 방정식은

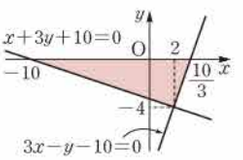
$-x-3y=10$, $3x-y=10$

$\therefore x+3y+10=0$, $3x-y-10=0$

두 직선의 교점의 좌표는

$(2, -4)$

이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{3}+10\right)\cdot 4=\frac{80}{3}$

답 ④

$\begin{cases} x+3y+10=0 & \cdots ㉠ \\ 3x-y-10=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡×3을 하면

$10x-20=0$

$\therefore x=2$

$x=2$를 ㉡에 대입하면

$6-y-10=0$

$\therefore y=-4$

10 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx$ $\therefore mx-y=0$

원의 중심 $(-1, 2)$와 접선 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $|-m-2|=2\sqrt{m^2+1}$

$m^2+4m+4=4m^2+4$

$3m^2-4m=0$, $m(3m-4)=0$

$\therefore m=\frac{4}{3}$ $(\because m\neq 0)$ 답 $\frac{4}{3}$

원의 중심이 원점이 아니면 원의 중심과 접선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

원의 중심 $(3, 2)$와 점 $A(4, 0)$ 사이의 거리

11 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=m(x-1)$ $\therefore mx-y-m=0$

원의 중심 $(0, -3)$과 직선 $mx-y-m=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-(-3)-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|3-m|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}$

$m^2-6m+9=5m^2+5$

$2m^2+3m-2=0$, $(m+2)(2m-1)=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$ $(\because m>0)$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}(x-1)$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

이므로 y절편은 $-\frac{1}{2}$이다.

답 ②

두 점 $A(3, -3)$, $B(9, 1)$ 사이의 거리의 $\frac{1}{2}$이다.

12 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-3=m(x-2)$

$\therefore mx-y-2m+3=0$

$x^2+y^2+2x-4y=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=1+4$

$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2=5$

원의 중심 $(-1, 2)$와 직선 $mx-y-2m+3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-m-2-2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|1-3m|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}$

$9m^2-6m+1=5m^2+5$

$2m^2-3m-2=0$, $(2m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$ $(\because m<0)$

따라서 접선의 방정식은 $y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$, 즉

$y=-\frac{1}{2}x+4$이고 이 직선이 점 $(4, a)$를 지나므로

$a=-\frac{1}{2}\cdot 4+4=2$ 답 ②

학교 시험 기출로 실전 감각 UP! 본책 58쪽

01 전략 중심이 점 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot 0+3\cdot 4}{1+3}, \frac{1\cdot 8+3\cdot 0}{1+3}\right)$ $\therefore (3, 2)$

원의 반지름의 길이는

$\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

따라서 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=5$ 답 ④

02 전략 원의 중심이 $\overline{AB}$의 중점이고, 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{AB}$임을 이용하여 원의 방정식을 구한다.

풀이 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{3+9}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$ $\therefore (6, -1)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{\sqrt{6^2+4^2}}{2}=\sqrt{13}$

이므로 원의 방정식은

$(x-6)^2+(y+1)^2=13$

이 원이 점 $(4, a)$를 지나므로

$4+(a+1)^2=13$, $(a+1)^2=9$

$a+1=-3$ 또는 $a+1=3$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

따라서 $a>0$이므로 $a=2$ 답 ②

베이직쎈 BOX

03 전략 중심이 x축 위에 있는 원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=r^2$임을 이용한다.

풀이 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(1, 2)$를 지나므로 $(1-a)^2+2^2=r^2$

$\therefore a^2-2a+5=r^2$ ····· ㉠

또 이 원이 점 $(2, -3)$을 지나므로

$(2-a)^2+(-3)^2=r^2$

$\therefore a^2-4a+13=r^2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $r^2=13$

따라서 원의 넓이는 13π이다. ①

04 전략 중심이 점 (a, b)이고 y축에 접하는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-14x+4y+3=0$에서

$(x^2-14x+49)+(y^2+4y+4)=-3+49+4$

$\therefore (x-7)^2+(y+2)^2=50$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(7, -2)$

이므로 중심이 점 $(7, -2)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은 $(x-7)^2+(y+2)^2=49$

즉 $a=7$, $b=-2$, $c=49$이므로

$a+b+c=54$ ④

05 전략 $|a|<|b|$일 때, 중심이 점 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원이 좌표축과 만나지 않으려면 $r<|a|$이어야 한다.

풀이 $x^2+y^2+8x+10y+2k-15=0$에서

$(x^2+8x+16)+(y^2+10y+25)$

$=-2k+15+16+25$

$\therefore (x+4)^2+(y+5)^2=56-2k$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이므로

$56-2k>0$, $2k<56$

$\therefore k<28$ ····· ㉠

또 원이 좌표축과 만나지 않으려면

$\sqrt{56-2k}<4$, $56-2k<16$

$2k>40$ $\therefore k>20$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $20<k<28$

따라서 자연수 k는

21, 22, 23, ···, 27의 7개 ②

06 전략 점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고 주어진 조건을 이용하여 x, y에 대한 식을 세운다.

풀이 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$\overline{AP}=2\overline{BP}$ $\therefore \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$(x+3)^2+y^2=4\{(x-6)^2+y^2\}$

$3x^2+3y^2-54x+135=0$, $x^2+y^2-18x+45=0$

$(x^2-18x+81)+y^2=-45+81$

$\therefore (x-9)^2+y^2=36$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(9, 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\cdot6=12\pi$ ④

$9<11<16$이므로 $3<\sqrt{11}<4$

㉠−㉡을 하면 $2a-8=0$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $r^2=16-8+5=13$

(반지름의 길이) $<|$(중심의 x좌표$)|$, (반지름의 길이) $<|$(중심의 y좌표$)|$

07 전략 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때 $d<r$임을 이용한다.

풀이 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=kx+6$, 즉 $kx-y+6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{k^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로

$\frac{6}{\sqrt{k^2+1}}<\sqrt{3}$, $6<\sqrt{3}\cdot\sqrt{k^2+1}$

$36<3k^2+3$, $k^2>11$

$\therefore k<-\sqrt{11}$ 또는 $k>\sqrt{11}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 4이다. ③

08 전략 원과 직선이 접하면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 원의 중심 $(-1, 1)$과 직선 $3x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot(-1)+1+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|-2+k|}{\sqrt{10}}$

이때 원의 넓이가 $10\pi=\pi\cdot(\sqrt{10})^2$이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$

따라서 $\frac{|-2+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$이므로

$|-2+k|=10$

$-2+k=-10$ 또는 $-2+k=10$

$\therefore k=-8$ 또는 $k=12$

즉 모든 실수 k의 값의 합은

$-8+12=4$ ⑤

09 전략 원과 직선이 만나면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작거나 같음을 이용한다.

풀이 원의 중심 $(-k, 0)$과 직선 $x+y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-k+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로

$\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}\le3\sqrt{2}$, $|k-2|\le6$

$-6\le k-2\le6$ $\therefore -4\le k\le8$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=8$이므로

$\alpha+\beta=4$ ⑤

10 전략 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-8x+6y+24=0$에서

$(x^2-8x+16)+(y^2+6y+9)=-24+16+9$

$\therefore (x-4)^2+(y+3)^2=1$

원의 중심 $(4, -3)$과 직선 $x-4y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4-4\cdot(-3)+1|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\sqrt{17}$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로

$M=\sqrt{17}+1$, $m=\sqrt{17}-1$

$\therefore Mm=(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)=16$ ③

베이직쎈 BOX

11 전략 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$임을 이용한다.

풀이 원 $x^2+y^2=12$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=12 \qquad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{12}{b}$$

즉 $-\frac{a}{b}=-3$이므로 $\quad a=3b$

또 점 $P(3b, b)$가 원 $x^2+y^2=12$ 위의 점이므로

$$(3b)^2+b^2=12$$

$$b^2=\frac{6}{5} \qquad \therefore b=\pm\frac{\sqrt{30}}{5}$$

이때 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 ← $(x$좌표$)>0$, $(y$좌표$)>0$

$$a=\frac{3\sqrt{30}}{5},\ b=\frac{\sqrt{30}}{5}$$

$$\therefore a+2b=\sqrt{30}$$

답 ⑤

12 전략 접점의 좌표를 (x_1, y_1)로 놓고 이 점에서의 접선이 점 $(-2, 1)$을 지남을 이용한다.

풀이 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=1$$

이 직선이 점 $(-2, 1)$을 지나므로

$$-2x_1+y_1=1 \qquad \therefore y_1=2x_1+1$$

한편 점 (x_1, y_1), 즉 $(x_1, 2x_1+1)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$x_1^2+(2x_1+1)^2=1$$

$$5x_1^2+4x_1=0, \qquad x_1(5x_1+4)=0$$

$$\therefore x_1=0 \text{ 또는 } x_1=-\frac{4}{5}$$

따라서 접점의 좌표는 $(0, 1)$, $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$이므로

$$a=1,\ b=-\frac{4}{5},\ c=-\frac{3}{5}$$

$$\therefore a+b+c=-\frac{2}{5}$$

답 ①

13 전략 접선의 기울기를 m으로 놓고 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$$y-3=m(x+4) \qquad \therefore mx-y+4m+3=0$$

원의 중심 $(-1, 4)$와 직선 $mx-y+4m+3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-m-4+4m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$|3m-1|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}$$

$$9m^2-6m+1=5m^2+5$$

$$2m^2-3m-2=0, \qquad (2m+1)(m-2)=0$$

$$\therefore m=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } m=2$$

따라서 접선의 방정식은

$$-\frac{1}{2}x-y+1=0,\ 2x-y+11=0$$

$$\therefore x+2y-2=0,\ 2x-y+11=0$$

$$\begin{cases} x+2y-2=0 & \cdots ㉠ \\ 2x-y+11=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠+㉡×2를 하면

$$5x+20=0$$

$$\therefore x=-4$$

$x=-4$를 ㉡에 대입하면

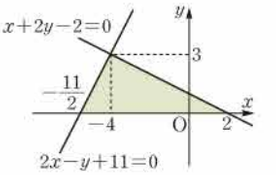
$$-8-y+11=0$$

$$\therefore y=3$$

두 직선의 교점의 좌표는

$$(-4, 3)$$

이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{11}{2}\right)\cdot 3$$

$$=\frac{45}{4}$$

답 ④

14 전략 원의 중심에서 원 위의 점까지의 거리는 일정함을 이용한다.

풀이 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$a^2+(b-1)^2=(a-1)^2+(b-2)^2$$

$$2a+2b=4$$

$$\therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$$a^2+(b-1)^2=(a+3)^2+(b-4)^2$$

$$6a-6b=-24$$

$$\therefore a-b=-4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 ← ㉠+㉡을 하면

$$a=-1,\ b=3$$

$2a=-2$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1+b=2$

$\therefore b=3$

즉 $P(-1, 3)$이므로 원의 반지름의 길이는

$$\overline{AP}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

따라서 원의 넓이는

$$\pi\cdot(\sqrt{5})^2=5\pi$$

답 5π

15 전략 원의 중심의 좌표를 $(a, -a+4)$로 놓고 x축과 y축에 동시에 접할 조건을 이용한다.

풀이 원의 중심의 좌표를 $(a, -a+4)$라 하면 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$$|a|=|-a+4|$$

$-a+4=a$이므로 $\quad a=2$ ← $-a+4=-a$를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

따라서 원의 중심의 좌표는 $(2, 2)$이고 반지름의 길이는 2이다.

답 2

16 전략 두 원의 넓이를 동시에 이등분하려면 두 원의 중심을 동시에 지나야 한다.

풀이 $x^2+y^2-6x+4y+3=0$에서

$$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=-3+9+4$$

$$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2=10$$

즉 원의 중심의 좌표는

$$(3, -2) \qquad \cdots\cdots ❶$$

$x^2+y^2-8x-2y-3=0$에서

$$(x^2-8x+16)+(y^2-2y+1)=3+16+1$$

$$\therefore (x-4)^2+(y-1)^2=20$$

즉 원의 중심의 좌표는

$$(4, 1) \qquad \cdots\cdots ❷$$

따라서 두 점 $(3, -2)$, $(4, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y+2=\frac{1+2}{4-3}(x-3)$$

$\therefore\ y=3x-11$ ··· ❸

답 $y=3x-11$

단계	채점 기준	비율
❶	원 $x^2+y^2-6x+4y+3=0$의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷	원 $x^2+y^2-8x-2y-3=0$의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸	두 원의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

17 전략 점 A와 원의 중심 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, $\overline{AP}$의 길이의 최댓값은 $d+r$임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+6x-10y+32=0$에서

$(x^2+6x+9)+(y^2-10y+25)=-32+9+25$

$\therefore\ (x+3)^2+(y-5)^2=2$ ··· ❶

점 $A(1,\ a)$와 원의 중심 $(-3,\ 5)$ 사이의 거리는

$\sqrt{4^2+(a-5)^2}=\sqrt{a^2-10a+41}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 $\overline{AP}$의 길이의 최댓값은

$\sqrt{a^2-10a+41}+\sqrt{2}$

즉 $\sqrt{a^2-10a+41}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$이므로 ··· ❷

$\sqrt{a^2-10a+41}=4\sqrt{2}$

$a^2-10a+41=32,\quad a^2-10a+9=0$

$(a-1)(a-9)=0$

$\therefore\ a=9\ (\because\ a>1)$ ··· ❸

답 9

단계	채점 기준	비율
❶	원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-\beta)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	30 %
❷	a에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸	a의 값을 구할 수 있다.	30 %

18 전략 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, $d>r$임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-2x-8y+k=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2-8y+16)=-k+1+16$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-4)^2=17-k$ ··· ❶

주어진 방정식이 나타내는 도형이 원이므로

$17-k>0\quad\therefore\ k<17$ ··· ❷

원의 중심 $(1,\ 4)$와 직선 $y=2x-5$, 즉 $2x-y-5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2\cdot1-4-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{17-k}$이므로

$\dfrac{7}{\sqrt{5}}>\sqrt{17-k},\quad\dfrac{49}{5}>17-k$

$\therefore\ k>\dfrac{36}{5}$ ··· ❸

따라서 $\dfrac{36}{5}<k<17$이므로 정수 k는

$8,\ 9,\ 10,\ \cdots,\ 16$

의 9개이다. ··· ❹

답 9

단계	채점 기준	비율
❶	원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-\beta)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❷	주어진 방정식이 원을 나타냄을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸	원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹	정수 k의 개수를 구할 수 있다.	10 %

19 전략 원의 중심 C에서 현 AB에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\triangle CAH$가 직각삼각형임을 이용한다.



풀이 원의 중심을 C$(3,\ 2)$라 하고, 점 C에서 직선 $x+2y-2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\dfrac{|3+2\cdot2-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=3$이므로

$\overline{CA}^2=\overline{CH}^2+\overline{AH}^2=(\sqrt{5})^2+3^2=14$

$\therefore\ \overline{CA}=\sqrt{14}$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$이다.

답 $\sqrt{14}$

20 전략 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$임을 이용한다.

풀이 직선 $y=-x-6$에 평행한 직선의 기울기는 -1이므로 접선의 방정식은

$y=-x\pm2\sqrt{5}\cdot\sqrt{(-1)^2+1}$

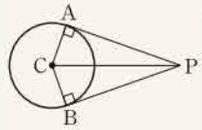
$\therefore\ y=-x\pm2\sqrt{10}$

따라서 두 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0,\ 2\sqrt{10})$, $(0,\ -2\sqrt{10})$이므로

$\overline{PQ}=4\sqrt{10}$

답 $4\sqrt{10}$

21 전략 원 밖의 점, 원의 중심, 접점이 이루는 삼각형이 직각삼각형임을 이용한다.



풀이 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)=-1+4+1$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-1)^2=4$ ··· ❶

C$(2,\ 1)$이므로 $\overline{CP}=|8-2|=6$ ··· ❷

직각삼각형 ACP에서 $\overline{AC}=2$이므로

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{AC}^2}$

$=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$ ··· ❸

이때 $\triangle ACP\equiv\triangle BCP$이므로 사각형 ACBP의 넓이는

$2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot2\right)=8\sqrt{2}$ ··· ❹

답 $8\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-\beta)^2=r^2$ 꼴로 나타낼 수 있다.	20 %
❷	$\overline{CP}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸	$\overline{AP}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❹	□ACBP의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

04 도형의 이동

09 평행이동

개념 21 점의 평행이동 본책 61쪽

01 $(1+5, 3+2)$이므로 $(6, 5)$ 답 $(6, 5)$

02 $(-2+3, 4-1)$이므로 $(1, 3)$ 답 $(1, 3)$

03 $(4-2, -1+1)$이므로 $(2, 0)$ 답 $(2, 0)$

04 $(1+2, 1-5)$이므로 $(3, -4)$ 답 $(3, -4)$

05 $(-3+2, 2-5)$이므로 $(-1, -3)$
답 $(-1, -3)$

06 $(2+2, -4-5)$이므로 $(4, -9)$ 답 $(4, -9)$

07 $(-6+2, -3-5)$이므로 $(-4, -8)$
답 $(-4, -8)$

08 답 $a=1$, $b=2$ 3, 1, 1, 2

09 $(0, -7) \longrightarrow (0+a, -7+b)$이므로
$0+a=2$, $-7+b=-2$
$\therefore a=2$, $b=5$ 답 $a=2$, $b=5$

10 $(-5, 2) \longrightarrow (-5+a, 2+b)$이므로
$-5+a=-6$, $2+b=-1$
$\therefore a=-1$, $b=-3$ 답 $a=-1$, $b=-3$

개념 22 도형의 평행이동 본책 62쪽

11 답 $x+2y-3=0$
$x-2$, $y-1$, $x-2$, $y-1$, 3

12 $3x-y+2=0$에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y+3$을 대입하면
$3(x-1)-(y+3)+2=0$
$\therefore 3x-y-4=0$ 답 $3x-y-4=0$

13 $y=x^2+4$에 x 대신 $x+4$, y 대신 $y-2$를 대입하면
$y-2=(x+4)^2+4$ $\therefore y=x^2+8x+22$
답 $y=x^2+8x+22$

14 $y=2x^2-x$에 x 대신 $x-3$, y 대신 $y+5$를 대입하면
$y+5=2(x-3)^2-(x-3)$
$\therefore y=2x^2-13x+16$
답 $y=2x^2-13x+16$

베이직쎈 BOX

원을 평행이동해도 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

$(x, y) \rightarrow (x+2, y-5)$는 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하는 것을 나타낸다.

꼭짓점의 좌표가 $(0, -1)$이고 아래로 볼록한 포물선을 나타낸다.

중심의 좌표가 $(0, 4)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원을 나타낸다.

직선을 평행이동해도 직선의 기울기는 변하지 않는다.

포물선을 평행이동해도 포물선의 폭은 변하지 않는다.

15 $x^2+(y-1)^2=4$에 x 대신 $x-5$, y 대신 $y-3$을 대입하면
$(x-5)^2+(y-3-1)^2=4$
$\therefore (x-5)^2+(y-4)^2=4$
답 $(x-5)^2+(y-4)^2=4$

16 $(x-3)^2+(y+2)^2=2$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-4$를 대입하면
$(x+1-3)^2+(y-4+2)^2=2$
$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=2$
답 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$

17 답 $y=2x-5$
1, -4, $x-1$, $y+4$, $y+4$, $x-1$, 5

18 $x-3y-5=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$(x-1)-3(y+4)-5=0$
$\therefore x-3y-18=0$ 답 $x-3y-18=0$

19 $y=(x+1)^2+3$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$y+4=(x-1+1)^2+3$ $\therefore y=x^2-1$
답 $y=x^2-1$

20 $(x+1)^2+(y-8)^2=12$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$(x-1+1)^2+(y+4-8)^2=12$
$\therefore x^2+(y-4)^2=12$ 답 $x^2+(y-4)^2=12$

21 답 $y=-x+13$
4, 5, $x-4$, $y-5$, $y-5$, $x-4$, 13

22 $2x+y-7=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$2(x-4)+(y-5)-7=0$
$\therefore 2x+y-20=0$ 답 $2x+y-20=0$

23 $y=-(x+4)^2+3$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$y-5=-(x-4+4)^2+3$ $\therefore y=-x^2+8$
답 $y=-x^2+8$

24 $(x+2)^2+(y+2)^2=5$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$(x-4+2)^2+(y-5+2)^2=5$
$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=5$
답 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$

25 답 $a=5$, $b=1$ a, b, 5, 1

26 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=4$

이 식이 $(x+2)^2+(y-6)^2=4$와 같으므로
$a=-2$, $b=6$ 답 $a=-2$, $b=6$

27 답 $a=2$, $b=2$ 3, -1, 3, -1, 2, 2

28 원 C의 중심의 좌표는
$(-3, 7)$
원 C'의 중심의 좌표는
$(1, 4)$
따라서 $-3+a=1$, $7+b=4$이므로
$a=4$, $b=-3$ 답 $a=4$, $b=-3$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형 본책 64쪽

01 점 A의 좌표를 (x, y)라 하면 평행이동한 점의 좌표는
$(x+4, y-3)$
이 점이 점 $(-1, 5)$와 일치하므로
$x+4=-1$, $y-3=5$
$\therefore x=-5$, $y=8$
따라서 점 A의 좌표는
$(-5, 8)$ 답 ②

02 점 $(4, 7)$을 평행이동한 점의 좌표는
$(4-3, 7+5)$ $\therefore (1, 12)$
이 점을 직선 $y=5x+k$가 지나므로
$12=5+k$ $\therefore k=7$ 답 ⑤

03 점 $(1, 2)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(1+m, 2+n)$
이 점이 점 $(-2, 1)$과 일치하므로
$1+m=-2$, $2+n=1$
$\therefore m=-3$, $n=-1$
따라서 점 (a, b)를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(a-3, b-1)$
이 점이 점 $(6, -1)$과 일치하므로
$a-3=6$, $b-1=-1$
$\therefore a=9$, $b=0$ 답 $a=9$, $b=0$

04 직선 $x-4y-2=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x+1)-4(y-3)-2=0$
$\therefore x-4y+11=0$
$\therefore k=11$ 답 11

05 직선 $2x+3y-8=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$2(x-a)+3(y+5)-8=0$
$\therefore 2x+3y-2a+7=0$

베이직쎈 BOX

먼저 점 $(1, 2)$를 점 $(-2, 1)$로 옮기는 평행이동을 구한다.

직선 $y=-x-2$의 x절편은 -2이다.

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로
$2-2a+7=0$ $\therefore a=\frac{9}{2}$ 답 ⑤

06 직선 $3x+y+1=0$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$3(x+2)+(y-a)+1=0$
$\therefore 3x+y+7-a=0$
이 직선의 방정식이 $3x+y+12=0$과 일치하므로
$7-a=12$ $\therefore a=-5$
따라서 점 $(-4, 1)$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-4-2, 1-5)$ $\therefore (-6, -4)$
답 $(-6, -4)$

07 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-7=a(x-3)+b$
$\therefore y=ax-3a+b+7$
이 직선이 직선 $y=-x-2$와 수직이므로
$a=1$
또 직선 $y=-x-2$와 점 $(-2, 0)$에서 만나므로
$-5a+b+7=0$
$\therefore b=-2$ 답 $a=1$, $b=-2$

08 $y=(x-1)^2+3$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-a=(x-1-1)^2+3$
$\therefore y=(x-2)^2+a+3$
이 그래프가 $y=(x-b)^2-2$의 그래프와 일치하므로
$a+3=-2$, $b=2$
$\therefore a=-5$, $b=2$
$\therefore a+b=-3$ 답 ②

다른 풀이 이차함수 $y=(x-1)^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 3)$
평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(1+1, 3+a)$, 즉 $(2, a+3)$
이차함수 $y=(x-b)^2-2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(b, -2)$이므로
$2=b$, $a+3=-2$ $\therefore a=-5$, $b=2$
$\therefore a+b=-3$

베쎈 TIP
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프
① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
② 꼭짓점의 좌표: (p, q)
③ 축의 방정식: $x=p$

09 점 $(5, 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(5+a, 3+b)$

이 점이 점 (4, 2)와 일치하므로
$5+a=4,\ 3+b=2$
$\therefore a=-1,\ b=-1$
$y=x^2-2x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y+1=(x+1)^2-2(x+1)+2$
$\therefore y=x^2$
따라서 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$이다.
답 $(0, 0)$

다른 풀이 점 (5, 3)을 점 (4, 2)로 옮기는 평행이동은
$(x, y) \longrightarrow (x-1, y-1)$
$y=x^2-2x+2$, 즉 $y=(x-1)^2+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 1)$
따라서 주어진 평행이동에 의하여 점 $(1, 1)$이 이동한 점의 좌표는 $(0, 0)$

$y=x^2-2x+2$
$=(x^2-2x+1)+1$
$=(x-1)^2+1$

10 $y=x^2+4x$, 즉 $y=(x+2)^2-4$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-b=(x-a+2)^2-4$
$\therefore y=(x-a+2)^2+b-4$
이 그래프가 $y=x^2+12x+35$, 즉 $y=(x+6)^2-1$의 그래프와 일치하므로
$-a+2=6,\ b-4=-1$
$\therefore a=-4,\ b=3$
따라서 직선 $y=-3x+2$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식은
$y-3=-3(x+4)+2 \quad \therefore y=-3x-7$
즉 구하는 y절편은 -7이다.
답 ①

11 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$에서
$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=-1+1+4$
$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=4$
원 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x+2-1)^2+(y-4+2)^2=4$
$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2=4$
따라서 구하는 원의 중심의 좌표는
$(-1, 2)$
답 $(-1, 2)$

도형 $f(x, y)=0$을 도형 $f(x+2, y-4)=0$으로 옮기는 평행이동
➡ x 대신 $x+2$, y 대신 $y-4$를 대입
➡ x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동

12 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-a+1)^2+(y-b+2)^2=4$ ····· ㉠
$x^2+y^2-2x+10y+22=0$에서
$(x^2-2x+1)+(y^2+10y+25)=-22+1+25$
$\therefore (x-1)^2+(y+5)^2=4$ ····· ㉡
두 원의 방정식 ㉠, ㉡이 일치하므로
$-a+1=-1,\ -b+2=5$
$\therefore a=2,\ b=-3$
답 $a=2,\ b=-3$

베이직쎈 BOX

다른 풀이 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=4$의 중심의 좌표는 $(-1, -2)$이므로 평행이동한 원의 중심의 좌표는
$(-1+a, -2+b)$
원 $x^2+y^2-2x+10y+22=0$에서
$(x-1)^2+(y+5)^2=4$
따라서 원의 중심의 좌표는 $(1, -5)$
즉 $-1+a=1,\ -2+b=-5$이므로
$a=2,\ b=-3$

13 $x^2+y^2+4x-5=0$에서
$(x^2+4x+4)+y^2=5+4$
$\therefore (x+2)^2+y^2=9$
원 $(x+2)^2+y^2=9$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x+4+2)^2+(y-3)^2=9$
$\therefore (x+6)^2+(y-3)^2=9$
이 원이 점 $(-6, k)$를 지나므로
$(k-3)^2=9, \quad k-3=\pm 3$
$\therefore k=6\ (\because k>0)$
답 ⑤

14 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-a+3)^2+(y-2)^2=1$
이 원이 y축에 접하므로
$|a-3|=1$
$a-3=-1$ 또는 $a-3=1$
$\therefore a=2$ 또는 $a=4$
따라서 모든 정수 a의 값의 합은
$2+4=6$
답 6

(원의 반지름의 길이)
$=|$(중심의 x좌표)$|$

10 대칭이동

개념 23 점의 대칭이동

본책 66쪽

01 답 $(3, -1)$
02 답 $(-3, 1)$
03 답 $(-3, -1)$
04 답 $(1, 3)$
05 답 $(-5, -2)$
06 답 $(5, 2)$
07 답 $(5, -2)$
08 답 $(2, -5)$
09 답 $(4, -5)$
10 답 $(-2, -7)$
11 답 $(-1, 3)$
12 답 $(0, -4)$
13 답 $(-9, 4)$
14 답 $(5, 4)$
15 답 $(4, -2)$
16 답 $(-3, -3)$
17 답 $(-2, -3)$
18 답 $(3, -2)$
19 답 $(7, 5)$
20 답 $(-6, 1)$

베이직쎈 BOX

21 답 (5, 6)

22 답 (8, −4)

23 답 (−3, −6)

24 답 (−2, 1)

25 답 (4, −4)

26 답 (3, 9)

27 답 (1, 5)

28 답 (−6, 2)

29 점 (8, 5)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
(8, −5)
이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
(−8, 5) 답 (−8, 5)

점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a, -b)$
이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, b)$
➡ y축에 대한 대칭이동과 같다.

30 점 (−10, 4)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (−10, −4)
이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
(10, 4) 답 (10, 4)

31 점 (4, −7)을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (−4, −7)
이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
(−7, −4) 답 (−7, −4)

점 (a, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, b)$
이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(b, -a)$

32 점 (−2, −1)을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (2, −1)
이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
(−1, 2) 답 (−1, 2)

개념 24 도형의 대칭이동

본책 68쪽

33 답 $2x+3y+2=0$ $-y$, $-y$, 3

34 $2x-3y+2=0$에 x 대신 $-x$를 대입하면
$-2x-3y+2=0$ $\therefore 2x+3y-2=0$
답 $2x+3y-2=0$

35 $2x-3y+2=0$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$-2x+3y+2=0$ $\therefore 2x-3y-2=0$
답 $2x-3y-2=0$

36 $2x-3y+2=0$에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면
$2y-3x+2=0$ $\therefore 3x-2y-2=0$
답 $3x-2y-2=0$

37 $y=3x-7$에 y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=3x-7$ $\therefore y=-3x+7$
답 $y=-3x+7$

38 $y=x^2+4x+5$에 y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=x^2+4x+5$ $\therefore y=-x^2-4x-5$
답 $y=-x^2-4x-5$

39 $(x-2)^2+(y-8)^2=3$에 y 대신 $-y$를 대입하면
$(x-2)^2+(-y-8)^2=3$
$\therefore (x-2)^2+(y+8)^2=3$
답 $(x-2)^2+(y+8)^2=3$

40 $4x-y-3=0$에 x 대신 $-x$를 대입하면
$-4x-y-3=0$ $\therefore 4x+y+3=0$
답 $4x+y+3=0$

41 $y=2x^2-x$에 x 대신 $-x$를 대입하면
$y=2(-x)^2-(-x)$ $\therefore y=2x^2+x$
답 $y=2x^2+x$

42 $x^2+y^2-2x+6y+6=0$에 x 대신 $-x$를 대입하면
$(-x)^2+y^2-2\cdot(-x)+6y+6=0$
$\therefore x^2+y^2+2x+6y+6=0$
답 $x^2+y^2+2x+6y+6=0$

43 $y=-2x-9$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=-2\cdot(-x)-9$ $\therefore y=-2x+9$
답 $y=-2x+9$

44 $y=x^2-6x+8$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=(-x)^2-6\cdot(-x)+8$
$\therefore y=-x^2-6x-8$ 답 $y=-x^2-6x-8$

45 $(x+7)^2+(y-2)^2=1$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$(-x+7)^2+(-y-2)^2=1$
$\therefore (x-7)^2+(y+2)^2=1$
답 $(x-7)^2+(y+2)^2=1$

46 $5x+4y+1=0$에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면
$4x+5y+1=0$ 답 $4x+5y+1=0$

47 $x^2+y^2+2x+10y+17=0$에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면
$x^2+y^2+10x+2y+17=0$
답 $x^2+y^2+10x+2y+17=0$

48 직선 $y=-x+1$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$-y=-x+1$ $\therefore y=x-1$
이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$-y=-x-1$ $\therefore y=x+1$ 답 $y=x+1$

도형 $f(x, y)=0$을 x축에 대하여 대칭이동하면 $f(x, -y)=0$
이 도형을 원점에 대하여 대칭이동하면 $f(-x, y)=0$
➡ y축에 대한 대칭이동과 같다.

49 $y=4x^2+3$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=4x^2+3$ $\therefore y=-4x^2-3$
이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=-4(-x)^2-3$ $\therefore y=4x^2+3$
답 $y=4x^2+3$

베이직쎈 BOX

50 원 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(x-3)^2+(-y-3)^2=6$

$\therefore (x-3)^2+(y+3)^2=6$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(-x-3)^2+(-y+3)^2=6$

$\therefore (x+3)^2+(y-3)^2=6$

답 $(x+3)^2+(y-3)^2=6$

51 직선 $3x-y-10=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$-3x-y-10=0$ $\therefore 3x+y+10=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$x+3y+10=0$ 답 $x+3y+10=0$

52 원 $x^2+y^2-4x+4y-1=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(-x)^2+y^2-4\cdot(-x)+4y-1=0$

$\therefore x^2+y^2+4x+4y-1=0$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$x^2+y^2+4x+4y-1=0$

답 $x^2+y^2+4x+4y-1=0$

53 직선 $x-5y=0$을 평행이동한 도형의 방정식은

$(x-1)-5(y+3)=0$ $\therefore x-5y-16=0$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$x+5y-16=0$ 답 $x+5y-16=0$

x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것이므로 도형의 방정식에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y+3$을 대입한다.

54 직선 $x-y-6=0$을 평행이동한 도형의 방정식은

$(x-1)-(y+3)-6=0$

$\therefore x-y-10=0$

이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$-x-y-10=0$ $\therefore x+y+10=0$

답 $x+y+10=0$

55 $y=x^2+3$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=(x-1)^2+3$ $\therefore y=(x-1)^2$

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=(-x-1)^2$ $\therefore y=-(x+1)^2$

답 $y=-(x+1)^2$

56 $y=-x^2+2x+2$, 즉 $y=-(x-1)^2+3$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=-(x-1-1)^2+3$

$\therefore y=-(x-2)^2$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-(x-2)^2$ $\therefore y=(x-2)^2$

답 $y=(x-2)^2$

$y=-x^2+2x+2$
$=-(x^2-2x+1)+3$
$=-(x-1)^2+3$

㉠+㉡을 하면
$2a=-4$ $\therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$-2+b=-3$
$\therefore b=-1$

57 원 $x^2+y^2=5$를 평행이동한 도형의 방정식은

$(x-1)^2+(y+3)^2=5$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(x+3)^2+(y-1)^2=5$

답 $(x+3)^2+(y-1)^2=5$

58 원 $(x+4)^2+y^2=16$을 평행이동한 도형의 방정식은

$(x-1+4)^2+(y+3)^2=16$

$\therefore (x+3)^2+(y+3)^2=16$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(-x+3)^2+(y+3)^2=16$

$\therefore (x-3)^2+(y+3)^2=16$

답 $(x-3)^2+(y+3)^2=16$

개념 25 점 또는 직선에 대한 대칭이동 본책 70쪽

59 답 $(-2, 4)$ 2, 1, 2, 3, -2, 4, -2, 4

60 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{4+a}{2}=2$, $\frac{2+b}{2}=-1$

$4+a=4$, $2+b=-2$

$\therefore a=0$, $b=-4$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, -4)$

답 $(0, -4)$

61 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{4+a}{2}=-1$, $\frac{2+b}{2}=-4$

$4+a=-2$, $2+b=-8$

$\therefore a=-6$, $b=-10$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-6, -10)$

답 $(-6, -10)$

62 답 $(5, 0)$ 2, b, b, 2, 5, 3, 5, 5, 0, 5, 0

63 대칭이동한 점을 $Q(a, b)$라 하자.

$\overline{PQ}$의 중점 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$가 직선 $y=-x+1$ 위의 점이므로

$\frac{3+b}{2}=-\frac{2+a}{2}+1$, $3+b=-a$

$\therefore a+b=-3$ ····· ㉠

직선 PQ는 직선 $y=-x+1$과 수직이므로

$\frac{b-3}{a-2}=1$, $b-3=a-2$

$\therefore a-b=-1$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2, -1)$

답 $(-2, -1)$

베이직쎈 BOX

64 대칭이동한 점을 Q(a, b)라 하자.

$\overline{PQ}$의 중점 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$가 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$\frac{3+b}{2}=2\cdot\frac{2+a}{2}$, $3+b=4+2a$

$\therefore 2a-b=-1$ ····· ㉠

직선 PQ는 직선 $y=2x$와 수직이므로

$\frac{b-3}{a-2}=-\frac{1}{2}$, $-2b+6=a-2$

$\therefore a+2b=8$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{6}{5}$, $b=\frac{17}{5}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$

답 $\left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$

㉠×2+㉡을 하면 $5a=6$ $\therefore a=\frac{6}{5}$

$a=\frac{6}{5}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{12}{5}-b=-1$ $\therefore b=\frac{17}{5}$

개념 26 대칭이동을 이용한 선분의 길이의 합의 최솟값

본책 71쪽

65 답 (1) $(4, -1)$ (2) $4\sqrt{2}$ 핵심 $\overline{AB'}$, 4, -1, $4\sqrt{2}$

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

66 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(1, -3)$

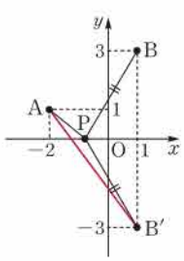
오른쪽 그림에서 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

$\geq\overline{AB'}$

$=\sqrt{3^2+(-4)^2}$

$=5$



답 5

두 점 (a, c), (b, c) 사이의 거리는 $|b-a|$

67 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(1, 2)$

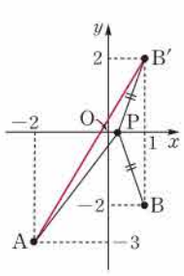
오른쪽 그림에서 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

$\geq\overline{AB'}$

$=\sqrt{3^2+5^2}$

$=\sqrt{34}$



답 $\sqrt{34}$

△ABC는 직각삼각형이다.

68 답 (1) $(-2, 6)$ (2) 5 핵심 $\overline{AB'}$, -2, 6, 5

69 점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(-2, -3)$

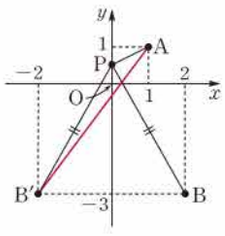
오른쪽 그림에서 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

$\geq\overline{AB'}$

$=\sqrt{3^2+4^2}$

$=5$



답 5

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

70 점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(2, 1)$

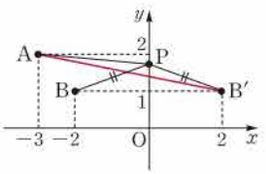
오른쪽 그림에서 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

$\geq\overline{AB'}$

$=\sqrt{5^2+(-1)^2}$

$=\sqrt{26}$



답 $\sqrt{26}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 72쪽

01 점 $(a, 2-b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(2-b, a)$

이 점이 점 $(2b-4, 6-a)$와 일치하므로

$2-b=2b-4$, $a=6-a$

$3b=6$, $2a=6$ $\therefore a=3$, $b=2$

답 $a=3$, $b=2$

02 점 A(1, 2)를 x축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각

B(1, −2), C(−1, −2)

$\therefore \overline{BC}=2$

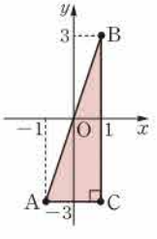
답 2

03 점 $(-1, 3)$을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각

A(−1, −3), B(1, 3), C(1, −3)

따라서 삼각형 ABC는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot6=6$



답 ⑤

04 점 $(4, -5)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-4, -5)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(4, 5)$

따라서 점 $(4, 5)$와 직선 $x+y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4+5-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

05 직선 $2x+ky+1=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$kx+2y+1=0$

이 직선의 방정식이 $2x+ky+1=0$과 같으므로

$k=2$

답 ④

베이직쎈 BOX

06 직선 $y=-3x+5$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=3x+5$

이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 3이다.

따라서 점 $(2, 3)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-3=3(x-2)$ $\therefore y=3x-3$ 답 $y=3x-3$

점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y-y_1=m(x-x_1)$

07 직선 $kx+y+7=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$kx-y+7=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-x+ky+7=0$

이 직선이 점 $(3, 1)$을 지나므로

$-3+k+7=0$ $\therefore k=-4$ 답 ①

08 직선 $y=-x+k$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=x+k$ $\therefore y=-x-k$

이 직선이 원의 중심 $(2, 3)$을 지나므로

$3=-2-k$ $\therefore k=-5$ 답 ①

원의 넓이를 이등분하는 직선
➡ 원의 중심을 지난다.

09 직선 $3x-4y-1=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-3x-4y-1=0$ $\therefore 3x+4y+1=0$

이 직선과 원 $x^2+(y-1)^2=5$의 중심 $(0, 1)$ 사이의 거리는

$\frac{|4+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이고, $1<\sqrt{5}$이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 구하는 교점의 개수는 2이다. 답 2

원의 중심과 직선 사이의 거리 d, 원의 반지름의 길이 r에 대하여 원과 직선의 교점의 개수는
① $d<r$ ➡ 2
② $d=r$ ➡ 1
③ $d>r$ ➡ 0

10 $y=x^2+ax+b$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=(-x)^2+a\cdot(-x)+b$

$=x^2-ax+b$

$=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$\left(\frac{a}{2}, b-\frac{a^2}{4}\right)$

즉 $\frac{a}{2}=3$, $b-\frac{a^2}{4}=-1$이므로

$a=6$, $b=8$ 답 $a=6$, $b=8$

11 $y=x^2+2kx+3$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=x^2+2kx+3$

$\therefore y=-x^2-2kx-3$

$=-(x+k)^2+k^2-3$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-k, k^2-3)$이고, 이 점이 직선 $y=3x+7$ 위에 있으므로

$k^2-3=-3k+7$, $k^2+3k-10=0$

$(k+5)(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$) 답 ②

다른 풀이 $y=x^2+2kx+3$

$=(x+k)^2-k^2+3$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$(-k, -k^2+3)$

이 꼭짓점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-k, k^2-3)$

이 점이 직선 $y=3x+7$ 위에 있으므로

$k^2-3=-3k+7$, $k^2+3k-10=0$

$(k+5)(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$)

포물선의 꼭짓점의 대칭이동으로 생각한다.

대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표

12 $y=-2x^2+5x+3$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-2\cdot(-x)^2+5\cdot(-x)+3$

$\therefore y=2x^2+5x-3$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=2x^2+5x-3$

$\therefore y=-2x^2-5x+3$

이 그래프가 점 $(a, -4)$를 지나므로

$-2a^2-5a+3=-4$, $2a^2+5a-7=0$

$(2a+7)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$) 답 1

13 원 $(x-2)^2+(y+a)^2=16$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+(-y+a)^2=16$

$\therefore (x-2)^2+(y-a)^2=16$

이 원의 방정식이 $(x+b)^2+(y+3)^2=16$과 일치하므로

$a=-3$, $b=-2$

$\therefore a-b=-1$ 답 ③

다른 풀이 원 $(x-2)^2+(y+a)^2=16$의 중심의 좌표는

$(2, -a)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(2, a)$

이 점이 원 $(x+b)^2+(y+3)^2=16$의 중심 $(-b, -3)$과 일치하므로

$a=-3$, $b=-2$

$\therefore a-b=-1$

원의 중심의 대칭이동으로 생각한다.

14 원 $(x+a)^2+y^2=13$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+a)^2+y^2=13$

$\therefore (x-a)^2+y^2=13$

이 원이 점 $(2, -3)$을 지나므로

$(2-a)^2+9=13$, $(2-a)^2=4$

$2-a=-2$ 또는 $2-a=2$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$) 답 ③

베이직쎈 BOX

15 $x^2+y^2-12x+8y+12=0$에서

$(x^2-12x+36)+(y^2+8y+16)=-12+36+16$

$\therefore (x-6)^2+(y+4)^2=40$

이 원의 중심 $(6, -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-6, 4)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(4, -6)$

따라서 점 $(4, -6)$이 직선 $y=ax+2$ 위에 있으므로

$-6=4a+2$, $4a=-8$ $\therefore a=-2$

답 ②

대칭이동한 원의 중심의 좌표를 알면 되므로 원의 중심의 대칭이동으로 생각한다.

16 원 $x^2+y^2-4y-3=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2-4x-3=0$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+y^2-4\cdot(-x)-3=0$

$\therefore x^2+y^2+4x-3=0$

$x=0$을 대입하면

$y^2-3=0$ $\therefore y=\pm\sqrt{3}$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(0, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$

답 $(0, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$

대칭이동한 원의 반지름의 길이는 처음 원의 반지름의 길이와 같다.

17 점 $(2, a)$를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2, a+3)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(2, -a-3)$

즉 $-a-3=-4$이므로 $a=1$

답 ③

18 직선 $y=-x+5$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-1=-(x+2)+5$

$\therefore y=-x+4$

이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$y=x+4$

따라서 이 직선의 x절편은

$0=x+4$ $\therefore x=-4$

답 ②

19 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=10$의 중심 $(-1, -2)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는

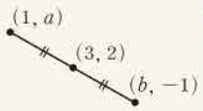
$(-1+3, -2+5)$ $\therefore (2, 3)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(3, 2)$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(3, 2)$

답 $(3, 2)$



점 $(3, 2)$는 두 점 $(1, a)$, $(b, -1)$을 잇는 선분의 중점이다.

원의 중심의 대칭이동으로 생각한다.

20 포물선 $y=(x+a)^2-4$의 꼭짓점 $(-a, -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, 4)$

이 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+2, 8)$

따라서 점 $(a+2, 8)$이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$8=a+1$ $\therefore a=7$

답 ④

이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구하면 되므로 포물선의 꼭짓점의 평행이동과 대칭이동으로 생각한다.

21 $\frac{1+b}{2}=3$, $\frac{a-1}{2}=2$이므로

$1+b=6$, $a-1=4$

$\therefore a=5$, $b=5$

답 $a=5$, $b=5$

22 원의 중심 $(2, -2)$를 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{2+a}{2}=1$, $\frac{-2+b}{2}=2$

$2+a=2$, $-2+b=4$

$\therefore a=0$, $b=6$

따라서 중심이 점 $(0, 6)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원의 방정식은

$x^2+(y-6)^2=8$

답 ③

23 $\overline{AB}$의 중점 $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{-1+1}{2}\right)$, 즉 점 $(1, 0)$이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$a+b=0$

직선 AB는 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\frac{1-(-1)}{2-0}\cdot a=-1$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 $a+b=0$에 대입하면 $b=1$

답 $a=-1$, $b=1$

24 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는

$(-1, -2)$

오른쪽 그림에서 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로

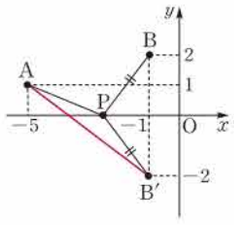
$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

$\geq\overline{AB'}$

$=\sqrt{4^2+(-3)^2}$

$=5$

답 ①



25 오른쪽 그림과 같이 세 점 P, A, B를 좌표평면 위에 나타내고, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(800, -200)$

$\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로

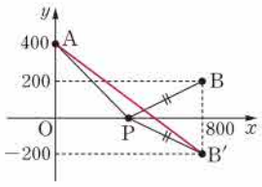
$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

$\geq\overline{AB'}$

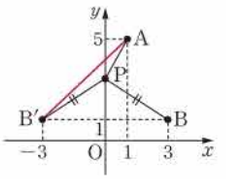
$=\sqrt{800^2+(-600)^2}$

$=1000\,(\mathrm{m})$

답 1000 m



26 점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(-3, 1)$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로 점 P가 $\overline{AB'}$ 위의 점일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값이 최소이고, 이때의 점 P는 직선 AB′이 y축과 만나는 점과 같다.

직선 AB′의 방정식은

$$y-5=\frac{5-1}{1-(-3)}\cdot(x-1)$$

$$\therefore y=x+4$$

따라서 점 P의 좌표는 $(0, 4)$ 답 $(0, 4)$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP! 본책 76쪽

01 전략 주어진 평행이동에 $x=a$, $y=-4$를 대입한다.

풀이 $(a, -4) \longrightarrow (a+4, -4-2)$이므로

$a+4=9$, $-6=b$ $\therefore a=5$, $b=-6$

$\therefore a+b=-1$ 답 ②

02 전략 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입하여 구한다.

풀이 직선 $x+3y-7=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-2)+3(y-a)-7=0$

$\therefore x+3y-3a-9=0$

이 직선이 원점을 지나므로

$-3a-9=0$, $3a=-9$ $\therefore a=-3$

답 ①

03 전략 이차함수의 그래프의 식에 x 대신 $x+3$, y 대신 $y+1$을 대입한다.

풀이 $y=2x^2-x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+1=2(x+3)^2-(x+3)+1$

$\therefore y=2(x^2+6x+9)-x-3$

$=2x^2+11x+15$

따라서 $a=11$, $b=15$이므로 $b-a=4$

답 ④

04 전략 주어진 원의 방정식을 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ 꼴로 변형한 후 원의 중심의 평행이동을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-6x+10y-2=0$에서

$(x^2-6x+9)+(y^2+10y+25)=2+9+25$

$\therefore (x-3)^2+(y+5)^2=36$

이 원의 중심 $(3, -5)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+3, b-5)$

이 점이 원점이므로 $a+3=0$, $b-5=0$

$\therefore a=-3$, $b=5$

$\therefore ab=-15$ 답 ③

05 전략 점 (a, b)를 y축, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각 $(-a, b)$, (b, a)임을 이용한다.

풀이 점 $(6, -4)$를 y축, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각

$P(-6, -4)$, $Q(-4, 6)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{2^2+10^2}=2\sqrt{26}$ 답 ②

06 전략 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 직선 $x+y+1=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l의 방정식은

$x-y+1=0$

직선 $x+y+1=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선 l'의 방정식은

$-x+y+1=0$

이때 $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{1}$이므로 두 직선 l, l'은 평행하다.

두 직선 l, l'의 기울기가 1로 같고, y절편은 각각 1, -1로 다르므로 두 직선 l, l'이 평행함을 알 수 있다.

따라서 직선 l 위의 점 $(0, 1)$과 직선 l' 사이의 거리는

$$\frac{|1+1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

이므로 두 직선 l, l' 사이의 거리는 $\sqrt{2}$이다. 답 ③

07 전략 원점에 대하여 대칭이동한 이차함수의 그래프의 식은 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하여 구한다.

풀이 $y=-x^2+6x+5$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-(-x)^2+6\cdot(-x)+5$

$\therefore y=x^2+6x-5$

이 그래프가 점 $(2, a)$를 지나므로

$a=2^2+6\cdot2-5=11$ 답 ⑤

08 전략 원과 직선이 접하면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 원 $x^2+y^2=5$의 중심 $(0, 0)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(1, a)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, 1)$

평행이동한 후 대칭이동한 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-1)^2=5$

이때 원과 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$이 접하므로

$$\frac{|2a-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, \quad |2a-1|=5$$

$2a-1=-5$ 또는 $2a-1=5$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$) 답 ①

09 전략 주어진 원의 방정식을 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ 꼴로 변형한 후 원의 중심의 대칭이동을 이용한다.

베이직쎈 BOX

풀이 $x^2+y^2+10x-4y+28=0$에서

$(x^2+10x+25)+(y^2-4y+4)=-28+25+4$

$\therefore (x+5)^2+(y-2)^2=1$

즉 원의 중심의 좌표는 $(-5, 2)$

$x^2+y^2-18x-8y+96=0$에서

$(x^2-18x+81)+(y^2-8y+16)$

$=-96+81+16$

$\therefore (x-9)^2+(y-4)^2=1$

즉 원의 중심의 좌표는 $(9, 4)$

따라서 두 점 $(-5, 2)$, $(9, 4)$가 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로

$a=\dfrac{-5+9}{2}=2$, $b=\dfrac{2+4}{2}=3$

$\therefore a+b=5$ ④

점 (a, b)는 두 점 $(-5, 2)$, $(9, 4)$를 잇는 선분의 중점이다.

10 전략 점 (p, q)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(p+m, q+n)$이다.

풀이 점 $A(1, a)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(1+m, a+n)$

이 점이 점 $A'(5, 0)$과 일치하므로

$1+m=5$, $a+n=0$

$\therefore m=4$, $a=-n$ ····· ㉠

점 $B(b, -2)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(b+m, -2+n)$

이 점이 점 $B'(10, -6)$과 일치하므로

$b+m=10$, $-2+n=-6$

$\therefore b=10-m$, $n=-4$ ····· ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡에서 $m=4$, $n=-4$이므로

$a=4$, $b=6$ ··· ❷

따라서 점 $(4, 6)$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(8, 2)$ ··· ❸

답 $(8, 2)$

단계	채점 기준	비율
❶	m, n의 값을 구하고 a, b를 m, n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸	답을 구할 수 있다.	30 %

11 전략 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$은 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것임을 이용한다.

풀이 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+2, y-5)$는 점 (x, y)를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로 주어진 직선의 방정식에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+5$를 대입하면

$2(x-2)+3(y+5)-1=0$

$\therefore 2x+3y+10=0$, 즉 $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{10}{3}$

따라서 이 직선의 y절편은 $-\dfrac{10}{3}$이다. 답 $-\dfrac{10}{3}$

12 전략 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 x 대신 $-x$를 대입하여 구한다.

풀이 직선 $mx+(n+3)y+4=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-mx+(n+3)y+4=0$ ··· ❶

이 직선의 방정식이 $(n+1)x+my+4=0$과 일치하므로

$-m=n+1$, $n+3=m$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=1$, $n=-2$

$\therefore 2m+n=2\cdot 1-2=0$ ··· ❷

$-(n+3)=n+1$이므로

$2n=-4$ $\therefore n=-2$

$n=-2$를 $n+3=m$에 대입하면

$m=-2+3=1$

답 0

단계	채점 기준	비율
❶	y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷	$2m+n$의 값을 구할 수 있다.	50 %

13 전략 원의 중심의 대칭이동으로 생각한다.

풀이 원 $(x+4)^2+(y-10)^2=1$의 중심 $(-4, 10)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(4, -10)$

따라서 점 $(4, -10)$이 직선 $y=-3x+k$ 위에 있으므로

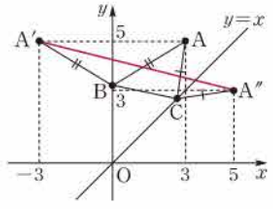
$-10=-3\cdot 4+k$ $\therefore k=2$ 답 2

14 전략 점 A를 y축, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 이용한다.

풀이 (1) 점 A′의 좌표는 $(-3, 5)$ ··· ❶

(2) 점 A″의 좌표는 $(5, 3)$ ··· ❷

(3)



위의 그림에서 $\overline{AB}=\overline{A'B}$, $\overline{CA}=\overline{CA''}$이므로

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{A'B}+\overline{BC}+\overline{CA''}$

$\geq \overline{A'A''}$

$=\sqrt{8^2+(-2)^2}$

$=2\sqrt{17}$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{17}$이다. ··· ❸

두 점 A′, A″을 지나는 직선 위에 두 점 B, C가 있을 때, $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$의 길이가 최소이다.

답 (1) $(-3, 5)$ (2) $(5, 3)$ (3) $2\sqrt{17}$

단계	채점 기준	비율
❶	점 A′의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷	점 A″의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸	삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

Ⅱ. 집합과 명제

05 집합의 뜻과 표현

11 집합과 원소

개념 27 집합과 원소

본책 80쪽

01 ×
02 ○
03 ○
04 ×
05 ○
06 ×
07 ×
08 ○
09 f, l, o, w, e, r
10 1, 3, 5, 7, 9
11 −1, 4
12 ○
13 ×
14 ○
15 ×
16 ∈, 1, 2, 3, 4, 6, 12, 원소이다
17 ∈
18 ∉
19 ∈
20 ∉
21 집합 A의 원소는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19이다.
따라서 1은 집합 A의 원소가 아니다. ∉
22 ∈
23 ∉
24 ∈
25 ∉
26 ∈
27 ∉
28 ∈
29 ∉
30 ∈
31 ∈
32 ∉
33 $\sqrt{9}=3$에서 $\sqrt{9}$는 유리수이므로 집합 Q의 원소이다. ∈
34 π는 무리수이므로 집합 Q의 원소가 아니다. ∉
35 $0.\dot{5}=\frac{5}{9}$에서 $0.\dot{5}$는 유리수이므로 집합 Q의 원소이다. ∈

개념 28 집합의 표현

본책 82쪽

36 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8
37 {m, a, t, h}
38 {1, 2, 3, ⋯, 100}
39 {4, 8, 12, ⋯}
40 5, 5
41 $\{x|x$는 $-4\le x\le 0$인 정수$\}$
42 $\{x|x$는 두 자리 자연수$\}$
43 $\{x|x$는 7의 양의 배수$\}$
44 A: 5, 7, 9, 11
45 B: l, i, g, h, t
46 C: 3, 6, 9, 12, 15, 18
47 D: −5, −4, −3, −2, −1

개념 29 집합의 원소의 개수

본책 83쪽

48 유
49 무
50 유
51 무
52 세 자리 자연수는
100, 101, 102, ⋯, 999
따라서 주어진 집합은 유한집합이다. 유
53 3으로 나누어떨어지는 자연수는
3, 6, 9, 12, ⋯
따라서 주어진 집합은 무한집합이다. 무
54 $0<x<1$인 자연수는 존재하지 않는다.
따라서 주어진 집합은 공집합이므로 유한집합이다. 유
55 3
56 0
57 20
58 짝수인 소수는 2의 1개이므로
$n(A)=1$ 1
59 15의 양의 약수는 1, 3, 5, 15의 4개이므로
$n(A)=4$ 4
60 $x^2+2x-3=0$에서
$(x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

베이직쎈 BOX

소수
➡ 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수

$C=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$D=\{-5, -4, -3, -2, -1\}$

3의 양의 배수이다.

$\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$

$\pi=3.141592\cdots$이므로 순환소수가 아닌 무한소수, 즉 무리수이다.

따라서 집합 A의 원소는 -3, 1의 2개이므로
$n(A)=2$ 답 2

61 $x^2+1=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로
$n(A)=0$ 답 0

$A=\varnothing$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형 본책 84쪽

01 ⑤ '높다'라는 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다. 답 ⑤

02 ㄱ, ㄴ, ㄹ. '아름답다', '잘하다', '귀엽다'라는 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
이상에서 집합인 것은 ㄷ, ㅁ이다. 답 ㄷ, ㅁ

03 (1), (4) '많다', '크다'라는 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
(2) 집합이고, 원소는 봄, 여름, 가을, 겨울이다.
(3) 집합이고, 원소는 1, 3, 5이다.
답 (2) 봄, 여름, 가을, 겨울
(3) 1, 3, 5

04 집합 A의 원소는 1, 2, 4, 5, 10, 20이다.
① $1\in A$ ② $3\notin A$
③ $5\in A$ ⑤ $20\in A$ 답 ④

05 집합 A의 원소는 3, 6, 9, …, 15, …, 27, …
집합 B의 원소는 1, 3, 5, …, 11, 13, 15, 17, …
③ $27\in A$
⑤ $16\notin B$ 답 ③, ⑤

06 $x(x+2)(x-5)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=5$
이므로 집합 A의 원소는 -2, 0, 5이다.
ㄱ. $-5\notin A$
ㄷ. $2\notin A$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

07 ① -5는 정수이므로 $-5\in Z$
②, ③ $\sqrt{10}$, $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$은 모두 무리수이므로
$\sqrt{10}\notin Q$, $\frac{1}{\sqrt{2}-1}\in R$
④ $\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{\sqrt{16}}$은 유리수이므로
$\frac{1}{\sqrt{16}}\in Q$
⑤ $i-3$은 허수이므로 $i-3\notin R$
답 ④

실수 $\begin{cases}\text{유리수}\\ \text{무리수}\end{cases}$

$\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{\sqrt{4^2}}=\frac{1}{4}$

08 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
따라서 집합 A의 원소가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

베이직쎈 BOX

09 ① $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
② $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$
③ $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
④ $A=\{4, 8, 12\}$
⑤ $A=\{8, 16\}$ 답 ④

10 ⑤ $\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$
○ $\{x|x$는 30 이하의 5의 양의 배수$\}$ 답 ⑤

$\{x|x$는 30의 양의 약수$\}$
$=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

11 ㄱ. $|x|<2$에서 $-2<x<2$
따라서 정수 x는 -1, 0, 1이므로
$A=\{-1, 0, 1\}$
ㄴ. $x^2\le 1$에서 $x^2-1\le 0$
$(x+1)(x-1)\le 0$ $\therefore -1\le x\le 1$
따라서 정수 x는 -1, 0, 1이므로
$A=\{-1, 0, 1\}$
ㄷ. $x^2-1=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$
$\therefore A=\{-1, 1\}$
이상에서 조건제시법으로 나타낸 것으로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

$a>0$일 때
① $|x|<a$ ➡ $-a<x<a$
② $|x|>a$ ➡ $x<-a$ 또는 $x>a$

12 (1)

a \ b	1	3
1	2	4
2	3	5

(2) $X=\{2, 3, 4, 5\}$ 답 풀이 참조

13 집합 A의 원소 a, 집합 B의 원소 b에 대하여 ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

a \ b	2	3	4
-1	-2	-3	-4
1	2	3	4

$\therefore X=\{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$
답 $X=\{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$

14 ① 무한집합
② $\{-1, -2, -3, \cdots\}$ ○ 무한집합
③ $\{50, 51, 52, \cdots\}$ ○ 무한집합
④ $\{-3, 3\}$ ○ 유한집합
⑤ $\{2, 4, 6, \cdots\}$ ○ 무한집합 답 ④

15 $A=\{15, 30, 45, \cdots\}$
$B=\{1, 3, 5, \cdots, 99\}$
$C=\left\{\cdots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \cdots\right\}$
$D=\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$
따라서 무한집합인 것은 A, C, D의 3개이다. 답 3

3과 5의 양의 공배수는 15의 양의 배수와 같다.

16 ① $\{3\}$ ② $\{6, 12, 18, \cdots\}$
③ $\{2\}$ ④ $\{0\}$
⑤ $\varnothing$ 답 ⑤

베이직쎈 BOX

17 ③ $n(\{x|x\text{는 }3\text{의 양의 약수}\})=n(\{1, 3\})=2$
④ $n(\{0, 1\})=2$, $n(\{4\})=1$이므로
$n(\{0, 1\})>n(\{4\})$ 답 ④

조건제시법으로 나타낸 집합은 먼저 원소나열법으로 나타낸 후 원소의 개수를 구한다.

18 $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$이므로
$n(A)=5$
$B=\{3, 5, 7\}$이므로
$n(B)=3$
$\therefore n(A)+n(B)=8$ 답 8

19 $A=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$이므로
$n(A)=k$ $\therefore k=9$ 답 9

20 ㄱ. $n(\{10\})=1$, $n(\{5\})=1$이므로
$n(\{10\})-n(\{5\})=0$
ㄴ. 집합 A의 원소는 $\varnothing$이므로
$n(A)=1$
ㄷ. $B=\{1\}$이므로
$n(B)=1$
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

$k=-1$일 때,
$x=(-1)^2=1$
$k=1$일 때,
$x=1^2=1$
$\therefore B=\{1\}$

12 부분집합

개념 30 부분집합

본책 87쪽

01 답 $\subset$ **02** 답 $\not\subset$

03 답 $\subset$ **04** 답 $\not\subset$

05 답 $\subset$ **06** 답 $\subset$

모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다.

07 답 $X\subset Y$

08 답 $X\subset Y$ 1, 2, 3, 6, X, Y

09 $X=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $Y=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$이므로
$Y\subset X$ 답 $Y\subset X$

10 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{-1, 1\}$이므로
$Y\subset X$ 답 $Y\subset X$

11 모든 정사각형은 직사각형이므로
$Y\subset X$ 답 $Y\subset X$

12 모든 자연수는 정수이므로
$X\subset Y$ 답 $X\subset Y$





13 답 $\subset$ **14** 답 $\in$

15 답 $\subset$ **16** 답 $\in$

17 답 $\subset$

집합 A의 원소는 0, 1, {2, 3}

공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

18 답 $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$
$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$

19 원소가 하나도 없는 부분집합은 $\varnothing$
원소가 1개인 부분집합은 $\{1\}$
따라서 구하는 부분집합은 $\varnothing$, $\{1\}$ 답 $\varnothing$, $\{1\}$

20 원소가 하나도 없는 부분집합은 $\varnothing$
원소가 1개인 부분집합은 $\{-2\}$, $\{2\}$
원소가 2개인 부분집합은 $\{-2, 2\}$
따라서 구하는 부분집합은
$\varnothing$, $\{-2\}$, $\{2\}$, $\{-2, 2\}$
답 $\varnothing$, $\{-2\}$, $\{2\}$, $\{-2, 2\}$

21 주어진 집합은 $\{1, 3, 5\}$이므로
원소가 하나도 없는 부분집합은 $\varnothing$
원소가 1개인 부분집합은 $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$
원소가 2개인 부분집합은 $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$
원소가 3개인 부분집합은 $\{1, 3, 5\}$
따라서 구하는 부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$
답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$

22 답 $\{0\}$, $\{-1, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$

23 답 $\varnothing$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{-1, 0\}$

24 답 $\{-1\}$, $\{-1, 1\}$

25 답 ○ **26** 답 ×

27 답 ○ **28** 답 ×

29 답 × **30** 답 ○

개념 31 서로 같은 집합

본책 89쪽

31 답 $A=B$

32 $A=\{5, 10, 15, \cdots\}$이므로
$A\neq B$ 답 $A\neq B$

33 $A=\{a, g, i, n, o, s\}$이므로
$A=B$ 답 $A=B$

34 $x^2=4$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
$\therefore A=\{-2, 2\}$
$|x|=2$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
$\therefore B=\{-2, 2\}$
$\therefore A=B$ 답 $A=B$

35 $A=\{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$, $B=\{3, 5, 7, 9, \cdots\}$이므로
$A \neq B$ 답 $A \neq B$

36 답 $a=0$, $b=1$ 참고 0, b

37 답 $a=-1$, $b=2$

38 $-a=3$, $b+1=5$이므로
$a=-3$, $b=4$ 답 $a=-3$, $b=4$

39 $a-1=7$, $2-b=4$이므로
$a=8$, $b=-2$ 답 $a=8$, $b=-2$

40 $2a=-10$, $b-3=4$이므로
$a=-5$, $b=7$ 답 $a=-5$, $b=7$

41 답 $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$

42 답 $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$

43 주어진 집합은 $\{1, 2, 3, 6\}$이므로 구하는 진부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{6\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 6\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$
답 풀이 참조

개념 32 부분집합의 개수 본책 90쪽

44 $2^3=8$ 답 8

45 $2^5=32$ 답 32

46 $2^7=128$ 답 128

47 $\{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$에서 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는
$2^6=64$ 답 64

48 $\{2, 3, 5, 7\}$에서 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는
$2^4=16$ 답 16

49 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에서 원소의 개수가 8이므로 부분집합의 개수는
$2^8=256$ 답 256

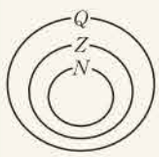
50 $2^2-1=3$ 답 3

51 $2^3-1=7$ 답 7

52 $2^9-1=511$ 답 511

원소의 개수가 n인 집합에서 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수
➡ 2^{n-k} (단, $k<n$)

14=2×7이므로 원소의 개수가 7이다.



17=2×9−1이므로 원소의 개수가 9이다.

53 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$에서 원소의 개수가 8이므로 진부분집합의 개수는
$2^8-1=255$ 답 255

54 $\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$에서 원소의 개수가 6이므로 진부분집합의 개수는
$2^6-1=63$ 답 63

55 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에서 원소의 개수가 5이므로 진부분집합의 개수는
$2^5-1=31$ 답 31

개념 33 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수 본책 91쪽

56 답 8 참고 1, 8

57 $2^{5-3}=2^2=4$ 답 4

58 $2^{6-2}=2^4=16$ 답 16

59 답 4 참고 2, 4

60 $2^{4-1}=2^3=8$ 답 8

61 $2^{6-4}=2^2=4$ 답 4

62 답 4 참고 1, 1, 4

63 집합 X는 B의 부분집합 중에서 a, b, c를 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는
$2^{4-3}=2^1=2$ 답 2

64 집합 X는 B의 부분집합 중에서 -3, 3을 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$ 답 8

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형 본책 92쪽

01 ④ $7 \notin A$이므로 $\{5, 7, 11\} \not\subset A$
답 ④

02 답 ①

03 $A=\{1, 2, 3, 4\}$이고 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 원소가 2개인 집합이므로 집합 X는
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$
의 6개이다. 답 ③

다른 풀이 집합 X의 개수는 집합 A의 원소 중 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_4C_2=6$

04 $x^3=x$에서 $x^3-x=0$
$x(x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
$\therefore A=\{-1, 0, 1\}$
① 공집합은 모든 집합의 부분집합이다.
② 집합 A의 원소는 -1, 0, 1의 3개이므로
$n(A)=3$
③ 원소가 1개인 집합 A의 부분집합은
$\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$의 3개
④ 원소가 2개인 집합 A의 부분집합은
$\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$의 3개
⑤ $\{-1, 0, 1\}=A$이고 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다.
답 ④

05 ① $0\in A$ 또는 $\{0\}\subset A$
⑤ $A\subset B$
답 ①, ⑤

06 $A=\{1, 3, 9\}$
ㄴ. $3\in A$
ㄹ. $9\in A$ 또는 $\{9\}\subset A$
ㅁ. $6\notin A$이므로 $\{1, 6\}\not\subset A$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅂ이다. 답 ②

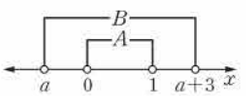
07 ⑤ $\{2\}\in\{1, \{2\}\}$ 또는 $\{\{2\}\}\subset\{1, \{2\}\}$
답 ⑤

08 $A\subset B\subset C$이면 $A\subset B$이고 $B\subset C$이다.
$A=\{1, 2\}$이므로 $A\subset B$가 성립하려면
$2\in B$ $\therefore a=2$
따라서 $B=\{1, 2, 5\}$이므로 $B\subset C$가 성립하려면
$1\in C$ $\therefore b=1$
$\therefore a+b=3$ 답 ①

09 $A\subset B$가 성립하려면
$k\geq 15$
따라서 실수 k의 최솟값은 15이다. 답 15

10 주어진 벤 다이어그램에서 $A\subset B$이므로
$10\in B$
즉 $a+7=10$ 또는 $2a=10$이므로
$a=3$ 또는 $a=5$
따라서 구하는 합은
$3+5=8$ 답 8

11 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a\leq 0$, $a+3\geq 1$
$a+3\geq 1$에서 $a\geq -2$이므로 $-2\leq a\leq 0$
따라서 a의 최댓값은 0, 최솟값은 -2이므로 구하는 합은
$0+(-2)=-2$ 답 ②

베이직쎈 BOX

$B\subset A$이지만 $A\not\subset B$이다.

$B\subset A$이지만 $A\not\subset B$이다.

$A\subset B$이지만 $B\not\subset A$이다.

$a=3$일 때,
$B=\{-1, 3, 6, 10\}$
이므로 $A\subset B$
$a=5$일 때,
$B=\{-1, 3, 10, 12\}$
이므로 $A\subset B$

12 ② $B=\{4, 5\}$이므로 $A\neq B$
③ $B=\varnothing$이므로 $A=B$
④ $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 3, 5, 9\}$이므로
$A\neq B$
⑤ $A=\{2, 6, 8\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로
$A\neq B$
답 ③

13 $A=\{2, 3, 5\}$이고 $A=B$이므로
$a+2=2$, $b-3=3$ 또는 $a+2=3$, $b-3=2$
$\therefore a=0$, $b=6$ 또는 $a=1$, $b=5$
그런데 $a\neq 0$이므로 $a=1$, $b=5$
$\therefore b-a=4$ 답 ③

14 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$
따라서 $k^2=9$이므로 $k=-3$ 또는 $k=3$
(i) $k=-3$일 때,
$A=\{-5, -3, 9\}$, $B=\{3, 7, 9\}$이므로
$A\neq B$
(ii) $k=3$일 때,
$A=\{3, 7, 9\}$, $B=\{3, 7, 9\}$이므로
$A=B$
(i), (ii)에서 $k=3$ 답 3

15 집합 A의 진부분집합은
$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{\{c\}\}$, $\{a, b\}$, $\{a, \{c\}\}$, $\{b, \{c\}\}$
따라서 집합 A의 진부분집합이 아닌 것은 ⑤이다.
답 ⑤

집합 A의 원소는 a, b, $\{c\}$

16 $(x+1)(x-2)<0$에서 $-1<x<2$
$\therefore A=\{0, 1\}$
따라서 집합 A의 진부분집합은
$\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$ 답 $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$

17 ㄱ. $\{2, 4\}\subset\{1, 2, 4\}$, $\{2, 4\}\neq\{1, 2, 4\}$
ㄴ. $\{x|x$는 $1<x<3$인 자연수$\}=\{2\}$이므로
$\{2\}\subset\{1, 2, 4\}$, $\{2\}\neq\{1, 2, 4\}$
ㄷ. $\{x|x$는 2의 양의 약수$\}=\{1, 2\}$이므로
$\{1, 2\}\subset\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2\}\neq\{1, 2, 4\}$
ㄹ. $\{x|x$는 4의 양의 약수$\}=\{1, 2, 4\}$
이상에서 집합 $\{1, 2, 4\}$의 진부분집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

18 $A=\{13, 15, 17, 19\}$에서 A의 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는
$2^4=16$ $\therefore a=16$
$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$에서 B의 원소의 개수가 6이므로 부분집합의 개수는
$2^6=64$ $\therefore b=64$
$\therefore b-a=48$ 답 ③

베이직쎈 BOX

19 $A=\{-3, -2, -1\}$에서 A의 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는

$2^3=8$ $\therefore a=8$

진부분집합의 개수는

$2^3-1=7$ $\therefore b=7$

$\therefore a+b=15$ 답 15

20 $n(A)=k$라 하면

$2^k=32=2^5$ $\therefore k=5$ 답 5

21 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

A의 부분집합 중에서 2의 배수인 2, 4, 6, 8을 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{8-4}=2^4=16$ 답 16

22 $4\le 2x<15$에서 $2\le x<\frac{15}{2}$

$\therefore A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

A의 부분집합 중에서 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ $\therefore a=16$

A의 부분집합 중에서 4를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{6-1}=2^5=32$ $\therefore b=32$

$\therefore a+b=48$ 답 ③

23 집합 A의 부분집합 중에서 4, 10을 반드시 원소로 갖고 6을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{5-2-1}=2^2=4$ 답 4

- $4\in X$, $10\in X$
- $6\notin X$

24 $X\subset A$이고 $X\neq A$이므로 X는 A의 진부분집합이다.

따라서 A의 진부분집합 중에서 d, m을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{5-2}-1=2^3-1=7$ 답 7

25 집합 X는 집합 $\{-2, 0, 1, 3, 6\}$의 부분집합 중에서 0, 3을 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$ 답 ②

26 $|x|\le 2$에서 $-2\le x\le 2$

$\therefore A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$(x+3)(x-5)\le 0$에서 $-3\le x\le 5$

$\therefore B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

이때 집합 X는 B의 부분집합 중에서 -2, -1, 0, 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는

$2^{9-5}=2^4=16$ 답 16

27 $B=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$

이때 집합 X는 B의 부분집합 중에서 1, 4, 5를 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로

$2^{n-3}=64=2^6$, $n-3=6$

$\therefore n=9$ 답 ⑤

공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

집합 A의 원소는

$\emptyset$, a, $\{a, b\}$, c

$\begin{cases} a+b=-1 & \cdots ㉠ \\ 2a-b=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$3a=3$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$1+b=-1$

$\therefore b=-2$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 96쪽

01 전략 a, b, c가 정수임을 이용하여 집합 A의 원소를 찾는다.

풀이 ① $0=2\cdot 0$, $0=4\cdot 0$, $0=6\cdot 0$이므로

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in A$

② $12=2\cdot 6$, $12=4\cdot 3$, $12=6\cdot 2$이므로

$\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}\in A$

③ $4=2\cdot 2$, $-18=6\cdot(-3)$이지만 $2=4\cdot\frac{1}{2}$이므로

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}\notin A$

④ $-8=2\cdot(-4)$, $-6=6\cdot(-1)$이지만 $6=4\cdot\frac{3}{2}$이므로

$\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}\notin A$

⑤ $-6=2\cdot(-3)$, $8=4\cdot 2$이지만 $20=6\cdot\frac{10}{3}$이므로

$\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}\notin A$ 답 ③

02 전략 주어진 벤 다이어그램을 이용하여 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 파악한다.

풀이 주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $A\subset B$이다.

① $A\not\subset B$, $B\not\subset A$

② $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 $B\subset A$

③ $A\not\subset B$, $B\not\subset A$

④ $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로 $A\subset B$

⑤ $B\subset A$ 답 ④

03 전략 먼저 두 집합 Y, Z를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $Y=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Z=\{-2, 2\}$이므로

$Z\subset X\subset Y$ 답 ④

04 전략 집합 A의 원소와 부분집합을 구분하여 생각한다.

풀이 ③ $a\in A$ 또는 $\{a\}\subset A$

⑤ $\{a, b\}\in A$ 또는 $\{\{a, b\}\}\subset A$ 답 ③, ⑤

05 전략 주어진 벤 다이어그램을 보고 두 집합 X, Y를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $X=\{2, 4, 6, 8\}$, $Y=\{4, 8\}$

⑤ $\{4, 6, 8\}\subset X$ 답 ⑤

06 전략 두 집합 A, B의 모든 원소가 같음을 이용한다.

풀이 $A=B$이므로

$a+b=-1$, $2a-b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-2$

$\therefore ab=-2$ 답 ①

베이직쎈 BOX

07 전략 원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수는 2^n이다.

풀이 ① 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는
$2^3=8$

② $\{1, 7\}$에서 원소의 개수가 2이므로 부분집합의 개수는
$2^2=4$

③ $\{-2, -1, 0\}$에서 원소의 개수가 3이므로 부분집합의 개수는
$2^3=8$

④ $\{4, 8, 12, 16, 20\}$에서 원소의 개수가 5이므로 부분집합의 개수는
$2^5=32$

⑤ $\{2, 3, 5, 7\}$에서 원소의 개수가 4이므로 부분집합의 개수는
$2^4=16$

답 ⑤

08 전략 a^2+b^2의 값이 될 수 있는 수를 모두 구한다.

풀이 집합 A의 두 원소 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로
$B=\{0, 4, 8\}$
따라서 B의 진부분집합의 개수는
$2^3-1=7$

a \ b	-2	0	2
-2	8	4	8
0	4	0	4
2	8	4	8

답 ①

원소의 개수가 n인 집합의 진부분집합의 개수 ➡ 2^n-1

09 전략 집합 A의 원소가 하나도 없도록 하는 k의 조건을 생각해 본다.

풀이 8의 양의 배수는 8, 16, 24, …이므로 집합 A가 공집합이려면
$k\le 8$
따라서 실수 k의 최댓값은 8이다.

답 8

10 전략 조건을 만족시키는 부분집합은 원소의 개수가 2개 이상임을 이용한다.

풀이 집합 A의 부분집합 중에서 모든 원소의 합이 15 이상이려면 원소가 2개 이상이어야 한다.

(i) 원소가 2개일 때,
$\{6, 9\}$의 1개

(ii) 원소가 3개일 때,
$\{2, 5, 9\}$, $\{2, 6, 9\}$, $\{5, 6, 9\}$의 3개

(iii) 원소가 4개일 때,
$\{2, 5, 6, 9\}$의 1개

이상에서 구하는 집합의 개수는
$1+3+1=5$

답 5

2+5=7, 2+6=8, 2+9=11, 5+6=11, 5+9=14, 6+9=15

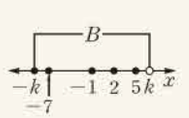
2+5+6=13, 2+5+9=16, 2+6+9=17, 5+6+9=20

2+5+6+9=22

11 전략 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속해야 한다.

풀이 $A\subset B$가 성립하려면
$-k\le -7$, $k>5$ $\therefore k\ge 7$ ··· ❶
따라서 10 이하의 자연수 k는 7, 8, 9, 10의 4개이다. ··· ❷

답 4



단계	채점 기준	비율
❶	k의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %
❷	자연수 k의 개수를 구할 수 있다.	30 %

12 전략 집합 B의 원소가 집합 A의 방정식의 해와 같음을 이용한다.

풀이 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로
$A=B$ ··· ❶
따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -5, 3이어야 하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-5+3=-a$, $-5\cdot 3=b$
$\therefore a=2$, $b=-15$ ··· ❷
$\therefore a-b=17$ ··· ❸

답 17

$\{x|x^2+ax+b=0\}=\{-5, 3\}$

단계	채점 기준	비율
❶	$A=B$임을 알 수 있다.	30 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	$a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

베쎈 TIP

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

13 전략 원소의 개수가 n인 집합에서 특정한 원소 k개는 반드시 원소로 갖고, l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-k-l}이다. (단, $k+l<n$)

풀이 $(x+4)(x-11)\le 0$에서
$-4\le x\le 11$
$\therefore A=\{-4, -3, -2, \cdots, 11\}$ ··· ❶
따라서 집합 A의 부분집합 중에서 10의 양의 약수는 반드시 원소로 갖고 음수는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는
$2^{16-4-4}=2^8=256$ ··· ❷

답 256

1, 2, 5, 10

−4, −3, −2, −1

단계	채점 기준	비율
❶	집합 A를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷	조건을 만족시키는 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	60 %

14 전략 집합 X는 B의 부분집합 중에서 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합임을 이용한다.

풀이 $A=\{b, c\}$, $B=\{a, b, c, d, e, f\}$
이때 집합 X는 B의 부분집합 중에서 b, c를 반드시 원소로 갖는 집합과 같으므로 집합 X의 개수는
$2^{6-2}=2^4=16$

답 16

06 집합의 연산

13 집합의 연산

개념 34 합집합과 교집합

본책 98쪽

01 目 $A\cup B=\{1, 3, 5, 7\}$, $A\cap B=\{1, 5\}$

02 目 $A\cup B=\{a, b, c, d, e, f\}$, $A\cap B=\{a, c\}$

03 $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로
$A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A\cap B=\{4, 5, 6\}$
目 $A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A\cap B=\{4, 5, 6\}$

04 $A=\{3, 6, 9, \cdots, 48\}$, $B=\{6, 12, 18, \cdots, 48\}$이므로
$A\cup B=\{3, 6, 9, \cdots, 48\}$,
$A\cap B=\{6, 12, 18, \cdots, 48\}$
目 $A\cup B=\{3, 6, 9, \cdots, 48\}$,
$A\cap B=\{6, 12, 18, \cdots, 48\}$

05 $A=\{10, 12, 14, \cdots, 98\}$,
$B=\{11, 13, 15, \cdots, 99\}$이므로
$A\cup B=\{10, 11, 12, \cdots, 99\}$, $A\cap B=\varnothing$
目 $A\cup B=\{10, 11, 12, \cdots, 99\}$,
$A\cap B=\varnothing$

06 目 $A\cup B=\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, $A\cap B=\{2, 8\}$

07 目 $A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$, $A\cap B=\{b\}$

08 目 $A\cup B=\{1, 3, 7, 9\}$, $A\cap B=\{1, 9\}$

09 目 ○ 🎯 $\varnothing$, 서로소이다

10 $A\cap B=\{13\}$이므로 A와 B는 서로소가 아니다.
目 ×

11 $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다. 目 ○

12 $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다. 目 ○

13 $A\cap B=\{15, 30, 45, \cdots\}$이므로 A와 B는 서로소가 아니다. 目 ×

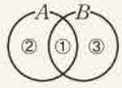
14 $A=\{1, 3, 5, 15\}$이므로
$A\cap B=\{3\}$
따라서 A와 B는 서로소가 아니다. 目 ×

15 $A=\{0, 1\}$, $B=\{2\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 A와 B는 서로소이다. 目 ○

베이직쎈 BOX

유리수이면서 무리수인 수는 없다.

집합을 벤 다이어그램으로 나타낼 때에는 ① → ② → ③의 순서로 원소를 써넣는다.



두 집합의 교집합을 구하여 공집합인지 아닌지 확인한다.

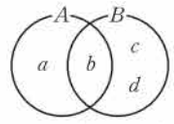
공집합은 모든 집합과 서로소이다.

집합 A는 5의 양의 배수의 집합이고 집합 B는 3의 양의 배수의 집합이므로 집합 $A\cap B$는 5와 3의 최소공배수인 15의 양의 배수의 집합이다.

16 $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다. 目 ○

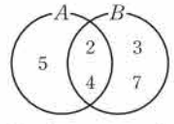
17 目 $B=\{3, 4\}$ 🎯 $\{3, 4\}$ ① 1 ② 4

18 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{b, c, d\}$



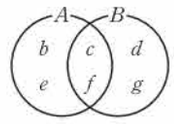
目 $B=\{b, c, d\}$

19 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{2, 3, 4, 7\}$



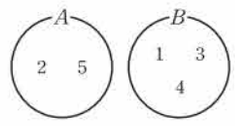
目 $B=\{2, 3, 4, 7\}$

20 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{c, d, f, g\}$



目 $B=\{c, d, f, g\}$

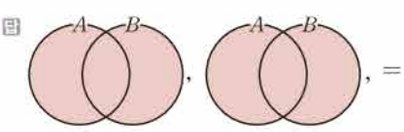
21 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{1, 3, 4\}$

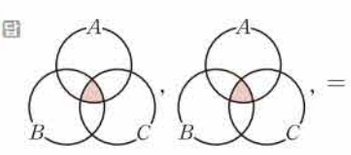


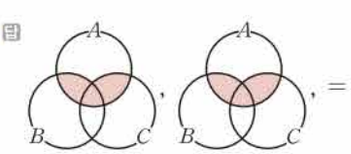
目 $B=\{1, 3, 4\}$

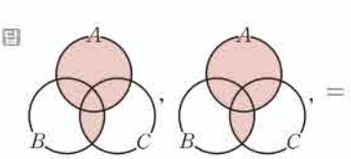
개념 35 집합의 연산 법칙

본책 100쪽

22 目 

23 目 

24 目 

25 目 

26 $A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$이므로
$(A\cup B)\cup C=\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$
$B\cup C=\{0, 1, 2, 4, 6, 7\}$이므로
$A\cup(B\cup C)=\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$
目 $(A\cup B)\cup C=\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$,
$A\cup(B\cup C)=\{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$

27 $B\cup C=\{0, 1, 2, 4, 6, 7\}$이므로
$A\cap(B\cup C)=\{2, 4, 7\}$
$A\cap B=\{2, 7\}$, $A\cap C=\{4, 7\}$이므로
$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2, 4, 7\}$
답 $A\cap(B\cup C)=\{2, 4, 7\}$,
$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2, 4, 7\}$

28 $B\cap C=\{1, 7\}$이므로
$A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 4, 5, 7\}$
$A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$,
$A\cup C=\{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$이므로
$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1, 2, 4, 5, 7\}$
답 $A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 4, 5, 7\}$,
$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1, 2, 4, 5, 7\}$

29 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ 결합법칙
$=\{1, 6, 9\}\cup\{3, 6, 8\}$
$=\{1, 3, 6, 8, 9\}$
답 $\{1, 3, 6, 8, 9\}$

30 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
$=\{a, c, d, e\}\cap\{a, b, e, f\}$
$=\{a, e\}$ 답 $\{a, e\}$

31 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 분배법칙
$=\{1, 3, 5\}\cap\{3, 5, 7\}$
$=\{3, 5\}$ 답 $\{3, 5\}$

32 $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$
$=\{-1, 0, 2\}\cap\{-2, -1, 1\}$
$=\{-1\}$ 답 $\{-1\}$

개념 36 여집합과 차집합 본책 101쪽

33 답 $\{2, 4, 6\}$

34 답 $\{1, 2, 3, 5\}$

35 $C=\{1, 2, 3, 6\}$이므로
$C^C=\{4, 5\}$ 답 $\{4, 5\}$

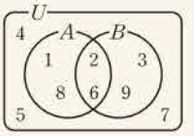
36 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이므로
$A^C=\{1, 2, 5, 6, 8, 9\}$
답 $\{1, 2, 5, 6, 8, 9\}$

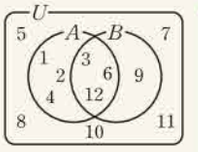
37 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로
$B^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
답 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

38 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$이므로
$C^C=\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$
답 $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

베이직쎈 BOX

차집합에 대해서는 교환법칙이 성립하지 않는다.
즉
$A-B\neq B-A$





소수
➡ 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수

39 답 $A-B=\{1, 3\}$, $B-A=\{4, 6\}$

40 답 $A-B=\{c, d\}$, $B-A=\{a\}$

41 답 $A-B=\{2, 4, 8\}$, $B-A=\varnothing$

42 $A=\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$,
$B=\{4, 8, 12, 16, 20\}$이므로
$A-B=\{9, 10, 11, 13, 14\}$,
$B-A=\{4, 16, 20\}$
답 $A-B=\{9, 10, 11, 13, 14\}$,
$B-A=\{4, 16, 20\}$

43 $A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로
$A-B=\varnothing$, $B-A=\{16\}$
답 $A-B=\varnothing$, $B-A=\{16\}$

44 답 $\{b, e, f, g\}$ **45** 답 $\{a, d, f, g\}$

46 답 $\{a, d\}$ **47** 답 $\{b, e\}$

48 답 $\{f, g\}$ **49** 답 $\{a, b, d, e, f, g\}$

50 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로
$A^C=\{3, 4, 5, 7, 9\}$ 답 $\{3, 4, 5, 7, 9\}$

51 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로
$B^C=\{1, 4, 5, 7, 8\}$ 답 $\{1, 4, 5, 7, 8\}$

52 답 $\{1, 8\}$ **53** 답 $\{3, 9\}$

54 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$이므로
$(A\cup B)^C=\{4, 5, 7\}$ 답 $\{4, 5, 7\}$

55 $B^C=\{1, 4, 5, 7, 8\}$이므로
$A\cap B^C=\{1, 8\}$ 답 $\{1, 8\}$

56 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$, $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로
$A^C=\{5, 7, 8, 9, 10, 11\}$
답 $\{5, 7, 8, 9, 10, 11\}$

57 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$B^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$
답 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

58 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$A-B=\{1, 2, 4\}$ 답 $\{1, 2, 4\}$

59 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$B-A=\{9\}$ 답 $\{9\}$

60 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$A\cap B=\{3, 6, 12\}$

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$이므로
$(A\cap B)^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$
답 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$

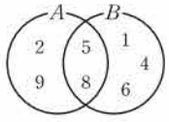
61 $A^C=\{5, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$이므로
$A^C\cap B=\{9\}$ 답 $\{9\}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형
본책 103쪽

01 $C=\{1, 2, 5, 10\}$
④ $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$이므로
$(A\cup B)\cap C=\{1, 2, 5\}$
답 ④

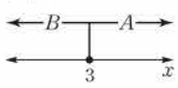
02 $A=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$,
$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분은 $A\cap B$이므로
$A\cap B=\{6, 12, 24\}$ 답 ⑤

03 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$B=\{1, 4, 5, 6, 8\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$1+4+5+6+8=24$ 답 24



04 ④ $\{x|x$는 3의 양의 배수$\}=\{3, 6, 9, \cdots\}$이므로
$\{4, 7\}\cap\{3, 6, 9, \cdots\}=\varnothing$
따라서 집합 $\{4, 7\}$과 서로소이다.
⑤ $\{x|x$는 14의 양의 약수$\}=\{1, 2, 7, 14\}$이므로
$\{4, 7\}\cap\{1, 2, 7, 14\}=\{7\}$
따라서 집합 $\{4, 7\}$과 서로소가 아니다.
답 ⑤

05 ① $A\cap B=\{10\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
② $A=\{0, 2\}$, $B=\{-2, 2\}$이므로
$A\cap B=\{2\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
③ 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
$A\cap B=\{3\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
④ $A=\{2, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{2\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.
⑤ $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{4, 8, 12, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 두 집합 A, B는 서로소이다.
답 ⑤

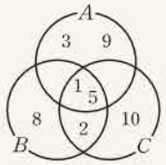


베이직쎈 BOX

$A\cap B=\varnothing$이므로 집합 B의 원소는 집합 $A\cup B$의 원소 중 집합 A의 원소를 제외한 것이다.

원소의 개수가 n인 집합에서 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수
➡ 2^{n-l} (단, $l<n$)

서로소
➡ 최대공약수가 1인 두 자연수



조건제시법으로 주어진 집합은 원소나열법으로 나타낸 후 교집합을 구한다.

집합 B의 원소 중 9를 제외한 원소는 모두 집합 A에 속한다.

소수이면서 짝수인 자연수는 2뿐이다.

06 집합 B가 집합 A와 서로소이므로
$A\cap B=\varnothing$ $\therefore B=\{1, 3, 5\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은
$1+3+5=9$ 답 9

07 집합 A의 부분집합 중에서 집합 B와 서로소인 집합은 집합 $\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 b, d를 원소로 갖지 않는 집합과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$ 답 8

08 $A=\{1, 3, 7, 9\}$이므로
$A^C=\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$
따라서 집합 A^C의 모든 원소의 합은
$2+4+5+6+8+10=35$ 답 35

09 $B-C=\{1, 4\}$이므로
$A-(B-C)=\{2, 6\}$ 답 ④

10 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$이므로
$B=\{1, 4, 6, 8\}$
따라서 $A\cap B=\{1, 4, 6\}$이므로
$(A\cap B)^C=\{2, 3, 5, 7, 8\}$ 답 $\{2, 3, 5, 7, 8\}$

11 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$
$\therefore (A\cup B)^C=\{4, 8\}$
또 $B^C=\{2, 4, 6, 8\}$이므로
$A-B^C=\{3, 9\}$
$\therefore (A\cup B)^C\cup(A-B^C)=\{3, 4, 8, 9\}$
따라서 집합 $(A\cup B)^C\cup(A-B^C)$의 원소의 개수는 4이다. 답 4

12 $A\cap B=\{3, 7\}$에서 $3\in A$이므로
$a=3$
또 $7\in B$이므로 $b+1=7$ $\therefore b=6$
$\therefore a+b=9$ 답 ⑤

13 $B-A=\{9\}$에서 $3\in A$이므로
$k=3$
따라서 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 9\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 3, 9\}$ 답 $\{1, 2, 3, 9\}$

14 $A\cap B=\{2, 9\}$에서 $9\in A$이므로
$a^2=9$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=3$
(i) $a=-3$일 때,
$A=\{2, 6, 9\}$, $B=\{-9, -4, 10\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=3$일 때,
$A=\{2, 6, 9\}$, $B=\{2, 9, 10\}$이므로
$A\cap B=\{2, 9\}$
(i), (ii)에서 $a=3$ 답 3

15 $A\cup B=\{0, 3, 4, 7\}$에서 $3\in A$ 또는 $7\in A$이므로
$2a-1=3$ 또는 $2a-1=7$
$\therefore a=2$ 또는 $a=4$
(i) $a=2$일 때,
$A=\{0, 3, 4\}$, $B=\{3, 7\}$이므로
$A\cup B=\{0, 3, 4, 7\}$
(ii) $a=4$일 때,
$A=\{0, 4, 7\}$, $B=\{-5, 3\}$이므로
$A\cup B=\{-5, 0, 3, 4, 7\}$
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에서 $a=2$
따라서 $B=\{3, 7\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
$3+7=10$ 답 10

베이직쎈 BOX

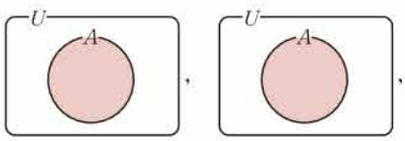
$2a-1=3$에서 $2a=4$ $\therefore a=2$

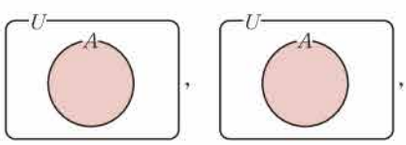
$2a-1=7$에서 $2a=8$ $\therefore a=4$

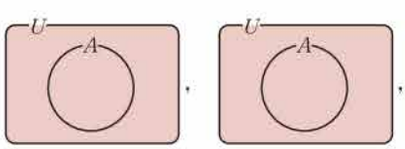
14 집합의 연산의 성질

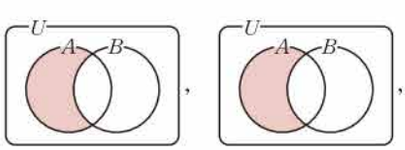
개념 37 집합의 연산의 성질

본책 105쪽

01 답 

02 답 

03 답 

04 답 

05 답 A 힌트 U, A

06 $(A\cap A)\cup\varnothing=A\cup\varnothing=A$ 답 A

07 $(A\cup A^C)\cap A=U\cap A=A$ 답 A

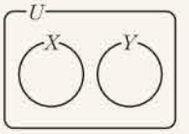
08 $A\cap U^C=A\cap\varnothing=\varnothing$ 답 $\varnothing$

09 $(\varnothing^C)^C=U^C=\varnothing$ 답 $\varnothing$

10 $U-A^C=U\cap(A^C)^C=U\cap A=A$ 답 A

11 답 $\{7\}$ 힌트 $-$, $\{7\}$

12 $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\{4, 5\}$ 답 $\{4, 5\}$



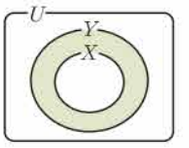
개념 38 집합의 연산을 이용한 여러 가지 표현

본책 106쪽

13 $X\cup Y=Y$ 답 ×

14 답 ○ **15** 답 ○

16 집합 $X^C\cap Y$는 오른쪽 벤 다이어그램에서 색칠한 부분과 같으므로 $X^C\cap Y\neq Y$ 답 ×



17 답 ○

18 $Y^C\subset X^C$ 답 ×

19 답 ○

20 $(X\cap Y)-Y=X-Y=\varnothing$ 답 ○

21 $X-(X\cup Y)=X-Y=\varnothing$ 답 ×

22 답 ○

23 $X\subset Y^C$ 답 ×

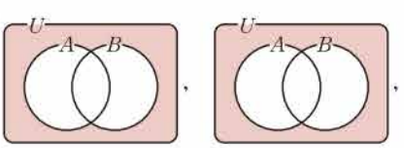
24 $X\cap Y^C=X-Y=X$ 답 ○

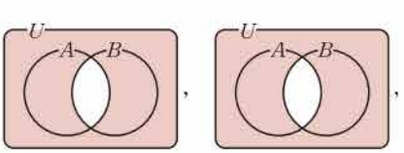
25 $(Y-X)^C=Y^C$이고 $X\subset Y^C$이므로
$X\subset(Y-X)^C$ 답 ○

26 $Y-(X-Y)=Y-X=Y$ 답 ×

개념 39 드모르간의 법칙

본책 107쪽

27 답 

28 답 

29 답 $\{3, 7\}$ 힌트 $\cup$, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 3, 7

30 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이고 $A\cap B=\{5, 9\}$이므로
$A^C\cup B^C=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$
답 $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$

드모르간의 법칙에 의하여 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

31 답 $\cap$, $\cup$ **32** 답 $\cup$, $\cup$, U, U

$A\cap B=X$라 하면
$(A\cap B)\cup(A\cap B)^C=X\cup X^C=U$

33 답 $\cap$, $\cup$, $\cap$, $\varnothing$, B

34 $(A\cap B)\cup\overline{(A^C\cup B^C)}=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C=\overline{U}$ 답 U

베이직쎈 BOX

35 $A-(A\cup B^C)=A\cap(A\cup B^C)^C$
$=A\cap(A^C\cap B)$
$=(A\cap A^C)\cap B$
$=\varnothing\cap B$
$=\varnothing$ 답 $\varnothing$

개념 40 유한집합의 원소의 개수 본책 108쪽

36 답 2, 2, B **37** 답 6, 5, A

38 답 2, $A\cap B$, 7, $A\cup B$

39 답 6 3, 2, 6

40 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=6+8-3=11$ 답 11

41 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$
$=2+4=6$ 답 6

$A\cap B=\varnothing$이면
$n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)$

42 답 1 $A\cup B$, 3, 6, 1

43 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=7+6-10=3$ 답 3

44 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=8+3-9=2$ 답 2

45 답 10 A, 10, 10

46 $n(B^C)=n(U)-n(B)=20-13=7$ 답 7

47 $n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
$=20-5=15$ 답 15

48 답 5 A, 10, 5

49 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=13-5=8$ 답 8

50 $n(A^C)=n(U)-n(A)=30-18=12$ 답 12

51 $n(B^C)=n(U)-n(B)=30-11=19$ 답 19

52 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=30-22=8$ 답 8

53 답 11 B, 11, 11

54 $n(B\cap A^C)=n(B-A)$
$=n(A\cup B)-n(A)$
$=22-18=4$ 답 4

55 답 29
20, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cup B$, 20, 6, 29, 29

음악 동아리와 미술 동아리에 모두 가입한 학생의 집합

56 음악 동아리에 가입한 학생의 집합을 A, 미술 동아리에 가입한 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=12$, $n(B)=16$, $n(A\cap B)=9$
음악 동아리 또는 미술 동아리에 가입한 학생의 집합은 $A\cup B$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=12+16-9=19$
따라서 구하는 학생 수는 19이다. 답 19

A 문제 또는 B 문제를 맞힌 학생의 집합

57 A 문제를 맞힌 학생의 집합을 A, B 문제를 맞힌 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=18$, $n(B)=22$, $n(A\cup B)=31$
A 문제와 B 문제를 모두 맞힌 학생의 집합은 $A\cap B$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=18+22-31=9$
따라서 구하는 학생 수는 9이다. 답 9

빨간색 또는 파란색을 좋아하는 학생의 집합

58 빨간색을 좋아하는 학생의 집합을 A, 파란색을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=8$, $n(B)=13$, $n(A\cup B)=16$
빨간색과 파란색을 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=8+13-16=5$
따라서 구하는 학생 수는 5이다. 답 5

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형 본책 110쪽

01 $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$ 답 ③

02 ② $\varnothing^C=U$이므로 $A\subset\varnothing^C$
③ $A-U^C=A\cap(U^C)^C=A\cap U=A$
④ $A^C\cap B=B\cap A^C=B-A$
⑤ $(A\cap\varnothing)\cup U=\varnothing\cup U=U$
답 ⑤

다른 풀이 ③ $A-U^C=A-\varnothing=A$

03 $(B\cap U)-A^C=B-A^C=B\cap(A^C)^C$
$=B\cap A=\{4, 8\}$
따라서 집합 $(B\cap U)-A^C$의 모든 원소의 합은
$4+8=12$ 답 12

04 ④ $A\subset B$, $A\neq B$이므로 $B-A\neq\varnothing$ 답 ④

05 $A-B=A$이면 $A\cap B=\varnothing$
① $A\not\subset B$
② $A\cup B\neq B$
④ $B\subset A^C$
답 ③, ⑤

두 집합 A, B는 서로소이다.

베이직쎈 BOX

06 $A^C \subset B^C$이면 $B \subset A$
① $A \cap B = B$
② $(A \cup B) \cap B = A \cap B = B$
③ $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$
④ $A \cap (A \cup B) = A \cap A = A$
⑤ $(A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B = B$

답 ④

07 $A \cap X = A$이므로 $A \subset X$
$B \cup X = B$이므로 $X \subset B$
$\therefore A \subset X \subset B$
따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{a, b, c, d, e\}$의 부분집합 중에서 a, b, c를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{5-3} = 2^2 = 4$ 답 4

집합 X는 집합 B의 부분집합 중에서 집합 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

08 $(A \cup B) \cap X = X$이므로 $X \subset (A \cup B)$
이때 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 5, 7\}$의 부분집합의 개수와 같다.
$\therefore 2^5 = 32$ 답 32

09 $U = \{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $X = \{1, 2, 3, 6\}$이고
$X - (X \cap Y) = X$에서 $X \cap Y = \varnothing$
따라서 집합 Y의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로
$2^{8-4} = 2^4 = 16$ 답 16

10 $(B - A)^C = (B \cap A^C)^C$
$= B^C \cup (A^C)^C$
$= B^C \cup A$
$= A \cup B^C$ 답 ⑤

11 $A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$
$A = \{2, 4, 6, 9, 10\}$, $A - B = \{4, 6, 10\}$에서
$A \cap B = A - (A - B) = \{2, 9\}$
$\therefore A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$
$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
따라서 집합 $A^C \cup B^C$의 원소의 개수는 8이다. 답 8

12 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$이고
$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \{5\}$이므로
$A \cup B = \{1, 3, 7, 9\}$
이때 $A = \{1, 3, 7\}$이므로 집합 B의 개수는 집합 $\{1, 3, 7, 9\}$의 부분집합 중에서 9를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.
$\therefore 2^{4-1} = 2^3 = 8$ 답 8

9∈(A∪B), 9∉A이므로 9∈B

13 $(A \cap B)^C \cap B = B \cap (A \cap B)^C$
$= B - (A \cap B)$
$= B - A = \{1, 3, 7\}$
따라서 집합 $(A \cap B)^C \cap B$의 원소의 개수는 3이다. 답 ①

$A \subset B$일 때, $A \cap B = A$이므로 $n(A \cap B) = n(A)$

$n(A \cap B)$가 최소이려면 $n(A \cup B)$가 최대이어야 하므로 $A \cup B = U$

14 $(A \cup B^C) \cap (A - B^C)^C = (A \cup B^C) \cap (A \cap B)^C$
$= (A \cup B^C) \cap (A^C \cup B^C)$
$= (A \cap A^C) \cup B^C$
$= \varnothing \cup B^C = B^C$ 답 ②

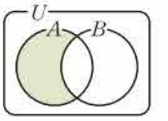
15 $A \cup \{(A - B)^C \cap B\}$
$= A \cup \{(A \cap B^C)^C \cap B\}$
$= A \cup \{(A^C \cup B) \cap B\}$
$= A \cup \{(A^C \cap B) \cup (B \cap B)\}$
$= A \cup (B - A) \cup B$
$= A \cup B$
따라서 $A \cup B = B$이므로 $A \subset B$ 답 ①

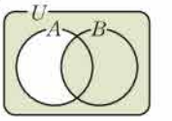
(B−A)⊂B이므로 $(B - A) \cup B = B$

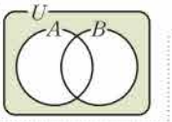
다른 풀이 $A \cup \{(A - B)^C \cap B\}$
$= A \cup \{B - (A - B)\}$
$= A \cup B$

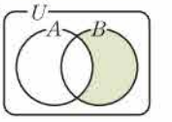
$B \cap (A - B) = \varnothing$이므로 $B - (A - B) = B$

16 ⑤ $(A \cup B) \cap (A \cap B)^C = (A \cup B) - (A \cap B)$
따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분과 같다.

① 

② 

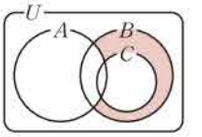
③ 

④ 

답 ⑤

$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$

$B \cap (A^C \cup B^C)$
$= B \cap (A \cap B)^C$
$= B - (A \cap B)$

17 ㄱ. 

ㄴ. $(A \cap B) \cap C^C = (A \cap B) - C$
따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분과 같다.
ㄷ. $(A \cap B^C) \cap C = (A - B) \cap C = \varnothing$
이상에서 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합과 항상 같은 집합인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

18 $B - (A \cup C)^C = B \cap (A \cup C)$ 답 ⑤

19 두 집합 A, B가 서로소이므로 $A \cap B = \varnothing$
$\therefore n(A \cap B) = 0$
$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
$= 13 + 9 = 22$ 답 ④

20 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$에서
$30 = 16 + n(B) - 7$ $\therefore n(B) = 21$ 답 21

21 $A \subset B$일 때 $n(A \cap B)$가 최대이므로
$M = n(A \cap B) = n(A) = 14$
$A \cup B = U$일 때 $n(A \cap B)$가 최소이므로
$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$에서
$m = 14 + 22 - 30 = 6$
$\therefore M + m = 20$ 답 20

베이직쎈 BOX

22 $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)=31-14=17$
$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=31-23=8$
$\therefore n(A-B)+n(B-A)=17+8=25$ 답 ④

23 $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$
이때
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=8+11-15=4$
이므로
$n(A^C\cup B^C)=n(U)-n(A\cap B)$
$=20-4=16$ 답 16

24 $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
이때 $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$에서
$n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)=21-14=7$
이므로
$n(A\cap B^C)=n(A)-n(A\cap B)$
$=18-7=11$ 답 11

25 제주도를 여행해 본 회원의 집합을 A, 독도를 여행해 본 회원의 집합을 B라 하면
$n(A)=22$, $n(B)=14$, $n(A\cup B)=28$
제주도와 독도를 모두 여행해 본 회원의 집합은 $A\cap B$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=22+14-28=8$
따라서 구하는 회원 수는 8이다. 답 ③

26 나은이네 반 학생 전체의 집합을 U, 장미를 좋아하는 학생의 집합을 A, 백합을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=32$, $n(A)=15$,
$n(B)=20$, $n(A\cap B)=9$
장미와 백합 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생의 집합은 $A^C\cap B^C$이므로
$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=32-n(A\cup B)$ ····· ㉠
이때
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=15+20-9=26$
이므로 ㉠에서 구하는 학생 수는
$32-26=6$ 답 6

27 A 영화를 본 학생의 집합을 A, B 영화를 본 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=17$, $n(B)=16$, $n(A\cap B)=7$
A 영화만 본 학생의 집합은 $A-B$, B 영화만 본 학생의 집합은 $B-A$이므로
$n(A-B)+n(B-A)$
$=\{n(A)-n(A\cap B)\}+\{n(B)-n(A\cap B)\}$
$=(17-7)+(16-7)=19$
따라서 구하는 학생 수는 19이다. 답 ⑤

분배법칙
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

전체집합 U에서 집합 $A-B$의 원소를 제외한다.

① $A\cup U=U$, $A\cap U=A$
② $(A^C)^C=A$
③ $A-B=A\cap B^C$

① $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$
② $U^C=\varnothing$, $\varnothing^C=U$
③ $A\cup A^C=U$, $A\cap A^C=\varnothing$

$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$이므로
$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP! 본책 114쪽

01 전략 $A\cap B$ ➔ 두 집합 A, B에 공통으로 속하는 원소로 이루어진 집합
풀이 ① $B=\{-2, -1, 0\}$이면 $A\cap B=\{-2, -1, 0\}$
② $B=\{-2, 1, 3\}$이면 $A\cap B=\{-2, 1\}$
③ $B=\{-1, 0, 1\}$이면 $A\cap B=\{-1, 0, 1\}$
④ $B=\{-1, 1, 3\}$이면 $A\cap B=\{-1, 1\}$
⑤ $B=\{0, 1, 3\}$이면 $A\cap B=\{0, 1\}$
답 ④

02 전략 분배법칙을 이용하여 구하는 집합을 변형한다.
풀이 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$=\{a, b, c, d\}\cup\{a, c, e\}$
$=\{a, b, c, d, e\}$ 답 ⑤

03 전략 $A-B$ ➔ 집합 A에서 집합 B의 원소를 제외한다.
풀이 $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{3, 6\}$이므로
$A-B=\{2, 5, 7\}$
$\therefore (A-B)^C=\{1, 3, 4, 6, 8\}$ 답 ④

04 전략 $A\cap B=A-(A-B)$임을 이용한다.
풀이 $A=\{2, 5, 8, a\}$, $A-B=\{5\}$이므로
$A\cap B=\{2, 5, 8, a\}-\{5\}$
$=\{2, 8, a\}$
이때 $B=\{2, 6, b\}$이므로
$a=6$, $b=8$
따라서 $A=\{2, 5, 6, 8\}$, $B=\{2, 6, 8\}$이므로
$B-A=\varnothing$, $A\cap B=\{2, 6, 8\}$,
$A\cup B=\{2, 5, 6, 8\}$ 답 ⑤

05 전략 집합의 연산의 성질을 이용하여 주어진 집합을 간단히 한다.
풀이 ② $A^C\cap B=B\cap A^C=B-A$
③ $(U\cap B)-A=B-A$
④ $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A=A\cap B^C=A-B$
⑤ $(A^C\cap U)\cap B=A^C\cap B=B\cap A^C=B-A$
답 ④

06 전략 각 집합을 주어진 연산에 대입한 후 집합의 연산의 성질을 이용하여 간단히 한다.
풀이 ① $A\circledcirc U=(A\cap U)\cup A^C=A\cup A^C=U$
② $U\circledcirc A=(U\cap A)\cup U^C=A\cup\varnothing=A$
③ $A\circledcirc\varnothing=(A\cap\varnothing)\cup A^C=\varnothing\cup A^C=A^C$
④ $U\circledcirc\varnothing=(U\cap\varnothing)\cup U^C=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$
⑤ $\varnothing\circledcirc U=(\varnothing\cap U)\cup\varnothing^C=\varnothing\cup U=U$
답 ②

07 전략 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타내어 두 집합 사이의 포함 관계를 구한다.
풀이 $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $B=\{1, 3, 9\}$이므로
$B\subset A$

ㄱ. $A\cap B=B$

ㄴ. $A-B=\{2, 6, 18\}$이므로
$A-B\neq A$

ㄷ. $A\cup B=A$이므로
$(A\cup B)\subset A$

ㄹ. $A^C\cap B=B-A=\varnothing$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

08 전략 $A\cup X=B\cup X$가 나타내는 의미를 파악하여 집합 X가 반드시 가져야 하는 원소를 구한다.

풀이 집합 U의 부분집합 X가
$\{a, b\}\cup X=\{b, c, e\}\cup X$
를 만족시키려면 집합 X는 두 집합 $\{a, b\}$, $\{b, c, e\}$의 공통인 원소 b를 제외한 나머지 원소 a, c, e를 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$ 답 ③

참고 $b\in A$, $b\in B$이므로
$b\in(A\cup X)$, $b\in(B\cup X)$
따라서 집합 X는 b를 원소로 갖지 않아도 된다.

09 전략 집합의 연산 법칙과 연산의 성질을 이용하여 주어진 집합을 간단히 한다.

풀이 $A\subset(A\cup B)$이므로
$(A\cup B)\cap A=A$

③ $A-(A\cap B)=A\cap(A\cap B)^C$
$=A\cap(A^C\cup B^C)$
$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B^C)$
$=\varnothing\cup(A-B)$
$=A-B$

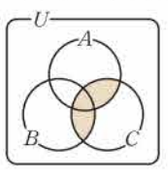
④ $(A\cup B)-A=(A\cup B)\cap A^C$
$=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$
$=\varnothing\cup(B-A)$
$=B-A$

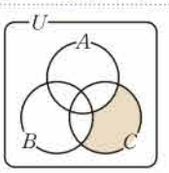
⑤ $(A\cup B)-(B-A)=(A\cup B)-(B\cap A^C)$
$=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C$
$=(A\cup B)\cap(B^C\cup A)$
$=A\cup(B\cap B^C)$
$=A\cup\varnothing$
$=A$

답 ⑤

10 전략 각 집합을 벤 다이어그램으로 나타낸 후 주어진 벤 다이어그램과 비교한다.

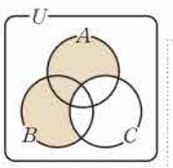
풀이 ② $(A^C\cup B^C)\cap C=(A\cap B)^C\cap C=C\cap(A\cap B)^C$
$=C-(A\cap B)$
따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분과 같다.

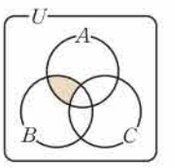
① 

③ 

베이직쎈 BOX

$(A^C\cap B^C)\cap C$
$=(A\cup B)^C\cap C$
$=C\cap(A\cup B)^C$
$=C-(A\cup B)$

④ 

⑤ 

답 ②

모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다.
➡ $A\subset A$

$n(B-A)$
$=n(B)-n(A\cap B)$
에서
$n(A\cap B)$
$=n(B)-n(B-A)$

11 전략 집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 ① $n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=42-26=16$

② $n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)$
$=19-7=12$

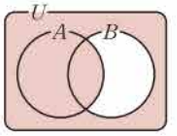
③ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=26+19-12=33$

④ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=26-12=14$

⑤ $n(A\cup B^C)=n(A)+n(B^C)-n(A\cap B^C)$
$=n(A)+\{n(U)-n(B)\}-n(A-B)$
$=26+(42-19)-14=35$

답 ⑤

다른 풀이 ⑤ 집합 $A\cup B^C$는 오른쪽 벤 다이어그램에서 색칠한 부분과 같으므로



$A\cup B^C=(A^C\cap B)^C$
$=(B-A)^C$

$A\cup B^C=(B-A)^C$
$\therefore n(A\cup B^C)=n((B-A)^C)$
$=n(U)-n(B-A)$
$=42-7=35$

12 전략 주어진 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.

풀이 동물원 입장객 전체의 집합을 U, 코끼리를 관람한 입장객의 집합을 A, 사자를 관람한 입장객의 집합을 B라 하면
$n(U)=50$, $n(A)=33$, $n(B)=38$
사자만 본 입장객의 집합은 $B-A$이므로
$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=38-n(A\cap B)$ …… ㉠
따라서 $n(A\cap B)$가 최소일 때 최대이다.
이때 $n(A\cap B)$는 $A\cup B=U$일 때 최소이므로
$n(A\cap B)$의 최솟값을 m이라 하면
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서
$m=33+38-50=21$
따라서 ㉠에서 구하는 최댓값은
$38-21=17$ 답 ④

13 전략 $P\subset X\subset Q$를 만족시키는 집합 X의 개수는 Q의 부분집합 중에서 P의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

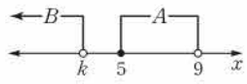
풀이 $A\cap B=\{a, e\}$, $A\cup B=\{a, b, c, d, e, i, o, u\}$
따라서 집합 X의 개수는 집합 $\{a, b, c, d, e, i, o, u\}$의 부분집합 중에서 a, e를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{8-2}=2^6=64$ 답 64

베이직쎈 BOX

$P\cap X=X$이면 $X\subset P$
$Q\cup X=X$이면 $Q\subset X$

14 전략 주어진 조건을 만족시키도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타낸다.

풀이 두 집합 A, B가 서로 소이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

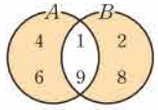


$k\le 5$

따라서 실수 k의 최댓값은 5이다. 답 5

15 전략 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타낸다.

풀이 집합 $(A-B)\cup(B-A)$는 오른쪽 벤 다이어그램에서 색칠한 부분과 같고, $A=\{1, 4, 6, 9\}$이므로



$A-B=\{4, 6\}$,

$B-A=\{2, 8\}$ ··· ❶

즉 $A\cap B=\{1, 9\}$이므로

$B=\{1, 2, 8, 9\}$ ··· ❷

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$1+2+8+9=20$ ··· ❸

답 20

단계	채점 기준	비율
❶	집합 $A-B$, $B-A$를 구할 수 있다.	50 %
❷	집합 B를 구할 수 있다.	30 %
❸	집합 B의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	20 %

16 전략 $a\in(A\cap B)$이면 $a\in A$, $a\in B$임을 이용한다.

풀이 $A\cap B=\{-2\}$이므로

$-2\in A$, $-2\in B$

$-2\in A$에서 $4-2a-6=0$

$2a=-2$ $\therefore a=-1$

-2가 방정식 $x^2+ax-6=0$의 해이다.

$-2\in B$에서 $4-6+b=0$

$\therefore b=2$ ··· ❶

-2가 방정식 $x^2+3x+b=0$의 해이다.

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{-2, 3\}$ ··· ❷

$x^2+3x+2=0$에서 $(x+1)(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

$\therefore B=\{-2, -1\}$ ··· ❸

$\therefore A\cup B=\{-2, -1, 3\}$ ··· ❹

답 $\{-2, -1, 3\}$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	집합 A를 구할 수 있다.	25 %
❸	집합 B를 구할 수 있다.	25 %
❹	집합 $A\cup B$를 구할 수 있다.	20 %

17 전략 먼저 집합 B를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 $2\cdot(-1)-1=-3$, $2\cdot0-1=-1$, $2\cdot1-1=1$, $2\cdot2-1=3$, $2\cdot3-1=5$이므로

$B=\{-3, -1, 1, 3, 5\}$ ··· ❶

k의 값이 -1, 0, 1, 2, 3일 때의 $2k-1$의 값을 각각 구한다.

이때 $B\cap X=X$이므로 $X\subset B$

$(B-A)\cup X=X$이므로 $(B-A)\subset X$

$\therefore (B-A)\subset X\subset B$ ··· ❷

$B-A=\{-3, 5\}$이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$의 부분집합 중에서 -3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^{5-2}=2^3=8$ ··· ❸

답 8

단계	채점 기준	비율
❶	집합 B를 구할 수 있다.	30 %
❷	세 집합 $B-A$, X, B 사이의 포함 관계를 구할 수 있다.	30 %
❸	집합 X의 개수를 구할 수 있다.	40 %

18 전략 먼저 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합을 구한다.

풀이 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $(A\cup B)^C$이다.

이때

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=18+14-9=23$

이므로 구하는 원소의 개수는

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=25-23=2$

답 2

19 전략 주어진 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.

풀이 학생 전체의 집합을 U, 버스를 타고 등교하는 학생의 집합을 A, 지하철을 타고 등교하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=100$, $n(A)=58$, $n(B)=45$,

$n(A^C\cap B^C)=22$ ··· ❶

버스와 지하철 중 어느 것도 타지 않고 등교하는 학생의 집합

$\therefore n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$
$=100-22$
$=78$ ··· ❷

이때 버스와 지하철을 모두 타고 등교하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=58+45-78$
$=25$

따라서 구하는 학생 수는 25이다. ··· ❸

답 25

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 조건을 집합으로 나타내고 각 집합의 원소의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❷	$n(A\cup B)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	버스와 지하철을 모두 타고 등교하는 학생 수를 구할 수 있다.	30 %

Ⅱ. 집합과 명제

07 명제

15 명제와 조건

개념 41 명제

본책 117쪽

01 아름답다는 것의 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다. ×

02 많다는 것의 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다. ×

03 참인 문장이므로 명제이다. ○

04 거짓인 식이므로 명제이다. ○

05 x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다. ×

06 x의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다. ×

07 참인 문장이므로 명제이다. ○

08 거짓인 문장이므로 명제이다. ○

09 참 **10** 거짓

11 가장 작은 소수는 2이다. 거짓

12 참 **13** 정의

14 정리 **15** 정리

16 정의

개념 42 조건과 진리집합

본책 118쪽

17 참인 문장이므로 명제이다. 명제

18 x의 값에 따라 참, 거짓이 정해지므로 조건이다. 조건

19 거짓인 식이므로 명제이다. 명제

20 x의 값에 따라 참, 거짓이 정해지므로 조건이다. 조건

21 거짓인 문장이므로 명제이다. 명제

22 $\{2, 3, 5\}$ 3, 3

23 $\{1, 2, 3, 6\}$

베이직쎈 BOX

한라산의 높이는 약 1947 m이고, 지리산의 높이는 약 1915 m이다.

$a>0$일 때
① $|x|<a$ ➡ $-a<x<a$
② $|x|>a$ ➡ $x<-a$ 또는 $x>a$

정삼각형의 한 내각의 크기는 $60°$이다.

유리수와 순환소수의 관계
① 정수가 아닌 유리수는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있다.
② 유한소수와 순환소수는 모두 유리수이다.

마름모의 정의
➡ 네 변의 길이가 모두 같은 사각형

네 변의 길이가 같은 사각형은 마름모이다.

24 $\{1, 2, 3, 4\}$

25 $x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{1, 2\}$ $\{1, 2\}$

26 $x^2-4\geq 0$에서 $(x+2)(x-2)\geq 0$
$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 2$
따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

27 $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

28 $3x-1\leq 14$에서 $3x\leq 15$
$\therefore x\leq 5$
따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

29 $x^2-5x-6=0$에서 $(x+1)(x-6)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$
따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{6\}$ $\{6\}$

30 $|x+2|<5$에서 $-5<x+2<5$
$\therefore -7<x<3$
따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{1, 2\}$ $\{1, 2\}$

31 $x^2-7x+10<0$에서 $(x-2)(x-5)<0$
$\therefore 2<x<5$
따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{3, 4\}$ $\{3, 4\}$

개념 43 명제와 조건의 부정

본책 119쪽

'~이다.'의 부정은 '~가 아니다.'

'='의 부정은 '≠'

32 15는 3의 배수가 아니다.

33 $4+13\neq 19$

34 π는 무리수가 아니다.

35 $3(3x^2-2)\neq 9x^2+6$

36 직사각형은 정사각형이 아니다.

37 1은 소수이다.

38 2는 5보다 작지 않다.

39 x는 음수가 아니다.

베이직쎈 BOX

40 풀 x는 8의 배수가 아니다.

41 풀 x는 정수가 아니다.

42 풀 $x \neq 4$

43 풀 $x^2-1 \geq 0$

'$<$'의 부정은 '$\geq$'

44 풀 x는 10보다 크지 않다.

45 풀 $x^2-x-2<0$

'$\geq$'의 부정은 '$<$'

46 (1) 2와 5의 최대공약수는 1이므로 2와 5는 서로소이다.
즉 주어진 명제는 참이다.
(2) 주어진 명제의 부정은
'2와 5는 서로소가 아니다.'
(3) 명제가 참이므로 명제의 부정은 거짓이다.
풀 풀이 참조

명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.

47 (1) $\sqrt{9}=3$이므로 $\sqrt{9}$는 유리수이다.
즉 주어진 명제는 거짓이다.
(2) 주어진 명제의 부정은
'$\sqrt{9}$는 유리수이다.'
(3) 명제가 거짓이므로 명제의 부정은 참이다.
풀 풀이 참조

48 (1) $21=3\times7$이므로 21은 소수가 아니다.
즉 주어진 명제는 거짓이다.
(2) 주어진 명제의 부정은
'21은 소수가 아니다.'
(3) 명제가 거짓이므로 명제의 부정은 참이다.
풀 풀이 참조

49 풀 (1) 참 (2) 정사각형은 마름모가 아니다. (3) 거짓

50 풀 $\{2, 4, 6, 8\}$
참고 $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$

전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

51 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1, 2, 4, 8\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{3, 5, 6, 7\}$ 풀 $\{3, 5, 6, 7\}$

52 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{3, 6\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
풀 $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

53 $3x-5=10$에서 $3x=15$
$\therefore x=5$
즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{5\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
풀 $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

54 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{6, 7, 8\}$
풀 $\{6, 7, 8\}$

55 $x^2-7x+12=0$에서 $(x-3)(x-4)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=4$
즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{3, 4\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$
풀 $\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$

56 $x^2-2x-8 \geq 0$에서 $(x+2)(x-4) \geq 0$
$\therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 4$
즉 주어진 조건의 진리집합을 P라 하면
$P=\{4, 5, 6, 7, 8\}$
따라서 주어진 조건의 부정의 진리집합은
$P^C=\{1, 2, 3\}$
풀 $\{1, 2, 3\}$

개념 44 조건 'p 또는 q'와 'p 그리고 q' 본책 121쪽

57 풀 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
참고 $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\cup$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

58 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2, 3, 5, 7\}$, $Q=\{4, 8\}$
따라서 조건 'p 또는 q'의 진리집합은
$P \cup Q=\{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
풀 $\{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

59 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$x^2-8x+15=0$에서 $(x-3)(x-5)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=5$
$\therefore P=\{3, 5\}$
$|x-5|=1$에서 $x-5=-1$ 또는 $x-5=1$
$\therefore x=4$ 또는 $x=6$
$\therefore Q=\{4, 6\}$
따라서 조건 'p 또는 q'의 진리집합은
$P \cup Q=\{3, 4, 5, 6\}$ 풀 $\{3, 4, 5, 6\}$

60 풀 $\{4, 5, 6\}$
참고 $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $\cap$, $\{4, 5, 6\}$

61 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 5, 10\}$, $Q=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은
$P\cap Q=\{2, 10\}$ 답 $\{2, 10\}$

62 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{6, 7, 8, 9\}$
$|x-4|<3$에서 $-3<x-4<3$
$\therefore 1<x<7$
$\therefore Q=\{2, 3, 4, 5, 6\}$
따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은
$P\cap Q=\{6\}$ 답 $\{6\}$

63 답 x는 소수도 아니고 합성수도 아니다.

64 답 $x=3$ 또는 $x=7$

65 답 $x<2$ 또는 $x\geq5$

'$a\geq b$'의 부정은 '$a<b$'
'$a<b$'의 부정은 '$a\geq b$'

66 답 $4\leq x\leq8$

자신감 UP! 기본&핵심 유형 본책 122쪽

01 ① 3은 홀수이므로 거짓인 명제이다.
② 참인 명제이다.
③ 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.
④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
⑤ 거짓인 명제이다.
답 ④

항등식은 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.

02 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
ㄴ. $54\div9=6<7$이므로 거짓인 명제이다.
ㄷ. 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.
ㄹ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
이상에서 참인 명제인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

03 ③ 참인 명제이다.
⑤ $x^2-2>7+x^2$에서 $-2>7$이므로 거짓인 명제이다.
답 ③, ⑤

04 답 ③

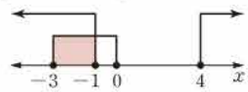
05 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.
① 15는 소수가 아니다. (참)
② $11+3\geq14$ (참)
③ $(-1)^4+1\neq-1^4+1$ (참)
④ $\varnothing\not\subset\{1, 3\}$ (거짓)
⑤ 6은 16의 약수가 아니다. (참)
답 ④

다른 풀이 명제가 참이면 그 부정은 거짓이다. 주어진 명제 ①, ②, ③, ⑤는 거짓, ④는 참이므로 명제의 부정이 거짓인 것은 ④이다.

베이직쎈 BOX

두 조건 p, $\sim q$를 수직선 위에 나타낸 후 공통부분을 찾는다.

06 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'
'$\sim q$: $x\leq-1$ 또는 $x\geq4$'이므로 'p 그리고 $\sim q$'는 오른쪽 그림에서



$-3\leq x\leq-1$
따라서 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은
$-3\leq x\leq-1$ 답 $-3\leq x\leq-1$

$ab\neq0$에서 $a\neq0$이고 $b\neq0$

07 ㄱ. $ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$이므로
$\sim p$: $a\neq0$이고 $b\neq0$
ㄴ. $a^2+b^2=0$에서 $a=0$이고 $b=0$이므로
$\sim p$: $a\neq0$ 또는 $b\neq0$
이상에서 조건 p와 그 부정 $\sim p$가 바르게 연결된 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

조건 p가 참이 되게 하는 원소를 찾는다.

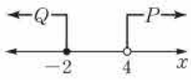
08 $x^2-5x-14<0$에서 $(x+2)(x-7)<0$
$\therefore -2<x<7$
따라서 조건 p의 진리집합은 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 구하는 원소의 개수는 6이다. 답 ②

09 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{1, 2, 5, 10\}$
따라서 조건 $\sim p$의 진리집합은
$P^C=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$
이므로 구하는 합은
$3+4+6+7+8+9=37$ 답 37

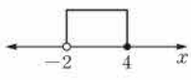
x는 10의 약수가 아니다.

10 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 3, 5, \cdots, 45\}$, $Q=\{5, 10, 15, \cdots, 45\}$
따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은
$P\cap Q=\{5, 15, 25, 35, 45\}$
답 $\{5, 15, 25, 35, 45\}$

11 두 진리집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

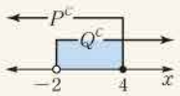


또 조건 '$-2<x\leq4$'의 진리집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 집합은



$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$ 답 ⑤

'$\sim p$이고 $\sim q$'



드모르간의 법칙
$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$
$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

12 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$x^3-4x=0$에서 $x(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
즉 $P=\{-2, 0, 2\}$이므로 $P^C=\{-3, -1, 1, 3\}$
$x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$
$\therefore Q=\{-3, 2\}$
따라서 조건 '$\sim p$ 또는 q'의 진리집합은
$P^C\cup Q=\{-3, -1, 1, 3\}\cup\{-3, 2\}$
$=\{-3, -1, 1, 2, 3\}$ 답 ③

16 명제 $p \longrightarrow q$

개념 45 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓 본책 124쪽

01 가정: a, b가 짝수이다.
결론: $a+b$는 짝수이다.

02 가정: $x=3$이다.
결론: $2x+3=9$이다.

03 가정: a가 홀수이다.
결론: a^2은 홀수이다.

04 가정: $x<4$이다.
결론: $x<3$이다.

05 가정: x가 실수이다.
결론: $x^2>0$이다.

06 가정: n이 홀수이다.
결론: $n+1$은 짝수이다.

07 참  $-1<x<1$, $x\le 2$, $\subset$, 참

08 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|x$는 자연수$\}$, $Q=\{x|x$는 정수$\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다. 참

09 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $Q=\{1, 2, 5, 10\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
거짓

10 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{-4, 4\}$, $Q=\{4\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
거짓

11 거짓  $>$, $>$

12 [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 홀수가 아니므로 주어진 명제는 거짓이다. 거짓

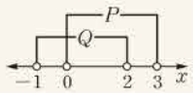
13 (홀수)×(홀수)=(홀수)이므로 주어진 명제는 참이다. 참

14 [반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x\neq 0$이므로 주어진 명제는 거짓이다. 거짓

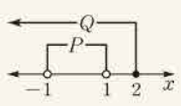
15 $x=1$이면 $x^2+3x-4=1^2+3\cdot 1-4=0$
따라서 주어진 명제는 참이다. 참

16 $x=-2$이면
$(x+1)(x-2)=(-2+1)(-2-2)=4>0$
따라서 주어진 명제는 참이다. 참

베이직쎈 BOX



$A\subset B$와 같은 표현
$A\subset B \Rightarrow A\cup B=B$
$\Rightarrow A\cap B=A$
$\Rightarrow A-B=\varnothing$
$\Rightarrow A\cap B^C=\varnothing$
$\Rightarrow B^C\subset A^C$
$\Rightarrow B^C-A^C=\varnothing$



$x^2=16$에서 $x=\pm 4$
$\therefore P=\{-4, 4\}$

(홀수)×(홀수)=(홀수)
(홀수)×(짝수)=(짝수)
(짝수)×(짝수)=(짝수)

$x^2+2x+1\le 0$에서
$(x+1)^2\le 0$

17 두 조건 '$0<x<3$', '$-1<x<2$'의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|0<x<3\}$, $Q=\{x|-1<x<2\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다. 거짓

18 [반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x+y<0$이지만 $x>0$이므로 주어진 명제는 거짓이다. 거짓

19 ○

20 $P\subset Q$이므로 $P\cup Q=Q$ ×

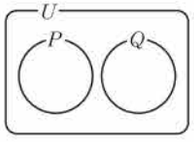
21 $P\subset Q$이므로 $P\cap Q=P$ ○

22 $P\subset Q$이므로 $P-Q=\varnothing$ ○

23 ○

24 $P\subset Q^C$이므로 $P\cap Q=\varnothing$ ○

25 $P\cap Q=\varnothing$이므로 두 집합 P, Q를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
$\therefore P\cup Q\neq P$ ×



26 $P\subset Q^C$이므로 $P\cap Q^C=P$ ○

개념 46 '모든'이나 '어떤'이 있는 명제 본책 126쪽

27 참

28 [반례] $1^2=1$, $3^2=9$, $5^2=25$이고 1, 9, 25는 홀수이므로 주어진 명제는 거짓이다. 거짓

29 참

30 8의 배수인 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다. 거짓

31 참

32 [반례] $x=\pi$이면 $x^2=\pi^2$이고 π^2은 무리수이므로 주어진 명제는 거짓이다. 거짓

33 $\sqrt{x}<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다. 거짓

34 $x=-1$이면 $x^2+2x+1\le 0$이므로 주어진 명제는 참이다. 참

35 $x^2=x+3$, 즉 $x^2-x-3=0$에서
$x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$
따라서 주어진 명제는 참이다. 참

36 어떤 실수 x에 대하여 $x^2-10\neq0$이다.

37 어떤 정삼각형은 이등변삼각형이 아니다.

38 모든 자연수 x에 대하여 $x^2\neq4$이다.

39 모든 실수 x에 대하여 $|x-2|\leq0$이다.

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 127쪽

01 ④ [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 $x+1=3$으로 짝수가 아니다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다. 답 ④

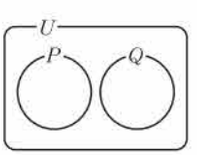
02 ④ 42는 3의 배수이지만 4의 배수가 아니다. 답 ④

3의 배수이지만 4의 배수가 아닌 것을 찾는다.

03 ㄷ. [반례] $x=-1$이면 $x^2=1>0$이지만 $x<0$이므로 명제 $p\longrightarrow q$는 거짓이다.
이상에서 명제 $p\longrightarrow q$가 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

04 명제 $\sim q\longrightarrow p$가 참이므로 $Q^C\subset P$
$\therefore P^C\subset Q$ 답 ②

05 $P\cap Q=\varnothing$이므로 두 집합 P, Q를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

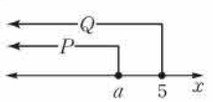


ㄴ. $P\subset Q^C$이므로 명제 $p\longrightarrow\sim q$는 참이다.
ㄷ. $Q\subset P^C$이므로 명제 $q\longrightarrow\sim p$는 참이다.
이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

06 ① $R\subset P$이므로 명제 $r\longrightarrow p$는 참이다.
② $R\subset Q$이므로 명제 $r\longrightarrow q$는 참이다.
③ $R\subset P$에서 $P^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim p\longrightarrow\sim r$는 참이다.
④ $R\subset Q$에서 $Q^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim q\longrightarrow\sim r$는 참이다.
⑤ $R^C\not\subset Q^C$이므로 명제 $\sim r\longrightarrow\sim q$는 거짓이다. 답 ⑤

'모든'이 있는 명제는 만족시키지 않는 것이 하나만 존재해도 거짓이다.

07 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|x\leq a\}$, $Q=\{x|x\leq5\}$
명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



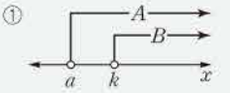
$a\leq5$
따라서 실수 a의 최댓값은 5이다. 답 5

'어떤'이 있는 명제는 만족시키는 것이 하나도 존재하지 않으면 거짓이다.

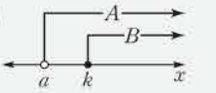
베이직쎈 BOX

베쎈 TIP

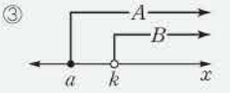
$B\subset A$가 되도록 하는 a의 값의 범위

① 

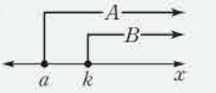
➡ $a\leq k$

② 

➡ $a<k$

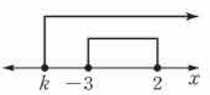
③ 

➡ $a\leq k$

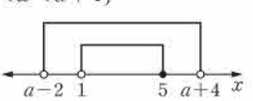
④ 

➡ $a\leq k$

08 주어진 명제가 참이 되려면
$\{x|-3\leq x\leq2\}\subset\{x|x\geq k\}$
이어야 하므로 오른쪽 그림에서
$k\leq-3$ 답 $k\leq-3$



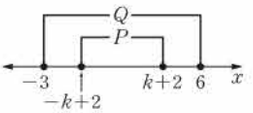
09 주어진 명제가 참이 되려면
$\{x|1<x\leq5\}\subset\{x|a-2<x<a+4\}$
이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-2\leq1$, $a+4>5$
$\therefore 1<a\leq3$ 답 $1<a\leq3$

$a-2\leq1$에서
$a\leq3$ … ㉠
$a+4>5$에서
$a>1$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $1<a\leq3$

10 $|x-2|\leq k$에서 $-k\leq x-2\leq k$
$\therefore -k+2\leq x\leq k+2$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-k+2\leq x\leq k+2\}$, $Q=\{x|-3\leq x\leq6\}$
명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-k+2\geq-3$, $k+2\leq6$
$\therefore k\leq4$
따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 ④

$-k+2\geq-3$에서
$k\leq5$ … ㉠
$k+2\leq6$에서
$k\leq4$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $k\leq4$

11 ① 2는 짝수이고, 소수이다.
② 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4=-3<0$
이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1>0$이다.
③ $x\leq0$이면 $|x|+x=-x+x=0$
④ $x=3$이면 $x^2=9$
⑤ [반례] $x=1$이면 $2x-1=2\cdot1-1=1$이다. 답 ⑤

12 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
① $x-2$의 값은 -1, 0, 1, 2, 3이므로 모든 x에 대하여 $x-2<4$이다.
② $x=5$이면 $x(x-5)=0$
③ $3x-1$의 값은 2, 5, 8, 11, 14이므로 모든 x에 대하여 $3x-1\geq2$이다.
④ x^2의 값은 1, 4, 9, 16, 25이므로 $x^2<1$을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.
⑤ 모든 x에 대하여 $x>0$이므로 $|x|=x$이다. 답 ④

베이직쎈 BOX

다른 풀이 ① $x-2<4$, 즉 $x<6$이므로 모든 x에 대하여 $x-2<4$이다.

③ $3x-1\geq 2$, 즉 $x\geq 1$이므로 모든 x에 대하여 $3x-1\geq 2$이다.

④ 5 이하의 자연수 x에 대하여 $x^2\geq 1$이므로 $x^2<1$을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

13 (1) 주어진 명제의 부정은

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2<0$이다.'

$x^2<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

(2) 주어진 명제의 부정은

'어떤 자연수 x에 대하여 $x^2-2x-3=0$이다.'

$x=3$이면

$x^2-2x-3=3^2-2\cdot 3-3=0$

따라서 주어진 명제의 부정은 참이다.

(3) 주어진 명제의 부정은

'모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2\geq x$이다.'

[반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $x^2=\frac{1}{4}$이고 $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$이므로 $x^2<x$이다.

따라서 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

(4) 주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq 0$이다.'

$x^2+1=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

답 (1) 거짓 (2) 참 (3) 거짓 (4) 참

이 방정식의 해를 구하여 자연수인 해가 있는지 확인한다.

모든 실수 x에 대하여 $x^2\geq 0$, $x^2+1\geq 1$
$\therefore x^2+1\neq 0$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP!

본책 129쪽

01 전략 명제 ➔ 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식

풀이 ①, ③ 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

②, ④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

⑤ $x-1>x-3$에서 $-1>-3$

즉 모든 x에 대하여 성립하므로 참인 명제이다.

답 ⑤

02 전략 각 명제의 부정을 구하고 참, 거짓을 판별한다.

풀이 각 명제의 부정과 그 참, 거짓은 다음과 같다.

ㄱ. 0은 자연수가 아니다. (참)

ㄴ. π는 유리수이다. (거짓)

ㄷ. 직사각형은 평행사변형이 아니다. (거짓)

ㄹ. 16은 3의 배수가 아니다. (참)

이상에서 부정이 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

03 전략 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

풀이 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{2, 3, 5, 7, 11\}$

이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은

$P^C=\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$ 답 ④

04 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$이다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$,

$Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

따라서 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은

$P\cap Q=\{4, 8, 12, 24\}$

이므로 구하는 원소의 개수는 4이다. 답 ③

05 전략 반례를 찾아 명제가 거짓임을 보인다.

풀이 ① [반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x\neq 1$이다.

② [반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $|x|+|y|\neq 0$이다.

③ $|x|<1$이면 $-1<x<1$이므로 $x^2<1$이다.

④ [반례] $x=2$, $y=-1$이면 $x+y>0$이지만 $xy<0$이다.

⑤ [반례] $x=1$, $y=1$, $z=2$이면 $(x-y)(y-z)=0$이지만 $x=y\neq z$이다.

답 ③

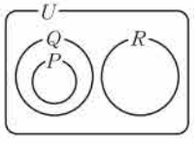
06 전략 명제 $p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 p는 만족시키지만 q는 만족시키지 않는다.

풀이 ④ $x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$이면 x, y가 모두 무리수이지만 $x+y=0$이므로 $x+y$는 무리수가 아니다.

답 ④

07 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P\subset Q$이면 명제 $p\longrightarrow q$가 참이다.

풀이 주어진 조건을 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$P\subset Q$, $P\subset R^C$, $Q\subset R^C$, $R\subset Q^C$

따라서 명제 $p\longrightarrow q$, $p\longrightarrow\sim r$, $q\longrightarrow\sim r$, $r\longrightarrow\sim q$는 모두 참이다.

그런데 $R\not\subset P$이므로 명제 $r\longrightarrow p$는 거짓이다.

답 ④

08 전략 주어진 조건을 만족시키도록 세 조건의 진리집합을 수직선 위에 나타낸다.

풀이 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

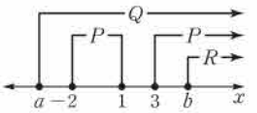
$P=\{x|-2\leq x\leq 1$ 또는 $x\geq 3\}$,

$Q=\{x|x\geq a\}$, $R=\{x|x\geq b\}$

두 명제 $p\longrightarrow q$, $r\longrightarrow p$가 모두 참이 되려면

$P\subset Q$, $R\subset P$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a \le -2$, $b \ge 3$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2, 실수 b의 최솟값은 3이므로 구하는 곱은

$-2 \cdot 3 = -6$ ①

09 전략 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'임을 이용한다.

풀이 주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2+3x+4 \le 0$이다.'

'>'의 부정은 '≤'

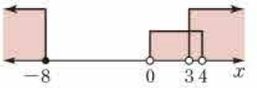
②

10 전략 두 조건 p, q에 대하여 '$\sim p$ 그리고 q'의 부정은 'p 또는 $\sim q$'이다.

풀이 '$\sim p$ 그리고 q'의 부정은

'p 또는 $\sim q$'

'$\sim q$: $x \le -8$ 또는 $x > 3$'이므로 'p 또는 $\sim q$'는 오른쪽 그림에서



$x \le -8$ 또는 $x > 0$

따라서 조건 '$\sim p$ 그리고 q'의 부정은

$x \le -8$ 또는 $x > 0$

$x \le -8$ 또는 $x > 0$

11 전략 두 조건 p, $\sim q$의 진리집합을 구한 후 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합을 구한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$|x-3| \le 5$에서

$-5 \le x-3 \le 5$

$\therefore -2 \le x \le 8$

$\therefore P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ··· ❶

'$\sim q$: $x^2-11x+18 \le 0$'이므로 $x^2-11x+18 \le 0$에서

$(x-2)(x-9) \le 0$

$\therefore 2 \le x \le 9$

$\therefore Q^C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ··· ❷

따라서 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은

$P \cup Q^C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ ··· ❸

45

단계	채점 기준	비율
❶	조건 p의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❷	조건 $\sim q$의 진리집합을 구할 수 있다.	30 %
❸	조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	40 %

12 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P-Q$의 원소이다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $Q = \{2, 3, 5, 7\}$



명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P-Q$의 원소이다.

이때 $P-Q = \{1, 9\}$이므로 구하는 반례의 개수는 2이다.

2

13 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C \subset P$이어야 한다.

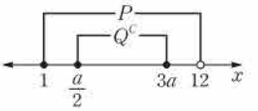
풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P = \{x \mid 1 \le x < 12\}$, $Q = \left\{x \middle| x < \frac{a}{2} \text{ 또는 } x > 3a\right\}$

$Q^C = \left\{x \middle| \frac{a}{2} \le x \le 3a\right\}$이고, 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면

$Q^C \subset P$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$\frac{a}{2} \ge 1$, $3a < 12$

$\therefore 2 \le a < 4$

따라서 자연수 a는 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3 = 5$

5

$\frac{a}{2} \ge 1$에서 $a \ge 2$ ··· ㉠

$3a < 12$에서 $a < 4$ ··· ㉡

㉠, ㉡에서 $2 \le a < 4$

14 전략 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c \ge 0$이려면 $a > 0$, $b^2-4ac \le 0$이어야 한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4x+10 \ge k$, 즉 $x^2+4x+10-k \ge 0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2+4x+10-k = 0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4} = 2^2-(10-k) \le 0$ ··· ❶

$-6+k \le 0$

$\therefore k \le 6$ ··· ❷

따라서 실수 k의 최댓값은 6이다. ··· ❸

6

단계	채점 기준	비율
❶	이차방정식의 판별식을 이용할 수 있다.	50 %
❷	k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸	실수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

본책 130~133쪽

08 명제의 역과 대우

17 명제의 역과 대우

개념 47 명제의 역과 대우

본책 131쪽

01 역 **02** 대우

03 역 **04** 대우

05 역 **06** 대우

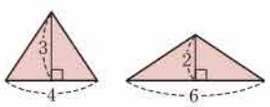
07 역: $x=1$이면 $x^2=1$이다. (참)
대우: $x\neq1$이면 $x^2\neq1$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이다.
풀이 참조

08 역: $x>0$이면 $x>1$이다. (거짓)
[반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $x>0$이지만 $x<1$이다.
대우: $x\leq0$이면 $x\leq1$이다. (참)
풀이 참조

09 역: $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
대우: $x\neq0$이고 $y\neq0$이면 $xy\neq0$이다. (참)
풀이 참조

10 역: 실수 a, b에 대하여 $a>0$ 또는 $b>0$이면 $a+b>0$이다. (거짓)
[반례] $a=1$, $b=-2$이면 $a+b=-1<0$이다.
대우: 실수 a, b에 대하여 $a\leq0$이고 $b\leq0$이면 $a+b\leq0$이다. (참)
풀이 참조

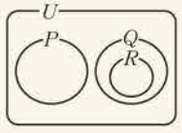
11 역: 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형이 합동이다. (거짓)
[반례] 다음 그림의 두 삼각형은 넓이는 같지만 합동은 아니다.



대우: 두 삼각형의 넓이가 같지 않으면 두 삼각형이 합동이 아니다. (참)
풀이 참조

12 역: x가 6의 약수이면 x는 12의 약수이다. (참)
대우: x가 6의 약수가 아니면 x는 12의 약수가 아니다. (거짓)
[반례] $x=4$이면 x는 6의 약수는 아니지만 12의 약수이다.
풀이 참조

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 두 명제 $p\longrightarrow\sim q$, $r\longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q^C$, $R\subset Q$
따라서 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



'$x=0$ 또는 $y=0$'의 부정

'$a>0$ 또는 $b>0$'의 부정

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot3=6$,
$\frac{1}{2}\cdot6\cdot2=6$

개념 48 삼단논법

본책 132쪽

13 q **14** q

15 r r, r, r

16 명제 $q\longrightarrow\sim p$가 참이므로 그 대우 $p\longrightarrow\sim q$도 참이다.
따라서 두 명제 $r\longrightarrow p$, $p\longrightarrow\sim q$가 모두 참이므로 명제 $r\longrightarrow\sim q$도 참이다. $\sim q$

17 명제 $r\longrightarrow\sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow\sim r$도 참이다.
따라서 두 명제 $q\longrightarrow\sim r$, $\sim r\longrightarrow p$가 모두 참이므로 명제 $q\longrightarrow p$도 참이다. p

18 명제 $p\longrightarrow\sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow\sim p$도 참이다. ○

19 명제 $r\longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q\longrightarrow\sim r$도 참이다. ○

20 × **21** ×

22 두 명제 $r\longrightarrow q$, $q\longrightarrow\sim p$가 모두 참이므로 명제 $r\longrightarrow\sim p$도 참이다. ○

23 × **24** ×

개념 49 충분조건과 필요조건

본책 133쪽

25 (1) $p\longrightarrow q$: 평행사변형이면 직사각형이다. (거짓)
(2) $q\longrightarrow p$: 직사각형이면 평행사변형이다. (참)
(3) $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
(1) 거짓 (2) 참 (3) 필요조건

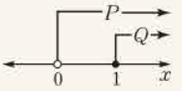
26 (1) $p\longrightarrow q$: $x=0$이고 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
(2) $q\longrightarrow p$: $xy=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다. (거짓)
[반례] $x=0$, $y=1$이면 $xy=0$이지만 $y\neq0$이다.
(3) $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
(1) 참 (2) 거짓 (3) 충분조건

27 (1) $p\longrightarrow q$: $x^2+y^2=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)
(2) $q\longrightarrow p$: $|x|+|y|=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)
(3) $p\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
(1) 참 (2) 참 (3) 필요충분조건

베이직쎈 BOX

28 (1) $x-1=2$에서 $x=3$
$\therefore P=\{3\}$
$(x+2)(x-3)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=3$
$\therefore Q=\{-2, 3\}$
(1) $P=\{3\}$, $Q=\{-2, 3\}$
(2) $P\subset Q$ (3) 충분조건

29 (1) $P=\{x|x>0\}$, $Q=\{x|x\geq 1\}$ (2) $Q\subset P$
(3) 필요조건



30 (1) $x^2=9$에서 $x=\pm 3$
$\therefore P=\{-3, 3\}$
$|x|=3$에서 $x=\pm 3$
$\therefore Q=\{-3, 3\}$
(1) $P=\{-3, 3\}$, $Q=\{-3, 3\}$
(2) $P=Q$ (3) 필요충분조건

31 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
충분조건

$p\longrightarrow q$: x가 무리수이면 x는 실수이다. (참)
$q\longrightarrow p$: x가 실수이면 x는 무리수이다. (거짓)

32 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
필요조건

$p\longrightarrow q$: x가 8의 약수이면 x는 4의 약수이다. (거짓)
$q\longrightarrow p$: x가 4의 약수이면 x는 8의 약수이다. (참)

33 $x^2=4$에서 $x=\pm 2$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
충분조건

34 $|x|<1$에서 $-1<x<1$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
필요조건

35 $|x|\geq 4$에서 $x\leq -4$ 또는 $x\geq 4$
$x^2\geq 16$에서 $x\leq -4$ 또는 $x\geq 4$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P=Q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
필요충분조건

$x=0$이면 $x^2-x=0^2-0=0$

36 4 p, q, $\subset$, 4

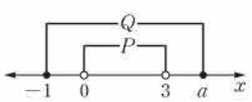
$|x|+|y|=0$이면 $x=y=0$
$\therefore xy=0$

37 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 명제 $p\longrightarrow q$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$이어야 한다.
따라서 $x-2=0$, 즉 $x=2$를 $x^2-5x+a=0$에 대입하면
$4-10+a=0$ $\therefore a=6$
6

$x<0$이면 $|x|>0$이므로 $|x|>x$

38 $a\leq 2$ p, q, $\subset$, $\leq$

39 p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 명제 $p\longrightarrow q$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P\subset Q$이어야 한다.
따라서 오른쪽 그림에서
$a\geq 3$
$a\geq 3$

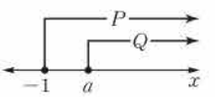


$x^2-2x+1=0$에서 $(x-1)^2=0$
$\therefore x=1$

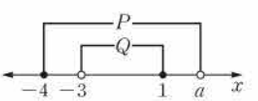
40 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 명제 $q\longrightarrow p$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $Q\subset P$이어야 한다.
따라서 $x=3$을 $x^2-ax+12=0$에 대입하면
$9-3a+12=0$ $\therefore a=7$
7

41 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 명제 $q\longrightarrow p$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $Q\subset P$이어야 한다.
따라서 $2x=4$, 즉 $x=2$를 $2x^2-x+a=0$에 대입하면
$8-2+a=0$ $\therefore a=-6$
-6

42 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 명제 $q\longrightarrow p$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $Q\subset P$이어야 한다.
따라서 오른쪽 그림에서
$a\geq -1$
$a\geq -1$



43 p가 q이기 위한 필요조건이 되려면 명제 $q\longrightarrow p$가 참이어야 하므로 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $Q\subset P$이어야 한다.
따라서 오른쪽 그림에서
$a>1$
$a>1$



자신감 UP! 기본&핵심 유형 본책 135쪽

01 ① 역: x가 9의 배수이면 x는 3의 배수이다. (참)
② 역: $x=0$이면 $x^2-x=0$이다. (참)
③ 역: $x>y$이면 $x^2>y^2$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x>y$이지만 $x^2<y^2$이다.
④ 역: $|x|+|y|=0$이면 $xy=0$이다. (참)
⑤ 역: $x<0$이면 $|x|>x$이다. (참)
③

02 주어진 명제의 대우는
'$xy<0$이면 $x<0$ 또는 $y<0$이다.'
이다.
이때 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
②

03 ㄱ. 역: $x^2-2x+1=0$이면 $x=1$이다. (참)
또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
ㄴ. 역: $x+y>2$이면 $x>1$이고 $y>1$이다. (거짓)
[반례] $x=4$, $y=-1$이면 $x+y>2$이지만 $y<1$이다.
또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
ㄷ. 역: $x+z=y+z$이면 $x=y$이다. (참)
또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

베이직쎈 BOX

이상에서 역과 대우가 모두 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

04 주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$x=2$이면 $x^2+ax-8=0$이다.'
도 참이다.
따라서 $x=2$를 $x^2+ax-8=0$에 대입하면
$4+2a-8=0$ $\therefore a=2$

답 2

05 주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$a\le k$이고 $b\le 3$이면 $a+b\le 7$이다.'
도 참이다.
$a\le k$, $b\le 3$에서 $a+b\le k+3$이므로
$k+3\le 7$ $\therefore k\le 4$
따라서 실수 k의 최댓값은 4이다.

답 4

06 명제 $p\longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q\longrightarrow\sim p$도 참이다.
또 명제 $r\longrightarrow\sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow\sim r$도 참이다.
즉 두 명제 $p\longrightarrow q$, $q\longrightarrow\sim r$가 참이므로 명제 $p\longrightarrow\sim r$가 참이고 그 대우 $r\longrightarrow\sim p$도 참이다.
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $\sim r\longrightarrow\sim q$이다.

답 ⑤

07 ㄴ, ㄷ. 두 명제 $r\longrightarrow p$, $p\longrightarrow\sim q$가 모두 참이므로 명제 $r\longrightarrow\sim q$가 참이고 그 대우 $q\longrightarrow\sim r$도 참이다.
이상에서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

08 ① $x^2-1=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$
$x^3-x=0$에서 $x(x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② [$q\longrightarrow p$의 반례] $x=1$, $y=-1$, $z=0$이면 $xz=yz$이지만 $x\ne y$이다.
따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ [$q\longrightarrow p$의 반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 $x+y$는 유리수이지만 x, y는 유리수가 아니다.
따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
④ $x^2\le 0$에서 $x=0$
따라서 $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
⑤ [$p\longrightarrow q$의 반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x+y=0$이지만 $x\ne 0$, $y\ne 0$이다.
따라서 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 ⑤

$xy>0$이면 $x\ne 0$, $y\ne 0$이므로
$x^2>0$, $y^2>0$
$\therefore x^2+y^2>0$

$x=y$이면 $xz=yz$이다. (참)

x, y가 유리수이면 $x+y$가 유리수이다. (참)

$x=0$이고 $y=0$이면 $x+y=0$이다. (참)

09 ㄱ. $ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$
$a=0$이고 $b=0\Longrightarrow a=0$ 또는 $b=0$
따라서 $ab=0$은 $a=0$이고 $b=0$이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. $a-b=0$이면 $a=b$
$a=0$이고 $b=0\Longrightarrow a=b$
따라서 $a-b=0$은 $a=0$이고 $b=0$이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $a^2+b^2=0\Longleftrightarrow a=0$이고 $b=0$
ㄹ. $a+bi=0\Longleftrightarrow a=0$이고 $b=0$
이상에서 '$a=0$이고 $b=0$'이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄷ, ㄹ의 2개이다.

답 2

10 ① $x^2=y^2$이면 $x=y$ 또는 $x=-y$
따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② $xy<0$이면 $x>0$, $y<0$ 또는 $x<0$, $y>0$
따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ [$p\longrightarrow q$의 반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy<0$이다.
따라서 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
④ $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
⑤ [$q\longrightarrow p$의 반례] $x=1$, $y=1$이면 $(x+y)^2\ge 0$이지만 $x\ne 0$이고 $y\ne 0$이다.
따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

답 ④

11 p는 q이기 위한 충분조건이므로
$p\Longrightarrow q$
p는 r이기 위한 필요조건이므로
$r\Longrightarrow p$
$r\Longrightarrow p$, $p\Longrightarrow q$이므로
$r\Longrightarrow q$
이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

12 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로
$p\Longrightarrow\sim r$
$p\Longrightarrow\sim r$이므로
$r\Longrightarrow\sim p$
r는 q이기 위한 필요조건이므로
$q\Longrightarrow r$
$q\Longrightarrow r$이므로
$\sim r\Longrightarrow\sim q$
$q\Longrightarrow r$, $r\Longrightarrow\sim p$이므로
$q\Longrightarrow\sim p$
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $\sim q\longrightarrow\sim p$이다.

답 ③

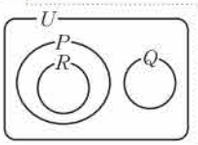
베이직쎈 BOX

13 ㄱ. $p \Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로
$q \Longrightarrow r$
따라서 q는 r이기 위한 충분조건이다.
ㄷ. $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이므로
$p \Longrightarrow r$
따라서 r는 p이기 위한 필요조건이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. ⑤

14 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$
r는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset R$
$\therefore P \subset Q \subset R$ ①

15 ① $P \subset R$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.
④ $Q \subset P^C$이므로 $\sim p$는 q이기 위한 필요조건이다.
⑤ $R^C \subset Q^C$이므로 $\sim r$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다. ⑤

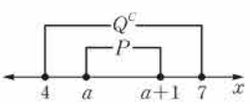
16 $\sim p$는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P^C$
r는 p이기 위한 충분조건이므로 $R \subset P$
따라서 세 집합 P, Q, R를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $P \cap Q = \varnothing$
② $P \cap R = R$
③ $P \cap R^C = P - R \neq \varnothing$
④ $Q - R = Q$
⑤ $Q^C \cup R = Q^C \neq U$ ①

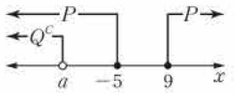
17 $x+1=0$, 즉 $x=-1$이 $x^2+ax+b=0$이기 위한 필요충분조건이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해는 -1뿐이어야 한다.
중근 $x=-1$을 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$(x+1)^2=0$, 즉 $x^2+2x+1=0$
따라서 $a=2$, $b=1$이므로
$a+b=3$ 3

18 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $\sim p$가 q이기 위한 필요조건이므로
$Q \subset P^C$ $\therefore P \subset Q^C$
이때 $P=\{x \mid a \le x \le a+1\}$, $Q^C=\{x \mid 4 \le x \le 7\}$이므로 오른쪽 그림에서



$a \ge 4$, $a+1 \le 7$
$\therefore 4 \le a \le 6$
따라서 정수 a는 4, 5, 6이므로 구하는 합은
$4+5+6=15$ 15

19 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $\sim q$가 p이기 위한 충분조건이므로
$Q^C \subset P$
$|x-2| \ge 7$에서 $x-2 \le -7$ 또는 $x-2 \ge 7$
$\therefore x \le -5$ 또는 $x \ge 9$
$\therefore P=\{x \mid x \le -5 \text{ 또는 } x \ge 9\}$
$Q=\{x \mid x \ge a\}$이므로 $Q^C=\{x \mid x < a\}$
따라서 오른쪽 그림에서



$a \le -5$
이므로 실수 a의 최댓값은
-5이다. -5

자연수 k에 대하여
홀수는 $2k-1$,
짝수는 $2k$
로 나타낼 수 있다.

$A \cap B = \varnothing$과 같은 표현
$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A - B = A$
$\Rightarrow B - A = B$
$\Rightarrow A \subset B^C$
$\Rightarrow B \subset A^C$

$A \subset B$와 같은 표현
$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
$\Rightarrow A \cap B = A$
$\Rightarrow A - B = \varnothing$
$\Rightarrow A \cap B^C = \varnothing$
$\Rightarrow B^C \subset A^C$

$Q=\{x \mid x < 4 \text{ 또는 } x > 7\}$
이므로
$Q^C=\{x \mid 4 \le x \le 7\}$

18 여러 가지 증명법

개념 50 명제의 증명

본책 138쪽

01 자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 n^2도 홀수이다., $2k-1$, $2k-1$, $2k^2-2k$, $2k^2-2k$, 홀수, 대우

02 주어진 명제의 대우는
'자연수 n에 대하여 n이 짝수이면 n^2도 짝수이다.'
n이 짝수이면 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로
$n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$
이때 $2k^2$은 자연수이므로 n^2은 짝수이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 풀이 참조

03 주어진 명제의 대우는
'두 실수 x, y에 대하여 $x<0$이고 $y<0$이면 $x+y<0$이다.'
$x<0$, $y<0$, 즉 두 실수 x, y가 음수이면 $x+y$도 음수이므로 $x+y<0$이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 풀이 참조

04 유리수, 2, 2, 2, 2, 서로소

05 $1+\sqrt{2}$가 유리수라고 가정하면
$1+\sqrt{2}=a$ (a는 유리수)
로 놓을 수 있다.
즉 $\sqrt{2}=a-1$이고 유리수끼리의 뺄셈의 결과는 유리수이므로 $a-1$은 유리수이다.
그런데 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니므로 모순이다.
따라서 $1+\sqrt{2}$는 유리수가 아니다. 풀이 참조

06 a, b가 모두 홀수라고 가정하면
$a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)
로 나타낼 수 있다.
이때
$ab=(2m-1)(2n-1)=2(2mn-m-n)+1$
이고 $2mn-m-n$은 0 또는 자연수이므로 ab는 홀수이다.
따라서 ab가 짝수라는 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다. 풀이 참조

개념 51 절대부등식

본책 139쪽

07 $2x+5>0$에서 $x>-\frac{5}{2}$ 풀 ×

08 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이다. 풀 ○

09 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이다. 풀 ○

10 $-|x-7|<0$에서 $|x-7|>0$
$x=7$이면 성립하지 않으므로 절대부등식이 아니다. 풀 ×

$x=7$이면 $|x-7|=0$

11 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이다. 풀 ○

12 $x^2+1>2x$에서 $x^2-2x+1>0$
$\therefore (x-1)^2>0$
$x=1$이면 성립하지 않으므로 절대부등식이 아니다. 풀 ×

$x=1$이면 $(x-1)^2=0$

13 풀 2, $a-b$, $a-b$, 0, $a=b$

14 $a^2+2ab+2b^2=(a^2+2ab+b^2)+b^2$
$=(a+b)^2+b^2$
a, b가 실수이므로
$(a+b)^2\geq 0$, $b^2\geq 0$
$\therefore a^2+2ab+2b^2\geq 0$
여기서 등호는 $a+b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.
풀 풀이 참조

15 풀 $2ab$, $\geq$, $\geq$, $\geq$, $\geq$

16 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b-(a+b)$
$=2\sqrt{ab}>0$
$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$
그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a+b}>0$이므로
$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$
풀 풀이 참조

$a>0$, $b>0$이므로 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(홀수)×(홀수)=(홀수)
(홀수)×(짝수)=(짝수)
(짝수)×(짝수)=(짝수)

개념 52 여러 가지 절대부등식

본책 140쪽

17 풀 $\frac{3}{4}b^2$, $\frac{3}{4}b^2$, $\frac{3}{4}b^2$, $\geq$, 0, 0, 0, 0

18 풀 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\geq$, $\geq$, $\geq$, $\geq$, 0, 0, 0

19 풀 $2\sqrt{ab}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, 0, b

$a>0$, $b>0$이므로
$a+b-2\sqrt{ab}$
$=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$
$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

베이직쎈 BOX

$a=\frac{1}{a}$에서 $a^2=1$
$a>0$이므로 $a=1$

$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$에서 $a^2=b^2$
$a>0$, $b>0$이므로 $a=b$

$9a=\frac{4}{a}$에서 $a^2=\frac{4}{9}$
$a>0$이므로 $a=\frac{2}{3}$

20 풀 2 목표 2, 2, 1, 2

21 $\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)
따라서 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$의 최솟값은 2이다. 풀 2

22 $9a>0$, $\frac{4}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$9a+\frac{4}{a}\geq 2\sqrt{9a\cdot\frac{4}{a}}=12$
$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{2}{3}\text{일 때 성립}\right)$
따라서 $9a+\frac{4}{a}$의 최솟값은 12이다. 풀 12

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 141쪽

01 주어진 명제의 대우는
'$x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다.'
$x=0$이면 y의 값에 관계없이 $xy=0$이고, $y=0$이면 x의 값에 관계없이 $xy=0$이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 풀 풀이 참조

02 주어진 명제의 대우는
'자연수 x, y에 대하여 xy가 홀수이면 x^2+y^2은 짝수이다.'
xy가 홀수이면 x, y가 모두 홀수이므로
$x=2m-1$, $y=2n-1$ (m, n은 자연수)
로 나타낼 수 있다.
이때
$x^2+y^2=(2m-1)^2+(2n-1)^2$
$=4m^2-4m+1+4n^2-4n+1$
$=2(2m^2-2m+2n^2-2n+1)$
이고 $2m^2-2m+2n^2-2n+1$은 자연수이므로 x^2+y^2은 짝수이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 풀 풀이 참조

03 n이 3의 배수가 아니므로
$n=3k-1$ 또는 $n=\boxed{3k-2}$ (k는 자연수)
라 하면
(i) $n=3k-1$일 때,
$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$
$=3(\boxed{3k^2-2k})+1$

베이직쎈 BOX

(ii) $n=3k-2$일 때,

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$

$=3(\boxed{3k^2-4k+1})+1$

(i), (ii)에서 n^2은 3으로 나누면 나머지가 $\boxed{1}$인 자연수이므로 n이 3의 배수가 아니면 n^2도 $\boxed{3\text{의 배수}}$가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

∴ (가) $3k-2$ (나) $3k^2-2k$ (다) $3k^2-4k+1$

(라) 1 (마) 3의 배수

답 ③

04 답 (가) ≥ (나) ≥ (다) ≥

05 $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이라고 가정하자.

(i) $a\neq0$, $b=0$이면 $a^2>0$, $b^2=0$이므로 $a^2+b^2>0$

(ii) $a=0$, $b\neq0$이면 $a^2=0$, $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$

(iii) $a\neq0$, $b\neq0$이면 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$

이상에서 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\neq0$이므로 $a^2+b^2=0$이라는 가정에 모순이다.

따라서 주어진 명제는 참이다. 답 풀이 참조

06 a, b가 모두 짝수라고 가정하면

$a=2m$, $b=2n$ (m, n은 자연수)

으로 나타낼 수 있다.

이때 a, b의 최대공약수는 1이 아니므로 a, b가 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 주어진 명제는 참이다. 답 풀이 참조

2도 a, b의 공약수이다.

07 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$

$=(\boxed{bx-ay})^2\geq0$

∴ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

여기서 등호는 $bx-ay=0$, 즉 $\boxed{bx=ay}$일 때 성립한다.

∴ (가) $bx-ay$ (나) $bx=ay$

답 (가) $bx-ay$ (나) $bx=ay$

참고 (가)에 $ay-bx$를 써넣어도 된다.

이와 같은 부등식을 '코시-슈바르츠 부등식'이라 한다.

08 (ii) $|a|\geq|b|$일 때,

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=a^2-2ab+b^2-a^2+2|ab|-b^2$

$=2(\boxed{|ab|-ab})\geq0$ ($\because$ $|ab|\geq ab$)

∴ $|a-b|^2\geq(|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b|\geq0$, $|a|-|b|\geq0$이므로

$|a-b|\geq|a|-|b|$

(i), (ii)에서 $|a-b|\geq|a|-|b|$

여기서 등호는 $|a|\geq|b|$, $\boxed{ab\geq0}$일 때 성립한다.

∴ (가) $|ab|-ab$ (나) $ab\geq0$ 답 ③

모든 실수 A에 대하여 $|A|\geq A$

$|ab|=ab$에서 $ab\geq0$

09 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+3b\geq2\sqrt{2a\cdot3b}$

$=2\sqrt{6ab}$

$=2\sqrt{6\cdot6}=12$

(단, 등호는 $2a=3b$일 때 성립)

따라서 $2a+3b$의 최솟값은 12이다. 답 12

10 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+3b+\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=4a+\frac{4}{a}+3b+\frac{3}{b}$

$\geq2\sqrt{4a\cdot\frac{4}{a}}+2\sqrt{3b\cdot\frac{3}{b}}$

$=2\cdot4+2\cdot3=14$

(단, 등호는 $a=1$, $b=1$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 14이다. 답 ④

$4a=\frac{4}{a}$에서 $a^2=1$

$a>0$이므로 $a=1$

$3b=\frac{3}{b}$에서 $b^2=1$

$b>0$이므로 $b=1$

11 $a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{16}{a}\right)=a^2+16+1+\frac{16}{a^2}$

$=17+a^2+\frac{16}{a^2}$

$\geq17+2\sqrt{a^2\cdot\frac{16}{a^2}}$

$=17+2\cdot4=25$

이때 등호는 $a^2=\frac{16}{a^2}$일 때 성립하므로 $a^4=16=2^4$

$a>0$이므로 $a=2$ 답 2

12 $x>5$에서 $x-5>0$, $\frac{1}{x-5}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{1}{x-5}=x-5+\frac{1}{x-5}+5$

$\geq2\sqrt{(x-5)\cdot\frac{1}{x-5}}+5$

$=2\cdot1+5=7$

(단, 등호는 $x=6$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 7이다. 답 7

$x-5=\frac{1}{x-5}$에서 $(x-5)^2=1$

$x-5>0$이므로 $x-5=1$ ∴ $x=6$

학교 시험 기출로 실전 감각 UP! 본책 143쪽

01 전략 명제 $p\longrightarrow q$의 대우 ➡ $\sim q\longrightarrow\sim p$

풀이 주어진 명제의 대우는

'$xy<1$이면 $x<1$ 또는 $y<1$이다.' 답 ④

02 전략 명제와 그 대우의 참, 거짓은 일치함을 이용한다.

풀이 명제 $q\longrightarrow p$의 역은 $p\longrightarrow q$

따라서 명제 $p\longrightarrow q$가 참이므로 그 대우인 $\sim q\longrightarrow\sim p$도 참이다. 답 ⑤

베이직쎈 BOX

03 전략 각 명제의 역을 구한 후 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ① 역: $x^2>2$이면 $x>\sqrt{2}$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$이면 $x^2=4>2$이지만 $x<\sqrt{2}$이다.
② 역: $|x|=1$이면 $x=-1$이다. (거짓)
[반례] $x=1$이면 $|x|=1$이지만 $x\neq-1$이다.
③ 역: x가 홀수이면 x는 소수이다. (거짓)
[반례] $x=1$이면 x는 홀수이지만 소수가 아니다.
④ 역: $x=y$이면 $x^2=y^2$이다. (참)
⑤ 역: $x\le3$이면 $3x<9$이다. (거짓)
[반례] $x=3$이면 $x\le3$이지만 $3x=9$이다.

답 ④

04 전략 두 명제 $p\longrightarrow q$, $q\longrightarrow r$가 모두 참이면 명제 $p\longrightarrow r$도 참임을 이용한다.

풀이 명제 $\sim p\longrightarrow\sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow p$도 참이다.
또 명제 $p\longrightarrow\sim r$가 참이므로 그 대우 $r\longrightarrow\sim p$도 참이다.
즉 두 명제 $q\longrightarrow p$, $p\longrightarrow\sim r$가 모두 참이므로 명제 $q\longrightarrow\sim r$도 참이고 그 대우 $r\longrightarrow\sim q$도 참이다.
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 $p\longrightarrow q$이다.

답 ①

05 전략 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니려면 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이어야 한다.

풀이 ① $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
② $\{x|0<x<2\}\subset\{x|x<5\}$
따라서 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
③ $xy>0$이면 $x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$
$x^2+y^2\neq0$이면 $x\neq0$ 또는 $y\neq0$
따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
④ $xy=|xy|$이면 $xy\ge0$
따라서 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
⑤ $x^2=1$에서 $x=\pm1$
따라서 $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

답 ③

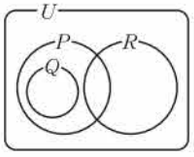
06 전략 두 집합 X, Y에 대하여 $X\cup Y=\varnothing$이면 $X=\varnothing$, $Y=\varnothing$임을 이용한다.

풀이 $(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$
$\Longleftrightarrow A-B=\varnothing$, $B-A=\varnothing$
$\Longleftrightarrow A\subset B$, $B\subset A$
$\Longleftrightarrow A=B$

답 ③

07 전략 주어진 조건을 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 벤 다이어그램으로 나타낸다.

풀이 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $Q\subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
ㄴ. $Q\subset R^C$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.
이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

08 전략 두 실수 A, B에 대하여 $A>B\Longleftrightarrow A-B>0$

풀이 $\dfrac{a}{1+a}-\dfrac{b}{1+b}=\dfrac{a(1+b)-\boxed{b(1+a)}}{(1+a)(1+b)}$
$=\dfrac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)}$
$=\dfrac{\boxed{a-b}}{(1+a)(1+b)}>0$
$\therefore\ \dfrac{a}{1+a}>\dfrac{b}{1+b}$
$\therefore$ (가) $b(1+a)$ (나) $a-b$

답 ④

$a>b>0$에서 $a-b>0$, $1+a>0$, $1+b>0$이므로 $\dfrac{a-b}{(1+a)(1+b)}>0$

09 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$4a+\dfrac{16}{a}+1\ge2\sqrt{4a\cdot\dfrac{16}{a}}+1$
$=2\cdot8+1=17$
이때 등호는 $4a=\dfrac{16}{a}$일 때 성립하므로 $a^2=4$
$a>0$이므로 $a=2$
따라서 $m=17$, $n=2$이므로
$m+n=19$

답 ⑤

10 전략 명제와 그 대우의 참, 거짓은 일치함을 이용한다.

풀이 (1) 주어진 명제의 대우는
'a 또는 b가 유리수가 아니면 ab는 유리수가 아니다.'
(2) [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 $ab=-2$
따라서 주어진 명제의 대우는 거짓이다.
(3) 주어진 명제의 대우가 거짓이므로 주어진 명제도 거짓이다.

답 풀이 참조

11 전략 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용한다.

풀이 명제 $\sim p\longrightarrow\sim q$가 참이 되려면 그 대우 $q\longrightarrow p$가 참이 되어야 한다. ··· ❶
따라서 명제 '$x-3=0$이면 $kx^2+2x+3=0$이다.'가 참이므로 $x-3=0$, 즉 $x=3$을 $kx^2+2x+3=0$에 대입하면
$9k+6+3=0$ $\therefore\ k=-1$ ··· ❷

답 -1

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 명제의 대우가 참이 되어야 함을 알 수 있다.	50 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	50 %

$p\longrightarrow q$: x가 4의 배수이면 x는 8의 배수이다. (거짓)
$q\longrightarrow p$: x가 8의 배수이면 x는 4의 배수이다. (참)

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $B\subset A$일 때, A와 B는 서로 같다고 한다.

12 전략 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이면 명제 $q \longrightarrow p$가 참이다.

풀이 $-a<x<a$가 $x^2+3x-10<0$이기 위한 필요조건이 되려면 명제 '$x^2+3x-10<0$이면 $-a<x<a$이다.'가 참이어야 한다.

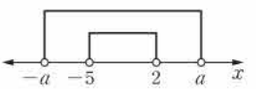
$x^2+3x-10<0$에서 $(x+5)(x-2)<0$

$\therefore -5<x<2$

즉 오른쪽 그림에서

$-a \le -5$, $a \ge 2$

$\therefore a \ge 5$



따라서 양수 a의 최솟값은 5이다. 답 5

13 전략 명제가 참임을 직접 증명하기 어려울 때에는 명제의 대우가 참임을 보인다.

풀이 주어진 명제의 대우는

'두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$가 홀수이면 a^2+b^2은 홀수이다.'

$a+b$가 홀수이면 a가 홀수, b가 짝수이거나 a가 짝수, b가 홀수이다.

(i) a가 홀수, b가 짝수일 때,

a^2은 홀수, b^2은 짝수이므로 a^2+b^2은 홀수이다.

(ii) a가 짝수, b가 홀수일 때,

a^2은 짝수, b^2은 홀수이므로 a^2+b^2은 홀수이다.

(i), (ii)에서 a^2+b^2은 홀수이므로 주어진 명제의 대우는 참이다.

따라서 주어진 명제도 참이다. 답 풀이 참조

14 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $x \ne 0$, $y \ne 0$에서 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2 \ge 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2|xy|$ (단, 등호는 $|x|=|y|$일 때 성립) ··· ❶

이때 $x^2+y^2=16$이므로

$16 \ge 2|xy|$, $|xy| \le 8$

$\therefore -8 \le xy \le 8$ ··· ❷

따라서 xy의 최댓값은 8, 최솟값은 -8이므로 구하는 곱은 -64이다. ··· ❸

답 -64

단계	채점 기준	비율
❶	산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.	50 %
❷	xy의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸	xy의 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

베이직쎈 BOX

$x=1$일 때, $y=2\cdot1-1=1$
$x=2$일 때, $y=2\cdot2-1=3$
$x=3$일 때, $y=2\cdot3-1=5$
$x=4$일 때, $y=2\cdot4-1=7$

(홀수)+(홀수)=(짝수)
(홀수)+(짝수)=(홀수)
(짝수)+(짝수)=(짝수)

X에서 Y로의 함수 ➡ X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응

X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 2, 4의 2개이므로 함수가 아니다.

X의 원소 2, 4에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

Y의 원소가 아니다.

a가 실수일 때, $\sqrt{a^2}=|a|$

$x^2=y^2$에서 $|x|=|y|$

Y의 원소가 아니다.

함수 $f: X \to Y$에 대하여
① 정의역: 집합 X
② 공역: 집합 Y
③ 치역: $\{f(x) \mid x \in X\}$

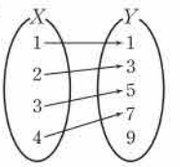
09 함수

19 함수

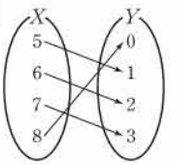
개념 53 함수

본책 146쪽

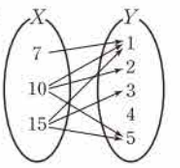
01 답



02 답



03 답



04 답 ○

05 답 ×

06 답 ×

07 답 ○

08 답 ×

09 답 ○

10 답 ○ 0, 1, 2, 하나, 함수이다

11 $x=-1$일 때, $y=(-1)^2+2\cdot(-1)=-1$
$x=0$일 때, $y=0^2+2\cdot0=0$
$x=1$일 때, $y=1^2+2\cdot1=3$
따라서 X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 답 ×

12 $x=-1$일 때, $y=(-1)^3=-1$
$x=0$일 때, $y=0^3=0$
$x=1$일 때, $y=1^3=1$
따라서 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다. 답 ○

13 $x=-1$일 때, $y=-1-|-1|=-2$
$x=0$일 때, $y=0-|0|=0$
$x=1$일 때, $y=1-|1|=0$
따라서 X의 원소 -1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 답 ×

14 답 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{5, 6, 7, 8\}$, 치역: $\{5, 6, 7\}$

15 답 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{5, 6, 7, 8\}$, 치역: $\{5, 6, 7, 8\}$

베이직쎈 BOX

16 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c, d\}$, 치역: $\{a, b, d\}$

17 정의역: $\{a, b, c, d\}$, 공역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 치역: $\{1, 3\}$

18 $x=-2$일 때, $y=-2-1=-3$
$x=-1$일 때, $y=-1-1=-2$
$x=0$일 때, $y=0-1=-1$
$x=1$일 때, $y=1-1=0$
$x=2$일 때, $y=2-1=1$
따라서 치역은 $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$이다.
$\{-3, -2, -1, 0, 1\}$

19 $x=-2$일 때, $y=-2\cdot(-2)+3=7$
$x=-1$일 때, $y=-2\cdot(-1)+3=5$
$x=0$일 때, $y=-2\cdot0+3=3$
$x=1$일 때, $y=-2\cdot1+3=1$
$x=2$일 때, $y=-2\cdot2+3=-1$
따라서 치역은 $\{-1, 1, 3, 5, 7\}$이다.
$\{-1, 1, 3, 5, 7\}$

20 $x=-2$일 때, $y=(-2)^2=4$
$x=-1$일 때, $y=(-1)^2=1$
$x=0$일 때, $y=0^2=0$
$x=1$일 때, $y=1^2=1$
$x=2$일 때, $y=2^2=4$
따라서 치역은 $\{0, 1, 4\}$이다. $\{0, 1, 4\}$

21 $x=-2$일 때, $y=|-2+1|=1$
$x=-1$일 때, $y=|-1+1|=0$
$x=0$일 때, $y=|0+1|=1$
$x=1$일 때, $y=|1+1|=2$
$x=2$일 때, $y=|2+1|=3$
따라서 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다. $\{0, 1, 2, 3\}$

22 정의역: $\{x|x$는 실수$\}$, 치역: $\{y|y$는 실수$\}$

23 정의역: $\{x|x\neq0$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq0$인 실수$\}$

24 정의역: $\{x|x$는 실수$\}$, 치역: $\{y|y\geq-3$인 실수$\}$

25 정의역: $\{x|x$는 실수$\}$, 치역: $\{y|y\geq0$인 실수$\}$

26 $f(1)=2\cdot1=2$ 2

$1\geq0$이므로 $f(x)=2x$에 x 대신 1을 대입한다.

27 $f(0)=2\cdot0=0$ 0

28 $f(\sqrt{2})=2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}$

29 $f(-3)=-3+1=-2$ -2

$-3<0$이므로 $f(x)=x+1$에 x 대신 -3을 대입한다.

개념 54 서로 같은 함수

본책 148쪽

30 서로 같은 함수이다. $-2, 0, =$

두 함수 f, g의 공역은 실수 전체의 집합이다.

31 $f(-1)=0$, $g(-1)=2$이므로 $f(-1)\neq g(-1)$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.
서로 같은 함수가 아니다.

32 $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(1)=g(1)=1$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
서로 같은 함수이다.

33 $f(-1)=g(-1)=-5$, $f(1)=g(1)=-1$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
서로 같은 함수이다.

34 $f(2)=2$, $g(2)=8$이므로 $f(2)\neq g(2)$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.
서로 같은 함수가 아니다.

$f(3)=3$, $g(3)=27$이므로 $f(3)\neq g(3)$임을 이용하여 확인할 수도 있다.

35 $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$
따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
서로 같은 함수이다.

36 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이고 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=g(x)=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

따라서 두 함수 f, g는 서로 같은 함수이다.
서로 같은 함수이다.

37 함수 f의 정의역은 실수 전체의 집합이고 함수 g의 정의역은 $\{x|x\neq2$인 실수$\}$이다.
따라서 f와 g의 정의역이 같지 않으므로 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.
서로 같은 함수가 아니다.

(분모)$\neq0$에서 $x-2\neq0$, 즉 $x\neq2$

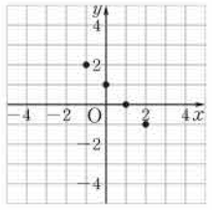
38 함수 f의 정의역은 $\{x|x\neq1$인 실수$\}$이고 함수 g의 정의역은 $\{x|x\neq-1, x\neq1$인 실수$\}$이다.
따라서 f와 g의 정의역이 같지 않으므로 두 함수 f, g는 서로 같은 함수가 아니다.
서로 같은 함수가 아니다.

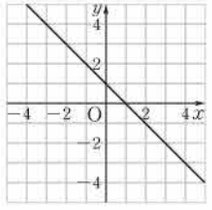
39 $a=3,\ b=-2$ 1, 4, 3, −2

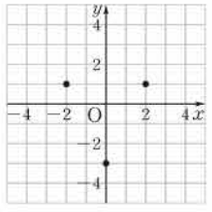
40 $f(-1)=g(-1)$에서 $a+b=0$ …… ㉠
$f(0)=g(0)$에서 $b=1$
$b=1$을 ㉠에 대입하면 $a=-1$
$a=-1,\ b=1$

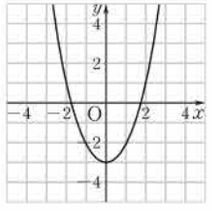
41 $f(-3)=g(-3)$에서 $-3a+b=2$
$f(1)=g(1)$에서 $a+b=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$
$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$

개념 55 함수의 그래프 본책 149쪽

42


43


44


45


46 ○ **47** ×

48 ○ **49** ×

50 × **51** ○

$f(-1)=2,\ f(0)=1,$
$f(1)=0,\ f(2)=-1$

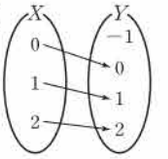
그래프가 정의역의 원소 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 점에서 만날 때가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

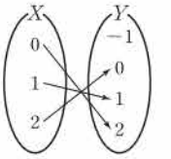
베이직쎈 BOX

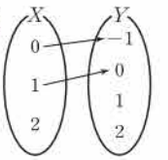
자신감 UP! 기본&핵심 유형 본책 150쪽

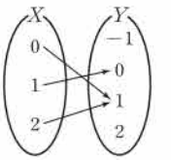
01 ③

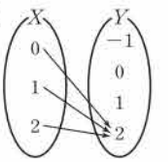
02 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


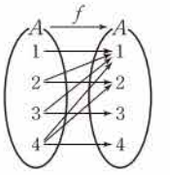
④


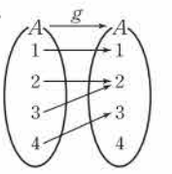
⑤


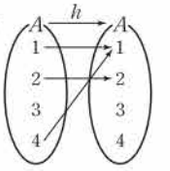
$x=2$일 때, $y=2^2-1=3$

따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ③이다. ③

03 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


3을 3으로 나눈 나머지는 0이다.

이상에서 A에서 A로의 함수인 것은 ㄴ뿐이다. ㄴ

04 ④

05 $f(3)=4$이므로
$-6+a=4$ $\therefore a=10$
따라서 $f(x)=-2x+10$이므로
$f(-1)=-2\cdot(-1)+10=12$ 12

06 $1-x=4$에서 $x=-3$
$x=-3$을 $f(1-x)=x+4$에 대입하면
$f(4)=-3+4=1$ 1

다른 풀이 $1-x=t$로 놓으면 $x=-t+1$이므로
$f(t)=(-t+1)+4=-t+5$
따라서 $f(x)=-x+5$이므로 $f(4)=1$

07 $f(\sqrt{3}-1)-f(1-\sqrt{3})=3(\sqrt{3}-1)-\{-(1-\sqrt{3})\}$
$=3\sqrt{3}-3+1-\sqrt{3}$
$=2\sqrt{3}-2$ ②

$1<\sqrt{3}$이므로
$\sqrt{3}-1>0,\ 1-\sqrt{3}<0$

베이직쎈 BOX

08 치역이 $\{-3, -1, 1\}$이므로
$y=-3$일 때, $-3=2x+3$ $\therefore x=-3$
$y=-1$일 때, $-1=2x+3$ $\therefore x=-2$
$y=1$일 때, $1=2x+3$ $\therefore x=-1$
따라서 정의역은 $\{-3, -2, -1\}$이다.
답 $\{-3, -2, -1\}$

09 $-2\le x\le 4$에서
$-2\le -\frac{1}{2}x\le 1$
$\therefore -1\le -\frac{1}{2}x+1\le 2$
따라서 주어진 함수의 치역이 $\{y\,|\,-1\le y\le 2\}$이므로
$a=-1$, $b=2$
$\therefore a+b=1$ 답 1

쎈 TIP
부등식의 성질
실수 a, b, c에 대하여
① $a>b$이면
$a+c>b+c$, $a-c>b-c$
② $a>b$, $c>0$이면
$ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$
③ $a>b$, $c<0$이면
$ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

10 일차함수 $y=ax+b$에서 $a>0$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 즉
$x=1$일 때 $y=-1$, $x=5$일 때 $y=7$
이어야 하므로
$a+b=-1$, $5a+b=7$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=-3$
$\therefore a-b=5$ 답 ⑤

11 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$이므로
$f(-1)=a-3$, $f(0)=0$, $f(1)=a+3$
따라서 치역은 $\{a-3, 0, a+3\}$이고, 치역의 모든 원소의 합이 12이므로
$(a-3)+0+(a+3)=12$
$2a=12$ $\therefore a=6$ 답 ③

쎈 TIP
$a-3\ne a+3$이므로 치역의 원소 $a-3$, 0, $a+3$ 중에서 같은 원소가 있는 경우는 $a-3=0$ 또는 $a+3=0$, 즉 $a=3$ 또는 $a=-3$일 때이다.
이때 $a=3$이면 치역은 $\{0, 6\}$이므로 모든 원소의 합이 6이고, $a=-3$이면 치역은 $\{-6, 0\}$이므로 모든 원소의 합이 -6이다.
따라서 주어진 조건에 모순이므로 $a-3$, 0, $a+3$은 모두 다른 원소이다.

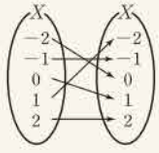
12 ㄱ. $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$, $f(2)=g(2)=2$이므로 $f=g$
ㄴ. $f(2)=2$, $g(2)=8$이므로 $f(2)\ne g(2)$
$\therefore f\ne g$
ㄷ. $f(1)=2$, $g(1)=0$이므로 $f(1)\ne g(1)$
$\therefore f\ne g$
이상에서 $f=g$인 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

13 $f(0)=g(0)$에서 $b=-4$
$f(1)=g(1)$에서 $1+a-4=2+b$
$\therefore a-b=5$
$b=-4$를 위의 식에 대입하여 풀면 $a=1$
$\therefore ab=-4$ 답 -4

14 $f(-1)=g(-1)$에서 $-1-a+b=2a+3b$
$\therefore 3a+2b=-1$ …… ㉠
$f(2)=g(2)$에서 $8+2a+b=-4a+3b$
$\therefore 3a-b=-4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$
즉 $f(x)=x^3-x+1$이므로
$f(-1)=1$, $f(2)=7$
따라서 함수 f의 치역은 $\{1, 7\}$이다. 답 $\{1, 7\}$

일대일대응이면 일대일함수이지만 일대일함수라고 해서 반드시 일대일대응인 것은 아니다.





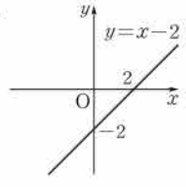
일대일함수의 그래프는 치역의 임의의 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만난다.

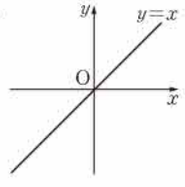
20 여러 가지 함수

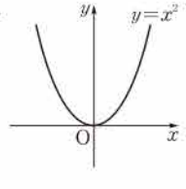
개념 56 여러 가지 함수
본책 152쪽

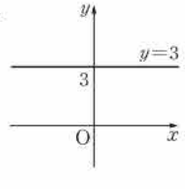
01 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ, ㅇ **02** 답 ㄱ, ㅁ, ㅇ
03 답 ㅁ **04** 답 ㄴ
05 답 ㄱ, ㄴ **06** 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ
07 답 ㄹ **08** 답 ㄱ, ㄷ
09 답 ㄱ, ㄷ **10** 답 ㄷ
11 답 ㄴ

[12~15] 보기의 함수의 그래프는 다음과 같다.

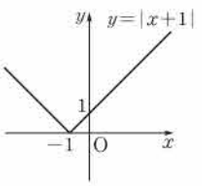
ㄱ.


ㄴ.


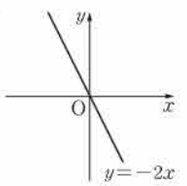
ㄷ.


ㄹ.


ㅁ.



ㅂ.



12 ㄱ, ㄴ, ㅂ **13** ㄱ, ㄴ, ㅂ

14 ㄴ **15** ㄹ

16 $a=2$, $b=4$

증가, -2, 6, -2, 6, -2, 6, 2, 4

17 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(-1)=1$, $f(3)=5$

$\therefore -a+b=1$, $3a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$ $a=1$, $b=2$

18 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(-2)=-7$, $f(1)=2$

$\therefore -2a+b=-7$, $a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-1$ $a=3$, $b=-1$

19 $a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(-5)=10$, $f(2)=-4$

$\therefore -5a+b=10$, $2a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=0$ $a=-2$, $b=0$

$f(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

20 $a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(2)=6$, $f(7)=-9$

$\therefore 2a+b=6$, $7a+b=-9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=12$ $a=-3$, $b=12$

일대일대응의 그래프는 공역의 임의의 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만난다.

21 $a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(-3)=11$, $f(5)=3$

$\therefore -3a+b=11$, $5a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=8$ $a=-1$, $b=8$

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 154쪽

01 주어진 조건을 만족시키는 함수는 일대일함수이다.

① $x_1=1$, $x_2=2$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=f(x_2)=1$

베이직쎈 BOX

③ $x_1=-1$, $x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=f(x_2)=1$

④ $x_1=-1$, $x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=f(x_2)=1$

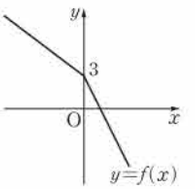
⑤ $x_1=-1$, $x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=f(x_2)=0$

② ②

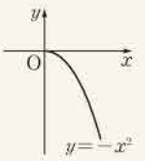
02 함수 f가 일대일함수가 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$a<0$



$a<0$

$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



03 ① 함수 f의 치역은 $\{y|y\leq 0\}$이므로 치역과 공역은 같지 않다.

② 그래프는 오른쪽 아래로 향한다.

③ 일대일함수이다.

⑤ 그래프는 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만난다.

④ ④

04 함수 f가 일대일함수이고 $f(2)=3$이므로 $f(1)$, $f(3)$의 값은 각각 서로 다르고 1, 2, 4 중 하나이어야 한다.

따라서 $f(1)+f(3)$은 $f(1)=1$, $f(3)=2$ 또는 $f(1)=2$, $f(3)=1$일 때 최솟값 3을 갖는다. 3

집합 Y의 원소 중에서 3을 제외한 나머지

05 ㄱ, ㄹ

06 ③ $f(x)=-x^2+3$이라 하면 $x_1=-1$, $x_2=1$일 때 $x_1\neq x_2$이지만

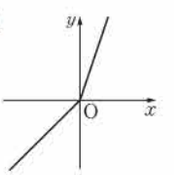
$f(x_1)=f(x_2)=2$

따라서 함수 $y=-x^2+3$은 일대일대응이 아니다.

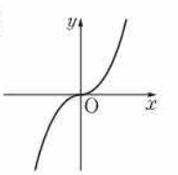
③ ③

참고 ④, ⑤ 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

④



⑤

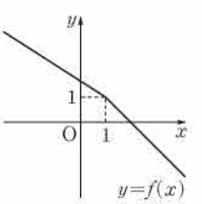


(i) $x\geq 0$일 때, $y=2x+x$ $\therefore y=3x$

(ii) $x<0$일 때, $y=2x-x$ $\therefore y=x$

07 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 직선 $y=ax+b$는 기울기가 음수이고 점 $(1, 1)$을 지나야 한다.

$\therefore a<0$, $a+b=1$



① ①

베이직쎈 BOX

08 $a>0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면
$f(-2)=-1,\ f(4)=8$
$\therefore\ -2a+b=-1,\ 4a+b=8$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2},\ b=2$
$\therefore\ ab=3$ 답 3

09 함수 f가 일대일대응이고 $f(4)=2$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 서로 다르고 1, 3, 4 중 하나이어야 한다. ← 집합 X의 원소 중에서 2를 제외한 나머지
이때 $f(1)<f(3)<f(2)$이므로
$f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=3$
$\therefore\ f(1)-f(2)+f(3)=0$ 답 ②

10 ㄱ. $f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3$이므로 f는 항등함수이다.
ㄴ. $g(1)=3,\ g(2)=2,\ g(3)=1$이므로 g는 항등함수가 아니다.
ㄷ. $h(1)=1,\ h(2)=2,\ h(3)=3$이므로 h는 항등함수이다.
이상에서 항등함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

11 함수 f가 상수함수이므로 ← $f(50)=10$이므로 $f(x)=1$
$f(1)=f(2)=f(3)=\cdots=f(49)=f(50)=1$
$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(49)=1\cdot 49=49$
답 49

12 함수 f가 항등함수이므로
$f(-1)=-1,\ f(3)=3$
따라서 $f(3)=g(3)$에서 $g(3)=3$
이때 함수 g가 상수함수이므로 $g(4)=3$ ← $g(x)=3$
$\therefore\ f(-1)+g(4)=2$ 답 2

21 합성함수와 역함수

개념 57 합성함수 본책 156쪽

01 답 b, 3 ← f의 치역은 $\{b, c, d\}$이고 g의 정의역인 Y의 부분집합이므로 합성함수 $g\circ f$를 정의할 수 있다.

02 $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(d)=1$ 답 1

03 $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(2)=b$ 답 b ← g의 치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$이고 f의 정의역인 X의 부분집합이므로 합성함수 $f\circ g$를 정의할 수 있다.

04 $(f\circ g)(c)=f(g(c))=f(4)=c$ 답 c

05 답 2, 2

06 $(f\circ g)(5)=f(g(5))=f(20)=-18$ 답 -18

07 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(1)=1$ 답 1

08 $(g\circ g)(-2)=g(g(-2))=g(6)=30$ 답 30

09 답 2 $-1,\ -1,\ 2$

10 $(f\circ f)(-3)=f(f(-3))=f(0)=-2$ 답 -2

11 $(f\circ f)(\sqrt{2})=f(f(\sqrt{2}))=f(2)=5$ 답 5

12 $(f\circ f)(\sqrt{5})=f(f(\sqrt{5}))=f(5)=11$ 답 11

13 답 $(g\circ f)(x)=-4x-11$
$x+3,\ x+3,\ -4x-11$

14 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-4x+1)$
$=-4x+1+3=-4x+4$
답 $(f\circ g)(x)=-4x+4$

15 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x+3)$
$=x+3+3=x+6$
답 $(f\circ f)(x)=x+6$

16 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)$
$=(x-1)^2=x^2-2x+1$
답 $(g\circ f)(x)=x^2-2x+1$

17 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2-1$
답 $(f\circ g)(x)=x^2-1$

18 $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2)=(x^2)^2=x^4$
답 $(g\circ g)(x)=x^4$

19 답 $h(x)=-3x-2$ $h(x),\ h(x),\ -3x-2$

20 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=2h(x)+5$
$(g\circ h)(x)=f(x)$이므로
$2h(x)+5=-x+7,\quad 2h(x)=-x+2$
$\therefore\ h(x)=-\frac{1}{2}x+1$ 답 $h(x)=-\frac{1}{2}x+1$

21 답 $h(x)=4x-11$
$x+2,\ t-2,\ t-2,\ 4t-11,\ 4x-11$

22 $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(3x-4)=x-6$
$3x-4=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{3}t+\frac{4}{3}$이므로
$h(t)=\frac{1}{3}t+\frac{4}{3}-6=\frac{1}{3}t-\frac{14}{3}$
$\therefore\ h(x)=\frac{1}{3}x-\frac{14}{3}$ 답 $h(x)=\frac{1}{3}x-\frac{14}{3}$

베이직쎈 BOX

개념 58 합성함수의 성질 본책 158쪽

23 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)$
$=(2x)^2+2x=4x^2+2x$
(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+x)$
$=2(x^2+x)=2x^2+2x$
(3) $(g\circ f)(x)\neq(f\circ g)(x)$
풀이 참조

함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않는다.

24 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4x)=4x+7$이므로
$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(4x+7)$
$=-3(4x+7)+1$
$=-12x-20$
(2) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x+7)$
$=-3(x+7)+1$
$=-3x-20$
이므로
$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=(h\circ g)(4x)$
$=-3\cdot4x-20$
$=-12x-20$
(3) $(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$
풀이 참조

함수 $f:X\to Y$의 역함수가 존재하기 위한 필요충분조건은 f가 일대일대응인 것이다.

(치역)$\neq$(공역)이므로 일대일대응이 아니다.

함수 f가 일대일함수가 아니므로 일대일대응이 아니다.

함수의 합성에서 결합법칙이 성립한다.

25 15, 1

26 $(h\circ g\circ f)(-1)=((h\circ g)\circ f)(-1)$
$=(h\circ g)(f(-1))$
$=(h\circ g)(5)=-1$ -1

27 $((f\circ h)\circ g)(0)=(f\circ(h\circ g))(0)$
$=f((h\circ g)(0))$
$=f(-2)=0$ 0

28 $(f\circ h\circ g)(3)=(f\circ(h\circ g))(3)$
$=f((h\circ g)(3))$
$=f\left(-\frac{7}{5}\right)=3$ 3

29 $((h\circ f)\circ g)(2)=(h\circ(f\circ g))(2)$
$=h((f\circ g)(2))$
$=h(0)=4$ 4

30 $(f\circ(g\circ h))(-3)=((f\circ g)\circ h)(-3)$
$=(f\circ g)(h(-3))$
$=(f\circ g)(7)=35$ 35

31 $((h\circ f)\circ g)(x)=(h\circ(f\circ g))(x)$
$=h((f\circ g)(x))$
$=h(x^2-2x)$
$=-(x^2-2x)+4$
$=-x^2+2x+4$
$((h\circ f)\circ g)(x)=-x^2+2x+4$

이 식에 $x=2$를 대입하면
$((h\circ f)\circ g)(2)$
$=-2^2+2\cdot2+4$
$=4$
임을 확인할 수 있다.

32 $(f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)$
$=(f\circ g)(h(x))$
$=(f\circ g)(-x+4)$
$=(-x+4)^2-2(-x+4)$
$=x^2-6x+8$
$(f\circ(g\circ h))(x)=x^2-6x+8$

이 식에 $x=-3$을 대입하면
$(f\circ(g\circ h))(-3)$
$=(-3)^2-6\cdot(-3)+8$
$=35$
임을 확인할 수 있다.

개념 59 역함수 본책 159쪽

33 함수 f가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. ○

34 함수 f가 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다. ×

35 함수 f가 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다. ×

36 함수 f가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. ○

37 2 **38** 4

39 3 **40** 1

41 3 1, 1, 3, 3

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
$f(a)=b$
$\iff f^{-1}(b)=a$

42 $f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로
$-a+3=1$ $\therefore a=2$
$\therefore f^{-1}(1)=2$ 2

43 $f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로
$\frac{1}{4}a+2=1$ $\therefore a=-4$
$\therefore f^{-1}(1)=-4$ -4

44 1 1, 1, 1

45 $f^{-1}(a)=3$에서 $f(3)=a$이므로
$a=4\cdot3-3=9$ 9

46 $f^{-1}(a)=-2$에서 $f(-2)=a$이므로
$a=4\cdot(-2)-3=-11$ -11

47 $f^{-1}(a)=-5$에서 $f(-5)=a$이므로
$a=4\cdot(-5)-3=-23$ -23

48 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
일대일대응, $\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

베이직쎈 BOX

49 $y=x-8$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=y+8$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=x+8$ 답 $y=x+8$

50 $y=\frac{1}{2}x-7$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=2y+14$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=2x+14$ 답 $y=2x+14$

51 $y=-x-5$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=-y-5$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=-x-5$ 답 $y=-x-5$

52 $y=-3x-6$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=-\frac{1}{3}y-2$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=-\frac{1}{3}x-2$ 답 $y=-\frac{1}{3}x-2$

53 $y=-\frac{1}{5}x+2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면
$x=-5y+10$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=-5x+10$ 답 $y=-5x+10$

개념 60 역함수의 성질

본책 161쪽

54 $(f^{-1})^{-1}(5)=f(5)=6$ 답 6

55 $(f^{-1})^{-1}(3)=f(3)=3$ 답 3

56 답 1 **57** 답 6

58 $(g\circ f)^{-1}(1)=(f^{-1}\circ g^{-1})(1)=f^{-1}(g^{-1}(1))$
$=f^{-1}(1)=4$ 답 4

두 함수 f, g의 역함수가 존재할 때,
$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

59 $(g\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=f^{-1}(g^{-1}(3))$
$=f^{-1}(4)=2$ 답 2

60 $(f\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f^{-1})(2)=g^{-1}(f^{-1}(2))$
$=g^{-1}(3)=4$ 답 4

61 $(f\circ g)^{-1}(4)=(g^{-1}\circ f^{-1})(4)=g^{-1}(f^{-1}(4))$
$=g^{-1}(2)=3$ 답 3

62 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(2)=(g^{-1}\circ f)(2)=g^{-1}(f(2))=g^{-1}(11)$
$g^{-1}(11)=a$라 하면 $g(a)=11$이므로
$-2a+1=11$ $\therefore a=-5$
$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(2)=-5$ 답 -5

63 $(f\circ g^{-1})^{-1}(-1)=(g\circ f^{-1})(-1)=g(f^{-1}(-1))$
$f^{-1}(-1)=a$라 하면 $f(a)=-1$이므로
$3a+5=-1$ $\therefore a=-2$
$\therefore (f\circ g^{-1})^{-1}(-1)=g(-2)=5$ 답 5

64 $(g\circ f\circ f^{-1})(5)=g(5)=-9$ 답 -9

$f\circ f^{-1}=I$
(I는 항등함수)

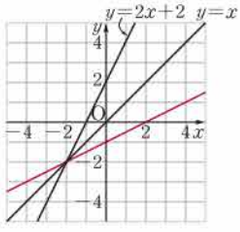
65 $(g\circ g^{-1}\circ f^{-1})(-7)=f^{-1}(-7)$
$f^{-1}(-7)=a$라 하면 $f(a)=-7$이므로
$3a+5=-7$ $\therefore a=-4$
$\therefore (g\circ g^{-1}\circ f^{-1})(-7)=-4$ 답 -4

66 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(9)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ g)(9)$
$=9$ 답 9

개념 61 역함수의 그래프

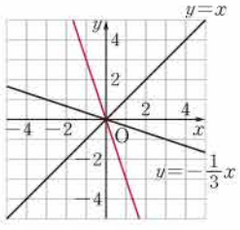
본책 162쪽

67 답



함수 $y=2x+2$의 역함수는
$y=\frac{1}{2}x-1$

68 답



함수 $y=-\frac{1}{3}x$의 역함수는
$y=-3x$

69 답 c 목표 b, c, c

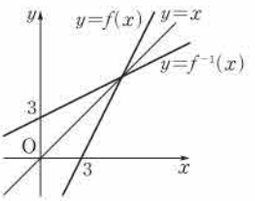
70 $f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$이므로
$k=d$ $\therefore f^{-1}(c)=d$
$f^{-1}(d)=l$이라 하면 $f(l)=d$이므로
$l=e$ $\therefore f^{-1}(d)=e$
$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(d)=e$
답 e

71 $(f\circ f)^{-1}(a)=(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=f^{-1}(f^{-1}(a))$
$f^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=a$이므로
$k=b$ $\therefore f^{-1}(a)=b$
$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$이므로
$l=c$ $\therefore f^{-1}(b)=c$
$\therefore (f\circ f)^{-1}(a)=f^{-1}(b)=c$ 답 c

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점과 같다.

72 답 (1, 1) 목표 x, 1, 1, 1

73 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

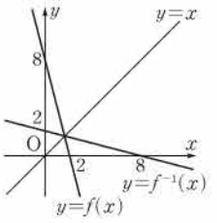


$2x-6=x$ $\therefore x=6$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(6, 6)$ 답 $(6, 6)$

74 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

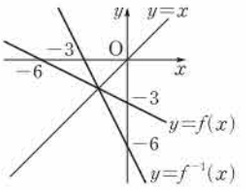


$-4x+8=x$ $\therefore x=\frac{8}{5}$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}\right)$ 답 $\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}\right)$

75 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로



$-\frac{1}{2}x-3=x$ $\therefore x=-2$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(-2, -2)$ 답 $(-2, -2)$

자신감 UP! 기본&핵심 유형 본책 163쪽

01 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=4$

$(f\circ f\circ f)(4)=f(f(f(4)))=f(f(3))=f(1)=2$

$\therefore (f\circ f)(1)+(f\circ f\circ f)(4)=6$ 답 ④

02 $(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(7)=27$

$(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(-5)=15$

$\therefore (f\circ g)(3)-(g\circ f)(-1)=12$ 답 12

03 $(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(4)=16$

$(g\circ f)(-4)=g(f(-4))=g(16)=35$

$\therefore (f\circ g)(-2)+(g\circ f)(-4)=51$ 답 51

04 $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(-2)=-4+a$

즉 $-4+a=2$이므로 $a=6$

따라서 $f(x)=2x+6$이므로

$f(a)=f(6)=18$ 답 18

베이직쎈 BOX

함수의 합성에서 결합법칙이 성립하므로 괄호를 생략하여 나타낼 수 있다.

05 $((h\circ g)\circ f)(-6)=(h\circ g\circ f)(-6)$

$=h(g(f(-6)))$

$=h(g(-1))$

$=h(0)$

$=8$ 답 ⑤

06 $((f\circ g)\circ h)(a)=(f\circ(g\circ h))(a)$

$=f((g\circ h)(a))$

$=f(3a-7)$

$=-(3a-7)+2$

$=-3a+9$

따라서 $-3a+9=6$이므로

$-3a=-3$ $\therefore a=1$ 답 1

07 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+1)$

$=2(ax+1)-4=2ax-2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-4)$

$=a(2x-4)+1=2ax-4a+1$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$2ax-2=2ax-4a+1$

$-2=-4a+1$, $4a=3$

$\therefore a=\frac{3}{4}$ 답 ③

일반적으로 $f\circ g\neq g\circ f$이지만 특정한 경우에 한하여 $f\circ g=g\circ f$가 성립하기도 한다.

$ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$

08 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+1)=bx+1+a$

따라서 $bx+1+a=-2x+5$이므로

$b=-2$, $1+a=5$ $\therefore a=4$, $b=-2$

$\therefore ab=-8$ 답 -8

09 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$=a(ax+b)+b$

$=a^2x+ab+b$

따라서 $a^2x+ab+b=4x+6$이므로

$a^2=4$, $ab+b=6$

$a^2=4$에서 $a=2$ ($\because a>0$)

$a=2$를 $ab+b=6$에 대입하면

$2b+b=6$ $\therefore b=2$

즉 $f(x)=2x+2$이므로 $f(1)=4$ 답 4

10 $(g\circ h)(x)=g(h(x))=3h(x)-2$

$(g\circ h)(x)=f(x)$이므로

$3h(x)-2=x^2+1$, $3h(x)=x^2+3$

$\therefore h(x)=\frac{1}{3}x^2+1$ $\therefore h(3)=4$ 답 ④

11 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-3)$

$=3(x-3)+7=3x-2$

$(h\circ g\circ f)(x)=f(x)$에서 $(h\circ(g\circ f))(x)=f(x)$이므로

$h(3x-2)=x-3$

$3x-2=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}$

베이직쎈 BOX

따라서 $h(t)=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}-3=\frac{1}{3}t-\frac{7}{3}$이므로

$h(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$ 답 $h(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$

12 (1) $f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x-2)$
$=x-4$
$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x-4)=x-6$ ← $x-4=x-2\cdot2$
$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(x-6)=x-8$ ← $x-6=x-2\cdot3$, $x-8=x-2\cdot4$
(2) $f^n(x)=x-2n$
(3) $f^{50}(x)=x-100$이므로 $f^{50}(1)=-99$
답 풀이 참조

13 $f_2(x)=f(f(x))=f(2x)=2^2x$
$f_3(x)=f(f_2(x))=f(2^2x)=2^3x$
$f_4(x)=f(f_3(x))=f(2^3x)=2^4x$
⋮
따라서 $f_{10}(x)=2^{10}x$이므로
$f_{10}(2)=2^{11}=2048$ 답 2048

14 $f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x+1)=x$
따라서 $f^3(x)=f(x)$, $f^4(x)=f(f(x))=f^2(x)$, …이므로
$f(x)=f^3(x)=f^5(x)=\cdots=-x+1$,
$f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=x$
즉 $f^{2025}(x)=-x+1$이므로 $f^{2025}(a)=6$에서 ← $f^n(x)=\begin{cases}-x+1 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$
$-a+1=6$ $\therefore a=-5$ 답 ②

15 $f^{-1}(4)=7$에서 $f(7)=4$이므로
$14+a=4$ $\therefore a=-10$
따라서 $f(x)=2x-10$이므로
$f(3)=-4$ 답 -4

16 $f^{-1}(-1)=3$, $f^{-1}(6)=-4$에서 $f(3)=-1$, $f(-4)=6$이므로
$3a+b=-1$, $-4a+b=6$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$
$\therefore ab=-2$ 답 ①

17 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+7)=ax+7+b$이므로 $(g\circ f)(x)=5x+c$에서
$ax+7+b=5x+c$
$\therefore a=5$, $b+7=c$
$g^{-1}(2)=-1$에서 $g(-1)=2$이므로
$-1+b=2$ $\therefore b=3$
$b=3$을 $b+7=c$에 대입하면
$c=10$
$\therefore a+b+c=18$ 답 18

18 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 역함수가 존재하는 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

19 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응이다.
$f(x)=3x+1$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로
$a=f(-1)=-3+1=-2$
$b=f(4)=3\cdot4+1=13$
$\therefore b-a=15$ 답 ③

20 $y=2x+a$로 놓으면
$2x=y-a$ $\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}a$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a$
따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a$이므로
$\frac{1}{2}=b$, $-\frac{1}{2}a=4$ $\therefore a=-8$, $b=\frac{1}{2}$
$\therefore ab=-4$ 답 ①

21 $y=ax+b$로 놓으면
$ax=y-b$ $\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$
따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$이므로
$\frac{1}{a}=-\frac{1}{3}$, $-\frac{b}{a}=2$ $\therefore a=-3$, $b=6$
$\therefore a+2b=9$ 답 9

22 ㄱ. $y=x-1$로 놓으면 $x=y+1$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=x+1$
즉 $f^{-1}(x)=x+1$이므로 $f\neq f^{-1}$
ㄴ. $y=-x+3$으로 놓으면 $x=-y+3$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=-x+3$
즉 $f^{-1}(x)=-x+3$이므로 $f=f^{-1}$
ㄷ. $y=2x$로 놓으면 $x=\frac{1}{2}y$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x$
즉 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x$이므로 $f\neq f^{-1}$
ㄹ. $y=-\frac{1}{x}$로 놓으면 $x=-\frac{1}{y}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{x}$
즉 $f^{-1}(x)=-\frac{1}{x}$이므로 $f=f^{-1}$
이상에서 $f=f^{-1}$를 만족시키는 것은 ㄴ, ㄹ이다.
답 ㄴ, ㄹ

23 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(1)=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(1)$
$=(f^{-1}\circ g)(1)$
$=f^{-1}(g(1))$
$=f^{-1}(3)$

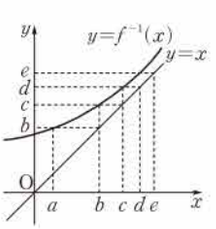
$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로
$a-2=3$ $\therefore a=5$
$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(1)=5$ 답 5

24 $h^{-1}(x)=(g\circ f)^{-1}(x)$
$=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$
$=f^{-1}(g^{-1}(x))$
$=f^{-1}(5x-2)$
$=-(5x-2)+7$
$=-5x+9$ 답 $h^{-1}(x)=-5x+9$

25 $((g\circ f^{-1})^{-1}\circ f)(a)=(f\circ g^{-1}\circ f)(a)$
$=f(g^{-1}(f(a)))$
$f(g^{-1}(f(a)))=18$에서 $g^{-1}(f(a))=b$라 하면
$f(b)=18$
$3b=18$ $\therefore b=6$
$\therefore g^{-1}(f(a))=6$
이때 $f(a)=c$라 하면 $g^{-1}(c)=6$이므로
$g(6)=c$ $\therefore c=21$
$\therefore f(a)=21$
즉 $3a=21$이므로 $a=7$ 답 ⑤

26 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, -4)$를 지나므로
$2a+b=-4$ …… ㉠
또 $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(2, -4)$를 지나므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-4, 2)$를 지난다.
$\therefore -4a+b=2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$
따라서 $f(x)=-x-2$이므로
$f(3)=-5$ 답 -5

27 직선 $y=x$를 이용하여 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f(d)=k$라 하면 $f^{-1}(k)=d$이므로
$k=c$ $\therefore f(d)=c$
$f(c)=l$이라 하면 $f^{-1}(l)=c$이므로
$l=b$ $\therefore f(c)=b$
$\therefore (f\circ f)(d)=f(f(d))=f(c)=b$ 답 ②

28 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로
$x^2-2x=x$, $x^2-3x=0$
$x(x-3)=0$ $\therefore x=3$ $(\because x\geq 1)$
따라서 교점의 좌표가 $(3, 3)$이므로
$a=3$, $b=3$ $\therefore a+b=6$ 답 ⑤

베이직쎈 BOX

X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

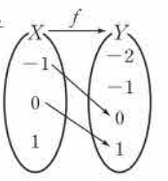
$3<6<9$이므로
$3+a<6+a<9+a$
$\therefore 3+a=4$, $6+a=7$, $9+a=10$

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 (b, a)를 지난다.

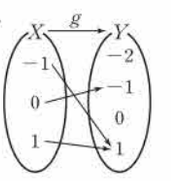
학교 시험 기출로 실전 감각 UP! 본책 167쪽

01 전략 각 대응을 그림으로 나타내 본다.
풀이 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

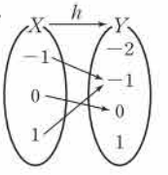
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



이상에서 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

02 전략 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 모두 집합 Y의 원소가 되도록 하는 상수 a의 값을 구한다.
풀이 $f(1)=3+a$, $f(2)=6+a$, $f(3)=9+a$
f가 X에서 Y로의 함수가 되려면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 모두 집합 Y의 원소이어야 하므로
$3+a=4$, $6+a=7$, $9+a=10$
$\therefore a=1$ 답 ④

03 전략 함수 $f(x)$에서 $f(k)$의 값 ➡ $f(x)$에 x 대신 k를 대입한다.
풀이 $f(2)=a$이므로
$a=4\cdot 2-1=7$
$f(b)=-5$이므로
$4b-1=-5$ $\therefore b=-1$
$\therefore a-b=8$ 답 ④

04 전략 y의 값이 -2, 0, 2, 4일 때의 x의 값을 각각 구한다.
풀이 치역이 $\{-2, 0, 2, 4\}$이므로
$y=-2$일 때, $-2=-\frac{3}{x}+1$
$\frac{3}{x}=3$ $\therefore x=1$
$y=0$일 때, $0=-\frac{3}{x}+1$
$\frac{3}{x}=1$ $\therefore x=3$
$y=2$일 때, $2=-\frac{3}{x}+1$
$\frac{3}{x}=-1$ $\therefore x=-3$
$y=4$일 때, $4=-\frac{3}{x}+1$
$\frac{3}{x}=-3$ $\therefore x=-1$
따라서 정의역은 $\{-3, -1, 1, 3\}$이므로 정의역의 원소가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

베이직쎈 BOX

05 전략 두 함수 f, g가 서로 같은 함수이면 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.

풀이 $f(x)=g(x)$에서 $x^2=x^3-6x$

$x^3-x^2-6x=0$, $x(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 집합 X는 집합 $\{-2, 0, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 그 개수는

$2^3-1=7$ 답 ②

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

공집합은 제외한다.

06 전략 일대일함수이면서 (치역)≠(공역)인 함수를 찾는다.

풀이 ①, ④, ⑤ 치역의 임의의 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

② 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

③ 양수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역이 $\{y|y>0\}$이므로 일대일대응이 아니다.

답 ③

일대일함수의 그래프는 치역의 임의의 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만난다.

07 전략 항등함수와 상수함수, 일대일대응의 정의를 이용한다.

풀이 함수 f가 항등함수이므로

$f(1)=1$, $f(2)=2$

$f(1)=g(4)$에서 $g(4)=1$

이때 함수 g가 상수함수이므로 $g(2)=1$

또 $h(1)=h(4)+3$에서 $h(1)>3$이고, 함수 h는 일대일대응이므로

$h(1)=4$, $h(4)=1$

따라서 $h(2)=2$이므로

$f(2)+g(2)+h(2)=5$ 답 ④

08 전략 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$임을 이용하여 합성함수의 함숫값을 구한다.

풀이 $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(-4)=4$ 답 ③

09 전략 $f\circ g$와 $g\circ f$를 각각 구하여 동류항의 계수를 비교한다.

풀이 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x+a)$

$=2(4x+a)-1=8x+2a-1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$

$=4(2x-1)+a=8x-4+a$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$8x+2a-1=8x-4+a$

$2a-1=-4+a$ $\therefore a=-3$

따라서 $(f\circ g)(x)=8x-7$이므로

$(f\circ g)(-1)=-15$ 답 ①

10 전략 $h(f(x))=g(x)$에서 $f(x)=t$로 치환하여 $h(x)$를 구한다.

풀이 $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(-x+7)=3x-4$

$-x+7=t$로 놓으면 $x=-t+7$이므로

$h(t)=3(-t+7)-4=-3t+17$

$\therefore h(x)=-3x+17$ 답 ②

11 전략 $f(1)$, $f^2(1)$, $f^3(1)$, …의 값을 구하여 규칙을 찾아 $f^{2025}(1)$의 값을 추정한다.

풀이 $f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=f(f(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3)=4$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(4)=0$

$f^5(1)=f(f^4(1))=f(0)=1$

⋮

따라서 $f^n(1)$의 값은 2, 3, 4, 0, 1이 이 순서대로 반복되므로

$f^{2025}(1)=f^{5\cdot 405}(1)=f^5(1)=1$ 답 ②

12 전략 $(f\circ g)^{-1}(x)=(g^{-1}\circ f^{-1})(x)$, $(g\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$임을 이용한다.

풀이 $(f\circ g)^{-1}(4)=(g^{-1}\circ f^{-1})(4)=g^{-1}(f^{-1}(4))$

$=g^{-1}(4)=0$

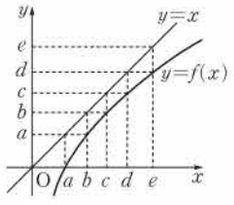
$(g\circ f)^{-1}(1)=(f^{-1}\circ g^{-1})(1)=f^{-1}(g^{-1}(1))$

$=f^{-1}(2)=3$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(4)+(g\circ f)^{-1}(1)=3$ 답 ②

13 전략 $(f^{-1}\circ f^{-1})(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))$이므로 $f^{-1}(b)$의 값을 먼저 구한다.

풀이 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(b)=k$라 하면 $f(k)=b$이므로

$k=c$ $\therefore f^{-1}(b)=c$

$f^{-1}(c)=l$이라 하면 $f(l)=c$이므로

$l=d$ $\therefore f^{-1}(c)=d$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)=d$

답 ④

14 전략 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같음을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$2x+a=x$ $\therefore x=-a$

이때 교점의 x좌표가 2이므로

$-a=2$ $\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=2x-2$이므로

$f(1)=0$ 답 ③

베이직쎈 BOX

15 전략 5와 14가 짝수인지 홀수인지 구분하여 함숫값을 구한다.

풀이 5는 홀수이므로 $f(5)=5^2=25$

14는 짝수이므로 $f(14)=\frac{1}{2}\cdot 14+1=8$

$\therefore f(5)+f(14)=33$ 답 33

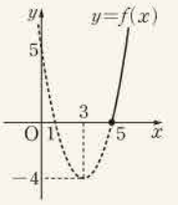
16 전략 f가 일대일대응이면 x의 값이 증가할 때 y의 값이 증가하거나 감소하고 치역과 공역이 같다.

풀이 $f(x)=x^2-6x+a=(x-3)^2+a-9$이므로 $x\geq 3$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 함수 f가 일대일대응이려면 $f(5)=0$이어야 하므로

$5^2-6\cdot 5+a=0$ $\therefore a=5$ 답 5

$a=5$일 때, $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



17 전략 $f(x)$가 항등함수이면 $f(x)=x$이다.

풀이 $f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$에서

$x^2-12=x$, $x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$ ··· ❶

따라서 집합 X는 집합 $\{-3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로

$\{-3\}, \{4\}, \{-3, 4\}$ ··· ❷

답 $\{-3\}, \{4\}, \{-3, 4\}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)=x$를 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	집합 X를 모두 구할 수 있다.	50 %

18 전략 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$임을 이용한다.

풀이 $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(-1+a)$

$=-2(-1+a)+b=2-2a+b$

이므로 $2-2a+b=2$

$\therefore b=2a$ ····· ㉠ ··· ❶

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(-4+b)=-4+b+a$이므로

$-4+b+a=5$

$\therefore a+b=9$ ····· ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=6$

$\therefore ab=18$ ··· ❸

답 18

단계	채점 기준	비율
❶	㉠을 구할 수 있다.	35 %
❷	㉡을 구할 수 있다.	35 %
❸	ab의 값을 구할 수 있다.	30 %

19 전략 $(f\circ f)(x)=x$이면 $f=f^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $f^{-1}(2)=-7$이므로 $f(-7)=2$

이때 $(f\circ f)(x)=x$에서 $f=f^{-1}$이므로

$f(2)=f^{-1}(2)=-7$, $f^{-1}(-7)=f(-7)=2$

$\therefore f(2)+f^{-1}(-7)=-5$ 답 −5

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여

$f=f^{-1}$

$\Longleftrightarrow (f\circ f)(x)=x$

20 전략 $(g^{-1}\circ f)(k)=g^{-1}(f(k))$임을 이용한다.

풀이 $(g^{-1}\circ f)(k)=g^{-1}(f(k))=1$이므로

$g(1)=f(k)$ ··· ❶

즉 $13=-k-4$이므로

$k=-17$ ··· ❷

답 −17

단계	채점 기준	비율
❶	$g(1)=f(k)$임을 알 수 있다.	50 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	50 %

21 전략 $(f^{-1})^{-1}=f$, $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$임을 이용한다.

풀이 $((f\circ f^{-1})^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ f)(3)=f(3)$

$=3^2+1=10$ 답 10

22 전략 점 P는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점임을 이용한다.

풀이 점 P는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$2x-5=x$ $\therefore x=5$

따라서 P(5, 5)이므로 ··· ❶

$\overline{OP}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$ ··· ❷

답 $5\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	점 P의 좌표를 구할 수 있다.	60 %
❷	$\overline{OP}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %

베쎈 TIP

두 점 사이의 거리

① 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

② 좌표평면 위의 원점 O와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

10 유리식과 유리함수

22 유리식

개념 62 유리식의 뜻과 성질

본책 170쪽

01 ㄱ, ㄷ, ㅁ

02 ㄴ, ㄹ, ㅂ

03 $\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}$, $\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$x+1$, $x+1$, $x-1$, $x-1$

04 $\frac{x-1}{(x+2)(x+3)}$, $\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}$에서 공통분모가 $(x+1)(x+2)(x+3)$이 되도록 통분하면

$\frac{x-1}{(x+2)(x+3)}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, $\frac{(x-3)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

다항식 A, B, C ($B\neq0$, $C\neq0$)에 대하여 $\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C}$

- 분자와 분모에 각각 $x+1$을 곱한다.
- 분자와 분모에 각각 $x+3$을 곱한다.

05 $\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}$, $\frac{x-3}{x^2-2x-8}=\frac{x-3}{(x+2)(x-4)}$에서 공통분모가 $(x+2)(x-2)(x-4)$가 되도록 통분하면

$\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-2)(x-4)}$

$\frac{x-3}{(x+2)(x-4)}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x-4)}$

$\frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-2)(x-4)}$, $\frac{(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x-4)}$

- 분자, 분모 중 인수분해 되는 식은 인수분해 한 다음 통분한다.

06 $x-2$, $x-1$, $x-2$

07 $\frac{x^2-4x}{x^2-16}=\frac{x(x-4)}{(x+4)(x-4)}=\frac{x}{x+4}$ $\frac{x}{x+4}$

다항식 A, B, C ($B\neq0$, $C\neq0$)에 대하여 $\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$

08 $\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+2}{x^2+x+1}$

$\frac{x+2}{x^2+x+1}$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

개념 63 유리식의 계산

본책 171쪽

09 2, 3, 5

베이직쎈 BOX

본책 169~171쪽

10 $\frac{5}{x}+\frac{3}{x(x-2)}=\frac{5(x-2)+3}{x(x-2)}=\frac{5x-7}{x(x-2)}$

$\frac{5x-7}{x(x-2)}$

11 $\frac{4}{x+3}-\frac{2}{x-1}=\frac{4(x-1)-2(x+3)}{(x+3)(x-1)}$

$=\frac{2x-10}{(x+3)(x-1)}$

$\frac{2x-10}{(x+3)(x-1)}$

12 $\frac{3}{x+1}-\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{3}{x+1}-\frac{x-1}{x(x+1)}$

$=\frac{3x-(x-1)}{x(x+1)}$

$=\frac{2x+1}{x(x+1)}$ $\frac{2x+1}{x(x+1)}$

13 $\frac{x-2}{x}\times\frac{5x}{x^2-4}=\frac{x-2}{x}\times\frac{5x}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{5}{x+2}$ $\frac{5}{x+2}$

14 $\frac{3x-9}{x^2-16}\times\frac{x+4}{x^2-6x+9}$

$=\frac{3(x-3)}{(x+4)(x-4)}\times\frac{x+4}{(x-3)^2}$

$=\frac{3}{(x-3)(x-4)}$

$\frac{3}{(x-3)(x-4)}$

15 $\frac{x}{x-2}\div\frac{x}{x+1}=\frac{x}{x-2}\times\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x-2}$

$\frac{x+1}{x-2}$

16 $\frac{x+1}{x^2-5x+6}\div\frac{x^2-1}{x-2}$

$=\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}\div\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}$

$=\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}\times\frac{x-2}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{1}{(x-1)(x-3)}$

$\frac{1}{(x-1)(x-3)}$

17 $x+1$, $x+2$, $x+2$

18 $\frac{1}{x(x+3)}=\frac{1}{x+3-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)$

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)$

자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 172쪽

01 $\frac{2}{x^3+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}$

$=\frac{2}{(x+1)(x^2-x+1)}+\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}$

$=\frac{2+(x^2-x+1)-(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\frac{5}{(x+1)(x^2-x+1)}$

답 $\frac{5}{(x+1)(x^2-x+1)}$

공통분모가 $(x+1)(x^2-x+1)$이 되도록 통분한다.

02 주어진 등식의 좌변을 계산하면

$\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b(x-3)}{(x-3)(x+2)}$

$=\frac{(a+b)x+2a-3b}{x^2-x-6}$

따라서 $\frac{(a+b)x+2a-3b}{x^2-x-6}=\frac{2x+9}{x^2-x-6}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+b=2,\ 2a-3b=9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-1$

$\therefore ab=-3$ 답 ②

양변의 분모가 같으므로 분자의 동류항의 계수를 비교한다.

$\begin{cases} a+b=2 & \cdots ㉠ \\ 2a-3b=9 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3+㉡을 하면 $5a=15$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $3+b=2$ $\therefore b=-1$

베씬TIP

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다.
➡ $a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이다.
➡ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이다.
➡ $a=b=c=0$

④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 x, y에 대한 항등식이다.
➡ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

03 $\frac{x^2+4x}{2x+4}\times\frac{x^2-3x-10}{x^2+3x-4}\div\frac{x-5}{x^2-x}$

$=\frac{x(x+4)}{2(x+2)}\times\frac{(x+2)(x-5)}{(x+4)(x-1)}\div\frac{x-5}{x(x-1)}$

$=\frac{x(x+4)}{2(x+2)}\times\frac{(x+2)(x-5)}{(x+4)(x-1)}\times\frac{x(x-1)}{x-5}$

$=\frac{x^2}{2}$ 답 $\frac{x^2}{2}$

04 주어진 등식의 좌변을 계산하면

$\frac{x^2-2x+1}{x^2+4x-5}\times\frac{x^2+2x-15}{x^2-1}$

$=\frac{(x-1)^2}{(x+5)(x-1)}\times\frac{(x+5)(x-3)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x-3}{x+1}$

따라서 $\frac{x-3}{x+1}=\frac{x+a}{x+b}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=-3,\ b=1$

$\therefore b-a=4$ 답 4

05 주어진 등식의 좌변을 계산하면

$\frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+5)}$

$=\frac{1}{x+3-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$

$+\frac{1}{x+5-(x+3)}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}\right)$

따라서 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+b}\right)$이 x에 대한 항등식이므로

$a=2,\ b=5$

$\therefore a+b=7$ 답 ③

06 $\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}$

$=\frac{2}{x+2-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$

$+\frac{2}{x+4-(x+2)}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}$

$=\frac{4}{x(x+4)}$

$\therefore k=4$ 답 4

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}$
$=\frac{x+4-x}{x(x+4)}$
$=\frac{4}{x(x+4)}$

07 $\frac{1}{x^2+x}+\frac{3}{x^2+5x+4}+\frac{4}{x^2+12x+32}$

$=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{3}{(x+1)(x+4)}+\frac{4}{(x+4)(x+8)}$

$=\frac{1}{x+1-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$

$+\frac{3}{x+4-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)$

$+\frac{4}{x+8-(x+4)}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}$

$=\frac{8}{x(x+8)}$ 답 ③

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}$
$=\frac{x+8-x}{x(x+8)}$
$=\frac{8}{x(x+8)}$

베이직쎈 BOX

23 유리함수

개념 64 유리함수

본책 173쪽

01 답 ㄱ, ㄷ, ㅂ　　**02** 답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

03 $2x=0$에서　$x=0$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\neq 0$인 실수$\}$　　답 $\{x|x\neq 0$인 실수$\}$

먼저 분모가 0이 되도록 하는 x의 값을 구한다.

04 $x-5=0$에서　$x=5$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\neq 5$인 실수$\}$　　답 $\{x|x\neq 5$인 실수$\}$

05 $x-2=0$에서　$x=2$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\neq 2$인 실수$\}$　　답 $\{x|x\neq 2$인 실수$\}$

06 $x^2-1=0$에서　$x^2=1$
$\therefore x=\pm 1$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\neq -1, x\neq 1$인 실수$\}$
답 $\{x|x\neq -1, x\neq 1$인 실수$\}$

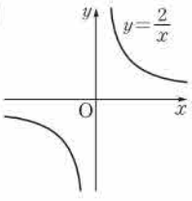
07 $x^2-2x-8=0$에서　$(x+2)(x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\neq -2, x\neq 4$인 실수$\}$
답 $\{x|x\neq -2, x\neq 4$인 실수$\}$

08 $x^2+1>0$이므로 주어진 함수의 분모가 0이 되도록 하는 실수 x의 값이 존재하지 않는다.
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x$는 실수$\}$　　답 $\{x|x$는 실수$\}$

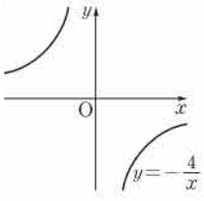
개념 65 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프와 성질

본책 174쪽

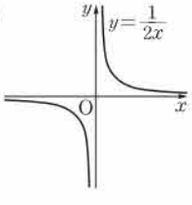
09 답



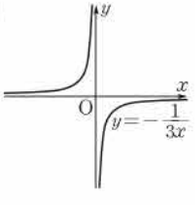
10 답



11 답

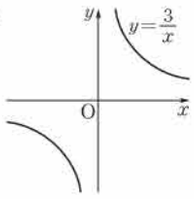


12 답

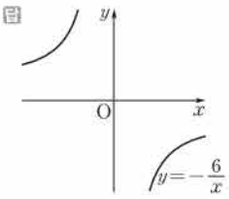


$y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프는 k의 절댓값이 커질수록 원점으로부터 멀어진다.

13 답



14 답



개념 66 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프

본책 175쪽

함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\frac{k}{x-p}+q$

15 답 $y=\frac{1}{x-1}+3$　　**16** 답 $y=-\frac{4}{x-2}-4$

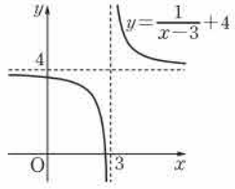
17 답 $y=\frac{5}{x+3}-2$　　**18** 답 $p=1, q=4$

19 답 $p=-2, q=7$　　**20** 답 $p=5, q=-3$

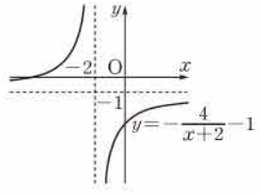
21 답 $p=2, q=1$　　**22** 답 $p=-6, q=4$

23 답 $p=-1, q=-5$

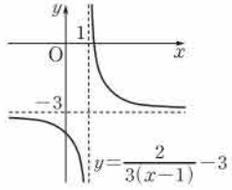
24 $y=\frac{1}{x-3}+4$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은
$x=3, y=4$
답 풀이 참조



25 $y=-\frac{4}{x+2}-1$의 그래프는 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은
$x=-2, y=-1$
답 풀이 참조



26 $y=\frac{2}{3(x-1)}-3$의 그래프는 $y=\frac{2}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은
$x=1, y=-3$
답 풀이 참조

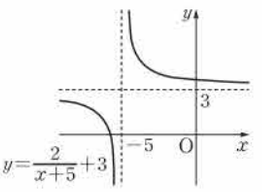


27 정의역은 $\{x|x\neq -5$인 실수$\}$이다. ×

28 ○

29 그래프의 점근선은 두 직선 $x=-5$, $y=3$이다. ×

30 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다. ○

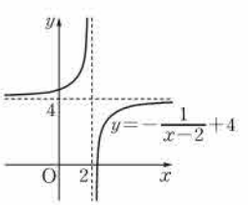


31 ○

32 그래프는 점 $(2, 4)$에 대하여 대칭이다. ×

33 ○

34 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지난다. ×



35 $k=2$, $p=3$, $q=-2$

3, −2, 3, 2, 3, −2, 3, 2, 2

유리함수의 그래프의 점근선이 직선 $x=p$, $y=q$이면 ➡ $y=\frac{k}{x-p}+q$로 놓는다.

36 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=3$이므로 함수의 식을 $y=\frac{k}{x+1}+3$ $(k<0)$이라 하면

$p=-1$, $q=3$

이 그래프가 원점을 지나므로

$0=k+3$ $\therefore k=-3$

$k=-3$, $p=-1$, $q=3$

k의 값의 부호는 그래프의 모양으로 판단한다.

개념 67 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프 본책 177쪽

37 $y=\frac{x+3}{x-5}=\frac{(x-5)+8}{x-5}=\frac{8}{x-5}+1$

$y=\frac{8}{x-5}+1$

38 $y=\frac{2x+9}{x+3}=\frac{2(x+3)+3}{x+3}=\frac{3}{x+3}+2$

$y=\frac{3}{x+3}+2$

39 $y=\frac{-9x+4}{3x-2}=\frac{-3(3x-2)-2}{3x-2}=-\frac{2}{3x-2}-3$

$y=-\frac{2}{3x-2}-3$

베이직쎈 BOX

분모의 x의 계수가 −1이므로 다음과 같이 분자, 분모에 각각 −1을 곱한 후 변형해도 된다.

$y=\frac{3x-5}{-x+2}$
$=\frac{-3x+5}{x-2}$
$=\frac{-3(x-2)-1}{x-2}$
$=-\frac{1}{x-2}-3$

40 $y=\frac{3x-5}{-x+2}=\frac{-3(-x+2)+1}{-x+2}=\frac{1}{-x+2}-3$
$=-\frac{1}{x-2}-3$

$y=-\frac{1}{x-2}-3$

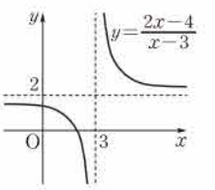
41 $y=\frac{2x-4}{x-3}=\frac{2(x-3)+2}{x-3}=\frac{2}{x-3}+2$

이므로 $y=\frac{2x-4}{x-3}$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

$x=3$, $y=2$

풀이 참조



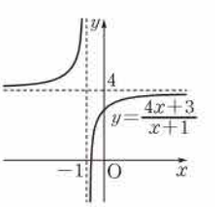
42 $y=\frac{4x+3}{x+1}=\frac{4(x+1)-1}{x+1}=-\frac{1}{x+1}+4$

이므로 $y=\frac{4x+3}{x+1}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 −1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

$x=-1$, $y=4$

풀이 참조



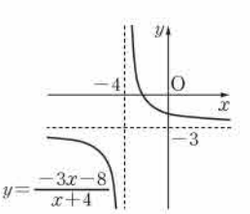
43 $y=\frac{-3x-8}{x+4}=\frac{-3(x+4)+4}{x+4}=\frac{4}{x+4}-3$

이므로 $y=\frac{-3x-8}{x+4}$의 그래프는 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 −4만큼, y축의 방향으로 −3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

$x=-4$, $y=-3$

풀이 참조



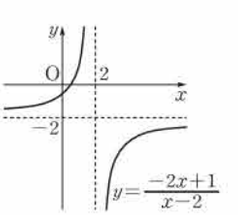
44 $y=\frac{-2x+1}{x-2}=\frac{-2(x-2)-3}{x-2}=-\frac{3}{x-2}-2$

이므로 $y=\frac{-2x+1}{x-2}$의 그래프는 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-2$

풀이 참조



베이직쎈 BOX

개념 68 유리함수의 최대·최소

본책 178쪽

45 $y=\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{(x-3)+3}{x-3}=\dfrac{3}{x-3}+1$

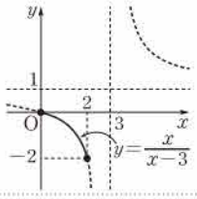
이므로 $y=\dfrac{x}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le 2$에서 $y=\dfrac{x}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=0$일 때 최댓값 0,

$x=2$일 때 최솟값 -2

를 갖는다.



$\dfrac{0}{0-3}=0$

$\dfrac{2}{2-3}=-2$

답 최댓값: 0, 최솟값: -2

46 $y=\dfrac{-2x}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)-2}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}-2$

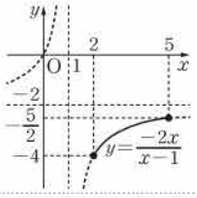
이므로 $y=\dfrac{-2x}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 5$에서 $y=\dfrac{-2x}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=5$일 때 최댓값 $-\dfrac{5}{2}$,

$x=2$일 때 최솟값 -4

를 갖는다.



$\dfrac{-10}{5-1}=-\dfrac{5}{2}$

$\dfrac{-4}{2-1}=-4$

답 최댓값: $-\dfrac{5}{2}$, 최솟값: -4

47 $y=\dfrac{x-4}{x+2}=\dfrac{(x+2)-6}{x+2}=-\dfrac{6}{x+2}+1$

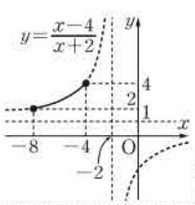
이므로 $y=\dfrac{x-4}{x+2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-8\le x\le -4$에서 $y=\dfrac{x-4}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-4$일 때 최댓값 4,

$x=-8$일 때 최솟값 2

를 갖는다.



$\dfrac{-4-4}{-4+2}=4$

$\dfrac{-8-4}{-8+2}=2$

답 최댓값: 4, 최솟값: 2

48 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+2$

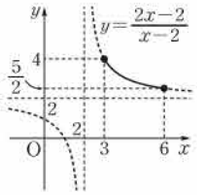
이므로 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3\le x\le 6$에서 $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=3$일 때 최댓값 4,

$x=6$일 때 최솟값 $\dfrac{5}{2}$

를 갖는다.



$\dfrac{6-2}{3-2}=4$

$\dfrac{12-2}{6-2}=\dfrac{5}{2}$

답 최댓값: 4, 최솟값: $\dfrac{5}{2}$

49 $y=\dfrac{5-3x}{x-3}=\dfrac{-3(x-3)-4}{x-3}=-\dfrac{4}{x-3}-3$

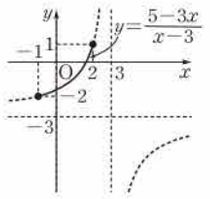
이므로 $y=\dfrac{5-3x}{x-3}$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 2$에서 $y=\dfrac{5-3x}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=2$일 때 최댓값 1,

$x=-1$일 때 최솟값 -2

를 갖는다.



$\dfrac{5-6}{2-3}=1$

$\dfrac{5+3}{-1-3}=-2$

답 최댓값: 1, 최솟값: -2

50 $y=\dfrac{-2x-3}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)+1}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}-2$

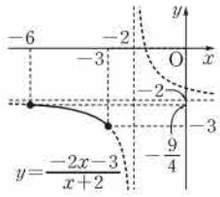
이므로 $y=\dfrac{-2x-3}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-6\le x\le -3$에서 $y=\dfrac{-2x-3}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-6$일 때 최댓값 $-\dfrac{9}{4}$,

$x=-3$일 때 최솟값 -3

을 갖는다.



$\dfrac{12-3}{-6+2}=-\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{6-3}{-3+2}=-3$

답 최댓값: $-\dfrac{9}{4}$, 최솟값: -3

$y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$에서 k의 값의 부호를 확인한다.

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 179쪽

01 답 ㄴ, ㄹ

02 ④ 치역은 $\{y|y\neq 0$인 실수$\}$이다. 답 ④

03 함수 $y=\dfrac{4}{x-a}+3$의

정의역은 $\{x|x\neq a$인 실수$\}$,

치역은 $\{y|y\neq 3$인 실수$\}$

이므로 $a=2$, $b=3$

$\therefore a-b=-1$ 답 -1

베이직쎈 BOX

04 ㄱ. $x=-1$, $y=0$을 주어진 함수의 식에 대입하면

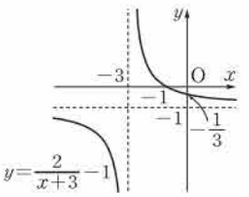
$0=\frac{2}{-1+3}-1$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(-1, 0)$을 지난다.

ㄴ. 정의역은 $\{x|x\neq -3$인 실수$\}$이다.

ㄷ. 점 $(-3, -1)$에 대하여 대칭이다.

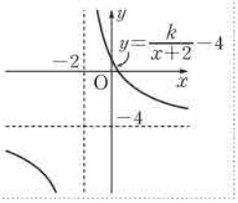
ㄹ. 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. ③

$x=5$, $y=-4$를 그래프의 식에 대입한다.

05 함수 $y=\frac{k}{x+2}-4$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $k>0$이어야 한다.

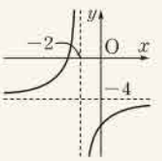


또 $x=0$에서의 y의 값이 0보다 커야 하므로

$\frac{k}{0+2}-4>0$, $\frac{k}{2}>4$

$\therefore k>8$ $k>8$

$k<0$이면 다음 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



$x=0$에서의 y의 값이 0보다 작거나 같으면 제1사분면을 지나지 않는다.

06 $y=\frac{ax+5}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+5}{x+b}=\frac{-ab+5}{x+b}+a$이므로

정의역은 $\{x|x\neq -b$인 실수$\}$,

치역은 $\{y|y\neq a$인 실수$\}$

따라서 $-b=1$, $a=-3$, 즉 $a=-3$, $b=-1$이므로

$ab=3$ ②

$m=-4$, $n=2$이면

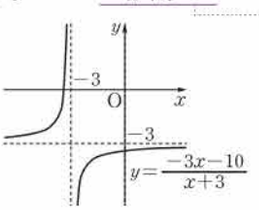
$-mn-1$

$=-(-4)\cdot 2-1$

$=8-1=7$

07 $y=\frac{-3x-10}{x+3}=\frac{-3(x+3)-1}{x+3}=-\frac{1}{x+3}-3$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다. ①

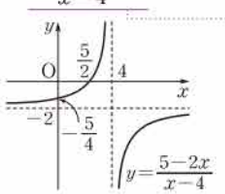


그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=-3$이다.

08 $y=\frac{5-2x}{x-4}=\frac{-2(x-4)-3}{x-4}=-\frac{3}{x-4}-2$

ㄱ. 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는다.

ㄴ. 점 $(4, -2)$에 대하여 대칭이다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. ④

그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=-2$이다.

09 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{k}{x-2}-5$

이 그래프가 점 $(5, -4)$를 지나므로

$-4=\frac{k}{5-2}-5$, $\frac{k}{3}=1$

$\therefore k=3$ 3

주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하였을 때 $k=2$인 것을 찾는다.

10 $y=\frac{2x+7}{x+4}=\frac{2(x+4)-1}{x+4}=-\frac{1}{x+4}+2$

이므로 $y=\frac{2x+7}{x+4}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore m=-4$, $n=2$ $m=-4$, $n=2$

다른 풀이 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{x-m}+n$

$=\frac{-1+nx-mn}{x-m}$

$=\frac{nx-mn-1}{x-m}$

이 식이 $y=\frac{2x+7}{x+4}$과 일치하므로

$m=-4$, $n=2$

11 $y=\frac{x-1}{x-3}=\frac{(x-3)+2}{x-3}=\frac{2}{x-3}+1$

이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{2}{x-a-3}+1+b$

이 식이

$y=\frac{-3x-7}{x+3}=\frac{-3(x+3)+2}{x+3}=\frac{2}{x+3}-3$

과 일치하므로

$-a-3=3$, $1+b=-3$

따라서 $a=-6$, $b=-4$이므로

$b-a=2$ ②

12 ㄱ. $y=\frac{x-2}{x-4}=\frac{(x-4)+2}{x-4}=\frac{2}{x-4}+1$

ㄴ. $y=\frac{2x-8}{x-3}=\frac{2(x-3)-2}{x-3}=-\frac{2}{x-3}+2$

ㄷ. $y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+3$

ㄹ. $y=\frac{2x+3}{2x+2}=\frac{(2x+2)+1}{2x+2}=\frac{1}{2(x+1)}+1$

이상에서 그 그래프가 평행이동에 의하여 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다. ②

13 $y=\frac{1}{3x-6}+k=\frac{1}{3(x-2)}+k$

이므로 $y=\frac{1}{3x-6}+k$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=k$

따라서 $a=2$, $k=-2$이므로

$ak=-4$ ①

베이직쎈 BOX

14 $y=\dfrac{ax+4}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab+4}{x+b}=\dfrac{-ab+4}{x+b}+a$

이므로 $y=\dfrac{ax+4}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b,\ y=a$

따라서 $-b=-1,\ a=6$, 즉 $a=6,\ b=1$이므로

$a+b=7$ 답 7

15 $y=\dfrac{6+3x}{x+a}=\dfrac{3(x+a)-3a+6}{x+a}=\dfrac{-3a+6}{x+a}+3$

이므로 $y=\dfrac{6+3x}{x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=3$

따라서 그래프는 점 $(-a,\ 3)$에 대하여 대칭이므로

$-a=-1,\ 3=b$ $\therefore a=1,\ b=3$

$\therefore ab=3$ 답 3

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는 점근선의 교점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

16 점근선의 방정식이 $x=3,\ y=2$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-3}+2\ (k\neq0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(5,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{k}{5-3}+2,$ $\dfrac{k}{2}=-1$ $\therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-2}{x-3}+2=\dfrac{-2+2(x-3)}{x-3}=\dfrac{2x-8}{x-3}$

따라서 $a=2,\ b=8,\ c=-3$이므로

$a+b-c=13$ 답 13

17 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2,\ y=4$이므로

$a=2,\ b=4$

즉 $y=\dfrac{k}{x+2}+4$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{0+2}+4,$ $\dfrac{k}{2}=-2$ $\therefore k=-4$

$\therefore k+a+b=2$ 답 ③

18 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3,\ y=-1$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-3}-1\ (k>0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{4-3}-1$ $\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{1}{x-3}-1=\dfrac{1-(x-3)}{x-3}=\dfrac{-x+4}{x-3}$

따라서 $a=-1,\ b=4,\ c=3$이므로

$abc=-12$ 답 −12

19 $y=\dfrac{3x-5}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\dfrac{1}{x-a-2}+3$

이 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a+2,\ y=3$

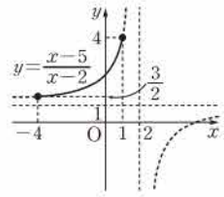
이때 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3,\ y=3$이므로

$a+2=-3$ $\therefore a=-5$ 답 −5

20 $y=\dfrac{x-5}{x-2}=\dfrac{(x-2)-3}{x-2}=-\dfrac{3}{x-2}+1$

이므로 $y=\dfrac{x-5}{x-2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le x\le1$에서 $y=\dfrac{x-5}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=1$일 때 최댓값 4, $\dfrac{1-5}{1-2}=4$

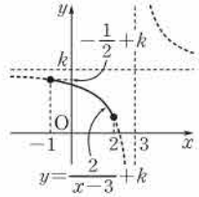
$x=-4$일 때 최솟값 $\dfrac{3}{2}$ $\dfrac{-4-5}{-4-2}=\dfrac{3}{2}$

을 갖는다.

즉 $M=4,\ m=\dfrac{3}{2}$이므로 $Mm=6$ 답 6

21 $y=\dfrac{2}{x-3}+k$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le2$에서 $y=\dfrac{2}{x-3}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최댓값 $-\dfrac{1}{2}+k$ $\dfrac{2}{-1-3}+k=-\dfrac{1}{2}+k$

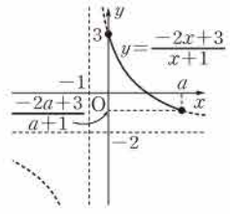
를 갖는다.

즉 $-\dfrac{1}{2}+k=\dfrac{5}{2}$이므로 $k=3$ 답 ②

22 $y=\dfrac{-2x+3}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)+5}{x+1}=\dfrac{5}{x+1}-2$

이므로 $y=\dfrac{-2x+3}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le a$에서 $y=\dfrac{-2x+3}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=0$일 때 최댓값 3, $\dfrac{0+3}{0+1}=3$

$x=a$일 때 최솟값 $\dfrac{-2a+3}{a+1}$

을 갖는다.

즉 $b=3,\ \dfrac{-2a+3}{a+1}=-1$이므로 $\dfrac{-2a+3}{a+1}=-1$에서

$-2a+3=-a-1$ $\therefore a=4$

$\therefore a-b=1$ 답 ①

23 (1) $y=\frac{x+1}{x+2}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+2)=x+1$, $xy+2y=x+1$

$x(y-1)=-2y+1$ $\therefore x=\frac{-2y+1}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-2x+1}{x-1}$

(2) $y=\frac{2x-3}{x+3}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+3)=2x-3$, $xy+3y=2x-3$

$x(y-2)=-3y-3$ $\therefore x=\frac{-3y-3}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-3x-3}{x-2}$

답 (1) $y=\frac{-2x+1}{x-1}$ (2) $y=\frac{-3x-3}{x-2}$

24 $y=\frac{2}{x}-1$이라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y+1=\frac{2}{x}$, $x(y+1)=2$

$\therefore x=\frac{2}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{2}{x+1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{2}{x+1}$

따라서 $m=2$, $n=1$이므로 $mn=2$ 답 ④

25 $y=\frac{ax-1}{x-2}$이라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x-2)=ax-1$, $xy-2y=ax-1$

$x(y-a)=2y-1$ $\therefore x=\frac{2y-1}{y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{2x-1}{x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{2x-1}{x-a}$

따라서 $\frac{ax-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x-a}$이므로 $a=2$ 답 2

26 주어진 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$y=\frac{4x+1}{ax-3}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(ax-3)=4x+1$, $axy-3y=4x+1$

$x(ay-4)=3y+1$ $\therefore x=\frac{3y+1}{ay-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{3x+1}{ax-4}$

이 식이 $y=\frac{bx+1}{-2x-4}$과 일치하므로

$a=-2$, $b=3$

$\therefore ab=-6$ 답 ②

학교 시험 기출로 실전 감각 UP! 본책 183쪽

01 전략 주어진 등식의 좌변을 계산한 후 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 계산하면

$\frac{a}{x-1}+\frac{x+b}{x^2+x+1}$

$=\frac{a(x^2+x+1)+(x+b)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{(a+1)x^2+(a+b-1)x+a-b}{x^3-1}$

따라서 $\frac{(a+1)x^2+(a+b-1)x+a-b}{x^3-1}=\frac{2x-5}{x^3-1}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+1=0$, $a+b-1=2$, $a-b=-5$

즉 $a=-1$, $b=4$이므로

$ab=-4$ 답 ④

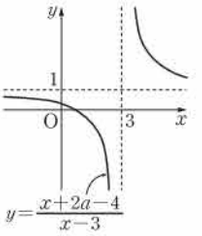
02 전략 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q\,(k\neq 0)$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\frac{x+2a-4}{x-3}=\frac{(x-3)+2a-1}{x-3}=\frac{2a-1}{x-3}+1$

이고 a가 자연수이므로

$2a-1>0$

$y=\frac{x+2a-4}{x-3}$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 y의 값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$\frac{0+2a-4}{0-3}\geq 0$

$2a-4\leq 0$ $\therefore a\leq 2$

따라서 자연수 a는 1, 2이므로 구하는 합은

$1+2=3$ 답 ①

03 전략 먼저 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q\,(k\neq 0)$ 꼴로 변형한다.

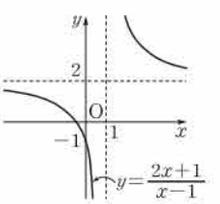
풀이 $y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}+2$

② $x=0$일 때 $y=\frac{0+1}{0-1}=-1$이므로 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, -1)$이다.

③ $y=\frac{3}{x-1}+2$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

④ 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이다.

⑤ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.



답 ⑤

베이직쎈 BOX

$x=$(y에 대한 식) 꼴로 나타낸다.

양변의 분모가 같으므로 분자의 동류항의 계수를 비교한다.

$x=0$에서의 y의 값이 0보다 작으면 제3사분면을 지난다.

그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이고 점 $(0, -1)$을 지난다.

베이직쎈 BOX

04 전략 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프는 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

풀이 $y=\frac{-2x+a}{x+1}=\frac{-2(x+1)+2+a}{x+1}=\frac{2+a}{x+1}-2$

이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{2+a}{x-b+1}-2+c$$

이 식이 $y=-\frac{3}{x}$과 일치하므로

$$2+a=-3,\ -b+1=0,\ -2+c=0$$

따라서 $a=-5$, $b=1$, $c=2$이므로

$$abc=-10$$ ③

다른 풀이 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 $-c$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{-3}{x+b}-c$$

이 식이 $y=\frac{-2x+a}{x+1}=\frac{2+a}{x+1}-2$와 일치하므로

$$2+a=-3,\ b=1,\ c=2 \quad \therefore a=-5$$

$$\therefore abc=-10$$

05 전략 두 점근선의 교점의 좌표가 (p, q)이면 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

풀이 주어진 함수의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(-2, 3)$이므로 점근선의 방정식은

$$x=-2,\ y=3$$

즉 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x+2}+3\ (k\neq0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

으로 놓으면 이 함수의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$$0=\frac{k}{2+2}+3,\quad \frac{k}{4}=-3 \quad \therefore k=-12$$

$k=-12$를 ㉠에 대입하면

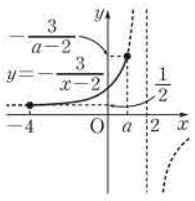
$$y=\frac{-12}{x+2}+3=\frac{-12+3(x+2)}{x+2}=\frac{3x-6}{x+2}$$

따라서 $a=3$, $b=6$, $c=2$이므로

$$a+b-c=7$$ ④

06 전략 주어진 x의 값의 범위에서 함수의 그래프를 그려 본다.

풀이 $-4\le x\le a$에서 $y=-\frac{3}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=a$일 때 최댓값 $-\frac{3}{a-2}$,

$x=-4$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$

을 갖는다.

즉 $-\frac{3}{a-2}=3$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $-\frac{3}{a-2}=3$에서

$$a-2=-1 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore a-b=\frac{1}{2}$$ ①

㉠−㉡을 하면 $3a=-9$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $-3+b=-8$ $\therefore b=-5$

$-\frac{3}{-4-2}=\frac{1}{2}$

07 전략 주어진 함수를 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$ 꼴로 변형하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{ax+2}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab+2}{x+b}$

$$=\frac{-ab+2}{x+b}+a$$

이므로 이 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-b,\ y=a \quad \therefore a=-1,\ b=1$$

$$\therefore f(x)=\frac{-x+2}{x+1}$$

ㄱ. $f(1)=\frac{-1+2}{1+1}=\frac{1}{2}$이므로 그래프는 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 지난다.

ㄴ. $y=\frac{-x+2}{x+1}$라 하고 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$$y(x+1)=-x+2, \quad xy+y=-x+2$$

$$x(y+1)=-y+2$$

$$\therefore x=\frac{-y+2}{y+1}$$

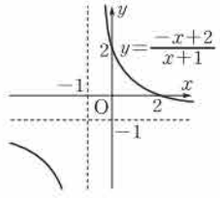
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-x+2}{x+1}$

$$\therefore f(x)=f^{-1}(x)$$

ㄷ. $f(x)=\frac{-x+2}{x+1}=\frac{3}{x+1}-1$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 모든 사분면을 지난다.



이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. ⑤

08 전략 함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (m, n)을 지나면 $y=f(x)$의 그래프는 점 (n, m)을 지남을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{ax+b}{x+3}$의 그래프가 점 $(1, -2)$를 지나므로

$$-2=\frac{a+b}{1+3} \quad \therefore a+b=-8 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $f(x)=\frac{ax+b}{x+3}$의 역함수의 그래프가 점 $(1, -2)$를 지나면 $f(x)=\frac{ax+b}{x+3}$의 그래프는 점 $(-2, 1)$을 지나므로

$$1=\frac{-2a+b}{-2+3} \quad \therefore -2a+b=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-5$

$$\therefore a-b=2$$ ④

09 전략 분자, 분모를 각각 인수분해 한 후 약분한다.

풀이 $\frac{a^2-9b^2}{a^2-5ab+6b^2}\times\frac{a-2b}{a^2+4ab+3b^2}$

$$=\frac{(a+3b)(a-3b)}{(a-2b)(a-3b)}\times\frac{a-2b}{(a+b)(a+3b)}$$

$$=\frac{1}{a+b}$$ $\frac{1}{a+b}$

베이직쎈 BOX

10 전략 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)(A\neq B)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$

$=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$
$+\cdots+\frac{1}{(x+9)(x+10)}$

$=\frac{1}{x+1-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$
$+\frac{1}{x+2-(x+1)}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$
$+\frac{1}{x+3-(x+2)}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$
$+\cdots+\frac{1}{x+10-(x+9)}\left(\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x+10}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$
$+\cdots+\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x+10}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}$

$\therefore f(10)=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20}$ 답 $\frac{1}{20}$

11 전략 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{k}{x-p}+q$이다.

풀이 $y=-\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{5}{x+2}+4$ ··· ❶

이 그래프가 점 $(3, a)$를 지나므로

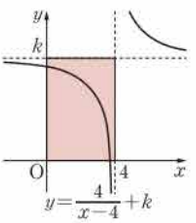
$a=-\frac{5}{3+2}+4=3$ ··· ❷

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	50 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	50 %

12 전략 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q(k\neq 0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

풀이 함수 $y=\frac{4}{x-4}+k$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=k$이므로 오른쪽 그림에서 두 점근선과 x축, y축으로 둘러싸인 직사각형의 넓이는 $4k$이다.



따라서 $4k=24$이므로

$k=6$ 답 6

13 전략 그래프의 점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이면 함수의 식을 $y=\frac{k}{x-p}+q(k\neq 0)$로 놓는다.

풀이 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-4$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-2}-4(k<0)$ ····· ㉠

로 놓을 수 있다. ··· ❶

이 함수의 그래프가 점 $(0, -3)$을 지나므로

$-3=\frac{k}{0-2}-4$, $-\frac{k}{2}=1$ $\therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-2}{x-2}-4=\frac{-2-4(x-2)}{x-2}=\frac{-4x+6}{x-2}$ ··· ❷

따라서 $a=-4$, $b=6$, $c=-2$이므로

$a-b+c=-12$ ··· ❸

답 -12

단계	채점 기준	비율
❶	함수의 식을 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 꼴로 놓을 수 있다.	20 %
❷	함수의 식을 구할 수 있다.	60 %
❸	$a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

14 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 한 점에서 만나면 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 1이다.

풀이 $y=\frac{2}{x}$의 그래프가 직선 $y=-x+k$와 한 점에서 만나려면 방정식 $\frac{2}{x}=-x+k$, 즉 $x^2-kx+2=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 한다. ··· ❶

즉 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot 1\cdot 2=0$

$k^2=8$ $\therefore k=\pm 2\sqrt{2}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$2\sqrt{2}+(-2\sqrt{2})=0$ ··· ❷

답 0

단계	채점 기준	비율
❶	함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만날 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷	모든 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	60 %

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근
② $D=0$ ➡ 중근
③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근

$x=3$, $y=a$를 그래프의 식에 대입한다.

11 무리식과 무리함수

24 무리식

개념 69 무리식

본책 185쪽

01 ◯

02 ×

03 ×

04 ◯

05 ×

06 ◯

07 $2x+6\geq 0$이므로
$x\geq -3$
$x\geq -3$

08 $1-3x\geq 0$이므로
$x\leq \frac{1}{3}$
$x\leq \frac{1}{3}$

09 $8+4x\geq 0$, $6-3x\geq 0$이므로
$x\geq -2$, $x\leq 2$
$\therefore\ -2\leq x\leq 2$
$-2\leq x\leq 2$

수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

10 $5x+5>0$이므로
$x>-1$
$x>-1$

11 $2x-4>0$, $x>0$이므로
$x>2$
$x>2$

개념 70 무리식의 계산

본책 186쪽

12 $(2-\sqrt{2x+3})(2+\sqrt{2x+3})$
$=2^2-(\sqrt{2x+3})^2$
$=4-(2x+3)$
$=-2x+1$
$-2x+1$

13 $(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1})$
$=(\sqrt{2x-1})^2-(\sqrt{x-1})^2$
$=2x-1-(x-1)$
$=x$
x

14 $\sqrt{x+1}$, 1, $\sqrt{x+1}$, 1, $\sqrt{x+1}$, 1

15 $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})}$
$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{x-(x+2)}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{-2}$
$=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}$
$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}$

$\sqrt{x}-\sqrt{x+2}$를 분자, 분모에 각각 곱한다.

베이직쎈 BOX

$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}$를 분자, 분모에 각각 곱한다.

x의 계수가 무리수이지만 근호 안에 문자가 포함되지 않은 식이므로 유리식이다.

$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$를 분자, 분모에 각각 곱한다.

수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

$\sqrt{x}-\sqrt{x+2}$를 분자, 분모에 각각 곱한다.

16 $\frac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}}$
$=\frac{2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})}$
$=\frac{2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2})}{x+4-(x+2)}$
$=\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}$
$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}$

17 $\frac{x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$
$=\frac{x(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$
$=\frac{x(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{1+x-(1-x)}$
$=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$
$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$

18 $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$
$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$
$=\frac{2\sqrt{y}}{x-y}$
$\frac{2\sqrt{y}}{x-y}$

19 $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$
$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$
$+\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$
$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}+\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{x+1-(x+2)}$
$=-(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})$
$=-\sqrt{x}+\sqrt{x+2}$
$-\sqrt{x}+\sqrt{x+2}$

20 $\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$
$=\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}-\frac{(\sqrt{x}+3)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$
$=\frac{x-6\sqrt{x}+9-(x+6\sqrt{x}+9)}{x-9}$
$=-\frac{12\sqrt{x}}{x-9}$
$-\frac{12\sqrt{x}}{x-9}$

자신감 UP! 기본 & 핵심 유형

본책 187쪽

01 $4+2x\geq 0$, $3-x\geq 0$이므로
$x\geq -2$, $x\leq 3$ $\therefore\ -2\leq x\leq 3$
따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다.
④

02 $5+x\geq 0$, $4x+1>0$이므로

$x\geq -5$, $x>-\frac{1}{4}$

$\therefore x>-\frac{1}{4}$ 답 $x>-\frac{1}{4}$

03 $9-3x\geq 0$이므로 $x\leq 3$

이때 $x+2\neq 0$이어야 하므로 $x\neq -2$

$\therefore x<-2$ 또는 $-2<x\leq 3$

답 $x<-2$ 또는 $-2<x\leq 3$

04 $\frac{1}{2+\sqrt{x+4}}-\frac{1}{2-\sqrt{x+4}}$

$=\frac{2-\sqrt{x+4}}{(2+\sqrt{x+4})(2-\sqrt{x+4})}$

$-\frac{2+\sqrt{x+4}}{(2-\sqrt{x+4})(2+\sqrt{x+4})}$

$=\frac{2-\sqrt{x+4}-(2+\sqrt{x+4})}{4-(x+4)}$

$=\frac{2\sqrt{x+4}}{x}$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로

$ab=8$ 답 8

05 $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$

$+\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\frac{1+x-2\sqrt{(1+x)(1-x)}+1-x}{1+x-(1-x)}$

$+\frac{1+x+2\sqrt{(1+x)(1-x)}+1-x}{1+x-(1-x)}$

$=\frac{2-2\sqrt{(1+x)(1-x)}+2+2\sqrt{(1+x)(1-x)}}{2x}$

$=\frac{2}{x}$

$\therefore k=2$ 답 ④

06 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$

$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}$

$=-\sqrt{x-1}+\sqrt{x}$

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(25)$

$=(-0+1)+(-1+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$+\cdots+(-\sqrt{24}+\sqrt{25})$

$=\sqrt{25}$

$=5$ 답 5

베이직쎈 BOX

07 $\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

$=\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}-\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$

$=\frac{\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}-1)}{x-1}$

$=\frac{2}{x-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ ← $x=\sqrt{3}$을 대입한다.

$=\sqrt{3}+1$ 답 $\sqrt{3}+1$

$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$

$=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\sqrt{3}+1$

08 $\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}$

$=\frac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})^2}{(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x})(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x})}$

$=\frac{3+x-2\sqrt{(3+x)(3-x)}+3-x}{3+x-(3-x)}$

$=\frac{6-2\sqrt{9-x^2}}{2x}=\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}$ ← $x=\sqrt{5}$를 대입한다.

$=\frac{3-2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 답 ①

25 무리함수

개념 71 무리함수

본책 188쪽

01 답 ○ **02** 답 ×

03 답 ○ **04** 답 ×

05 답 ○ **06** 답 ○

07 $x-5\geq 0$에서 $x\geq 5$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\geq 5\}$

답 $\{x|x\geq 5\}$

08 $2x-2\geq 0$에서 $x\geq 1$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\geq 1\}$

답 $\{x|x\geq 1\}$

09 $12+3x\geq 0$에서 $x\geq -4$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\geq -4\}$

답 $\{x|x\geq -4\}$

10 $4-x\geq 0$에서 $x\leq 4$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\leq 4\}$

답 $\{x|x\leq 4\}$

11 $-2x+6\geq 0$에서 $x\leq 3$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\leq 3\}$

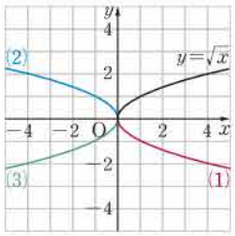
답 $\{x|x\leq 3\}$

베이직쎈 BOX

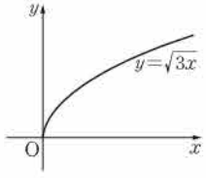
개념 72 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$의 그래프와 성질

본책 189쪽

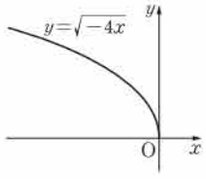
12 풀이 참조



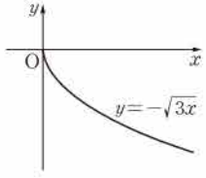
13 $y=\sqrt{3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\geq 0\}$,
치역은 $\{y|y\geq 0\}$
풀이 참조



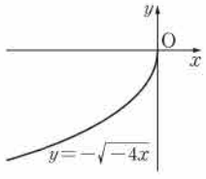
14 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\leq 0\}$,
치역은 $\{y|y\geq 0\}$
풀이 참조



15 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\geq 0\}$,
치역은 $\{y|y\leq 0\}$
풀이 참조



16 $y=-\sqrt{-4x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\leq 0\}$,
치역은 $\{y|y\leq 0\}$
풀이 참조



개념 73 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프

본책 190쪽

17 풀이 $y=\sqrt{x-1}+2$

18 풀이 $y=-\sqrt{6(x+1)}+4$

19 풀이 $y=\sqrt{-2(x+3)}-2$

20 풀이 $p=1$, $q=-5$

21 풀이 $p=-3$, $q=-3$

22 풀이 $p=2$, $q=4$

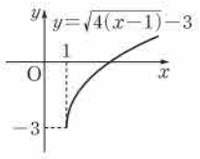
23 풀이 $p=2$, $q=1$

24 풀이 $p=-4$, $q=3$

25 풀이 $p=-1$, $q=-6$

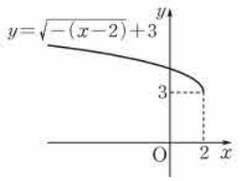
$x=4$, $y=-6$을 그래프의 식에 대입하면
$-6=-\sqrt{2\cdot(4+4)}-2$
이므로 그래프는 점 $(4, -6)$을 지난다.

26 $y=\sqrt{4(x-1)}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\geq 1\}$,
치역은 $\{y|y\geq -3\}$



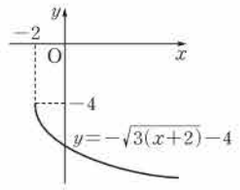
풀이 참조

27 $y=\sqrt{-(x-2)}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\leq 2\}$,
치역은 $\{y|y\geq 3\}$



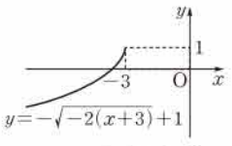
풀이 참조

28 $y=-\sqrt{3(x+2)}-4$의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\geq -2\}$,
치역은 $\{y|y\leq -4\}$



풀이 참조

29 $y=-\sqrt{-2(x+3)}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고
정의역은 $\{x|x\leq -3\}$,
치역은 $\{y|y\leq 1\}$



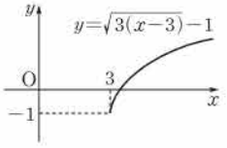
풀이 참조

30 ○

31 치역은 $\{y|y\geq -1\}$이다. ×

32 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. ×

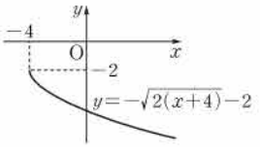
33 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제4사분면만을 지난다. ○



34 정의역은 $\{x|x\geq -4\}$이다. ×

35 ○ **36** ○

37 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면, 제4사분면만을 지난다. ×



베이직쎈 BOX

38 $a=2$, $p=2$, $q=3$

> , 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2

39 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을 $y=-\sqrt{a(x+1)}-1$이라 하면

$p=-1$, $q=-1$

이 그래프가 점 $(-2, -3)$을 지나므로

$-3=-\sqrt{a(-2+1)}-1$ $\therefore a=-4$

$a=-4$, $p=-1$, $q=-1$

• a의 값의 부호는 그래프의 모양으로 판단한다.

• 양변에 -1을 곱하면 $3=\sqrt{-a}+1$, $\sqrt{-a}=2$, $-a=4$, $\therefore a=-4$

개념 74 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프

본책 192쪽

40 $y=\sqrt{3x+6}-2=\sqrt{3(x+2)}-2$

$y=\sqrt{3(x+2)}-2$

41 $y=-\sqrt{4x+2}+3=-\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}+3$

$y=-\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}+3$

42 $y=\sqrt{-x-1}+4=\sqrt{-(x+1)}+4$

$y=\sqrt{-(x+1)}+4$

43 $y=-\sqrt{-5x+10}+2=-\sqrt{-5(x-2)}+2$

$y=-\sqrt{-5(x-2)}+2$

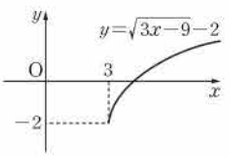
44 $y=\sqrt{3x-9}-2=\sqrt{3(x-3)}-2$

이므로 $y=\sqrt{3x-9}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\geq 3\}$,

치역은 $\{y|y\geq -2\}$



풀이 참조

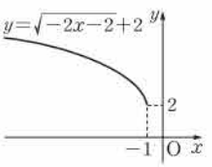
45 $y=\sqrt{-2x-2}+2=\sqrt{-2(x+1)}+2$

이므로 $y=\sqrt{-2x-2}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\leq -1\}$,

치역은 $\{y|y\geq 2\}$



풀이 참조

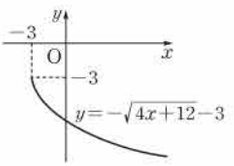
46 $y=-\sqrt{4x+12}-3=-\sqrt{4(x+3)}-3$

이므로 $y=-\sqrt{4x+12}-3$의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\geq -3\}$,

치역은 $\{y|y\leq -3\}$



풀이 참조

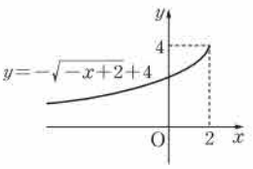
47 $y=-\sqrt{-x+2}+4=-\sqrt{-(x-2)}+4$

이므로 $y=-\sqrt{-x+2}+4$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역은 $\{x|x\leq 2\}$,

치역은 $\{y|y\leq 4\}$



풀이 참조

개념 75 무리함수의 최대·최소

본책 193쪽

48 $y=\sqrt{3x-3}+1=\sqrt{3(x-1)}+1$

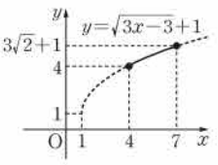
이므로 $y=\sqrt{3x-3}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $4\leq x\leq 7$에서 함수 $y=\sqrt{3x-3}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=7$일 때 최댓값 $3\sqrt{2}+1$,

$x=4$일 때 최솟값 4

를 갖는다.



• $\sqrt{3\cdot 7-3}+1=3\sqrt{2}+1$

• $\sqrt{3\cdot 4-3}+1=4$

최댓값: $3\sqrt{2}+1$, 최솟값: 4

49 $y=\sqrt{6-2x}-3=\sqrt{-2(x-3)}-3$

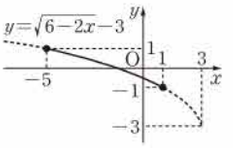
이므로 $y=\sqrt{6-2x}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-5\leq x\leq 1$에서 함수 $y=\sqrt{6-2x}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-5$일 때 최댓값 1,

$x=1$일 때 최솟값 -1

을 갖는다.



• $\sqrt{6-2\cdot(-5)}-3=1$

• $\sqrt{6-2\cdot 1}-3=-1$

최댓값: 1, 최솟값: -1

50 $y=-\sqrt{-x+6}-2=-\sqrt{-(x-6)}-2$

이므로 $y=-\sqrt{-x+6}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

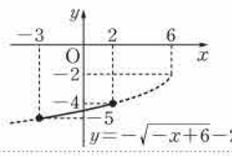
베이직쎈 BOX

따라서 $-3\le x\le 2$에서 함수 $y=-\sqrt{-x+6}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=2$일 때 최댓값 -4,

$x=-3$일 때 최솟값 -5

를 갖는다.



답 최댓값: -4, 최솟값: -5

$-\sqrt{-2+6}-2=-4$

$-\sqrt{3+6}-2=-5$

51 $y=1-\sqrt{2x+8}=-\sqrt{2(x+4)}+1$

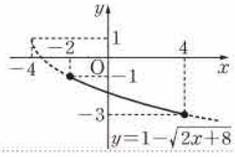
이므로 $y=1-\sqrt{2x+8}$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le 4$에서 함수 $y=1-\sqrt{2x+8}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-2$일 때 최댓값 -1,

$x=4$일 때 최솟값 -3

을 갖는다.



답 최댓값: -1, 최솟값: -3

$x=-1$, $y=0$을 직선의 방정식에 대입한다.

직선 $y=x+k$가 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프에 접하므로 이 x에 대한 이차방정식은 중근을 갖는다.

$1-\sqrt{2\cdot(-2)+8}=-1$

$1-\sqrt{2\cdot 4+8}=-3$

52 $y=\sqrt{1-4x}+4=\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{4}\right)}+4$

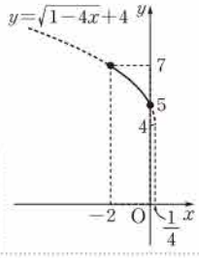
이므로 $y=\sqrt{1-4x}+4$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le 0$에서 함수 $y=\sqrt{1-4x}+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-2$일 때 최댓값 7,

$x=0$일 때 최솟값 5

를 갖는다.



답 최댓값: 7, 최솟값: 5

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근

② $D=0$ ➡ 중근

③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근

$\sqrt{1-4\cdot(-2)}+4=7$

$\sqrt{1-0}+4=5$

53 $y=2+\sqrt{3x+4}=\sqrt{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}+2$

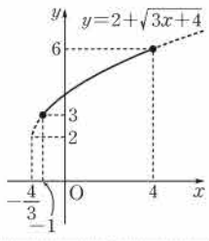
이므로 $y=2+\sqrt{3x+4}$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 4$에서 함수 $y=2+\sqrt{3x+4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=4$일 때 최댓값 6,

$x=-1$일 때 최솟값 3

을 갖는다.



답 최댓값: 6, 최솟값: 3

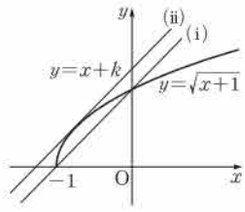
$2+\sqrt{3\cdot 4+4}=6$

$2+\sqrt{3\cdot(-1)+4}=3$

개념 76 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계

본책 194쪽

54 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1, 0)$을 지날 때,

$0=-1+k$ $\therefore k=1$

(ii) 직선 $y=x+k$가 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{x+1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-1)=0$

$-4k+5=0$ $\therefore k=\frac{5}{4}$

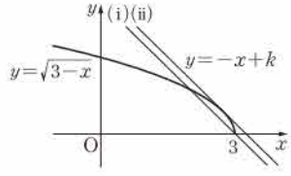
(1) $1\le k<\frac{5}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $k<1$ 또는 $k=\frac{5}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

(3) $k>\frac{5}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 만나지 않는다.

답 풀이 참조

55 $y=\sqrt{3-x}=\sqrt{-(x-3)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(3, 0)$을 지날 때,

$0=-3+k$ $\therefore k=3$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{3-x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$3-x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-(2k-1)x+k^2-3=0$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k-1)\}^2-4(k^2-3)=0$

$-4k+13=0$ $\therefore k=\frac{13}{4}$

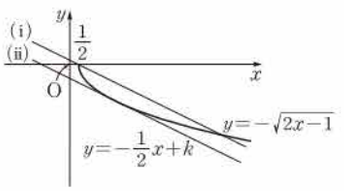
(1) $3\le k<\frac{13}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $k<3$ 또는 $k=\frac{13}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 한 점에서 만난다.

(3) $k>\frac{13}{4}$일 때, 함수 $y=\sqrt{3-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$는 만나지 않는다.

답 풀이 참조

56 $y=-\sqrt{2x-1}=-\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$을 지날 때,

$0=-\frac{1}{4}+k \quad \therefore k=\frac{1}{4}$

(ii) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 $y=-\sqrt{2x-1}$의 그래프에 접할 때,

$-\sqrt{2x-1}=-\frac{1}{2}x+k$의 양변을 제곱하면

$2x-1=\frac{1}{4}x^2-kx+k^2$

$\therefore \frac{1}{4}x^2-(k+2)x+k^2+1=0$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+2)\}^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot(k^2+1)=0$

$4k+3=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{4}$

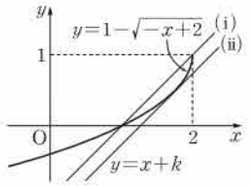
(1) $-\frac{3}{4}<k\le\frac{1}{4}$일 때, 함수 $y=-\sqrt{2x-1}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $k=-\frac{3}{4}$ 또는 $k>\frac{1}{4}$일 때, 함수 $y=-\sqrt{2x-1}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 한 점에서 만난다.

(3) $k<-\frac{3}{4}$일 때, 함수 $y=-\sqrt{2x-1}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$는 만나지 않는다.

풀이 참조

57 $y=1-\sqrt{-x+2}=-\sqrt{-(x-2)}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(2, 1)$을 지날 때,

$1=2+k \quad \therefore k=-1$

(ii) 직선 $y=x+k$가 $y=1-\sqrt{-x+2}$의 그래프에 접할 때,

$1-\sqrt{-x+2}=x+k$, 즉 $-\sqrt{-x+2}=x+k-1$의 양변을 제곱하면

$-x+2=x^2+k^2+1+2kx-2x-2k$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-2k-1=0$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-2k-1)=0$

$4k+5=0 \quad \therefore k=-\frac{5}{4}$

(1) $-\frac{5}{4}<k\le-1$일 때, 함수 $y=1-\sqrt{-x+2}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $k=-\frac{5}{4}$ 또는 $k>-1$일 때, 함수 $y=1-\sqrt{-x+2}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만난다.

(3) $k<-\frac{5}{4}$일 때, 함수 $y=1-\sqrt{-x+2}$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 만나지 않는다.

풀이 참조

베이직쎈 BOX

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$2x+8\ge0$에서 $x\ge-4$

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\,(a<0)$의 정의역은 $\left\{x\middle|x\le-\frac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y|y\ge c\}$

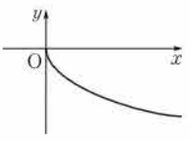
자신감 UP! 기본&핵심 유형

본책 195쪽

01 ④ $y=-\sqrt{ax}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

④

02 ㄱ. $y=k\sqrt{x}\ (k<0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지난다.

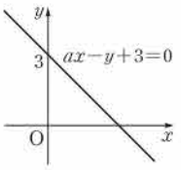


이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

ㄴ, ㄷ

03 주어진 그래프에서 $a<0$

따라서 직선 $ax-y+3=0$, 즉 $y=ax+3$은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



제3사분면

04 함수 $y=\sqrt{2x+8}-1$의 정의역은 $\{x|x\ge-4\}$, 치역은 $\{y|y\ge-1\}$

따라서 $a=-4$, $b=-1$이므로 $b-a=3$

3

05 ① $x=2$, $y=4$를 주어진 함수의 식에 대입하면

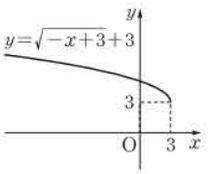
$4=\sqrt{-2+3}+3$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(2, 4)$를 지난다.

④, ⑤ $y=\sqrt{-x+3}+3=\sqrt{-(x-3)}+3$

이므로 $y=\sqrt{-x+3}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

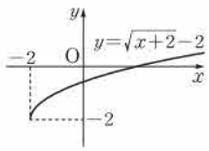
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제2사분면을 지나고, x축과 만나지 않는다.



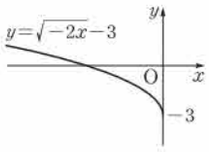
④

베이직쎈 BOX

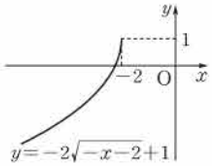
06 ① $y=\sqrt{x+2}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



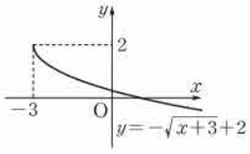
② $y=\sqrt{-2x}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



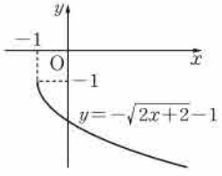
③ $y=-2\sqrt{-x-2}+1=-2\sqrt{-(x+2)}+1$의 그래프는 $y=-2\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



④ $y=-\sqrt{x+3}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



⑤ $y=-\sqrt{2x+2}-1=-\sqrt{2(x+1)}-1$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 그래프가 제3사분면을 지나지 않는 것은 ④이다.

답 ④

07 $ax+9\geq 0$에서 $ax\geq -9$

이 부등식의 해가 $x\geq -3$이므로 $a>0$ ← 부등호의 방향이 바뀌지 않았다.

$\therefore x\geq -\dfrac{9}{a}$

즉 $-\dfrac{9}{a}=-3$이므로 $a=3$

이때 $y=-\sqrt{3x+9}+b$의 그래프가 점 $(9, -2)$를 지나므로

$-2=-\sqrt{27+9}+b$ $\therefore b=4$

따라서 $y=-\sqrt{3x+9}+4$의 치역은

$\{y\,|\,y\leq 4\}$

답 ③

08 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-2(x-4)}-2$

이 함수의 그래프가 점 $(-4, a)$를 지나므로

$a=\sqrt{-2\cdot(-8)}-2=2$

답 2

09 $y=\sqrt{5x+a}-1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{5(x+1)+a}-1-3$, 즉 $y=\sqrt{5x+5+a}-4$

이 함수의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{10+5+a}-4$, $\sqrt{15+a}=5$

$15+a=25$ $\therefore a=10$

답 10

10 $y=-\sqrt{a(x-1)}-2$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{a(x-b-1)}-2+c$

이 식이 $y=-\sqrt{4x+8}-1$, 즉 $y=-\sqrt{4(x+2)}-1$과 일치하므로

$a=4$, $-b-1=2$, $-2+c=-1$

$\therefore b=-3$, $c=1$ $\therefore a-b+c=8$

답 8

11 $y=\sqrt{1-4x}+2$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 ← x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.

$-y=\sqrt{1+4x}+2$ $\therefore y=-\sqrt{1+4x}-2$

이 함수의 그래프가 점 $(2, a)$를 지나므로 ← $x=0$에서의 y의 값이 $y=-\sqrt{0+3}+2=-\sqrt{3}+2>0$이므로 제3사분면을 지나지 않는다.

$a=-\sqrt{1+8}-2=-5$

답 ①

12 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-\sqrt{-x}$ ← x 대신 $-x$를 대입한다.

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{-(x-5)}+2=-\sqrt{-x+5}+2$

답 $y=-\sqrt{-x+5}+2$

13 ① $y=\sqrt{3x+1}=\sqrt{3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)}$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\sqrt{-3x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=-\sqrt{3x-1}+5=-\sqrt{3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}+5$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=-\sqrt{6-3x}-2=-\sqrt{-3(x-2)}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

답 ③

14 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x+1)}+2$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{a}+2$, $\sqrt{a}=2$ $\therefore a=4$

베이직쎈 BOX

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{4(x+1)}+2=\sqrt{4x+4}+2$

따라서 $b=4$, $c=2$이므로

$abc=32$ ⑤

15 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x+2)}-1$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0, -3)$을 지나므로

$-3=-\sqrt{2a}-1$, $\sqrt{2a}=2$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{2(x+2)}-1=-\sqrt{2x+4}-1$

따라서 $b=4$, $c=-1$이므로

$a+b-c=7$ 7

16 $y=\sqrt{-2x+6}+1=\sqrt{-2(x-3)}+1$

이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-2(x-a-3)}+1+b$ …… ㉠

이때 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은

$y=\sqrt{-2(x-1)}-1$

이 식이 ㉠과 일치하므로

$-a-3=-1$, $1+b=-1$

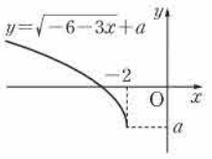
따라서 $a=-2$, $b=-2$이므로

$a+b=-4$ ①

17 $y=\sqrt{-6-3x}+a=\sqrt{-3(x+2)}+a$

이므로 $y=\sqrt{-6-3x}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-2$일 때 최솟값 a를 갖는다.



즉 $b=-2$, $a=-2$이므로

$a-b=0$ 0

18 $y=\sqrt{2x-3}+2=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+2$

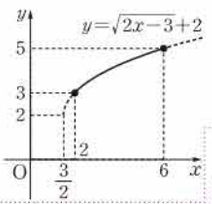
이므로 $y=\sqrt{2x-3}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 6$에서 $y=\sqrt{2x-3}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=6$일 때 최댓값 5,

$x=2$일 때 최솟값 3

을 갖는다.



√(2·6−3)+2=5

√(2·2−3)+2=3

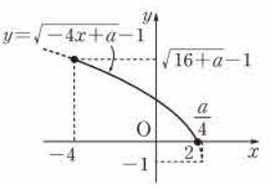
즉 $M=5$, $m=3$이므로

$M-m=2$ ②

19 $y=\sqrt{-4x+a}-1=\sqrt{-4\left(x-\frac{a}{4}\right)}-1$

이므로 $y=\sqrt{-4x+a}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{a}{4}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le x\le 2$에서 $y=\sqrt{-4x+a}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-4$일 때

최댓값 $\sqrt{16+a}-1$,

$x=2$일 때 최솟값 $\sqrt{-8+a}-1$

을 갖는다.

즉 $\sqrt{16+a}-1=4$이므로 $\sqrt{16+a}=5$

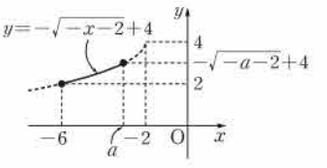
$16+a=25$ $\therefore a=9$

따라서 구하는 최솟값은

$\sqrt{-8+9}-1=0$ 0

20 $y=-\sqrt{-x-2}+4=-\sqrt{-(x+2)}+4$

이므로 $y=-\sqrt{-x-2}+4$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $-6\le x\le a$에서 $y=-\sqrt{-x-2}+4$의 그래프는 위의 그림과 같으므로

$x=a$일 때 최댓값 $-\sqrt{-a-2}+4$,

$x=-6$일 때 최솟값 2

를 갖는다.

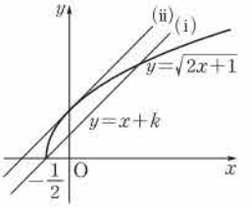
-√(6−2)+4=2

즉 $-\sqrt{-a-2}+4=3$, $b=2$이므로 $-\sqrt{-a-2}+4=3$에서

$\sqrt{-a-2}=1$, $-a-2=1$ $\therefore a=-3$

$\therefore ab=-6$ −6

21 $y=\sqrt{2x+1}=\sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



베이직쎈 BOX

(i) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$을 지날 때,

$0=-\frac{1}{2}+k \quad \therefore k=\frac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 $y=\sqrt{2x+1}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{2x+1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x+1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2-1=0$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)=0$

$-2k+2=0 \quad \therefore k=1$

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=b'^2-ac$

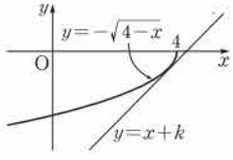
(i), (ii)에서 $\frac{1}{2}\le k<1$일 때 함수 $y=\sqrt{2x+1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$이므로

$a+b=\frac{3}{2}$ ③

22 $y=-\sqrt{4-x}=-\sqrt{-(x-4)}$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k이다.



직선 $y=x+k$가 $y=-\sqrt{4-x}$의 그래프에 접할 때,

$-\sqrt{4-x}=x+k$의 양변을 제곱하면

$4-x=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k+1)x+k^2-4=0$

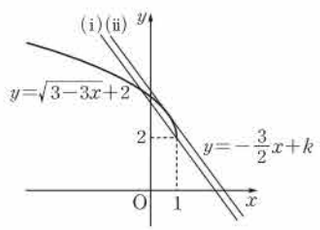
이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k+1)^2-4(k^2-4)=0$

$4k+17=0 \quad \therefore k=-\frac{17}{4}$

따라서 $k\ge-\frac{17}{4}$일 때 함수 $y=-\sqrt{4-x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 만나므로 실수 k의 값이 아닌 것은 ①이다. ①

23 $y=\sqrt{3-3x}+2=\sqrt{-3(x-1)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-\frac{3}{2}x+k$는 기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-\frac{3}{2}x+k$가 점 $(1, 2)$를 지날 때,

$2=-\frac{3}{2}+k \quad \therefore k=\frac{7}{2}$

(ii) 직선 $y=-\frac{3}{2}x+k$가 $y=\sqrt{3-3x}+2$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{3-3x}+2=-\frac{3}{2}x+k$, 즉 $\sqrt{3-3x}=-\frac{3}{2}x+k-2$의 양변을 제곱하면

$3-3x=\frac{9}{4}x^2+k^2+4-3kx-4k+6x$

$\therefore \frac{9}{4}x^2-(3k-9)x+k^2-4k+1=0$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3k-9)\}^2-4\cdot\frac{9}{4}\cdot(k^2-4k+1)=0$

$-18k+72=0 \quad \therefore k=4$

(i), (ii)에서 $k=4$ 또는 $k<\frac{7}{2}$일 때 함수 $y=\sqrt{3-3x}+2$의 그래프와 직선 $y=-\frac{3}{2}x+k$가 한 점에서 만나므로 구하는 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 4

직선이 (ii)이거나 (i)의 아래쪽에 있을 때 한 점에서 만난다.

24 (1) 함수 $y=\sqrt{x+5}$의 치역이 $\{y|y\ge0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge0\}$이다.

$y=\sqrt{x+5}$의 양변을 제곱하면

$y^2=x+5 \quad \therefore x=y^2-5$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x^2-5\,(x\ge0)$

(2) 함수 $y=-\sqrt{3x-2}-1$의 치역이 $\{y|y\le-1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le-1\}$이다.

$y=-\sqrt{3x-2}-1$에서 $y+1=-\sqrt{3x-2}$

양변을 제곱하면

$(y+1)^2=3x-2, \quad 3x=(y+1)^2+2$

$\therefore x=\frac{1}{3}(y+1)^2+\frac{2}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{3}(x+1)^2+\frac{2}{3}\,(x\le-1)$

(3) 함수 $y=\sqrt{-x+1}+4$의 치역이 $\{y|y\ge4\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge4\}$이다.

$y=\sqrt{-x+1}+4$에서 $y-4=\sqrt{-x+1}$

양변을 제곱하면

$(y-4)^2=-x+1 \quad \therefore x=-(y-4)^2+1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-(x-4)^2+1\,(x\ge4)$

(1) $y=x^2-5\,(x\ge0)$

(2) $y=\frac{1}{3}(x+1)^2+\frac{2}{3}\,(x\le-1)$

(3) $y=-(x-4)^2+1\,(x\ge4)$

25 함수 $y=3-\sqrt{2-x}$의 치역이 $\{y|y\le3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le3\}$이다.

$\therefore c=3$

$y=3-\sqrt{2-x}$에서 $y-3=-\sqrt{2-x}$

양변을 제곱하면

$(y-3)^2=2-x \quad \therefore x=-(y-3)^2+2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-(x-3)^2+2=-x^2+6x-7\ (x\le 3)$

따라서 $a=6$, $b=-7$이므로

$a-b+c=16$ 답 ②

26 $f^{-1}(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$-\sqrt{4k+4}+2=-2$, $\sqrt{4k+4}=4$

$4k+4=16$ $\therefore k=3$

$\therefore f^{-1}(-2)=3$ 답 3

함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여

$f(a)=b \iff f^{-1}(b)=a$

다른 풀이 함수 $f(x)=-\sqrt{4x+4}+2$의 치역이 $\{y|y\le 2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le 2\}$이다.

$y=-\sqrt{4x+4}+2$라 하면 $y-2=-\sqrt{4x+4}$

양변을 제곱하면 $(y-2)^2=4x+4$

$4x=(y-2)^2-4$ $\therefore x=\frac{1}{4}(y-2)^2-1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{4}(x-2)^2-1\ (x\le 2)$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2-1\ (x\le 2)$이므로

$f^{-1}(-2)=\frac{1}{4}\cdot(-4)^2-1=3$

27 함수 $f(x)=\sqrt{x-a}-b$에서

정의역은 $\{x|x\ge a\}$, 치역은 $\{y|y\ge -b\}$

$\therefore a=3$

이때 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$의 정의역이 $\{x|x\ge -5\}$이므로 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y|y\ge -5\}$이다.

즉 $-b=-5$이므로 $b=5$

$\therefore ab=15$ 답 15

학교 시험 기출로 실전 감각 UP! 본책 199쪽

01 전략 $\sqrt{f(x)}$의 값이 실수가 되려면 $f(x)\ge 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $x+1\ge 0$, $2-x\ge 0$에서 $x\ge -1$, $x\le 2$

$\therefore -1\le x\le 2$

$\therefore \sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$

$=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$

$=x+2-(x-3)=5$ 답 ⑤

$-1\le x\le 2$이므로 $x+2>0$, $x-3<0$

실수 a에 대하여 $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

02 전략 분모의 유리화를 이용하여 주어진 무리식을 간단히 한 후 x에 $\sqrt{2}$를 대입한다.

풀이 $\frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$=\frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}$

$+\frac{x(x+\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}$

$=\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}+x^2+x\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}$

$=2x^2=2\cdot(\sqrt{2})^2=4$ 답 ⑤

$5-x\ge 0$에서 $x\le 5$

$x=0$에서의 y의 값이

$y=\sqrt{5-0}-3$

$=\sqrt{5}-3<0$

이므로 제1사분면을 지나지 않는다.

$x=\sqrt{2}$를 대입한다.

03 전략 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a<0)$의 정의역은 $\left\{x\middle|x\le -\frac{b}{a}\right\}$, 치역은 $\{y|y\ge c\}$임을 이용한다.

풀이 $3-5x\ge 0$에서 $x\le \frac{3}{5}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\left\{x\middle|x\le \frac{3}{5}\right\}$이므로

$a=\frac{3}{5}$

또 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\ge 2b-1\}$이므로

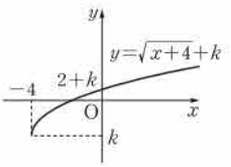
$2b-1=-3$ $\therefore b=-1$

$\therefore 5ab=-3$ 답 ②

04 전략 $y=\sqrt{x+4}+k$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=\sqrt{x+4}+k$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\sqrt{x+4}+k$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서의 y의 값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$\sqrt{0+4}+k\ge 0$ $\therefore k\ge -2$

따라서 실수 k의 최솟값은 -2이다. 답 ②

05 전략 함수 $y=-\sqrt{2x+12}-3$을 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=-\sqrt{2x+12}-3=-\sqrt{2(x+6)}-3$

이므로 $y=-\sqrt{2x+12}-3$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $p=-6$, $q=-3$이므로

$p+q=-9$ 답 ②

06 전략 함수 $y=\sqrt{5-x}-3$을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한다.

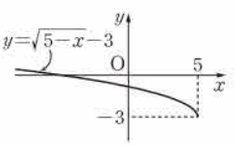
풀이 $y=\sqrt{5-x}-3=\sqrt{-(x-5)}-3$

이므로 $y=\sqrt{5-x}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. $y=\sqrt{5-x}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 정의역은 $\{x|x\le 5\}$, 치역은 $\{y|y\ge -3\}$이다.

ㄷ. 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

07 전략 주어진 그래프가 $y=\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용한다.

베이직쎈 BOX

풀이 주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$f(x)=\sqrt{a\left(x-\frac{3}{2}\right)}-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(1, -1)$을 지나므로

$$-1=\sqrt{a\left(1-\frac{3}{2}\right)}-2, \quad \sqrt{-\frac{1}{2}a}=1$$

$$-\frac{1}{2}a=1 \quad \therefore a=-2$$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$f(x)=\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-2=\sqrt{-2x+3}-2$$

$$\therefore f(-3)=\sqrt{6+3}-2=1$$

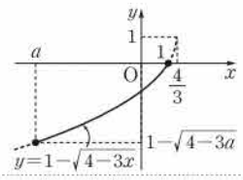
답 ①

08 전략 함수 $y=1-\sqrt{4-3x}$를 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형하여 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=1-\sqrt{4-3x}=-\sqrt{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+1$

이므로 $y=1-\sqrt{4-3x}$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a\le x\le 1$에서 $y=1-\sqrt{4-3x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=1$일 때 최댓값 0,

$x=a$일 때 최솟값 $1-\sqrt{4-3a}$

를 갖는다.

즉 $M=0$, $1-\sqrt{4-3a}=-3$이므로 $1-\sqrt{4-3a}=-3$에서

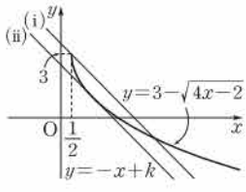
$$\sqrt{4-3a}=4, \quad 4-3a=16$$

$$\therefore a=-4$$

답 ②

09 전략 함수 $y=3-\sqrt{4x-2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$를 그리고 직선을 움직여 본다.

풀이 $y=3-\sqrt{4x-2}=-\sqrt{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$을 지날 때,

$$3=-\frac{1}{2}+k \quad \therefore k=\frac{7}{2}$$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 $y=3-\sqrt{4x-2}$의 그래프에 접할 때,

$3-\sqrt{4x-2}=-x+k$, 즉 $\sqrt{4x-2}=x-k+3$의 양변을 제곱하면

$$4x-2=x^2+k^2+9-2kx-6k+6x$$

$$\therefore x^2-2(k-1)x+k^2-6k+11=0$$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-6k+11)=0$$

$$4k-10=0 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$$

(i), (ii)에서 $\frac{5}{2}<k\le\frac{7}{2}$일 때 함수 $y=3-\sqrt{4x-2}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 구하는 자연수 k의 값은 3이다.

답 ③

직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

$1-\sqrt{4-3}=0$

10 전략 분모의 유리화를 이용하여 주어진 무리식을 간단히 한 후 x, y의 값을 대입한다.

풀이
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}+\frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$
$$=\frac{x-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+y}{x-y}=\frac{x+y}{x-y} \quad \cdots ❶$$

이때 $x+y=2\sqrt{3}$, $x-y=2$이므로 구하는 식의 값은

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \quad \cdots ❷$$

답 $\sqrt{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷	주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

11 전략 먼저 주어진 유리함수의 점근선의 방정식을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $y=\frac{ax+5}{x-b}=\frac{a(x-b)+ab+5}{x-b}=\frac{ab+5}{x-b}+a$

이므로 $y=\frac{ax+5}{x-b}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=b$, $y=a$

$\therefore a=4$, $b=-6$ $\cdots ❶$

따라서 함수 $y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{4x-6}$에서 $4x-6\ge 0$이므로

$$x\ge\frac{3}{2}$$

즉 구하는 정의역은 $\left\{x\middle|x\ge\frac{3}{2}\right\}$이다. $\cdots ❷$

답 $\left\{x\middle|x\ge\frac{3}{2}\right\}$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	정의역을 구할 수 있다.	50 %

12 전략 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\sqrt{a(x-p)}$이다.

베이직쎈 BOX

풀이 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x+2)}$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{a(-x+2)}$, 즉 $y=-\sqrt{-a(x-2)}$

이 함수의 그래프가 점 $(-1, -3)$을 지나므로

$-3=-\sqrt{-a(-1-2)}$, $3=\sqrt{3a}$

$9=3a$ $\therefore a=3$ 답 3

x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.

13 전략 그래프가 시작하는 점의 좌표를 이용하여 그래프의 식을 구한다.

풀이 주어진 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(x-3)}-2=\sqrt{-x+3}-2$

따라서 구하는 y절편은

$\sqrt{3}-2$ 답 $\sqrt{3}-2$

$x=0$일 때의 y의 값

14 전략 함수 $f(x)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 할 때, $f^{-1}(m)=n$이면 $f(n)=m$임을 이용한다.

풀이 $f(1)=2$이므로 $\sqrt{a+b}=2$

$\therefore a+b=4$ ····· ㉠

$f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로 $\sqrt{2a+b}=1$

$\therefore 2a+b=1$ ····· ㉡ ⋯ ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=7$ ⋯ ❷

$\therefore b-a=10$ ⋯ ❸

답 10

㉡−㉠을 하면 $a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $-3+b=4$ $\therefore b=7$

단계	채점 기준	비율
❶	a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	60 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	$b-a$의 값을 구할 수 있다.	10 %