정답 및 풀이

I 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한 ····· 2
02 함수의 연속 ····· 15

II 다항함수의 미분법

03 미분계수와 도함수 ····· 26
04 도함수의 활용 (1) ····· 38
05 도함수의 활용 (2) ····· 51
06 도함수의 활용 (3) ····· 65

III 다항함수의 적분법

07 부정적분 ····· 78
08 정적분 ····· 89
09 정적분의 활용 ····· 105

* 정답을 확인하려 할 때에는 「빠른 정답 찾기」를 이용하면 편리합니다.

01 함수의 극한

0001 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to -1} f(x)=0$

답 0

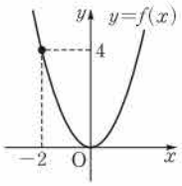
0002 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to 0} f(x)=2$

답 2

0003 $f(x)=x^2$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

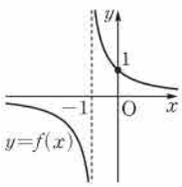
$\lim_{x\to -2} x^2=4$



답 4

0004 $f(x)=\frac{1}{x+1}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

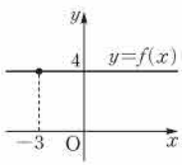
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1}=1$



답 1

0005 $f(x)=4$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

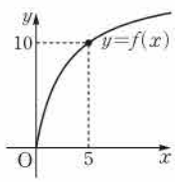
$\lim_{x\to -3} 4=4$



답 4

0006 $f(x)=\sqrt{20x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to 5} \sqrt{20x}=10$



답 10

0007 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to \infty} f(x)=2$

답 2

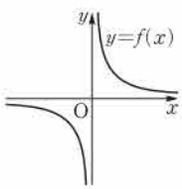
0008 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=2$

답 2

0009 $f(x)=\frac{1}{3x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

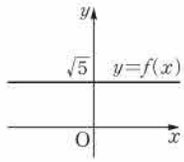
$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{3x}=0$



답 0

0010 $f(x)=\sqrt{5}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

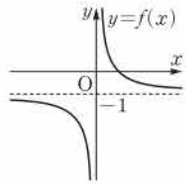
$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{5}=\sqrt{5}$



답 $\sqrt{5}$

0011 $f(x)=\frac{1}{x}-1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

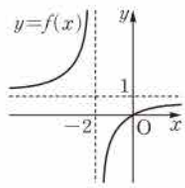
$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x}-1\right)=-1$



답 -1

0012 $f(x)=\frac{x}{x+2}=1-\frac{2}{x+2}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x+2}=1$



답 1

0013 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지므로

$\lim_{x\to -1} f(x)=\infty$

답 ∞

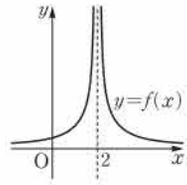
0014 $y=g(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x\to -1} g(x)=-\infty$

답 $-\infty$

0015 $f(x)=\frac{1}{|x-2|}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

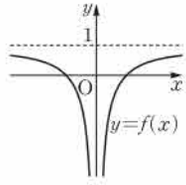
$\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|}=\infty$



답 ∞

0016 $f(x)=1-\frac{1}{|x|}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

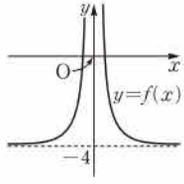
$\lim_{x\to 0} \left(1-\frac{1}{|x|}\right)=-\infty$



답 $-\infty$

0017 $f(x)=\frac{1}{x^2}-4$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-4\right)=\infty$

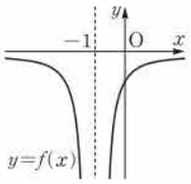


답 ∞

0018 $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$로 놓으면

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to-1}\left\{-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right\}=-\infty$



답 $-\infty$

0019 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

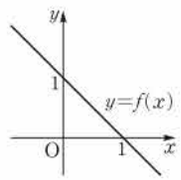
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ 답 $-\infty$

0020 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 답 $-\infty$

0021 $f(x)=-x+1$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

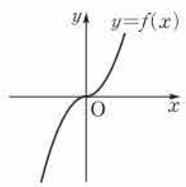
$\lim\limits_{x\to\infty}(-x+1)=-\infty$



답 $-\infty$

0022 $f(x)=x^3$으로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

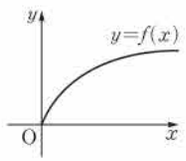
$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$



답 $-\infty$

0023 $f(x)=\sqrt{x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

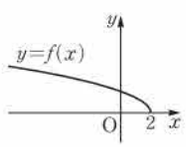
$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$



답 ∞

0024 $f(x)=\sqrt{2-x}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=\infty$



답 ∞

0025 답 1 **0026** 답 1

0027 답 0 **0028** 답 −1

0029 답 1

0030 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. 답 존재하지 않는다.

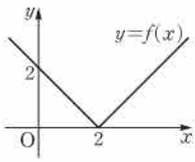
0031 답 존재하지 않는다.

참 1, −1, 1, −1, 존재하지 않는다

0032 $f(x)=|x-2|$로 놓으면

$f(x)=\begin{cases}x-2 & (x\geq2)\\ -x+2 & (x<2)\end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



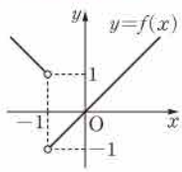
$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$ 답 0

0033 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x+1|}$로 놓으면 ($f(x)=\dfrac{x(x+1)}{|x+1|}$)

$f(x)=\begin{cases}x & (x>-1)\\ -x & (x<-1)\end{cases}$ ($f(x)$는 $x=-1$에서 정의되지 않는다.)

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1-}f(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)$, 즉 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{|x+1|}$의 값은 존재하지 않는다.

답 존재하지 않는다.

0034 $\lim\limits_{x\to0}\{-2f(x)\}=-2\lim\limits_{x\to0}f(x)$

$=-2\cdot5=-10$ 답 −10

0035 $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to0}f(x)+\lim\limits_{x\to0}g(x)$

$=5+(-2)=3$ 답 3

0036 $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=\lim\limits_{x\to0}f(x)-\lim\limits_{x\to0}g(x)$

$=5-(-2)=7$ 답 7

0037 $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)\lim\limits_{x\to0}g(x)$

$=5\cdot(-2)=-10$ 답 −10

0038 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}f(x)}{\lim\limits_{x\to0}g(x)}=\dfrac{5}{-2}=-\dfrac{5}{2}$ 답 $-\dfrac{5}{2}$

0039 $\lim\limits_{x\to1}\{3f(x)+4g(x)\}=\lim\limits_{x\to1}3f(x)+\lim\limits_{x\to1}4g(x)$

$=3\lim\limits_{x\to1}f(x)+4\lim\limits_{x\to1}g(x)$

$=3\cdot(-3)+4\cdot\dfrac{1}{2}=-7$ 답 −7

0040 $\lim\limits_{x\to1}8f(x)g(x)=8\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)$

$=8\lim\limits_{x\to1}f(x)\lim\limits_{x\to1}g(x)$

$=8\cdot(-3)\cdot\dfrac{1}{2}=-12$ 답 −12

0041 $\lim\limits_{x\to1}\{2f(x)g(x)+5\}=2\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)+\lim\limits_{x\to1}5$

$=2\lim\limits_{x\to1}f(x)\lim\limits_{x\to1}g(x)+5$

$=2\cdot(-3)\cdot\dfrac{1}{2}+5=2$ 답 2

0042 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{2g(x)+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-1\}}{\lim\limits_{x\to1}\{2g(x)+1\}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}f(x)-1}{2\lim\limits_{x\to1}g(x)+1}$

$=\dfrac{-3-1}{2\cdot\frac{1}{2}+1}=-2$ 답 -2

0043 $\lim\limits_{x\to-3}(-2x+1)=-2\cdot(-3)+1=7$ 답 7

0044 $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-3x+4)=(-1)^2-3\cdot(-1)+4=8$ 답 8

0045 $\lim\limits_{x\to1}(2x+1)(x^3-5)=(2\cdot1+1)\cdot(1^3-5)$

$=-12$ 답 -12

0046 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-4x}{x-1}=\dfrac{4^2-4\cdot4}{4-1}=0$ 답 0

0047 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}}{x^2-1}=\dfrac{\sqrt{2+7}}{2^2-1}=1$ 답 1

0048 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ 답 2

0049 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-2}(x-1)=-3$ 답 -3

0050 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$

$=\lim\limits_{x\to4}(\sqrt{x}+2)=4$ 답 4

0051 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{\sqrt{x+6}+3}=\dfrac{1}{6}$ 답 $\dfrac{1}{6}$

0052 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

0053 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$ 답 0

0054 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3+\frac{1}{x}}=\infty$ 답 ∞

0055 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}}=3$ 답 3

분모의 최고차항은 $\sqrt{x^2}$, 즉 x이다.

0056 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+1}{2x-3}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-5t+1}{-2t-3}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-5+\frac{1}{t}}{-2-\frac{3}{t}}=\dfrac{5}{2}$

답 $\dfrac{5}{2}$

0057 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{t^2+2t}}{-t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{t}}}{-1}=-1$

답 -1

0058 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\infty$ 답 ∞

0059 $\lim\limits_{x\to\infty}(5+2x^2-x^3)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{2}{x}-1\right)=-\infty$

답 $-\infty$

0060 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}+x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=0$ 답 0

(분자의 차수)<(분모의 차수)

0061 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x-1}+1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x-1}=-1$ 답 -1

0062 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{1-\frac{1}{x}}=-2$ 답 -2

0063 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to0}(x+a)=0$이므로 $a=0$ 답 0

0064 $x\longrightarrow-1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow0$이므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+ax-2)=0$이므로 $1-a-2=0$

$\therefore a=-1$ 답 -1

0065 답 $a=1$, $b=0$

0, 0, 0, 0, 0, ax, a, a, 1

0066 $x\longrightarrow1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow0$이므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to1}(ax-b+1)=0$이므로 $a-b+1=0$

$\therefore b=a+1$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{ax-(a+1)+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{a(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{a}=\frac{3}{a}$$

따라서 $\frac{3}{a}=3$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$ 답 $a=1$, $b=2$

0067 (1) $\lim_{x\to 1}2x=2\cdot 1=2$

(2) $\lim_{x\to 1}(x^2+1)=1^2+1=2$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $2x\le f(x)\le x^2+1$이고

$\lim_{x\to 1}2x=\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 1}f(x)=2$

답 (1) 2 (2) 2 (3) 2

0068 모든 양수 x에 대하여 $1-\frac{1}{x}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x}$이고

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ 답 1

0069 ㄱ. $\lim_{x\to 2+}|x-2|=\lim_{x\to 2+}(x-2)=0$,

$\lim_{x\to 2-}|x-2|=\lim_{x\to 2-}\{-(x-2)\}=0$

이므로 $\lim_{x\to 2}|x-2|=0$

ㄴ. $\lim_{x\to 1+}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1+}\frac{1}{x}=1$,

$\lim_{x\to 1-}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to 1-}\frac{-(x-1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1-}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$

이므로 $\lim_{x\to 1+}\frac{|x-1|}{x^2-x}\ne\lim_{x\to 1-}\frac{|x-1|}{x^2-x}$

따라서 $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-x}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to -3+}\frac{x^2-9}{|x+3|}=\lim_{x\to -3+}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$
$=\lim_{x\to -3+}(x-3)=-6$,

$\lim_{x\to -3-}\frac{x^2-9}{|x+3|}=\lim_{x\to -3-}\frac{(x+3)(x-3)}{-(x+3)}$
$=\lim_{x\to -3-}\{-(x-3)\}=6$

이므로 $\lim_{x\to -3+}\frac{x^2-9}{|x+3|}\ne\lim_{x\to -3-}\frac{x^2-9}{|x+3|}$

따라서 $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{|x+3|}$의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0070 ① $\lim_{x\to 0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)\ne\lim_{x\to 0-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

② $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

③ $\lim_{x\to 0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)\ne\lim_{x\to 0-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

④ $\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=-\infty$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 ②

참고 ④, ⑤에서 ∞, $-\infty$는 각각 $f(x)$의 값이 한없이 커지는 상태, 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 상태를 나타내므로 $\lim_{x\to 0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

0071 ㄱ. $\lim_{x\to 0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)\ne\lim_{x\to 0-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0072 $\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3+}(kx+1)=3k+1$

$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3-}(x-k)^2=(3-k)^2$ ··· ❶

이때 $\lim_{x\to 3}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3-}f(x)$이어야 하므로

$3k+1=(3-k)^2$, $3k+1=k^2-6k+9$

$k^2-9k+8=0$, $(k-1)(k-8)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=8$ ··· ❷

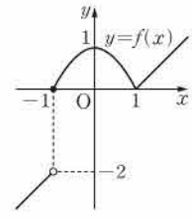
따라서 모든 k의 값의 합은

$1+8=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to 3+}f(x)$, $\lim_{x\to 3-}f(x)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0073 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}(1-x^2)=0$,

$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1-}(x-1)=-2$

따라서 $\lim_{x\to -1+}f(x)\ne\lim_{x\to -1-}f(x)$이므로

$\lim_{x\to -1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore a=-1$ 답 -1

0074 $\lim_{x\to 1+}f(x)-\lim_{x\to 1-}f(x)$

$=\lim_{x\to 1+}(x^2-2x+4)-\lim_{x\to 1-}(-x^2+2x-2)$

$=(1-2+4)-(-1+2-2)$

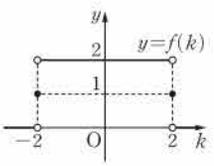
$=3-(-1)=4$ 답 4

0075 $\lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)=0+1+1$
$=2$ ②

0076 (i) $x>1000$일 때,
$f(x)=\dfrac{x-1000}{x-1000}=1$
$\therefore a=\lim_{x\to 1000+} f(x)=1$ ··· ❶
(ii) $x<1000$일 때,
$f(x)=\dfrac{-(x-1000)}{x-1000}=-1$
$\therefore b=\lim_{x\to 1000-} f(x)=-1$ ··· ❷
(i), (ii)에서 $ab=-1$ ··· ❸
-1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0077 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$
원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로
(i) $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$, 즉 $|k|<2$일 때, $f(k)=2$
(ii) $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, 즉 $|k|=2$일 때, $f(k)=1$
(iii) $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$, 즉 $|k|>2$일 때, $f(k)=0$
이상에서 함수 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{k\to -2+} f(k)+\lim_{k\to 0-} f(k)-f(2)$
$=2+2-1=3$ 3

라쎈 특강
원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원과 직선의 위치 관계는
① $d<r$ ➔ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $d=r$ ➔ 한 점에서 만난다.(접한다.)
③ $d>r$ ➔ 만나지 않는다.

0078 $x\longrightarrow 3+$일 때 $x+1\longrightarrow 4+$이므로
$\lim_{x\to 3+}[x+1]=4$
$x\longrightarrow 3-$일 때 $x-1\longrightarrow 2-$이므로
$\lim_{x\to 3-}[x-1]=1$
$\therefore \lim_{x\to 3+}[x+1]+\lim_{x\to 3-}[x-1]=4+1=5$ ④

0079 ① $x\longrightarrow 0+$일 때 $[x]=0$이므로
$\lim_{x\to 0+}\dfrac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0+}\dfrac{0}{x}=0$
② $x\longrightarrow 0-$일 때 $x-1\longrightarrow -1-$이므로 $[x-1]=-2$
$\therefore \lim_{x\to 0-}\dfrac{x-1}{[x-1]}=\lim_{x\to 0-}\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$
③ $x\longrightarrow 1-$일 때 $x+1\longrightarrow 2-$이므로 $[x+1]=1$
$\therefore \lim_{x\to 1-}\dfrac{x+1}{[x+1]}=\lim_{x\to 1-}(x+1)=2$
④ $x\longrightarrow 2+$일 때 $[x]=2$이므로
$\lim_{x\to 2+}\dfrac{[x]^2+x}{[x]}=\lim_{x\to 2+}\dfrac{2^2+x}{2}=\dfrac{4+2}{2}=3$
⑤ $-x^2+2x-1=-(x-1)^2$
$x\longrightarrow 1+$일 때 $-(x-1)^2\longrightarrow 0-$이므로
$\lim_{x\to 1+}[-x^2+2x-1]=-1$
⑤

0080 $x\longrightarrow -2+$일 때 $x^2\longrightarrow 4-$이므로
$\lim_{x\to -2+}([x^2]-a[x])=3-a\cdot(-2)=3+2a$
$x\longrightarrow -2-$일 때 $x^2\longrightarrow 4+$이므로
$\lim_{x\to -2-}([x^2]-a[x])=4-a\cdot(-3)=4+3a$
이때 $\lim_{x\to -2}([x^2]-a[x])$의 값이 존재하므로
$3+2a=4+3a$ $\therefore a=-1$
따라서 $b=4+3a=4+3\cdot(-1)=1$이므로
$a+b=0$
($b=3+2a$임을 이용하여 b의 값을 구할 수도 있다.)
0

0081 $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow -1+$일 때 $t=0$이므로
$\lim_{x\to -1+} g(f(x))=g(0)=0$
또 $x\longrightarrow 1+$일 때 $t\longrightarrow 1-$이므로
$\lim_{x\to 1+} g(f(x))=\lim_{t\to 1-} g(t)=\lim_{t\to 1-} t^2=1$
$\therefore \lim_{x\to -1+} g(f(x))+\lim_{x\to 1+} g(f(x))=1$ ②

0082 $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 0-$일 때 $t\longrightarrow 0+$이므로
$\lim_{x\to 0-} f(f(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=\lim_{t\to 0+}(t+1)=1$ ④

0083 $g(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1-$일 때 $t=0$이므로
$\lim_{x\to 1-} f(g(x))=f(0)=0$ ··· ❶
또 $f(x)=s$로 놓으면 $x\longrightarrow 1+$일 때 $s\longrightarrow -1-$이므로
$\lim_{x\to 1+} g(f(x))=\lim_{s\to -1-} g(s)=-1$ ··· ❷
$\therefore \lim_{x\to 1-} f(g(x))-\lim_{x\to 1+} g(f(x))=1$ ··· ❸
1

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to 1-} f(g(x))$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{x\to 1+} g(f(x))$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{x\to 1-} f(g(x))-\lim_{x\to 1+} g(f(x))$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0084 $\lim_{x\to 1}(x^2-3x)f(x)=\lim_{x\to 1} x(x-3)f(x)$
$=\lim_{x\to 1} xf(x)\lim_{x\to 1}(x-3)$
$=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)=-1$ -1

0085 $\lim_{x\to 0} f(x)=2$, $\lim_{x\to 0} g(x)=a$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2g(x)}{f(x)g(x)+4}=\frac{2+2a}{2a+4}$$

즉 $\frac{2+2a}{2a+4}=2$이므로 $\quad 2+2a=4a+8$

$\therefore a=-3$ ①

0086 $f(x)+2g(x)=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to\infty} h(x)=10$이고

$$g(x)=\frac{h(x)-f(x)}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)-f(x)}{2}=\frac{10-(-4)}{2}=7$$

⑤

다른 풀이 $\lim_{x\to\infty} g(x)=a$ (a는 실수)라 하면

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)+2g(x)\}=10$에서

$-4+2a=10 \quad \therefore a=7$

$\therefore \lim_{x\to\infty} g(x)=7$

0087 $f(x)+g(x)=p(x)$ ····· ㉠

$2f(x)-3g(x)=q(x)$ ····· ㉡

로 놓으면

$\lim_{x\to 4} p(x)=8$, $\lim_{x\to 4} q(x)=-14$

㉠×3+㉡을 하면 $\quad 5f(x)=3p(x)+q(x)$

즉 $f(x)=\frac{3p(x)+q(x)}{5}$이므로

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{3p(x)+q(x)}{5}$$

$$=\frac{3\cdot 8-14}{5}=2$$

㉠×2−㉡을 하면 $\quad 5g(x)=2p(x)-q(x)$

즉 $g(x)=\frac{2p(x)-q(x)}{5}$이므로

$$\lim_{x\to 4} g(x)=\lim_{x\to 4}\frac{2p(x)-q(x)}{5}$$

$$=\frac{2\cdot 8-(-14)}{5}=6$$

$\therefore \lim_{x\to 4} f(x)g(x)=2\cdot 6=12$ 12

0088 ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge 0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$

이면 $f(x)+g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=0$이지만

$\lim_{x\to 0} f(x)$와 $\lim_{x\to 0} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$이면

$f(x)-g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}=0$이지만

$\lim_{x\to 0} f(x)$와 $\lim_{x\to 0} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a} g(x)=a$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (a, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=a\beta$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. ㄷ

0089 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x^2-3x-2}+\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}+\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}+\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{2x+1}+\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x-1}$$

$$=\frac{4}{5}-2=-\frac{6}{5}$$ $-\frac{6}{5}$

0090 $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\frac{3}{x}+1}=\lim_{x\to -3}\frac{x(x+3)}{3+x}=\lim_{x\to -3} x=-3$ ④

0091 $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)f(x)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{(x+1)f(x)}$$

$$=\frac{3}{2f(1)}$$ ···· ❶

따라서 $\frac{3}{2f(1)}=2$이므로 $\quad f(1)=\frac{3}{4}$ ···· ❷

$\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{(x^2-1)f(x)}$의 값을 $f(1)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0092 $\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)f(x)}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)f(x)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)f(x)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$$

$$=\lim_{x\to 9} f(x)(\sqrt{x}+3)$$

$$=-2\cdot(3+3)=-12$$ ①

0093 (i) $x>1$일 때,

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$$

$\therefore a=\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x-2)=-1$

(ii) $x<1$일 때,

$$f(x)=\frac{(x+4)(x-1)}{-(x-1)}=-x-4$$

$\therefore b=\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x-4)=-5$

(i), (ii)에서 $\quad a+b=-6$ -6

0094 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$

$$=\frac{3}{1+2}=1$$ ③

0095 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5-x+2x^2}{3+x+x^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{5+t+2t^2}{3-t+t^2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{5}{t^2}+\frac{1}{t}+2}{\frac{3}{t^2}-\frac{1}{t}+1}=2$$

답 2

0096 $A=\lim_{x\to\infty}\frac{7x+1}{5x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{5-\frac{1}{x^2}}=0$

$$B=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$C=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$\therefore A<B<C$

답 ①

0097 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1-x+x^2}+x)$$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{1+t+t^2}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{1+t+t^2}-t)(\sqrt{1+t+t^2}+t)}{\sqrt{1+t+t^2}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+t}{\sqrt{1+t+t^2}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}+1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0098 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-3x+5}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-3x+5}}{(x-\sqrt{x^2-3x+5})(x+\sqrt{x^2-3x+5})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-3x+5}}{3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

$$=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ⑤

0099 $f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)=x^2-1$

$$\therefore\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(x+1)}-\sqrt{f(x)}\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2x})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+2x}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}+2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$$=\frac{2}{1+1}=1$$

답 1

0100 $\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\left(x-\frac{2}{x-1}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\cdot\frac{x^2-x-2}{x-1}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{4}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{4(x-2)}{x-1}$$

$$=\frac{4\cdot(-1-2)}{-1-1}=6$$

답 6

0101 $\lim_{x\to0}\frac{18}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+9}}-\frac{1}{3}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{18}{x}\cdot\frac{3-\sqrt{x+9}}{3\sqrt{x+9}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6}{x}\cdot\frac{(3-\sqrt{x+9})(3+\sqrt{x+9})}{\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-6}{\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})}$$

$$=\frac{-6}{3\cdot(3+3)}=-\frac{1}{3}$$

답 ②

0102 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$ ··· ❶

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2x+1}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-2x}{2x+1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2}{2x+1}=-2$$ ··· ❷

$\therefore\lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)=0$ ··· ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to\infty}f(x)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{x\to0}g(x)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{x\to\infty}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0103 $x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1-a+b=0$

$\therefore b=a-1$ ····· ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x+a-1)=a-2$$

즉 $a-2=2$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b=7$ ④

0104 $x\longrightarrow 2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 2}(ax+b)=0$이므로 $2a+b=0$

$\therefore b=-2a$ ····· ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{12+x^2}-2x}{ax-2a}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{12+x^2}-2x)(\sqrt{12+x^2}+2x)}{(ax-2a)(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-3(x+2)(x-2)}{a(x-2)(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-3(x+2)}{a(\sqrt{12+x^2}+2x)}$$

$$=\frac{-3\cdot 4}{a(4+4)}$$

$$=-\frac{3}{2a}$$

즉 $-\frac{3}{2a}=-3$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore ab=-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$

0105 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^3+ax^2+b)=0$이므로

$1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$

$f(x)=x^3+ax^2-(a+1)$이므로 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2-(a+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+1\}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\{x^2+(a+1)x+a+1\}$$

$$=2a+3$$

즉 $2a+3=5$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-2$이므로

$f(0)=-2$ ①

0106 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=a$이므로

$a=2$ ···❶

또 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+bx+c}{x^2+x-2}=\frac{2}{3}$에서 $x\longrightarrow -2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to -2}(2x^2+bx+c)=0$이므로 $8-2b+c=0$

$\therefore c=2b-8$ ····· ㉡

㉡을 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+bx+c}{x^2+x-2}$에 대입하면

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+bx+2b-8}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(2x+b-4)}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2x+b-4}{x-1}$$

$$=\frac{b-8}{-3}$$

즉 $\frac{b-8}{-3}=\frac{2}{3}$이므로 $b=6$

$b=6$을 ㉠에 대입하면 $c=4$ ···❷

$\therefore abc=48$ ···❸

48

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b, c의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	10 %

0107 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow -\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{ax^2-bx}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2+bt}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{at^2+bt}-t)(\sqrt{at^2+bt}+t)}{\sqrt{at^2+bt}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2+bt}{\sqrt{at^2+bt}+t}$$ ····· ㉢

이때 ㉢의 극한값이 존재하려면

$a-1=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{bt}{\sqrt{t^2+bt}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{t}}+1}=\frac{b}{2}$$

즉 $\frac{b}{2}=2$이므로 $b=4$

$\therefore a-b=-3$ -3

참고 ㉢에서 $a-1\neq 0$이면 (분자의 차수)>(분모의 차수)이므로 극한값이 존재하지 않는다.

0108 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}$$

$$=\frac{2a}{1+1}=a$$

$\therefore a=4$ ③

0109 $a\leq 0$이면 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+x+1}-ax)=\infty$이므로

$a>0$

이때

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+x+1}-ax)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x^2+x+1}-ax)(\sqrt{2x^2+x+1}+ax)}{\sqrt{2x^2+x+1}+ax}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-a^2)x^2+x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+ax} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 ㉠의 극한값이 존재하려면 $2-a^2=0$

$a^2=2$ $\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

$a=\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 $b=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\frac{a}{b}=4$ 답 4

0110 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x-1}=1$에서 $f(x)$는 일차항의 계수가 2인 일차함수임을 알 수 있다.

$f(x)=2x+a$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(2x+a)=-2+a$

즉 $-2+a=2$이므로 $a=4$

따라서 $f(x)=2x+4$이므로 $f(2)=2\cdot2+4=8$ 답 ③

0111 조건 (가)에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 2인 삼차함수임을 알 수 있다. ··· ❶

또 조건 (나)에서 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$ ··· ❷

$f(x)=x^3+2x^2+ax$ (a는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+2x+a)}{x}=\lim_{x\to0}(x^2+2x+a)=a$$

$\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=x^3+2x^2-x$ ··· ❸

답 $f(x)=x^3+2x^2-x$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 2인 삼차함수임을 알 수 있다.	30 %
❷ $f(0)=0$임을 알 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %

0112 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)$는 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수이므로 ← $f(x)$는 x, $x-1$을 인수로 갖는다.

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ ($a\neq0$, a, b는 상수)

로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b$$

에서 $-b=2$이므로 $b=-2$

또

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(ax-2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}x(ax-2)=a-2$$

에서 $a-2=-1$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=x(x-1)(x-2)$이므로 구하는 나머지는

$f(-1)=-1\cdot(-2)\cdot(-3)=-6$ 답 ①

라쎈 특강

나머지 정리와 인수 정리

① 나머지 정리

다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=P(a)$

② 인수 정리

다항식 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어진다.

$\Longleftrightarrow P(a)=0$

$\Longleftrightarrow P(x)$가 $x-a$를 인수로 갖는다.

0113 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{2x-3}=a$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=10$에서 $x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=3(x-1)(x+k)$ (k는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+k)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}3(x+k)=3(1+k)$$

즉 $3(1+k)=10$이므로

$1+k=\frac{10}{3}$ $\therefore k=\frac{7}{3}$

따라서 $f(x)=3(x-1)\left(x+\frac{7}{3}\right)=3x^2+4x-7$이므로

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+4x-7)-3x^2}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-7}{2x-3}=2$$ 답 ④

0114 모든 양의 실수 x에 대하여 $2x+1>0$, $2x+5>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 제곱하면

$(2x+1)^2<\{f(x)\}^2<(2x+5)^2$

모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 위의 부등식의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}<\frac{(2x+5)^2}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+5)^2}{x^2+1}=4$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}=4$$

답 ③

0115 주어진 부등식의 각 변에서 x^3을 빼면

$$3x^2-5<f(x)-x^3<3x^2+7$$

모든 실수 x에 대하여 $2x^2+1>0$이므로 위의 부등식의 각 변을 $2x^2+1$로 나누면

$$\frac{3x^2-5}{2x^2+1}<\frac{f(x)-x^3}{2x^2+1}<\frac{3x^2+7}{2x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7}{2x^2+1}=\frac{3}{2}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{2x^2+1}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

0116 (i) $x>1$일 때, $x-1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{x^2-1}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{2x^2-2x}{x-1}$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{2x(x-1)}{x-1}$$

$$\therefore\ x+1\le\frac{f(x)}{x-1}\le 2x$$

이때 $\lim_{x\to1+}(x+1)=\lim_{x\to1+}2x=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

(ii) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{2x^2-2x}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\frac{2x(x-1)}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$\therefore\ 2x\le\frac{f(x)}{x-1}\le x+1$$

이때 $\lim_{x\to1-}2x=\lim_{x\to1-}(x+1)=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{x-1}=2$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$

답 ⑤

0117 직선 OP의 기울기가 $\frac{t^2}{t}=t$이므로 점 $P(t,\ t^2)$을 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식은

$$y-t^2=-\frac{1}{t}(x-t)\qquad\therefore\ y=-\frac{1}{t}x+t^2+1$$

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $y=t^2+1$이므로

$$f(t)=t^2+1$$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\to0$이므로 구하는 값은

$$\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}(t^2+1)=1$$

답 1

라쎈 특강

한 직선에 수직인 직선의 방정식

점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 m $(m\neq0)$인 직선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-b=-\frac{1}{m}(x-a)$$

0118 $\overline{AP}=\sqrt{(t+1)^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+4t+1}$

$\overline{BP}=\sqrt{(t-1)^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+1}$

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}(\overline{AP}-\overline{BP})$$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+4t+1}-\sqrt{t^2+1})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+4t+1}-\sqrt{t^2+1})(\sqrt{t^2+4t+1}+\sqrt{t^2+1})}{\sqrt{t^2+4t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4t}{\sqrt{t^2+4t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$

답 ④

0119 점 $P(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=1$$

$$\therefore\ b=\sqrt{1-a^2}\ (\because\ b>0)$$

이때 $Q(a,\ -\sqrt{1-a^2})$이므로

$$\overline{PQ}=2\sqrt{1-a^2}\qquad\cdots\ ❶$$

$$\therefore\ S(a)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot2\sqrt{1-a^2}=a\sqrt{1-a^2}\qquad\cdots\ ❷$$

$$\therefore\ \lim_{a\to1-}\frac{S(a)}{\sqrt{1-a}}=\lim_{a\to1-}\frac{a\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a}}$$

$$=\lim_{a\to1-}\frac{a\sqrt{1+a}\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}}$$

$$=\lim_{a\to1-}a\sqrt{1+a}=\sqrt{2}\qquad\cdots\ ❸$$

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{PQ}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $S(a)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{a\to1-}\frac{S(a)}{\sqrt{1-a}}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 점 $P(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점이므로

$0<a<1,\ 0<b<1$

또 $0<a<1$에서 $1+a>0,\ 1-a>0$이므로

$$\sqrt{1-a^2}=\sqrt{(1+a)(1-a)}=\sqrt{1+a}\sqrt{1-a}$$

0120 전략 우극한과 좌극한을 각각 구한 후 그 값을 비교한다.

풀이 ① $\lim_{x\to0+}\frac{4}{x}=\infty$, $\lim_{x\to0-}\frac{4}{x}=-\infty$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{4}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

② $\lim_{x\to\infty}(x^2+2x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty}(x^2+2x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to3+}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to3+}\frac{x-3}{x-3}=1$,

$\lim_{x\to3-}\frac{x-3}{|x-3|}=\lim_{x\to3-}\frac{x-3}{-(x-3)}=-1$이므로

$\lim_{x\to3+}\frac{x-3}{|x-3|}\neq\lim_{x\to3-}\frac{x-3}{|x-3|}$

따라서 $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{|x-3|}$의 값은 존재하지 않는다.

④ $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+5}=\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+5}$의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0+}x=0$,

$\lim_{x\to0-}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to0-}\left(-\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to0-}(-x)=0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{|x|}=0$

답 ⑤

0121 전략 함수의 그래프에서 각 극한값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to2}f(x)=3+1=4$ 답 ④

0122 전략 $x\longrightarrow-1-$이면 $x<-1$이고 $x\longrightarrow1+$이면 $x>1$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to-1-}f(x)-\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}(x+1)-\lim_{x\to1+}(-3)$

$=(-1+1)-(-3)=3$ 답 3

0123 전략 절댓값 기호 안의 식의 부호를 확인한다.

풀이 $x\longrightarrow-1+$일 때 $x^2\longrightarrow1-$이므로 $x^2-1<0$

$\therefore a=\lim_{x\to-1+}\frac{x^2+x}{|x^2-1|}=\lim_{x\to-1+}\frac{x^2+x}{-(x^2-1)}$

$=\lim_{x\to-1+}\frac{x(x+1)}{-(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to-1+}\frac{x}{-(x-1)}=-\frac{1}{2}$

$x\longrightarrow0+$일 때 $x>0$이므로

$b=\lim_{x\to0+}\frac{2x}{|x|}=\lim_{x\to0+}\frac{2x}{x}=2$

$\therefore ab=-1$ 답 -1

0124 전략 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n+}[x]=n$, $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$임을 이용한다.

풀이 ① $x\longrightarrow-2-$일 때 $f(x)\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to-2-}[f(x)]=0$

② $x\longrightarrow-2+$일 때 $f(x)\longrightarrow0-$이므로

$\lim_{x\to-2+}[f(x)]=-1$

③ $x\longrightarrow0+$일 때 $f(x)\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to0+}[f(x)]=0$

④ $x\longrightarrow2-$일 때 $f(x)\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to2-}[f(x)]=0$

⑤ $x\longrightarrow2+$일 때 $f(x)\longrightarrow0-$이므로

$\lim_{x\to2+}[f(x)]=-1$

답 ④

0125 전략 $f(x)=t$로 놓고 합성함수의 극한을 구한다.

풀이 $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0-$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to0-}f(f(x))=f(1)=0$

또 $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}(t-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to0-}f(f(x))-\lim_{x\to1+}f(f(x))=0-(-1)$

$=1$ 답 1

0126 전략 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)}{f(x)}$의 값을 구한 후 이 값을 이용할 수 있도록 극한값을 구하는 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to3}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to3}g(x)=2$이므로

$\lim_{x\to3}\frac{g(x)}{f(x)}=0$

$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{2f(x)+3g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{2+3\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}$

$=\frac{1-0}{2+3\cdot0}=\frac{1}{2}$ 답 ④

0127 전략 $\lim_{x\to1}(x+1)f(x)=1$을 이용할 수 있도록 $\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)$를 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}\cdot(x+1)f(x)$

$=\frac{3}{2}\cdot1=\frac{3}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$이므로 $20a=30$ 답 30

0128 전략 $x\longrightarrow1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow0$이면 (분모) $\longrightarrow0$임을 이용한다.

풀이 $x\longrightarrow1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow0$이므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(3x+a)=0$이므로 $3+a=0$

$\therefore a=-3$

$a=-3$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{3x-3}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{3(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 $b=\frac{1}{3}$이므로 $ab=-1$ 답 ①

0129 전략 두 다항함수 $p(x)$, $q(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=a$ (a는 0이 아닌 실수)이면 $p(x)$와 $q(x)$의 차수는 같고 최고차항의 계수의 비는 a임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$, 즉 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-4}=1$에서

ax^3+bx^2+cx+d는 이차항의 계수가 1인 이차식이어야 하므로

$a=0$, $b=1$

또 $\lim_{x\to2}f(x)=2$, 즉 $\lim_{x\to2}\frac{x^2+cx+d}{x^2-4}=2$에서 $x\longrightarrow2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}(x^2+cx+d)=0$이므로 $4+2c+d=0$

$\therefore d=-2c-4$ ····· ㉠

㉠을 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+cx+d}{x^2-4}$에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+cx-2c-4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2+c)}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2+c}{x+2}=\frac{4+c}{4}$$

즉 $\frac{4+c}{4}=2$이므로

$4+c=8$ $\therefore c=4$

$c=4$를 ㉠에 대입하면 $d=-12$

답 $a=0$, $b=1$, $c=4$, $d=-12$

0130 전략 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{x\to 0}f(x)$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구한 후 이 값을 이용할 수 있도록 극한값을 구하는 식을 변형한다.

풀이 $\frac{1}{2}x^2+2x<f(x)<x^2+2x$ ····· ㉠

㉠에서 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)=\lim_{x\to 0}(x^2+2x)=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$

(i) $x>0$일 때, ㉠의 각 변을 x로 나누면

$\frac{1}{2}x+2<\frac{f(x)}{x}<x+2$

이때 $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2}x+2\right)=\lim_{x\to 0+}(x+2)=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=2$

(ii) $x<0$일 때, ㉠의 각 변을 x로 나누면

$x+2<\frac{f(x)}{x}<\frac{1}{2}x+2$

이때 $\lim_{x\to 0-}(x+2)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{2}x+2\right)=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=2$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+5x}{2f(x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+5}{2\cdot\frac{f(x)}{x}-1}$$

$$=\frac{0+5}{2\cdot 2-1}=\frac{5}{3}$$

답 ①

0131 전략 $|f(x)-3x-1|<1$을 변형하여 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 $|f(x)-3x-1|<1$에서

$-1<f(x)-3x-1<1$ $\therefore 3x<f(x)<3x+2$

모든 양의 실수 x에 대하여 $3x>0$, $3x+2>0$이므로 위의 부등식의 각 변을 제곱하면

$9x^2<\{f(x)\}^2<9x^2+12x+4$

모든 양의 실수 x에 대하여 $2x^2-x+1>0$이므로 ($2x^2-x+1=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$) 앞의 부등식의 각 변을 $2x^2-x+1$로 나누면

$$\frac{9x^2}{2x^2-x+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-x+1}<\frac{9x^2+12x+4}{2x^2-x+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2}{2x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+12x+4}{2x^2-x+1}=\frac{9}{2}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-x+1}=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

0132 전략 두 원 C_1, C_2의 방정식을 연립하여 점 P의 x좌표를 구한다.

풀이 $x^2+y^2=1$에서 $y^2=1-x^2$이므로 이것을 $(x-1)^2+y^2=r^2$에 대입하면

$(x-1)^2+1-x^2=r^2$

$-2x+2=r^2$ $\therefore x=1-\frac{1}{2}r^2$

이때 점 P의 x좌표가 $f(r)$이므로

$f(r)=1-\frac{1}{2}r^2$

$$\therefore \lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{f(r)}{4-r^4}=\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{1-\frac{1}{2}r^2}{4-r^4}$$

$$=\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{2-r^2}{2(2-r^2)(2+r^2)}$$

$$=\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{1}{2(2+r^2)}$$

$$=\frac{1}{2\cdot(2+2)}=\frac{1}{8}$$

답 ①

0133 전략 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 $\overline{AH}$, $\overline{CH}$의 길이를 각각 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 두 점 A, B의 좌표를 각각 (a, a^2), (b, b^2)이라 하면 이차방정식 $x^2=x+t$, 즉 $x^2-x-t=0$의 두 실근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=1$, $ab=-t$

이때 $t>0$에서 $ab=-t<0$이고 $a>0$이므로

$b<0$ $\therefore a>b$

점 H의 좌표가 (b, a^2)이므로 (점 A와 y좌표가 같고, 점 B와 x좌표가 같다.)

$\overline{AH}=a-b=\sqrt{(a-b)^2}$

$=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{1+4t}$

또 점 C의 좌표가 $(-a, a^2)$이므로 (점 A와 y축에 대하여 대칭이다.)

$\overline{CH}=|b-(-a)|=|a+b|=1$

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$

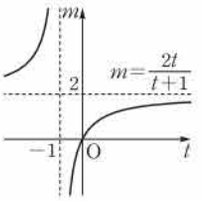
답 ②

0134 전략 $\frac{2t}{t+1}=m$, $\frac{t+1}{t-1}=n$으로 놓고 각 그래프를 그려 본다.

풀이 $\frac{2t}{t+1}=m$으로 놓으면

$m=\frac{2t}{t+1}=-\frac{2}{t+1}+2$

이므로 $t\longrightarrow\infty$일 때 $m\longrightarrow 2-$이다.



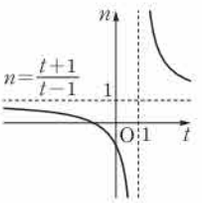
$\therefore \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{2t}{t+1}\right)=\lim_{m\to 2-} f(m)$

$=-1$ …❶

$\frac{t+1}{t-1}=n$으로 놓으면

$n=\frac{t+1}{t-1}=\frac{2}{t-1}+1$

이므로 $t\longrightarrow-\infty$일 때 $n\longrightarrow 1-$이다.



$\therefore \lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)=\lim_{n\to 1-} f(n)$

$=1$ …❷

$\therefore \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{2t}{t+1}\right)-\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)=-2$ …❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{2t}{t+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{2t}{t+1}\right)-\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0135 전략 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구한 후 이 값을 이용할 수 있도록 극한값을 구하는 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x}\{f(x)+x\}=0$에서 $\lim_{x\to 3}\left\{\frac{f(x)}{x}+1\right\}=0$

$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x}=-1$ …❶

$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{2x^2-f(x)}{x^2+\{f(x)\}^2}=\lim_{x\to 3}\frac{2-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}{1+\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}$

$=\frac{2-(-1)\cdot\frac{1}{3}}{1+(-1)^2}=\frac{7}{6}$ …❷

답 $\frac{7}{6}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-f(x)}{x^2+\{f(x)\}^2}$의 값을 구할 수 있다.	70 %

0136 전략 근호가 있는 쪽을 유리화한다.

풀이 $p=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)$

$=-\frac{1}{2}$ …❶

$q=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$

$=\frac{-4}{1+1}=-2$ …❷

$\therefore 2p+q=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-3$ …❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $2p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0137 전략 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=a$ (a는 0이 아닌 실수)이면 $f(x)$와 $g(x)$의 차수가 같음을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차함수임을 알 수 있다. …❶

또 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-2$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1} f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ …❷

$f(x)=(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+a}{x+1}=\frac{1+a}{2}$

즉 $\frac{1+a}{2}=-2$이므로 $1+a=-4$ $\therefore a=-5$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-5)$이므로 …❸

$f(4)=3\cdot(-1)=-3$ …❹

답 -3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차함수임을 알 수 있다.	30 %
❷ $f(1)=0$임을 알 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

02 함수의 연속

0138 ㄱ

0139 $\lim_{x\to 0+} f(x)=4$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=2$이므로
$\lim_{x\to 0+} f(x)\neq\lim_{x\to 0-} f(x)$
따라서 $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. ㄴ

0140 $f(0)=0$, $\lim_{x\to 0} f(x)=2$이므로
$\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. ㄷ

0141 $f(1)=1$, $\lim_{x\to 1} f(x)=1$이므로
$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 연속

0142 $f(1)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 불연속

0143 $f(1)=1$, $\lim_{x\to 1} f(x)=1$이므로
$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 연속

0144 $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$
이때 $f(1)=0$이므로
$\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 불연속

0145 $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{1}{x}=1$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(2x-1)=1$
이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=1$
이때 $f(1)=1$이므로
$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 연속

0146 $[-2, 1]$ **0147** $[0, 7)$

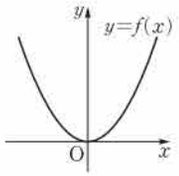
0148 $[-1, \infty)$ **0149** $(-\infty, 10)$

0150 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로
$(-\infty, \infty)$ $(-\infty, \infty)$

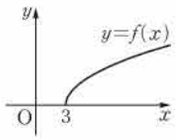
0151 주어진 함수의 정의역은 $x-2\neq 0$, 즉 $x<2$ 또는 $x>2$인 x의 값들의 집합이므로
$(-\infty, 2), (2, \infty)$ $(-\infty, 2), (2, \infty)$

본책 24~28쪽

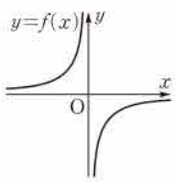
0152 함수 $f(x)=x^2$은 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.
$(-\infty, \infty)$



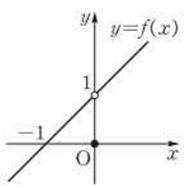
0153 함수 $f(x)=\sqrt{x-3}$은 $x>3$인 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $(3, \infty)$에서 연속이다.
이때 $\lim_{x\to 3+} f(x)=f(3)=0$이므로 $f(x)$는 구간 $[3, \infty)$에서 연속이다. $[3, \infty)$



0154 함수 $f(x)=-\frac{1}{x}$은 $x\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$에서 연속이다.
$(-\infty, 0), (0, \infty)$



0155 $f(0)=0$,
$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$이므로
$\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 그 이외의 x의 값에서는 연속이다.
풀이 참조



0156 함수 $f(x)=x^3+x^2-3x+2$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. $(-\infty, \infty)$

0157 함수 $f(x)=(x+1)(x^2-2x+7)$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. $(-\infty, \infty)$

0158 함수 $f(x)=x(x^4+2x^3-5)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다. $(-\infty, \infty)$

0159 함수 $f(x)=\frac{x-3}{x-1}$은 유리함수이므로 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
즉 구간 $(-\infty, 1), (1, \infty)$에서 연속이다.
$(-\infty, 1), (1, \infty)$

0160 함수 $f(x)=\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$은 유리함수이므로 $x\neq 2$, $x\neq 3$인 모든 실수 x에서 연속이다.
즉 구간 $(-\infty, 2), (2, 3), (3, \infty)$에서 연속이다.
$(-\infty, 2), (2, 3), (3, \infty)$

0161 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 $f(x)+g(x)$도 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

0162 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 $f(x)-g(x)$도 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

0163 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 $f(x)g(x)$도 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, \infty)$

0164 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)\neq 0$, 즉 $x\neq -1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$

0165 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이므로 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

$f(x)\neq 0$에서 $\quad x^2-x\neq 0$

$x(x-1)\neq 0 \quad \therefore x\neq 0, x\neq 1$

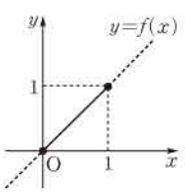
따라서 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$에서 연속이다.

답 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$

0166 답 최댓값: 1, 최솟값: 없다.

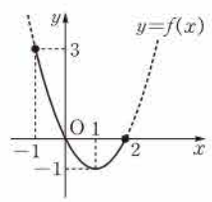
0167 답 최댓값: 0, 최솟값: -2

0168 함수 $f(x)=x$는 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 1, $x=0$에서 최솟값 0을 갖는다.



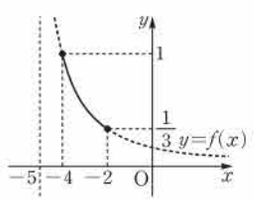
답 최댓값: 1, 최솟값: 0

0169 함수 $f(x)=x^2-2x$는 구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 3, $x=1$에서 최솟값 -1을 갖는다.



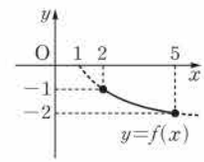
답 최댓값: 3, 최솟값: -1

0170 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+5}$은 구간 $[-4, -2]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 최댓값 1, $x=-2$에서 최솟값 $\frac{1}{3}$을 갖는다.



답 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{3}$

0171 함수 $f(x)=-\sqrt{x-1}$은 구간 $[2, 5]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 -1, $x=5$에서 최솟값 -2를 갖는다.



답 최댓값: -1, 최솟값: -2

0172 답 (가) 연속 (나) 사잇값 정리

0173 (1) $f(1)=1^2+2\cdot 1-4=-1$, $f(2)=2^2+2\cdot 2-4=4$
(2) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)f(2)=-4<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 (1) $f(1)=-1$, $f(2)=4$ (2) 풀이 참조

0174 ① $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

② $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}[x]=0$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}[x]=-1$이므로
$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0-} f(x)$
따라서 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

③ $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

④ $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{x}=1$,
$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x}{-x}=-1$이므로
$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0-} f(x)$
따라서 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=2$
이때 $f(0)=2$이므로 $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$
따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

답 ⑤

라쎈 특강

여러 가지 함수의 연속성

① 다항함수 ➔ 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속
② 유리함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ➔ $g(x)\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속
③ 무리함수 $y=\sqrt{f(x)}$ ➔ $f(x)\geq 0$인 모든 실수 x에서 연속
④ $y=[x]$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)
➔ $x\neq n$ (n은 정수)인 모든 실수 x에서 연속

0175 $f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x^2-1}{x}}=\dfrac{x}{x^2-1}$

따라서 $x=0$, $x^2-1=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속이 되는 x의 값은 -1, 0, 1의 3개이다. 답 3

0176 $f(a)=-2a$이고,

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}(-2x)=-2a$

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}(x^2-3)=a^2-3$ ··· ❶

$f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하고 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$이어야 하므로

$-2a=a^2-3$, $a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=1$ ··· ❷

따라서 모든 a의 값의 합은

$-3+1=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(a)$, $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0177 ㄱ. $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geq 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$

이때 $f(0)=0$이고,

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}x^2=0$,

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(-x^2)=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

즉 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $f(-1)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(1)=5$이고,

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+4)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+4)=5$$

이므로 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$

즉 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

이상에서 모든 실수 x에서 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0178 $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1+}(x^2+1)=2$,

$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1-}(x+3)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=2$

이때 $f(-1)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)$

즉 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

또 $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}2x=4$, $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(x^2+1)=5$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2-}f(x)$

즉 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이고 그 이외의 x의 값에서는 연속이다. 답 풀이 참조

0179 $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1-}f(x)$

즉 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

또 $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$

즉 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 -1의 1개이고, 불연속인 x의 값은 -1, 1의 2개이므로

$a=1$, $b=2$

$\therefore a^2+b^2=5$ 답 5

0180 $\lim\limits_{x\to 3+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)=2$

이때 $f(3)=1$이므로 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

$\therefore a=3$ 답 3

0181 $f(1)=0$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(0)=1$ ··· ❶

$f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 2-$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}(f\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to 1}f(f(x))=\lim\limits_{t\to 2-}f(t)=1$ ··· ❷

따라서 $\lim\limits_{x\to 1}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(1)$이므로 $(f\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다. ··· ❸

답 연속

채점 기준	비율
❶ $(f\circ f)(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim\limits_{x\to 1}(f\circ f)(x)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 합성함수 $(f\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속임을 알 수 있다.	20 %

0182 ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)g(x)=0\cdot 1=0$,

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)g(x)=0\cdot(-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=0$

이때 $f(0)g(0)=2\cdot 1=2$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)\neq f(0)g(0)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $x\longrightarrow 0+$일 때 $g(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f(g(x))=f(1)=1$

또 $x \longrightarrow 0-$일 때 $g(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 0-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0-}f(g(x))=f(-1)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=1$

이때 $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=1$이므로

$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 0}g(f(x))=\lim_{t\to 0+}g(t)=1$

이때 $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(2)=1$이므로

$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. ②

0183 구간 $(0, 4)$에서 자연수 x는 1, 2, 3

(i) $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)f(x)=0\cdot 0=0$

이때 $g(1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)$

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 2+}g(x)=\lim_{x\to 2+}(x-1)f(x)=1\cdot 1=1$,

$\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2-}(x-1)f(x)=1\cdot 2=2$이므로

$\lim_{x\to 2+}g(x)\neq\lim_{x\to 2-}g(x)$

따라서 $\lim_{x\to 2}g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x\to 3}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to 3}g(x)=\lim_{x\to 3}(x-1)f(x)=2\cdot 2=4$

이때 $g(3)=2f(3)=0$이므로

$\lim_{x\to 3}g(x)\neq g(3)$

따라서 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

이상에서 구간 $(0, 4)$에서 $g(x)$가 불연속인 자연수 x의 값은 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$ 5

0184 $f(0)=-2$이므로

$-b=-2 \quad \therefore b=2$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$

$2+a=1-b, \quad 2+a=-1$

$\therefore a=-3$

또 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)=f(-1)$

$1-b=-3-c, \quad -1=-3-c$

$\therefore c=-2$

$\therefore abc=12$ ⑤

0185 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$

$4-2+a=-8+4a+2$

$3a=8 \quad \therefore a=\frac{8}{3}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+\frac{8}{3} & (x>2) \\ -x^3+\frac{16}{3}x+2 & (x\le 2) \end{cases}$ 이므로

$f(-1)=1-\frac{16}{3}+2=-\frac{7}{3}$ ①

0186 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=f(a)g(a)$ ··· ❶

이때

$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(x-12)(x+a)=2a(a-12)$,

$\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(x^2+9x)(x+a)=2a(a^2+9a)$,

$f(a)g(a)=2a(a-12)$

이므로

$2a(a-12)=2a(a^2+9a), \quad a(a^2+8a+12)=0$

$a(a+6)(a+2)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=0$ ··· ❷

따라서 모든 a의 값의 합은

$-6+(-2)+0=-8$ ··· ❸

−8

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=f(a)g(a)$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0187 함수 $\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$

이때

$\lim_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0+}\{f(x+1)\}^2$

$=\{f(1)\}^2=(7-a)^2$

$=a^2-14a+49$,

$\lim_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0-}\{f(x-1)\}^2$

$=\{f(-1)\}^2=(7+a)^2$

$=a^2+14a+49$,

$\{g(0)\}^2=\{f(-1)\}^2=(7+a)^2=a^2+14a+49$

이므로

$a^2-14a+49=a^2+14a+49$

$28a=0 \quad \therefore a=0$ ③

0188 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3-}f(x)=f(3)$

이때 $\lim_{x\to3+}[x]=3$, $\lim_{x\to3-}[x]=2$, $[3]=3$이므로

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}([x]^2+a[x])=3^2+a\cdot3=3a+9$,

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}([x]^2+a[x])=2^2+a\cdot2=2a+4$,

$f(3)=[3]^2+a[3]=3a+9$

즉 $3a+9=2a+4$이므로

$a=-5$ 답 ③

0189 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a}+b}{x^2}=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(\sqrt{x^2+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{a}+b=0$ $\therefore b=-\sqrt{a}$ …… ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a})}{x^2(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

따라서 $\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $b=-1$

$\therefore a-b=2$ 답 2

0190 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+8}+a}{x+1}=f(-1)$ …… ㉠

$x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(\sqrt{x^2+8}+a)=0$이므로

$3+a=0$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=-\frac{1}{3}$$ 답 ②

0191 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2-ax-3}{x-1}=b$ …… ㉠

$x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2-ax-3)=0$이므로

$1-a-3=0$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

$\therefore a+b=2$ 답 2

0192 ㄱ. 함수 $g(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2}g(x)=g(-2)=a$

ㄴ. $\lim_{x\to-2}g(x)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=a$에서 $x\longrightarrow-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

$\therefore \lim_{x\to-2}f(x)=0$

ㄷ. $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)g(x)}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}\cdot g(x)\cdot\frac{1}{x+3}=a\cdot a\cdot1=a^2$

따라서 $a^2=5$에서 $a=\pm\sqrt{5}$이므로 a의 개수는 2이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0193 $x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{x^2-3x+a}{x-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+a}{x-1}$

$x\longrightarrow1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2-3x+a)=0$이므로

$-2+a=0$ $\therefore a=2$

$$\therefore f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x-2)=-1$$ 답 −1

0194 $x\neq-2$일 때,

$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=x-2$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}(x-2)=-4$ 답 −4

0195 $x\neq4$일 때, $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}-2}$

함수 $f(x)$가 모든 양수 x에서 연속이면 $x=4$에서 연속이므로

$$f(4)=\lim_{x\to4}f(x)=\lim_{x\to4}\frac{x\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}-2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow4$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to4}(x\sqrt{x}-a)=0$이므로

$4\cdot2-a=0 \quad \therefore a=8$ … ❶

$a=8$을 ㉠에 대입하면

$$f(4)=\lim_{x\to4}\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to4}(x+2\sqrt{x}+4)$$

$=4+4+4=12$ … ❷

12

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0196 $x\neq-1$일 때, $f(x)=\dfrac{ax^3+bx}{x+1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{ax^3+bx}{x+1}$$

$x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(ax^3+bx)=0$이므로 $-a-b=0$

$\therefore a+b=0$ …… ㉠

이때 $f(2)=2$이므로 $x=2$를 $(x+1)f(x)=ax^3+bx$에 대입하면

$3f(2)=8a+2b, \quad 8a+2b=6$

$\therefore 4a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1$

$\therefore ab=-1$ ②

0197 ① 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $2g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(x)+2g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(x)g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

③ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)\neq0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 $g(x)=x^2+1>0$이므로 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

④ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)\neq0$, 즉 $x\neq-3$인 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $g(f(x))$도 모든 실수 x에서 연속이다.

$g(f(x))=g(x+3)=(x+3)^2+1$

④

0198 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x에서 불연속이다.

$g(x)=0$에서 $x^2-8x+15=0$

$(x-3)(x-5)=0 \quad \therefore x=3$ 또는 $x=5$ … ❶

따라서 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=3$, $x=5$에서 불연속이므로 구하는 합은

$3+5=8$ … ❷

8

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 불연속이 되는 x의 값을 구할 수 있다.	80 %
❷ 모든 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0199 ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $f(a)=g(a)$이면 $\dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 $x=a$에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\{f(x)\}^2=f(x)f(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄹ. [반례] $f(x)=x-1$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면

$$g(f(x))=\begin{cases}1 & (x\geq1)\\ -1 & (x<1)\end{cases}$$

이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 $g(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 항상 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다. ㄱ, ㄷ

0200 ① $f(x)$와 $g(x)$가 연속함수이면 $\{f(x)\}^2$과 $\{g(x)\}^2$도 연속함수이다.

따라서 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$도 연속함수이다.

② $f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면

$g(x)=h(x)-f(x)$

이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

③ [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면

$f(x)g(x)=0$

이때 $f(x)$와 $f(x)g(x)$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

④ $g(x)$가 연속함수이므로 임의의 실수 a에 대하여 $g(a)=b$라 하면

$\lim_{x\to a}g(x)=b$

즉 $g(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow b$이므로

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to a}f(g(x))=\lim_{t\to b}f(t)=f(b)$$

($\because f(x)$는 연속함수)

이때 $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(b)$이므로

$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(a)$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 임의의 실수 a에 대하여 $x=a$에서 연속이므로 연속함수이다. (실수 전체의 집합에서 연속이다.)

⑤ $g(x)$가 연속함수이므로 임의의 실수 a에 대하여 $g(a)=b$라 하면

$\lim_{x\to a}g(x)=b$

즉 $g(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow b$이므로

$\lim_{x\to a}(|g(x)|+1)=\lim_{t\to b}(|t|+1)=|b|+1$

($\because$ $|x|$는 연속함수)

이때 $|g(a)|+1=|b|+1$이므로

$\lim_{x\to a}(|g(x)|+1)=|g(a)|+1$

즉 $|g(x)|+1$은 임의의 실수 a에 대하여 $x=a$에서 연속이므로 연속함수이다.

따라서 $f(x)$, $|g(x)|+1$이 연속함수이고, $|g(x)|+1>0$이므로 $\dfrac{f(x)}{|g(x)|+1}$도 연속함수이다.

답 ③

0201 ① $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=2$

② $\lim_{x\to5+}f(x)=2$, $\lim_{x\to5-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to5+}f(x)\neq\lim_{x\to5-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to5}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ 구간 $(0, 6)$에서 불연속이 되는 x의 값은 3, 5의 2개이다.

④ 함수 $f(x)$가 구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최솟값을 갖는다.

답 ⑤

0202 함수 $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$은 $x\neq-1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

①, ④, ⑤ $f(x)$가 주어진 닫힌구간에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값을 갖는다.

② $-2\le x<-1$일 때, x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로 최댓값은

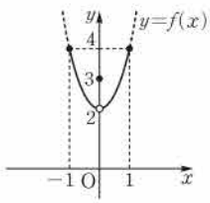
$f(-2)=\dfrac{3}{-2+1}=-3$

③ $-1<x\le0$일 때, x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로 최댓값을 갖지 않는다.

답 ③

0203 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $[-1, 1]$에서 오른쪽 그림과 같으므로 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최댓값 4를 갖고, 최솟값은 없다.



답 최댓값: 4, 최솟값: 없다.

0204 ㄱ. $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x-1}$은 $x=1$에서 불연속이다.

또 $\lim_{x\to1+}\dfrac{1}{x-1}=\infty$, $\lim_{x\to1-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$이므로 $\dfrac{1}{f(x)}$은 구간 $[-2, 2]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

ㄴ. $f(x)g(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$은 $x\neq-3$인 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 $f(x)g(x)$가 구간 $[-2, 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄷ. $f(g(x))=f\left(\dfrac{1}{x+3}\right)=\dfrac{1}{x+3}-1$은 $x\neq-3$인 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 $f(g(x))$가 구간 $[-2, 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

이상에서 구간 $[-2, 2]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0205 $f(x)=x^3+3x-3$으로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-17<0$, $f(-1)=-7<0$, $f(0)=-3<0$,

$f(1)=1>0$, $f(2)=11>0$, $f(3)=33>0$

따라서 $f(0)f(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

그런데 방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 가지므로 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(0, 1)$이다.

답 ③

0206 $f(-2)f(-1)=-2\cdot2=-4<0$,

$f(0)f(1)=2\cdot(-1)=-2<0$,

$f(1)f(2)=-1\cdot1=-1<0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 3개의 실근을 가지므로

$n=3$

답 ②

0207 $f(x)=x^2-2x+a$로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2+a-1$

이므로 $f(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고, x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

따라서 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-1, 1)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 사잇값 정리에 의하여

$f(-1)f(1)<0$

이어야 한다. ⋯ ❶

$f(-1)=a+3$, $f(1)=a-1$이므로 $f(-1)f(1)<0$에서

$(a+3)(a-1)<0$ $\quad\therefore\ -3<a<1$ ⋯ ❷

즉 정수 a는 -2, -1, 0의 3개이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(-1)f(1)<0$이어야 함을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0208 이차함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(1)<0$이면 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 하나의 실근을 갖는다.

$f(1)<0$에서 $a^2-7a+10<0$

$(a-2)(a-5)<0$ $\therefore 2<a<5$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=5$이므로

$\beta-\alpha=3$ ②

0209 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$에서 $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}=1$에서 $f(3)=0$

즉 $f(x)$는 x, $x-3$을 인수로 가지므로

$f(x)=x(x-3)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항함수) …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠을 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x(x-3)Q(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x-3)Q(x)=-3Q(0)$$

즉 $-3Q(0)=1$이므로 $Q(0)=-\dfrac{1}{3}$ …… ㉡

또 ㉠을 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}=1$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)Q(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}xQ(x)=3Q(3)$$

즉 $3Q(3)=1$이므로 $Q(3)=\dfrac{1}{3}$ …… ㉢

이때 $Q(x)$는 다항함수이므로 구간 $[0, 3]$에서 연속이고, ㉡, ㉢에서 $Q(0)Q(3)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $Q(x)=0$은 구간 $(0, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $[0, 3]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다. ③

0210 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=4-f(1)$에서

$f(1)=4-f(1)$, $2f(1)=4$

$\therefore f(1)=2$ ②

0211 전략 경곗값에서의 함수의 연속성을 조사한다.

풀이 ㄱ. $f(1)=1$이고,

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(2\sqrt{x}+1)=1$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}1=1$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

이때 $f(0)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+}\dfrac{x(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1+}x=-1$,

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}\dfrac{x(x+1)}{-(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1-}(-x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

이상에서 모든 실수 x에서 연속인 함수인 것은 ㄴ뿐이다. ㄴ

0212 전략 그래프에서 불연속이면서 극한값은 존재하는 x의 값을 찾는다.

풀이 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=2$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키는 a의 값은 -1, 0, 2이다.

조건 (가)에서

(i) $a=-1$일 때, $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=1$

(ii) $a=0$일 때, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=2$

(iii) $a=2$일 때,

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to2-}f(x)$

이상에서 구하는 a의 값은 -1, 0이다. -1, 0

0213 전략 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a)$이면 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속임을 이용한다.

풀이 ㄱ, ㄴ. $\lim\limits_{x\to0+}f(x)g(x)=0\cdot(-1)=0$,

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)=0\cdot1=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=0$

이때 $f(0)g(0)=1\cdot(-1)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)\neq f(0)g(0)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$\lim\limits_{x\to0}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to0}g(f(x))=\lim\limits_{t\to0+}g(t)=-1$

이때 $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(1)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$

따라서 $(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. ③

0214 전략 $g(x)=t$로 놓고 $\lim\limits_{x\to0}(f\circ g)(x)$의 값을 구한 후 $(f\circ g)(0)$의 값과 비교한다.

풀이 ㄱ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0+$일 때 $t=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(g(x))=f(-1)=0$

또 $x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$$\lim_{x\to 0-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0-}f(g(x))=\lim_{t\to 1-}f(t)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=0$$

이때 $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0}f(g(x))=\lim_{t\to 1-}f(t)=0$$

이때 $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(0)$$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $g(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 0$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0}f(g(x))=\lim_{t\to 0+}f(t)=-1$$

이때 $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)\neq(f\circ g)(0)$$

따라서 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 $(f\circ g)(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=g(x)$의 그래프인 것은 ㄱ, ㄴ이다. ④

0215 전략 함수 $\{f(x)+a\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속임을 이용한다.

풀이 함수 $\{f(x)+a\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}\{f(x)+a\}^2=\lim_{x\to 0-}\{f(x)+a\}^2=\{f(0)+a\}^2$$

이때

$$\lim_{x\to 0+}\{f(x)+a\}^2=\lim_{x\to 0+}(-x^2+3+a)^2$$
$$=(3+a)^2=a^2+6a+9,$$

$$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+a\}^2=\lim_{x\to 0-}\left(x-\frac{1}{2}+a\right)^2$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+a\right)^2=a^2-a+\frac{1}{4},$$

$$\{f(0)+a\}^2=(3+a)^2=a^2+6a+9$$

이므로

$$a^2+6a+9=a^2-a+\frac{1}{4}$$

$$7a=-\frac{35}{4} \qquad \therefore a=-\frac{5}{4}$$ ③

0216 전략 먼저 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$$

$$2b+2=1+2a \qquad \therefore a=b+\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키므로 $x=0$을 $f(x+3)=f(x)$에 대입하면

$$f(3)=f(0), \qquad 3b+2=-1$$

$$\therefore b=-1$$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=-\frac{1}{2}$

$$\therefore ab=\frac{1}{2}$$ ②

0217 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1+}\frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}=-3+a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x \longrightarrow 1+$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1+}(x+b)=0$이므로

$$1+b=0 \qquad \therefore b=-1$$

$b=-1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}(\sqrt{x+3}+2)$$
$$=2+2=4$$

따라서 $4=-3+a$이므로 $\quad a=7$

$$\therefore a+b=6$$ 6

0218 전략 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$, $x=1$에서 연속임을 이용하여 a, b에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 $x\neq -1$, $x\neq 1$일 때, $\quad f(x)=\frac{x^3+ax+b}{x^2-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+ax+b}{x^2-1}=f(-1)$$

$x \longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -1}(x^3+ax+b)=0$이므로

$$-1-a+b=0 \qquad \therefore a-b=-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax+b}{x^2-1}=f(1)$$

$x \longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}(x^3+ax+b)=0$이므로

$$1+a+b=0 \qquad \therefore a+b=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면 풀면 $\quad a=-1, b=0$

따라서 $x\neq -1$, $x\neq 1$일 때

$$f(x)=\frac{x^3-x}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}=x$$

이므로 구간 $[2, 5]$에서 $f(x)$의 최댓값은 5, 최솟값은 2이다.

즉 $M=5$, $m=2$이므로

$$M-m=3$$ 3

0219 전략 연속함수의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $f(x)+g(x)=p(x)$ …… ㉠

$f(x)-g(x)=q(x)$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2f(x)=p(x)+q(x)$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}p(x)+\frac{1}{2}q(x)$

㉠−㉡을 하면 $2g(x)=p(x)-q(x)$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}p(x)-\frac{1}{2}q(x)$

이때 $p(x)$와 $q(x)$가 연속함수이므로 $f(x)$와 $g(x)$도 연속함수이다.

ㄴ. $f(x)$가 연속함수이므로 임의의 실수 a에 대하여 $f(a)=b$라 하면 $\lim_{x\to a}f(x)=b$

즉 $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow b$이므로

$\lim_{x\to a}|f(x)|=\lim_{t\to b}|t|=|b|$ ($\because$ $|x|$는 연속함수)

이때 $|f(a)|=|b|$이므로 $\lim_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|$

따라서 $|f(x)|$도 연속함수이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면 $|f(x)|=1$

이때 $|f(x)|$는 연속함수이지만 $f(x)$는 연속함수가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0220 전략 함수 $h(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속임을 이용하여 함수 $g(x)$를 구한다.

풀이 함수 $h(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$

이때 $g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=-1\cdot(1-a+b)=a-b-1$,

$\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)=0\cdot(1-a+b)=0$,

$f(-1)g(-1)=-1\cdot(1-a+b)=a-b-1$

이므로 $a-b-1=0$

$\therefore a-b=1$ …… ㉠

또 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

이때

$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=2\cdot(1+a+b)=2+2a+2b$,

$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=1\cdot(1+a+b)=1+a+b$,

$f(1)g(1)=2\cdot(1+a+b)=2+2a+2b$

이므로 $2+2a+2b=1+a+b$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

따라서 $g(x)=x^2-1$이므로

$g(5)=24$ 답 24

참고 구간 $(-2, 2)$에서 함수 $f(x)$는 $x\neq -1$, $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이고, 다항함수 $g(x)$는 연속함수이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$는 $x\neq -1$, $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 함수 $h(x)$가 구간 $(-2, 2)$에서 연속임을 확인할 때에는 $x=-1$, $x=1$에서만 연속인지 조사하면 된다.

0221 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

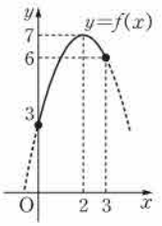
풀이 $x\neq 2$일 때,

$f(x)=\frac{-x^3+6x^2-5x-6}{x-2}=\frac{(x-2)(-x^2+4x+3)}{x-2}$

$=-x^2+4x+3$

$=-(x-2)^2+7$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $[0, 3]$에서 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 3]$에서 연속이다.



따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 7, $x=0$에서 최솟값 3을 가지므로

$M=7$, $m=3$

$\therefore M+m=10$ 답 ⑤

0222 전략 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 이용한다.

풀이 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(1)f(3)<0$, $f(3)f(5)<0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 3)$, $(3, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x(x-m)(x-n)=0$의 실근은 0, m, n이고 m, n은 자연수이므로

$m=2$, $n=4$ 또는 $m=4$, $n=2$

따라서 $f(x)=x(x-2)(x-4)$이므로

$f(6)=6\cdot 4\cdot 2=48$ 답 ④

0223 전략 지하철이 A 역을 출발한 지 x시간 후의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고 사잇값 정리를 이용한다.

풀이 지하철이 A 역을 출발한 지 x시간 후의 속력을 $f(x)$ km/h라 하면 $f(x)$는 연속함수이다.

A 역을 출발한 지 각각 a시간, b시간 후에 B 역, C 역에 도착하였다고 하면

$f(0)=0$, $f(a)=0$, $f(b)=0$

이때 $0<\alpha<a$, $a<\beta<b$이고 $f(\alpha)=75$, $f(\beta)=75$인 α, β가 존재하므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=30$인 c가 구간 $(0, \alpha)$, (α, a), (a, β), (β, b)에 각각 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 지하철의 속력이 30 km/h인 순간은 적어도 4번이다.

답 4번

0224 전략 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-1$, $x=1$에서 연속임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1+}|f(x)|=\lim_{x\to -1-}|f(x)|=|f(-1)|$

$|a+1|=1$, $a+1=\pm 1$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$ …… ❶

또 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}|f(x)|=\lim_{x\to 1-}|f(x)|=|f(1)|$

$|b+1|=|a-1|$

(i) $a=-2$일 때,

$|b+1|=3$이므로 $b+1=\pm 3$

$\therefore b=-4$ 또는 $b=2$ ⋯ ❷

(ii) $a=0$일 때,

$|b+1|=1$이므로 $b+1=\pm 1$

$\therefore b=-2$ 또는 $b=0$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 $2a+b$는 $a=-2$, $b=-4$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$2\cdot(-2)-4=-8$ ⋯ ❹

답 -8

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a=-2$일 때, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $a=0$일 때, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $2a+b$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0225 전략 함수 $f(x)$가 $x\geq 2$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $x\neq 3$일 때, $f(x)=\dfrac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}$

함수 $f(x)$가 $x\geq 2$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}=1$ ····· ㉠ ⋯ ❶

$x\longrightarrow 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 3}(a\sqrt{x-2}+b)=0$이므로

$a+b=0$ $\therefore b=-a$ ····· ㉡ ⋯ ❷

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x-2}-a}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{a(\sqrt{x-2}-1)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{a(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{a}{\sqrt{x-2}+1}=\frac{a}{2}$$

즉 $\dfrac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $b=-2$ ⋯ ❸

$\therefore ab=-4$ ⋯ ❹

답 -4

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3}=1$임을 알 수 있다.	30 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0226 전략 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $g(x)\neq 0$이어야 한다.

풀이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $g(x)\neq 0$이어야 하므로 이차방정식 $g(x)=0$, 즉 $x^2+ax+7=0$이 실근을 갖지 않아야 한다. ⋯ ❶

이차방정식 $x^2+ax+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-28<0$, $a^2<28$

$\therefore -2\sqrt{7}<a<2\sqrt{7}$ ⋯ ❷

따라서 정수 a는 -5, -4, -3, ⋯, 5의 11개이다. ⋯ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $g(x)=0$이 실근을 갖지 않아야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0227 전략 두 함수 $h(x)$, $k(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $h(x)-k(x)$도 구간 $[a, b]$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x$에서 $f(x)-x=0$

$g(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 구간 $[a, b]$에서 연속이다. ⋯ ❶

이때

$g(a)=f(a)-a=b-a>0$,

$g(b)=f(b)-b=a-b<0$

이므로

$g(a)g(b)<0$ ⋯ ❷

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=x$는 구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. ⋯ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ $g(x)=f(x)-x$가 구간 $[a, b]$에서 연속임을 알 수 있다.	30 %
❷ $g(a)g(b)<0$임을 알 수 있다.	30 %
❸ 방정식 $f(x)=x$가 구간 (a, b)에서 실근을 가짐을 알 수 있다.	40 %

03 미분계수와 도함수

0228 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{4-2}{2}=1$ 답 1

0229 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{-2-(-2)}{2}=0$ 답 0

0230 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-(-2)}{2}=2$ 답 2

0231 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(-1)-f(-4)}{-1-(-4)}=\frac{3-9}{3}=-2$ 답 -2

0232 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{1+\Delta x-1}$

$=\frac{-2(1+\Delta x)+1-(-1)}{\Delta x}$

$=\frac{-2\Delta x}{\Delta x}=-2$ 답 -2

0233 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(1+\Delta x)+2-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$ 답 -1

0234 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=2$ 답 2

0235 $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(1+\Delta x)^3+(1+\Delta x)+1-5}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(\Delta x)^3+9(\Delta x)^2+10\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{3(\Delta x)^2+9\Delta x+10\}=10$ 답 10

0236 $f(x)=-x^2$으로 놓으면 점 $(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(-1+\Delta x)^2-(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-\Delta x+2)=2$ 답 2

0237 $f(x)=x^2-x$로 놓으면 점 $(1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-(1+\Delta x)-0}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+1)=1$ 답 1

0238 답 연속이고 미분가능하지 않다.

참고 0, 연속, x, 1, $-x$, -1, $f'(0)$, 미분가능하지 않다, 연속, 미분가능하지 않다

0239 (i) $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}x^2=0$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}x^3=0$

이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0+}x=0$,

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0-}x^2=0$

이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

따라서 $f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

답 연속이고 미분가능하다.

0240 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10-10}{\Delta x}=0$ 답 $f'(x)=0$

0241 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)+1-(3x+1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$ 답 $f'(x)=3$

0242 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3+5-(x^3+5)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3+3x(\Delta x)^2+3x^2\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{(\Delta x)^2+3x\Delta x+3x^2\}$

$=3x^2$ 답 $f'(x)=3x^2$

0243 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{x+\Delta x-5-(x-5)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$

$\therefore f'(1)=1$ 답 1

0244 $f'(x)$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{-(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+2-(-x^2+3x+2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{-(\Delta x)^2-2x\Delta x+3\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-\Delta x-2x+3)=-2x+3$

$\therefore f'(0)=3$ 답 3

0245 답 $y'=10x^9$ **0246** 답 $y'=0$

0247 $y'=(-4x+3)'$

$=(-4x)'+(3)'=-4$ 답 $y'=-4$

0248 $y'=(x^2-3x+8)'$

$=(x^2)'-(3x)'+(8)'$

$=2x-3$ 답 $y'=2x-3$

0249 $y'=(2x^3-3x^2+x+1)'$

$=(2x^3)'-(3x^2)'+(x)'+(1)'$

$=6x^2-6x+1$ 답 $y'=6x^2-6x+1$

0250 함수 $f(x)+g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)+g'(0)=2+(-3)=-1$ 답 -1

0251 함수 $f(x)-2g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)-2g'(0)=2-2\cdot(-3)=8$ 답 8

0252 $y'=(x+1)'(2x+3)+(x+1)(2x+3)'$

$=2x+3+2(x+1)$

$=4x+5$ 답 $y'=4x+5$

0253 $y'=(3x)'(3x-1)+3x(3x-1)'$

$=3(3x-1)+3x\cdot 3$

$=18x-3$ 답 $y'=18x-3$

0254 $y'=(x)'(x-1)(x-2)+x(x-1)'(x-2)$

$+x(x-1)(x-2)'$

$=(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)$

$=3x^2-6x+2$ 답 $y'=3x^2-6x+2$

0255 $y'=(x+1)'(2x-1)(-x+2)$

$+(x+1)(2x-1)'(-x+2)$

$+(x+1)(2x-1)(-x+2)'$

$=(2x-1)(-x+2)+2(x+1)(-x+2)$

$-(x+1)(2x-1)$

$=-6x^2+6x+3$ 답 $y'=-6x^2+6x+3$

0256 $y'=\{(2x-3)^5\}'$

$=5(2x-3)^4(2x-3)'$

$=10(2x-3)^4$ 답 $y'=10(2x-3)^4$

0257 $y'=\{(x^2-3x+3)^2\}'$

$=2(x^2-3x+3)(x^2-3x+3)'$

$=2(2x-3)(x^2-3x+3)$

답 $y'=2(2x-3)(x^2-3x+3)$

0258 x의 값이 2에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(a)-f(2)}{a-2}=\dfrac{a^3-2a-4}{a-2}$

$=\dfrac{(a-2)(a^2+2a+2)}{a-2}=a^2+2a+2$

따라서 $a^2+2a+2=26$이므로

$a^2+2a-24=0,\quad (a+6)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>2)$ 답 ②

0259 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{3^3-3a+5-(1^3-a+5)}{2}$

$=\dfrac{26-2a}{2}=13-a$

따라서 $13-a=4$이므로 $a=9$ 답 9

0260 x의 값이 -2에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\dfrac{10-(-2)}{4}=3$ ···❶

또 x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=\dfrac{a^2+3a-(-2)}{a+1}$

$=\dfrac{(a+1)(a+2)}{a+1}=a+2$ ···❷

따라서 $a+2=3$이므로 $a=1$ ···❸

답 1

채점 기준	비율
❶ x의 값이 -2에서 2까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
❷ x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0261 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{f(a)}{a}=2a^2+a$$

따라서 $f(a)=2a^3+a^2$이므로

$f(2)=16+4=20$ 답 20

0262 x의 값이 -1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{12-0}{4}=3$$

또 함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(c)&=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{(c+h)^2+(c+h)-(c^2+c)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^2+2ch+h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(h+2c+1)=2c+1\end{aligned}$$

따라서 $2c+1=3$이므로 $c=1$ 답 ③

0263 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^3+6h^2+12h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(h^2+6h+12)=12\end{aligned}$$ 답 12

0264 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}&=\frac{b^2-3b+2-(a^2-3a+2)}{b-a}\\&=\frac{b^2-a^2-3(b-a)}{b-a}\\&=\frac{(b+a)(b-a)-3(b-a)}{b-a}\\&=a+b-3\end{aligned}$$ ···❶

또 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 순간변화율은

$$\begin{aligned}f'(-1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{(-1+h)^2-3(-1+h)+2-6}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^2-5h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(h-5)=-5\end{aligned}$$ ···❷

따라서 $a+b-3=-5$이므로

$a+b=-2$ ···❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x=-1$에서의 순간변화율을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0265 $$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\cdot(-2)\\&=-2f'(1)\\&=-2\cdot2\\&=-4\end{aligned}$$ 답 ①

0266 $$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{5h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot\frac{2}{5}\\&=\frac{2}{5}f'(a)\end{aligned}$$ 답 ①

0267 $$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a+h)}{3h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)-\{f(a+h)-f(a)\}}{3h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{3}\\&=f'(a)-\frac{1}{3}f'(a)=\frac{2}{3}f'(a)\\&=\frac{2}{3}\cdot3=2\end{aligned}$$ 답 2

0268 $$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(4h)}{-4h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)-\{f(4h)-f(0)\}}{-4h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\lim_{h\to0}\frac{f(4h)-f(0)}{4h}\\&=-\frac{1}{4}f'(0)+f'(0)\\&=\frac{3}{4}f'(0)\end{aligned}$$

따라서 $\frac{3}{4}f'(0)=6$이므로

$f'(0)=8$ 답 ⑤

0269 $$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\\&=\frac{1}{2}f'(1)\\&=\frac{1}{2}\cdot2=1\end{aligned}$$ 답 ④

0270 $$\begin{aligned}&\lim_{x\to2}\frac{x^2f(2)-4f(x)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{x^2f(2)-4f(2)-\{4f(x)-4f(2)\}}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot4\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}\cdot f(2)-\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot4\\&=4f(2)-4f'(2)\\&=4\cdot3-4\cdot2=4\end{aligned}$$ 답 4

0271 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(3)}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(3)}\}\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(3)}\}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(3)}}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(3)}}$

$=f'(3)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{f(3)}}$

$=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=1$ 답 1

0272 $x\longrightarrow-5$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-5}\{f(x)-5\}=0$이므로

$f(-5)=5$ ⋯ ❶

$\therefore\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{f(x)-5}{x^2+6x+5}=\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{f(x)-f(-5)}{(x+5)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{f(x)-f(-5)}{x-(-5)}\cdot\dfrac{1}{x+1}$

$=-\dfrac{1}{4}f'(-5)$

따라서 $-\dfrac{1}{4}f'(-5)=\dfrac{1}{2}$이므로

$f'(-5)=-2$ ⋯ ❷

$\therefore f(-5)+f'(-5)=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(-5)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(-5)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(-5)+f'(-5)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0273 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{(x+1)(x-1)}\cdot(x-1)$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x-1)$

$=-2f'(1)$

$=-2\cdot5=-10$ 답 −10

0274 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

$\therefore f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1)+f(h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f'(0)=3$ 답 3

0275 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$

$\therefore f(0)=0$

$\therefore f'(5a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(5a+h)-f(5a)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(5a)+f(h)+5ah-f(5a)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)+5ah}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+5a\right\}$

$=f'(0)+5a$

$=2+5a$

따라서 $2+5a=-3$이므로

$a=-1$ 답 −1

0276 $f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2)+f(h)+2-f(2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)+2}{h}$

즉 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)+2}{h}=3$이므로 자연수 k에 대하여

$f'(k)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(k+h)-f(k)}{h}$

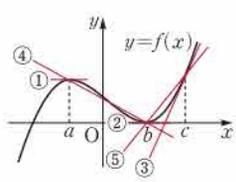
$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(k)+f(h)+2-f(k)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)+2}{h}=3$

$\therefore\sum\limits_{k=1}^{10}f'(k)=\sum\limits_{k=1}^{10}3=30$ 답 ⑤

0277 $f'(k)$는 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기이고, x의 값이 m에서 n까지 변할 때의 $f(x)$의 평균변화율은 두 점 $(m, f(m))$, $(n, f(n))$을 지나는 직선의 기울기이다.

따라서 오른쪽 그림의 직선 중 그 기울기가 가장 큰 것은 ③이다. 답 ③



0278 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(3)=-3$

$\therefore\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}\cdot(-1)$

$=-f'(3)=3$ 답 ⑤

0279 직선 OA의 기울기는 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율과 같으므로

$\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=2$

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축(직선 $x=0$)에 대하여 대칭이므로

$f(-2)=f(2)$

따라서 x의 값이 -2에서 0까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{f(0)-f(2)}{2}$$
$$=-\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=-2$$ 답 ①

0280 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, -4)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+3x-4-(-4)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+3x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}x^2+3\right)=3$$ ··· ❶

이때 $\tan\theta$의 값은 이 접선의 기울기와 같으므로

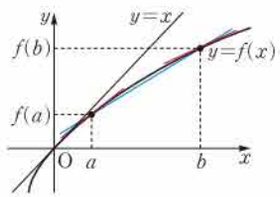
$\tan\theta=3$ ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 접선의 기울기를 구할 수 있다.	70 %
❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0281 ① $x=a$인 점에서의 접선의 기울기가 $x=b$인 점에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$f'(a)>f'(b)$$



② 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기가 직선 $y=x$의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$$

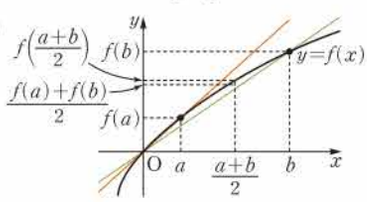
이때 $0<a<b$에서 $b-a>0$이므로

$$f(b)-f(a)<b-a$$

③ $x=a$인 점에서의 접선의 기울기가 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기보다 크므로

$$f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

④



원점과 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기가 원점과 점 $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}>\frac{f(b)-f(0)}{b-0}$$
$$\therefore \frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}\ (\because f(0)=0)$$

⑤ $a\le x\le b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

답 ⑤

라쎈 특강

$a<b$일 때

① 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2},\ f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

② 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2},\ f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

0282 ㄱ. $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h|-h}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{0}{h}=0,$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h|-h}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-2h}{h}=-2$$

이므로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h|h|}{h}=\lim_{h\to 0}|h|=0$$

이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0}k(x)=k(0)=0$이므로 $k(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h^3|}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^3}{h}=\lim_{h\to 0+}h^2=0,$$
$$\lim_{h\to 0-}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h^3|}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^3}{h}=\lim_{h\to 0-}(-h^2)=0$$

이므로 $\lim_{h\to 0}\frac{k(h)-k(0)}{h}=0$

따라서 $k(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ뿐이다. 답 ①

0283 함수 $y=f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이므로

$m=2$

또 $x=-1$, $x=0$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로

$n=3$

$\therefore m+n=5$ 답 5

0284 ① 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 2개이다.

② 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=3$, $x=4$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x의 값은 3개이다.

③ $f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$의 1개뿐이다.

④ $1<x<2$인 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $1<x<2$일 때 $f'(x)<0$이다.

⑤ $\lim_{x\to3+} f(x)=\lim_{x\to3-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to3} f(x)$의 값이 존재한다.

답 ③

0285 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$ $\therefore a+b=1$ ····· ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^2-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(h+2)=2,$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{a(1+h)+b-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{ah}{h}\ (\because \text{㉠})$$
$$=a$$

에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore ab=-2$

답 -2

0286 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$ $\therefore b=1$

또 $f'(0)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{ah+1-1}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{ah}{h}=a,$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^3+h^2+1-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(h^2+h)=0$$

에서 $a=0$

$\therefore a+b=1$

답 ①

0287 $f'(-1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+a)|x+1|}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+a)(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}(x+a)$$
$$=a-1,$$ ····❶
$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{(x+a)|x+1|}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\frac{-(x+a)(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\{-(x+a)\}$$
$$=-a+1$$ ····❷

에서 $a-1=-a+1$, $2a=2$

$\therefore a=1$ ····❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0288 $f'(x)=3x^2+1$이므로 $f'(a)=10$에서

$3a^2+1=10$, $a^2=3$

$\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

답 ②

0289 $f(2)=3$에서 $4+2a+b=3$

$\therefore 2a+b=-1$ ····· ㉠

$f'(x)=2x+a$이므로 $f'(0)=-2$에서

$a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore ab=-6$

답 -6

0290 $f(x)=2x^2-xf'(2)$에서

$f'(x)=4x-f'(2)$

위의 식에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=8-f'(2)$

$2f'(2)=8$ $\therefore f'(2)=4$

따라서 $f'(x)=4x-4$이므로

$f'(4)=4\cdot4-4=12$

답 ⑤

0291 $f(x)=\sum_{k=1}^{10} kx^k=x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10}$이므로

$f'(x)=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+10^2x^9$ ····❶

$\therefore f'(1)=1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}$$
$$=385$$ ····❷

답 385

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

라쎈 특강

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

0292 $f'(x)=(x^2+x+1)'(x^3+x^2-x-1)$
$+(x^2+x+1)(x^3+x^2-x-1)'$
$=(2x+1)(x^3+x^2-x-1)$
$+(x^2+x+1)(3x^2+2x-1)$

$\therefore f'(-1)=-1\cdot0+1\cdot0=0$

답 ③

0293 $f'(x)=(x)'(x+2)(x+4)+x(x+2)'(x+4)$
$+x(x+2)(x+4)'$
$=(x+2)(x+4)+x(x+4)+x(x+2)$
$=3x^2+12x+8$
이차방정식 $f'(k)=0$, 즉 $3k^2+12k+8=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=6^2-3\cdot 8=12>0$
따라서 이차방정식 $f'(k)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 합은
$-\frac{12}{3}=-4$ 답 -4

0294 $f'(x)=4(x^2-x)^3(x^2-x)'$
$=4(2x-1)(x^2-x)^3$
$\therefore f'(-1)+f'(2)=4\cdot(-3)\cdot 2^3+4\cdot 3\cdot 2^3=0$
답 ③

0295 $\left\{\left(\frac{1}{3}x+a\right)^3\right\}'=3\left(\frac{1}{3}x+a\right)^2\left(\frac{1}{3}x+a\right)'=\left(\frac{1}{3}x+a\right)^2$
이므로
$f'(x)=(2x-6)'\left(\frac{1}{3}x+a\right)^3+(2x-6)\left\{\left(\frac{1}{3}x+a\right)^3\right\}'$
$=2\left(\frac{1}{3}x+a\right)^3+(2x-6)\left(\frac{1}{3}x+a\right)^2$
$f'(3)=16$에서
$2(1+a)^3=16,\quad (1+a)^3=8$
$1+a=2\quad \therefore a=1$
따라서 $f'(x)=2\left(\frac{1}{3}x+1\right)^3+(2x-6)\left(\frac{1}{3}x+1\right)^2$이므로
$f'(0)=2\cdot 1^3+(-6)\cdot 1^2=-4$
$\therefore a+f'(0)=-3$ 답 -3

0296 임의의 실수 x에 대하여
$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$
이므로
$f(x)=\frac{(x+1)(x^6-1)}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^3+1)(x^3-1)}{x^2-x+1}$
$=\frac{(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{x^2-x+1}$
$=(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$
$\therefore f'(x)=\{(x+1)^2\}'(x-1)(x^2+x+1)$
$+(x+1)^2(x-1)'(x^2+x+1)$
$+(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)'$
$=2(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$
$+(x+1)^2(x^2+x+1)$
$+(x+1)^2(x-1)(2x+1)$
$\therefore f'(1)=2\cdot 2\cdot 0\cdot 3+2^2\cdot 3+2^2\cdot 0\cdot 3=12$
답 12

0297 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2)-f(2-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}=f'(2)$
이때 $f'(x)=3x^2-4x$이므로 구하는 값은
$f'(2)=12-8=4$ 답 4

0298 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$
이때 $f'(x)=4x^3-3x^2+2x-1$이므로 구하는 값은
$f'(1)=4-3+2-1=2$ 답 ③

0299 $f(-1)=0$이므로
$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\cdot\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}f'(-1)$
이때
$f'(x)=(x^2-1)'(x^3-2x+2)+(x^2-1)(x^3-2x+2)'$
$=2x(x^3-2x+2)+(x^2-1)(3x^2-2)$
이므로 $f'(-1)=-2\cdot 3+0\cdot 1=-6$
따라서 구하는 값은
$\frac{1}{2}f'(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-6)=-3$ 답 ②

0300 $\lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(3)\}^2}{x-3}$
$=\lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)+f(3)\}\{f(x)-f(3)\}}{x-3}$
$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\{f(x)+f(3)\}$
$=f'(3)\cdot 2f(3)$ ···❶
이때 $f'(x)=3x^2-4x$이므로 구하는 값은 ···❷
$f'(3)\cdot 2f(3)=15\cdot 2\cdot 9=270$ ···❸
답 270

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(3)\}^2}{x-3}$을 $f'(3)$, $f(3)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(3)\}^2}{x-3}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0301 $f(x)=x^8+2x$로 놓으면 $f(-1)=-1$이므로
$\lim_{x\to -1}\frac{x^8+2x+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$
이때 $f'(x)=8x^7+2$이므로 구하는 값은
$f'(-1)=-8+2=-6$ 답 -6

0302 $p=1$, $q=1$, $r=8$이므로
$p+q+r=10$ 답 ①

0303 $f(x)=x^n-3x$로 놓으면 $f(1)=-2$이므로
$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$
따라서 $f'(1)=10$이고 $f'(x)=nx^{n-1}-3$이므로
$n-3=10\quad \therefore n=13$ 답 ⑤

0304 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}f'(1)$

즉 $\dfrac{1}{2}f'(1)=\dfrac{1}{2}$이므로 $f'(1)=1$

한편 $f(-1)=3$에서

$-1+a+b=3$ $\therefore a+b=4$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax$이므로 $f'(1)=1$에서

$3+2a=1$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=5$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+5$이므로

$f(-2)=-8-4+5=-7$ 답 ①

0305 $x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$ …❶

$\therefore\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=2$ …❷

한편 $f(-1)=0$에서

$-1-a+b=0$ $\therefore a-b=-1$ …… ㉡

$f'(x)=3x^2+a$이므로 $f'(-1)=2$에서

$3+a=2$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=0$ …❸

$\therefore a+b=-1$ …❹

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

라쎈 특강

함수의 극한에서 미정계수의 결정

① $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

② $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이고 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이면

$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$

0306 조건 (가)에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차함수이므로 $f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x\longrightarrow2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-11\}=0$이므로 $f(2)=11$

$\therefore\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-11}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=7$

한편 $f(2)=11$에서

$8+2a+b=11$ $\therefore 2a+b=3$ …… ㉠

$f'(x)=4x+a$이므로 $f'(2)=7$에서

$8+a=7$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=5$

따라서 $f(x)=2x^2-x+5$이므로

$f(1)=2-1+5=6$ 답 ③

0307 $f(1)=2$에서

$1+a+2=2$ $\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x^2-x+2$에서 $f'(x)=2x-1$이므로

$m=f'(1)=2-1=1$

$\therefore a+m=0$ 답 ③

0308 $f'(x)=2x-5$이므로 $f'(a)=3$에서

$2a-5=3$ $\therefore a=4$

$f(a)=b$이므로 $b=f(4)=16-20=-4$

$\therefore ab=-16$ 답 -16

0309 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(-1)=6$에서 $a-b+c=6$ …… ㉠

$f(1)=0$에서 $a+b+c=0$ …… ㉡

$f'(1)=1$에서 $2a+b=1$ …… ㉢ …❶

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$, $c=1$ …❷

$\therefore a^2+b^2+c^2=4+9+1=14$ …❸

답 14

채점 기준	비율
❶ a, b, c에 대한 방정식을 세울 수 있다.	50 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0310 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)+2=0$

$\therefore(2a-b)x+(b-2c+2)=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 ← x에 대한 항등식

$2a-b=0$, $b-2c+2=0$ …… ㉠

한편 $f(0)=2$이므로 $c=2$

$c=2$를 ㉠에 대입한 후 두 식을 연립하면 $a=1$, $b=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x+2$이므로

$f(2)=4+4+2=10$ 답 10

라쎈 특강

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면

$a=b=c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면

$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이면

$a=b=c=0$

0311 $f'(x)=2x+2$이므로 $f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$x(2x+2)+a(x^2+2x)+2x=0$

$\therefore (2+a)x^2+(2a+4)x=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2+a=0,\ 2a+4=0 \quad \therefore a=-2$ ②

0312 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$x(2ax+b)=ax^2+bx+c+x^2+3$

$\therefore 2ax^2+bx=(a+1)x^2+bx+c+3$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a=a+1,\ 0=c+3$

$\therefore a=1,\ c=-3$

한편 $f'(x)=2x+b$이므로 $f'(1)=4$에서

$2+b=4 \quad \therefore b=2$

즉 $f(x)=x^2+2x-3$이므로 $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 합은

$-3+1=-2$ −2

0313 $f(x)=x^8+ax^2+b$로 놓으면 $f'(x)=8x^7+2ax$

$f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0,\ f'(1)=0$

$f(1)=0$에서 $1+a+b=0$ …… ㉠

$f'(1)=0$에서 $8+2a=0 \quad \therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore b-a=7$ ④

참고 다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ …… ㉠

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(a)=0,\ f'(a)=0$

0314 $f(x)=x^4-4x+k$로 놓으면 $f'(x)=4x^3-4$

$f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(a)=0,\ f'(a)=0$

$f(a)=0$에서 $a^4-4a+k=0$ …… ㉠

$f'(a)=0$에서 $4a^3-4=0$

$a^3=1 \quad \therefore a=1$ …➊

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $k=3$ …➋

$\therefore ak=3$ …➌

3

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ ak의 값을 구할 수 있다.	20 %

0315 다항식 $x^{10}-1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{10}-1=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-a+b$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $a=-10$

$a=-10$을 ㉡에 대입하면 $b=-10$

따라서 $R(x)=-10x-10$이므로

$R\left(-\frac{1}{2}\right)=-10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-10=-5$ ②

0316 전략 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$임을 이용한다.

풀이 x의 값이 0에서 k까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=\frac{k^3+k^2-2k}{k}=k^2+k-2$

따라서 $k^2+k-2=10$이므로

$k^2+k-12=0, \quad (k+4)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$) ①

0317 전략 $h\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이면 (분자) $\longrightarrow0$임을 이용하여 $f(1)$의 값을 구하고, 주어진 등식의 좌변을 $f'(1)$을 포함한 식으로 변형하여 $f'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $h\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{h\to0}\{f(1+2h)-4\}=0$이므로 $f(1)=4$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2$$
$$=2f'(1)$$

따라서 $2f'(1)=6$이므로 $f'(1)=3$

$\therefore f(1)+f'(1)=7$ ③

0318 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-x^3f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)-\{x^3f(1)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}\cdot f(1) \quad (x^3-1=(x-1)(x^2+x+1))$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)-\lim_{x\to1}(x^2+x+1)\cdot f(1)$$
$$=3f'(1)-3f(1)$$
$$=3\cdot(-1)-3\cdot(-2)=3$$ 3

0319 전략 $f'(5)=\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$이므로 $f(5+h)$를 주어진 항등식을 이용하여 변형한다.

풀이 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0 \quad \therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned}\therefore f'(5)&=\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(5)+f(h)-10h-f(5)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-10h}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}-10\right\}\\&=f'(0)-10\\&=5-10=-5\end{aligned}$$

답 ①

0320 전략 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

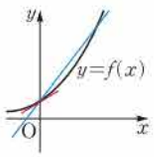
풀이 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 두 점 $(0, f(0))$, $(4, f(4))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

따라서 구하는 직선의 기울기는 -1이다. 답 -1

0321 전략 평균변화율과 미분계수의 기하적 의미를 이용한다.

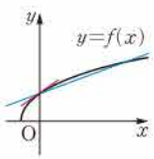
풀이 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$은 두 점 $(0, f(0))$, $(x, f(x))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(0)$은 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 기울기이다.

ㄱ. $x>0$일 때, $f'(0)$은 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$보다 항상 작으므로 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

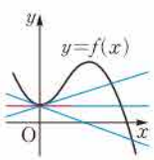


ㄴ. $x>0$일 때, $f'(0)$은 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$보다 항상 크므로

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}\le f'(0)$$



ㄷ. $x>0$일 때, $f'(0)$은 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$보다 작을 수도 있으므로 주어진 부등식을 항상 만족시키지 않는다.



이상에서 $x>0$일 때 주어진 부등식을 항상 만족시키는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0322 전략 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이지만 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$이 존재하지 않는 함수 $f(x)$를 찾는다.

풀이 ① $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=-7$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-7-(-7)}{h}=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

② $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{|h|^2}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{h}\\&=\lim_{h\to0}h=0\end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

④ $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{2h}{h}=2,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=-1$$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=1$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{(h-1)^2-1}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{h^2-2h}{h}\\&=\lim_{h\to0+}(h-2)=-2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{-2h+1-1}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{-2h}{h}=-2\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=-2$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

답 ④

0323 전략 미분법의 공식을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $x=2$를 대입한다.

풀이 $f'(x)=4x^3+3$이므로

$f'(2)=4\cdot8+3=35$ 답 ①

0324 전략 첫째항이 a, 공비가 $r(r\ne1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sum_{n=1}^{20}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{20}}{20}$이므로

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{19}$

$\therefore f'(\sqrt{2})=\underbrace{1+\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+\cdots+(\sqrt{2})^{19}}$ ← 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제20항까지의 합

$$\begin{aligned}&=\frac{(\sqrt{2})^{20}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{2^{10}-1}{\sqrt{2}-1}\\&=1023(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

$\therefore a=1023$ 답 1023

0325 전략 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속이고 $f'(-1)$, $f'(1)$이 존재하도록 하는 a, b, c, d의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=-1$, $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$, $2+a=-1+b-c$

$\therefore a-b+c=-3$ …… ㉠

또 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$, $1+b+c=-2+d$

$\therefore b+c-d=-3$ …… ㉡

한편 $f'(x)=\begin{cases} -2 & (x<-1) \\ 3x^2+2bx+c & (-1<x<1) \\ -2 & (x>1) \end{cases}$이고 $f'(-1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to -1+} f'(x)=\lim_{x\to -1-} f'(x)$, $3-2b+c=-2$

$\therefore 2b-c=5$ …… ㉢

또 $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to 1+} f'(x)=\lim_{x\to 1-} f'(x)$, $-2=3+2b+c$

$\therefore 2b+c=-5$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $b=0$, $c=-5$

이것을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면 $a=2$, $d=-2$

$\therefore a+b+c+d=-5$ 답 -5

0326 전략 주어진 두 극한값을 이용하여 $f(0)$, $g(0)$, $f'(0)$, $g'(0)$의 값을 구한다.

풀이 $h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\therefore h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$ …… ㉠

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서 $x\longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=0$이므로

$f(0)+g(0)=0$ …… ㉡

$k(x)=f(x)+g(x)$로 놓으면 $k(0)=0$이므로

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x}=\lim_{x\to 0} \frac{k(x)-k(0)}{x-0}=k'(0)=3$

이때 $k'(x)=f'(x)+g'(x)$이므로

$k'(0)=f'(0)+g'(0)$

$\therefore f'(0)+g'(0)=3$ …… ㉢

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서 $x\longrightarrow 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\{f(x)+3\}=0$이므로 $f(0)=-3$

$f(0)=-3$을 ㉡에 대입하면 $g(0)=3$

이때

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)}=\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g(0)}=2$

이므로 $\frac{f'(0)}{3}=2$ $\therefore f'(0)=6$

$f'(0)=6$을 ㉢에 대입하면 $g'(0)=-3$

따라서 ㉠에서

$h'(0)=6\cdot 3+(-3)\cdot(-3)=27$ 답 ①

0327 전략 $\frac{1}{x}=h$로 놓고 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\frac{1}{x}=h$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $h\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty} x\left\{f\left(3+\frac{1}{x}\right)-f(3)\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(3+h)-f(3)\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=f'(3)$$

이때 $f'(x)=2x-4$이므로 구하는 값은

$f'(3)=6-4=2$ 답 ⑤

0328 전략 주어진 식의 일부를 $f(x)$로 놓고 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to 1} \frac{x^n+kx-3}{x-1}=13$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}(x^n+kx-3)=0$이므로

$1+k-3=0$ $\therefore k=2$

$f(x)=x^n+2x$로 놓으면 $f(1)=3$이므로

$\lim_{x\to 1} \frac{x^n+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

따라서 $f'(1)=13$이고 $f'(x)=nx^{n-1}+2$이므로

$n+2=13$ $\therefore n=11$

$\therefore n-k=9$ 답 9

0329 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기는 $f'(k)$임을 이용한다.

풀이 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{52-(-2)}{3}=18$

한편 $f'(x)=3x^2-3$이므로

$f'(k)=3k^2-3$

따라서 $3k^2-3=18$이므로

$3k^2=21$, $k^2=7$

$\therefore k=\sqrt{7}$ ($\because k>0$) 답 ⑤

0330 전략 $f(x)$를 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후 그래프 위의 점의 좌표와 그 점에서의 접선의 기울기를 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

$f(1)=2$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a+b=2$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

$f'(1)=-3$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $b=5$

따라서 $R(x)=-3x+5$이므로

$R(-1)=8$ 답 ①

0331 전략 평균변화율과 미분계수를 각각 구한 후 방정식을 세운다.

풀이 x의 값이 -1에서 k까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(k)-f(-1)}{k-(-1)}=\frac{k^3-3-(-4)}{k+1}$$

$$=\frac{k^3+1}{k+1} \quad (k^3+1=(k+1)(k^2-k+1))$$

$$=k^2-k+1 \quad \cdots ❶$$

한편 $f'(x)=3x^2$이므로

$$f'(\sqrt{7})=3\cdot(\sqrt{7})^2=21 \quad \cdots ❷$$

따라서 $k^2-k+1=21$이므로

$$k^2-k-20=0, \quad (k+4)(k-5)=0$$

$$\therefore k=5\ (\because k>-1) \quad \cdots ❸$$

답 5

채점 기준	비율
❶ x의 값이 -1에서 k까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x=\sqrt{7}$에서의 미분계수를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0332 전략 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 극한값을 구하는 식을 변형한다.

풀이 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$이므로

$$f'(a)=3 \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a+h^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)-\{f(a+h^2)-f(a)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\cdot4-\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h$$

$$=4f'(a)-f'(a)\cdot0$$

$$=4f'(a)$$

$$=4\cdot3=12 \quad \cdots ❷$$

답 12

채점 기준	비율
❶ $f'(a)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+4h)-f(a+h^2)}{h}$의 값을 구할 수 있다.	70 %

0333 전략 먼저 미분계수의 정의를 이용하여 $f'(1)$, $f'(-2)$의 값을 구한다.

풀이 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$이므로

$$f'(1)=-1 \quad \cdots ❶$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h}\cdot(-1)$$

$$=-f'(-2)$$

이므로 $\quad -f'(-2)=-26$

$$\therefore f'(-2)=26 \quad \cdots ❷$$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=-1$에서 $\quad 3+2a+b=-1$

$$\therefore 2a+b=-4 \quad \cdots \text{㉠}$$

$f'(-2)=26$에서 $\quad 12-4a+b=26$

$$\therefore 4a-b=-14 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-3,\ b=2 \quad \cdots ❸$$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$이므로

$$f(1)=1 \quad \cdots ❹$$

답 1

채점 기준	비율
❶ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(-2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0334 전략 먼저 $f(x)$의 차수를 구한다.

풀이 $f(x)$가 이차 이상의 다항함수이면 $f(x)f'(x)$의 차수가 삼차 이상이므로 $f(x)$는 일차함수이다. ❶

$f(x)=ax+b\ (a\neq0,\ a,\ b$는 상수$)$로 놓으면

$$f'(x)=a$$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$$(ax+b)a=4x+6$$

$$\therefore a^2x+ab=4x+6$$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$$a^2=4,\ ab=6$$

$$\therefore a=2,\ b=3 \text{ 또는 } a=-2,\ b=-3 \quad \cdots ❷$$

(i) $a=2$, $b=3$일 때,

$f(x)=2x+3$이므로

$$f(1)f(2)=5\cdot7=35$$

(ii) $a=-2$, $b=-3$일 때,

$f(x)=-2x-3$이므로

$$f(1)f(2)=-5\cdot(-7)=35$$

(i), (ii)에서

$$f(1)f(2)=35 \quad \cdots ❸$$

답 35

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 일차함수임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(1)f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

04 도함수의 활용 (1)

0335 $f(x)=2x^2-1$로 놓으면
$f'(x)=4x$
따라서 점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=-4$ 답 -4

0336 $f(x)=x^3+x-2$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+1$
따라서 점 $(2, 8)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=12+1=13$ 답 13

0337 $f(x)=-3x^4+4x^2+3x+4$로 놓으면
$f'(x)=-12x^3+8x+3$
따라서 점 $(0, 4)$에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=3$ 답 3

0338 $f(x)=x^2-4x$로 놓으면
$f'(x)=2x-4$
점 $(1, -3)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=2-4=-2$
이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-(-3)=-2\cdot(x-1)$
$\therefore y=-2x-1$ 답 $y=-2x-1$

0339 $f(x)=-x^2+3x+3$으로 놓으면
$f'(x)=-2x+3$
점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=-4+3=-1$
이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-5=-1\cdot(x-2)$
$\therefore y=-x+7$ 답 $y=-x+7$

0340 $f(x)=2x^3+x+5$로 놓으면
$f'(x)=6x^2+1$
점 $(0, 5)$에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=1$
이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-5=x$ $\therefore y=x+5$ 답 $y=x+5$

0341 (1) $f(x)=-x^2+2$로 놓으면
$f'(x)=-2x$
점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=-2$
직선 l의 기울기를 a라 하면
$-2a=-1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

(2) 직선 l은 점 $(1, 1)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로
$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

라쎈 특강

수직인 두 직선의 기울기

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 수직이면
$mm'=-1$

0342 $f(x)=x^3+2x^2-1$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+4x$
점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=3-4=-1$
따라서 점 $(-1, 0)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 1이므로 구하는 직선의 방정식은
$y=x-(-1)$ $\therefore y=x+1$ 답 $y=x+1$

0343 (1) $g(x)=4x^2-7x$로 놓으면
$f(2)=g(2)=16-14=2$
(2) $g'(x)=8x-7$이므로
$f'(2)=g'(2)=16-7=9$

답 (1) 2 (2) 9

0344 $f(x)=3x^2-4x+6$으로 놓으면
$f'(x)=6x-4$
접점의 좌표를 $(t, 3t^2-4t+6)$이라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=6t-4=2$ $\therefore t=1$
따라서 구하는 접점의 좌표는 $(1, 5)$ 답 $(1, 5)$

0345 $f(x)=x^3+3x^2+5x-4$로 놓으면
$f'(x)=3x^2+6x+5$
접점의 좌표를 (t, t^3+3t^2+5t-4)라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=3t^2+6t+5=2$
$t^2+2t+1=0$, $(t+1)^2=0$
$\therefore t=-1$
따라서 구하는 접점의 좌표는 $(-1, -7)$ 답 $(-1, -7)$

0346 $f(x)=-x^4+\frac{4}{3}x^3+2x$로 놓으면
$f'(x)=-4x^3+4x^2+2$
접점의 좌표를 $\left(t, -t^4+\frac{4}{3}t^3+2t\right)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로
$f'(t)=-4t^3+4t^2+2=2$
$t^3-t^2=0$, $t^2(t-1)=0$
$\therefore t=0$ 또는 $t=1$

따라서 구하는 접점의 좌표는

$(0, 0), \left(1, \frac{7}{3}\right)$ 답 $(0, 0), \left(1, \frac{7}{3}\right)$

0347 (1) $f(x)=x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=2x$

접선의 기울기가 -4이므로

$f'(t)=2t=-4$ $\therefore t=-2$

(2) $f(-2)=5$에서 접점의 좌표가 $(-2, 5)$이므로 직선 l의 방정식은

$y-5=-4\{x-(-2)\}$ $\therefore y=-4x-3$

답 (1) -2 (2) $y=-4x-3$

0348 $f(x)=-x^2+3x+5$로 놓으면

$f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+5)$라 하면 접선의 기울기가 5이므로

$f'(t)=-2t+3=5$ $\therefore t=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=5\{x-(-1)\}$

$\therefore y=5x+6$ 답 $y=5x+6$

0349 $f(x)=x^3-2x+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t+4)라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=3t^2-2=1$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 5)$, $(1, 3)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=x-(-1)$, $y-3=x-1$

$\therefore y=x+2$, $y=x+6$ 답 $y=x+2$, $y=x+6$

0350 $f(x)=2x^2+8x+3$으로 놓으면

$f'(x)=4x+8$

접점의 좌표를 $(t, 2t^2+8t+3)$이라 하면 직선 $y=-4x+1$과 평행한 직선의 기울기는 -4이므로

$f'(t)=4t+8=-4$ $\therefore t=-3$

따라서 접점의 좌표는 $(-3, -3)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-3)=-4\{x-(-3)\}$

$\therefore y=-4x-15$ 답 $y=-4x-15$

0351 $f(x)=-x^3+5x-2$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+5$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+5t-2)$라 하면 직선 $y=\frac{1}{7}x-1$과 수직인 직선의 기울기는 -7이므로

$f'(t)=-3t^2+5=-7$, $t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2, -4)$, $(2, 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-4)=-7\{x-(-2)\}$, $y=-7(x-2)$

$\therefore y=-7x-18$, $y=-7x+14$

답 $y=-7x-18$, $y=-7x+14$

0352 (1) $f(x)=x^2-4x$로 놓으면

$f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 (t, t^2-4t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-4t)=(2t-4)(x-t)$

$\therefore y=(2t-4)x-t^2$ …… ㉠

(2) 직선 $y=(2t-4)x-t^2$이 점 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$을 지나므로

$t^2+t-2=0$, $(t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

(3) $t=-2$를 ㉠에 대입하면 $y=-8x-4$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $y=-2x-1$

답 풀이 참조

0353 $f(x)=-x^2+3x-5$로 놓으면

$f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t-5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+3t-5)=(-2t+3)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+3)x+t^2-5$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=t^2-2t-2$, $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

이것을 ㉠에 각각 대입하면

$y=5x-4$, $y=-3x+4$ 답 $y=5x-4$, $y=-3x+4$

0354 $f(x)=x^3+16$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3+16)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+16)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3+16$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-2t^3+16$, $t^3=8$ $\therefore t=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $y=12x$ 답 $y=12x$

0355 답 1

연속, 미분가능, $f(2)$, 0, 0, 1

0356 함수 $f(x)=4x-x^2$은 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(3)=3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4-2x$이므로 $f'(c)=4-2c=0$

$\therefore c=2$ 답 2

0357 함수 $f(x)=x^3-x$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(1)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-1$이므로 $f'(c)=3c^2-1=0$

$c^2=\frac{1}{3}$ $\therefore c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<c<1$) 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0358 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$는 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$에서 미분가능하며

$f(-3)=f(3)=11$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=x^2+2x-3$이므로 $f'(c)=c^2+2c-3=0$

$(c+3)(c-1)=0$ $\therefore c=1$ ($\because -3<c<3$) 답 1

0359 함수 $f(x)=-x^4+2x^2+4$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하며

$f(-2)=f(2)=-4$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-4x^3+4x$이므로 $f'(c)=-4c^3+4c=0$

$c^3-c=0$, $c(c+1)(c-1)=0$

$\therefore c=-1$ 또는 $c=0$ 또는 $c=1$ 답 $-1, 0, 1$

0360 답 $-\frac{1}{2}$

연속, 미분가능, $f'(c)$, $2x$, $2c$, $-\frac{1}{2}$

0361 함수 $f(x)=2x^2-x$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x-1$이므로

$\frac{15-1}{3-1}=4c-1$, $4c-1=7$

$\therefore c=2$ 답 2

0362 함수 $f(x)=x^3+2x$는 닫힌구간 $[-3, 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 0)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-3, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$\frac{0-(-33)}{0-(-3)}=3c^2+2$, $3c^2+2=11$

$c^2=3$ $\therefore c=-\sqrt{3}$ ($\because -3<c<0$) 답 $-\sqrt{3}$

0363 함수 $f(x)=2x^3-5x$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=6x^2-5$이므로

$\frac{6-3}{2-(-1)}=6c^2-5$, $6c^2-5=1$

$c^2=1$ $\therefore c=1$ ($\because -1<c<2$) 답 1

0364 함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-1$은 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-3, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-x^2+2x$이므로

$\frac{-1-17}{3-(-3)}=-c^2+2c$, $c^2-2c-3=0$

$(c+1)(c-3)=0$ $\therefore c=-1$ ($\because -3<c<3$) 답 -1

0365 $f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+a$

점 $(1, 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=2$

$1+a+b=2$ $\therefore a+b=1$ …… ㉠

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(1)=-3$

$3+a=-3$ $\therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $b=7$

$\therefore ab=-42$ 답 ①

0366 $f'(3)=2$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\cdot 2$

$=2f'(3)=2\cdot 2=4$ 답 4

0367 $f(x)=x^3-3x^2+x-5$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+1=3(x-1)^2-2$

이므로 $f'(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 접선의 기울기 m의 최솟값은 -2이다. 답 -2

0368 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

두 점 $(-1, 3)$, $(3, -17)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=3$, $f(3)=-17$

$-1+a-b+c=3$, $27+9a+3b+c=-17$

$\therefore a-b+c=4$, $9a+3b+c=-44$ …… ㉠

또 두 점 $(-1, 3)$, $(3, -17)$에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(-1)=f'(3)$에서

$3-2a+b=27+6a+b$, $8a=-24$

$\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$b-c=-7$, $3b+c=-17$

앞의 두 식을 연립하여 풀면 $b=-6$, $c=1$

$\therefore a+b+c=-8$ 답 ③

0369 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+1$로 놓으면

$f'(x)=x-4$

점 $(2, -5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-5)=-2(x-2)$ $\therefore y=-2x-1$

$-2x-1=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$

따라서 접선의 x절편은 $-\frac{1}{2}$이다. 답 $-\frac{1}{2}$

0370 $f(x)=(x+3)(x-1)^2$으로 놓으면

$f'(x)=(x-1)^2+(x+3)\cdot 2(x-1)$

$=3x^2+2x-5$

$f(-2)=9$에서 접점의 좌표는 $(-2, 9)$이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-9=3\{x-(-2)\}$

$\therefore y=3x+15$

이 직선이 점 $(-4, k)$를 지나므로

$k=-12+15=3$ 답 ③

0371 $f(x)=x^3+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$

점 $(-1, 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=1$, $-1-a+b=1$

$\therefore a-b=-2$ …… ㉠

또 점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(-1)=3$, $3+a=3$ $\therefore a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a^2+b^2=0^2+2^2=4$ 답 ②

0372 $f(x)=-x^3+2x^2-x+1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+4x-1$

점 $A(0, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-x$ $\therefore y=-x+1$ ···➊

주어진 곡선과 직선 $y=-x+1$이 만나는 점의 x좌표는

$-x^3+2x^2-x+1=-x+1$에서

$x^3-2x^2=0$, $x^2(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ ($x=2$를 $y=-x+1$에 대입하면 $y=-2+1=-1$)

따라서 점 B의 좌표는 $(2, -1)$이므로 ···➋

$\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$ ···➌

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
➊ 점 A에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
➋ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➌ 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.	20 %

라쎈 특강

두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

0373 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=-1$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(1)=2$

이때 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$, 즉 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 -1이다.

따라서 접선의 방정식은

$y-2=-1\cdot(x-1)$ $\therefore y=-x+3$

즉 $a=-1$, $b=3$이므로 $a-b=-4$ 답 ①

0374 $f(x)=x^3+x^2-2x-3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2x-2$

점 $(1, -3)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(1, -3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y-(-3)=-\frac{1}{3}(x-1)$ $\therefore x+3y+8=0$

즉 $a=1$, $b=8$이므로 $\frac{b}{a}=8$ 답 8

0375 $f(x)=x^2+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=2x+a$

점 $(2, 3)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=3$, $4+2a+b=3$

$\therefore 2a+b=-1$ …… ㉠

또 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4+a$이므로

$(4+a)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$4+a=2$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore ab=-6$ 답 ②

0376 $f(x)=x^3$, $g(x)=ax^2+bx$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=2ax+b$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 점 $(-1, -1)$을 지나므로 $f(-1)=g(-1)$에서

$a-b=-1$ …… ㉠

또 점 $(-1, -1)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$f'(-1)g'(-1)=-1$에서

$3(-2a+b)=-1$ $\therefore 2a-b=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{7}{3}$

$\therefore a+b=\frac{11}{3}$ ⑤

0377 $g(x)=-x^2$으로 놓으면

$g'(x)=-2x$

점 $P(t, -t^2)$에서의 접선의 기울기가 $g'(t)=-2t$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2t}$이다. ···❶

따라서 점 $P(t, -t^2)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2t}$인 직선의 방정식은

$y-(-t^2)=\frac{1}{2t}(x-t)$

$\therefore y=\frac{1}{2t}x-t^2-\frac{1}{2}$ ···❷

$x=0$일 때 $y=-t^2-\frac{1}{2}$이므로

$f(t)=-t^2-\frac{1}{2}$ ···❸

$\therefore \lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{t\to 0}\left(-t^2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ ···❹

$-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(t)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $\lim_{t\to 0} f(t)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0378 $f(x)=x^2-x+2$로 놓으면

$f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 (t, t^2-t+2)라 하면 직선 $x+y-1=0$, 즉 $y=-x+1$에 평행한 직선의 기울기는 -1이므로

$f'(t)=2t-1=-1$ $\therefore t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0, 2)$이므로 직선의 방정식은

$y-2=-x$ $\therefore x+y-2=0$

$\therefore k=-2$ -2

0379 $f(x)=x^2+4x+2$로 놓으면

$f'(x)=2x+4$

접점의 좌표를 (t, t^2+4t+2)라 하면 직선 $y=3x-1$을 평행이동한 직선의 기울기는 3이므로

(직선 $y=3x-1$을 평행이동에 의하여 직선은 기울기가 같은 직선으로 옮겨진다.)

$f'(t)=2t+4=3$ $\therefore t=-\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$

$\therefore a-2b=-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{4}=-1$ ②

0380 두 점 A(0, 1), B(1, 3)을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-1}{1-0}=2$ ···❶

$f(x)=-x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+4)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=-2t=2$ $\therefore t=-1$ ···❷

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=2\{x-(-1)\}$ $\therefore y=2x+5$ ···❸

즉 구하는 y절편은 5이다. ···❹

5

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기를 구할 수 있다.	20 %
❷ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❹ 접선의 y절편을 구할 수 있다.	20 %

0381 $f(x)=-2x^2+9x-5$로 놓으면

$f'(x)=-4x+9$

접점의 좌표를 $(t, -2t^2+9t-5)$라 하면 접선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이므로

$f'(t)=-4t+9=1$ $\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 5)$이므로 접선의 방정식은

$y-5=x-2$ $\therefore y=x+3$

이 직선이 점 $(a, -7)$을 지나므로

$-7=a+3$ $\therefore a=-10$ ③

라쎈 특강

직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta(0^\circ\le\theta<90^\circ)$라 하면

(직선의 기울기)$=\tan\theta$

0382 $f(x)=x^3-5x-3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-5$

접점의 좌표를 (t, t^3-5t-3) $(t>0)$이라 하면 직선 $y=-x+5$와 수직인 직선의 기울기는 1이므로

$f'(t)=3t^2-5=1$

$t^2=2$ $\therefore t=\sqrt{2}$ $(\because t>0)$

따라서 접점의 좌표는 $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}-3)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-3\sqrt{2}-3)=x-\sqrt{2}$ $\therefore y=x-4\sqrt{2}-3$

즉 $g(x)=x-4\sqrt{2}-3$이므로

$g(3)=-4\sqrt{2}$ $-4\sqrt{2}$

0383 $f(x)=x^3+3x^2+ax$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x+a$

접점의 좌표를 (t, t^3+3t^2+at)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+6t+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+3t^2+at)=(3t^2+6t+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+6t+a)x-2t^3-3t^2$

이 직선이 $y=7x-5$와 일치해야 하므로

$3t^2+6t+a=7$ ····· ㉠

$-2t^3-3t^2=-5$ ····· ㉡

㉡에서 $2t^3+3t^2-5=0$, $(t-1)(2t^2+5t+5)=0$

$\therefore t=1$ ($\because$ $2t^2+5t+5>0$)

└ $2t^2+5t+5=2\left(t+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$3+6+a=7$ $\therefore a=-2$ 답 ④

0384 $f(x)=-x^2+3x+a$로 놓으면

$f'(x)=-2x+3$

점 $(t, t+1)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=-2t+3=1$ $\therefore t=1$

따라서 접점의 좌표가 $(1, 2)$이고, 이 접점은 곡선 $y=-x^2+3x+a$ 위의 점이므로

$2=-1+3+a$ $\therefore a=0$

$\therefore a+t=1$ 답 ①

0385 $f(x)=x^3+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3+k)라 하면 접선의 기울기가 6이므로

$f'(t)=3t^2=6$, $t^2=2$

$\therefore t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$

이때 주어진 곡선과 직선이 제1사분면에서 접하므로 접점의 좌표는

└ 접점이 제1사분면 위에 있으므로 $t>0$

$(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}+k)$ ··· ❶

점 $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}+k)$는 직선 $y=6x$ 위의 점이므로

$2\sqrt{2}+k=6\sqrt{2}$ $\therefore k=4\sqrt{2}$ ··· ❷

답 $4\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 접점의 좌표를 구할 수 있다.	70 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0386 $f(x)=x^3+x+a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+1$

접점의 좌표를 (t, t^3+t+a)라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=3t^2+1=4$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, a-2)$, $(1, a+2)$이고, 이 두 접점은 모두 직선 $y=4x+b$ 위의 점이므로

$a-2=-4+b$, $a+2=4+b$

$a-b=-2$ 또는 $a-b=2$

$\therefore |a-b|=2$ 답 ③

0387 $f(x)=x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=2x$

점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 접선의 방정식은

$y-3=4(x-2)$ $\therefore y=4x-5$ ····· ㉠

한편 $g(x)=x^3+ax+11$로 놓으면

$g'(x)=3x^2+a$

㉠과 곡선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(t, t^3+at+11)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at+11)=(3t^2+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+a)x-2t^3+11$

이 직선이 ㉠과 일치해야 하므로

$3t^2+a=4$ ····· ㉡

$-2t^3+11=-5$ ····· ㉢

㉢에서 $t^3=8$ $\therefore t=2$

$t=2$를 ㉡에 대입하면

$12+a=4$ $\therefore a=-8$ 답 -8

0388 $f(x)=x^2+3x+3$으로 놓으면

$f'(x)=2x+3$

구하는 거리의 최솟값은 곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=-x-2$와 평행한 접선의 접점과 직선 $y=-x-2$, 즉 $x+y+2=0$ 사이의 거리와 같다.

직선 $y=-x-2$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2+3t+3)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=2t+3=-1$ $\therefore t=-2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2, 1)$이므로 구하는 거리의 최솟값은

$\frac{|-2+1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ②

라쎈 특강

점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

0389 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{3}$ $(x>0)$로 놓으면

$f'(x)=x^2$

곡선 $y=f(x)$ $(x>0)$의 접선 중에서 직선 $y=x-5$와 평행한 접선의 접점이 점 P일 때 점 P와 직선 $y=x-5$ 사이의 거리가 최소이다.

점 $P(a, b)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=a^2=1$ $\therefore a=1$ ($\because$ $a>0$)

└ 점 P는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $a>0$

따라서 $b=\frac{1}{3}-\frac{7}{3}=-2$이므로

$ab=-2$ 답 -2

0390 $f(x)=x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=2x$

△ABP에서 밑변을 $\overline{AB}$로 생각하면 높이는 점 P와 직선 $y=2x-4$ 사이의 거리이므로 곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2x-4$와 평행한 접선의 접점이 점 P일 때 △ABP의 넓이가 최소이다.

따라서 △ABP의 넓이가 최소일 때의 점 P의 좌표를 (t, t^2+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2t=2$ $\therefore t=1$ ··· ❶

점 (1, 2)와 직선 $y=2x-4$, 즉 $2x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$ ····❷

따라서

$$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$$

이므로 △ABP의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}=4$$ ····❸

답 4

채점 기준	비율
❶ △ABP의 넓이가 최소일 때의 점 P의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 P와 직선 $y=2x-4$ 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
❸ △ABP의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

라쎈 특강

$\triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot(\text{높이})=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot(\text{높이})=\sqrt{5}\cdot(\text{높이})$이므로 △ABP의 높이, 즉 점 P와 직선 $y=2x-4$ 사이의 거리가 최소일 때 △ABP의 넓이가 최소이다.

0391 $f(x)=x^3-x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3$

이 직선이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=-2t^3$, $t^3=1$ $\therefore t=1$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$f'(1)=3-1=2$ 답 ④

0392 $f(x)=x^2+x$로 놓으면

$f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 (t, t^2+t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$

$\therefore y=(2t+1)x-t^2$ ····· ㉠

이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$1=2t+1-t^2$, $t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

이것을 각각 ㉠에 대입하면

$y=x$, $y=5x-4$

따라서 구하는 y절편의 합은

$0+(-4)=-4$ 답 -4

0393 $f(x)=x^3-7$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3-7)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-7)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3-7$ ····· ㉠

이 직선이 점 $(0, 9)$를 지나므로

$9=-2t^3-7$, $t^3=-8$ $\therefore t=-2$

$t=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=12x+9$

따라서 직선 $y=12x+9$ 위의 점의 좌표인 것은 ②이다. 답 ②

0394 $f(x)=x^3-8x^2+5x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-16x+5$

접점의 좌표를 (t, t^3-8t^2+5t+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-16t+5$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-8t^2+5t+1)=(3t^2-16t+5)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-16t+5)x-2t^3+8t^2+1$

이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=-3t^2+16t-5-2t^3+8t^2+1$

$\therefore 2t^3-5t^2-16t+4=0$

이때 $2t^3-5t^2-16t+4=0$, 즉 $(t+2)(2t^2-9t+2)=0$에서 이차방정식 $2t^2-9t+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-9)^2-4\cdot 2\cdot 2=65>0$

이고, $2\cdot(-2)^2-9\cdot(-2)+2=28\neq 0$이므로 삼차방정식 $2t^3-5t^2-16t+4=0$은 서로 다른 세 실근을 가지며 이 세 실근이 세 접점의 x좌표이다.

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x좌표의 합은 $\frac{5}{2}$ 답 ⑤

라쎈 특강

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 실근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

0395 $f(x)=x^4+2x^2+5$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4x$

접점의 좌표를 (t, t^4+2t^2+5)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3+4t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+2t^2+5)=(4t^3+4t)(x-t)$

$\therefore y=(4t^3+4t)x-3t^4-2t^2+5$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-3t^4-2t^2+5$, $3t^4+2t^2-5=0$

$(t+1)(t-1)(3t^2+5)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ ($\because 3t^2+5>0$)

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 8)$, $(1, 8)$이므로

$\overline{PQ}=1-(-1)=2$ 답 2

0396 $f(x)=\frac{1}{8}x^2+a$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{4}x$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{8}t^2+a\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{4}t$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{8}t^2+a\right)=\frac{1}{4}t(x-t)$ $\therefore y=\frac{1}{4}tx-\frac{1}{8}t^2+a$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}t^2+a$

$\therefore t^2-2t-8a=0$ ····· ㉠

두 접점의 x좌표를 각각 t_1, t_2라 하면 t_1, t_2는 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1t_2=-8a$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$\frac{1}{4}t_1\cdot\frac{1}{4}t_2=-1$, $\frac{1}{16}\cdot(-8a)=-1$

$\therefore a=2$ 답 2

0397 $f(x)=x^4+12$로 놓으면

$f'(x)=4x^3$

접점의 좌표를 (t, t^4+12)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+12)=4t^3(x-t)$

$\therefore y=4t^3x-3t^4+12$

이 직선이 원점을 지나므로

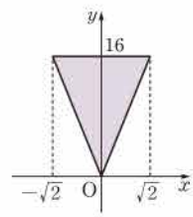
$0=-3t^4+12$, $t^4-4=0$

$(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})(t^2+2)=0$

$\therefore t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$ ($\because t^2+2>0$)

따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2}, 16)$, $(\sqrt{2}, 16)$이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot16=16\sqrt{2}$



답 ④

0398 $f(x)=x^3+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-1=3\{x-(-1)\}$ $\therefore y=3x+4$

따라서 접선의 x절편이 $-\frac{4}{3}$, y절편이 4이므로 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot4=\frac{8}{3}$ 답 ③

0399 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+3$으로 놓으면

$f'(x)=-x+1$

접점의 좌표를 $\left(t, -\frac{1}{2}t^2+t+3\right)$이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=-t+1=-1$ $\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 3)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-1\cdot(x-2)$ $\therefore y=-x+5$

즉 접선의 x절편과 y절편이 모두 5이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot5\cdot5=\frac{25}{2}$ 답 $\frac{25}{2}$

0400 $f(x)=x^2+2x-2$로 놓으면

$f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 (t, t^2+2t-2)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2t-2)=(2t+2)(x-t)$

$\therefore y=(2t+2)x-t^2-2$ ····· ㉠

이 직선이 점 $A(-1, -4)$를 지나므로

$-4=-(2t+2)-t^2-2$, $t^2+2t=0$

$t(t+2)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=0$

이것을 각각 ㉠에 대입하면

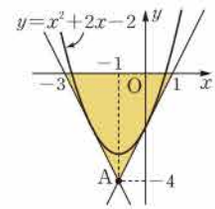
$y=-2x-6$, $y=2x-2$

따라서 두 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(-3, 0)$, $(1, 0)$

이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$ 답 8



0401 점 $(1, k)$는 곡선 $y=2x^2-5x+a$ 위의 점이므로

$k=-3+a$ ····· ㉠

$f(x)=2x^2-5x+a$로 놓으면

$f'(x)=4x-5$

점 $(1, k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-k=-1\cdot(x-1)$ $\therefore y=-x+k+1$

따라서 접선의 x절편과 y절편은 모두 $k+1$이다.

이때 $k+1>0$이고 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

($k>-1$에서 $k+1>0$)

$\frac{1}{2}\cdot(k+1)^2=\frac{9}{2}$, $(k+1)^2=9$

$\therefore k=2$ ($\because k>-1$)

$k=2$를 ㉠에 대입하면 $a=5$

$\therefore a+k=7$ 답 ②

0402 $f(x)=x^3+ax-3$, $g(x)=x^2+4x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2x+4$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$t^3+at-3=t^2+4t$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2+a=2t+4$

$\therefore a=-3t^2+2t+4$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2t^3-t^2+3=0$, $(t+1)(2t^2-3t+3)=0$

$\therefore t=-1$ ($\because 2t^2-3t+3>0$)

$t=-1$을 ㉡에 대입하면

$a=-3-2+4=-1$ 답 ③

0403 (1) $f(x)=ax^3+6x$, $g(x)=2x^2+bx$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+6$, $g'(x)=4x+b$

두 곡선이 $x=3$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(3)=g(3)$에서 $27a+18=18+3b$

$\therefore 9a-b=0$ ····· ㉠

$f'(3)=g'(3)$에서 $27a+6=12+b$

$\therefore 27a-b=6$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=3$ ··· ❶

(2) 두 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+6x$, $y=2x^2+3x$의 접점의 좌표가 $(3, 27)$이고 접선의 기울기가 $g'(3)=15$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-27=15(x-3)$ $\therefore y=15x-18$ ··· ❷

답 (1) $a=\frac{1}{3}$, $b=3$ (2) $y=15x-18$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 공통인 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %

0404 $f(x)=x^3-2$, $g(x)=2x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=6x^2-3$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^3-2=2t^3-3t$

$t^3-3t+2=0$, $(t+2)(t-1)^2=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2=6t^2-3$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 접점의 좌표가 $(1, -1)$이고 접선의 기울기가 $f'(1)=3$이므로 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 $(1, -1)$을 지나고 공통인 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-1)$ $\therefore y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

즉 $m=-\frac{1}{3}$, $n=-\frac{2}{3}$이므로

$9mn=9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=2$ 답 ④

0405 함수 $f(x)=x^3-3x+1$은 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(2)=3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-3$이므로 $f'(c)=3c^2-3=0$

$3(c+1)(c-1)=0$ $\therefore c=1$ ($\because -1<c<2$)

따라서 상수 c의 개수는 1이다. 답 1

0406 ③ 열린구간 $(-2, 1)$에서 미분가능하지 않은 점이 존재하므로 롤의 정리를 적용할 수 없다.

답 ③

0407 $f(-2)=f(6)$이어야 하므로

$-4-2k=-36+6k$ $\therefore k=4$

따라서 함수 $f(x)=-x^2+4x$는 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 6)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+4$이므로

$f'(c)=-2c+4=0$ $\therefore c=2$

$\therefore k+c=6$ 답 ②

0408 함수 $f(x)=x^3+2x^2-4x-9$는 닫힌구간 $[-a, a]$에서 연속이고 열린구간 $(-a, a)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$-a^3+2a^2+4a-9=a^3+2a^2-4a-9$

$2a^3-8a=0$, $2a(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 자연수) ··· ❶

따라서 함수 $f(x)=x^3+2x^2-4x-9$는 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2+4x-4$이므로

$f'(c)=3c^2+4c-4=0$

$(c+2)(3c-2)=0$

$\therefore c=\frac{2}{3}$ ($\because -2<c<2$) ··· ❷

답 $a=2$, $c=\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ c의 값을 구할 수 있다.	50 %

0409 닫힌구간 $[1, k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 2이므로

$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(2)$

이때 $f'(x)=-2x+6$이므로

$\frac{-k^2+6k+1-6}{k-1}=2$, $-k^2+6k-5=2k-2$

$k^2-4k+3=0$, $(k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>2$) 답 ①

0410 답 (가) (a, x) (나) $f(a)$

0411 함수 $f(x)=x^3-6x$는 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-3, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-6$이므로 $\frac{9-(-9)}{3-(-3)}=3c^2-6$

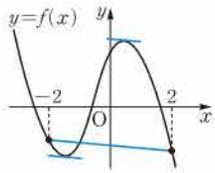
$3c^2=9$, $c^2=3$

$\therefore c=-\sqrt{3}$ 또는 $c=\sqrt{3}$

따라서 모든 c의 값의 곱은 -3이다. 답 -3

0412 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-2, f(-2))$, $(2, f(2))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2, f(-2))$, $(2, f(2))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로 상수 c의 개수는 2이다. 답 ③



0413 $f(2)-f(0)=2f'(c)$에서

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$$

이때 $f'(x)=3x^2-1$이므로

$$\frac{8-2}{2}=3c^2-1, \quad c^2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore c=\frac{2\sqrt{3}}{3} \ (\because 0<c<2)$$ 답 ④

0414 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이다.

풀이 점 $(1, c)$가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로 $c=3$

$f(x)=2x^2+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=4x+a$

점 $(1, 3)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(1)=3, \quad 2+a+b=3$

$\therefore a+b=1$ ····· ㉠

점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(1)=3, \quad 4+a=3$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+bc=-1+2\cdot3=5$ 답 5

0415 전략 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $g'(a)$임을 이용한다.

풀이 함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로

$g'(x)=f(x)$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=f(2)=(-1)^2=1$

이때 접선의 y절편이 -5이므로 접선의 방정식은

$y=x-5$

따라서 이 접선의 x절편은 5이다. 답 ⑤

0416 전략 점 A에서의 접선의 기울기와 점 B에서의 접선의 기울기가 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

점 A의 x좌표가 3이므로 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=27-18+1=10$

점 B의 x좌표를 t $(t\neq3)$라 하면 점 B에서의 접선의 기울기가 10이므로

$f'(t)=3t^2-6t+1=10$

$t^2-2t-3=0, \quad (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1 \ (\because t\neq3)$

이때 $f(-1)=-4$이므로 점 B의 좌표는

$(-1, -4)$

따라서 점 B$(-1, -4)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-4)=10\{x-(-1)\}$, 즉 $y=10x+6$

이므로 구하는 y절편은 6이다. 답 ②

0417 전략 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기의 최댓값은 $f'(x)$의 최댓값임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^3+6x^2-10x+1$로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+12x-10=-3(x-2)^2+2$

이므로 $f'(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 2를 갖는다.

따라서 접점의 좌표가 $(2, -3)$이고 기울기가 2이므로 직선의 방정식은

$y-(-3)=2(x-2) \quad \therefore y=2x-7$

즉 $m=2$, $n=-7$이므로

$m+n=-5$ 답 -5

0418 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=a$ (a는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 $x\longrightarrow2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$f(2)=g(2)$ ····· ㉠

이때

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)-g'(2)=2$$

이므로

$f'(2)=g'(2)+2$ ····· ㉡

$g(x)=x^3f(x)-7$에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7, \quad g(2)=8g(2)-7 \ (\because$ ㉠$)$

$7g(2)=7 \quad \therefore g(2)=1$

$g(x)=x^3f(x)-7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

위의 식에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=12\underline{f(2)}+8f'(2)$ ($f(2)=g(2)=1$)

$g'(2)=12\cdot1+8\{g'(2)+2\} \ (\because$ ㉡$)$

$7g'(2)=-28 \quad \therefore g'(2)=-4$

점 $(2, g(2))$, 즉 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기가 -4이므로 접선의 방정식은

$y-1=-4(x-2) \quad \therefore y=-4x+9$

따라서 $a=-4$, $b=9$이므로

$a^2+b^2=(-4)^2+9^2=97$ 답 97

0419 전략 기울기가 a인 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{a}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$x-3y-3=0$에서 $y=\frac{1}{3}x-1$이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-6t^2+9t+2)$라 하면 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(t)=3t^2-12t+9=-3$

$t^2-4t+4=0,\quad (t-2)^2=0$

$\therefore\ t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 4)$이므로 직선의 방정식은

$y-4=-3(x-2)\quad \therefore\ 3x+y-10=0$ 답 ③

0420 전략 $x=t$인 점에서의 접선의 방정식을 구하여 주어진 직선의 방정식과 비교한다.

풀이 $f(x)=x^3$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t)\quad \therefore\ y=3t^2x-2t^3$

이 직선이 $y=ax-2$와 일치해야 하므로

$3t^2=a$ …… ㉠

$-2t^3=-2$ …… ㉡

㉡에서 $t^3=1\quad \therefore\ t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $a=3$ 답 3

0421 전략 주어진 곡선에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하여 평행이동한 직선의 방정식과 비교한다.

풀이 평행이동한 직선의 방정식은

$y=3(x-m)+1\quad \therefore\ y=3x-3m+1$ …… ㉠

$f(x)=x^3-9x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-9$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-9t+2)$라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=3t^2-9=3,\quad t^2=4$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=2$

(i) $t=-2$일 때,

접점의 좌표가 $(-2,\ 12)$이므로 접선의 방정식은

$y-12=3\{x-(-2)\}\quad \therefore\ y=3x+18$

이 직선이 ㉠과 일치해야 하므로

$-3m+1=18\quad \therefore\ m=-\frac{17}{3}$

(ii) $t=2$일 때,

접점의 좌표가 $(2,\ -8)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-8)=3(x-2)\quad \therefore\ y=3x-14$

이 직선이 ㉠과 일치해야 하므로

$-3m+1=-14\quad \therefore\ m=5$

(i), (ii)에서 $m=5$ ($\because$ m은 정수) 답 5

0422 전략 삼각형 OAP의 넓이가 최대인 점 P에서의 접선의 기울기는 1이다.

풀이 $f(x)=ax(x-2)^2=ax^3-4ax^2+4ax$에서

$f'(x)=3ax^2-8ax+4a$

△OAP에서 밑변을 $\overline{OA}$로 생각하면 높이는 점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리이므로 곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=x$와 평행한 접선의 접점이 점 P일 때 △OAP의 넓이가 최대이다.

따라서 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$이므로 $\frac{3}{4}a-4a+4a=1$

$\frac{3}{4}a=1\quad \therefore\ a=\frac{4}{3}$ 답 ②

0423 전략 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하고 접선이 점 $(0,\ 3)$을 지남을 이용하여 t의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=-x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+2)=-2t(x-t)$

$\therefore\ y=-2tx+t^2+2$

이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=t^2+2,\quad t^2=1$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-1)\cdot f'(1)=2\cdot(-2)$

$=-4$ 답 -4

0424 전략 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2t)$라 하고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3+2x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2+2)x-2t^3$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=-2t^3,\quad t^3=1$

$\therefore\ t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$y=5x-2$

이 직선이 x축과 만나는 점의 좌표가 $\left(\frac{2}{5},\ 0\right)$이므로

$a=\frac{2}{5}$ 답 ①

0425 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=-2x+a$, $g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(1)=g(1)$에서 $\quad -1+a+b=5$

$\therefore a+b=6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=g'(1)$에서 $\quad -2+a=2 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

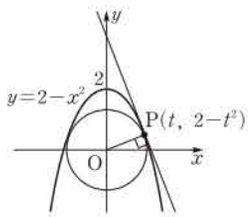
$\therefore a-b=2$ 답 2

0426 전략 곡선 $y=f(x)$와 원 O가 접할 때, 원 O의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 수직임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2-x^2$으로 놓으면

$f'(x)=-2x$

오른쪽 그림과 같이 접점을 $\mathrm{P}(t,\ 2-t^2)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이고, 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{2-t^2}{t}$



이때 접선과 직선 OP는 서로 수직이므로

$-2t\cdot\dfrac{2-t^2}{t}=-1, \quad t^2=\dfrac{3}{2}$

$\therefore t=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$이고 원 O의 반지름의 길이는 원점과 점 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

원점과 점 $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 사이의 거리와 같음을 이용할 수도 있다.

따라서 원 O의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}\pi$ 답 $\sqrt{7}\pi$

0427 전략 $f'(c)=0$인 상수 c의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=0$에서 $\quad x^3-x=0$

$x(x+1)(x-1)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$\therefore \alpha=-1, \beta=0\ (\because \alpha<\beta)$

함수 $f(x)=x^3-x$는 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(0)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-1$이므로 $\quad f'(c)=3c^2-1=0$

$c^2=\dfrac{1}{3} \quad \therefore c=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ (\because -1<c<0)$ 답 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

0428 전략 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=0$이면 $f(x)$는 상수함수임을 이용한다.

풀이 구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)=g'(x)$이므로

$F'(x)=f'(x)-g'(x)=\boxed{0}$

따라서 $F(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 $\boxed{\text{상수}}$함수이다.

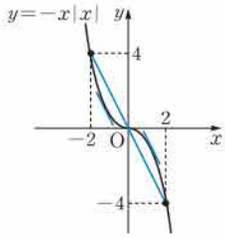
$\therefore$ (가) 0 (나) 상수 답 풀이 참조

0429 전략 평균값 정리의 기하적 의미를 생각한다.

풀이 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-2,\ 4)$, $(2,\ -4)$를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

함수 $y=-x|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 점 $(-2,\ 4)$, $(2,\ -4)$를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있다.

따라서 상수 c의 개수는 2이다.



답 ②

0430 전략 평균값 정리를 만족시키는 상수 c에 대하여 $f'(c)\geq 5$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 5)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(1)=3$이고 $f'(c)\geq 5$이므로

$\dfrac{f(5)-3}{4}\geq 5$

$\therefore f(5)\geq 23$

따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다. 답 ③

0431 전략 주어진 등식에 $f(1+h)$, $f'(1+\theta h)$를 대입한 다음 θ에 대하여 정리한다.

풀이 $f(x)=x^3$에서

$f'(x)=3x^2$

$f(1+h)=f(1)+hf'(1+\theta h)$에서

$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1+\theta h)\ (\because h>0)$

$\dfrac{(1+h)^3-1}{h}=3(1+\theta h)^2$

$h^2+3h+3=3+6\theta h+3\theta^2h^2$

$3h^2\theta^2+6h\theta-h^2-3h=0$

$3h\theta^2+6\theta-h-3=0$

$\therefore \theta=\dfrac{-3+\sqrt{9+9h+3h^2}}{3h}\ (\because \theta>0)$

$\therefore \lim\limits_{h\to 0+}\theta=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{\sqrt{9+9h+3h^2}-3}{3h}$

$=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{(\sqrt{9+9h+3h^2}-3)(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}{3h(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}$

$=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{3h(3+h)}{3h(\sqrt{9+9h+3h^2}+3)}$

$=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{3+h}{\sqrt{9+9h+3h^2}+3}$

$=\dfrac{3}{3+3}$

$=\dfrac{1}{2}$ 답 ④

0432 전략 두 직선 l, m의 방정식을 각각 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x$

점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=9$이므로 직선 l의 방정식은

$y=9\{x-(-1)\}$

$\therefore 9x-y=-9$ …… ㉠ …➊

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-3$이므로 직선 m의 방정식은

$y-2=-3(x-1)$

$\therefore 3x+y=5$ …… ㉡ …➋

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-\frac{1}{3}$, $y=6$

따라서 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3}, 6\right)$이므로

$a=-\frac{1}{3}$, $b=6$ …➌

$\therefore ab=-2$ …➍

답 -2

채점 기준	비율
➊ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
➋ 직선 m의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
➌ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
➍ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0433 전략 곱의 미분법을 이용하여 $y=f(x)g(x)$의 도함수를 구한다.

풀이 $h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

곡선 $y=h(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=-1\cdot4+1\cdot(-2)=-6$ …➊

$h(1)=f(1)g(1)=1\cdot4=4$이므로 점 $(1, 4)$를 지나고 기울기가 -6인 접선의 방정식은

$y-4=-6(x-1)$

$\therefore y=-6x+10$ …➋

답 $y=-6x+10$

채점 기준	비율
➊ $x=1$인 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	50 %
➋ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %

0434 전략 주어진 곡선에 접하고 기울기가 1인 두 직선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-2x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t+2)라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=3t^2-2=1$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ …➊

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 3)$, $(1, 1)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=x-(-1)$, $y-1=x-1$

$\therefore x-y+4=0$, $x-y=0$ …➋

이 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-y+4=0$ 위의 점 $(0, 4)$와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$ …➌

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
➊ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
➋ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
➌ 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

라쎈 특강

평행한 두 직선 사이의 거리

① 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

② 평행한 두 직선 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ 사이의 거리는

$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

0435 전략 두 직선 l, m의 방정식을 각각 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=2x^3-6x$

점 $\mathrm{P}(2, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$이므로 직선 l의 방정식은

$y-(-2)=4(x-2)$ $\therefore y=4x-10$ …➊

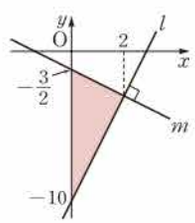
한편 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이므로 직선 m의 방정식은

$y-(-2)=-\frac{1}{4}(x-2)$ $\therefore y=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$ …➋

따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{3}{2}-(-10)\right\}\cdot2=\frac{17}{2}$ …➌

답 $\frac{17}{2}$



채점 기준	비율
➊ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
➋ 직선 m의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
➌ 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

본책 69~71쪽

05 도함수의 활용 (2)

0436 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=x_1^3-1-(x_2^3-1)\\&=x_1^3-x_2^3\\&=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\end{aligned}$$

이때 $x_1-x_2<0$, $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)\boxed{<}0$ $\therefore f(x_1)\boxed{<}f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=x^3-1$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $\boxed{\text{증가}}$한다.

$\therefore$ (가) $<$ (나) 증가 풀이 참조

0437 $x_1<x_2$인 임의의 두 양수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

이때 $x_1+x_2>0$, $x_1-x_2<0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)<0$ $\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다. 증가

0438 $x_1<x_2<1$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\begin{aligned}&f(x_1)-f(x_2)\\&=-2x_1^2+4x_1+1-(-2x_2^2+4x_2+1)\\&=-2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(x_1-x_2)\\&=-2(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)\end{aligned}$$

이때 $x_1-x_2<0$, $x_1+x_2-2<1+1-2=0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)<0$ $\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=-2x^2+4x+1$은 구간 $(-\infty, 1)$에서 증가한다. 증가

0439 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=-x_1^3-(-x_2^3)\\&=-(x_1^3-x_2^3)\\&=-(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\end{aligned}$$

이때 $x_1-x_2<0$, $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$이므로

$f(x_1)-f(x_2)>0$ $\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)=-x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

감소

0440 (가) $>$ (나) $<$ (다) 증가 (라) 감소

0441 $f(x)=x^2+2x$에서

$f'(x)=2x+2=2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가한다. 풀이 참조

0442 $f(x)=-x^2+4x-2$에서

$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 2]$에서 증가하고, 구간 $[2, \infty)$에서 감소한다. 풀이 참조

0443 $f(x)=x^3+3x^2+2$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$ 또는 구간 $[0, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-2, 0]$에서 감소한다. 풀이 참조

0444 $f(x)=-x^3+3x^2-9x$에서

$f'(x)=-3x^2+6x-9=-3(x-1)^2-6<0$

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다. 풀이 참조

0445 극댓값: 4, 극솟값: -3

0446 (1) a, c (2) b, d

0447 (1) 6 (2) 0

0448 극댓값: 12, 극솟값: -20

참고 -1, -1, 12, -20, -1, 12, -20

0449 $f(x)=x^3-6x^2$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-32	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0, $x=4$에서 극솟값 -32를 갖는다. 극댓값: 0, 극솟값: -32

0450 $f(x)=-x^3+3x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 3, $x=-1$에서 극솟값 -1을 갖는다. 극댓값: 3, 극솟값: -1

0451 $f(x)=x^4-6x^2+1$에서

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	1	$\searrow$	-8	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1, $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$에서 극솟값 -8을 갖는다. 극댓값: 1, 극솟값: -8

0452 (1) $f'(x)=3x^2-12x+9$

(2) $f'(x)=0$에서 $3x^2-12x+9=0$

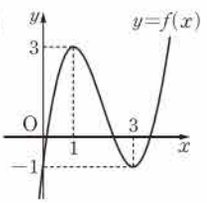
$3(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$

(3)

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 3, $x=3$에서 극솟값 -1을 갖는다.

(4)



풀이 참조

0453 $f(x)=x^3-3x^2+2$에서

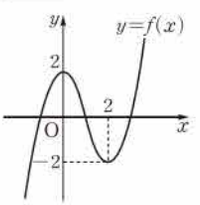
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

풀이 참조



0454 $f(x)=-x^3+6x$에서

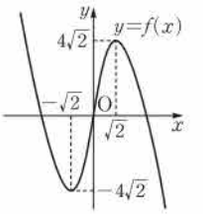
$f'(x)=-3x^2+6=-3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

풀이 참조



0455 $f(x)=x^4-4x^3+12$에서

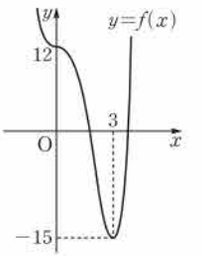
$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	12	$\searrow$	-15	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

풀이 참조



0456 $f(x)=-x^4+2x^3-1$에서

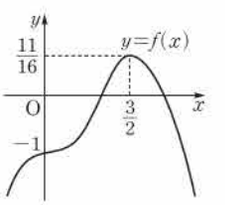
$f'(x)=-4x^3+6x^2=-2x^2(2x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{11}{16}$	$\searrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

풀이 참조



0457 $f(x)=x^2-2x$에서 $f'(x)=2x-2=2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 3, $x=1$에서 최솟값 -1을 갖는다. 최댓값: 3, 최솟값: -1

0458 $f(x)=-x^3+3x^2+5$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because -2\le x\le 1$)

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	25	$\searrow$	5	$\nearrow$	7

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 25, $x=0$에서 최솟값 5를 갖는다. 최댓값: 25, 최솟값: 5

0459 $f(x)=x^4-6x^3+4x^2-1$에서

$f'(x)=4x^3-18x^2+8x=2x(2x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ ($\because$ $-1\le x\le 1$)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	10	↘	-1	↗	$-\frac{11}{16}$	↘	-2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 10, $x=1$일 때 최솟값 -2를 갖는다. 답 최댓값: 10, 최솟값: -2

0460 (1) $-x^2+3=0$에서

$x^2-3=0$, $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

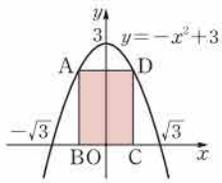
이때 $a>0$이므로 $0<a<\sqrt{3}$

(2) 오른쪽 그림에서

A$(-a, -a^2+3)$, B$(-a, 0)$,

C$(a, 0)$, D$(a, -a^2+3)$

이므로 직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면



$S(a)=2a(-a^2+3)=-2a^3+6a$

(3) $S(a)=-2a^3+6a$에서

$S'(a)=-6a^2+6=-6(a^2-1)$

$=-6(a+1)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because$ $0<a<\sqrt{3}$)

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	4	↘	

따라서 직사각형의 넓이는 $a=1$에서 최댓값 4를 갖는다.

답 (1) $0<a<\sqrt{3}$ (2) $-2a^3+6a$ (3) 4

0461 $f(x)=-x^3+12x+9$에서

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-7	↗	25	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, 2]$에서 증가하므로

$\alpha=-2$, $\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=-4$ 답 ①

0462 ① 구간 $(-\infty, -2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

② 구간 $(-2, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

③ 구간 $(-1, 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

④ 구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

⑤ 구간 $(2, 3)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소하고, 구간 $(3, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

답 ④

0463 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+3$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$의 좌우에서 증가와 감소가 바뀌므로 $x=-2$, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -2, 1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+1=-\frac{2a}{6}$, $-2\cdot 1=\frac{b}{6}$

$\therefore a=3$, $b=-12$

$\therefore a-b=15$ 답 15

0464 $f(x)=x^3+x^2+ax-3$에서

$f'(x)=3x^2+2x+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-3a\le 0$ $\therefore a\ge\frac{1}{3}$ 답 ⑤

라쎈 특강

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$이 성립하려면

$a>0$, $D\le 0$

② 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$이 성립하려면

$a<0$, $D\le 0$

0465 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+4x^2+ax+2$에서

$f'(x)=-2x^2+8x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16+2a\le 0$ $\therefore a\le -8$

따라서 실수 a의 최댓값은 -8이다. 답 ①

0466 $f(x)=x^3-2ax^2+8ax$에서

$f'(x)=3x^2-4ax+8a$

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-24a\le 0$, $4a(a-6)\le 0$

$\therefore 0\le a\le 6$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, $\cdots$, 6의 7개이다. 답 7

0467 $f(x)=kx^3+3x^2+15kx$에서

$f'(x)=3kx^2+6x+15k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \le 0$이어야 하므로

$3k < 0 \quad \therefore k < 0$ ····· ㉠

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = 9 - 45k^2 \le 0, \quad 5k^2 - 1 \ge 0$

$(\sqrt{5}k+1)(\sqrt{5}k-1) \ge 0$

$\therefore k \le -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 또는 $k \ge \frac{\sqrt{5}}{5}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $k \le -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 답 $k \le -\frac{\sqrt{5}}{5}$

참고 $f(x)$가 삼차함수이므로 $k \ne 0$
따라서 $3k \ne 0$이므로 $f'(x)$는 이차함수이다.

0468 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다.

그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가해야 한다. ···➊

$f(x) = 2x^3 + x^2 + kx - 1$에서

$f'(x) = 6x^2 + 2x + k$ ···➋

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = 1 - 6k \le 0 \quad \therefore k \ge \frac{1}{6}$ ···➌

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ···➍

답 1

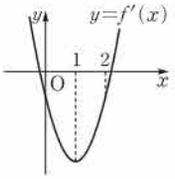
채점 기준	비율
➊ 함수 $f(x)$가 증가해야 함을 알 수 있다.	30 %
➋ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
➌ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➍ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0469 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 4$에서

$f'(x) = 3x^2 - 6x + a$

함수 $f(x)$가 $1 < x < 2$에서 감소하려면 $1 < x < 2$에서 $f'(x) \le 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(1) = a - 3 \le 0$이어야 하므로

$a \le 3$ ····· ㉠

$f'(2) = a \le 0$이어야 하므로

$a \le 0$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a \le 0$ 답 ①

라쎈 특강

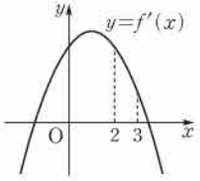
$f'(x) = 3x^2 - 6x + a = 3(x-1)^2 + a - 3$이므로 $y = f'(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식이 $x=1$인 포물선이다.
즉 함수 $f'(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 증가하고 $1 < 2$이므로
$f'(2) \le 0$이면 $f'(1) \le 0$도 성립함을 알 수 있다.
따라서 $f'(2) \le 0$을 만족시키는 a의 값의 범위만 생각해도 된다.

0470 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax - 4$에서

$f'(x) = -x^2 + 2x + a$

함수 $f(x)$가 구간 $(2, 3)$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(2) = a \ge 0$이어야 하므로

$a \ge 0$ ····· ㉠

$f'(3) = a - 3 \ge 0$이어야 하므로

$a \ge 3$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a \ge 3$

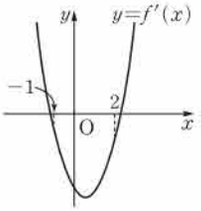
따라서 실수 a의 최솟값은 3이다. 답 3

0471 $f(x) = x^3 + ax^2 - 7x + 3$에서

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 7$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 2)$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x) \le 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(-1) = -2a - 4 \le 0$이어야 하므로

$a \ge -2$ ····· ㉠

$f'(2) = 4a + 5 \le 0$이어야 하므로

$a \le -\frac{5}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-2 \le a \le -\frac{5}{4}$

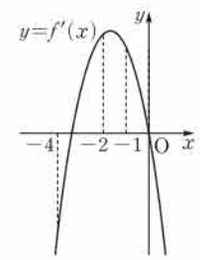
따라서 $\alpha = -2$, $\beta = -\frac{5}{4}$이므로 $\alpha + \beta = -\frac{13}{4}$ 답 ①

0472 $f(x) = -x^3 - ax^2 + 5$에서

$f'(x) = -3x^2 - 2ax$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, -4)$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x) \le 0$이고, 구간 $(-2, -1)$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$f'(-4) = 8a - 48 \le 0$이어야 하므로

$a \le 6$ ····· ㉠

$f'(-2) = 4a - 12 \ge 0$이어야 하므로

$a \ge 3$ ····· ㉡

$f'(-1) = 2a - 3 \ge 0$이어야 하므로

$a \ge \frac{3}{2}$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면 $3 \le a \le 6$

따라서 정수 a는 3, 4, 5, 6의 4개이다. 답 ③

0473 $f(x) = -x^3 + 3x + 5$에서

$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

x	···	-1	···	1	···
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	3	↗	7	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 7, $x=-1$에서 극솟값 3을 가지므로

$M=7,\ m=3$

$\therefore M+m=10$ 답 ⑤

0474 $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+11$에서

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$ ···· ❶

x	···	-2	···	0	···	1	···
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-21	↗	11	↘	6	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$에서 극솟값을 가지므로 모든 x의 값의 합은

$-2+1=-1$ ···· ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ x의 값의 합을 구할 수 있다.	50 %

0475 $f(x)=-x^4+\frac{8}{3}x^3-2x^2+1$에서

$f'(x)=-4x^3+8x^2-4x=-4x(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	···	0	···	1	···
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘	$\frac{2}{3}$	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 가지므로

$a=0,\ b=1$ $\therefore a-b=-1$ 답 ③

참고 $f'(1)=0$이지만 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=1$에서는 극값을 갖지 않는다.

0476 $f(x)=-2x^3+3x^2+ax+b$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 -5를 가지므로

$f(-1)=-5,\ f'(-1)=0$

$2+3-a+b=-5,\ -6-6+a=0$

$\therefore a=12,\ b=2$

$\therefore ab=24$ 답 24

0477 $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	···	1	···	3	···
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+4$	↘	a	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 a를 가지므로

$a=3$

또 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $a+4$를 가지므로 구하는 극댓값은

$3+4=7$ 답 ②

0478 $f(x)=x^3-6x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	···	0	···	4	···
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	a	↘	$a-32$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 a, $x=4$에서 극솟값 $a-32$를 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 $a\neq a-32$이므로

$a=-(a-32)$ $\therefore a=16$ 답 ⑤

0479 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 $x\longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2} f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$8+4a+2b+c=0$ $\therefore 4a+2b+c=-8$ ····· ㉠

또 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=9$, $12+4a+b=9$

$\therefore 4a+b=-3$ ····· ㉡

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=0$

$3+2a+b=0$ $\therefore 2a+b=-3$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=-3$

이것을 ㉠에 대입하면 $-6+c=-8$ $\therefore c=-2$

따라서 $f(x)=x^3-3x-2$이므로

$f(3)=27-9-2=16$ 답 16

0480 $f(x)=x^3-3x^2+6$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	···	0	···	2	···
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	2	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 6, $x=2$에서 극솟값 2를 가지므로

$\mathrm{A}(0,\ 6)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{6+2}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 4)$ 답 $(1,\ 4)$

0481 $f(x)=x^3+(2a+5)x^2-4x$에서

$f'(x)=3x^2+2(2a+5)x-4$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소라 하면 α, β는 이차방정식 $3x^2+2(2a+5)x-4=0$의 두 근이다.

이때 극대가 되는 점과 극소가 되는 점이 원점에 대하여 대칭이므로

$\alpha=-\beta$, 즉 $\alpha+\beta=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2(2a+5)}{3}=0 \quad \therefore a=-\dfrac{5}{2}$ 답 ③

0482 $f(x)=-x^3+3ax^2-a$에서

$f'(x)=-3x^2+6ax=-3x(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$ ··· ❶

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2a$에서 극값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로

$f(0)=0$ 또는 $f(2a)=0$ ··· ❷

그런데 $f(0)=-a\neq0$이므로 $f(2a)=0$

$-8a^3+12a^3-a=0$

$4a^3-a=0, \quad a(2a+1)(2a-1)=0$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$ ($\because a\neq0$)

따라서 모든 a의 값의 곱은 $-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$ ··· ❸

답 $-\dfrac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접할 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 곱을 구할 수 있다.	40 %

0483 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 1이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	···	-2	···	1	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f'(-2)=0$, $f'(1)=0$이므로

$24-4a+b=0$, $6+2a+b=0$

$\therefore -4a+b=-24$, $2a+b=-6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-12$

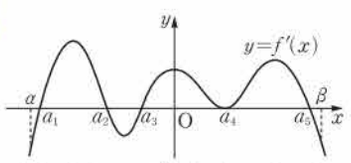
즉 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+c$이고, 함수 $f(x)$의 극댓값이 15이므로

$f(-2)=-16+12+24+c=15 \quad \therefore c=-5$

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-5$이므로 구하는 극솟값은

$f(1)=2+3-12-5=-12$ 답 ④

0484



위의 그림과 같이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 왼쪽부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5라 하자.

$x=a_2$, $x=a_5$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_2$, $x=a_5$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore m=2$

또 $x=a_1$, $x=a_3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_1$, $x=a_3$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore n=2$

$\therefore m-n=0$ 답 0

0485 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	···	0	···	2	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로

$c=0$, $12a+4b+c=0$

$\therefore 3a+b=0$ ····· ㉠ ··· ❶

$f(x)$의 극솟값이 -3, 극댓값이 5이므로

$f(0)=d=-3$

$f(2)=8a+4b+d=5$

$\therefore 2a+b=2$ ····· ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=6$ ··· ❸

$\therefore ad-bc=-2\cdot(-3)-6\cdot0=6$ ··· ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ $f'(0)=0$, $f'(2)=0$임을 이용할 수 있다.	30 %
❷ $f(0)=-3$, $f(2)=5$임을 이용할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $ad-bc$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0486 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	···	-1	···	1	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $-1<x<1$에서 감소하고, $x>1$에서 증가한다.

또 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

답 ④

0487 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -4, -1, 1, 3이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	···	-4	···	-1	···	1	···	3	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 구간 $(-3, -1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. $f'(3)=0$이고 $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 구간 $(-4, 3)$에서 극댓값을 갖는 x의 값은 1의 1개뿐이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ①

0488 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않고, $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

0489 $f(x)=x^3+ax^2+3x-5$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+3$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-9>0$, $(a+3)(a-3)>0$
$\therefore a<-3$ 또는 $a>3$ 답 ①

참고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

0490 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+ax$에서
$f'(x)=x^2-2ax+a$
삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-a>0$, $a(a-1)>0$
$\therefore a<0$ 또는 $a>1$
따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다. 답 2

0491 $f(x)=x^3+2ax^2-3ax+5$에서
$f'(x)=3x^2+4ax-3a$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=4a^2+9a>0$, $a(4a+9)>0$
$\therefore a<-\frac{9}{4}$ 또는 $a>0$ …… ㉠
$g(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x^2-a^2x-2$에서
$g'(x)=-x^2+8x-a^2$
삼차함수 $g(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=16-a^2>0$, $a^2-16<0$
$(a+4)(a-4)<0$ $\therefore -4<a<4$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$-4<a<-\frac{9}{4}$ 또는 $0<a<4$
따라서 정수 a는 -3, 1, 2, 3의 4개이다. 답 ④

0492 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2+8x+2$에서
$f'(x)=2x^2+2ax+8$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-16\le 0$, $(a+4)(a-4)\le 0$
$\therefore -4\le a\le 4$ 답 ④

0493 $f(x)=2x^3+ax^2+ax+5$에서
$f'(x)=6x^2+2ax+a$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다. …❶
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-6a\le 0$, $a(a-6)\le 0$
$\therefore 0\le a\le 6$ …❷
따라서 a의 최댓값은 6, 최솟값은 0이므로 구하는 합은
$6+0=6$ …❸
답 6

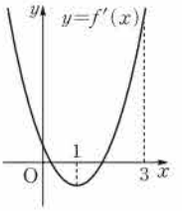
채점 기준	비율
❶ 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0494 $f(x)=x^3-6ax^2+3bx-7$에서
$f'(x)=3x^2-12ax+3b$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=36a^2-9b\le 0$ $\therefore b\ge 4a^2$
(i) $a=1$일 때,
$4\le b\le 20$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 17
(ii) $a=2$일 때,
$16\le b\le 20$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 5
(iii) $a\ge 3$일 때,
$b\ge 4a^2$을 만족시키는 20 이하의 자연수 b는 존재하지 않는다.
이상에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$17+5=22$ 답 22

0495 $f(x)=x^3-3x^2+ax$에서
$f'(x)=3x^2-6x+a$
함수 $f(x)$가 구간 $(0, 3)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 $0<x<3$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3a>0 \quad \therefore a<3$



(ii) $f'(0)>0$에서 $a>0$

$f'(3)>0$에서 $9+a>0$

$\therefore a>-9$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이고 $0<1<3$이다.

($y=3x^2-6x+a=3(x-1)^2+a-3$)

이상에서 a의 값의 범위는

$0<a<3$ 답 $0<a<3$

0496 $f(x)=2x^3+x^2+ax-3$에서

$f'(x)=6x^2+2x+a$

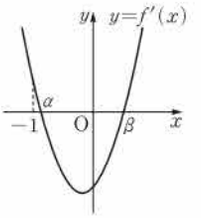
함수 $f(x)$가 $-1<x<0$에서 극댓값, $x>0$에서 극솟값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때,

$-1<\alpha<0$, $\beta>0$

이어야 한다.

(i) $f'(-1)>0$에서 $4+a>0$

$\therefore a>-4$



(ii) $f'(0)<0$에서 $a<0$

(i), (ii)에서 $-4<a<0$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1의 3개이다. 답 3

0497 $f(x)=x^3+ax^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a$

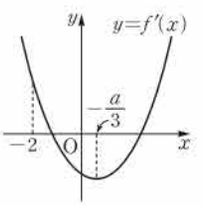
함수 $f(x)$가 $x>-2$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 $x>-2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$

$a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$



(ii) $f'(-2)>0$에서 $12-3a>0$

$\therefore a<4$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{a}{3}$이므로

$-\frac{a}{3}>-2 \quad \therefore a<6$

($y=3x^2+2ax+a=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+a-\frac{a^2}{3}$)

이상에서 a의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $3<a<4$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

0498 $f(x)=3x^4-6x^3+3ax^2+9$에서

$f'(x)=12x^3-18x^2+6ax=6x(2x^2-3x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2-3x+a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2-3x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-8a>0 \quad \therefore a<\frac{9}{8}$

이때 $x=0$이 방정식 $2x^2-3x+a=0$의 근이 아니므로

$a\neq0$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{8}$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. 답 ③

0499 $f(x)=-x^4+8x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+24x^2+4ax=-4x(x^2-6x-a)$

함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. ···❶

그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $x^2-6x-a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ···❷

이차방정식 $x^2-6x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9+a>0 \quad \therefore a>-9$

이때 $x=0$이 방정식 $x^2-6x-a=0$의 근이 아니므로

$a\neq0$

$\therefore -9<a<0$ 또는 $a>0$ ···❸

따라서 $\alpha=-9$, $\beta=0$이므로

$\beta-\alpha=9$ ···❹

답 9

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	30 %
❷ 이차방정식 $x^2-6x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	20 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 음수이므로 항상 극댓값을 갖는다. 따라서 함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

0500 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+(a-2)x^2-4ax$에서

$f'(x)=2x^3-2x^2+2(a-2)x-4a$

$=2(x-2)(x^2+x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$2(x-2)(x^2+x+a)=0$의 한 근이 $x=2$이므로 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 허근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1-4a<0 \quad \therefore a>\frac{1}{4}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

$2(x-2)(x^2+x+a)=0$의 한 근이 $x=2$이므로 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=2$를 근으로 갖거나 2가 아닌 실근을 중근으로 가져야 한다.

$x^2+x+a=0$이 $x=2$를 근으로 가지면

$6+a=0$ $\therefore a=-6$

$x^2+x+a=0$이 2가 아닌 실근을 중근으로 가질 때, 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1-4a=0$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $a=-6$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

따라서 a의 최솟값은 -6이다. 답 -6

참고 $x^2+x+a=0$이 중근을 갖는 경우 $a=\frac{1}{4}$이므로 $x^2+x+\frac{1}{4}=0$에서

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$

따라서 $x^2+x+a=0$은 2가 아닌 실근을 중근으로 가지므로 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

0501 $f(x)=-x^4+2x^2-3$에서

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-11	↗	-2	↘	-3	↗	-2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최댓값 -2, $x=-2$에서 최솟값 -11을 가지므로

$M=-2$, $m=-11$

$\therefore M-m=9$ 답 ⑤

0502 $y=f'(x)$의 그래프가 구간 $[-8, 1]$에서 x축과 만나는 점의 x좌표는 -6이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-6$

x	-8	$\cdots$	-6	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-6$에서 극소이면서 최소이다.

답 -6

0503 $f(x)=-x^4+\frac{4}{3}x^3+2x^2-4x$에서

$f'(x)=-4x^3+4x^2+4x-4=-4(x+1)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because -2\leq x\leq 0$)

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{32}{3}$	↗	$\frac{11}{3}$	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $\frac{11}{3}$을 가지므로

$a=-1$, $b=\frac{11}{3}$

$\therefore a+b=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

0504 $x+2=t$로 놓으면 $-4\leq x\leq 0$에서

$-2\leq t\leq 2$

$g(t)=t^3+3t^2-9t+6$으로 놓으면

$g'(t)=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because -2\leq t\leq 2$)

t	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	28	↘	1	↗	8

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-2$에서 최댓값 28, $t=1$에서 최솟값 1을 가지므로

$M=28$, $m=1$

$\therefore Mm=28$ 답 28

0505 $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2-8x+a$에서

$f'(x)=4x^3-4x^2+8x-8=4(x-1)(x^2+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x^2+2>0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{13}{3}+a$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-\frac{13}{3}+a$를 가지므로

$-\frac{13}{3}+a=-\frac{1}{3}$ $\therefore a=4$ 답 ③

0506 $f(x)=2x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ ⋯ ❶

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-28$	↗	k	↘	$k-1$	↗	$k+4$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $k+4$, $x=-2$에서 최솟값 $k-28$을 갖는다. ⋯ ❷

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -12이므로

$k-28=-12$ $\therefore k=16$ ⋯ ❸

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $16+4=20$ ⋯ ❹

답 20

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0507 $f(x)=-x^3+12x+k$에서

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because -1\leq x\leq 3$)

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$k-11$	↗	$k+16$	↘	$k+9$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $k+16$, $x=-1$에서 최솟값 $k-11$을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 17이므로

$k+16+k-11=17$, $2k=12$

$\therefore k=6$ 답 ②

0508 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+b$에서

$f'(x)=ax^2-2ax=ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 1\le x\le 3$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{2}{3}a+b$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}a+b$	$\nearrow$	b

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 b, $x=2$에서 최솟값 $-\frac{4}{3}a+b$를 가지므로

$b=5$, $-\frac{4}{3}a+b=-3$

$\therefore a=6$, $b=5$

$\therefore ab=30$ ④

0509 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x ($x>0$)라 하면 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$인 정사각형이므로

$12-2x>0$ $\therefore 0<x<6$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(12-2x)^2=4x^3-48x^2+144x$

$\therefore V'(x)=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6)$

$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0<x<6$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은

$V(2)=2\cdot 8^2=128$ ④

0510 점 P의 좌표를 (t, t^2-1)이라 하면

$\overline{AP}^2=t^2+(t^2-2)^2=t^4-3t^2+4$

$f(t)=t^4-3t^2+4$로 놓으면

$f'(t)=4t^3-6t=2t(2t^2-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ ($2t^2-3=0$에서 $t^2=\frac{3}{2}$ $\therefore t=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$)

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$

따라서 $f(t)$는 $t=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$에서 최솟값 $\frac{7}{4}$을 가지므로 $\overline{AP}^2$의 최솟값은 $\frac{7}{4}$이다. $\frac{7}{4}$

0511 점 P의 좌표를 $(a, -a^2+6a)$ ($0<a<6$)라 하면 H$(a, 0)$이므로 $\triangle$OPH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}a(-a^2+6a)=\frac{1}{2}(-a^3+6a^2)$

$\therefore S'(a)=\frac{1}{2}(-3a^2+12a)=-\frac{3}{2}a(a-4)$

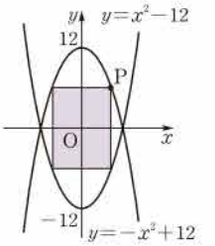
$S'(a)=0$에서 $a=4$ ($\because 0<a<6$)

a	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $S(a)$는 $a=4$에서 극대이면서 최대이므로 $\triangle$OPH의 넓이의 최댓값은

$S(4)=\frac{1}{2}\cdot(-64+96)=16$ ④

0512 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 a라 하면



P$(a, 12-a^2)$ ($0<a<2\sqrt{3}$)

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a\cdot 2(12-a^2)$

$=-4a^3+48a$ ···❶

$\therefore S'(a)=-12a^2+48=-12(a+2)(a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=2$ ($\because 0<a<2\sqrt{3}$) ···❷

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

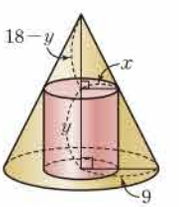
따라서 $S(a)$는 $a=2$에서 극대이면서 최대이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은

$S(2)=-32+96=64$ ···❸

64

채점 기준	비율
❶ 직사각형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $S'(a)=0$인 a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 직사각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0513 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면



$9:18=x:(18-y)$

$18-y=2x$

$\therefore y=18-2x$ ($0<x<9$)

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(18-2x)=2\pi(9x^2-x^3)$

$\therefore V'(x)=2\pi(18x-3x^2)=-6\pi x(x-6)$

$V'(x)=0$에서 $x=6$ ($\because 0<x<9$)

x	0	$\cdots$	6	$\cdots$	9
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $x=6$에서 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은

$V(6)=2\pi\cdot(324-216)=216\pi$ ②

0514 전략 $f'(x)=0$의 근이 -1, b임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+ax-4$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $x\le -1$ 또는 $x\ge b$이므로 이차부등식 $f'(x)\ge 0$의 해가 $x\le -1$ 또는 $x\ge b$이다.
즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -1, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+b=2,\ -b=\frac{a}{3} \qquad \therefore a=-9,\ b=3$$

$$\therefore a+b=-6$$

답 -6

0515 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^3+2ax^2-4x+3$에서

$$f'(x)=-3x^2+4ax-4$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4a^2-12\le 0, \qquad 4(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})\le 0$$

$$\therefore -\sqrt{3}\le a\le \sqrt{3}$$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다.

답 ④

0516 전략 x의 값의 범위를 $x\ge 2a$, $x<2a$로 나누어 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 (i) $x\ge 2a$일 때,

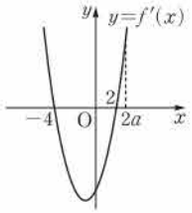
$f(x)=x^3+3x^2-24(x-2a)+11$이므로

$$f'(x)=3x^2+6x-24$$
$$=3(x+4)(x-2)$$

함수 $f(x)$가 $x\ge 2a$에서 증가하려면

$x\ge 2a$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$$2a\ge 2 \qquad \therefore a\ge 1$$



(ii) $x<2a$일 때,

$f(x)=x^3+3x^2+24(x-2a)+11$이므로

$$f'(x)=3x^2+6x+24=3(x+1)^2+21>0$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x<2a$에서 항상 증가한다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 a의 최솟값은 1이다.

답 1

0517 전략 주어진 조건을 만족시키도록 $y=f'(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2+(2a+3)x$에서

$$f'(x)=3x^2+6x+2a+3$$

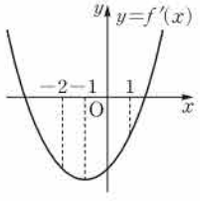
함수 $f(x)$가 $-2\le x\le 1$에서 감소하려면 $-2\le x\le 1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.
오른쪽 그림에서

$f'(-2)=2a+3\le 0$이어야 하므로

$$a\le -\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(1)=2a+12\le 0$이어야 하므로

$$a\le -6 \qquad \cdots\cdots ㉡$$



㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a\le -6$
따라서 a의 최댓값은 -6이다.

답 ①

0518 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 가지면 $f(a)=p$, $f'(a)=0$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$$f'(x)=4x^3+2ax$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -13을 가지므로

$$f(2)=-13,\ f'(2)=0$$
$$16+4a+b=-13,\ 32+4a=0$$
$$\therefore a=-8,\ b=3$$
$$\therefore ab=-24$$

답 -24

0519 전략 함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는 x의 값을 찾는다.

풀이 $f(x)=-x^4+8a^2x^2-1$에서

$$f'(x)=-4x^3+16a^2x=-4x(x+2a)(x-2a)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2a$ ($a>0$이므로 $-2a<0<2a$)

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2a$, $x=2a$에서 극대이고 $b>1$에서 $b>2-2b$이므로 ($b>1$에서 $-2b<-2$이므로 $2-2b<0$ $\therefore b>2-2b$)

$$b=2a,\ 2-2b=-2a$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=2$$
$$\therefore a+b=3$$

답 ①

0520 전략 함수 $f(x)$의 극댓값을 a에 대한 식으로 나타낸 후 극댓값이 4임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$에서

$$f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)=3(x-a+1)(x-a-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=a-1$ 또는 $x=a+1$

x	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	a^3-3a+2	↘	a^3-3a-2	↗

함수 $f(x)$는 $x=a-1$에서 극댓값 a^3-3a+2를 가지므로

$$a^3-3a+2=4, \qquad a^3-3a-2=0$$
$$(a+1)^2(a-2)=0 \qquad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2$$

(i) $a=-1$일 때,

$f(x)=x^3+3x^2$이므로

$$f(-2)=-8+12=4>0$$

(ii) $a=2$일 때,

$f(x)=x^3-6x^2+9x$이므로

$$f(-2)=-8-24-18=-50<0$$

즉 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2$이므로

$$f(-1)=-1+3=2$$

답 ②

0521 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 가지면 $f(a)=p$, $f'(a)=0$임을 이용한다.

풀이 $g(x)=(x^3+2)f(x)$에서

$$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$$

$g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로

$g'(1)=0,\ g(1)=24$

$g(1)=3f(1)=24$이므로 $f(1)=8$

$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$이므로

$24+3f'(1)=0$ $\therefore f'(1)=-8$

$\therefore f(1)-f'(1)=16$ 답 16

0522 전략 먼저 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 극값을 갖는 점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=-x^3+3x+4$에서

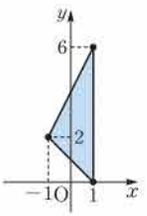
$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	2	↗	6	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 2, $x=1$에서 극댓값 6을 가지므로 세 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 6)$, $(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6$ 답 6



0523 전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식을 세워 함수 $y=f(x)g(x)$의 그래프의 개형을 추측한다.

풀이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 세 점 $(a,\ 0)$, $(c,\ 0)$, $(e,\ 0)$을 지나고 오른쪽 위를 향하므로

$f(x)=k(x-a)(x-c)(x-e)$ $(k>0)$

로 놓을 수 있다.

또 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(c,\ 0)$을 지나고 기울기가 양수이므로

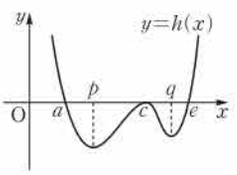
$g(x)=m(x-c)$ $(m>0)$

로 놓을 수 있다.

$h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$h(x)=km(x-a)(x-c)^2(x-e)$

함수 $h(x)$가 $x=p$와 $x=q$에서 극소이고 $km>0$이므로 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



한편 $h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=b$를 대입하면

$h'(b)=f'(b)g(b)+f(b)g'(b)$

$=f(b)\cdot m>0$ $(\because g'(b)=m>0)$ ····· ㉡

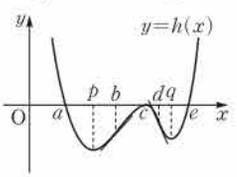
㉠의 양변에 $x=d$를 대입하면

$h'(d)=f'(d)g(d)+f(d)g'(d)$

$=f(d)\cdot m<0$ $(\because g'(d)=m>0)$ ····· ㉢

$a<b<c$, $c<d<e$이면서 ㉡, ㉢을 만족시키는 b, d를 그래프에 나타내어 보면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②



0524 전략 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4+6x^3+ax^2$에서

$f'(x)=4x^3+18x^2+2ax=2x(2x^2+9x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2+9x+a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2+9x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=81-8a>0$ $\therefore a<\frac{81}{8}$

이때 $x=0$이 방정식 $2x^2+9x+a=0$의 근이 아니므로 $a\neq 0$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{81}{8}$

따라서 정수 a의 최댓값은 10이다. 답 10

0525 전략 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타낸 표를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

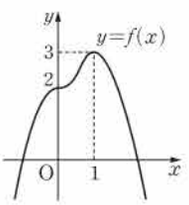
풀이 $f(x)=-3x^4+4x^3+2$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↗	3	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$일 때, $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 구간 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$에서 증가한다.

ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 극값을 갖는 점은 1개이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\leq 3\}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0526 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사한다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 0, 2이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $f'(1)<0$이므로 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄴ. 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(2)$이다.

ㄷ. 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $f(-2)$와 $f(2)$ 중 작은 값을 최솟값으로 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0527 전략 $x^2-4x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수로 변형한다.

풀이 $x^2-4x=t$로 놓으면

$t=x^2-4x=(x-2)^2-4$

이므로 $1\le x\le 4$에서 t의 값의 범위는

$-4\le t\le 0$

$g(t)=t^3-12t+1$로 놓으면

$g'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

$g'(t)=0$에서

$t=-2$ ($\because -4\le t\le 0$)

t	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-15	↗	17	↘	1

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-2$에서 최댓값 17, $t=-4$에서 최솟값 -15를 가지므로 구하는 합은

$17-15=2$ 답 ②

0528 전략 구간 $[1, 4]$에서 $f(x)$의 극값과 $f(1)$, $f(4)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=2$ ($\because 1\le x\le 4$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-4$	↗	$a+16$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $a+16$, $x=2$에서 최솟값 $a-4$를 갖는다.

$\therefore M=a+16,\ m=a-4$

이때 $M+m=20$이므로

$a+16+a-4=20$

$2a=8$ $\therefore a=4$ 답 ④

0529 전략 x개를 판매하여 얻는 이익은 $1000x-f(x)$(원)이다.

풀이 x개를 판매하여 얻는 이익을 $g(x)$원이라 하면

$g(x)=1000x-f(x)$

$=1000x-(x^3-60x^2+1000x+4000)$

$=-x^3+60x^2-4000$

$\therefore g'(x)=-3x^2+120x=-3x(x-40)$

$g'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=40$

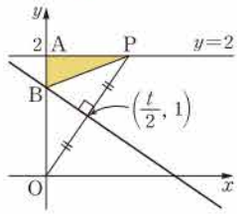
x	0	$\cdots$	40	$\cdots$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	-4000	↗	극대	↘

따라서 $g(x)$는 $x=40$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 제품의 개수는 40이다. 답 40

0530 전략 먼저 선분 OP의 중점의 좌표와 직선 OP의 기울기를 이용하여 선분 OP의 수직이등분선의 방정식을 구한다.

풀이 선분 OP의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+t}{2},\ \frac{0+2}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{t}{2},\ 1\right)$



이고, 직선 OP의 기울기가 $\frac{2}{t}$이므로

선분 OP의 수직이등분선의 기울기는

$-\frac{t}{2}$이다.

따라서 선분 OP의 수직이등분선의 방정식은

$y-1=-\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)$

$\therefore y=-\frac{t}{2}x+\frac{t^2}{4}+1$

이때 점 B의 좌표는 $\left(0,\ \frac{t^2}{4}+1\right)$이므로

$f(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\left(2-\frac{t^2}{4}-1\right)=-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{2}$

$\therefore f'(t)=-\frac{3}{8}t^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}(3t^2-4)$

$f'(t)=0$에서 $3t^2-4=0$

$\therefore t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<t<2$)

t	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	극대	↘	

함수 $f(t)$는 $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

따라서 $a=9$, $b=2$이므로

$a+b=11$ 답 11

0531 전략 함수 $f(x)$의 모든 극값을 a에 대한 식으로 각각 나타낸 후 곱이 22임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=2x^2-6x=2x(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$ ··· ❶

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	a	↘	$a-9$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 a를 갖고, $x=3$에서 극솟값 $a-9$를 가지므로 ··· ❷

$a(a-9)=22$, $a^2-9a-22=0$

$(a+2)(a-11)=0$

$\therefore a=11$ ($\because a$는 양수) ··· ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ 극댓값과 극솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0532 전략 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하고, 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^3+ax^2+6x+1$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+6$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-36>0, \quad (a+6)(a-6)>0$

$\therefore a<-6$ 또는 $a>6$ ····· ㉠ ··· ❶

$g(x)=x^3+ax^2-3ax+2$에서

$g'(x)=3x^2+2ax-3a$

삼차함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $g'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2+9a\le 0, \quad a(a+9)\le 0$

$\therefore -9\le a\le 0$ ····· ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-9\le a<-6$

따라서 정수 a는 -9, -8, -7의 3개이다. ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 극값을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0533 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 보고 함수 $f(x)$가 극대, 극소가 되는 점을 찾는다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(0)=0$에서 $b=0$

$f'(2)=0$에서 $12+4a+b=0$ $\therefore a=-3$

$f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

즉 $f(0)=5$이므로 $c=5$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+5$ ··· ❶

이때 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↗	5

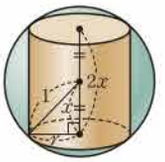
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=2$에서 최솟값 1을 갖는다. ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷ 함수 $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

0534 전략 원기둥의 부피를 함수로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 $2x$라 하면



$r^2=1-x^2$

이때 구의 반지름의 길이가 1이므로

$0<x<1$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi r^2\cdot 2x=\pi(1-x^2)2x$

$=2\pi(-x^3+x)$ ··· ❶

$\therefore V'(x)=2\pi(-3x^2+1)$

$V'(x)=0$에서 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<x<1$) ··· ❷

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은

$V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\pi\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ ··· ❸

답 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

채점 기준	비율
❶ 원기둥의 부피를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $V'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 원기둥의 부피의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

▶ 본책 84~87쪽

06 도함수의 활용 (3)

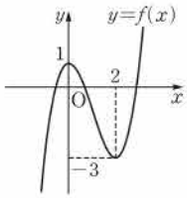
0535 (1) $f(x)=x^3-3x^2+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $3x(x-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2$

(2)

x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	−3	↗



따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(3) (2)에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-3x^2+1=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

답 (1) 0, 2 (2) 풀이 참조 (3) 3

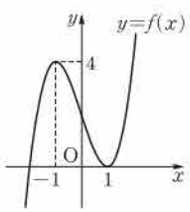
0536 $f(x)=x^3-3x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	…	−1	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 2



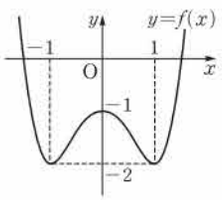
0537 $f(x)=x^4-2x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	…	−1	…	0	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−2	↗	−1	↘	−2	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 2



0538 $2x^3+10x^2+1=x^2-12x$에서

$2x^3+9x^2+12x+1=0$

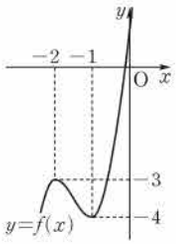
$f(x)=2x^3+9x^2+12x+1$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+18x+12=6(x+2)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$

x	…	−2	…	−1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	−3	↘	−4	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다. 답 1



0539 $f(x)=2x^3-3x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{1}$ ($\because x>0$)

x	0	…	1	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	1	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{1}$이므로

$f(x)\geq 0$, 즉 $2x^3-3x^2+2\geq 0$

$\therefore$ (가) 1 (나) 1

답 (가) 1 (나) 1

0540 $f(x)=x^3-x^2-x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x\geq 0$)

x	0	…	1	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$	2	↘	1	↗

$x\geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이므로

$f(x)>0$, 즉 $x^3-x^2-x+2>0$

따라서 $x\geq 0$일 때, 부등식 $x^3-x^2-x+2>0$이 성립한다.

답 풀이 참조

0541 $f(x)=x^4+4x+3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because \underline{x^2-x+1>0}$)

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

x	…	−1	…
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	0	↗

함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\geq 0$, 즉 $x^4+4x+3\geq 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4+4x+3\geq 0$이 성립한다.

답 풀이 참조

0542 $v=\frac{dx}{dt}=10t-20$, $a=\frac{dv}{dt}=10$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=10-20=-10$, $a=10$

답 $v=-10$, $a=10$

0543 $v=\frac{dx}{dt}=-6t^2+12$, $a=\frac{dv}{dt}=-12t$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=-6+12=6$, $a=-12$

답 $v=6$, $a=-12$

0544 $v=\frac{dx}{dt}=4t^3-8t$, $a=\frac{dv}{dt}=12t^2-8$이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=4-8=-4$, $a=12-8=4$ 답 $v=-4$, $a=4$

0545 (1) 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-6t$, $a=\frac{dv}{dt}=12t-6$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=6\cdot2^2-6\cdot2=12$, $a=12\cdot2-6=18$

(2) 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$6t^2-6t=0$에서 $6t(t-1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t>0$)

따라서 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾼다.

답 (1) 속도: 12, 가속도: 18 (2) 1

0546 (1) $\frac{dl}{dt}=10t-7$

(2) $10\cdot4-7=33$

답 (1) $\frac{dl}{dt}=10t-7$ (2) 33

0547 $\frac{dS}{dt}=(2t+1)+(t+1)\cdot2=4t+3$

따라서 $t=1$에서의 도형의 넓이의 변화율은

$4\cdot1+3=7$ 답 7

0548 $\frac{dV}{dt}=3\left(10+\frac{t}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\left(10+\frac{t}{3}\right)^2$

따라서 $t=3$에서의 도형의 부피의 변화율은

$\left(10+\frac{3}{3}\right)^2=11^2=121$ 답 121

0549 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=\frac{1}{2}x^4-4x^3+8x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^3+8x^2$으로 놓으면

$f'(x)=2x^3-12x^2+16x=2x(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서

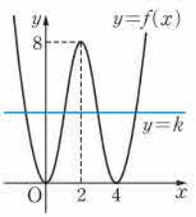
$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	8	↘	0	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$0<k<8$

즉 정수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 7의 7개이다.



답 7

0550 $x^3+3x^2-9x-7-k=0$에서

$x^3+3x^2-9x-7=k$

$-3\le x\le2$에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 $-3\le x\le2$에서 곡선 $y=x^3+3x^2-9x-7$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-7$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

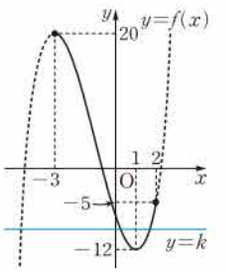
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	20	↘	-12	↗	-5

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 $-3\le x\le2$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 $-3\le x\le2$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-12<k\le-5$

즉 정수 k는 -11, -10, -9, $\cdots$, -5의 7개이다.



답 7

0551 $3x^4+4x^3-12x^2-k=0$에서

$3x^4+4x^3-12x^2=k$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=3x^4+4x^3-12x^2$과 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$으로 놓으면

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

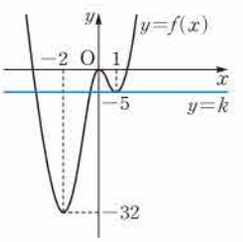
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-32	↗	0	↘	-5	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k=-5$ 또는 $k=0$

즉 모든 k의 값의 합은

$-5+0=-5$ 답 ②



0552 $x^4-\frac{8}{3}x^3+5-k=0$에서

$x^4-\frac{8}{3}x^3+5=k$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=x^4-\frac{8}{3}x^3+5$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3+5$로 놓으면

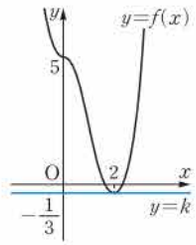
$f'(x)=4x^3-8x^2=4x^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	5	↘	$-\frac{1}{3}$	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나야 하므로

$k=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$



0553 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지려면

$f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)<0$

이어야 한다. 답 ④

0554 $x^3+3x^2-9x-k=0$에서 $x^3+3x^2-9x=k$

$f(x)=x^3+3x^2-9x$로 놓으면

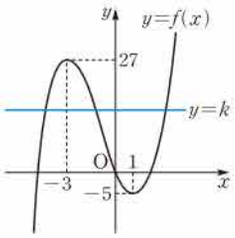
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고 다른 두 개는 음수이어야 하므로

$0<k<27$ 답 $0<k<27$



0555 $x^3-4x^2+6x+k=2x^2-3x$에서

$x^3-6x^2+9x=-k$ ···❶

$f(x)=x^3-6x^2+9x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$ ···❷

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

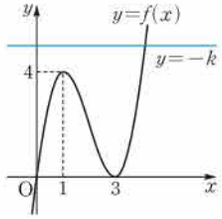
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 한 개의 양근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나고 교점의 x좌표가 양수이어야 하므로

$-k>4$

$\therefore k<-4$ ···❸

즉 정수 k의 최댓값은 -5이다. ···❹

답 -5



채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	10 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❹ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0556 $x^3-3x^2+4x-1=3x^2-5x+k$에서

$x^3-6x^2+9x-1=k$

$f(x)=x^3-6x^2+9x-1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

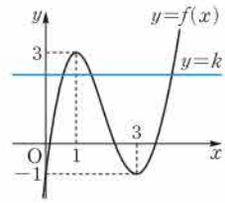
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 개의 양근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 서로 다른 세 개의 양수이어야 하므로

$-1<k<3$

즉 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤



0557 $x^4-8x^2+48=k-4x^3$에서

$x^4+4x^3-8x^2+48=k$

$f(x)=x^4+4x^3-8x^2+48$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+12x^2-16x=4x(x+4)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

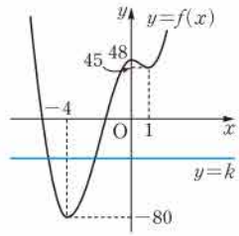
x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-80	↗	48	↘	45	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 음근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나고 교점의 x좌표가 모두 음수이어야 하므로

$-80<k<45$

즉 정수 k는 -79, -78, -77, $\cdots$, 44의 124개이다.

답 124



0558 $2x^3-6x^2+10-k=0$에서

$2x^3-6x^2+10=k$

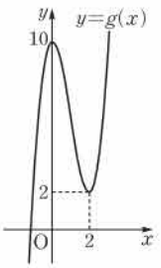
$g(x)=2x^3-6x^2+10$으로 놓으면

$g'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	10	↘	2	↗

따라서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $k=1$일 때,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$는 x좌표가 양수인 점에서 만나지 않으므로

$f(1)=0$

(ii) $k=2$일 때,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 x좌표가 양수인 교점이 1개이므로

$f(2)=1$

(iii) $3\le k\le 8$일 때,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 x좌표가 양수인 교점이 2개이므로

$f(3)=f(4)=\cdots=f(8)=2$

이상에서

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)=0+1+2\cdot 6$

$=13$ 답 13

0559 $f(x)=x^3-12x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-2)f(2)<0$이어야 하므로

$(k+16)(k-16)<0$ $\therefore -16<k<16$

따라서 정수 k는 -15, -14, -13, $\cdots$, 15의 31개이다. 답 31

다른 풀이 $x^3-12x+k=0$에서

$x^3-12x=-k$

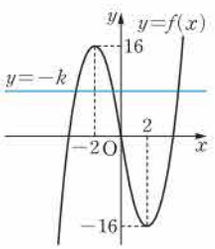
$f(x)=x^3-12x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	16	↘	-16	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$-16<-k<16$

$\therefore -16<k<16$

즉 정수 k는 -15, -14, -13, $\cdots$, 15의 31개이다.

0560 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+k$로 놓으면

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 개의 실근과 중근을 가지려면

$f(-1)f(3)=0$이어야 하므로

$\left(k+\frac{5}{3}\right)(k-9)=0$ $\therefore k=-\frac{5}{3}$ 또는 $k=9$

따라서 정수 k의 값은 9이다. 답 9

0561 $f(x)=x^3-3x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면

$f(0)f(2)>0$이어야 하므로

$k(k-4)>0$ $\therefore k<0$ 또는 $k>4$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=4$이므로 $\beta-\alpha=4$ 답 ④

라쎈 특강

삼차방정식이 오직 하나의 실근을 갖는 경우

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 갖는 경우, 즉 한 실근과 두 허근을 갖는 경우의 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



[극값을 갖는 경우] [극값을 갖지 않는 경우]

0562 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$\frac{1}{3}x^3+2x^2=-3x+k$, 즉 $\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x-k=0$

이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x-k$로 놓으면

$f'(x)=x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)f(-1)<0$이어야 하므로

$-k\left(-k-\frac{4}{3}\right)<0$, $k\left(k+\frac{4}{3}\right)<0$

$\therefore -\frac{4}{3}<k<0$ 답 $-\frac{4}{3}<k<0$

다른 풀이 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$\frac{1}{3}x^3+2x^2=-3x+k$, 즉 $\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x=k$ … ㉠

가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

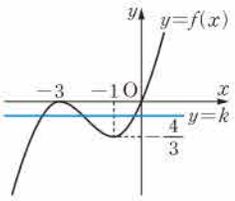
$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x$로 놓으면

$f'(x)=x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4}{3}$	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$$-\frac{4}{3}<k<0$$

0563 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$x^3-4x^2=2x^2-k$, 즉 $x^3-6x^2+k=0$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(0)f(4)=0$이어야 하므로

$k(k-32)=0$ $\therefore k=0$ 또는 $k=32$

따라서 자연수 k의 값은 32이다. 32

0564 주어진 곡선과 직선이 한 점에서 만나려면 방정식

$x^3+\frac{3}{2}x^2=6x-k$, 즉 $x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+k=0$

이 오직 한 개의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면

$f(-2)f(1)>0$이어야 하므로

$(k+10)\left(k-\frac{7}{2}\right)>0$

$\therefore k<-10$ 또는 $k>\frac{7}{2}$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ③이다. 3

0565 주어진 두 곡선이 한 점에서는 만나고 다른 한 점에서는 접하려면 방정식

$x^3+x^2-4x-12=-2x^2+5x+k$,

즉 $x^3+3x^2-9x-12-k=0$

이 한 실근과 중근을 가져야 한다. ⋯ ❶

$f(x)=x^3+3x^2-9x-12-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$ ⋯ ❷

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$f(-3)f(1)=0$이어야 하므로

$(-k+15)(-k-17)=0$

$\therefore k=-17$ 또는 $k=15$ ⋯ ❸

따라서 모든 k의 값의 합은

$-17+15=-2$ ⋯ ❹

-2

채점 기준	비율
❶ 방정식이 한 실근과 중근을 가짐을 알 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❹ k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0566 $f(x)=x^4+4a^3x+12$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4a^3=4(x+a)(x^2-ax+a^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ ($\because x^2-ax+a^2>0$)

$x^2-ax+a^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2>0$ ($\because a\neq0$)

x	⋯	$-a$	⋯
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은

$f(-a)=a^4-4a^4+12=-3a^4+12$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(-a)>0$이어야 하므로

$-3a^4+12>0$, $a^4-4<0$

$(a^2+2)(a^2-2)<0$, $a^2-2<0$ ($\because a^2+2>0$)

$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})<0$

$\therefore -\sqrt{2}<a<0$ 또는 $0<a<\sqrt{2}$ ($\because a\neq0$)

즉 정수 a는 -1, 1의 2개이다. ②

0567 $x^4-2x^2\geq k$에서

$x^4-2x^2-k\geq0$

$f(x)=x^4-2x^2-k$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	⋯	-1	⋯	0	⋯	1	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	$-1-k$	↗	$-k$	↘	$-1-k$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최솟값 $-1-k$를 갖는다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq0$이려면 $f(-1)=f(1)\geq0$이어야 하므로

$-1-k\geq0$ $\therefore k\leq-1$ $k\leq-1$

0568 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉

$f(x)-g(x)>0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^4-x^2-9x-(5x^2-x-k)=x^4-6x^2-8x+k$

$\therefore h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	⋯	-1	⋯	2	⋯
$h'(x)$	−	0	−	0	+
$h(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 $h(x)$의 최솟값은

$h(2)=16-24-16+k=k-24$

모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이려면 $h(2)>0$이어야 하므로

$k-24>0 \quad \therefore k>24$

$\therefore a=24$ ⑤

0569 $f(x)=x^3-3x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$0<x<2$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 2)$에서 감소한다.

따라서 $0<x<2$에서 $f(x)>0$이려면 $f(2)\geq 0$이어야 하므로

$8-12+k\geq 0, \quad -4+k\geq 0$

$\therefore k\geq 4$

즉 k의 최솟값은 4이다. 4

0570 $x^3>6x^2-k$에서

$x^3-6x^2+k>0$

$f(x)=x^3-6x^2+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$x>4$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(4, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>4$에서 $f(x)>0$이려면 $f(4)\geq 0$이어야 하므로

$64-96+k\geq 0, \quad -32+k\geq 0$

$\therefore k\geq 32$ ⑤

0571 $2<x<4$일 때 함수 $y=x^3+2x^2$의 그래프가 직선 $y=4x-k$보다 항상 아래에 있으려면 부등식

$x^3+2x^2<4x-k$, 즉 $x^3+2x^2-4x+k<0$

이 성립해야 한다. ❶

$f(x)=x^3+2x^2-4x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+4x-4$

$=(x+2)(3x-2)$

$2<x<4$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(2, 4)$에서 증가한다. ❷

따라서 $2<x<4$일 때 $f(x)<0$이려면 $f(4)\leq 0$이어야 하므로

$64+32-16+k\leq 0, \quad 80+k\leq 0$

$\therefore k\leq -80$ ❸

즉 k의 최댓값은 -80이다. ❹

-80

채점 기준	비율
❶ 부등식을 세울 수 있다.	20 %
❷ 함수 $f(x)$가 구간 $(2, 4)$에서 증가함을 알 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ k의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0572 $2x^3+3x^2-12x\geq k$에서

$2x^3+3x^2-12x-k\geq 0$

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1 \ (\because x>0)$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은

$f(1)=2+3-12-k=-7-k$

따라서 $x>0$일 때 $f(x)\geq 0$이려면 $f(1)\geq 0$이어야 하므로

$-7-k\geq 0 \quad \therefore k\leq -7$ $k\leq -7$

0573 $f(x)=2x^3+3x^2-36x+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2+6x-36=6(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3 \ (\because x<1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	극대	↘	

$x<1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이면서 최대이므로 $f(x)$의 최댓값은

$f(-3)=-54+27+108+k=81+k$

따라서 $x<1$일 때 $f(x)\leq 0$이려면 $f(-3)\leq 0$이어야 하므로

$81+k\leq 0 \quad \therefore k\leq -81$

즉 k의 값이 될 수 있는 것은 ①이다. ①

0574 $f(x)<g(x)$에서

$x^4+x^3+x^2<x^3-x^2+k$

$\therefore x^4+2x^2-k<0$

$h(x)=x^4+2x^2-k$로 놓으면

$h'(x)=4x^3+4x=4x(x^2+1)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=0 \ (\because x^2+1>0)$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$3-k$	↘	$-k$	↗	$24-k$

$-1\leq x\leq 2$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $24-k$를 갖는다.

따라서 $-1\leq x\leq 2$일 때 $h(x)<0$이려면 $h(2)<0$이어야 하므로

$24-k<0 \quad \therefore k>24$

즉 정수 k의 최솟값은 25이다. 25

0575 점 P가 원점을 지나는 순간은 $x=0$일 때이므로

$t^3-2t^2+t=0$에서

$t(t-1)^2=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=1$

즉 점 P가 출발한 후 다시 원점을 지나는 순간은 $t=1$일 때이다.

따라서 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t+1, \ a=\frac{dv}{dt}=6t-4$

이므로 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$6-4=2$ ①

0576 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-12t-8$

$6t^2-12t-8=10$에서

$6t^2-12t-18=0$, $6(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t\geq 0$)

따라서 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$2\cdot 3^3-6\cdot 3^2-8\cdot 3=-24$ ①

0577 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=2t^2+2pt+q$, $a=\frac{dv}{dt}=4t+2p$ ···❶

이때 $t=2$에서의 점 P의 속도가 9이므로

$2\cdot 2^2+2p\cdot 2+q=9$ $\therefore 4p+q=1$ ····· ㉠

또 $t=2$에서의 점 P의 가속도가 6이므로

$4\cdot 2+2p=6$, $2p=-2$ $\therefore p=-1$

$p=-1$을 ㉠에 대입하면

$-4+q=1$ $\therefore q=5$ ···❷

$\therefore p+q=4$ ···❸

4

채점 기준	비율
❶ 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 구할 수 있다.	40 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0578 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=3t^2+8t-6$, $v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=5t+12$

$v_P=v_Q$에서

$3t^2+8t-6=5t+12$, $3t^2+3t-18=0$

$3(t+3)(t-2)=0$ $\therefore t=2$ ($\because t\geq 0$)

$t=2$에서의 점 P의 위치는

$2^3+4\cdot 2^2-6\cdot 2=12$

$t=2$에서의 점 Q의 위치는

$\frac{5}{2}\cdot 2^2+12\cdot 2=34$

따라서 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$34-12=22$ 22

0579 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=x'(t)=-3t^2+6t+7=-3(t-1)^2+10$

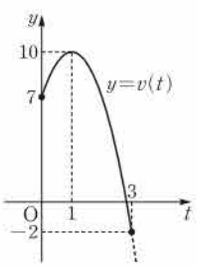
따라서 $0\leq t\leq 3$에서 $y=v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0\leq t\leq 3$에서 $-2\leq v(t)\leq 10$이므로

$0\leq |v(t)|\leq 10$

즉 점 P의 속력의 최댓값은 10이고 그때의 시각은 $t=1$이므로

$M=10$, $a=1$

$\therefore M-a=9$ ③



0580 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-15t+12=3(t-1)(t-4)$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=4$

따라서 $t=1$, $t=4$의 좌우에서 v의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=1$일 때 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고, $t=4$일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

즉 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$4^3-\frac{15}{2}\cdot 4^2+12\cdot 4=-8$ ①

0581 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t=t(3t-4)$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=0$ 또는 $t=\frac{4}{3}$

즉 점 P가 출발한 후 운동 방향을 바꾸는 순간은 $t=\frac{4}{3}$일 때이다.

따라서 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=6t-4$

이므로 $t=\frac{4}{3}$에서의 점 P의 가속도는

$6\cdot\frac{4}{3}-4=4$ 4

0582 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-4$, $v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=2t-8$ ···❶

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$(2t-4)(2t-8)<0$, $4(t-2)(t-4)<0$

$\therefore 2<t<4$ ···❷

따라서 $a=2$, $b=4$이므로

$b-a=2$ ···❸

2

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	40 %
❷ t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0583 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=1$ 또는 $t=5$

$t=1$에서의 점 P의 위치는

$1^3-9\cdot 1^2+15\cdot 1=7$

$t=5$에서의 점 P의 위치는

$5^3-9\cdot 5^2+15\cdot 5=-25$

$\therefore |p-q|=|7-(-25)|=32$ 32

0584 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+a+2$

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $t>0$에서 $v\geq0$이어야 한다.
이때
$v=3t^2-12t+a+2=3(t-2)^2+a-10$
이므로 $t>0$일 때, v는 $t=2$에서 최솟값 $a-10$을 갖는다.
따라서 $t>0$에서 $v\geq0$이려면
$a-10\geq0$ $\therefore a\geq10$
즉 a의 최솟값은 10이다. 답 ③

참고 점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $t>0$에서 $v\geq0$이거나 $v\leq0$이어야 한다.
그런데 곡선 $v=3t^2-12t+a+2$는 아래로 볼록한 모양이므로 $t>0$에서 $v\geq0$이어야 한다.

0585 제동을 건 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=7.2-0.72t$
자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$7.2-0.72t=0$ $\therefore t=10$
따라서 자동차가 10초 동안 움직인 거리는
$7.2\times10-0.36\times10^2=36\,(\mathrm{m})$ 답 36 m

0586 제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=48-2at$
이때 열차가 제동을 건 지 30초 후에 정지하므로 $t=30$일 때의 속도는 0이다.
즉 $48-60a=0$에서
$a=0.8$ 답 ②

0587 t초 후의 로켓의 속도를 v m/s라 하면
$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$
로켓이 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$20-10t=0$ $\therefore t=2$
따라서 2초 후의 로켓의 지면으로부터의 높이는
$30+20\cdot2-5\cdot2^2=50\,(\mathrm{m})$ 답 ④

0588 공이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $24.5t-4.9t^2=0$에서
$4.9t(5-t)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=5$
따라서 공이 지면에 떨어지는 순간은 $t=5$일 때이다. ···❶
t초 후의 공의 속도를 v m/s라 하면
$v=\frac{dh}{dt}=24.5-9.8t$
이므로 $t=5$에서의 공의 속도는
$24.5-9.8\times5=-24.5\,(\mathrm{m/s})$ ···❷
답 -24.5 m/s

채점 기준	비율
❶ 공이 지면에 떨어지는 순간의 시각을 구할 수 있다.	40 %
❷ 공이 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구할 수 있다.	60 %

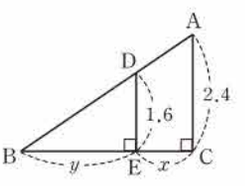
0589 t초 후의 물체의 속도를 v m/s, 가속도를 a m/s^{2}이라 하면
$v=\frac{dh}{dt}=30-10t$, $a=\frac{dv}{dt}=-10$
ㄱ. 가속도 a는 상수이므로 물체의 가속도는 일정하다.
ㄴ. $t=1$에서의 물체의 속도는
$30-10\cdot1=20\,(\mathrm{m/s})$
ㄷ. 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서
$30-10t=0$ $\therefore t=3$
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0590 ㄱ. $v(a)>0$, $v(c)<0$이므로 $t=a$일 때와 $t=c$일 때 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.
ㄴ. $v(b)=0$이고 $t=b$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=b$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾼다.
ㄷ. $v'(t)=0$이면 가속도가 0이고, $v'(a)=0$, $v'(c)=0$이므로 가속도가 0이 되는 순간은 두 번이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0591 주어진 그래프에서 점 P가 원점을 지나는 시각은 $t=3$ 또는 $t=5$이고, 이 중 처음으로 원점을 지나는 순간은 $t=3$이므로 구하는 속도는 $x'(3)$의 값과 같다. 답 ④

0592 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면
① $v(a)=x'(a)>0$이므로 $t=a$일 때 점 P는 양의 방향으로 움직인다.
② $v(b)=x'(b)=0$이므로 $t=b$일 때 점 P의 속도는 0이다.
③ $b<t<d$에서 $v(t)=x'(t)<0$이므로 $t=c$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.
④ $0<t<f$에서 $t=c$, $t=e$일 때 $x(t)=0$이므로 점 P는 원점을 두 번 지난다.
⑤ $0<t<f$에서 $t=d$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.
답 ③

0593 t초 동안 재현이가 움직인 거리를 x m, 시각 t에서의 재현이의 그림자의 길이를 y m라 하면 오른쪽 그림에서



△ABC∽△DBE (AA 닮음)
이므로
$2.4:1.6=(x+y):y$, $2.4y=1.6(x+y)$
$0.8y=1.6x$ $\therefore y=2x$
이때 $x=2t$이므로 $y=4t$
$\therefore \frac{dy}{dt}=4$
따라서 그림자의 길이의 변화율은 4 m/s이다. 답 ④

0594 t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(5+3t)$ cm이므로 정사각형의 한 대각선의 길이를 l cm라 하면

$l=(5+3t)\sqrt{2}=3\sqrt{2}t+5\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{dl}{dt}=3\sqrt{2}$

따라서 정사각형의 한 대각선의 길이의 변화율은 $3\sqrt{2}$ cm/s이다.

답 $3\sqrt{2}$ cm/s

0595 돌을 던진 지 t초 후의 가장 바깥쪽 파문의 반지름의 길이는 $15t$ cm이므로 가장 바깥쪽 파문의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\pi(15t)^2=225\pi t^2$ $\therefore \dfrac{dS}{dt}=450\pi t$

따라서 2초 후의 가장 바깥쪽 파문의 넓이의 변화율은

$450\pi\cdot 2=900\pi$ (cm^2/s)

답 900π cm^2/s

0596 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(6+2t)$ cm이므로 정삼각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(6+2t)^2$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\cdot(6+2t)\cdot 2=\sqrt{3}(6+2t)$

정삼각형의 넓이가 $36\sqrt{3}$ cm^{2}일 때

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(6+2t)^2=36\sqrt{3}$, $t^2+6t-27=0$

$(t+9)(t-3)=0$ $\therefore t=3$ ($\because t>0$)

따라서 3초 후의 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\sqrt{3}\cdot(6+2\cdot 3)=12\sqrt{3}$ (cm^2/s)

답 ②

0597 점 P가 출발한 지 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는

P$(2t, 0)$, Q$(0, 3(t-1))$ $(t\geq 1)$

t초 후의 $\triangle$OPQ의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2t\cdot 3(t-1)=3t^2-3t$

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=6t-3$

따라서 점 P가 출발한 지 4초 후의 $\triangle$OPQ의 넓이의 변화율은

$6\cdot 4-3=21$

답 ④

0598 시각 t에서의 구의 부피를 V라 하면

$V=\dfrac{4}{3}\pi(0.5t)^3=\dfrac{1}{6}\pi t^3$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{1}{2}\pi t^2$

따라서 $t=10$에서의 구의 부피의 변화율은

$\dfrac{1}{2}\pi\times 10^2=50\pi$

답 ③

0599 t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(4+t)$ cm이므로 정육면체의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=(4+t)^3$ ⋯ ❶

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=3(4+t)^2$ ⋯ ❷

따라서 2초 후의 정육면체의 부피의 변화율은

$3\cdot(4+2)^2=108$ (cm^3/s) ⋯ ❸

답 108 cm^3/s

채점 기준	비율
❶ 정육면체의 부피 V를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\dfrac{dV}{dt}$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 2초 후의 정육면체의 부피의 변화율을 구할 수 있다.	30 %

0600 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$r=5+t$, $h=10-t$

t초 후의 원기둥의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=\pi r^2h=\pi(5+t)^2(10-t)$

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=2\pi(5+t)(10-t)+\pi(5+t)^2\cdot(-1)$

$=3\pi(5+t)(5-t)$

$\dfrac{dV}{dt}=0$에서 $t=5$ ($\because 0<t\leq 10$) ← $10-t>0$이므로 $t<10$

따라서 원기둥의 부피의 변화율이 0이 되는 것은 5초 후이다.

답 ⑤

0601 전략 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $3x^4-2x^2+1=x^4+2x^2$에서

$2x^4-4x^2+1=0$

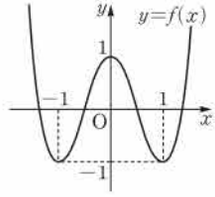
$f(x)=2x^4-4x^2+1$로 놓으면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	⋯	-1	⋯	0	⋯	1	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.



답 4

0602 전략 주어진 조건을 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f(x)-k=0$에서 $f(x)=k$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 1이므로

$f'(x)=0$에서

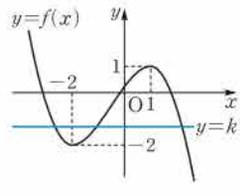
$x=-2$ 또는 $x=1$

x	⋯	-2	⋯	1	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	-2	↗	1	↘

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-2<k<1$

즉 정수 k는 -1, 0의 2개이다.



답 2

0603 전략 주어진 방정식을 $f(x)=-k$ 꼴로 변형하고 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $3x^4+8x^3-18x^2+k=0$에서

$3x^4+8x^3-18x^2=-k$

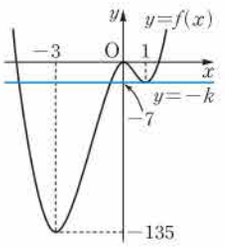
$f(x)=3x^4+8x^3-18x^2$으로 놓으면

$f'(x)=12x^3+24x^2-36x=12x(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-135	↗	0	↘	-7	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$-k=-7$ ($\because$ k는 자연수)

$\therefore k=7$ 답 ⑤

0604 전략 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형하고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표의 부호를 알아본다.

풀이 $x^3-9x^2+24x-k=0$에서

$x^3-9x^2+24x=k$

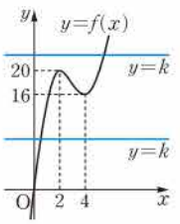
$f(x)=x^3-9x^2+24x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	16	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 한 개의 양근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나고 교점의 x좌표가 양수이어야 하므로

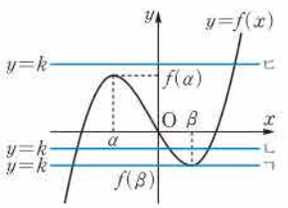


$0<k<16$ 또는 $k>20$

즉 $\alpha=16$, $\beta=20$이므로 $\beta-\alpha=4$ 답 ②

0605 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이고 $f(0)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $k=f(\beta)$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(\beta)<k<0$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 3개이고 교점의 x좌표 중에서 양수가 2개, 음수가 1개이므로 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 갖는다.

ㄷ. $k>f(\alpha)$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 1개이고 교점의 x좌표가 양수이므로 방정식 $f(x)=k$는 오직 하나의 양근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0606 전략 주어진 곡선과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 방정식이 한 실근과 중근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 주어진 곡선과 직선이 한 점에서는 만나고 다른 한 점에서는 접하려면 방정식

$x^3-2x+7=x+k$, 즉 $x^3-3x+7-k=0$

이 한 실근과 중근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x+7-k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$f(-1)f(1)=0$이어야 하므로

$(9-k)(5-k)=0$ $\therefore k=5$ 또는 $k=9$

따라서 모든 k의 값의 합은

$5+9=14$ 답 14

다른 풀이 곡선 $y=x^3-2x+7$과 직선 $y=x+k$가 한 점에서는 만나고 다른 한 점에서는 접하려면 직선 $y=x+k$가 곡선 $y=x^3-2x+7$의 접선이어야 한다.

$f(x)=x^3-2x+7$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t+7)이라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=3t^2-2=1$, $t^2=1$ $\therefore t=\pm1$

즉 접점의 좌표가 $(-1, 8)$, $(1, 6)$이므로 접선의 방정식은

$y-8=x+1$, $y-6=x-1$

$\therefore y=x+9$, $y=x+5$

따라서 $k=9$ 또는 $k=5$이므로 모든 k의 값의 합은

$9+5=14$

0607 전략 점 $(1, a)$에서 곡선에 그은 접선이 3개 존재하도록 하는 정수 a의 조건을 구한다.

풀이 $y=3x^3+1$에서 $y'=9x^2$

점 $(1, a)$에서 곡선 $y=3x^3+1$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, 3t^3+1)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-(3t^3+1)=9t^2(x-t)$

이 직선이 점 $(1, a)$를 지나므로

$a-(3t^3+1)=9t^2(1-t)$

$\therefore 6t^3-9t^2+a-1=0$ …… ㉠

점 $(1, a)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(t)=6t^3-9t^2+a-1$로 놓으면

$f'(t)=18t^2-18t=18t(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(0)f(1)<0$이어야 하므로

$(a-1)(a-4)<0$ $\therefore 1<a<4$

따라서 정수 a의 값은 2, 3이다. 답 2, 3

0608 전략 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 (함수 $f(x)$의 최솟값)>0임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4-4x^3+k$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은

$f(3)=k-27$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $f(3)>0$이어야 하므로

$k-27>0$ $\therefore k>27$

즉 정수 k의 최솟값은 28이다. 답 ④

0609 전략 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\le 0$이 성립하려면 (함수 $h(x)$의 최댓값)≤ 0이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)\le 12x+k$에서

$-x^4-2x^3-x^2\le 12x+k$

$\therefore -x^4-2x^3-x^2-12x-k\le 0$

$h(x)=-x^4-2x^3-x^2-12x-k$로 놓으면

$h'(x)=-4x^3-6x^2-2x-12$

$=-2(2x^3+3x^2+x+6)$

$=-2(x+2)(2x^2-x+3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because 2x^2-x+3>0$) ($2x^2-x+3=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}>0$)

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 극대이면서 최대이므로 $h(x)$의 최댓값은

$h(-2)=-16+16-4+24-k=-k+20$

모든 실수 x에 대하여 $h(x)\le 0$이려면 $h(-2)\le 0$이어야 하므로

$-k+20\le 0$ $\therefore k\ge 20$ …… ㉠

$12x+k\le g(x)$에서 $12x+k\le 3x^2+a$

$\therefore 3x^2-12x+a-k\ge 0$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^2-12x+a-k\ge 0$이 성립하려면 이차방정식 $3x^2-12x+a-k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=36-3(a-k)\le 0$

$36-3a+3k\le 0$

$\therefore k\le a-12$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $20\le k\le a-12$

이를 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이고 a는 자연수이므로 (20, 21, 22의 3개)

$a-12=22$ $\therefore a=34$ 답 34

참고 ㉠, ㉡에서 $a-12<20$이면 주어진 부등식을 만족시키는 k의 값이 존재하지 않는다.

0610 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위에 있으면 $f(x)>g(x)$이다.

풀이 $x>3$일 때, 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$이 직선 $y=-2x+k$보다 항상 위에 있으려면

$\frac{1}{3}x^3-x^2>-2x+k$, 즉 $\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-k>0$

이어야 한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-k$로 놓으면

$f'(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\ge 1$

$x>3$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(3, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>3$에서 $f(x)>0$이려면 $f(3)\ge 0$이어야 하므로

$6-k\ge 0$ $\therefore k\le 6$

즉 k의 최댓값은 6이다. 답 ③

0611 전략 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓고 주어진 조건을 이용하여 삼차함수 $f(x)$의 식을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때 $f(0)=c$, $f'(0)=b$이므로 조건 (나)에서 $c=b$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+b$ …… ㉢

조건 (다)에서 $x\ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f'(x)$이므로

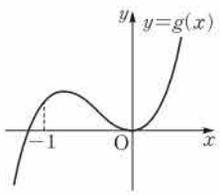
$f(x)-f'(x)\ge 0$ …… ㉣

$g(x)=f(x)-f'(x)$로 놓으면

$g(x)=x^3+ax^2+bx+b-(3x^2+2ax+b)$

$=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$

$g(0)=0$이므로 ㉣을 만족시키려면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 x축에 접하고, $x\ge -1$인 부분에서 $g(x)\ge 0$이어야 한다.



즉 $g'(0)=0$, $g(-1)\ge 0$이어야 한다.

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$이므로 $g'(0)=0$에서

$b-2a=0$ $\therefore b=2a$ …… ㉤

$\therefore g(x)=x^3+(a-3)x^2$

또 $g(-1)\ge 0$에서 $-1+a-3\ge 0$ $\therefore a\ge 4$

㉢, ㉤에서 $f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$이므로

$f(2)=10a+8$

이때 $a\ge 4$이므로

$f(2)=10a+8\ge 10\cdot 4+8=48$

따라서 $f(2)$의 최솟값은 48이다. 답 ⑤

0612 전략 어떤 구간에서 부등식 $h(x)\ge 0$이 성립하려면 그 구간에서 (함수 $h(x)$의 최솟값)≥ 0이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)\ge 3g(x)$에서

$x^3+3x^2-k\ge 3(2x^2+3x-10)$

$\therefore x^3-3x^2-9x+30-k\ge 0$

$h(x)=x^3-3x^2-9x+30-k$로 놓으면

$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-k+35$	$\searrow$	$-k+3$	$\nearrow$	$-k+10$

구간 $[-1, 4]$에서 함수 $h(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 $-k+3$을 갖는다.

따라서 구간 $[-1, 4]$에서 $h(x)\geq 0$이려면 $h(3)\geq 0$이어야 하므로

$-k+3\geq 0$ $\therefore k\leq 3$

즉 k의 최댓값은 3이다. 답 3

0613 전략 점 P의 시각 t에서의 위치가 x일 때, 점 P의 속도 v는 $v=\frac{dx}{dt}$, 가속도 a는 $a=\frac{dv}{dt}$임을 이용한다.

풀이 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=30+50t-15t^2$, $a=\frac{dv}{dt}=50-30t$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$50-30\cdot 4=-70$ 답 -70

0614 전략 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도 v_P, v_Q를 구한 후 $t>0$에서 $v_P=v_Q$를 만족시키는 t의 값이 3개일 조건을 생각한다.

풀이 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=4t^3-24t^2+36t-6$, $v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=a$

$v_P=v_Q$에서

$4t^3-24t^2+36t-6=a$ …… ㉠

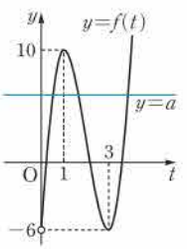
$f(t)=4t^3-24t^2+36t-6$ $(t>0)$으로 놓으면

$f'(t)=12t^2-48t+36=12(t-1)(t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$		$\nearrow$	10	$\searrow$	-6	$\nearrow$

따라서 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $t>0$에서 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$-6<a<10$

따라서 정수 a는

$-5, -4, -3, \cdots, 9$

의 15개이다. 답 15

0615 전략 두 점 $P(x_1)$, $Q(x_2)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는 $\frac{x_1+x_2}{2}$이다.

풀이 선분 PQ의 중점 M의 t분 후의 위치를 x_3이라 하면

$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2t^3-9t^2+t^2+8t}{2}=t^3-4t^2+4t$

세 점 P, Q, M의 속도를 각각 v_P, v_Q, v_M이라 하면

$v_P=\frac{dx_1}{dt}=6t^2-18t=6t(t-3)$

$v_Q=\frac{dx_2}{dt}=2t+8=2(t+4)$

$v_M=\frac{dx_3}{dt}=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$

$0<t\leq 4$에서 v_P, v_Q, v_M의 값이 0이 되는 t의 개수를 각각 구하면 다음과 같다.

(i) $v_P=0$에서 $t=3$ $\therefore a=1$

(ii) $v_Q=0$을 만족시키는 t는 존재하지 않으므로 $b=0$

(iii) $v_M=0$에서 $t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$ $\therefore c=2$

이상에서 $a+b+c=3$ 답 ③

0616 전략 시각 t에서의 속도가 v일 때 가속도는 $\frac{dv}{dt}$이다.

풀이 ① 점 P의 가속도는 $v'(t)$이고, $v'(a)<0$이므로 $t=a$일 때 가속도는 음수이다.

② $b<t<c$일 때 $|v(t)|$의 값이 작아지므로 속력은 감소한다.

③ $b<t<d$일 때 $v(t)$가 일차함수이므로

$v'(t)=k$ (k는 상수)

따라서 가속도는 일정하다.

④ $v(e)>0$이므로 $t=e$일 때 점 P는 양의 방향으로 움직이고 있다.

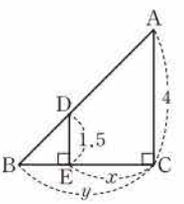
⑤ $v(c)=0$이고, $t=c$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

따라서 $0<t<e$에서 점 P는 운동 방향을 1번 바꾼다.

답 ④

0617 전략 가로등 바로 밑에서 준수의 그림자의 앞 끝까지의 거리를 시각 t에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 t초 후에 가로등 바로 밑에서부터 준수는 x m, 준수의 그림자의 앞 끝은 y m 떨어져 있다고 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC\backsim\triangle DBE$ (AA 닮음)

이므로

$4:1.5=y:(y-x)$

$4(y-x)=1.5y$, $2.5y=4x$

$\therefore y=\frac{8}{5}x$

이때 $x=2.5t$이므로 $y=4t$ $\therefore \frac{dy}{dt}=4$

따라서 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도는 4 m/s이다.

답 4 m/s

0618 전략 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\leq a$가 성립하려면 그 구간에서 (함수 $f(x)$의 최댓값) $\leq a$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ …➊

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	k	$\nearrow$	$k+5$	$\searrow$	$k+4$	$\nearrow$	$k+9$

$0\leq x\leq 3$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $k+9$를 갖는다.

…➋

따라서 $0\le x\le 3$일 때 $f(x)\le 0$이려면 $f(3)\le 0$이어야 하므로

$k+9\le 0 \quad \therefore k\le -9$ ···❸

답 $k\le -9$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $0\le x\le 3$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0619 전략 속도가 0 m/s일 때 물체의 높이가 80 m임을 이용한다.

풀이 t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=a-10t$

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$a-10t=0 \quad \therefore t=\dfrac{a}{10}$ ···❶

즉 $t=\dfrac{a}{10}$일 때 물체의 높이가 80 m이므로

$a\cdot\dfrac{a}{10}-5\left(\dfrac{a}{10}\right)^2=80, \quad \dfrac{1}{20}a^2=80$

$a^2=1600 \quad \therefore a=40\ (\because a>0)$ ···❷

$h=40t-5t^2$이므로 지면에 떨어질 때의 시각은 $h=0$에서

$40t-5t^2=0, \quad -5t(t-8)=0$

$\therefore t=8\ (\because t>0)$

따라서 지면에 떨어지는 순간의 속도는

$40-10\cdot 8=-40\,(\text{m/s})$ ···❸

답 -40 m/s

채점 기준	비율
❶ 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 시각을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구할 수 있다.	40 %

0620 전략 시각 t에서의 넓이를 S라 할 때, 넓이의 변화율은 $\dfrac{dS}{dt}$임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 원의 반지름의 길이가 $4t$이므로 원의 넓이를 S라 하면

$S=\pi(4t)^2=16\pi t^2$ ···❶

$\therefore \dfrac{dS}{dt}=32\pi t$ ···❷

원의 넓이가 48π일 때

$16\pi t^2=48\pi, \quad t^2=3$

$\therefore t=\sqrt{3}\ (\because t>0)$ ···❸

따라서 $t=\sqrt{3}$에서의 원의 넓이의 변화율은

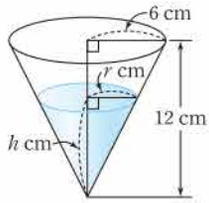
$32\pi\cdot\sqrt{3}=32\sqrt{3}\pi$ ···❹

답 $32\sqrt{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ 원의 넓이 S를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\dfrac{dS}{dt}$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 넓이가 48π인 순간의 t의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 원의 넓이의 변화율을 구할 수 있다.	20 %

0621 전략 시각 t에서의 부피를 V라 할 때, 부피의 변화율은 $\dfrac{dV}{dt}$임을 이용한다.

풀이 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 수면의 높이를 h cm라 하면 오른쪽 그림에서



$6:12=r:h$

$\therefore r=\dfrac{1}{2}h$

이때 $h=0.5t=\dfrac{1}{2}t$이므로

$r=\dfrac{1}{4}t$

물의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{1}{4}t\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}t=\dfrac{1}{96}\pi t^3$ ···❶

$\therefore \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{1}{32}\pi t^2$ ···❷

수면의 높이가 5 cm일 때

$5=\dfrac{1}{2}t \quad \therefore t=10$ ···❸

따라서 $t=10$에서의 물의 부피의 변화율은

$\dfrac{1}{32}\pi\cdot 10^2=\dfrac{25}{8}\pi\,(\text{cm}^3/\text{s})$

$\therefore a=\dfrac{25}{8}$ ···❹

답 $\dfrac{25}{8}$

채점 기준	비율
❶ 물의 부피 V를 시각 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\dfrac{dV}{dt}$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 수면의 높이가 5 cm인 순간의 t의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 부정적분

0622 $(2x)'=2$이므로

$\int 2\,dx=2x+C$ 답 $2x+C$

0623 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$이므로

$\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$ 답 $\frac{1}{3}x^3+C$

0624 $\left(-\frac{5}{2}x^2\right)'=-5x$이므로

$\int(-5x)\,dx=-\frac{5}{2}x^2+C$ 답 $-\frac{5}{2}x^2+C$

0625 $\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)'=x+1$이므로

$\int(x+1)\,dx=\frac{1}{2}x^2+x+C$ 답 $\frac{1}{2}x^2+x+C$

0626 $(x^3+x^2-x)'=3x^2+2x-1$이므로

$\int(3x^2+2x-1)\,dx=x^3+x^2-x+C$ 답 x^3+x^2-x+C

0627 $f(x)=(3x+C)'=3$ 답 $f(x)=3$

0628 $f(x)=(x^2-4x+C)'=2x-4$ 답 $f(x)=2x-4$

0629 $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-3x+C\right)'=x-3$ 답 $f(x)=x-3$

0630 $f(x)=(x^3+5x^2+C)'=3x^2+10x$

답 $f(x)=3x^2+10x$

0631 $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$이므로

$\frac{d}{dx}\int(x^2+x)\,dx=x^2+x$ 답 x^2+x

0632 $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+x)\right\}dx=x^2+x+C$ 답 x^2+x+C

0633 답 $\frac{1}{2}x^2+C$ 참 1, 1, 2, 2

0634 답 $\frac{1}{5}x^5+C$

0635 답 $\frac{1}{8}x^8+C$

0636 답 $4x^2+C$

0637 답 $\frac{1}{2}x^2-7x+C$

0638 답 x^2+x+C

0639 답 $\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+5x+C$

0640 $\int(x+1)^2dx=\int(x^2+2x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

답 $\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$

0641 $\int(3x+1)(x-2)dx=\int(3x^2-5x-2)dx$

$=x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+C$

답 $x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+C$

0642 $\int\frac{x^2-1}{x-1}dx=\int\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}dx$

$=\int(x+1)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$ 답 $\frac{1}{2}x^2+x+C$

0643 $\int(x-3)dx+\int(5x+9)dx=\int\{(x-3)+(5x+9)\}dx$

$=\int(6x+6)dx$

$=3x^2+6x+C$

답 $3x^2+6x+C$

0644 $\int(x^2+4x+3)dx-\int(2x^2-6x+7)dx$

$=\int\{(x^2+4x+3)-(2x^2-6x+7)\}dx$

$=\int(-x^2+10x-4)dx$

$=-\frac{1}{3}x^3+5x^2-4x+C$ 답 $-\frac{1}{3}x^3+5x^2-4x+C$

0645 $\int(x+2)^2dx+\int(x-2)^2dx$

$=\int(x^2+4x+4)dx+\int(x^2-4x+4)dx$

$=\int\{(x^2+4x+4)+(x^2-4x+4)\}dx$

$=\int(2x^2+8)dx$

$=\frac{2}{3}x^3+8x+C$ 답 $\frac{2}{3}x^3+8x+C$

0646 $f(x)=(-x^3+3x^2+5x+C)'=-3x^2+6x+5$이므로
$f(2)=-12+12+5=5$ ③

0647 $f(x)=(2x^2-3x+1)'=4x-3$이므로
$f(-1)=-4-3=-7$ ②

0648 $xf(x)=(x^3+4x^2-7)'=3x^2+8x=x(3x+8)$이므로
$f(x)=3x+8$
$\therefore f(4)=12+8=20$ 20

0649 $f(x)=F'(x)=(x^3+ax^2+bx)'$
$=3x^2+2ax+b$
$f(0)=1$이므로 $b=1$ ❶
따라서 $f(x)=3x^2+2ax+1$이므로
$f'(x)=6x+2a$
$f'(0)=4$이므로 $2a=4$
$\therefore a=2$ ❷
$\therefore ab=2$ ❸
2

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0650 $F(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$=2x(2x-3)+(x^2+1)\cdot 2$
$=6x^2-6x+2$
따라서 함수 $F(x)$의 상수항은 2이다. 2

0651 $\frac{d}{dx}\int(x^2+ax+5)dx=x^2+ax+5$이므로
$x^2+ax+5=bx^2-x+c$
위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 ← x에 대한 항등식이다.
$a=-1$, $b=1$, $c=5$
$\therefore a+b+c=5$ ③

라쎈 특강

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면
$a=b=c=0$
② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면
$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$
③ $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이면
$a=b=c=0$
④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 x, y에 대한 항등식이면
$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

다른 풀이 등식 $x^2+ax+5=bx^2-x+c$가 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $x=-1$을 대입하면
$1-a+5=b+1+c$ $\therefore a+b+c=5$

0652 $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$이므로
$f(x)=5x^2-2x+1$
$\therefore f(1)=5-2+1=4$ ④

0653 $F(x)=\frac{d}{dx}\int xf(x)dx=xf(x)$
$=x(3x^2-4x)=3x^3-4x^2$
$\therefore F(2)=24-16=8$ ⑤

0654 $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3+2x)\right\}dx$
$=x^3+2x+C$
$F(0)=-1$이므로 $C=-1$
따라서 $F(x)=x^3+2x-1$이므로
$F(-1)=-1-2-1=-4$ -4

0655 $f(x)=\frac{d}{dx}\int(4x^2-3x)dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(5x^2)\right\}dx$
$=4x^2-3x-(5x^2+C)$
$=-x^2-3x-C$
$f(1)=4$이므로 $-1-3-C=4$ $\therefore C=-8$
따라서 $f(x)=-x^2-3x+8$이므로
$f(2)=-4-6+8=-2$ -2

0656 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-6x)\right\}dx=x^2-6x+C$
즉 이차방정식 $x^2-6x+C=0$의 두 근의 곱이 7이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $C=7$
따라서 $f(x)=x^2-6x+7$이므로
$f(4)=16-24+7=-1$ -1

0657 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx=x^2-4x+C$
$=(x-2)^2+C-4$ ← 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $C-4$를 갖는다.
함수 $f(x)$의 최솟값이 2이므로
$C-4=2$ $\therefore C=6$
따라서 $f(x)=x^2-4x+6$이므로
$f(3)=9-12+6=3$ ①

라쎈 특강

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최대 · 최소

$y=a(x-m)^2+n$ 꼴로 변형하면
① $a>0$일 때, $x=m$에서 최솟값 n을 갖는다.
② $a<0$일 때, $x=m$에서 최댓값 n을 갖는다.

0658 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+kx)\right\}dx=x^2+kx+C$
$f(0)=0$이므로 $C=0$
즉 $f(x)=x^2+kx$이므로
$f'(x)=2x+k$ ····· ㉠

$\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=3$에서

$\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=3$

이므로 $x=-1$을 ㉠에 대입하면

$-2+k=3 \quad \therefore k=5$

따라서 $f(x)=x^2+5x$이므로

$k+f(-2)=5+(4-10)=-1$ 답 -1

0659 $\int\{f(x)+3x\}dx=x^3+ax^2+bx+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+3x=3x^2+2ax+b$

$\therefore f(x)=3x^2+(2a-3)x+b$

$f(0)=2$이므로 $b=2$

또 $f'(x)=6x+2a-3$이고 $f'(-1)=-3$이므로

$2a-9=-3 \quad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=3x^2+3x+2$이므로

$f(-2)=12-6+2=8$ 답 ⑤

0660 $\int(x+2)f'(x)dx=x^3+x^2-8x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x+2)f'(x)=3x^2+2x-8=(x+2)(3x-4)$

$\therefore f'(x)=3x-4$ ··· ❶

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-4)dx$

$=\dfrac{3}{2}x^2-4x+C_1$ ··· ❷

따라서 함수 $f(x)$의 일차항의 계수는 -4이다. ··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 일차항의 계수를 구할 수 있다.	10 %

0661 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 2dx$

$\therefore f(x)+g(x)=2x+C_1$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1$

이때 $f(0)=5$, $g(0)=-5$이므로

$C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=2x$ ····· ㉠

또 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=2x$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 2xdx$

$\therefore f(x)g(x)=x^2+C_2$

앞의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2$

이때 $f(0)=5$, $g(0)=-5$이므로

$C_2=-25$

$\therefore f(x)g(x)=x^2-25=(x+5)(x-5)$ ····· ㉡

$f(x)$, $g(x)$가 일차함수이므로 ㉠, ㉡에서

$\begin{cases}f(x)=x+5\\g(x)=x-5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(x)=x-5\\g(x)=x+5\end{cases}$

그런데 $f(0)=5$, $g(0)=-5$이므로

$f(x)=x+5$, $g(x)=x-5$

$\therefore f(1)-g(1)=6-(-4)=10$ 답 ④

다른 풀이 $f(x)$, $g(x)$가 일차함수이고 $f(0)=5$, $g(0)=-5$이므로

$f(x)=ax+5$, $g(x)=bx-5$ (a, b는 0이 아닌 상수)

로 놓으면

$f(x)+g(x)=(a+b)x$, $f(x)g(x)=(ax+5)(bx-5)$

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\dfrac{d}{dx}\{(a+b)x\}=a+b$이므로

$a+b=2$ ····· ㉠

또

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=\dfrac{d}{dx}\{(ax+5)(bx-5)\}$

$=a(bx-5)+(ax+5)\cdot b$

$=2abx-5a+5b$

이므로 $2abx-5a+5b=2x$에서

$2ab=2$, $-5a+5b=0$

$\therefore ab=1$, $a=b$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

따라서 $f(x)=x+5$, $g(x)=x-5$이므로

$f(1)-g(1)=10$

0662 $f(x)=\int\dfrac{x^3}{x-1}dx-\int\dfrac{1}{x-1}dx=\int\dfrac{x^3-1}{x-1}dx$

$=\int\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx=\int(x^2+x+1)dx$

$=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+C$

$f(-1)=-\dfrac{11}{6}$이므로

$-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-1+C=-\dfrac{11}{6} \quad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x-1$이므로

$f(-2)=-\dfrac{8}{3}+2-2-1=-\dfrac{11}{3}$ 답 ②

0663 $f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$이므로

$f(1)=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{11개}=11$ 답 ②

0664 $f(x)=\int(3+\sqrt{x})^2dx+\int(3-\sqrt{x})^2dx$

$=\int\{(9+6\sqrt{x}+x)+(9-6\sqrt{x}+x)\}dx$

$=\int(2x+18)dx$

$=x^2+18x+C$

$f(1)=10$이므로

$1+18+C=10 \quad \therefore C=-9$

따라서 $f(x)=x^2+18x-9$이므로 ··· ❶

$f(-1)=1-18-9=-26$ ··· ❷

답 -26

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	80 %
❷ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0665 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+4x+a)dx$

$=x^3+2x^2+ax+C$

$f(0)=-4$이므로 $\quad C=-4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+ax-4$이므로 $f(-1)=2$에서

$-1+2-a-4=2 \quad \therefore a=-5$

즉 $f(x)=x^3+2x^2-5x-4$이므로

$f(2)=8+8-10-4=2$ 답 2

0666 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+8x+1)dx$

$=x^3+4x^2+x+C$

$f(-1)=-4$이므로

$-1+4-1+C=-4$

$\therefore C=-6$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2+x-6$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{-6}{1}=6$ 답 ⑤

라쎈 특강

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0667 $f'(x)=6x^2+8x-5$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2+8x-5)dx$

$=2x^3+4x^2-5x+C_1$

$f(0)=1$이므로 $\quad C_1=1$

따라서 $f(x)=2x^3+4x^2-5x+1$이므로

$\int f(x)dx=\int(2x^3+4x^2-5x+1)dx$

$=\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+x+C$ 답 ③

0668 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx$

$=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}dx$

$=\int(x+2)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+2x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$f(0)=3 \quad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+3$이고 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=f(-1)=\frac{1}{2}-2+3=\frac{3}{2}$ 답 ④

0669 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3-12x+k)dx$

$=x^4-6x^2+kx+C$

다항식 $f(x)$가 x^2-3x+2, 즉 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(1)=0, f(2)=0$

$f(1)=0$에서 $\quad 1-6+k+C=0$

$\therefore k+C=5$ ····· ㉠

$f(2)=0$에서 $\quad 16-24+2k+C=0$

$\therefore 2k+C=8$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad k=3, C=2$

따라서 $f(x)=x^4-6x^2+3x+2$이므로

$f(3)=81-54+9+2=38$ 답 ⑤

0670 $\int f(x)dx=xf(x)-2x^3+x^2+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$

$xf'(x)=x(6x-2)$

$\therefore f'(x)=6x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx$

$=3x^2-2x+C_1$

$f(1)=3$이므로

$3-2+C_1=3 \quad \therefore C_1=2$

$\therefore f(x)=3x^2-2x+2$ 답 $f(x)=3x^2-2x+2$

0671 $\int g(x)dx=x^3f(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$\therefore g(3)=27f(3)+27f'(3)$

$=27\cdot1+27\cdot(-2)=-27$ 답 ②

0672 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)+\int(x-1)f(x)dx=x^4+8x^3-3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f(x)=4x^3+24x^2-6x$ ··· ❶

$xf(x)=x(4x^2+24x-6)$

$\therefore f(x)=4x^2+24x-6$

$=4(x+3)^2-42$ ··· ❷

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최솟값 -42를 갖는다. ··· ❸

답 -42

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

0673 $2\int f(x)dx=xf(x)+f(x)-4x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f(x)+xf'(x)+f'(x)-4$

$\therefore f(x)=(x+1)f'(x)-4$ ····· ㉠

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=a$

$f(x)$와 $f'(x)$를 ㉠에 대입하면 $ax+b=a(x+1)-4$

$\therefore b=a-4$ ····· ㉡

$f(2)=5$이므로 $2a+b=5$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

따라서 $f(x)=3x-1$이므로

$f(-1)=-3-1=-4$

답 -4

0674 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)+4x^2=xf(x)+2x^3+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+8x=f(x)+xf'(x)+6x^2$

$xf'(x)=x(-6x+8)$

$\therefore f'(x)=-6x+8$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-6x+8)dx$

$=-3x^2+8x+C_1$

$f(1)=2$이므로

$-3+8+C_1=2$ $\therefore C_1=-3$

따라서 $f(x)=-3x^2+8x-3$이므로

$F(x)=\int f(x)dx=\int(-3x^2+8x-3)dx$

$=-x^3+4x^2-3x+C_2$

한편 $F(x)+4x^2=xf(x)+2x^3+3$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$F(1)+4=2+2+3$ ($\because f(1)=2$)

$\therefore F(1)=3$

즉 $-1+4-3+C_2=3$이므로 $C_2=3$

$\therefore F(x)=-x^3+4x^2-3x+3$

답 $F(x)=-x^3+4x^2-3x+3$

0675 $f'(x)=\begin{cases}-2x & (x>1)\\ 3x^2 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x>1)\\ x^3+C_2 & (x<1)\end{cases}$

$f(2)=2$이므로

$-4+C_1=2$ $\therefore C_1=6$

또 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$-1+6=1+C_2$ $\therefore C_2=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x^2+6 & (x\geq1)\\ x^3+4 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(-3)+f(3)=-27+4+(-9+6)$

$=-26$

답 -26

라쎈 특강

함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(i) $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

0676 $f'(x)=\begin{cases}x+2 & (x>-1)\\ k & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+2x+C_1 & (x>-1)\\ kx+C_2 & (x<-1)\end{cases}$

$f(0)=2$이므로 $C_1=2$

$f(-2)=-4$이므로

$-2k+C_2=-4$ ····· ㉠

또 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$\frac{1}{2}-2+2=-k+C_2$

$\therefore -k+C_2=\frac{1}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$C_2=5$, $k=\frac{9}{2}$

답 ⑤

0677 $f'(x)=\begin{cases}-x+2 & (x\geq1)\\ 1 & (x<1)\end{cases}$이므로 ··· ❶

$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+2x+C_1 & (x\geq1)\\ x+C_2 & (x<1)\end{cases}$ ··· ❷

$y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0$ $\therefore C_2=0$

또 $f(x)$가 연속함수이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$-\frac{1}{2}+2+C_1=1$

$\therefore C_1=-\frac{1}{2}$ ··· ❸

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2} & (x\geq 1) \\ x & (x<1) \end{cases}$ 이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{8}+3-\frac{1}{2}=\frac{11}{8}$ ···❹

답 $\frac{11}{8}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20 %
❸ C_1, C_2의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $f\left(\frac{3}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0678 $f'(x)=x^2+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, -2)$를 지나므로

$f(0)=-2 \quad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x-2$이므로

$f(2)=\frac{8}{3}+2-2=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

0679 $f'(x)=4x-k$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-k)dx$

$=2x^2-kx+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$f(0)=1 \quad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=2x^2-kx+1$

즉 이차방정식 $2x^2-kx+1=0$의 두 근의 합이 $\frac{3}{2}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{k}{2}=\frac{3}{2} \quad \therefore k=3$

따라서 $f(x)=2x^2-3x+1$이므로

$f(1)=2-3+1=0$ 답 ③

0680 $f(x)=\int(1-2ax)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-2ax$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(1)=-3, \quad 1-2a=-3$

$\therefore a=2$

$\therefore f'(x)=1-4x$ ···❶

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(1-4x)dx$

$=x-2x^2+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 4)$를 지나므로

$f(1)=4, \quad 1-2+C=4$

$\therefore C=5$

따라서 $f(x)=-2x^2+x+5$이므로 ···❷

$f(3)=-18+3+5=-10$ ···❸

답 -10

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0681 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)-\{f(-h)-f(0)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}$

$=f'(0)+f'(0)=2f'(0)$

$f(x)=\int(x-2)(x^2+2x+4)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$

$\therefore f'(0)=-8$

따라서 구하는 값은

$2f'(0)=2\cdot(-8)=-16$ 답 ①

0682 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f(x)=\int(x^2+x-3)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x-3$

$\therefore f'(1)=1+1-3=-1$

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=2\cdot(-1)=-2$ 답 ②

0683 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x-2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)-\{f(x-2h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot(-1)+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}\cdot 2$

$=-f'(x)+2f'(x)=f'(x)$

즉 $f'(x)=3x^2-4x+5$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x+5)dx$

$=x^3-2x^2+5x+C$

$f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+5x+1$이므로

$f(-1)=-1-2-5+1=-7$ 답 -7

0684 $f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{3}{2}$을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-x-2)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$$

이므로 $f(-1)=\frac{3}{2}$에서

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+C=\frac{3}{2} \qquad \therefore C=\frac{1}{3}$$

즉 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}$이므로 극솟값은

$$f(2)=\frac{8}{3}-2-4+\frac{1}{3}=-3$$ ④

0685 $f'(x)=a(x+1)^2+1$ $(a<0)$로 놓으면 $f'(0)=0$이므로

$a+1=0 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f'(x)=-(x+1)^2+1$

$=-x^2-2x=-x(x+2)$ ··· ❶

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ ··· ❷

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 갖는다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x^2-2x)dx$$

$$=-\frac{1}{3}x^3-x^2+C$$

이므로 $f(0)=1$에서 $\qquad C=1$

즉 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+1$이므로 ··· ❸

$f(3)=-9-9+1=-17$ ··· ❹

-17

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0686 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.

이때 $f'(1)=f'(5)=0$이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 7을 갖고, $x=5$에서 극솟값을 갖는다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3(x-1)(x-5)dx$$

$$=\int(3x^2-18x+15)dx$$

$$=x^3-9x^2+15x+C$$

이므로 $f(1)=7$에서 $\qquad 1-9+15+C=7$

$\therefore C=0$

즉 $f(x)=x^3-9x^2+15x$이므로 극솟값은

$f(5)=125-225+75=-25$ ②

다른 풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(1)=0$에서 $\qquad 3+2a+b=0$ ····· ㉠

$f'(5)=0$에서 $\qquad 75+10a+b=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9$, $b=15$

$\therefore f(x)=x^3-9x^2+15x+c$

$f(1)=7$에서 $\qquad 1-9+15+c=7 \qquad \therefore c=0$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+15x$이므로 극솟값은

$f(5)=-25$

0687 $x=0$, $y=0$을 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0 \qquad \therefore f(0)=0$

$f'(0)=2$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0)+f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}-x\right\}=2-x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2-x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+2x+C$$

그런데 $f(0)=0$이므로 $\qquad C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$이므로

$f(2)=-2+4=2$ ③

0688 $x=0$, $y=0$을 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2$에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+2 \quad \therefore f(0)=-2$

$f'(0)=3$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0)+f(h)+2-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}=3$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+2}{h}=3$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 3dx=3x+C$$

그런데 $f(0)=-2$이므로 $\quad C=-2$

$\therefore f(x)=3x-2$ 답 $f(x)=3x-2$

0689 $x=0$, $y=0$을 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy+1$에 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1 \quad \therefore f(0)=-1$

$f'(1)=1$이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-2h+1-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2h+1}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)+1}{h}-2\right\}=1$$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}=3$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-2xh+1-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-2xh+1}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)+1}{h}-2x\right\}=3-2x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3-2x)dx=-x^2+3x+C$$

그런데 $f(0)=-1$이므로 $\quad C=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+3x-1$이므로

$f(1)=-1+3-1=1$ 답 1

0690 전략 y 이외의 문자는 상수로 생각하여 적분한다.

풀이 $$\int(2x+y)^2dy=\int(4x^2+4xy+y^2)dy$$

$$=4x^2y+2xy^2+\frac{1}{3}y^3+C$$

답 $4x^2y+2xy^2+\frac{1}{3}y^3+C$

0691 전략 $F(x)$와 $G(x)$가 모두 $f(x)$의 부정적분이므로 $F'(x)=G'(x)$이다.

풀이 $F'(x)=G'(x)$이므로

$G(x)=F(x)+C$ (C는 상수)

가 성립한다.

이때 $G(0)=F(0)+C$이고 $F(0)=0$, $G(0)=3$이므로

$C=3$

따라서 $G(x)=5x^3-2x^2+x+3$이므로

$G(-1)=-5-2-1+3=-5$ 답 ①

0692 전략 $p(x)=\int q(x)dx$이면 $\frac{d}{dx}p(x)=q(x)$이다.

풀이 ㄱ. $\frac{d}{dx}\{f(x)+x^3+C\}=f'(x)+3x^2$이므로

$$\int f'(x)dx+\int 3x^2dx=\int\{f'(x)+3x^2\}dx$$

$$=f(x)+x^3+C$$

ㄴ. $\frac{d}{dx}[\{f(x)\}^2+C]=2f(x)f'(x)$이므로

$$\int 2f(x)f'(x)dx=\{f(x)\}^2+C$$

ㄷ. 주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\int f(x)dx+\int f'(x)dx=\int\{f(x)+f'(x)\}dx$$

주어진 등식의 우변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\{xf(x)+C\}=f(x)+xf'(x)$$

$$\therefore \int f(x)dx+\int f'(x)dx\neq xf(x)+C$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0693 전략 부정적분과 도함수의 관계를 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{d}{dx}\int(2x^3+x+1)dx=2x^3+x+1$

따라서 $f'(x)=6x^2+1$이므로

$f'(1)=6+1=7$ 답 7

0694 전략 부정적분과 도함수의 관계를 이용한다.

풀이 $\frac{d}{dx}\int\{f(x)-x^2+4\}dx=f(x)-x^2+4$,

$\int\frac{d}{dx}\{2f(x)-3x+1\}dx=2f(x)-3x+1+C$이므로

$f(x)-x^2+4=2f(x)-3x+1+C$

$\therefore f(x)=-x^2+3x+3-C$

$f(1)=3$이므로

$-1+3+3-C=3 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=-x^2+3x+1$이므로

$f(0)=1$ 답 ④

0695 전략 부정적분과 도함수의 관계를 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 3x^2dx$이므로

$f(x)g(x)=x^3+C$

조건 (나)에서 $f(1)=3$, $g(1)=0$이므로

$f(1)g(1)=1+C$, $0=1+C$

$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)g(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이고 $f(1)=3$, $g(1)=0$이므로

$f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x-1$

$\therefore f(2)+g(4)=(4+2+1)+3=10$ 답 ⑤

0696 전략 부정적분과 도함수의 관계를 이용한다.

풀이 $f(x)=\int xg(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xg(x)$

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$에서

$f'(x)-g'(x)=4x^3+2x$

이므로

$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$ …… ㉠

$g(x)$의 차수를 n이라 하면 $xg(x)$의 차수는 $n+1$이므로

$n+1=3$ $\therefore n=2$

즉 $g(x)$는 이차함수이므로 $g(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)로 놓으면

$g'(x)=2ax+b$

$g(x)$와 $g'(x)$를 ㉠에 대입하면

$x(ax^2+bx+c)-(2ax+b)=4x^3+2x$

$\therefore ax^3+bx^2+(c-2a)x-b=4x^3+2x$

따라서 $a=4$, $b=0$, $c-2a=2$이므로

$a=4$, $b=0$, $c=10$

즉 $g(x)=4x^2+10$이므로

$g(1)=4+10=14$ 답 ⑤

0697 전략 $\int f(x)dx-\int g(x)dx=\int\{f(x)-g(x)\}dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$

$=\int\left\{\frac{1}{2}x^3+2x+1-\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)\right\}dx$

$=\int(x+1)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로

$f(4)=8+4+1=13$ 답 ④

0698 전략 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\{6x^2-2f(1)x\}dx$

$=2x^3-f(1)x^2+C$

$f(0)=4$이므로 $C=4$

$\therefore f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-f(1)+4$, $2f(1)=6$

$\therefore f(1)=3$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+4$이므로

$f(2)=16-12+4=8$ 답 ④

0699 전략 먼저 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)=xf(x)-x^3+2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2+4x$

$xf'(x)=x(3x-4)$

$\therefore f'(x)=3x-4$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x-4)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-4x+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-4x+1$이므로

$f(1)=\frac{3}{2}-4+1=-\frac{3}{2}$ 답 ①

0700 전략 함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases}3x^2 & (|x|>1)\\ -3x^2+4 & (|x|<1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^3+C_1 & (x>1)\\ -x^3+4x+C_2 & (-1<x<1)\\ x^3+C_3 & (x<-1)\end{cases}$

$f(-2)=-7$이므로

$-8+C_3=-7$ $\therefore C_3=1$

이때 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

$1-4+C_2=-1+1$ $\therefore C_2=3$

또 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$1+C_1=-1+4+3$ $\therefore C_1=5$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^3+5 & (x\geq1)\\ -x^3+4x+3 & (-1\leq x<1)\\ x^3+1 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(2)=8+5=13$ 답 ①

0701 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^2에 정비례하므로

$f'(x)=ax^2$ (a는 0이 아닌 상수)

으로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax^2dx=\frac{a}{3}x^3+C$$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-2, 0)$, $(0, -2)$를 지나므로

$f(-2)=0$에서 $-\frac{8}{3}a+C=0$ …… ㉠

$f(0)=-2$에서 $C=-2$

$C=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=-\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-2$이므로

$f(-4)=16-2=14$ ④

0702 전략 미분계수의 정의를 이용하여 구하는 값을 도함수 $f'(x)$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$

$f(x)=\int(x^2+2x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+2x$

$\therefore f'(2)=4+4=8$

따라서 구하는 값은

$2f'(2)=2\cdot8=16$ ②

0703 전략 극댓값을 갖는 x좌표와 극솟값을 갖는 x좌표를 각각 찾는다.

풀이 $f'(x)=ax(x-3)$ ($a<0$)으로 놓으면

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$

x	…	0	…	3	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 14를 갖고, $x=0$에서 극솟값 5를 갖는다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x-3)dx$$

$$=\int(ax^2-3ax)dx$$

$$=\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2+C$$

이므로 $f(3)=14$에서

$-\frac{9}{2}a+C=14$ …… ㉠

또 $f(0)=5$에서 $C=5$

$C=5$를 ㉠에 대입하면 $a=-2$

$\therefore f(x)=-\frac{2}{3}x^3+3x^2+5$ $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+3x^2+5$

0704 전략 먼저 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{axh+\frac{1}{2}h^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left(ax+\frac{1}{2}h\right)=ax$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int axdx$

$=\frac{1}{2}ax^2+C$

$f(1)=2$에서 $\frac{1}{2}a+C=2$ …… ㉠

또 $f(3)=6$에서 $\frac{9}{2}a+C=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $C=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$이므로

$f(2)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$ ④

0705 전략 $\int f(x)dx\pm\int g(x)dx=\int\{f(x)\pm g(x)\}dx$ (복호동순)임을 이용한다.

풀이 $f(x)+g(x)=\int(x^2-6x)dx$ …… ㉠

$f(x)-g(x)=\int(x^2+2x)dx$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2f(x)=\int(x^2-6x)dx+\int(x^2+2x)dx$

$=\int(x^2-6x+x^2+2x)dx$

$=\int(2x^2-4x)dx$

$=\frac{2}{3}x^3-2x^2+C_1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{C_1}{2}$

$f(0)=0$이므로 $C_1=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$ … ❶

㉠−㉡을 하면

$2g(x)=\int(x^2-6x)dx-\int(x^2+2x)dx$

$=\int\{x^2-6x-(x^2+2x)\}dx$

$=\int(-8x)dx$

$=-4x^2+C_2$

$\therefore g(x)=-2x^2+\frac{C_2}{2}$

$g(0)=0$이므로 $C_2=0$

$\therefore g(x)=-2x^2$ … ❷

$\therefore f(6)g(-1)=(72-36)\cdot(-2)=-72$ … ❸

−72

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(6)g(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0706 전략 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+2$의 접점의 좌표를 (a, b)라 하고 주어진 조건을 이용한다.

풀이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+2$의 접점을 $\mathrm{A}(a, b)(a>0, b>0)$라 하면 $f'(a)=3$이므로

$3a^2-a+1=3$, $3a^2-a-2=0$

$(3a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

직선 $y=3x+2$가 점 $\mathrm{A}(1, b)$를 지나므로 $b=3+2=5$

$\therefore \mathrm{A}(1, 5)$ ··· ❶

한편 $f'(x)=3x^2-x+1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-x+1)dx$$

$$=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{A}(1, 5)$를 지나므로 ($f(1)=5$)

$1-\frac{1}{2}+1+C=5$ $\therefore C=\frac{7}{2}$

$\therefore f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$ ··· ❷

따라서 곡선 $y=f(x)$의 y절편은 $\frac{7}{2}$이다. ··· ❸

답 $\frac{7}{2}$

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+2$의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 곡선 $y=f(x)$의 y절편을 구할 수 있다.	10 %

다른 풀이 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-x+1)dx$

$$=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-a+1$

이므로 접선의 방정식은

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$=(3a^2-a+1)(x-a)+a^3-\frac{1}{2}a^2+a+C$

$=(3a^2-a+1)x-2a^3+\frac{1}{2}a^2+C$ ····· ㉠

이때 $y=3x+2$는 ㉠과 같으므로

$3a^2-a+1=3$, $-2a^3+\frac{1}{2}a^2+C=2$

$3a^2-a+1=3$에서 $3a^2-a-2=0$

$(3a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$) (곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+2$의 접점은 제1사분면 위에 있으므로 $a>0$)

$a=1$을 $-2a^3+\frac{1}{2}a^2+C=2$에 대입하면

$-2+\frac{1}{2}+C=2$ $\therefore C=\frac{7}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$의 y절편은 $\frac{7}{2}$이다.

0707 전략 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이면 (분자) $\longrightarrow 0$임을 이용한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3a-1$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$이므로

$f(1)=0$ ··· ❶

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=3a-1$

한편 $f'(x)=3x+a$에서 $f'(1)=3+a$이므로

$3a-1=3+a$, $2a=4$

$\therefore a=2$ ··· ❷

즉 $f'(x)=3x+2$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x+2)dx$$

$$=\frac{3}{2}x^2+2x+C$$

$f(1)=0$이므로 $\frac{3}{2}+2+C=0$

$\therefore C=-\frac{7}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{7}{2}$이므로 ··· ❸

$f(0)=-\frac{7}{2}$ ··· ❹

답 $-\frac{7}{2}$

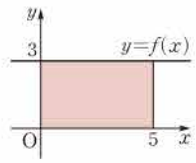
채점 기준	비율
❶ $f(1)=0$임을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

▶ 본책 111~114쪽

08 정적분

0708 ㈎ x축 ㈏ 2 ㈐ 4 ㈑ 3

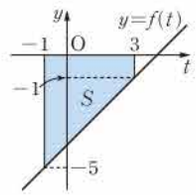
0709 $f(x)=3$으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 정적분의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로



$$\int_0^5 3\,dx=5\cdot 3=15$$

15

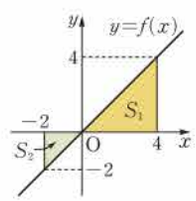
0710 $f(t)=t-4$로 놓으면 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=-1$, $t=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면



$$\int_{-1}^{3}(t-4)\,dt=-S$$
$$=-\left\{\frac{1}{2}\cdot(5+1)\cdot 4\right\}=-12$$
(3−(−1)=4)

−12

0711 $f(x)=x$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=4$로 둘러싸인 도형에서 x축의 위쪽, 아래쪽에 있는 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면



$$\int_{-2}^{4}x\,dx=S_1-S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2$$
$$=8-2=6$$

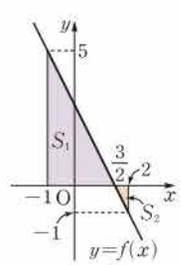
6

0712 $\int_6^6(4x+5)\,dx=0$

0

0713 $\int_2^{-1}(-2x+3)\,dx=-\int_{-1}^{2}(-2x+3)\,dx$

$f(x)=-2x+3$으로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형에서 x축의 위쪽, 아래쪽에 있는 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면



$$\int_{-1}^{2}(-2x+3)\,dx=S_1-S_2$$
(3/2−(−1)=5/2)
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$$
(2−3/2=1/2)
$$=\frac{25}{4}-\frac{1}{4}=6$$

$$\therefore\ \int_2^{-1}(-2x+3)\,dx=-6$$

−6

0714 $2x^3-x$ **0715** $(x+3)^2$

0716 $(x+1)(x^2-4x-3)$

0717 $\frac{d}{dx}\int_0^x(t^2+5t-2)\,dt=x^2+5x-2$ x^2+5x-2

0718 $\frac{d}{dx}\int_{-2}^{x}t(t^3-4t+8)\,dt=x(x^3-4x+8)$ $x(x^3-4x+8)$

0719 $\frac{d}{dx}\int_5^x(t-2)(t^2+t+7)\,dt=(x-2)(x^2+x+7)$ $(x-2)(x^2+x+7)$

0720 3 $2x^2$, $2x^2$, 1, 0, 3

0721 $\int(3t^2-2t)\,dt=t^3-t^2+C$이므로

$$\int_2^3(3t^2-2t)\,dt=\left[t^3-t^2\right]_2^3$$
$$=(27-9)-(8-4)$$
$$=14$$

14

0722 $\int(u^3+2u+1)\,du=\frac{1}{4}u^4+u^2+u+C$이므로

$$\int_{-1}^{1}(u^3+2u+1)\,du=\left[\frac{1}{4}u^4+u^2+u\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{4}+1+1\right)-\left(\frac{1}{4}+1-1\right)$$
$$=2$$

2

0723 $\int(5x-2)\,dx=\frac{5}{2}x^2-2x+C$이므로

$$\int_0^{-1}(5x-2)\,dx=\left[\frac{5}{2}x^2-2x\right]_0^{-1}$$
$$=\frac{5}{2}+2$$
$$=\frac{9}{2}$$

$\frac{9}{2}$

0724 $\int(4x^3+3x^2-6x)\,dx=x^4+x^3-3x^2+C$이므로

$$\int_{-1}^{-2}(4x^3+3x^2-6x)\,dx=\left[x^4+x^3-3x^2\right]_{-1}^{-2}$$
$$=(16-8-12)-(1-1-3)$$
$$=-1$$

−1

0725 $\int_1^2 3(3x^2+4x)\,dx=3\int_1^2(3x^2+4x)\,dx$

$$=3\left[x^3+2x^2\right]_1^2$$
$$=3\cdot\{(8+8)-(1+2)\}$$
$$=39$$

39

0726 $\int_{-1}^{0}(x^2+6)dx+\int_{-1}^{0}(x^2-x-2)dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2+6+x^2-x-2)dx$

$=\int_{-1}^{0}(2x^2-x+4)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{0}$

$=-\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-4\right)$

$=\frac{31}{6}$ 답 $\frac{31}{6}$

0727 $\int_{0}^{2}(2x+1)^2dx-\int_{0}^{2}(2x-1)^2dx$

$=\int_{0}^{2}(4x^2+4x+1)dx-\int_{0}^{2}(4x^2-4x+1)dx$

$=\int_{0}^{2}\{4x^2+4x+1-(4x^2-4x+1)\}dx$

$=\int_{0}^{2}8x\,dx$

$=\left[4x^2\right]_{0}^{2}=16$ 답 16

0728 $\int_{-1}^{0}(2x-5)dx+\int_{0}^{2}(2x-5)dx$

$=\int_{-1}^{2}(2x-5)dx$

$=\left[x^2-5x\right]_{-1}^{2}$

$=(4-10)-(1+5)$

$=-12$ 답 -12

0729 $\int_{-2}^{3}(x^2+3x+1)dx+\int_{3}^{1}(x^2+3x+1)dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^2+3x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+1\right)-\left(-\frac{8}{3}+6-2\right)$

$=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0730 $-1\le x\le 0$일 때, $|x|=\boxed{-x}$

$0\le x\le 1$일 때, $|x|=x$

$\therefore \int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{0}|x|dx+\int_{0}^{1}|x|dx$

$=\int_{-1}^{0}(\boxed{-x})dx+\int_{0}^{1}x\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$=-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

$=\boxed{1}$

$\therefore$ (가) $-x$ (나) 1 답 (가) $-x$ (나) 1

0731 $\int_{-3}^{3}(2x^2+x+1)dx=\int_{-3}^{3}(2x^2+1)dx+\int_{-3}^{3}x\,dx$

$=2\int_{0}^{3}(2x^2+1)dx$

$=2\left[\frac{2}{3}x^3+x\right]_{0}^{3}$

$=2\cdot(18+3)$

$=42$ 답 42

0732 $\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2+4x+2)dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^3+4x)dx+\int_{-1}^{1}(-3x^2+2)dx$

$=2\int_{0}^{1}(-3x^2+2)dx$

$=2\left[-x^3+2x\right]_{0}^{1}$

$=2\cdot(-1+2)$

$=2$ 답 2

0733 $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+2}(2t-9)dt=\{2(x+2)-9\}-(2x-9)$

$=4$ 답 4

0734 $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+1}(t^2-3t+1)dt$

$=\{(x+1)^2-3(x+1)+1\}-(x^2-3x+1)$

$=2x-2$ 답 $2x-2$

0735 답 $f(x)=4x+5$ 힌 4, 5

0736 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}f(t)dt=\frac{d}{dx}(x^3-4x^2+7x+12)$

$\therefore f(x)=3x^2-8x+7$ 답 $f(x)=3x^2-8x+7$

0737 답 -1 힌 0, x, 0, 0, -1

0738 $f(t)=t^3-2t^2$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{3}^{x+3}(t^3-2t^2)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{3}^{x+3}f(t)dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[F(t)\right]_{3}^{x+3}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+3)-F(3)}{x}$

$=F'(3)=f(3)$

$=27-18$

$=9$ 답 9

0739 $f(t)=t^2-7t+2$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(t^2-7t+2)dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_2^x$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=4-14+2$$
$$=-8$$

답 -8

0740 $f(t)=(t+1)(t+2)$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(t+1)(t+2)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^x$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)$$
$$=2\cdot3$$
$$=6$$

답 6

0741 $\displaystyle\int_1^2(x-2)(x^2+2x+4)dx=\int_1^2(x^3-8)dx$

$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-8x\Big]_1^2$$
$$=(4-16)-\Big(\frac{1}{4}-8\Big)$$
$$=-\frac{17}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=17$이므로 $p+q=21$

답 21

0742 $\displaystyle\int_0^1x^3f(x)dx=\int_0^1x^3(x^2+5x+1)dx$

$$=\int_0^1(x^5+5x^4+x^3)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{6}x^6+x^5+\frac{1}{4}x^4\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{6}+1+\frac{1}{4}=\frac{17}{12}$$

답 ⑤

0743 $\displaystyle\int_3^3(x+1)(4x+5)dx-\int_{-1}^{-3}(y-1)(3y+1)dy$

$$=\int_{-3}^{-1}(y-1)(3y+1)dy$$
$$=\int_{-3}^{-1}(3y^2-2y-1)dy$$
$$=\Big[y^3-y^2-y\Big]_{-3}^{-1}$$
$$=(-1-1+1)-(-27-9+3)$$
$$=32$$

답 ③

0744 $\displaystyle\int_0^1f(x)dx=\int_0^1(ax+b)dx=\Big[\frac{1}{2}ax^2+bx\Big]_0^1=\frac{1}{2}a+b$

$\displaystyle\int_0^1xf(x)dx=\int_0^1(ax^2+bx)dx=\Big[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\Big]_0^1=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b$

따라서 $\frac{1}{2}a+b=3$, $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=2$이므로

$a=6$, $b=0$

$\therefore a-b=6$

답 ⑤

0745 $\displaystyle\int_{-2}^1\{f(x)\}^2dx=\int_{-2}^1(x-1)^2dx=\int_{-2}^1(x^2-2x+1)dx$

$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\Big]_{-2}^1$$
$$=\Big(\frac{1}{3}-1+1\Big)-\Big(-\frac{8}{3}-4-2\Big)$$
$$=9$$ ···❶

한편

$$\int_{-2}^1f(x)dx=\int_{-2}^1(x-1)dx=\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{-2}^1$$
$$=\Big(\frac{1}{2}-1\Big)-(2+2)$$
$$=-\frac{9}{2}$$ ···❷

이므로 $\displaystyle\int_{-2}^1\{f(x)\}^2dx=k\Big\{\int_{-2}^1f(x)dx\Big\}^2$에서

$9=k\cdot\Big(-\frac{9}{2}\Big)^2$ $\therefore k=\frac{4}{9}$ ···❸

답 $\frac{4}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\int_{-2}^1\{f(x)\}^2dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_{-2}^1f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0746 $f'(x)=4x-1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-1)dx=2x^2-x+C$$
$$\therefore\int_{-1}^1f(x)dx=\int_{-1}^1(2x^2-x+C)dx$$
$$=\Big[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+Cx\Big]_{-1}^1$$
$$=\Big(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+C\Big)-\Big(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-C\Big)$$
$$=\frac{4}{3}+2C$$

따라서 $\frac{4}{3}+2C=0$이므로 $C=-\frac{2}{3}$

즉 $f(x)=2x^2-x-\frac{2}{3}$이므로

$$\int_0^3f(x)dx=\int_0^3\Big(2x^2-x-\frac{2}{3}\Big)dx$$
$$=\Big[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\Big]_0^3$$
$$=18-\frac{9}{2}-2=\frac{23}{2}$$

답 $\frac{23}{2}$

0747 $\int_{-2}^{1}(3x^2+2kx+1)dx=\left[x^3+kx^2+x\right]_{-2}^{1}$

$=(1+k+1)-(-8+4k-2)$

$=-3k+12$

따라서 $-3k+12>6$이므로

$3k<6 \quad \therefore k<2$

즉 정수 k의 최댓값은 1이다. 답 ①

0748 $f(x)=x^3-6x^2+k$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3-6x^2+k)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+kx\right]_0^2$

$=4-16+2k$

$=-12+2k$

따라서 $-12+2k=0$이므로

$k=6$ 답 6

라쎈 특강

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=f(x-a)$

0749 $\int_1^k(2x-5)dx=\left[x^2-5x\right]_1^k$

$=(k^2-5k)-(1-5)$

$=k^2-5k+4$

$=\left(k-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ ··· ❶

따라서 $\int_1^k(2x-5)dx$는 $k=\frac{5}{2}$에서 최솟값 $-\frac{9}{4}$를 가지므로

$m=\frac{5}{2}$, $n=-\frac{9}{4}$ ··· ❷

$\therefore m+n=\frac{1}{4}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\int_1^k(2x-5)dx$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0750 $\int_0^2(2x^2+x)dx+\int_2^0(x-x^2)dx$

$=\int_0^2(2x^2+x)dx-\int_0^2(x-x^2)dx$

$=\int_0^2\{2x^2+x-(x-x^2)\}dx$

$=\int_0^2 3x^2dx$

$=\left[x^3\right]_0^2=8$ 답 8

0751 $\int_0^1\frac{x^3}{x+2}dx+\int_0^1\frac{8}{t+2}dt$

t 대신 다른 문자를 사용해도 그 값은 변하지 않는다.

$=\int_0^1\frac{x^3}{x+2}dx+\int_0^1\frac{8}{x+2}dx$

$=\int_0^1\frac{x^3+8}{x+2}dx$

$=\int_0^1\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$

$=\int_0^1(x^2-2x+4)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-1+4=\frac{10}{3}$ 답 ④

0752 $\int_0^3(x-k)^2dx+\int_3^0(x+k)^2dx$

$=\int_0^3(x^2-2kx+k^2)dx-\int_0^3(x^2+2kx+k^2)dx$

$=\int_0^3\{x^2-2kx+k^2-(x^2+2kx+k^2)\}dx$

$=\int_0^3(-4kx)dx$

$=\left[-2kx^2\right]_0^3$

$=-18k$

따라서 $-18k=36$이므로

$k=-2$ 답 -2

0753 $\int_0^1 1dx+\int_0^1 2xdx+\int_0^1 3x^2dx+\cdots+\int_0^1 nx^{n-1}dx$

$=\int_0^1(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$

$=\left[x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right]_0^1$

$=1+1+1+\cdots+1$

$=n$

$\therefore n=10$ 답 ②

0754 $\int_{-1}^2(2x+k)^2dx-\int_2^{-1}(1-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^2(4x^2+4kx+k^2)dx+\int_{-1}^2(1-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^2(4x^2+4kx+k^2+1-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^2(x^2+4kx+k^2+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+2kx^2+(k^2+1)x\right]_{-1}^2$

$=\left\{\frac{8}{3}+8k+2(k^2+1)\right\}-\left\{-\frac{1}{3}+2k-(k^2+1)\right\}$

$=3k^2+6k+6$

$=3(k+1)^2+3$ ··· ❶

따라서 주어진 정적분은 $k=-1$에서 최솟값 3을 갖는다. ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 정적분의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	80 %
❷ 주어진 정적분의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0755 $\int_0^2 (x^2-x-5)dx+\int_2^6 (y^2-y-5)dy$

$=\int_0^2 (x^2-x-5)dx+\int_2^6 (x^2-x-5)dx$

$=\int_0^6 (x^2-x-5)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-5x\right]_0^6$

$=72-18-30$

$=24$ 답 ③

0756 $\int_4^5 (x-1)(x^2+x+1)dx+\int_5^2 (x^3-1)dx$

$=\int_4^5 (x^3-1)dx+\int_5^2 (x^3-1)dx$

$=\int_4^2 (x^3-1)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x\right]_4^2$

$=(4-2)-(64-4)$

$=-58$ 답 ②

0757 $\int_0^3 (6x-1)dx-\int_a^3 (6x-1)dx$

$=\int_0^3 (6x-1)dx+\int_3^a (6x-1)dx$

$=\int_0^a (6x-1)dx$

$=\left[3x^2-x\right]_0^a=3a^2-a$ ··· ❶

따라서 $3a^2-a=44$이므로

$3a^2-a-44=0$, $(3a+11)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$) ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0758 $\int_1^5 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$

$=\left\{\int_1^3 f(x)dx+\int_3^2 f(x)dx\right\}+\int_2^5 f(x)dx$

$=\int_1^3 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$

$=5-2+4$

$=7$ 답 7

0759 $\int_{-2}^{-1}\frac{x^2}{x^2+3}dx-\int_1^{-1}\frac{y^2}{y^2+3}dy+\int_{-2}^{1}\frac{3}{z^2+3}dz$

$=\int_{-2}^{-1}\frac{x^2}{x^2+3}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x^2+3}dx+\int_{-2}^{1}\frac{3}{x^2+3}dx$

$=\int_{-2}^{1}\frac{x^2}{x^2+3}dx+\int_{-2}^{1}\frac{3}{x^2+3}dx$

$=\int_{-2}^{1}\frac{x^2+3}{x^2+3}dx$

$=\int_{-2}^{1}1dx$

$=\left[x\right]_{-2}^{1}$

$=1-(-2)=3$ 답 3

0760 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 (-x+2)dx+\int_1^2 (2x-1)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1+\left[x^2-x\right]_1^2$

$=\left(-\frac{1}{2}+2\right)+(4-2)-(1-1)$

$=\frac{7}{2}$ 답 ③

0761 $f(x)=\begin{cases}2 & (x\geq 0)\\ 2x+2 & (x\leq 0)\end{cases}$이므로

$xf(x)=\begin{cases}2x & (x\geq 0)\\ 2x^2+2x & (x\leq 0)\end{cases}$ ··· ❶

$\therefore \int_{-2}^{2} xf(x)dx=\int_{-2}^{0} xf(x)dx+\int_0^2 xf(x)dx$

$=\int_{-2}^{0} (2x^2+2x)dx+\int_0^2 2xdx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^{0}+\left[x^2\right]_0^2$

$=-\left(-\frac{16}{3}+4\right)+4$

$=\frac{16}{3}$ ··· ❷

답 $\frac{16}{3}$

채점 기준	비율
❶ $xf(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\int_{-2}^{2} xf(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	70 %

0762 (i) $a\leq 2$일 때,

$\int_1^a f(x)dx=\int_1^a (2x-4)dx$

$=\left[x^2-4x\right]_1^a$

$=(a^2-4a)-(1-4)$

$=a^2-4a+3$

따라서 $a^2-4a+3=0$이므로

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

그런데 $a\neq1$, $a\leq2$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}\int_1^a f(x)dx&=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^a f(x)dx\\&=\int_1^2(2x-4)dx+\int_2^a\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx\\&=\Big[x^2-4x\Big]_1^2+\Big[\frac{1}{4}x^2-x\Big]_2^a\\&=(4-8)-(1-4)+\left(\frac{1}{4}a^2-a\right)-(1-2)\\&=\frac{1}{4}a^2-a\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{4}a^2-a=0$이므로

$a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a\geq2$)

(i), (ii)에서 $a=4$ 답 4

0763 $|x^2-3x|=\begin{cases}x^2-3x & (x\leq0 \text{ 또는 } x\geq3)\\ -x^2+3x & (0\leq x\leq3)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2|x^2-3x|dx&=\int_{-1}^0(x^2-3x)dx+\int_0^2(-x^2+3x)dx\\&=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\Big]_{-1}^0+\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_0^2\\&=-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{8}{3}+6\right)\\&=\frac{31}{6}\end{aligned}$$

답 ⑤

0764 $|x+1|=\begin{cases}x+1 & (x\geq-1)\\ -x-1 & (x\leq-1)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0|x+1|dx&=\int_{-2}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^0(x+1)dx\\&=\Big[-\frac{1}{2}x^2-x\Big]_{-2}^{-1}+\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-1}^0\\&=\left(-\frac{1}{2}+1\right)-(-2+2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\\&=1\end{aligned}$$

답 ②

0765 $|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & (x\leq-2 \text{ 또는 } x\geq2)\\ -x^2+4 & (-2\leq x\leq2)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^3\frac{|x^2-4|}{x+2}dx\\&=\int_0^2\frac{-x^2+4}{x+2}dx+\int_2^3\frac{x^2-4}{x+2}dx\\&=-\int_0^2\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}dx+\int_2^3\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}dx\\&=-\int_0^2(x-2)dx+\int_2^3(x-2)dx\\&=-\Big[\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_0^2+\Big[\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_2^3\\&=-(2-4)+\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{5}{2}$

0766 $|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & \left(x\geq\frac{1}{2}\right)\\ -2x+1 & \left(x\leq\frac{1}{2}\right)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^a|2x-1|dx&=\int_0^{\frac{1}{2}}(-2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^a(2x-1)dx\\&=\Big[-x^2+x\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\Big[x^2-x\Big]_{\frac{1}{2}}^a\\&=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+(a^2-a)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\\&=a^2-a+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a^2-a+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$이므로

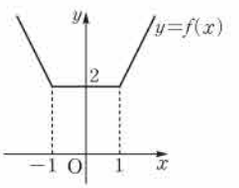
$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>\frac{1}{2}$)

답 ①

0767 $f(x)=\begin{cases}2x & (x\geq1)\\ 2 & (-1\leq x\leq1)\\ -2x & (x\leq-1)\end{cases}$ ··· ❶

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $-1\leq x\leq1$에서 최솟값 2를 가지므로

$a=2$ ··· ❷

$$\begin{aligned}\therefore\int_0^a f(x)dx&=\int_0^1 2dx+\int_1^2 2xdx\\&=\Big[2x\Big]_0^1+\Big[x^2\Big]_1^2\\&=2+4-1=5\end{aligned}$$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\int_0^a f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0768 $\int_{-1}^1 f(x)dx$

$$\begin{aligned}&=\int_{-1}^1(1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx\\&=\int_{-1}^1(\underbrace{1+3x^2+\cdots+9x^8}_{\text{우함수}})dx+\int_{-1}^1(\underbrace{2x+4x^3+\cdots+10x^9}_{\text{기함수}})dx\\&=2\int_0^1(1+3x^2+5x^4+7x^6+9x^8)dx\\&=2\Big[x+x^3+x^5+x^7+x^9\Big]_0^1\\&=2\cdot5=10\end{aligned}$$

답 10

0769 $\int_{-a}^a(3x^2-5x)dx=2\int_0^a 3x^2dx=2\Big[x^3\Big]_0^a=2a^3$

따라서 $2a^3=\frac{1}{4}$이므로 $a^3=\frac{1}{8}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a$는 실수)

답 ④

0770 $|x^3|=\begin{cases} x^3 & (x\geq 0) \\ -x^3 & (x\leq 0) \end{cases}$ 이므로

$$\int_{-2}^{2}(3x^5-|x^3|+4x+1)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(-|x^3|+1)dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3+1)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x\right]_{0}^{2}$$
$$=-(4-2)+(-4+2)$$
$$=-4$$

답 -4

다른 풀이 $|x^3|$은 우함수이므로

$$\int_{-2}^{2}(3x^5-|x^3|+4x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-|x^3|+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-x^3+1)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+x\right]_{0}^{2}$$
$$=2\cdot(-4+2)=-4$$

참고 $|(-x)^3|=|-x^3|=|x^3|$이므로 $|x^3|$은 우함수이다.

0771 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx$

$$=2\int_{0}^{1}(x^2+b)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+bx\right]_{0}^{1}$$
$$=2\left(\frac{1}{3}+b\right)=\frac{2}{3}+2b$$

이므로 $\frac{2}{3}+2b=2$에서 $b=\frac{2}{3}$ ··· ❶

한편

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}ax^2dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}a$$

이므로 $\frac{2}{3}a=4$에서 $a=6$ ··· ❷

$\therefore ab=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0772 $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이고,
$g(x)=-g(-x)$에서 $g(-x)=-g(x)$이므로 $g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^{2}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{-2}^{2}g(x)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=2\cdot 2$$
$$=4$$

답 ①

0773 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-4}^{4}f(x)dx=2\int_{0}^{4}f(x)dx=28$$
$$\therefore \int_{0}^{4}f(x)dx=14$$
$$\therefore \int_{3}^{4}f(x)dx=\int_{3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{4}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{4}f(x)dx-\int_{0}^{3}f(x)dx$$
$$=14-6$$
$$=8$$

답 8

0774 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 기함수이다. ··· ❶

$$\therefore \int_{-1}^{1}(3x^3-x+2)f(x)dx$$
$$=3\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-\int_{-1}^{1}xf(x)dx+2\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=2\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=4\int_{0}^{1}f(x)dx$$
$$=4\cdot 5$$
$$=20$$ ··· ❷

답 20

채점 기준	비율
❶ $f(x)$는 우함수, $x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 기함수임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\int_{-1}^{1}(3x^3-x+2)f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	70 %

라쎈 특강

우함수, 기함수의 곱

① (우함수)×(우함수)=(우함수)
② (우함수)×(기함수)=(기함수)
③ (기함수)×(기함수)=(우함수)

0775 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$이므로

$$\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{2}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{4}f(x)dx=\int_{4}^{5}f(x)dx=4$$
$$\therefore \int_{1}^{5}f(x)dx$$
$$=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{5}f(x)dx$$
$$=4\cdot 4=16$$

답 16

0776 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_4^6 f(x)dx$$

따라서 항상 같은 것은 ⑤이다. ⑤

0777 조건 (가)에서

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} 3x^2dx=2\int_0^1 3x^2dx$$

$$=2\left[x^3\right]_0^1=2 \quad \cdots ❶$$

이때 조건 (나)에 의하여

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx$$

$$=\int_{-4}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx$$

$$=4\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$=4\cdot 2=8 \quad \cdots ❷$$

8

채점 기준	비율
❶ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0778 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx=\int_{-1}^{2} f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx=2\int_0^3 f(x)dx$$

따라서 $2\int_0^3 f(x)dx=10$이므로

$$\int_0^3 f(x)dx=5$$

$$\therefore \int_0^3 \{2x+f(x)\}dx=\int_0^3 2xdx+\int_0^3 f(x)dx$$

$$=\left[x^2\right]_0^3+5$$

$$=9+5=14$$ 14

0779 $\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^2 (-2t+k)dt=k, \quad \left[-t^2+kt\right]_0^2=k$$

$$-4+2k=k \quad \therefore k=4$$

따라서 $f(x)=-2x+4$이므로

$f(1)=-2+4=2$ ④

0780 $\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^2-3x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 t(t^2-3t+k)dt=k, \quad \int_0^1 (t^3-3t^2+kt)dt=k$$

$$\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1=k$$

$$\frac{1}{4}-1+\frac{k}{2}=k \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore f(x)=x^2-3x-\frac{3}{2}$$ $f(x)=x^2-3x-\frac{3}{2}$

0781 $\int_1^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=\frac{3}{7}x^2+2kx+k^2$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{7}t^2+2kt+k^2\right)dt=k, \quad \left[\frac{1}{7}t^3+kt^2+k^2t\right]_1^2=k$$

$$\left(\frac{8}{7}+4k+2k^2\right)-\left(\frac{1}{7}+k+k^2\right)=k$$

$$k^2+2k+1=0, \quad (k+1)^2=0$$

$$\therefore k=-1$$

따라서 $f(x)=\frac{3}{7}x^2-2x+1$이므로

$f(7)=21-14+1=8$ 8

0782 $f(x)=3x^2+\int_0^1 (x+1)f(t)dt$

$$=3x^2+x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2+kx+k$ ❶

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 (3t^2+kt+k)dt=k, \quad \left[t^3+\frac{k}{2}t^2+kt\right]_0^1=k$$

$$1+\frac{1}{2}k+k=k \quad \therefore k=-2$$ ❷

따라서 $f(x)=3x^2-2x-2$이므로

$f'(x)=6x-2$

$\therefore f'(-1)=-6-2=-8$ ❸

-8

채점 기준	비율
❶ $\int_0^1 f(t)dt$의 값을 k로 놓고 $f(x)$를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0783 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2-a, \quad a(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-1$

$\therefore f(a)=f(1)=2-1=1$ ①

0784 $f(x)$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0$

$f(x)$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+2x$

$\therefore f'(1)=1+2=3$

$\therefore f(1)+f'(1)=3$ ⑤

0785 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=4+2a-10$ $\therefore a=3$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+a=2x+3$

$\therefore f(5)=10+3=13$ ②

0786 $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 주어진 등식은

$\int_0^x f(t)dt=-2x^3+x^2-4kx$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-6x^2+2x-4k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1(-6t^2+2t-4k)dt=k$, $\left[-2t^3+t^2-4kt\right]_0^1=k$

$-2+1-4k=k$ $\therefore k=-\frac{1}{5}$

따라서 $f(x)=-6x^2+2x+\frac{4}{5}$이므로

$f(0)=\frac{4}{5}$ $\frac{4}{5}$

0787 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=3-1=2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=15x^4-4x^3+2xf(x)$

$x^2f'(x)=x^2(15x^2-4x)$

$\therefore f'(x)=15x^2-4x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(15x^2-4x)dx$

$=5x^3-2x^2+C$

$f(1)=2$이므로

$5-2+C=2$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=5x^3-2x^2-1$이므로

$f(-1)=-5-2-1=-8$ -8

0788 $\int_{-1}^x(x-t)f(t)dt=x^3+3x^2+3x+1$에서

$x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt=x^3+3x^2+3x+1$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+6x+3$

$\therefore \int_{-1}^x f(t)dt=3x^2+6x+3$

앞의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+6$ $\therefore f(0)=6$ ④

0789 $\int_0^x(x-t)f'(t)dt=x^3$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=x^3$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=3x^2$

$\int_0^x f'(t)dt=3x^2$, $\left[f(t)\right]_0^x=3x^2$

$\therefore f(x)-f(0)=3x^2$

이때 $f(0)=4$이므로

$f(x)=3x^2+4$ $f(x)=3x^2+4$

0790 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=2+a+b$ $\therefore a+b=-2$ …… ㉠

$\int_1^x(x-t)f(t)dt=2x^3+ax^2+bx$에서

$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=2x^3+ax^2+bx$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=6x^2+2ax+b$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=6x^2+2ax+b$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=6+2a+b$ $\therefore 2a+b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=2$ ➊

따라서 $\int_1^x f(t)dt=6x^2-8x+2$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x-8$ ➋

$\therefore \int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1(12x-8)dx$

$=2\int_0^1(-8)dx=2\left[-8x\right]_0^1$

$=2\cdot(-8)=-16$ ➌

-16

채점 기준	비율
➊ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
➌ $\int_{-1}^1 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0791 $f(x)=\int_1^x(t^2+t-2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 a, $x=1$에서 극솟값 b를 가지므로

$$a=f(-2)=\int_1^{-2}(t^2+t-2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_1^{-2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$$
$$=\frac{9}{2}$$
$$b=f(1)=\int_1^1(t^2+t-2)dt=0$$
$$\therefore 2a+b=2\cdot\frac{9}{2}+0=9$$ 답 9

라쎈 특강

함수의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$에서 $f'(x)$의 부호가

① 양에서 음으로 바뀐다.
→ $f(x)$는 $x=a$에서 극대
→ 극댓값: $f(a)$

② 음에서 양으로 바뀐다.
→ $f(x)$는 $x=a$에서 극소
→ 극솟값: $f(a)$

0792 $f(x)=\int_0^x(3t^2-6t-9)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 b를 가지므로

$$b=f(3)=\int_0^3(3t^2-6t-9)dt$$
$$=\left[t^3-3t^2-9t\right]_0^3$$
$$=27-27-27=-27$$
즉 $a=3$, $b=-27$이므로
$$a+b=-24$$ 답 −24

0793 $f(x)=\int_{-1}^x(-t^2+at-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=-x^2+ax-a$$
함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $-x^2+ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=a^2-4a>0,\quad a(a-4)>0$$
$$\therefore a<0 \text{ 또는 } a>4$$
따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다. 답 ⑤

참고 $f'(x)$가 이차함수이므로 $f(x)$는 삼차함수이다.
따라서 삼차함수가 극값을 모두 가질 조건을 이용한다.

0794 $f(x)=\int_0^x(3t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=3x^2+ax+b$$
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 2를 가지므로
$$f(2)=2,\ f'(2)=0$$
$f(2)=2$에서
$$\int_0^2(3t^2+at+b)dt=2,\quad \left[t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^2=2$$
$$8+2a+2b=2$$
$$\therefore a+b=-3 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$f'(2)=0$에서 $12+2a+b=0$
$$\therefore 2a+b=-12 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$$a=-9,\ b=6$$ ❶
즉 $f'(x)=3x^2-9x+6$이므로 $f'(x)=0$에서
$$3x^2-9x+6=0,\quad 3(x-1)(x-2)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$ ❷
따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 구하는 극댓값은
$$f(1)=\int_0^1(3t^2-9t+6)dt$$
$$=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^1$$
$$=1-\frac{9}{2}+6=\frac{5}{2}$$ ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	30 %

0795 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=\frac{1}{4}x^4-2x^3+x^2$에서

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{4}x^4-2x^3+x^2$$
위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=x^3-6x^2+2x$$
$$\therefore \int_0^x f(t)dt=x^3-6x^2+2x$$
위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면
$$f(x)=3x^2-12x+2=3(x-2)^2-10$$
따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 -10을 갖는다. 답 −10

0796 $f(x)=3x^2-2\int_0^1 xf(t)dt=3x^2-2x\int_0^1 f(t)dt$

$$\int_0^1 f(t)dt=k\ (k\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$
로 놓으면 $f(x)=3x^2-2kx$
이것을 ㉠에 대입하면
$$\int_0^1(3t^2-2kt)dt=k,\quad \left[t^3-kt^2\right]_0^1=k$$

$1-k=k \quad \therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=3x^2-x=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{12}$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{1}{6}$에서 최솟값 $-\frac{1}{12}$을 갖는다. 답 $-\frac{1}{12}$

0797 $f(x)=\int_x^{x+1}(t^2+t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^2+(x+1)\}-(x^2+x)$

$=2x+2=2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

이때 $-2\le x\le 2$이므로

$f(-2)=\int_{-2}^{-1}(t^2+t)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{-2}^{-1}$

$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{8}{3}+2\right)=\frac{5}{6}$

$f(-1)=\int_{-1}^{0}(t^2+t)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0}$

$=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}$

$f(2)=\int_2^3(t^2+t)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_2^3$

$=\left(9+\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{8}{3}+2\right)=\frac{53}{6}$

따라서 $M=\frac{53}{6}$, $m=-\frac{1}{6}$이므로

$M-m=9$ 답 ⑤

라쎈 특강

함수의 최대와 최소

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 이 구간에서의 $f(x)$의 극댓값, 극솟값과 구간의 양 끝 점의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 $f(x)$의 최댓값, 가장 작은 값이 $f(x)$의 최솟값이다.

0798 $g(k)=\int_0^1(x+k)^2f(x)dx$

$=\int_0^1(x^2+2kx+k^2)f(x)dx$

$=\int_0^1x^2f(x)dx+2k\int_0^1xf(x)dx+k^2\int_0^1f(x)dx$

$=\int_0^1x^2f(x)dx+10k+2k^2$

$=2\left(k+\frac{5}{2}\right)^2+\int_0^1x^2f(x)dx-\frac{25}{2}$

이때 정적분 $\int_0^1x^2f(x)dx$는 상수이므로 $g(k)$는 $k=-\frac{5}{2}$에서 최솟값을 갖는다. 답 $-\frac{5}{2}$

0799 주어진 그래프에서

$f(x)=ax(x-4)=a(x-2)^2-4a\ (a>0)$

로 놓을 수 있다.

이때 $f(x)$의 최솟값이 -2이므로

$-4a=-2 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x(x-4)=\frac{1}{2}x^2-2x$

한편 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

즉 $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다.

$y=f(x)$의 그래프에서 $f(4)=0$이고 $x=4$의 좌우에서 $f(x)$의 값이 음에서 양으로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 극솟값은

$F(4)=\int_0^4f(t)dt$

$=\int_0^4\left(\frac{1}{2}t^2-2t\right)dt$

$=\left[\frac{1}{6}t^3-t^2\right]_0^4$

$=\frac{32}{3}-16=-\frac{16}{3}$ 답 $-\frac{16}{3}$

참고 주어진 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$의 값이 양에서 음으로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

0800 주어진 그래프에서

$F(x)=a(x-1)(x-2)=a(x^2-3x+2)\ (a<0)$

로 놓을 수 있다.

이때 $F(x)=\int_1^x f(t)dt$에서

$a(x^2-3x+2)=\int_1^x f(t)dt$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=a(2x-3)$

$f(2)=-1$이므로 $a=-1$

따라서 $f(x)=-(2x-3)=-2x+3$이므로

$f(0)=3$ 답 ⑤

0801 주어진 그래프에서

$f(x)=x(x-3)=x^2-3x$ ··· ❶

$F(x)=\int_x^{x+2}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x+2)-f(x)$

$=\{(x+2)^2-3(x+2)\}-(x^2-3x)$

$=4x-2$ ··· ❷

$F'(x)=0$에서 $4x-2=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ ··· ❸

따라서 함수 $F(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

x	⋯	$\frac{1}{2}$	⋯
$F'(x)$	−	0	+
$F(x)$	↘	극소	↗

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}(t^2-3t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}$$
$$=\left(\frac{125}{24}-\frac{75}{8}\right)-\left(\frac{1}{24}-\frac{3}{8}\right)$$
$$=-\frac{23}{6}$$ ⋯ ❹

답 $-\frac{23}{6}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $F'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $F'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $F(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

0802 $f(t)=4t^2-5t+1$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(4t^2-5t+1)dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)$$
$$=1$$

답 ①

0803 $f(x)=x^3-x+7$, $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_3^{3+4h}(x^3-x+7)dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_3^{3+4h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3+4h)-F(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3+4h)-F(3)}{4h}\cdot4$$
$$=4F'(3)=4f(3)$$
$$=4\cdot(27-3+7)$$
$$=124$$

답 124

0804 $f(x)=\int_0^x(2t^3+t^2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2x^3+x^2$$ ⋯ ❶

$$\therefore\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}f'(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$$
$$=2\cdot(16+4)=40$$ ⋯ ❷

답 40

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}f'(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	70 %

0805 $F'(x)=f(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-3h}^{1+h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)-\{F(1-3h)-F(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F(1-3h)-F(1)}{-3h}\cdot3$$
$$=F'(1)+3F'(1)$$
$$=4F'(1)=4f(1)$$
$$=4(4+a)=4a+16$$

따라서 $4a+16=2$이므로

$$4a=-14\qquad\therefore a=-\frac{7}{2}$$

답 $-\frac{7}{2}$

0806 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=16+4-2-1$$
$$=17$$

답 ④

0807 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{x^2}^1 f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{-1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=-\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$$
$$=-2F'(1)=-2f(1)$$
$$=-2\cdot(1-3+1+5)$$
$$=-8$$

답 -8

0808 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{5+a}{2}$$

따라서 $\frac{5+a}{2}=7$이므로 $\quad a=9$

답 ⑤

0809 $f(t)=t(k-t)$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x t(k-t)dt=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$
$$=F'(3)=f(3)=3(k-3)$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x t(k-t)dt\right\}=\sum_{k=1}^{10}3(k-3)$$
$$=3\cdot\left(\frac{10\cdot11}{2}-30\right)$$
$$=75$$

답 ⑤

0810 전략 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$임을 이용한다.

풀이 $\int_0^k(6x-1)dx=\left[3x^2-x\right]_0^k=3k^2-k$

따라서 $3k^2-k=\frac{5}{4}$이므로 $12k^2-4k-5=0$

$(2k+1)(6k-5)=0$ $\therefore k=-\frac{1}{2}$ ($\because k<0$) 답 ③

0811 전략 $\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $\int_1^2\{1+f(x)\}^2dx=\int_1^2[\{f(x)\}^2+2f(x)+1]dx$

$=\int_1^2\{f(x)\}^2dx+2\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 1dx$

$=4-2\int_2^1 f(x)dx+\left[x\right]_1^2$

$=4+2+(2-1)=7$ 답 7

0812 전략 거짓인 보기는 반례를 찾아 거짓임을 보인다.

풀이 ㄱ. [반례] $f(x)=x$로 놓으면

$\int_0^3 xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$, $3\int_0^1 xdx=3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$

$\therefore \int_0^3 f(x)dx\neq 3\int_0^1 f(x)dx$

ㄷ. [반례] $f(x)=x$로 놓으면

$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$, $\left(\int_0^1 xdx\right)^2=\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right\}^2=\frac{1}{4}$

$\therefore \int_0^1\{f(x)\}^2dx\neq\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ①

0813 전략 $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $\int_{-1}^0(x^3-4x)dx+\int_0^1(y^3-4y)dy+\int_1^2(z^3-4z)dz$

$=\int_{-1}^0(x^3-4x)dx+\int_0^1(x^3-4x)dx+\int_1^2(x^3-4x)dx$

$=\int_{-1}^2(x^3-4x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-1}^2$

$=(4-8)-\left(\frac{1}{4}-2\right)=-\frac{9}{4}$ 답 $-\frac{9}{4}$

0814 전략 구간에 따라 다르게 정의된 함수는 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

풀이 $|x|=\begin{cases}x & (x\geq 0)\\ -x & (x\leq 0)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}1 & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 1)\\ x & (0\leq x\leq 1)\\ -x & (-1\leq x\leq 0)\end{cases}$

$\therefore \int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$

$=\int_0^1 xdx+\int_1^3 1dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[x\right]_1^3$

$=\frac{1}{2}+(3-1)=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

0815 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

풀이 $|x-a|=\begin{cases}x-a & (x\geq a)\\ -x+a & (x\leq a)\end{cases}$이고, $1\leq a\leq 4$이므로

$\int_1^4|x-a|dx$

$=\int_1^a(-x+a)dx+\int_a^4(x-a)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_1^a+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_a^4$

$=\left(-\frac{1}{2}a^2+a^2\right)-\left(-\frac{1}{2}+a\right)+(8-4a)-\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)$

$=a^2-5a+\frac{17}{2}$

$=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

따라서 주어진 정적분은 $a=\frac{5}{2}$에서 최솟값 $\frac{9}{4}$를 갖는다. 답 $\frac{5}{2}$

0816 전략 $g(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^a g(x)dx=2\int_0^a g(x)dx$, $g(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^a g(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $xf(x)-f(x)=3x^4-3x$에서

$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$

$\therefore f(x)=3x(x^2+x+1)=3x^3+3x^2+3x$

$\therefore \int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^2(3x^3+3x^2+3x)dx$

$=2\int_0^2 3x^2dx$

$=2\left[x^3\right]_0^2$

$=2\cdot 8=16$ 답 ②

0817 전략 $\int_p^q f(x)dx=\int_p^r f(x)dx+\int_r^q f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$, a, b, c는 상수)로 놓으면

$f(0)=-1$이므로

$c=-1$

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$에서

$\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$이므로

$\int_{-1}^0 f(x)dx=0$

$\therefore \int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=0$

이때

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx-1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(ax^2-1)dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3-x\right]_0^1=2\left(\frac{a}{3}-1\right)$$

이므로 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$에서

$$2\left(\frac{a}{3}-1\right)=0 \qquad \therefore a=3$$

한편

$$\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1}(3x^2+bx-1)dx$$
$$=\left[x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_0^1$$
$$=1+\frac{b}{2}-1=\frac{b}{2}$$

이므로 $\int_{0}^{1} f(x)dx=0$에서

$$\frac{b}{2}=0 \qquad \therefore b=0$$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로

$f(2)=12-1=11$ 답 ①

0818 전략 도함수 $h'(x)$가 우함수인지 기함수인지 알아본다.

풀이 $f(x)$와 $g(x)$가 다항함수이므로 $h(x)=f(x)g(x)$는 다항함수이다.

이때 모든 실수 x에 대하여

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$$

이므로 함수 $h(x)$는 기함수이다.

따라서 $h'(x)$는 우함수, $xh'(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=\int_{-3}^{3}\{xh'(x)+5h'(x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^{3}xh'(x)dx+5\int_{-3}^{3}h'(x)dx$$
$$=10\int_{0}^{3}h'(x)dx=10\Big[h(x)\Big]_0^3$$
$$=10\{h(3)-h(0)\}$$
$$=10h(3)\ (\because \underbrace{h(0)=0}_{h(0)=-h(0)\text{에서 }h(0)=0})$$

즉 $10h(3)=10$이므로 $h(3)=1$ 답 ①

라쎈 특강

함수 $h(x)$가 기함수인 다항함수이므로 자연수 n에 대하여

$$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_3x^3+a_1x$$
($a_1, a_3, \cdots, a_{2n+1}$은 상수)

로 놓으면

$$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}$$
$$+\cdots+3a_3x^2+a_1$$

따라서 $h'(x)$는 우함수이다.

0819 전략 $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+2}^{b+2} f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $g(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt$이므로

$$g(a+4)-g(a)=\int_{-2}^{a+4} f(t)dt-\int_{-2}^{a} f(t)dt$$
$$=\int_{-2}^{a} f(t)dt+\int_{a}^{a+4} f(t)dt-\int_{-2}^{a} f(t)dt$$
$$=\int_{a}^{a+4} f(t)dt$$
$$=\int_{a}^{a+4} f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에서 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{a+2}^{a+4} f(x)dx=\int_{a}^{a+2} f(x)dx$$
$$=\int_{a-2}^{a} f(x)dx$$
$$\vdots$$
$$=\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$\therefore \int_{a}^{a+4} f(x)dx=\int_{a}^{a+2} f(x)dx+\int_{a+2}^{a+4} f(x)dx$$
$$=2\int_{-1}^{1} f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 (함수 $f(x)$는 우함수이다.)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}x\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에서

$$g(a+4)-g(a)=\int_{a}^{a+4} f(x)dx=2\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\cdot1=2$$

답 ②

0820 전략 먼저 $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$임을 이용하여 주어진 등식의 우변을 간단히 한다.

풀이 일차함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$$f(x)=-2x+\int_{0}^{3} f(t)dt-\int_{0}^{1} f(t)dt$$
$$=-2x+\int_{1}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{3} f(t)dt$$
$$=-2x+\int_{1}^{3} f(t)dt$$

$\int_1^3 f(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots ㉠$

로 놓으면 $f(x)=-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_{1}^{3}(-2t+k)dt=k, \qquad \Big[-t^2+kt\Big]_1^3=k$$
$$(-9+3k)-(-1+k)=k \qquad \therefore k=8$$
$$\therefore f(x)=-2x+8$$

답 $f(x)=-2x+8$

0821 전략 $a+\int_0^1\{f(t)\}^2dt=k$로 놓고 a를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a+\int_0^1\{f(t)\}^2dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$a+\int_0^1(t+k)^2dt=k$, $a+\int_0^1(t^2+2kt+k^2)dt=k$

$a+\left[\frac{1}{3}t^3+kt^2+k^2t\right]_0^1=k$, $a+\frac{1}{3}+k+k^2=k$

$\therefore a=-k^2-\frac{1}{3}$

따라서 a는 $k=0$에서 최댓값 $-\frac{1}{3}$을 갖는다. 답 ①

0822 전략 $\int_0^1g(t)dt=k$, $\int_0^2f(t)dt=l$로 놓고 k, l의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^1g(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

$\int_0^2f(t)dt=l$ (l은 상수) …… ㉡

로 놓으면 $f(x)=2x-1+k$, $g(x)=4x+5-l$

㉠에서 $\int_0^1(4t+5-l)dt=k$

$\left[2t^2+(5-l)t\right]_0^1=k$, $2+5-l=k$

$\therefore k+l=7$ …… ㉢

㉡에서 $\int_0^2(2t-1+k)dt=l$

$\left[t^2+(-1+k)t\right]_0^2=l$, $4-2+2k=l$

$\therefore 2k-l=-2$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $k=\frac{5}{3}$, $l=\frac{16}{3}$

$\therefore f(x)=2x-1+\frac{5}{3}=2x+\frac{2}{3}$,

$g(x)=4x+5-\frac{16}{3}=4x-\frac{1}{3}$

따라서 $f(2)=4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$, $g(1)=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$이므로

$f(2)-g(1)=1$ 답 1

0823 전략 $\frac{d}{dx}\int_a^xf(t)dt=f(x)$임을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-f(-1)+2+1$ $\therefore f(-1)=3$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$

$xf'(x)=x(6x-2)$ $\therefore f'(x)=6x-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x-2)dx$

$=3x^2-2x+C$

$f(-1)=3$이므로

$3+2+C=3$ $\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-2$이므로

$f(2)=12-4-2=6$ 답 ④

0824 전략 주어진 구간에서 함수 $g(x)$가 증가하도록 하는 조건을 도함수 $g'(x)$를 이용하여 파악한다.

풀이 $g(x)=\int_0^xf(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

$=-x^2-4x+a$ ← $y=-x^2-4x+a=-(x+2)^2+a+4$의 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식이 $x=-2$인 포물선이다.

이때 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 증가하려면 $0\le x\le1$에서 $g'(x)\ge0$이어야 한다.

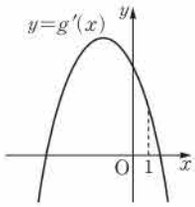
오른쪽 그림에서 $g'(0)\ge0$이어야 하므로

$a\ge0$ …… ㉠

또 $g'(1)\ge0$이어야 하므로

$-1-4+a\ge0$

$\therefore a\ge5$ …… ㉡



㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\ge5$

따라서 a의 최솟값은 5이다. 답 5

0825 전략 먼저 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 찾는다.

풀이 $f(x)=\int_{-2}^x(2-|t|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2-|x|$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0\le x\le3$)

x	0	…	2	…	3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(2)=\int_{-2}^2(2-|t|)dt=2\int_0^2(2-|t|)dt$

← $y=2-|x|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 우함수이다.

$=2\int_0^2(2-t)dt$

$=2\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2$

$=2\cdot(4-2)=4$ 답 ⑤

0826 전략 $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^xf(t)dt=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a^2}^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x^2)-F(a^2)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{F(x^2)-F(a^2)}{x^2-a^2}\cdot(x+a)$

$x^2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow a$일 때 $t\longrightarrow a^2$이므로

$\lim_{x\to a}\frac{F(x^2)-F(a^2)}{x^2-a^2}\cdot(x+a)=\lim_{t\to a^2}\frac{F(t)-F(a^2)}{t-a^2}\cdot2a$

$=2aF'(a^2)$

$=2af(a^2)$ 답 ⑤

0827 전략 $F'(x)=f(x)$일 때, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$임을 이용한다.

풀이 $\int_1^3\{5f'(x)-4x\}dx=\left[5f(x)-2x^2\right]_1^3$

$=\{5f(3)-18\}-\{5f(1)-2\}$

$=5f(3)-5f(1)-16$

$=5f(3)-26$ ($\because$ $f(1)=2$) ⋯ ❶

따라서 $5f(3)-26=4$이므로 $5f(3)=30$

$\therefore f(3)=6$ ⋯ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 정적분의 값을 $f(3)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0828 전략 정적분의 성질을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서

$\int_n^{n+3} f(x)dx=\int_n^{n+1} 4x\,dx=\left[2x^2\right]_n^{n+1}$

$=2(n+1)^2-2n^2=4n+2$

$\therefore \int_0^9 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx+\int_6^9 f(x)dx$

$=(4\cdot0+2)+(4\cdot3+2)+(4\cdot6+2)$

$=42$ ⋯ ❶

또 조건 (가)에서 $\int_0^1 f(x)dx=1$이므로

$\int_0^7 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$

$=1+(4\cdot1+2)+(4\cdot4+2)=25$ ⋯ ❷

$\therefore \int_7^9 f(x)dx=\int_7^0 f(x)dx+\int_0^9 f(x)dx$

$=\int_0^9 f(x)dx-\int_0^7 f(x)dx$

$=42-25=17$ ⋯ ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ $\int_0^9 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_0^7 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\int_7^9 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0829 전략 $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$, $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_{-a}^a(x^5+4x^3+2x^2-5x+a)dx=2\int_0^a(2x^2+a)dx$

$=2\left[\frac{2}{3}x^3+ax\right]_0^a$

$=2\left(\frac{2}{3}a^3+a^2\right)$

$=\frac{4}{3}a^3+2a^2$ ⋯ ❶

따라서 $\frac{4}{3}a^3+2a^2=a^2$이므로 $4a^3+3a^2=0$

$a^2(4a+3)=0$ $\therefore a=-\frac{3}{4}$ ($\because$ $a\neq0$) ⋯ ❷

답 $-\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0830 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 후 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=\int_0^x(t-1)(t-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a$

이때 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 $x=a$에서 극소이다. ⋯ ❶

한편 극댓값은

$f(1)=\int_0^1(t-1)(t-a)dt$

$=\int_0^1\{t^2-(a+1)t+a\}dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+1}{2}t^2+at\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-\frac{a+1}{2}+a$

$=\frac{3a-1}{6}$

이므로 $\frac{3a-1}{6}=\frac{4}{3}$에서

$3a-1=8$ $\therefore a=3$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)$의 극솟값은

$f(3)=\int_0^3(t-1)(t-3)dt$

$=\int_0^3(t^2-4t+3)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^3$

$=9-18+9=0$ ⋯ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ 극솟값을 갖는 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	30 %

본책 128~131쪽

09 정적분의 활용

0831 $\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$

$=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

0832 $\int_{-3}^0\{-(x^2+3x)\}dx=\int_{-3}^0(-x^2-3x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^0$

$=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

0833 $\int_1^3|x^2-2x|dx$

$=\int_1^2(-x^2+2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$ 답 2

0834 $\int_{-3}^{-1}|-x^2-x+2|dx$

$=\int_{-3}^{-2}(x^2+x-2)dx+\int_{-2}^{-1}(-x^2-x+2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{-1}$

$=\frac{11}{6}+\frac{7}{6}=3$ 답 3

0835 (1) 곡선 $y=x^2-2$와 직선 $y=4x+3$의 교점의 x좌표는

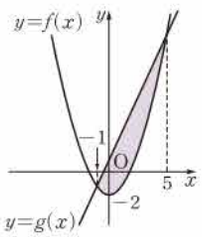
$x^2-2=4x+3$에서 $x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

$\therefore a=-1, b=5$ ($\because a<b$)

(2) $f(x)=x^2-2$, $g(x)=4x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구간 $[-1, 5]$에서

$f(x)\le g(x)$



(3) $\int_{-1}^5|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^5\{g(x)-f(x)\}dx$

$=\int_{-1}^5(-x^2+4x+5)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^5=36$

답 (1) $a=-1$, $b=5$ (2) $f(x)\le g(x)$ (3) 36

0836 (1) 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2-2x+4$의 교점의 x좌표는

$x^2=-x^2-2x+4$에서

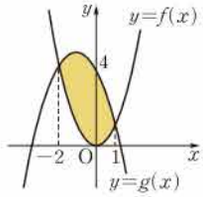
$2x^2+2x-4=0$, $2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$\therefore a=-2, b=1$ ($\because a<b$)

(2) $f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2-2x+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구간 $[-2, 1]$에서

$f(x)\le g(x)$



(3) $\int_{-2}^1|f(x)-g(x)|dx=\int_{-2}^1\{g(x)-f(x)\}dx$

$=\int_{-2}^1(-2x^2-2x+4)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^1=9$

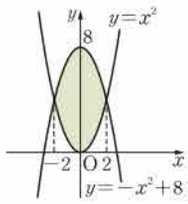
답 (1) $a=-2$, $b=1$ (2) $f(x)\le g(x)$ (3) 9

0837 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+8$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2+8$에서

$2x^2-8=0$

$2(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^2(-x^2+8-x^2)dx=\int_{-2}^2(-2x^2+8)dx$

$=2\int_0^2(-2x^2+8)dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2$

$=2\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$ 답 $\frac{64}{3}$

0838 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 $\boxed{0}$이므로 시각 t에서 점 P의 위치 x는

$x=\boxed{0}+\int_0^t(-t^2+2t)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^t=\boxed{-\frac{1}{3}t^3+t^2}$

$\therefore$ (가) 0 (나) $-\frac{1}{3}t^3+t^2$

(2) $\int_1^3v(t)dt=\int_1^3(-t^2+2t)dt$

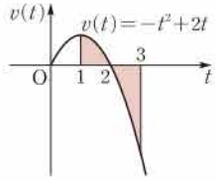
$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_1^3=-\frac{2}{3}$

(3) $\int_1^3|v(t)|dt$

$=\int_1^2(-t^2+2t)dt+\int_2^3(t^2-2t)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$



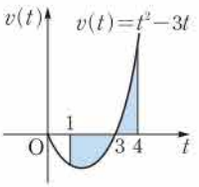
답 (1) (가) 0 (나) $-\frac{1}{3}t^3+t^2$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) 2

0839 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 0이므로 $t=4$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)dt=\int_0^4 (t^2-3t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_0^4=-\frac{8}{3}$$

(2) $\displaystyle\int_1^4 v(t)dt=\int_1^4 (t^2-3t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_1^4=-\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\int_1^4 |v(t)|dt$



$=\displaystyle\int_1^3 (-t^2+3t)dt+\int_3^4 (t^2-3t)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_3^4$

$=\frac{10}{3}+\frac{11}{6}=\frac{31}{6}$

답 (1) $-\frac{8}{3}$ (2) $-\frac{3}{2}$ (3) $\frac{31}{6}$

0840 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 $\boxed{1}$이므로 시각 t에서 점 P의 위치 x는

$x=\boxed{1}+\displaystyle\int_0^t (4-t)dt$

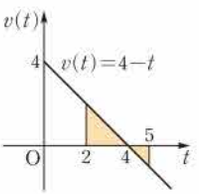
$=1+\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^t=\boxed{-\frac{1}{2}t^2+4t+1}$

∴ (가) 1 (나) $-\frac{1}{2}t^2+4t+1$

(2) $\displaystyle\int_2^5 v(t)dt=\int_2^5 (4-t)dt$

$=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_2^5=\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\int_2^5 |v(t)|dt$



$=\displaystyle\int_2^4 (4-t)dt+\int_4^5 (t-4)dt$

$=\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_2^4+\left[\frac{1}{2}t^2-4t\right]_4^5$

$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 (1) (가) 1 (나) $-\frac{1}{2}t^2+4t+1$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$

다른 풀이 (3) 점 P가 움직인 거리는 직선 $v(t)=4-t$와 t축 및 두 직선 $t=2$, $t=5$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\int_2^5 |v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot\underset{v(2)=4-2=2}{2}\cdot(4-2)+\frac{1}{2}\cdot|\underset{v(5)=4-5=-1}{-1}|\cdot(5-4)=\frac{5}{2}$$

0841 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 3이므로 $t=3$에서 점 P의 위치는

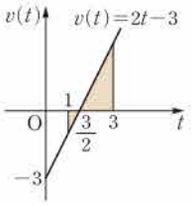
$3+\displaystyle\int_0^3 v(t)dt=3+\int_0^3 (2t-3)dt$

$=3+\left[t^2-3t\right]_0^3=3$

(2) $\displaystyle\int_1^3 v(t)dt=\int_1^3 (2t-3)dt$

$=\left[t^2-3t\right]_1^3=2$

(3) $\displaystyle\int_1^3 |v(t)|dt$



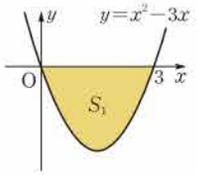
$=\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} (3-2t)dt+\int_{\frac{3}{2}}^3 (2t-3)dt$

$=\left[3t-t^2\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[t^2-3t\right]_{\frac{3}{2}}^3$

$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$

답 (1) 3 (2) 2 (3) $\frac{5}{2}$

0842 곡선 $y=x^2-3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=0$에서

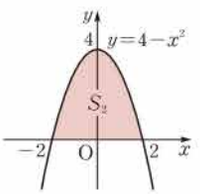


$x(x-3)=0$ ∴ $x=0$ 또는 $x=3$

∴ $S_1=\displaystyle\int_0^3 (-x^2+3x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$

곡선 $y=4-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $4-x^2=0$에서



$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$

∴ $x=-2$ 또는 $x=2$

∴ $S_2=\displaystyle\int_{-2}^2 (4-x^2)dx$

$=2\displaystyle\int_0^2 (4-x^2)dx=2\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$

∴ $2S_1+3S_2=2\cdot\frac{9}{2}+3\cdot\frac{32}{3}=41$ 답 41

다른 풀이 포물선 $y=x(x-3)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$S_1=\frac{(3-0)^3}{6}=\frac{9}{2}$

포물선 $y=-(x+2)(x-2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$S_2=\frac{\{2-(-2)\}^3}{6}=\frac{32}{3}$ ∴ $2S_1+3S_2=41$

라쎈 특강

포물선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이

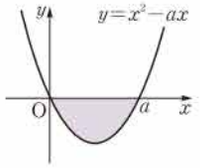
포물선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_\alpha^\beta |a(x-\alpha)(x-\beta)|dx=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

0843 곡선 $y=x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-ax=0$에서

$x(x-a)=0$ ∴ $x=0$ 또는 $x=a$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\displaystyle\int_0^a (-x^2+ax)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$

즉 $\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3}$이므로

$a^3=8 \quad \therefore a=2$ 답 ②

0844 $0\le x\le 1$에서 $\frac{1}{n}x^n\ge 0$이므로

$S_n=\int_0^1 \frac{1}{n}x^n dx$

$=\left[\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1$

$=\frac{1}{n(n+1)}$

$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ··· ❶

$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{20}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)$

$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$ ··· ❷

답 $\frac{20}{21}$

채점 기준	비율
❶ S_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{20}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

라쎈 특강

부분분수의 변형

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\ne B$)

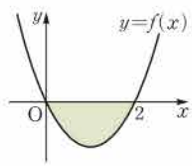
0845 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2-2x$

$y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=0$에서

$x(x-2)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

0846 $\int_0^3 |x^2-5x+4|dx$

$=\int_0^1(x^2-5x+4)dx+\int_1^3(-x^2+5x-4)dx$

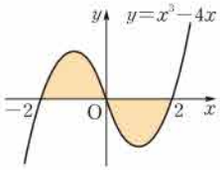
$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^3$

$=\frac{11}{6}+\frac{10}{3}=\frac{31}{6}$ 답 ③

0847 곡선 $y=x(x+2)(x-2)$와 x축의 교점의 x좌표는

$x(x+2)(x-2)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\pm 2$

따라서 $y=x(x+2)(x-2)=x^3-4x$



이므로 구하는 넓이는

$\int_{-2}^2 |x^3-4x|dx$

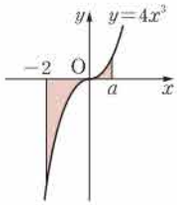
$=\int_{-2}^0(x^3-4x)dx$

$+\int_0^2(-x^3+4x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2$

$=4+4=8$ 답 8

0848 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\int_{-2}^a |4x^3|dx$

$=\int_{-2}^0(-4x^3)dx+\int_0^a 4x^3dx$

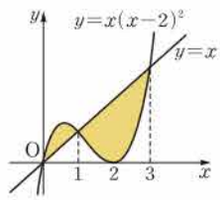
$=\left[-x^4\right]_{-2}^0+\left[x^4\right]_0^a=16+a^4$

따라서 $16+a^4=17$이므로

$a^4-1=0, \quad (a+1)(a-1)(a^2+1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$) 답 1

0849 곡선 $y=x(x-2)^2$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x(x-2)^2=x$에서



$x(x^2-4x+3)=0$

$x(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

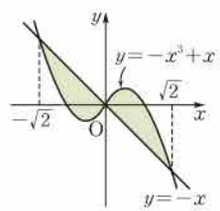
$\int_0^1\{x(x-2)^2-x\}dx+\int_1^3\{x-x(x-2)^2\}dx$

$=\int_0^1(x^3-4x^2+3x)dx+\int_1^3(-x^3+4x^2-3x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_1^3$

$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$ 답 ④

0850 곡선 $y=-x^3+x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는



$-x^3+x=-x$에서 $\quad x^3-2x=0$

$x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 구하는 넓이는

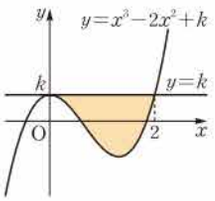
$\int_{-\sqrt{2}}^0\{-x-(-x^3+x)\}dx+\int_0^{\sqrt{2}}\{-x^3+x-(-x)\}dx$

$=\int_{-\sqrt{2}}^0(x^3-2x)dx+\int_0^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_{-\sqrt{2}}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_0^{\sqrt{2}}$

$=1+1=2$ 답 ①

0851 곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x^2+k=k$에서



$x^3-2x^2=0$, $x^2(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

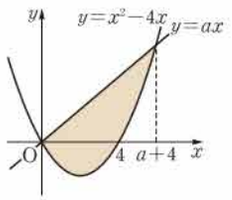
$$\int_0^2\{k-(x^3-2x^2+k)\}dx=\int_0^2(-x^3+2x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0852 곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=ax$에서



$x^2-(a+4)x=0$

$x\{x-(a+4)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+4$

위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^{a+4}\{ax-(x^2-4x)\}dx=\int_0^{a+4}\{-x^2+(a+4)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+4}{2}x^2\right]_0^{a+4}$$

$$=\frac{(a+4)^3}{6}$$

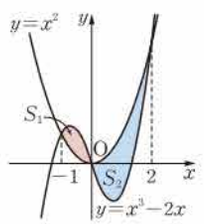
따라서 $\frac{(a+4)^3}{6}=36$이므로

$(a+4)^3=6^3$, $a+4=6$

$\therefore a=2$

답 2

0853 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서



$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서

$$S_1=\int_{-1}^0(x^3-2x-x^2)dx$$

$$=\int_{-1}^0(x^3-x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0=\frac{5}{12},$$

$$S_2=\int_0^2\{x^2-(x^3-2x)\}dx$$

$$=\int_0^2(-x^3+x^2+2x)dx$$

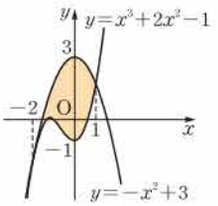
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

이므로

$$S_2-S_1=\frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$

0854 두 곡선 $y=x^3+2x^2-1$, $y=-x^2+3$의 교점의 x좌표는



$x^3+2x^2-1=-x^2+3$에서

$x^3+3x^2-4=0$

$(x+2)^2(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1\{-x^2+3-(x^3+2x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^1(-x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-2}^1=\frac{27}{4}$$

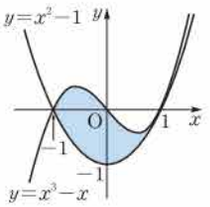
답 ③

0855 두 곡선 $y=x^3+ax$, $y=x^2+b$가 모두 점 $(1, 0)$을 지나므로

$1+a=0$, $1+b=0$

$\therefore a=-1$, $b=-1$

두 곡선 $y=x^3-x$, $y=x^2-1$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=x^2-1$에서



$x^3-x^2-x+1=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^1\{x^3-x-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^1(x^3-x^2-x+1)dx$$

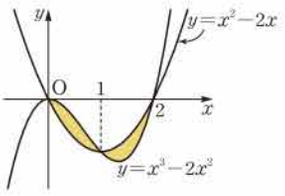
$$=2\int_0^1(-x^2+1)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0856 두 곡선 $y=x^3-2x^2$, $y=x^2-2x$의 교점의 x좌표는



$x^3-2x^2=x^2-2x$에서

$x^3-3x^2+2x=0$

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{x^3-2x^2-(x^2-2x)\}dx$$

$$+\int_1^2\{x^2-2x-(x^3-2x^2)\}dx$$

$$=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ②

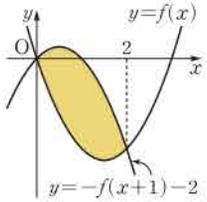
0857 $y=-f(x+1)-2$
$=-\{(x+1)^2-3(x+1)\}-2$
$=-x^2+x$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x+1)-2$의 교점의 x좌표는

$x^2-3x=-x^2+x$에서

$2x^2-4x=0$, $2x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$\int_0^2\{-x^2+x-(x^2-3x)\}dx$

$=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

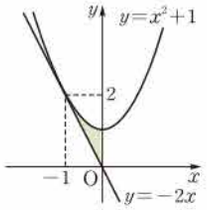
참고 곡선 $y=-f(x+1)-2$는 곡선 $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

0858 $y=x^2+1$에서 $y'=2x$이므로 곡선 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$2\cdot(-1)=-2$

따라서 접선의 방정식은

$y-2=-2\{x-(-1)\}$, 즉 $y=-2x$



이므로 구하는 넓이는

$\int_{-1}^0\{x^2+1-(-2x)\}dx=\int_{-1}^0(x^2+2x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^0$

$=\frac{1}{3}$ 답 ①

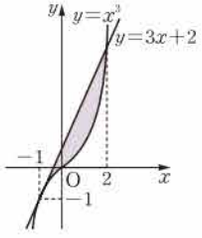
0859 $y=x^3$에서 $y'=3x^2$이므로 곡선 위의 점 $(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는

$3\cdot(-1)^2=3$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-1)=3\{x-(-1)\}$,

즉 $y=3x+2$



곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x+2$의 교점의 x좌표는 $x^3=3x+2$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x-2)(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^2(3x+2-x^3)dx=\int_{-1}^2(-x^3+3x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$

$=\frac{27}{4}$ 답 $\frac{27}{4}$

0860 $y=x^2-2x+2$에서 $y'=2x-2$

접점의 좌표를 (t, t^2-2t+2)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$2t-2=2$ $\therefore t=2$

즉 접점의 좌표가 $(2, 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x-2)$, 즉 $y=2x-2$

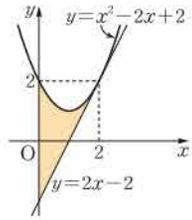
따라서 구하는 넓이는

$\int_0^2\{x^2-2x+2-(2x-2)\}dx$

$=\int_0^2(x^2-4x+4)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$



0861 $y=-x^2+4x-3$에서 $y'=-2x+4$

곡선 위의 점 $(0, -3)$에서의 접선의 기울기는

$-2\cdot0+4=4$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=4x$, 즉 $y=4x-3$

곡선 위의 점 $(4, -3)$에서의 접선의 기울기는

$-2\cdot4+4=-4$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=-4(x-4)$, 즉 $y=-4x+13$

두 접선의 교점의 x좌표는 $4x-3=-4x+13$에서

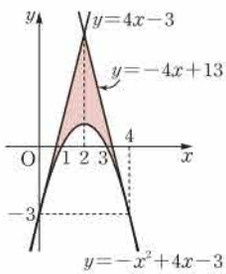
$8x=16$ $\therefore x=2$

이때 오른쪽 그림의 색칠한 부분이 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\int_0^2\{4x-3$
$-(-x^2+4x-3)\}dx$

$=2\int_0^2x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$=2\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$ 답 ⑤



참고 곡선 $y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$과 두 점 $(0, -3)$, $(4, -3)$이 각각 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=-x^2+4x-3$ 위의 두 점 $(0, -3)$, $(4, -3)$에서의 접선도 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
따라서 위의 그림에서 색칠한 부분이 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

0862 (1) $y=x^2-3x+3$에서 $y'=2x-3$

접점의 좌표를 (t, t^2-3t+3)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2t-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-3t+3)=(2t-3)(x-t)$

$\therefore y=(2t-3)x-t^2+3$

이 직선이 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=2(2t-3)-t^2+3$, $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 두 접선의 방정식은

$y=-x+2$, $y=3x-6$ ⋯ ❶

(2) $\int_1^2\{x^2-3x+3-(-x+2)\}dx$

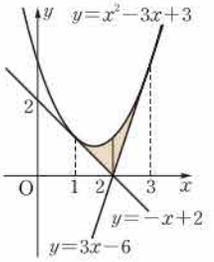
$+\int_2^3\{x^2-3x+3-(3x-6)\}dx$

$=\int_1^2(x^2-2x+1)dx$

$+\int_2^3(x^2-6x+9)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_2^3$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ ··· ❷



(1) $y=-x+2$, $y=3x-6$ (2) $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 두 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

라쎈 특강

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 (a, b)에서 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 한다.

(ii) 접선의 기울기 $f'(t)$를 구한다.

(iii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 $x=a$, $y=b$를 대입하여 t의 값을 구한다.

(iv) t의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입한다.

0863 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_{-2}^{k}(x^2+2x)dx=0$, $\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-2}^{k}=0$

$\frac{1}{3}k^3+k^2-\frac{4}{3}=0$, $k^3+3k^2-4=0$

$(k+2)^2(k-1)=0$ $\therefore k=1$ ($\because k>0$)

1

0864 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^2\{-x^2(x-2)-ax(x-2)\}dx=0$

$\int_0^2\{-x^3+(2-a)x^2+2ax\}dx=0$

$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2-a}{3}x^3+ax^2\right]_0^2=0$

$-4+\frac{8(2-a)}{3}+4a=0$

$\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}=0$ $\therefore a=-1$

-1

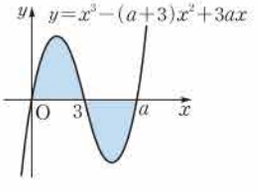
0865 곡선 $y=x^3-(a+3)x^2+3ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-(a+3)x^2+3ax=0$에서

$x(x-3)(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^a\{x^3-(a+3)x^2+3ax\}dx=0$



$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+3}{3}x^3+\frac{3}{2}ax^2\right]_0^a=0$

$\frac{1}{4}a^4-\frac{a+3}{3}a^3+\frac{3}{2}a^3=0$

$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^3=0$, $a^3(a-6)=0$

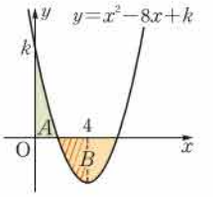
$\therefore a=6$ ($\because a>3$)

⑤

0866 $A:B=1:2$에서 $B=2A$

곡선 $y=x^2-8x+k=(x-4)^2+k-16$이 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 도형의 넓이는

$\frac{B}{2}=A$ ··· ❶



즉 곡선 $y=x^2-8x+k$와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^4(x^2-8x+k)dx=0$ ··· ❷

$\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+kx\right]_0^4=0$, $\frac{64}{3}-64+4k=0$

$\therefore k=\frac{32}{3}$ ··· ❸

$\frac{32}{3}$

채점 기준	비율
❶ A와 넓이가 같은 부분을 찾을 수 있다.	30 %
❷ $\int_0^4(x^2-8x+k)dx=0$임을 알 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0867 곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+4x=mx$에서

$x^2+(m-4)x=0$, $x(x+m-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4-m$

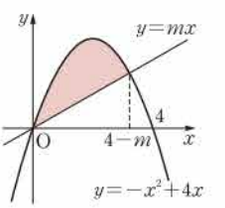
이때 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는

$\int_0^{4-m}(-x^2+4x-mx)dx$

$=\int_0^{4-m}\{-x^2+(4-m)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{4-m}{2}x^2\right]_0^{4-m}$

$=\frac{(4-m)^3}{6}$



이고, 곡선 $y=-x^2+4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^4(-x^2+4x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$

이므로 $\frac{(4-m)^3}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$

$\therefore (4-m)^3=32$

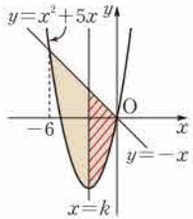
⑤

0868 곡선 $y=x^2+5x$와 직선 $y=-x$의 교점의 x좌표는 $x^2+5x=-x$에서

$x^2+6x=0$, $x(x+6)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=0$

이때 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{-6}^{0}\{-x-(x^2+5x)\}dx$$
$$=\int_{-6}^{0}(-x^2-6x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{-6}^{0}=36$$

이고, 위의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

$$\int_{k}^{0}\{-x-(x^2+5x)\}dx=\int_{k}^{0}(-x^2-6x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{k}^{0}$$
$$=\frac{1}{3}k^3+3k^2$$

이므로 $\frac{1}{3}k^3+3k^2=\frac{1}{2}\cdot 36$

$k^3+9k^2-54=0$

$(k+3)(k^2+6k-18)=0$

$\therefore k=-3\ (\because -6<k<0)$ 답 -3

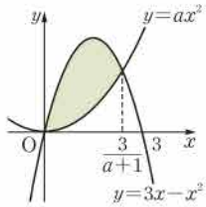
참고 곡선 $y=x^2+5x$와 직선 $y=-x$로 둘러싸인 도형은 구간 $[-6, 0]$에서 그려지므로 이 도형의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분하려면 $-6<k<0$이어야 한다.

0869 두 곡선 $y=3x-x^2$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는

$3x-x^2=ax^2$에서 $(a+1)x^2-3x=0$

$x\{(a+1)x-3\}=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{3}{a+1}$

이때 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{\frac{3}{a+1}}(3x-x^2-ax^2)dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{3}{a+1}}\{3x-(a+1)x^2\}dx$$
$$=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{a+1}{3}x^3\right]_{0}^{\frac{3}{a+1}}=\frac{9}{2(a+1)^2}$$

이고, 곡선 $y=3x-x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{3}(3x-x^2)dx=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2}$$

이므로 $\frac{9}{2(a+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{4}$

$(a+1)^2=2$ $\therefore a=\sqrt{2}-1\ (\because a>0)$ 답 ①

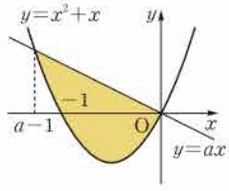
0870 곡선 $y=x^2+x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는

$x^2+x=ax$에서

$x^2+(1-a)x=0$, $x(x+1-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a-1$ ··· ❶

이때 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{a-1}^{0}\{ax-(x^2+x)\}dx$$
$$=\int_{a-1}^{0}\{-x^2+(a-1)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a-1}{2}x^2\right]_{a-1}^{0}=-\frac{(a-1)^3}{6}$$ ··· ❷

이고, 곡선 $y=x^2+x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}(-x^2-x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{6}$$ ··· ❸

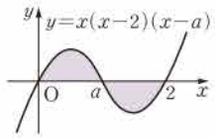
이므로 $-\frac{(a-1)^3}{6}=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore (1-a)^3=2$ ··· ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❹ $(1-a)^3$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0871 $0<a<2$이므로 곡선 $y=x(x-2)(x-a)$는 오른쪽 그림과 같다.



이 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\int_{0}^{a}x(x-2)(x-a)dx$$
$$+\int_{a}^{2}\{-x(x-2)(x-a)\}dx$$
$$=\int_{0}^{a}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$
$$+\int_{a}^{2}\{-x^3+(a+2)x^2-2ax\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_{0}^{a}$$
$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{a+2}{3}x^3-ax^2\right]_{a}^{2}$$
$$=\left(-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3\right)+\left(-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{6}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$

이 식의 양변을 a에 대하여 미분하면

$$S'(a)=-\frac{2}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}$$
$$=-\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$$

(a^2-2a-2: $0<a<2$에서 $a^2-2a-2<0$)

$S'(a)=0$에서 $a=1\ (\because 0<a<2)$

a	0	⋯	1	⋯	2
$S'(a)$		−	0	+	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $0<a<2$에서 $S(a)$는 $a=1$일 때 극소이면서 최소이다.

답 ③

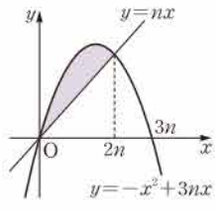
0872 곡선 $y=-x^2+3nx$와 직선 $y=nx$의 교점의 x좌표는

$-x^2+3nx=nx$에서

$x^2-2nx=0$

$x(x-2n)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2n$

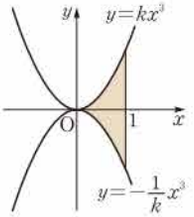


$$\therefore S_n=\int_0^{2n}(-x^2+3nx-nx)dx$$
$$=\int_0^{2n}(-x^2+2nx)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+nx^2\right]_0^{2n}=\frac{4}{3}n^3$$

따라서 $\frac{4}{3}n^3>40$에서 $n^3>30$

이때 $3^3=27$, $4^3=64$이므로 자연수 n의 최솟값은 4이다. ③

0873 두 곡선 $y=kx^3$, $y=-\frac{1}{k}x^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_0^1\left\{kx^3-\left(-\frac{1}{k}x^3\right)\right\}dx$$
$$=\left(k+\frac{1}{k}\right)\int_0^1 x^3dx$$
$$=\left(k+\frac{1}{k}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{k}\right)$$

이때 $k>0$, $\frac{1}{k}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{k}\right)\geq\frac{1}{4}\cdot2\sqrt{k\cdot\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}$$

$k=\frac{1}{k}$에서 $k^2=1$
$\therefore k=1$ ($\because k>0$)

(단, 등호는 $k=1$일 때 성립)

따라서 주어진 두 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $k=1$에서 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다. ②

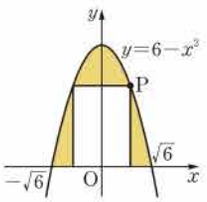
라쎈 특강

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0874 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 a ($0<a<\sqrt{6}$)라 하면



$P(a,\ 6-a^2)$

직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}(6-x^2)dx-S(a)$$

이므로 직사각형의 넓이가 최대일 때 최소이다.

이때

$$S(a)=2a\cdot(6-a^2)=-2a^3+12a$$

이므로

$$S'(a)=-6a^2+12=-6(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$$

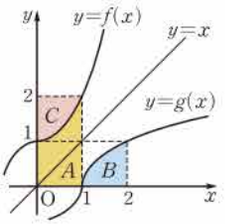
$S'(a)=0$에서 $a=\sqrt{2}$ ($\because 0<a<\sqrt{6}$)

a	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $0<a<\sqrt{6}$에서 $S(a)$는 $a=\sqrt{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최솟값은

$$\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}(6-x^2)dx-S(\sqrt{2})$$
$$=2\int_0^{\sqrt{6}}(6-x^2)dx-(-4\sqrt{2}+12\sqrt{2})$$
$$=2\left[6x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{6}}-8\sqrt{2}$$
$$=8\sqrt{6}-8\sqrt{2}$$ $8\sqrt{6}-8\sqrt{2}$

0875 함수 $f(x)=x^3+1$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



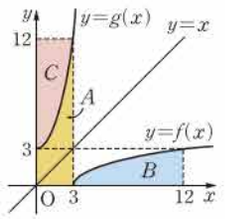
따라서 오른쪽 그림에서

(B의 넓이)=(C의 넓이)

이므로

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 g(x)dx=(A\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$
$$=(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})$$
$$=1\cdot2=2$$ 2

0876 함수 $f(x)=\sqrt{x-3}$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



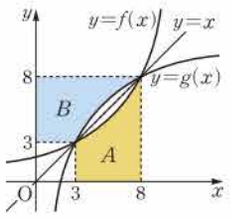
따라서 오른쪽 그림에서

(B의 넓이)=(C의 넓이)

이므로

$$\int_0^3 g(x)dx+\int_3^{12}f(x)dx=(A\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$
$$=(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})$$
$$=3\cdot12=36$$ ④

0877 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 오른쪽 그림에서

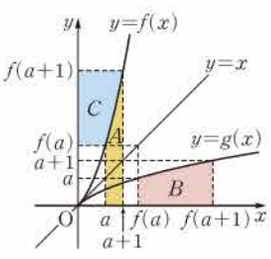
(A의 넓이)=(B의 넓이)=S

이므로

$$\int_3^8 g(x)dx=8^2-3^2-(B\text{의 넓이})=55-S$$

$\therefore a=55$ 55

0878 함수 $f(x)=x^2+x$ ($x\geq0$)의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



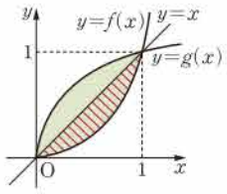
따라서 오른쪽 그림에서

(B의 넓이)=(C의 넓이)

이므로

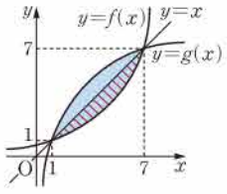
$\int_a^{a+1} f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(a+1)} g(x)dx$
$=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$
$=(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$
$=(a+1)f(a+1)-af(a)$
$=(a+1)\{(a+1)^2+a+1\}-a(a^2+a)$
$=3a^2+5a+2$
즉 $3a^2+5a+2=14$이므로 $\quad 3a^2+5a-12=0$
$(a+3)(3a-4)=0 \quad \therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>0)$ 답 $\frac{4}{3}$

0879 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$x^2=x$에서 $\quad x(x-1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$
이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는
$2\int_0^1 (x-x^2)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$
$=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ 답 ④

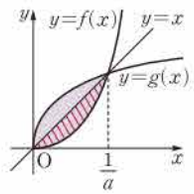
0880 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는



$\int_1^7 \{x-f(x)\}dx$
$=\int_1^7 x\,dx-\int_1^7 f(x)dx$
$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^7-13$
$=24-13=11$ ··· ❶
이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는
$2\cdot 11=22$ ··· ❷
답 22

채점 기준	비율
❶ 빗금 친 부분의 넓이를 구할 수 있다.	70 %
❷ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

0881 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



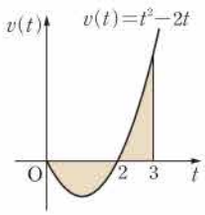
$ax^2=x$에서 $\quad x(ax-1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{a}$
이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 그 넓이는
$2\int_0^{\frac{1}{a}} (x-ax^2)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{a}}$
$=2\cdot\frac{1}{6a^2}=\frac{1}{3a^2}$
따라서 $\frac{1}{3a^2}=3$이므로 $\quad a^2=\frac{1}{9}$
$\therefore a=\frac{1}{3}\ (\because a>0)$ 답 $\frac{1}{3}$

0882 $t=0$에서 점 P의 위치를 x_0이라 하면 $t=2$에서 점 P의 위치는
$x_0+\int_0^2 (3-2t)dt=x_0+\left[3t-t^2\right]_0^2=x_0+2$
따라서 $x_0+2=10$이므로 $\quad x_0=8$
즉 $t=0$에서 점 P의 위치는 8이다. 답 ⑤

0883 $t=3$에서 점 P의 위치는
$0+\int_0^3 v(t)dt=\int_0^1 (t^2-t)dt+\int_1^3 (-t^2+4t-3)dt$
$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$
$=-\frac{1}{6}+\frac{4}{3}=\frac{7}{6}$ 답 ④

0884 $t=4$에서 점 P의 위치는
$0+\int_0^4 v(t)dt=\int_0^4 (3t^2+at)dt$
$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^4$
$=8a+64$
점 $P(8a+64)$와 점 $A(20)$ 사이의 거리가 60이므로
$|(8a+64)-20|=60, \quad 8a+44=\pm 60$
$\therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 2

0885 $t=a\ (a>0)$에서 점 P가 다시 원점을 지난다고 하면
$\int_0^a (t^2-2t)dt=0, \quad \left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^a=0$
$\frac{1}{3}a^3-a^2=0, \quad \frac{1}{3}a^2(a-3)=0$
$\therefore a=3\ (\because a>0)$
따라서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는



$\int_0^3 |t^2-2t|dt$
$=\int_0^2 (-t^2+2t)dt+\int_2^3 (t^2-2t)dt$
$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3$
$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ 답 ②

참고 점 P가 원점에서 출발하였으므로 다시 원점을 지나려면 위치의 변화량이 0이어야 한다.

0886 시각 t에서 두 점 A, B의 위치를 각각 $x_A(t)$, $x_B(t)$라 하면

$$x_A(t)=0+\int_0^t(-2t+6)dt=\left[-t^2+6t\right]_0^t=-t^2+6t,$$

$$x_B(t)=0+\int_0^t(2t-6)dt=\left[t^2-6t\right]_0^t=t^2-6t \quad \cdots ❶$$

$t=t_1$일 때 두 점 A, B가 다시 만나므로

$$-t_1^2+6t_1=t_1^2-6t_1, \quad 2t_1(t_1-6)=0$$

$$\therefore t_1=6\ (\because t_1>0) \quad \cdots ❷$$

또 두 점 A, B 사이의 거리는

$$|-t^2+6t-(t^2-6t)|=2|-t^2+6t|$$

$$=2|-(t-3)^2+9|$$

$0\le t\le 6$에서 두 점 사이의 거리는 $t=3$일 때 최대이므로

$t_2=3$ (두 점 A, B가 출발한 후 다시 만날 때까지의 시간) $\cdots ❸$

$$\therefore t_1+t_2=9 \quad \cdots ❹$$

답 9

채점 기준	비율
❶ 시각 t에서 두 점 A, B의 위치를 구할 수 있다.	30 %
❷ t_1의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ t_2의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ t_1+t_2의 값을 구할 수 있다.	10 %

0887 $v(t)=0$에서

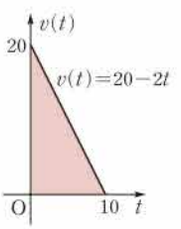
$$20-2t=0 \quad \therefore t=10$$

따라서 자동차는 제동을 건 지 10초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{10}|20-2t|dt=\int_0^{10}(20-2t)dt$$

$$=\left[20t-t^2\right]_0^{10}=100\,(\mathrm{m})$$ 답 ④

다른 풀이 제동을 건 후 자동차가 정지할 때까지 달린 거리는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\int_0^{10}|v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 20$$

$$=100\,(\mathrm{m})$$

0888 $v(t)=0$에서

$$15-10t=0 \quad \therefore t=\frac{3}{2}$$

따라서 물체는 위로 쏘아 올린 지 $\frac{3}{2}$초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 높이는

$$20+\int_0^{\frac{3}{2}}(15-10t)dt=20+\left[15t-5t^2\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=20+\frac{45}{4}=\frac{125}{4}\,(\mathrm{m})$$ 답 ②

참고 위로 쏘아 올린 물체는 최고 높이에 도달한 후 아래로 떨어진다. 즉 최고 높이에서 운동 방향을 바꾸므로 이때의 속도는 0이다.

0889 $t=a\ (a>0)$까지 열차가 달린 거리를 4 km라 하면

$$\int_0^a\left|t^2+\frac{2}{3}t\right|dt=4, \quad \int_0^a\left(t^2+\frac{2}{3}t\right)dt=4$$

$$\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{3}t^2\right]_0^a=4, \quad \frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}a^2=4$$

$$a^3+a^2-12=0, \quad (a-2)(a^2+3a+6)=0$$

$$\therefore a=2\ (\because \underbrace{a^2+3a+6>0}_{a^2+3a+6=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0})$$

즉 2분 후의 속도는

$$v(2)=2^2+\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{16}{3}\,(\mathrm{km/min})$$

으로 일정하므로 구하는 거리는

$$4+\int_2^5\frac{16}{3}dt=4+\left[\frac{16}{3}t\right]_2^5$$

$$=4+16=20\,(\mathrm{km})$$ 답 20 km

0890 $t=3$에서 점 P의 위치는

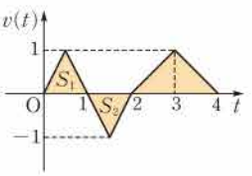
$$0+\int_0^3 v(t)dt=-\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)+\frac{1}{2}\cdot(3-2)\cdot 2$$

$$=-1$$ 답 −1

0891 $t=a\ (a>0)$에서 물체가 다시 원점을 지난다고 하면

$\int_0^a v(t)dt=0$이어야 한다.

오른쪽 그림에서 $S_1=S_2$이므로 $t=2$일 때 다시 처음으로 원점을 지난다.



답 2

0892 $t=9$에서 점 P의 위치는 $0+\int_0^9 v(t)dt$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot k-\left\{\frac{1}{2}\cdot(6-3)\cdot 2\right\}+\frac{1}{2}\{(8-7)+(9-6)\}k=11$$

$$\frac{7}{2}k-3=11 \quad \therefore k=4$$ 답 ②

0893 $t=3$에서 점 P의 위치는 $0+\int_0^3 v(t)dt$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3a-\left\{\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot a\right\}=2$$

$$\frac{1}{2}a=2 \quad \therefore a=4 \quad \cdots ❶$$

따라서 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5|v(t)|dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 12+\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot(5-3)\cdot 12$$

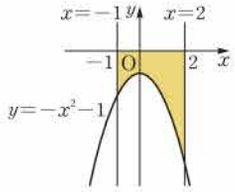
$$=22 \quad \cdots ❷$$

답 22

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리를 구할 수 있다.	50 %

0894 전략 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b|f(x)|dx$임을 이용한다.

풀이 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{2}|-x^2-1|dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{2}$$
$$=6$$

답 ①

0895 전략 $f(x)$를 구한 후 $f(x)\geq 0$인 구간과 $f(x)\leq 0$인 구간으로 나누어 각 부분의 넓이를 구한다.

풀이 $f(x)=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

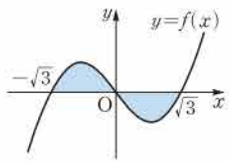
$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{3}x^3-x=0$에서

$\frac{1}{3}x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

따라서 구하는 넓이는



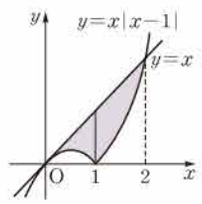
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}|f(x)|dx$$
$$=\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)dx$$
$$+\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{3}x^3+x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^{0}+\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

답 ④

0896 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 주어진 함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 $y=x|x-1|=\begin{cases}x^2-x & (x\geq 1)\\ -x^2+x & (x\leq 1)\end{cases}$

$y=x|x-1|$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



(i) $x\geq 1$일 때,

$x^2-x=x$에서 $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x\geq 1$)

(ii) $x\leq 1$일 때,

$-x^2+x=x$에서 $-x^2=0$ $\therefore x=0$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{x-(-x^2+x)\}dx+\int_{1}^{2}\{x-(x^2-x)\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}x^2dx+\int_{1}^{2}(-x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

답 ③

0897 전략 곡선 $y=ax^2$과 직선 AB가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 p라 하고 S_1을 p에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 두 점 A(2, 0), B(0, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ $\therefore y=-\frac{3}{2}x+3$

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=-\frac{3}{2}x+3$이 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 p $(0<p<2)$라 하면

$-\frac{3}{2}p+3=ap^2$ ····· ㉠

(직선 AB가 제1사분면에서 그려지는 구간)

$$\therefore S_1=\int_{0}^{p}\left(-\frac{3}{2}x+3-ax^2\right)dx$$
$$=\int_{0}^{p}\left(-ax^2-\frac{3}{2}x+3\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}ax^3-\frac{3}{4}x^2+3x\right]_{0}^{p}$$
$$=-\frac{1}{3}ap^3-\frac{3}{4}p^2+3p$$
$$=-\frac{1}{3}p\left(-\frac{3}{2}p+3\right)-\frac{3}{4}p^2+3p\ (\because \text{㉠})$$
$$=-\frac{1}{4}p^2+2p \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편 $S_1+S_2=\triangle ABO=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$이고 $S_1:S_2=13:3$이므로

$S_1=\frac{13}{13+3}\triangle ABO=\frac{13}{16}\cdot 3=\frac{39}{16}$ ····· ㉢

㉡, ㉢에서 $-\frac{1}{4}p^2+2p=\frac{39}{16}$, $4p^2-32p+39=0$

$(2p-3)(2p-13)=0$ $\therefore p=\frac{3}{2}$ ($\because 0<p<2$)

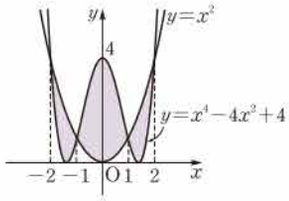
$p=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{9}{4}+3=\frac{9}{4}a$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

답 ②

0898 전략 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 후 두 곡선을 그려 위치 관계를 파악한다.

풀이 두 곡선 $y=x^4-4x^2+4$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는



$x^4-4x^2+4=x^2$에서

$x^4-5x^2+4=0$

$(x^2-1)(x^2-4)=0$

$(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm 1$ 또는 $x=\pm 2$

이때 위의 그림의 색칠한 부분이 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

(두 곡선 $y=x^2$, $y=x^4-4x^2+4$가 각각 y축에 대하여 대칭이므로 색칠한 부분도 y축에 대하여 대칭이다.)

$$2\left[\int_{0}^{1}(x^4-4x^2+4-x^2)dx+\int_{1}^{2}\{x^2-(x^4-4x^2+4)\}dx\right]$$
$$=2\left\{\int_{0}^{1}(x^4-5x^2+4)dx+\int_{1}^{2}(-x^4+5x^2-4)dx\right\}$$
$$=2\left(\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{5}{3}x^3-4x\right]_{1}^{2}\right)$$
$$=2\cdot\left(\frac{38}{15}+\frac{22}{15}\right)$$
$$=8$$

답 ②

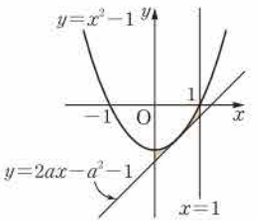
0899 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$임을 이용한다.

풀이 $y=x^2-1$에서 $y'=2x$

점 $P(a, a^2-1)$에서의 접선의 기울기는 $2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-1)=2a(x-a)$, 즉 $y=2ax-a^2-1$

따라서 주어진 도형의 넓이는



$$\int_0^1\{x^2-1-(2ax-a^2-1)\}dx$$

$$=\int_0^1(x^2-2ax+a^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\right]_0^1$$

$$=a^2-a+\frac{1}{3}$$

$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}$$

이므로 구하는 최솟값은 $\frac{1}{12}$이다. 답 $\frac{1}{12}$

0900 전략 $\int_0^1(1-x^2-k)dx=0$임을 이용한다.

풀이 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1(1-x^2-k)dx=0, \quad \int_0^1(-x^2+1-k)dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+(1-k)x\right]_0^1=0, \quad -\frac{1}{3}+1-k=0$$

$$\therefore k=\frac{2}{3}$$ 답 $\frac{2}{3}$

0901 전략 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이 두 곡선 $y=ax(1-x)$, $y=x^4-x^3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같음을 이용한다.

풀이 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1\{-x^4+x-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{7}{20}$$

또 두 곡선 $y=ax(1-x)$, $y=x^4-x^3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1\{ax(1-x)-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=\int_0^1(-x^4+x^3-ax^2+ax)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{1}{6}a$$

이므로 $\frac{1}{20}+\frac{1}{6}a=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{20}$

$$\frac{1}{6}a=\frac{1}{8} \quad \therefore a=\frac{3}{4}$$ 답 ④

다른 풀이 곡선 $y=ax(1-x)$가 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 이등분하므로

$$\int_0^1\{-x^4+x-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{-x^4+x-ax(1-x)\}dx$$

$$\int_0^1[-2x^4+x^3+x-\{-2x^4+2ax^2+(2-2a)x\}]dx=0$$

$$\int_0^1\{x^3-2ax^2+(2a-1)x\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}ax^3+\frac{2a-1}{2}x^2\right]_0^1=0, \quad \frac{1}{4}-\frac{2}{3}a+a-\frac{1}{2}=0$$

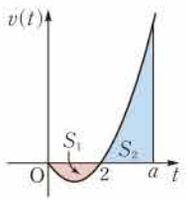
$$\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}=0 \quad \therefore a=\frac{3}{4}$$

0902 전략 먼저 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 구한다.

풀이 $v(t)=0$에서 $3t^2-6t=0$

$3t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

오른쪽 그림에서 $0\le t\le 2$일 때 $v(t)\le 0$이므로 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는



$$\int_0^2|v(t)|dt=\int_0^2(-3t^2+6t)dt$$

$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2=4$$

이때 $4<24$이므로 $a>2$이다.

따라서 위의 그림에서 $S_1+S_2=24$이어야 하고 $S_1=4$이므로

$$\int_2^a v(t)dt=24-4=20$$

또

$$\int_2^a v(t)\,dt=\int_2^a(3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_2^a=a^3-3a^2+4$$

이므로

$$a^3-3a^2+4=20, \quad a^3-3a^2-16=0$$

$$(a-4)(a^2+a+4)=0 \quad \therefore a=4\ (\because a^2+a+4>0)$$

$a^2+a+4=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

$\therefore v(a)=v(4)=48-24=24$ 답 24

0903 전략 $a(t)=\frac{d}{dt}v(t)$이므로 $a(t)$를 적분하여 $v(t)$를 구한다.

풀이 조건 (나)에 의하여 $t\ge 2$일 때 점 P의 속도 $v(t)$는

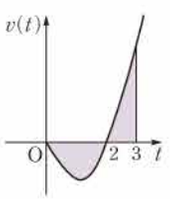
$$v(t)=v(2)+\int_2^t a(t)dt$$

이때 조건 (가)에서 $v(2)=16-16=0$이므로

$$v(t)=0+\int_2^t(6t+4)dt=\left[3t^2+4t\right]_2^t=3t^2+4t-20$$

$$\therefore v(t)=\begin{cases}2t^3-8t & (0\le t\le 2)\\ 3t^2+4t-20 & (t\ge 2)\end{cases}$$

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는



$$\int_0^3|v(t)|dt$$

$$=\int_0^2(-2t^3+8t)dt+\int_2^3(3t^2+4t-20)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}t^4+4t^2\right]_0^2+\left[t^3+2t^2-20t\right]_2^3$$

$$=8+9=17$$ 답 17

0904 전략 시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 구한 후 두 점 P, Q 사이의 거리는 $|(\text{P의 위치})-(\text{Q의 위치})|$임을 이용한다.

풀이 시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$$x_P(t)=1+\int_0^t(3t^2+4t-7)dt$$
$$=1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_0^t$$
$$=t^3+2t^2-7t+1$$
$$x_Q(t)=8+\int_0^t(2t+4)dt$$
$$=8+\left[t^2+4t\right]_0^t$$
$$=t^2+4t+8$$

$t=a\,(a>0)$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 4가 된다고 하면

$|a^3+2a^2-7a+1-(a^2+4a+8)|=4$에서

$|a^3+a^2-11a-7|=4$, $a^3+a^2-11a-7=\pm4$

(i) $a^3+a^2-11a-7=4$일 때,

$a^3+a^2-11a-11=0$, $(a^2-11)(a+1)=0$

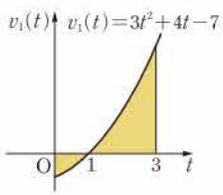
$\therefore a=\sqrt{11}$ ($\because a>0$)

(ii) $a^3+a^2-11a-7=-4$일 때,

$a^3+a^2-11a-3=0$, $(a-3)(a^2+4a+1)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

(i), (ii)에서 $t=3$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 되므로 이때까지 점 P가 움직인 거리는



$$\int_0^3|v_1(t)|dt$$
$$=\int_0^1(-3t^2-4t+7)dt+\int_1^3(3t^2+4t-7)dt$$
$$=\left[-t^3-2t^2+7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$$
$$=4+28=32$$

답 ⑤

0905 전략 $t=0$에서 점 P의 위치가 x_0일 때, $t=a$에서 점 P의 위치는 $x_0+\int_0^a v(t)dt$임을 이용한다.

풀이 $v(t)=0$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$2-t=0$ $\therefore t=2$

따라서 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$5+\int_0^2(2-t)dt=5+\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=5+2=7$$

답 7

0906 전략 $t=a$에서 $t=b$까지 물체가 움직인 거리는 $\int_a^b|v(t)|dt$임을 이용한다.

풀이 낙하를 시작한 지 $t\,(t>0)$초부터 $(t+1)$초까지 물체가 낙하한 거리는

$$\int_t^{t+1}|-10t|dt=\int_t^{t+1}10t\,dt=\left[5t^2\right]_t^{t+1}=10t+5\,(\text{m})$$

이때 물체가 1초 동안 낙하한 거리가 50 m 이상이 되려면

$10t+5\ge50$ $\therefore t\ge4.5$

따라서 물체가 1초 동안 낙하한 거리가 50 m 이상이 되는 것은 낙하를 시작한 지 4.5초가 지나서부터이다.

답 ③

0907 전략 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$, 움직인 거리는 $\int_a^b|v(t)|dt$임을 이용한다.

풀이 $t=0$에서 $t=c$까지 물체의 위치의 변화량은 $\int_0^c v(t)dt$이므로

$p=-2+3-16=-15$

또 움직인 거리는 $\int_0^c|v(t)|dt$이므로

$q=2+3+16=21$

$\therefore p+q=6$

답 6

0908 전략 $v(t)=0$을 만족시키는 t를 기준으로 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

풀이 ㄱ. $0<t\le7$에서 $v(t)$의 그래프는 t축과 서로 다른 두 점에서 만나고 그 두 점의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=7$일 때까지 운동 방향이 두 번 바뀐다.

ㄴ. $t=4$일 때 $|v(t)|$의 값이 가장 크므로 속력이 가장 크다.

ㄷ. $3\le t\le4$일 때, $v(t)=-3t+10$

$-3t+10=0$에서 $t=\frac{10}{3}$

따라서 $t=7$일 때 점 P의 위치는 $0+\int_0^7 v(t)dt$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{10}{3}\right)\cdot1-\frac{1}{2}\cdot\left(6-\frac{10}{3}\right)\cdot2+\frac{1}{2}\cdot(7-6)\cdot1=0$$

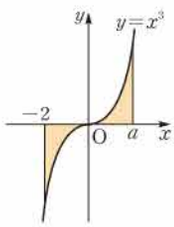
즉 $t=7$일 때 점 P는 원점에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0909 전략 $y\ge0$인 구간과 $y\le0$인 구간으로 나누어 각 부분의 넓이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{-2}^a|x^3|dx=\int_{-2}^0(-x^3)dx+\int_0^a x^3dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^0+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^a$$
$$=4+\frac{1}{4}a^4$$ … ❶

따라서 $4+\frac{1}{4}a^4=8$이므로

$a^4-16=0$

$(a+2)(a-2)(a^2+4)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) … ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

0910 전략 평행이동한 곡선의 함수식을 찾은 후 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 곡선 $y=-x^2$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면 곡선 $y=f(x)$와 겹쳐지므로

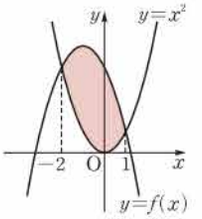
$f(x)=-(x+1)^2+5=-x^2-2x+4$ … ❶

두 곡선 $y=x^2$, $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2-2x+4$에서

$2x^2+2x-4=0$

$2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ ··· ❷



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}(-x^2-2x+4-x^2)dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}=9$$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 곡선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

0911 전략 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax+1$의 교점의 x좌표는 $x^2=ax+1$, 즉 $x^2-ax-1=0$의 실근이다.

이차방정식 $x^2-ax-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2+4>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 방정식 $x^2-ax-1=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-1$

이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2+4$

$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{a^2+4}$ $(\because \beta-\alpha>0)$ ··· ❶

따라서 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax+1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{\alpha}^{\beta}(ax+1-x^2)dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2+ax+1)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+x\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{a}{2}(\beta^2-\alpha^2)+(\beta-\alpha)$$

$$=(\beta-\alpha)\left\{-\frac{1}{3}\underbrace{(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)}_{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=a^2+1}+\frac{a}{2}(\alpha+\beta)+1\right\}$$

$$=\sqrt{a^2+4}\left\{-\frac{1}{3}(a^2+1)+\frac{1}{2}a^2+1\right\}$$

$$=\sqrt{a^2+4}\left(\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{3}\right)$$ ··· ❷

이때 $a^2\geq 0$이므로 구하는 최솟값은

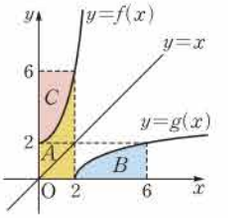
$\sqrt{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ ··· ❸

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\beta-\alpha$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0912 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=x^2+2$ $(x\geq 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. ··· ❶



따라서 오른쪽 그림에서

$(B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$

이므로

$$\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 g(x)dx=(A\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$

$$=(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})$$

$$=2\cdot 6$$

$$=12$$ ··· ❷

답 12

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.	40 %
❷ $\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 g(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60 %



memo



















memo







