

정답 및 풀이

I 도형의 방정식

01	평면좌표	2
02	직선의 방정식	9
03	원의 방정식	20
04	도형의 이동	33

II 집합과 명제

05	집합의 뜻과 포함 관계	41
06	집합의 연산	46
07	명제	53

III 함수

08	함수	64
09	합성함수와 역함수	69
10	유리함수	78
11	무리함수	88

01 평면좌표

I. 도형의 방정식

01 두 점 사이의 거리

확인

본책 6쪽

1 (1) $\overline{AB} = |6 - (-3)| = 9$

(2) $\overline{OA} = |-5| = 5$

답 (1) 9 (2) 5

2 (1) $\overline{AB} = \sqrt{\{2 - (-7)\}^2 + \{-2 - 1\}^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

(2) $\overline{OA} = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

답 (1) $3\sqrt{10}$ (2) $2\sqrt{13}$

유제

본책 7쪽

1 $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{AB}^2 = 18$

즉 $(a+3)^2 + (-1-2)^2 = 18$ 이므로

$a^2 + 6a + 0 = 0, \quad a(a+6) = 0$

$\therefore a = -6$ 또는 $a = 0$

답 -6, 0

2 $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$ 에서 $2\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로

$4\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$

즉 $4\{(-1-a)^2 + (-3+1)^2\} = (2+1)^2 + (-7+3)^2$ 이므로

$4(a^2 + 2a + 5) = 25, \quad 4a^2 + 8a - 5 = 0$

$(2a+5)(2a-1) = 0$

$\therefore a = -\frac{5}{2}$ 또는 $a = \frac{1}{2}$

답 $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

3 $\overline{AB} = \sqrt{(8-a)^2 + (a-2)^2}$

$= \sqrt{2a^2 - 20a + 68}$

$= \sqrt{2(a-5)^2 + 18}$

따라서 $a=5$ 일 때 선분 AB의 길이가 최소가 된다.

답 5

4 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 구하면

$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10},$

$\overline{BC} = \sqrt{(-4)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{32},$

$\overline{CA} = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{10}$

이므로 $\overline{AB} = \overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 인 이등변삼각형이다.

풀이 참조

5 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 구하면

$\overline{AB} = \sqrt{(1-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{2},$

$\overline{BC} = \sqrt{(k-1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{k^2 - 2k + 2},$

$\overline{CA} = \sqrt{(2-k)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{k^2 - 4k + 8}$

이때 삼각형 ABC가 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$k^2 - 4k + 8 = 2 + (k^2 - 2k + 2)$

$2k = 4 \quad \therefore k = 2$

답 2

6 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 구하면

$\overline{AB} = \sqrt{(-2+4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40},$

$\overline{BC} = \sqrt{(2+2)^2 + 8^2} = \sqrt{80},$

$\overline{CA} = \sqrt{(-4-2)^2 + (6-8)^2} = \sqrt{40}$

이므로 $\overline{AB} = \overline{CA}, \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CA} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{40} = 20$

답 20

7 점 P의 좌표를 $(a, 0)$, 점 Q의 좌표를 $(0, b)$ 라 하자.

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$(a-2)^2 + (-2)^2 = (a+1)^2 + (-3)^2$

$a^2 - 4a + 8 = a^2 + 2a + 10, \quad 6a = -2$

$\therefore a = -\frac{1}{3} \quad \therefore P\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$ 이므로

$(-2)^2 + (b-2)^2 = 1^2 + (b-3)^2$

$b^2 - 4b + 8 = b^2 - 6b + 10, \quad 2b = 2$

$\therefore b = 1 \quad \therefore Q(0, 1)$

$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{10}}{3}$

8 점 P(a, b)가 직선 $y=x-4$ 위에 있으므로

$b = a - 4 \quad \therefore P(a, a-4)$

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$(a-3)^2 + (a-4+2)^2 = (a-1)^2 + (a-4+1)^2$

$(a-2)^2 = (a-1)^2, \quad a^2 - 4a + 4 = a^2 - 2a + 1$

$2a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$

따라서 $b = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$ 이므로

$a + b = -1$

답 -1

9 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하자.

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$(a+3)^2 + (b+1)^2 = (a-1)^2 + (b+3)^2$

$8a - 4b = 0 \quad \therefore 2a - b = 0$

..... ㉠

$\overline{BP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b+3)^2 = (a+5)^2 + (b-3)^2$$

$$12a - 12b = -24 \quad \therefore a - b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=2, b=4$

$\therefore P(2, 4)$ ㉠ (2, 4)

10 점 P의 좌표를 $(0, a)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = \{(-3)^2 + (a+2)^2\} + \{3^2 + (a-1)^2\}$$

$$= 2a^2 + 2a + 23$$

$$= 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{45}{2}$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $a = -\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{45}{2}$ 를 갖고, 이때의 점 P의 좌표는 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ 이다.

㉠ 최솟값: $\frac{45}{2}$, 점 P의 좌표: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

11 점 P의 좌표를 $(a, a-3)$ 이라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$$

$$= \{(a+3)^2 + (a-3-2)^2\} + \{(a-2)^2 + (a-3-5)^2\}$$

$$= 4a^2 - 24a + 102$$

$$= 4(a-3)^2 + 66$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $a=3$ 일 때 최솟값 66을 갖고, 이때의 점 P의 좌표는 $(3, 0)$ 이다. ㉠ (3, 0)

12 점 P의 좌표를 $(a, -a+4)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= \{(a+2)^2 + (-a+4-3)^2\} + \{(a-2)^2 + (-a+4+1)^2\}$$

$$+ \{(a-1)^2 + (-a+4-5)^2\}$$

$$= 6a^2 - 12a + 36$$

$$= 6(a-1)^2 + 30$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 은 $a=1$ 일 때 최솟값 30을 갖는다.

㉠ 30

13 오른쪽 그림과 같이 두 대각선

BD, AC를 각각 x 축, y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 두 대각선의 교점은 원점이다.

이때 $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$, $D(d, 0)$ 이라 하면

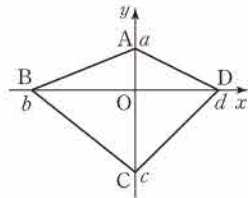
$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \{b^2 + (-a)^2\} + \{d^2 + (-c)^2\}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \{d^2 + (-a)^2\} + \{(-b)^2 + c^2\}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$ 이 성립한다. ㉠ 풀이 참조



14 오른쪽 그림과 같이 직선

BC를 x 축, 점 P를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 P는 원점이다.

이때 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$ 이라 하면 $Q(c, 0)$, $C(2c, 0)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$= \{(-c-a)^2 + (-b)^2\} + \{(2c-a)^2 + (-b)^2\}$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 5c^2 - 2ca,$$

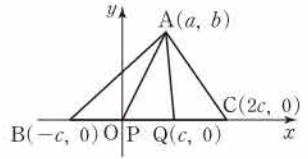
$$\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 + 4\overline{PQ}^2$$

$$= (a^2 + b^2) + \{(c-a)^2 + (-b)^2\} + 4c^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 5c^2 - 2ca$$

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 + 4\overline{PQ}^2$ 이 성립한다.

㉠ 풀이 참조



02 선분의 내분점

확인

본책 12쪽

1 ㉠ (1) 1 : 2 (2) 1 : 3

2 (1) $P\left(\frac{3 \cdot (-2) + 1 \cdot 6}{3+1}\right)$, 즉 $P(0)$

(2) $M\left(\frac{6+(-2)}{2}\right)$, 즉 $M(2)$

㉠ (1) 0 (2) 2

3 (1) $P\left(\frac{3 \cdot (-2) + 1 \cdot 6}{3+1}, \frac{3 \cdot (-3) + 1 \cdot 1}{3+1}\right)$, 즉 $P(0, -2)$

(2) $M\left(\frac{6+(-2)}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right)$, 즉 $M(2, -1)$

㉠ (1) (0, -2) (2) (2, -1)

4 (1) $G\left(\frac{-5+2+6}{3}, \frac{2-5-3}{3}\right)$, 즉 $G(1, -2)$

(2) $G\left(\frac{8-4+11}{3}, \frac{1+0+2}{3}\right)$, 즉 $G(5, 1)$

㉠ (1) (1, -2) (2) (5, 1)

유제

본책 15쪽

1 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3}{3+2}, \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1)}{3+2}\right), \text{ 즉 } (0, 2)$$

선분 AB를 1 : 4로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3}{1+4}, \frac{1 \cdot 4 + 4 \cdot (-1)}{1+4}\right), \text{ 즉 } (2, 0)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right), \text{ 즉 } (1, 1) \quad \text{답 } (1, 1)$$

2 선분 AB를 1 : b로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot a + b \cdot 4}{1+b}, \frac{1 \cdot 5 + b \cdot (-3)}{1+b}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{a+4b}{1+b}, \frac{-3b+5}{1+b}\right)$$

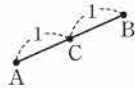
이 점의 좌표가 (2, -1)이므로

$$\frac{a+4b}{1+b} = 2, \quad \frac{-3b+5}{1+b} = -1, \quad a+2b=2, \quad b=3$$

$$\therefore a=-4, b=3 \quad \text{답 } a=-4, b=3$$

3 $\overline{AB}=2\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB} : \overline{BC}=2 : 1$

이때 점 C가 선분 AB 위에 있으므로 점 C는 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 1 : 1로 내분하는 점, 즉 선분 AB의 중점이다.



따라서 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{1+3}{2}\right), \text{ 즉 } (-1, 2) \quad \text{답 } (-1, 2)$$

4 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-7+6+a}{3}, \frac{2+(-1)+b}{3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{a-1}{3}, \frac{b+1}{3}\right)$$

이 점의 좌표가 (2, 1)이므로 $\frac{a-1}{3}=2, \frac{b+1}{3}=1$

$$\therefore a=7, b=2 \quad \text{답 } a=7, b=2$$

5 $\overline{AB}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot (-3)}{1+3}, \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2)}{1+3}\right), \text{ 즉 } (-2, -1)$$

$\overline{BC}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 1}{1+3}, \frac{1 \cdot (-6) + 3 \cdot 2}{1+3}\right), \text{ 즉 } (2, 0)$$

$\overline{CA}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점 F의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot (-3) + 3 \cdot 5}{1+3}, \frac{1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-6)}{1+3}\right), \text{ 즉 } (3, -5)$$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-2+2+3}{3}, \frac{-1+0+(-5)}{3}\right), \text{ 즉 } (1, -2)$$

$$\text{답 } (1, -2)$$

다른 풀이 삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-3+1+5}{3}, \frac{-2+2+(-6)}{3}\right), \text{ 즉 } (1, -2)$$

개념선라이트 보충학습

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 를 각각 $m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분하는 점을 차례대로 D, E, F라 할 때, 삼각형 ABC와 삼각형 DEF의 무게중심은 일치한다.

6 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 이라 하자.

$\overline{AB}$ 의 중점이 점 D(1, -4)이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=1, \quad \frac{y_1+y_2}{2}=-4$$

$$\therefore x_1+x_2=2, y_1+y_2=-8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{BC}$ 의 중점이 점 E(-3, 2)이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2}=-3, \quad \frac{y_2+y_3}{2}=2$$

$$\therefore x_2+x_3=-6, y_2+y_3=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\overline{CA}$ 의 중점이 점 F(7, 5)이므로

$$\frac{x_3+x_1}{2}=7, \quad \frac{y_3+y_1}{2}=5$$

$$\therefore x_3+x_1=14, y_3+y_1=10 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서

$$2(x_1+x_2+x_3)=10, \quad 2(y_1+y_2+y_3)=6$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3=5, y_1+y_2+y_3=3$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{5}{3}, 1\right) \quad \text{답 } \left(\frac{5}{3}, 1\right)$$

다른 풀이 세 점 D, E, F는 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 를 각각 1 : 1로 내분하는 점이므로 삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 DEF의 무게중심과 일치한다.

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{1+(-3)+7}{3}, \frac{-4+2+5}{3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{5}{3}, 1\right)$$

7 $\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

이때

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4+2)^2 + (2-6)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4+2)^2 + (3-6)^2} = 3\sqrt{5}$$

이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 2\sqrt{5} : 3\sqrt{5} = 2 : 3$$

따라서 점 D는 선분 BC를 2 : 3으로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot (-4)}{2+3}, \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{2+3}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$$\text{답 } \left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

8 $\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 외각의 이

등분선이므로

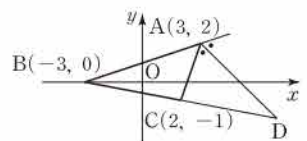
$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

이때

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$$

이므로 $\overline{BD} : \overline{CD} = 2\sqrt{10} : \sqrt{10} = 2 : 1$



$$\therefore \overline{BC} : \overline{CD} = 1 : 1$$

따라서 점 C는 선분 BD의 중점이므로 점 D의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{-3+a}{2} = 2, \quad \frac{0+b}{2} = -1$$

$$\therefore a=7, b=-2$$

$$\therefore D(7, -2)$$

답 (7, -2)

개념썬라이트 보충학습

삼각형의 외각의 이등분선의 성질

삼각형 ABC에서 $\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 외각의 이등분선일 때,

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$



9 $\triangle OAP = \frac{2}{3} \triangle OAB$ 이므로

$$\triangle OAP : \triangle OAB = 2 : 3$$

즉 오른쪽 그림에서 $\overline{AP} : \overline{AB} = 2 : 3$ 이므로

$$\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$$

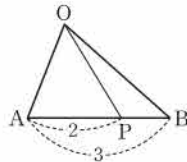
따라서 점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3)}{2+1}, \frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2)}{2+1} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{1}{3}, -\frac{10}{3} \right)$$

따라서 $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{10}{3}$ 이므로

$$a+b = -3$$

답 -3

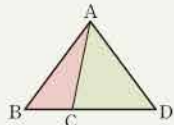


개념썬라이트 보충학습

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$$\triangle ABC : \triangle ACD = \overline{BC} : \overline{CD}$$



10 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치한다.

이때 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+2}{2}, \frac{1+5}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{a+2}{2}, 3 \right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 BD의 중점의 좌표는

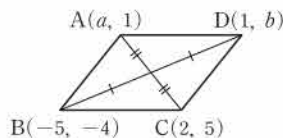
$$\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{-4+b}{2} \right), \text{ 즉 } \left(-2, \frac{b-4}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$\frac{a+2}{2} = -2, \quad \frac{b-4}{2} = 3$$

$$\therefore a = -6, b = 10$$

답 $a = -6, b = 10$



11 마름모 ABCD의 두

대각선 AC, BD의 중점은 일치한다.

이때 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+(-5)}{2}, \frac{a+1}{2} \right), \text{ 즉 } \left(-1, \frac{a+1}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{b+2}{2} \right), \text{ 즉 } \left(-1, \frac{b+2}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{2} \quad \therefore b = a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

한편 마름모의 네 변의 길이는 서로 같으므로 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 에서 $\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2$

$$\text{즉 } (2-3)^2 + (2-a)^2 = (2+5)^2 + (2-1)^2 \text{이므로}$$

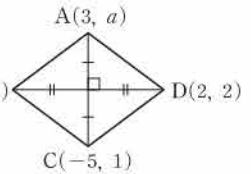
$$a^2 - 4a - 45 = 0, \quad (a+5)(a-9) = 0$$

$$\therefore a = 9 (\because a > 0)$$

$$a = 9 \text{를 } \textcircled{3} \text{에 대입하면 } b = 8$$

$$\therefore ab = 72$$

답 72



12 오른쪽 그림과 같이 평행사변형

ABCD의 두 대각선의 교점을 O, 두 삼각형 ABC, ACD의 무게중심을 각각 P, Q라 하면

$$\overline{BP} : \overline{PO} = \overline{DQ} : \overline{QO} = 2 : 1$$

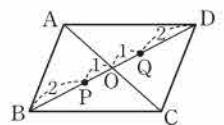
$$\therefore \overline{PO} = \frac{1}{3} \overline{BO}, \quad \overline{QO} = \frac{1}{3} \overline{DO}$$

이때 $\overline{BO} = \overline{DO}$ 이므로

$$\overline{PO} = \overline{QO}$$

따라서 두 대각선의 교점은 $\overline{PQ}$ 의 중점과 같으므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{5+1}{2} \right), \text{ 즉 } (0, 3) \quad \text{답 } (0, 3)$$



중단원 연습 문제

본책 19쪽

- | | | | |
|---------------------------|--------------------------|------------------------------------|------------------|
| 01 2 | 02 ③ | 03 풀이 참조 | 04 ③ |
| 05 ⑤ | 06 ⑦ -2c | 07 ④ | 08 160 |
| | 09 $3(a^2 + b^2 + 2c^2)$ | 10 $\frac{5}{9} < t < \frac{4}{5}$ | 11 $\frac{1}{2}$ |
| | 12 $a^2 + b^2 + 2c^2$ | 13 $\frac{13}{2}, \frac{11}{2}$ | 14 92 |
| 15 ④ | 16 18 | 17 6 | 18 14 |
| 19 ③ | | | |
| 20 $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ | | | |

01 전략 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 $l = \overline{AB}$ 이므로

$$\begin{aligned} l^2 &= \overline{AB}^2 = (-1-2t)^2 + (2t+3)^2 \\ &= 8t^2 + 16t + 10 \\ &= 8(t+1)^2 + 2 \end{aligned}$$

따라서 l^2 은 $t = -1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

답 2

02 전략 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하여 세 변의 길이 사이의 관계를 알아본다.

풀이 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 구하면

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(1+1)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{10}, \\ \overline{BC} &= \sqrt{(3\sqrt{3}-1)^2 + (-\sqrt{3}-3)^2} = 2\sqrt{10}, \\ \overline{CA} &= \sqrt{(-1-3\sqrt{3})^2 + (-3+\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이므로

$$\angle B = 60^\circ$$

답 ③

03 전략 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하여 세 변의 길이 사이의 관계를 알아본다.

풀이 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 구하면

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \overline{BC} &= \sqrt{(-b)^2 + (a-b+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \overline{CA} &= \sqrt{(a+b)^2 + \{-(a-b)\}^2} = \sqrt{2(a^2 + b^2)} \end{aligned}$$

이므로 $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

→ 2

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 길이를 a , b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
② 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형을 설명할 수 있다.	40 %

04 전략 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ 임을 이용한다.

풀이 삼각형 ABC의 외심 P에서 세 꼭짓점까지의 거리가 같으

므로 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} (a-3)^2 + (b-1)^2 &= (a-2)^2 + b^2 \\ a^2 + b^2 - 6a - 2b + 10 &= a^2 + b^2 - 4a + 4 \\ 2a + 2b &= 6 \quad \therefore a + b = 3 \end{aligned}$$

..... ㉠

$\overline{PB} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} (a-2)^2 + b^2 &= (a+1)^2 + (b-3)^2 \\ a^2 + b^2 - 4a + 4 &= a^2 + b^2 + 2a - 6b + 10 \\ 6a - 6b &= -6 \quad \therefore a - b = -1 \end{aligned}$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 2$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

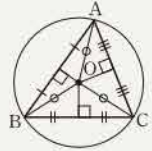
답 ③

개념블라이트 보충학습

삼각형의 외심의 성질

삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$



05 전략 점 P의 좌표를 $(a, a-1)$ 이라 하고 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 a 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a, a-1)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= \{(a-3)^2 + (a-1-4)^2\} + \{(a-2)^2 + (a-1+3)^2\} \\ &= 4a^2 - 16a + 42 \\ &= 4(a-2)^2 + 26 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $a = 2$ 일 때 최솟값 26을 갖고, 이때의 점 P의 좌표는 $(2, 1)$ 이므로 점 P(2, 1)과 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

답 ⑤

06 전략 $\overline{BD} = 2\overline{DC}$ 이므로 점 C의 좌표를 $(c, 0)$ 이라 하면 점 B의 좌표는 $(-2c, 0)$ 임을 이용한다.

풀이 A(a, b), C(c, 0)이라 하면 $\overline{BD} = 2\overline{DC}$ 에서 점 B의 좌표는 $(\frac{-2c}{3}, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 &= \{(-2c-a)^2 + (-b)^2\} + 2\{(c-a)^2 + (-b)^2\} \\ &= 3(a^2 + b^2 + 2c^2) \\ \overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2 &= a^2 + b^2 + 2c^2 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 3(\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2)$ 이 성립한다.

$$\therefore (가) -2c \quad (나) 3(a^2 + b^2 + 2c^2) \quad (다) a^2 + b^2 + 2c^2$$

$$\text{답 } (가) -2c \quad (나) 3(a^2 + b^2 + 2c^2) \quad (다) a^2 + b^2 + 2c^2$$

07 전략 y축 위의 점은 x좌표가 0임을 이용한다.

풀이 선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{4 \cdot (-9) + 3 \cdot a}{4+3}, \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 4}{4+3} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{3a-36}{7}, \frac{12}{7} \right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로

$$\frac{3a-36}{7} = 0, \quad 3a-36=0$$

$$\therefore a = 12$$

답 ④

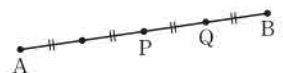
08 전략 주어진 조건을 그림으로 나타낸 후 선분의 길이의 비를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 선분

AB의 중점을 P, 선분 AB를

3 : 1로 내분하는 점을 Q라 하면

점 Q는 선분 PB의 중점이므로



$$\overline{AB}=2\overline{PB}=4\overline{PQ}$$

이때 P(1, 2), Q(4, 3)이므로

$$\overline{PQ}=\sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$$

따라서 $\overline{AB}=4\overline{PQ}=4\sqrt{10}$ 이므로

$$\overline{AB}^2=160$$

답 160

09 전략 제1사분면 위의 점의 x좌표, y좌표는 모두 양수임을 이용한다.

풀이 선분 AB를 t : (1-t)로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \cdot (-1) + (1-t) \cdot 4}{t + (1-t)}, \frac{t \cdot 4 + (1-t) \cdot (-5)}{t + (1-t)} \right),$$

$$\text{즉 } (-5t+4, 9t-5)$$

→ ①

이 점이 제1사분면 위에 있으려면

$$-5t+4>0, 9t-5>0 \quad \therefore \frac{5}{9}<t<\frac{4}{5}$$

→ ②

$$\text{답 } \frac{5}{9}<t<\frac{4}{5}$$

채점 기준	비율
① 선분 AB를 t : (1-t)로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	60 %
② t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

10 전략 세 점 A(x₁, y₁), B(x₂, y₂), C(x₃, y₃)에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$ 임을 이용한다.

풀이 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+3+b}{3}, \frac{-1+a+2}{3} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{b+5}{3}, \frac{a+1}{3} \right)$$

이 점이 직선 y=2x-3 위의 점이므로

$$\frac{a+1}{3}=2 \cdot \frac{b+5}{3}-3$$

$$a+1=2b+1 \quad \therefore a=2b$$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{b}{2b}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

11 전략 B(x, y), C(z, w)라 하고 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표와 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표를 구한다.

풀이 B(x, y)라 하면 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{6+x}{2}, \frac{4+y}{2} \right)$$

이 점의 좌표가 (3, 1)이므로

$$\frac{6+x}{2}=3, \frac{4+y}{2}=1 \quad \therefore x=0, y=-2$$

$$\therefore B(0, -2)$$

또 C(z, w)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{6+0+z}{3}, \frac{4+(-2)+w}{3} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{z+6}{3}, \frac{w+2}{3} \right)$$

이 점의 좌표가 (5, 2)이므로

$$\frac{z+6}{3}=5, \frac{w+2}{3}=2 \quad \therefore z=9, w=4$$

$$\therefore C(9, 4)$$

따라서 $\overline{BC}$ 를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 9 + 1 \cdot 0}{2+1}, \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)}{2+1} \right), \text{ 즉 } (6, 2)$$

이므로 a=6, b=2

$$\therefore a-b=4$$

답 ④

12 전략 넓이가 같은 두 삼각형의 높이가 같으면 밑변의 길이가 같음을 이용한다.

풀이 $\triangle OCD=\triangle ACD$ 에서 $\overline{OC}=\overline{AC}$

따라서 점 C는 $\overline{OA}$ 의 중점이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{6}{2}, 0 \right), \text{ 즉 } (3, 0)$$

또 $\triangle OBD=\triangle OCD$ 에서 $\overline{BD}=\overline{CD}$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$ 의 중점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2+3}{2}, \frac{5+0}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

따라서 $a=\frac{5}{2}, b=\frac{5}{2}$ 이므로

$$a+b=5$$

답 ③

13 전략 평행사변형의 두 대각선의 교점은 각 대각선의 중점임을 이용한다.

풀이 두 대각선 AC, BD의 교점은 $\overline{AC}$ 의 중점, $\overline{BD}$ 의 중점과 일치한다.

C(x₁, y₁)이라 하면 $\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+x_1}{2}, \frac{-1+y_1}{2} \right)$$

이 점의 좌표가 (4, 3)이므로

$$\frac{5+x_1}{2}=4, \frac{-1+y_1}{2}=3 \quad \therefore x_1=3, y_1=7$$

$$\therefore C(3, 7)$$

또 D(x₂, y₂)라 하면 $\overline{BD}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+x_2}{2}, \frac{2+y_2}{2} \right)$$

이 점의 좌표가 (4, 3)이므로

$$\frac{-2+x_2}{2}=4, \frac{2+y_2}{2}=3 \quad \therefore x_2=10, y_2=4$$

$$\therefore D(10, 4)$$

따라서 선분 CD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+10}{2}, \frac{7+4}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{13}{2}, \frac{11}{2} \right) \quad \text{답 } \left(\frac{13}{2}, \frac{11}{2} \right)$$

14 전략 평행사변형의 두 대각선의 중점이 일치함을 이용한다.

풀이 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치한다. → ①

이때 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+b}{2} \right), \text{ 즉 } \left(1, \frac{1+b}{2} \right)$$

..... ⑦

선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{3-a}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{L} \text{이 일치하므로} \quad 1 = \frac{a-1}{2}, \frac{1+b}{2} = \frac{3-a}{2}$$

$$\therefore a=3, b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 A(-2, 1), B(3, 3), C(4, -1), D(-1, -3)이므로

$$\begin{aligned} \overline{AC^2} + \overline{BD^2} \\ = \{(4+2)^2 + (-1-1)^2\} + \{(-1-3)^2 + (-3-3)^2\} \\ = 92 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 92

채점 기준	비율
① 두 선분 AC, BD의 중점이 일치함을 알 수 있다.	20 %
② a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $\overline{AC^2} + \overline{BD^2}$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

15 전략 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ 의 값은 두 점 (a, b), (x, y) 사이의 거리와 같음을 이용한다.

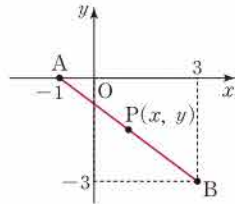
풀이 A(-1, 0), B(3, -3), P(x, y)라 하면 $\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ 은 두 점 A, P 사이의 거리와 같고, $\sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2}$ 은 두 점 B, P 사이의 거리와 같으므로 주어진 식의 최솟값은 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값과 같다.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 A, B를 나타내면 점 P가 선분 AB 위에 있을 때 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &\geq \overline{AB} \\ &= \sqrt{(3+1)^2 + (-3)^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

답 ④



16 전략 P(x, y), A(a, 0)이라 하고 두 점 B, C의 좌표를 a를 이용하여 나타낸다.

풀이 P(x, y), A(a, 0) (a>0)이라 하면 □OABC가 정사각형이므로

$$B(a, a), C(0, a)$$

$$\overline{OP} = \sqrt{10} \text{에서 } \overline{OP}^2 = 10 \text{이므로}$$

$$x^2 + y^2 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\overline{AP} = 4 \text{에서 } \overline{AP}^2 = 16 \text{이므로} \quad (x-a)^2 + y^2 = 16$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } y^2 = 10 - x^2 \text{이므로} \quad (x-a)^2 + (10 - x^2) = 16$$

$$a^2 - 2ax = 6 \quad \therefore x = \frac{a^2 - 6}{2a} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\overline{CP} = 2 \text{에서 } \overline{CP}^2 = 4 \text{이므로} \quad x^2 + (y-a)^2 = 4$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } x^2 = 10 - y^2 \text{이므로} \quad (10 - y^2) + (y-a)^2 = 4$$

$$a^2 - 2ay = -6 \quad \therefore y = \frac{a^2 + 6}{2a} \quad \dots\dots \textcircled{E} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①, ⑤을 ①에 대입하면

$$\left(\frac{a^2 - 6}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + 6}{2a}\right)^2 = 10$$

$$a^4 - 20a^2 + 36 = 0, \quad (a^2 - 2)(a^2 - 18) = 0$$

$$\therefore a^2 = 2 \text{ 또는 } a^2 = 18$$

이때 $a^2 = 2$ 이면 $x < 0$ 이므로 점 P가 정사각형 OABC의 내부에 있지 않다.

$$\therefore a^2 = 18 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 정사각형 OABC의 넓이는 18이다.

답 ③

답 18

채점 기준	비율
① 점 P의 좌표를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
② a^2 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 정사각형 OABC의 넓이를 구할 수 있다.	10 %

17 전략 $2\overline{AB} = 5\overline{BC}$ 를 만족시키는 점 C를 직선 AB 위에 나타낸다.

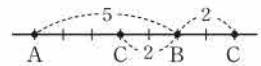
풀이 $2\overline{AB} = 5\overline{BC}$ 에서

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 5 : 2$$

따라서 점 C를 그림으로 나타내면

오른쪽과 같다.

①



(i) 점 C가 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점일 때,

C(a, b)라 하면

$$a = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{3 + 2} = \frac{4}{5}, \quad b = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 5}{3 + 2} = \frac{13}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(ii) 점 B가 선분 AC를 5 : 2로 내분하는 점일 때,

C(c, d)라 하면

$$\frac{5 \cdot c + 2 \cdot (-1)}{5 + 2} = 2, \quad \frac{5 \cdot d + 2 \cdot 5}{5 + 2} = 1$$

$$\therefore c = \frac{16}{5}, \quad d = -\frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(i), (ii)에서 $a + b + c + d = 6$

④

답 6

채점 기준	비율
① 점 C를 그림으로 나타낼 수 있다.	30 %
② a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ c, d의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $a + b + c + d$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

18 전략 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하고 α, β에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면 이차방정식

$x^2 - 2x = 3x + k$, 즉 $x^2 - 5x - k = 0$ 의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$\alpha\beta = -k \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점의 x 좌표가 1이므로

$$\frac{1 \cdot \beta + 2 \cdot \alpha}{1+2} = 1 \quad \therefore 2\alpha + \beta = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

㉑, ㉓을 연립하여 풀면

$$\alpha = -2, \beta = 7$$

따라서 ㉒에서 $k = -\alpha\beta = 14$

답 14

개념썬라이트 보충학습

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

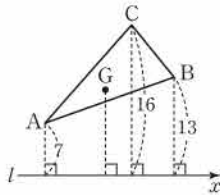
19 전략 직선 l 을 x 축으로 놓고 삼각형 ABC의 무게중심을 생각한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 l 을 x 축으로 놓으면 세 점 A, B, C의 y 좌표는 세 점 A, B, C에서 직선 l 까지의 거리와 같으므로 각각 7, 13, 16이다. 따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 y 좌표는

$$\frac{7+13+16}{3} = 12$$

즉 점 G에서 직선 l 까지의 거리는 12이다.

답 ③



20 전략 $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AP} : \overline{BP}$ 임을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

풀이 $\overline{OP}$ 는 $\angle AOB$ 의 이등분선이므로

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AP} : \overline{BP}$$

이때 $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, $\overline{OB} = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{5}$ 이므로

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2\sqrt{5} : 4\sqrt{5} = 1 : 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 점 P는 $\overline{AB}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 2}{1+2}, \frac{1 \cdot (-4) + 2 \cdot 4}{1+2} \right), \text{ 즉 } \left(4, \frac{4}{3} \right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore \overline{OP} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4}{3} \right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 $\frac{4\sqrt{10}}{3}$

채점 기준	비율
① $\overline{AP} : \overline{BP}$ 를 구할 수 있다.	40 %
② 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
③ $\overline{OP}$ 의 길이를 구할 수 있다.	20 %

02 직선의 방정식

I. 도형의 방정식

01 직선의 방정식

확인

본책 25쪽

1 (1) $y = 4x - 3$

(2) $y - (-1) = -2(x - 3)$ 에서 $y + 1 = -2x + 6$
 $\therefore y = -2x + 5$

(3) $y - 3 = \frac{5-3}{-3-(-1)}\{x - (-1)\}$ 에서 $y - 3 = -(x + 1)$
 $\therefore y = -x + 2$

(4) $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$

(5) $y = -7$

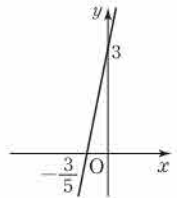
(6) $x = 5$

답 풀이 참조

2 (1) $5x - y + 3 = 0$ 에서

$$y = 5x + 3$$

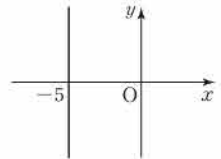
이 직선은 기울기가 5, y 절편이 3이므로
 오른쪽 그림과 같다.



(2) $-x = 5$ 에서

$$x = -5$$

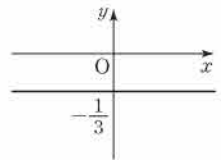
이 직선은 점 $(-5, 0)$ 을 지나고 y 축에 평행하므로 오른쪽 그림과 같다.



(3) $6y + 2 = 0$ 에서

$$y = -\frac{1}{3}$$

이 직선은 점 $(0, -\frac{1}{3})$ 을 지나고 x 축에 평행하므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

3 $(-2x + y + 1)k + x - 2y + 4 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$-2x + y + 1 = 0, x - 2y + 4 = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x = 2, y = 3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, 3)$ 이다.

답 (2, 3)

4 (1) 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x - y + 2 + k(x + 3y - 6) = 0 \quad (k \text{는 실수})$$

이라 하자.

이 직선이 점 (5, 3)을 지나려면

$$5-3+2+k(5+9-6)=0$$

$$8k+4=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$x-y+2-\frac{1}{2}(x+3y-6)=0$$

$$\therefore x-5y+10=0$$

(2) 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$3x-y+9+k(2x+5y+1)=0 \quad (k \text{는 실수})$$

이라 하자.

이 직선이 점 (4, 2)를 지나려면

$$12-2+9+k(8+10+1)=0$$

$$19k+19=0 \quad \therefore k=-1$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$3x-y+9-(2x+5y+1)=0$$

$$\therefore x-6y+8=0$$

$$\text{답 (1) } x-5y+10=0 \quad (2) \quad x-6y+8=0$$

다른 풀이 (1) 두 식 $x-y+2=0$, $x+3y-6=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=0, y=2$$

따라서 두 직선의 교점 (0, 2)와 점 (5, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{3-2}{5-0}x \quad \therefore y=\frac{1}{5}x+2$$

(2) 두 식 $3x-y+9=0$, $2x+5y+1=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=-\frac{46}{17}, y=\frac{15}{17}$$

따라서 두 직선의 교점 $(-\frac{46}{17}, \frac{15}{17})$ 와 점 (4, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{2-\frac{15}{17}}{4-(-\frac{46}{17})}(x-4)$$

$$\therefore y=\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$$

유제

본책 27쪽

1 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 인 직선의 기울기는

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 점 $(3, \sqrt{3})$ 을 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3) \quad \therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$\text{답 } y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

2 x 절편이 2, y 절편이 -3 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$$

이 직선이 점 $(a, 6)$ 을 지나므로

$$\frac{a}{2}-\frac{6}{3}=1, \quad \frac{a}{2}=3$$

$$\therefore a=6$$

답 6

3 점 B를 지나면서 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 선분 AC의 중점을 지난다.

이때 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 1)$$

따라서 두 점 $(1, -3)$, $(3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-3)=\frac{1-(-3)}{3-1}(x-1), \quad y+3=2(x-1)$$

$$\therefore y=2x-5$$

$$\text{답 } y=2x-5$$

개념블라이트 보충학습

도형의 넓이를 이등분하는 직선

- ① 삼각형의 한 꼭짓점을 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선
→ 한 꼭짓점과 그 꼭짓점의 대변의 중점을 지난다.
- ② 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선 → 두 대각선의 교점을 지난다.
- ③ 원의 넓이를 이등분하는 직선 → 원의 중심을 지난다.

4 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 서로 같아야 하므로

$$\frac{8-(-1)}{2-a}=\frac{(3a-4)-8}{-3-2}, \quad \frac{9}{2-a}=\frac{3a-12}{-5}$$

$$(2-a)(3a-12)=-45, \quad a^2-6a-7=0$$

$$(a+1)(a-7)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-1+7=6$$

답 6

참고 (i) $a=-10$ 이면 A(-1, -1), B(2, 8), C(-3, -7)이고, 이 세 점을 지나는 직선의 방정식은

$$y=3x+2$$

(ii) $a=7$ 이면 A(7, -1), B(2, 8), C(-3, 17)이고, 이 세 점을 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{9}{5}x+\frac{58}{5}$$

5 두 점 A, B를 지나는 직선 위에 점 C가 있으므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

즉 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 서로 같아야 하므로

$$\frac{2-(a+1)}{0-(2-a)}=\frac{2-(1-2a)}{0-a}, \quad \frac{1-a}{a-2}=\frac{2a+1}{-a}$$

$$-a(1-a)=(a-2)(2a+1)$$

$$\therefore a^2 - 2a - 2 = 0$$

이때 이차방정식 $a^2 - 2a - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (-2) = 3 > 0$$

이므로 이차방정식 $a^2 - 2a - 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a 의 값의 곱은 -2 이다. 답 -2

6 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있어야 한다.

따라서 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 서로 같아야 하므로

$$\begin{aligned} \frac{3 - (-3)}{a - 4} &= \frac{(4a + 5) - (-3)}{-2 - 4} \\ \frac{6}{a - 4} &= \frac{4a + 8}{-6}, \quad (a - 4)(4a + 8) = -36 \\ a^2 - 2a + 1 &= 0, \quad (a - 1)^2 = 0 \\ \therefore a &= 1 \end{aligned}$$

답 1

7 $b \neq 0$ 이므로 $ax + by + c = 0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

주어진 그림에서 직선의 기울기와 y 절편이 모두 양수이므로

$$\begin{aligned} -\frac{a}{b} > 0, \quad -\frac{c}{b} > 0, \quad \frac{a}{b} < 0, \quad \frac{c}{b} < 0 \\ \therefore a > 0, b < 0, c > 0 \text{ 또는 } a < 0, b > 0, c < 0 \end{aligned}$$

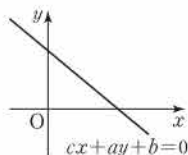
$a \neq 0$ 이므로 $cx + ay + b = 0$ 에서

$$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}$$

이때 $-\frac{c}{a} < 0, -\frac{b}{a} > 0$ 이므로 직선 $cx + ay + b = 0$ 의 기울기는 음수이고 y 절편은 양수이다.

따라서 직선 $cx + ay + b = 0$ 은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.

답 제3사분면



8 $(2k+1)x - (3k-2)y - 2k - 15 = 0$ 을 k 에 대하여 정리하면 $(2x - 3y - 2)k + x + 2y - 15 = 0$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x - 3y - 2 = 0, \quad x + 2y - 15 = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x = 7, y = 4$

$$\therefore a = 7, b = 4$$

답 a=7, b=4

9 $x + y + 5 = 0, x - 3y + 1 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = -4, y = -1$$

따라서 주어진 두 직선의 교점의 좌표가 $(-4, -1)$ 이므로 두 점 $(-4, -1), (4, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-1) = \frac{3 - (-1)}{4 - (-4)}(x - (-4))$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x + 4)$$

$$\therefore x - 2y + 2 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -2$$

답 a=1, b=-2

다른 풀이 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x + y + 5 + k(x - 3y + 1) = 0 \quad (k \text{는 실수})$$

이라 하면 이 직선이 점 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$12 - 4k = 0 \quad \therefore k = 3$$

따라서 직선의 방정식은

$$x + y + 5 + 3(x - 3y + 1) = 0$$

$$\therefore x - 2y + 2 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = -2$$

10 $3x + y + 1 = 0, 2x - 3y - 3 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = 0, y = -1$$

따라서 주어진 두 직선의 교점의 좌표가 $(0, -1)$ 이므로 점

$(0, -1)$ 을 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x - 1$$

답 y=-x-1

11 $4x + y + 2 = 0, x - y - 12 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = 2, y = -10$$

따라서 주어진 두 직선의 교점의 좌표가 $(2, -10)$ 이므로 두 점

$(2, -10), (1, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-10) = \frac{-3 - (-10)}{1 - 2}(x - 2)$$

$$\therefore y = -7x + 4$$

이 직선이 점 $(a, 11)$ 을 지나므로

$$11 = -7a + 4$$

$$\therefore a = -1$$

답 -1

다른 풀이 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$4x + y + 2 + k(x - y - 12) = 0 \quad (k \text{는 실수})$$

이라 하면 이 직선이 점 $(1, -3)$ 을 지나므로

$$3 - 8k = 0 \quad \therefore k = \frac{3}{8}$$

따라서 직선의 방정식은

$$4x + y + 2 + \frac{3}{8}(x - y - 12) = 0$$

$$\therefore 7x + y - 4 = 0$$

이 직선이 점 $(a, 11)$ 을 지나므로

$$7a + 11 - 4 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

02 두 직선의 평행과 수직

확인

본책 31쪽

1 두 직선이 서로 평행하면 두 직선의 기울기는 같고 y 절편은 다르므로

$$m=3$$

답 3

2 $4x-y+6=0$ 에서 $y=4x+6$

구하는 직선의 기울기를 m 이라 하면 두 직선의 기울기의 곱이 -1 이므로

$$4m=-1 \quad \therefore m=-\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

유제

본책 32쪽

1 두 점 $(1, -2)$, $(4, 4)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{4-(-2)}{4-1}=2$$

이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 2이다.

따라서 원점을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2x$$

답 $y=2x$

2 두 직선이 서로 평행하므로

$$\frac{a}{1} = \frac{a+1}{3a-1} \neq \frac{-3}{5}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{a+1}{3a-1} \text{에서 } a(3a-1)=a+1$$

$$3a^2-2a-1=0, \quad (3a+1)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } a=1$$

답 $-\frac{1}{3}, 1$

3 두 직선이 서로 수직이므로

$$(2a-1) \cdot 3 + a(a-4) = 0$$

$$a^2+2a-3=0, \quad (a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=1$$

답 $-3, 1$

4 두 직선 $y=-2x-6$, $y=3x-1$ 이 평행하지 않으므로 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 세 직선이 한 점에서 만나거나 세 직선 중 두 직선이 평행해야 한다.

(i) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

직선 $y=mx+1$ 이 두 직선 $y=-2x-6$, $y=3x-1$ 의 교점을 지나야 한다.

$y=-2x-6$, $y=3x-1$ 을 연립하여 풀면

$$x=-1, y=-4$$

따라서 직선 $y=mx+1$ 이 점 $(-1, -4)$ 를 지나야 하므로

$$-4=-m+1 \quad \therefore m=5$$

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때,

직선 $y=mx+1$ 이 직선 $y=-2x-6$ 또는 직선 $y=3x-1$ 과 평행해야 하므로

$$m=-2 \text{ 또는 } m=3$$

(i), (ii)에서 $m=-2$ 또는 $m=3$ 또는 $m=5$

답 $-2, 3, 5$

5 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $kx-y+7=0$ 이 두 직선 $2x+y-1=0$, $3x+y+k=0$ 의 교점을 지나야 한다.

$2x+y-1=0$, $3x+y+k=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=-k-1, y=2k+3$$

따라서 직선 $kx-y+7=0$ 이 점 $(-k-1, 2k+3)$ 을 지나야 하므로

$$k(-k-1)-(2k+3)+7=0$$

$$k^2+3k-4=0, \quad (k+4)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-4 \text{ 또는 } k=1$$

답 $-4, 1$

6 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

$x-2y+1=0$, $ax+4y+1=0$ 에서

$$\frac{a}{1} = \frac{4}{-2} \neq \frac{1}{1} \quad \therefore a=-2$$

$x-2y+1=0$, $x+(b+1)y-1=0$ 에서

$$\frac{1}{1} = \frac{b+1}{-2} \neq \frac{-1}{1}, \quad b+1=-2$$

$$\therefore b=-3$$

답 $a=-2, b=-3$

다른 풀이 세 직선이 모두 평행해야 하므로 세 직선의 기울기는 모두 같아야 한다.

$x-2y+1=0$ 에서

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$ax+4y+1=0$ 에서

$$y=-\frac{a}{4}x-\frac{1}{4}$$

$x+(b+1)y-1=0$ 에서

$$y=-\frac{1}{b+1}x+\frac{1}{b+1}$$

따라서 $\frac{1}{2}=-\frac{a}{4}=-\frac{1}{b+1}$ 이므로

$$a=-2, b=-3$$

개념블라이트 보충학습

서로 다른 세 직선이 한 점에서 만나거나 세 직선 중 두 직선이 평행하면 좌표평면은 여섯 부분으로 나누어진다.

7 점 A에서 직선 $4x-y=3$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 $4x-y=3$, 즉 $y=4x-3$ 과 직선 AH는 서로 수직이므로 직선 AH의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이다.

즉 직선 AH는 점 A(5, 0)을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{4}$ 이므로 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{4}(x-5) \quad \therefore y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

이때 점 H는 직선 $y=4x-3$ 과 직선 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ 의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=1, y=1$$

따라서 구하는 좌표는 (1, 1)이다.

답 (1, 1)

8 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면

$$D(-1, 1)$$

꼭짓점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 E라 하면 세 수선의 교점은 두 직선 AD, BE의 교점과 같다.

직선 AD의 방정식은 $x=-1$

한편 직선 AC와 직선 BE는 서로 수직이고 직선 AC의 기울기가

$$\frac{1-6}{3-(-1)} = -\frac{5}{4}$$

이므로 직선 BE의 기울기는 $\frac{4}{5}$ 이다.

즉 직선 BE는 점 B(-4, 1)을 지나고 기울기가 $\frac{4}{5}$ 이므로 직선의 방정식은

$$y-1 = \frac{4}{5}\{x-(-4)\}$$

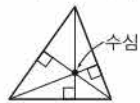
$$\therefore y = \frac{4}{5}x + \frac{21}{5}$$

$x=-1$ 을 $y = \frac{4}{5}x + \frac{21}{5}$ 에 대입하면 $y = \frac{17}{5}$

따라서 세 수선의 교점의 좌표는 $(-1, \frac{17}{5})$ 이다.

$$\text{답 } (-1, \frac{17}{5})$$

참고 삼각형의 세 꼭짓점에서 각각의 대변에 그은 세 수선은 한 점에서 만나며 그 점을 삼각형의 수심이라 한다.



9 선분 AB의 수직이등분선의 방정식이 $4x+y+1=0$, 즉

$y=-4x-1$ 이므로 직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{4}$ 이다.

즉 $\frac{b-2}{3-a} = \frac{1}{4}$ 이므로 $4b-8=3-a$

$$\therefore a+4b=11 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 선분 AB의 중점 $(\frac{a+3}{2}, \frac{2+b}{2})$ 가 직선 $4x+y+1=0$ 위의 점이므로

$$4 \cdot \frac{a+3}{2} + \frac{2+b}{2} + 1 = 0$$

$$\therefore 4a+b=-16 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$a=-5, b=4$$

$$\text{답 } a=-5, b=4$$

10 직선 AB의 기울기는

$$\frac{-1-4}{4-(-1)} = -1$$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 1이다.

또 선분 AB를 3:2로 내분하는 점의 좌표는

$$(\frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1)}{3+2}, \frac{3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{3+2}), \text{ 즉 } (2, 1)$$

따라서 기울기가 1이고 점 (2, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1 = 1 \cdot (x-2) \quad \therefore y = x-1$$

$$\text{답 } y = x-1$$

11 직선 AB의 기울기는

$$\frac{-3-0}{2-(-4)} = -\frac{1}{2}$$

이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 2이다.

또 선분 AB의 수직이등분선은 선분 AB의 중점

$$(\frac{-4+2}{2}, \frac{0-3}{2}), \text{ 즉 } (-1, -\frac{3}{2})$$

을 지나므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$$y - (-\frac{3}{2}) = 2\{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = 2x + \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

직선 BC의 기울기는

$$\frac{3-(-3)}{0-2} = -3$$

이므로 선분 BC의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이다.

또 선분 BC의 수직이등분선은 선분 BC의 중점

$$(\frac{2+0}{2}, \frac{-3+3}{2}), \text{ 즉 } (1, 0)$$

을 지나므로 선분 BC의 수직이등분선의 방정식은

$$y = \frac{1}{3}(x-1) \quad \therefore y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 이다.

$$\text{답 } (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

다른 풀이 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이고 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로 세 변의 수직이등분선의 교점을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(a+4)^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b+3)^2$$

$$12a - 6b = -3 \quad \therefore 4a - 2b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\overline{AP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$(a+4)^2 + b^2 = a^2 + (b-3)^2$$

$$\therefore 8a + 6b = -7 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 이다.

03 점과 직선 사이의 거리

확인

본책 37쪽

$$1 \quad (1) \frac{|1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$(2) \frac{|5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{답 (1)} \sqrt{10} \quad (2) \frac{\sqrt{5}}{2}$$

2 (1) 평행한 두 직선 $2x - 3y - 4 = 0$, $2x - 3y + 9 = 0$ 사이의 거리는 직선 $2x - 3y - 4 = 0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 과 직선 $2x - 3y + 9 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

(2) 평행한 두 직선 $3x - y + 7 = 0$, $3x - y + 2 = 0$ 사이의 거리는 직선 $3x - y + 7 = 0$ 위의 한 점 $(0, 7)$ 과 직선 $3x - y + 2 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3 \cdot 0 - 7 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{답 (1)} \sqrt{13} \quad (2) \frac{\sqrt{10}}{2}$$

유제

본책 38쪽

1 점 $(3, -2)$ 와 직선 $2x + y + k = 0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|2 \cdot 3 - 2 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$|k + 4| = 10, \quad k + 4 = \pm 10$$

$$\therefore k = 6 \quad (\because k > 0)$$

답 6

2 직선 $x - 3y + 4 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ 의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이므로 구하는 직선의 기울기는 -3 이다.

구하는 직선의 방정식을 $y = -3x + n$ (n 은 상수)이라 하면 원점과 직선 $y = -3x + n$, 즉 $3x + y - n = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|-n|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \sqrt{10}, \quad |n| = 10 \quad \therefore n = \pm 10$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = -3x - 10 \text{ 또는 } y = -3x + 10$$

$$\text{답 } y = -3x - 10, y = -3x + 10$$

3 $(k+1)x + y - 2k = 0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(x-2)k + x + y = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x - 2 = 0, x + y = 0 \quad \therefore x = 2, y = -2$$

즉 점 P 의 좌표는 $(2, -2)$ 이므로 점 $P(2, -2)$ 와 직선

$3x + 4y - 8 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

답 2

4 평행한 두 직선 $y = -2x + k$, $y = -2x - 10$ 사이의 거리는 직선 $y = -2x - 10$ 위의 한 점 $(0, -10)$ 과 직선 $y = -2x + k$, 즉 $2x + y - k = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \cdot 0 - 10 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 3\sqrt{5}$$

$$|k + 10| = 15, \quad k + 10 = \pm 15$$

$$\therefore k = -25 \text{ 또는 } k = 5$$

답 -25, 5

5 두 직선 $2x - ay - 5 = 0$, $x + 3y + 5 = 0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{2}{1} = \frac{-a}{3} \neq \frac{-5}{5} \quad \therefore a = -6$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $x + 3y + 5 = 0$ 위의 한 점

$(-5, 0)$ 과 직선 $2x + 6y - 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \cdot (-5) + 6 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \frac{15}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{답 } \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

6 두 직선 $4x + 3y - 2 = 0$, $4x + ay + b = 0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{4}{4} = \frac{3}{a} \neq \frac{-2}{b} \quad \therefore a = 3, b \neq -2$$

두 직선 $4x + 3y - 2 = 0$, $4x + 3y + b = 0$ 사이의 거리는 직선

$4x + 3y - 2 = 0$ 위의 한 점 $(-1, 2)$ 와 직선 $4x + 3y + b = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + b|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 6, \quad |b+2| = 30$$

$$b+2 = \pm 30 \quad \therefore b = 28 (\because b > 0)$$

$$\text{답 } a=3, b=28$$

7 선분 OB의 길이는

$$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

직선 OB의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \quad \therefore x - 2y = 0$$

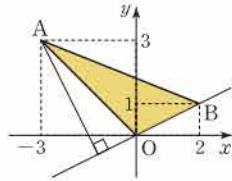
점 A(-3, 3)과 직선 $x - 2y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3 - 2 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9}{2}$$

$$\text{답 } \frac{9}{2}$$



8 $2x - y + 4 = 0$ 에서 $y=0$ 일 때

$x=-2$, $x=0$ 일 때 $y=4$ 이므로

$$A(-2, 0), B(0, 4)$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

한편 두 직선 $2x - y + 4 = 0$,

$2x - y - 8 = 0$ 은 서로 평행하므로 점 P

와 직선 AB 사이의 거리는 직선 $2x - y + 4 = 0$ 위의 한 점

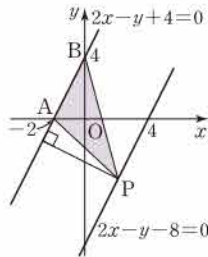
A(-2, 0)과 직선 $2x - y - 8 = 0$ 사이의 거리와 같다. 즉

$$\frac{|2 \cdot (-2) - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

따라서 삼각형 ABP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} = 12$$

$$\text{답 } 12$$



9 오른쪽 그림과 같이 두 직

선 $x+2y+2=0$,

$x-2y+2=0$ 의 교점을 A, 두

직선 $x-2y+2=0$,

$3x-2y-2=0$ 의 교점을 B, 두

직선 $x+2y+2=0$,

$3x-2y-2=0$ 의 교점을 C라 하자.

$x+2y+2=0$, $x-2y+2=0$ 을 연립하여 풀면

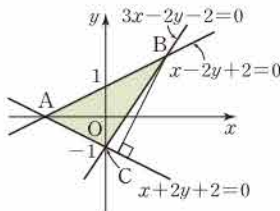
$$x=-2, y=0$$

$$\therefore A(-2, 0)$$

$x-2y+2=0$, $3x-2y-2=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=2$$

$$\therefore B(2, 2)$$



$x+2y+2=0$, $3x-2y-2=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=0, y=-1$$

$$\therefore C(0, -1)$$

따라서 선분 AC의 길이는

$$\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

이고 점 B(2, 2)와 직선 $x+2y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+2 \cdot 2+2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = 4$$

$$\text{답 } 4$$

10 점 P에서 두 직선 $4x-3y+3=0$, $3x+4y+1=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|4x-3y+3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|3x+4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$|4x-3y+3| = |3x+4y+1|$$

$$4x-3y+3 = \pm(3x+4y+1)$$

$$\therefore x-7y+2=0 \text{ 또는 } 7x+y+4=0$$

$$\text{답 } x-7y+2=0 \text{ 또는 } 7x+y+4=0$$

11 점 P에서 두 직선 $x+2y=6$, $4x-2y=1$, 즉

$x+2y-6=0$, $4x-2y-1=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+2y-6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|4x-2y-1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

$$2|x+2y-6| = |4x-2y-1|$$

$$2(x+2y-6) = \pm(4x-2y-1)$$

$$\therefore 2x-6y+11=0 \text{ 또는 } 6x+2y-13=0$$

이때 두 직선 $2x-6y+11=0$,

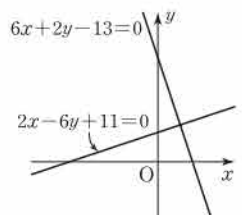
$6x+2y-13=0$ 이 오른쪽 그림과 같

으므로 제3사분면을 지나는 직선의

방정식은

$$2x-6y+11=0$$

$$\text{답 } 2x-6y+11=0$$



12 두 직선 $y=3x+5$, $y=\frac{1}{3}x-1$, 즉 $3x-y+5=0$,

$x-3y-3=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점

P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x-y+5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|x-3y-3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}$$

$$|3x-y+5| = |x-3y-3|$$

$$3x-y+5 = \pm(x-3y-3)$$

$$\therefore x+y+4=0 \text{ 또는 } 2x-2y+1=0$$

$$\text{답 } x+y+4=0, 2x-2y+1=0$$

중단원 연습 문제

본책 42쪽

- 01 ② 02 $y = -\frac{5}{2}x + 8$ 03 ④
 04 제4사분면 05 $-1 \leq k \leq \frac{1}{7}$ 06 ①
 07 18 08 ③ 09 14 10 26 11 -4
 12 ⑤ 13 -4 14 ④ 15 ③ 16 9
 17 ④ 18 ① 19 $\frac{15\sqrt{26}}{13} \text{ m}$

01 **전략** x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 인 직선의 기울기는 $\tan \theta$ 임을 이용한다.

풀이 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-5+1}{2} \right), \text{ 즉 } (1, -2)$$

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ = 1$

따라서 점 $(1, -2)$ 를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y - (-2) = 1 \cdot (x - 1)$$

$$\therefore y = x - 3$$

이 직선이 점 $(a, 4)$ 를 지나므로

$$4 = a - 3 \quad \therefore a = 7$$

답 ②

02 **전략** 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 주어진 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

직사각형의 대각선은 서로를 이등분하므로 각 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 각각

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2} \right), \left(\frac{2+6}{2}, \frac{-1-3}{2} \right),$$

$$\text{즉 } (2, 3), (4, -2)$$

→ ①

따라서 두 점 $(2, 3), (4, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{-2-3}{4-2}(x - 2)$$

$$\therefore y = -\frac{5}{2}x + 8$$

→ ②

$$\text{답 } y = -\frac{5}{2}x + 8$$

채점 기준	비율
① 각 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	50%
② 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50%

03 **전략** 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 서로 같음을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 서로 같아야 하므로

$$\frac{-4-4}{k-3} = \frac{(1-k)-4}{2-3}, \quad \frac{-8}{k-3} = k+3$$

$$(k-3)(k+3) = -8, \quad k^2 = 1$$

$$\therefore k = -1 (\because k < 0)$$

따라서 직선 l 은 기울기가 $-1+3=2$ 이고 점 $A(3, 4)$ 를 지나므로 그 방정식은

$$y - 4 = 2(x - 3) \quad \therefore y = 2x - 2$$

답 ④

04 **전략** $ax + by + c = 0$ 을 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 로 변형한 후 주어진 그림을 이용하여 a, b, c 의 부호를 조사한다.

풀이 $b \neq 0$ 이므로 $ax + by + c = 0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

주어진 그림에서 직선의 기울기와 y 절편이 모두 음수이므로

$$-\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} < 0, \quad \frac{a}{b} > 0, \frac{c}{b} > 0$$

$$\therefore a > 0, b > 0, c > 0 \text{ 또는 } a < 0, b < 0, c < 0$$

→ ①

$c \neq 0$ 이므로 $bx - cy + a = 0$ 에서

$$y = \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}$$

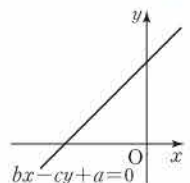
이때 $\frac{b}{c} > 0, \frac{a}{c} > 0$ 이므로 직선 $bx - cy + a = 0$ 의 기울기와 y 절편은 모두 양수이다.

→ ②

따라서 직선 $bx - cy + a = 0$ 은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.

→ ③

답 제4사분면



채점 기준	비율
① a, b, c 의 부호를 구할 수 있다.	30%
② 직선 $bx - cy + a = 0$ 의 기울기와 y 절편의 부호를 구할 수 있다.	40%
③ 직선 $bx - cy + a = 0$ 이 지나지 않는 사분면을 구할 수 있다.	30%

05 **전략** 직선 $kx + y + 2k + 1 = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 찾는다.

풀이 $kx + y + 2k + 1 = 0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(x+2)k + y + 1 = 0$$

→ ①

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x + 2 = 0, y + 1 = 0$$

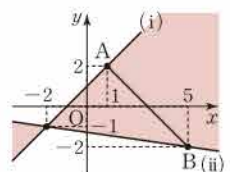
$$\therefore x = -2, y = -1$$

따라서 직선 ①은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -1)$ 을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ①이 선분 AB와 만나도록 직선 ①을 움직여 보면

(i) 직선 ①이 점 $A(1, 2)$ 를 지날 때,

$$3k + 3 = 0 \quad \therefore k = -1$$



(ii) 직선 ㉠이 점 B(5, -2)를 지날 때,

$$7k-1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{7}$$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$$-1 \leq k \leq \frac{1}{7} \quad \text{답 } -1 \leq k \leq \frac{1}{7}$$

06 전략 기울기가 m, m'인 두 직선이 서로 수직이면 mm' = -1임을 이용한다.

풀이 직선 (3k-1)x-y+1=0, 즉 y=(3k-1)x+1의 기울기는 3k-1이고 y절편은 1이므로 이 직선과 y축에서 수직으로 만나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3k-1}x + 1$$

이 직선이 점 (3, 2)를 지나므로

$$2 = -\frac{1}{3k-1} \cdot 3 + 1, \quad 3k-1 = -3$$

$$\therefore k = -\frac{2}{3} \quad \text{답 } ①$$

07 전략 두 직선이 평행할 조건과 수직일 조건을 이용한다.

풀이 직선 ax+y-2=0이 직선 x-by+1=0에 평행하므로

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{-b} \neq \frac{-2}{1}$$

$$\therefore ab = -1, a \neq -2, b \neq \frac{1}{2} \quad \dots ①$$

직선 ax+y-2=0이 직선 x+(b-4)y-5=0과 수직이므로

$$a \cdot 1 + 1 \cdot (b-4) = 0$$

$$\therefore a+b=4 \quad \dots ②$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= 4^2 - 2 \cdot (-1) = 18 \quad \dots ③ \end{aligned}$$

답 18

채점 기준	비율
① 평행할 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
② 수직일 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
③ a ² +b ² 의 값을 구할 수 있다.	20 %

08 전략 두 직선 x+3y+2=0, 2x-3y-14=0의 교점의 좌표는 두 식을 연립하여 구한다.

풀이 x+3y+2=0, 2x-3y-14=0을 연립하여 풀면

$$x=4, y=-2$$

즉 두 직선 x+3y+2=0, 2x-3y-14=0의 교점의 좌표는 (4, -2)이다.

한편 직선 2x+y+1=0, 즉 y=-2x-1과 평행한 직선의 기울기는 -2이므로 점 (4, -2)를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$$y - (-2) = -2(x - 4) \quad \therefore y = -2x + 6$$

따라서 이 직선의 x절편은

$$0 = -2x + 6 \quad \therefore x = 3$$

답 ③

09 전략 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC

에서 AP=PB, BQ=QC이므로

$$PQ \parallel AC \quad \dots ①$$

이때 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{-1-3}{4-2} = -2$$

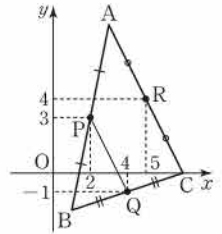
따라서 직선 AC는 기울기가 -2이고 점

R(5, 4)를 지나므로 직선 AC의 방정식은

$$y - 4 = -2(x - 5) \quad \therefore y = -2x + 14 \quad \dots ②$$

즉 직선 AC의 y절편은 14이다. ③

답 14



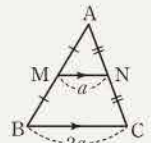
채점 기준	비율
① PQ ∥ AC임을 알 수 있다.	30 %
② 직선 AC의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
③ 직선 AC의 y절편을 구할 수 있다.	20 %

개념블라이트 보충학습

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질

△ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$$BC \parallel MN, MN = \frac{1}{2}BC$$



10 전략 직사각형 모양의 잔디밭을 좌표평면 위에 나타낸 후 두 길이 나타내는 직선의 기울기를 구한다.

풀이 주어진 잔디밭을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내면 두 길의 양 끝 점의 좌표는

$$A(0, 40), B(50-a, 0),$$

$$C(0, 10), D(50, 40)$$

두 직선 AB, CD의 기울기는 각각

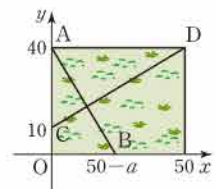
$$\frac{-40}{50-a}, \frac{40-10}{50} = \frac{3}{5}$$

이때 두 직선 AB, CD가 서로 수직이므로

$$\frac{-40}{50-a} \cdot \frac{3}{5} = -1, \quad 24 = 50 - a$$

$$\therefore a = 26$$

답 26



11 전략 선분 AB의 수직이등분선은 직선 AB와 수직이고 선분 AB의 중점을 지남을 이용한다.

풀이 직선 AB의 기울기는

$$\frac{-2-6}{3-(-5)} = -1$$

이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 1이다.

또 선분 AB의 수직이등분선은 선분 AB의 중점

$$\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{6-2}{2}\right), \text{ 즉 } (-1, 2)$$

를 지나므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$$y-2=1 \cdot \{x-(-1)\} \quad \therefore y=x+3$$

이 직선이 점 $(a, -1)$ 을 지나므로

$$-1=a+3 \quad \therefore a=-4$$

답 -4

12 [전략] 정사각형의 한 변의 길이를 구한 후 점과 직선 사이의 거리를 이용한다.

풀이 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore x+2y-6=0$$

정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{81}{5}$ 이므로 한 변의 길이는 $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ 이다.

즉 점 $A(a, 6)$ 과 직선 l 사이의 거리가 $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$\frac{|a+2 \cdot 6-6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

$$|a+6|=9, \quad a+6=\pm 9$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a>0)$$

답 ⑤

13 [전략] 점 $(1, 1)$ 에서 주어진 두 직선에 이르는 거리가 같음을 이용한다.

풀이 점 $(1, 1)$ 이 두 직선 $x+3y-1=0$, $3x-y+k=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선 위에 있으므로 점 $(1, 1)$ 에서 두 직선에 이르는 거리가 서로 같다. 즉

$$\frac{|1+3 \cdot 1-1|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|3 \cdot 1-1+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$3=|k+2|, \quad k+2=\pm 3$$

$$\therefore k=1 \text{ 또는 } k=-5$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$1+(-5)=-4$$

답 -4

14 [전략] 선분 AB를 밑변, 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 높이로 생각하여 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

풀이 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(-1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{17}$$

직선 AB의 방정식은

$$y-1=\frac{2-1}{-1-3}(x-3)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}, \text{ 즉 } x+4y-7=0$$

점 $C(a, 0)$ 과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|a-7|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{|a-7|}{\sqrt{17}}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{|a-7|}{\sqrt{17}}=6, \quad |a-7|=12$$

$$a-7=\pm 12$$

$$\therefore a=19 \quad (\because a>0)$$

답 ④

15 [전략] 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같음을 이용한다.

풀이 삼각형 OAP의 넓이가 $\frac{1}{4}S$ 이므로

$$\overline{AP} : \overline{PB}=1 : 3$$

즉 점 P는 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 0+3 \cdot 4}{1+3}, \frac{1 \cdot 8+3 \cdot 0}{1+3}\right), \text{ 즉 } (3, 2)$$

따라서 직선 OP의 방정식은

$$y=\frac{2}{3}x \quad \dots\dots ㉑$$

또 삼각형 OBQ의 넓이가 $\frac{1}{3}S$ 이므로

$$\overline{OQ} : \overline{QA}=1 : 2$$

즉 점 Q는 선분 OA를 1 : 2로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 4+2 \cdot 0}{1+2}, 0\right), \text{ 즉 } \left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

따라서 직선 BQ의 방정식은

$$\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{8} = 1 \quad \therefore y=-6x+8 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$x=\frac{6}{5}, y=\frac{4}{5}$$

이므로 구하는 교점의 좌표는 $\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 이다.

답 ③

16 [전략] 두 직선이 서로 평행하면 기울기가 같음을 이용한다.

풀이 조건 ㉑에서 직선 CD의 기울기가 음수이므로

$$\frac{q-p}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}} < 0 \quad \therefore q-p < 0$$

조건 ㉒에서 $\overline{AB}=\overline{CD}$, 즉 $\overline{AB}^2=\overline{CD}^2$ 이므로

$$(4-1)^2=(3\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(q-p)^2$$

$$(q-p)^2=1$$

이때 $q-p < 0$ 이므로

$$q-p=-1 \quad \dots\dots ㉓$$

또 조건 ㉒에서 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이므로

$$\frac{q-1}{3\sqrt{2}}=\frac{p-4}{\sqrt{2}}, \quad q-1=3p-12$$

$$\therefore 3p-q=11 \quad \dots\dots ㉔$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\begin{aligned} p &= 5, q = 4 \\ \therefore p + q &= 9 \end{aligned}$$

답 9

17 전략 곡선 $y = -x^2 + 2$ 에 접하고 직선 $y = 2x + k$ 와 평행한 직선의 방정식을 구한다.

풀이 곡선 $y = -x^2 + 2$ 에 접하고 직선 $y = 2x + k$ 와 평행한 직선의 방정식을 $y = 2x + a$ (a 는 상수)라 하면 이차방정식

$$-x^2 + 2 = 2x + a, \text{ 즉 } x^2 + 2x + a - 2 = 0$$

이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - (a - 2) = 0$$

$$\therefore a = 3$$

따라서 주어진 거리의 최솟값은 두 직선 $y = 2x + 3$, $y = 2x + k$ 사이의 거리와 같다.

이때 두 직선 사이의 거리는 직선 $y = 2x + 3$ 위의 한 점 $(0, 3)$ 과 직선 $y = 2x + k$, 즉 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-3 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, \quad |k - 3| = 5$$

$$k - 3 = \pm 5$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 8$$

그런데 $k = -2$ 이면 곡선 $y = -x^2 + 2$ 와 직선 $y = 2x - 2$ 가 서로 다른 두 점에서 만나므로 거리의 최솟값이 0이다.

$$\therefore k = 8$$

답 ④

18 전략 먼저 원의 중심을 $C(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)라 하고 주어진 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 주어진 원의 중심을 $C(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)라 하면 이 원이 x 축과 점 P 에서 접하므로 점 C 에서 x 축에 내린 수선의 발이 점 P 이다.

$$\therefore P(a, 0)$$

따라서 직선 PS 의 방정식은

$$y = 2(x - a)$$

$$\therefore 2x - y - 2a = 0$$

오른쪽 그림과 같이 점 C 에서 두 직선 PS , RQ 에 내린 수선의 발을 각각 M, N 이라 하면 $QR = PS$ 이므로

$$\overline{CN} = \overline{CM}$$

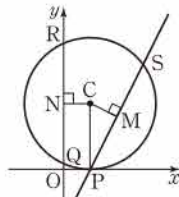
$$a = \frac{|2a - b - 2a|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$|b| = \sqrt{5}a$$

$$\therefore b = \sqrt{5}a \quad (\because b > 0) \quad \dots\dots ㉠$$

한편 $\overline{CP} = b$, $\overline{PM} = \frac{1}{2} \overline{PS} = 2$ 이므로 직각삼각형 CPM 에서

$$b^2 = a^2 + 4 \quad \dots\dots ㉡$$



㉠, ㉡을 연립하여 풀면

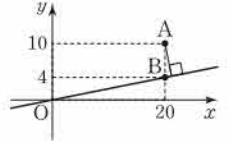
$$a = 1, b = \sqrt{5} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 $C(1, \sqrt{5})$ 이므로 원점 O 와 원의 중심 사이의 거리는

$$\overline{OC} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6} \quad \text{답 ①}$$

19 전략 성민, 지연, 건물 모퉁이의 위치를 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 성민의 위치를 원점 O , 지연이의 위치를 A , 건물 모퉁이의 위치를 B 라 하고 세 점 O, A, B 를 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내면



$$A(20, 10), B(20, 4) \quad \dots\dots ①$$

이때 직선 OB 의 방정식은

$$y = \frac{1}{5}x \quad \dots\dots ②$$

이므로 구하는 최소 거리는 점 $A(20, 10)$ 과 직선 $y = \frac{1}{5}x$, 즉 $x - 5y = 0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 지연이가 움직여야 하는 최소 거리는

$$\frac{|20 - 5 \cdot 10|}{\sqrt{1 + (-5)^2}} = \frac{30}{\sqrt{26}} = \frac{15\sqrt{26}}{13} \text{ (m)} \quad \dots\dots ③$$

$$\text{답 } \frac{15\sqrt{26}}{13} \text{ m}$$

채점 기준	비율
① 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
② 직선 OB의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
③ 최소 거리를 구할 수 있다.	50 %

03 원의 방정식

01 원의 방정식

확인

본책 46쪽

1 $\text{㉠} (1) (x+3)^2 + (y-1)^2 = 16 \quad (2) x^2 + y^2 = 25$

2 방정식 $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$ 을 변형하면

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 14$$

$$\therefore (x+4)^2 + (y-1)^2 = 14$$

따라서 중심의 좌표는 $(-4, 1)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$ 이다.

㉡ 중심의 좌표: $(-4, 1)$, 반지름의 길이: $\sqrt{14}$

3 (1) 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 2 - (x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1) = 0$$

$$\therefore 8x + 2y - 3 = 0$$

(2) 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 2 + k(x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1) = 0$$

$$(k \neq -1) \dots\dots \text{㉠}$$

이라 하면 이 원이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$1 + 9 + 2 + 12 - 2 + k(1 + 9 - 6 + 6 + 1) = 0$$

$$11k + 22 = 0 \quad \therefore k = -2$$

$k = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 2 - 2(x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1) = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 14x + 4 = 0$$

$$\text{㉢} (1) 8x + 2y - 3 = 0 \quad (2) x^2 + y^2 - 14x + 4 = 0$$

유제

본책 49쪽

1 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x+4)^2 + (y-5)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(1, 6)$ 을 지나므로

$$(1+4)^2 + (6-5)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 26$$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$(x+4)^2 + (y-5)^2 = 26$$

이 원이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$(a+4)^2 + (-5)^2 = 26$$

$$(a+4)^2 = 1, \quad a+4 = \pm 1$$

$$\therefore a = -3 \quad (\because a > -4)$$

㉣ -3

2 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{4-2}{2} \right), \text{ 즉 } (-1, 1)$$

또 선분 AB가 원의 지름이므로 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{(1+3)^2 + (-2-4)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} = \sqrt{13}$$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$$

이므로

$$a = -1, b = 1, c = 13$$

$$\text{㉤} a = -1, b = 1, c = 13$$

3 원 $(x+3)^2 + y^2 = 4$ 와 중심이 같은 원의 중심의 좌표는

$(-3, 0)$ 이므로 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x+3)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$3^2 + (-1)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 10$$

따라서 구하는 원의 넓이는 10π 이다.

㉥ 10π

다른 풀이 원 $(x+3)^2 + y^2 = 4$ 의 중심의 좌표는

$$(-3, 0)$$

중심의 좌표가 $(-3, 0)$ 이고 점 $(0, -1)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \cdot (\sqrt{10})^2 = 10\pi$$

4 원의 중심이 직선 $y = -2x$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, -2a)$ 라 하고 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y+2a)^2 = r^2$$

이 원이 두 점 $(-2, -2), (1, 1)$ 을 지나므로

$$(-2-a)^2 + (-2+2a)^2 = r^2 \text{에서}$$

$$5a^2 - 4a + 8 = r^2 \dots\dots \text{㉦}$$

$$(1-a)^2 + (1+2a)^2 = r^2 \text{에서}$$

$$5a^2 + 2a + 2 = r^2 \dots\dots \text{㉧}$$

㉦, ㉧을 연립하여 풀면

$$a = 1, r^2 = 9$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad \text{㉨} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

5 원의 중심이 x 축 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$

이라 하고 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 두 점 $(1, -3), (5, 1)$ 을 지나므로

$$(1-a)^2 + (-3)^2 = r^2 \text{에서}$$

$$a^2 - 2a + 10 = r^2 \dots\dots \text{㉩}$$

$$(5-a)^2 + 1^2 = r^2 \text{에서}$$

$$a^2 - 10a + 26 = r^2 \dots\dots \text{㉪}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2, r^2=10$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+y^2=10$$

$$\text{답 } (x-2)^2+y^2=10$$

6 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{OP}=\overline{AP}=\overline{BP}$$

$\overline{OP}=\overline{AP}$ 에서 $\overline{OP}^2=\overline{AP}^2$ 이므로

$$a^2+b^2=(a+2)^2+(b-1)^2$$

$$\therefore 4a-2b=-5$$

..... ㉠

$\overline{OP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{OP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-2)^2$$

$$\therefore 2a+4b=5$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심은 $P(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 이고 반지름의 길이는

$$\overline{OP}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

이므로 구하는 원의 방정식은

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

$$\text{답 } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

7 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$$

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$(a+2)^2+b^2=a^2+(b-4)^2$$

$$4a+8b=12$$

$$\therefore a+2b=3$$

..... ㉠

$\overline{BP}=\overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$ 이므로

$$a^2+(b-4)^2=(a-2)^2+(b+2)^2$$

$$4a-12b=-8$$

$$\therefore a-3b=-2$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1, b=1$$

따라서 원의 중심은 $P(1, 1)$ 이고 반지름의 길이는

$$\overline{AP}=\sqrt{(1+2)^2+1^2}=\sqrt{10}$$

이므로 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-1)^2=10$$

이때 점 $D(k, 2)$ 가 이 원 위의 점이므로

$$(k-1)^2+1^2=10, \quad (k-1)^2=9$$

$$k-1=\pm 3$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=4$$

답 -2, 4

8 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$$

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2+b^2=(a+3)^2+(b-2)^2$$

$$8a-4b=-12$$

$$\therefore 2a-b=-3$$

..... ㉠

$\overline{BP}=\overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$ 이므로

$$(a+3)^2+(b-2)^2=(a+1)^2+(b+4)^2$$

$$4a-12b=4$$

$$\therefore a-3b=1$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=-1$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 중심은 $P(-2, -1)$ 이므로 반지름의 길이는

$$r=\overline{AP}=\sqrt{(-2-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$$

$$\text{답 } a=-2, b=-1, r=\sqrt{10}$$

9 $x^2+y^2+10x+6y+a=0$ 에서

$$(x+5)^2+(y+3)^2=34-a$$

이 원의 중심의 좌표는 $(-5, -3)$ 이므로

$$b=-5, c=-3$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{34-a}$ 이므로

$$\sqrt{34-a}=2, \quad 34-a=4 \quad \therefore a=30$$

$$\text{답 } a=30, b=-5, c=-3$$

10 직선이 주어진 두 원의 넓이를 동시에 이등분하려면 두 원의 중심을 지나야 한다.

$$x^2+y^2+8x-10y+1=0 \text{에서}$$

$$(x+4)^2+(y-5)^2=40$$

이므로 중심의 좌표는

$$(-4, 5)$$

또 $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y+1)^2=2$$

이므로 중심의 좌표는

$$(2, -1)$$

따라서 두 점 $(-4, 5), (2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{-1-5}{2+4}(x+4)$$

$$\therefore y=-x+1$$

$$\text{답 } y=-x+1$$

11 $x^2+y^2-2x+2ky+k+7=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y+k)^2=k^2-k-6$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$k^2-k-6>0, \quad (k+2)(k-3)>0$$

$$\therefore k<-2 \text{ 또는 } k>3$$

$$\text{답 } k<-2 \text{ 또는 } k>3$$

12 점 $(-2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 제2사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(-r, r)$ ($r > 0$)라 하면 원의 방정식은

$$(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로

$$(-2+r)^2 + (1-r)^2 = r^2, \quad r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

$$\text{답 } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1, (x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

가남밴라이트 보충학습

x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구할 때에는 먼저 원의 중심이 어느 사분면에 있는지 파악해야 한다.

13 $x^2 + y^2 + 6ax - 4ay + 3a + 6 = 0$ 에서

$$(x+3a)^2 + (y-2a)^2 = 13a^2 - 3a - 6$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(-3a, 2a)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{13a^2 - 3a - 6}$ 이다.

이때 이 원이 x 축에 접하므로

$$\sqrt{13a^2 - 3a - 6} = |2a|$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$9a^2 - 3a - 6 = 0, \quad 3a^2 - a - 2 = 0$$

$$(3a+2)(a-1) = 0$$

$$\therefore a=1 \quad (\because a > 0)$$

답 1

14 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 중심의 좌표를 (r, r) ($r > 0$)라 하면 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이때 원의 중심이 직선 $y=3x-4$ 위에 있으므로

$$r=3r-4, \quad 2r=4$$

$$\therefore r=2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \text{답 } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

15 $P(a, b)$, $M(x, y)$ 라 하면 점 M 이 선분 AP 의 중점이므로

$$x = \frac{-4+a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}$$

$$\therefore a=2x+4, \quad b=2y \quad \dots\dots \text{㉠}$$

점 P 가 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 - 2a + 6b - 8 = 0$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$(2x+4)^2 + (2y)^2 - 2(2x+4) + 6 \cdot 2y - 8 = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 + 12x + 12y = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0$$

$$\text{답 } x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0$$

16 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$ 에서

$$(x+2)^2 + y^2 - \{x^2 + (y-4)^2\} = (x-1)^2 + (y+1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3, 3)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 넓이는

$$\pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

답 4π

17 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + ax - 2y - 1 - (x^2 + y^2 + 3x - 4y - 3) = 0$$

$$\therefore (a-3)x + 2y + 2 = 0, \quad \text{즉 } y = \frac{3-a}{2}x - 1$$

이 직선이 직선 $y = -x + 5$ 와 평행하므로

$$\frac{3-a}{2} = -1, \quad 3-a = -2$$

$$\therefore a = 5$$

답 5

18 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 - 4 + k(x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4) = 0 \quad (k \neq -1)$$

..... ㉠

이라 하면 이 원이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$16 - 4 + k(16 + 16 + 4) = 0$$

$$36k = -12 \quad \therefore k = -\frac{1}{3}$$

$k = -\frac{1}{3}$ 을 ㉠에 대입하면

$$x^2 + y^2 - 4 - \frac{1}{3}(x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4) = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 12 - x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$$

따라서 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

답 $\sqrt{13}$

19 오른쪽 그림과 같이 두 원

$$x^2 + y^2 = 8, \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

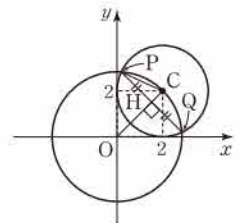
중심을 각각 O , C , 두 원의 교점을

P , Q 라 하고, $\overline{OC}$ 와 $\overline{PQ}$ 의 교점을 H

라 하자.

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{에서}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$



이므로 두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 8 - (x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4) = 0$$

$$4x + 4y - 12 = 0 \quad \therefore x + y - 3 = 0$$

점 C(2, 2)와 직선 $x + y - 3 = 0$ 사이의 거리는

$$\overline{CH} = \frac{|2+2-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 직각삼각형 CPH에서

$$\begin{aligned} \overline{PH} &= \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} \\ &= \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

이므로 구하는 공통현의 길이는

$$\overline{PQ} = 2\overline{PH} = 2 \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$$

답 $\sqrt{14}$

20 오른쪽 그림과 같이 두 원

$$x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

$x^2 + y^2 - 4x + 3y + a = 0$ 의 중심을 각각 O, C, 두 원의 교점을 P, Q라고 하고, $\overline{OC}$ 과 $\overline{PQ}$ 의 교점을 H라 하자.

$$\overline{PQ} = 2\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\overline{PH} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = \sqrt{3}$$

$\overline{OP} = 2$ 이므로 직각삼각형 OHP에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$$

한편 두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4 - (x^2 + y^2 - 4x + 3y + a) = 0$$

$$\therefore 4x - 3y - a - 4 = 0$$

점 O와 직선 $4x - 3y - a - 4 = 0$ 사이의 거리는

$$\overline{OH} = \frac{|-a-4|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|a+4|}{5}$$

따라서 $\frac{|a+4|}{5} = 1$ 이므로

$$|a+4| = 5, \quad a+4 = \pm 5$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

답 1

21 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PQ}$ 가 원

$(x-k)^2 + y^2 = 9$ 의 지름일 때 $\overline{PQ}$ 의 길이가 최대가 된다.

$\overline{PQ}$ 와 x축의 교점을 C라 하면 점 C는 원 $(x-k)^2 + y^2 = 9$ 의 중심이므로

$$C(k, 0)$$

이때 $\overline{OP} = \sqrt{13}$, $\overline{PC} = 3$, $\overline{OC} = k$ 이므로 직각삼각형 OCP에서

$$(\sqrt{13})^2 = k^2 + 3^2, \quad k^2 = 4$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

답 2

22 $x^2 + y^2 + 4y = 0$ 에서

$$x^2 + (y+2)^2 = 4$$

$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$$

두 원의 중심을 각각 P, Q라 하면 P(0, -2), Q(1, 3)이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{1^2 + (3+2)^2} = \sqrt{26}$$

(1) 오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{PA}$ 에

내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PH} = 2 - 1 = 1 \text{ 이므로 직각삼각형}$$

QPH에서

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{HQ} \\ &= \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{PH}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{26})^2 - 1^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

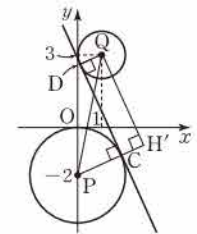
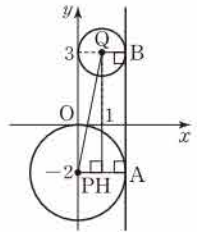
(2) 오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{PC}$ 의 연

장선에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$$\overline{PH'} = 2 + 1 = 3 \text{ 이므로 직각삼각형}$$

QPH'에서

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \overline{H'Q} \\ &= \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{PH'}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{26})^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$



답 (1) 5 (2) $\sqrt{17}$

02 원과 직선의 위치 관계

확인

본책 58쪽

1 (1) 원의 중심 (0, 0)과 직선 $x - 2y + 5 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로

$$\sqrt{5} < 3$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 원의 중심 (0, 1)과 직선 $3x - 4y - 6 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 이므로

$$2 > \sqrt{3}$$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 만나지 않는다.

2 (1) $y=x+4$ 를 $x^2+y^2=4$ 에 대입하면
 $x^2+(x+4)^2=4 \quad \therefore x^2+4x+6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-6=-2<0$$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

(2) $y=-x+2\sqrt{2}$ 를 $x^2+y^2=4$ 에 대입하면
 $x^2+(-x+2\sqrt{2})^2=4 \quad \therefore x^2-2\sqrt{2}x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2})^2-2=0$$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

☞ (1) 만나지 않는다. (2) 한 점에서 만난다.(접한다.)

유제

본책 59쪽

1 원의 중심 $(1, -1)$ 과 직선 $kx+2y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + k|}{\sqrt{k^2 + 2^2}} = \frac{|2k - 2|}{\sqrt{k^2 + 4}}$$

원과 직선이 한 점에서 만나야 하므로

$$\frac{|2k - 2|}{\sqrt{k^2 + 4}} = 2, \quad |k - 1| = \sqrt{k^2 + 4}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$k^2 - 2k + 1 = k^2 + 4, \quad 2k = -3$$

$$\therefore k = -\frac{3}{2}$$

$$\text{☞ } -\frac{3}{2}$$

☞ 이 문제는 직선의 방정식을 원의 방정식에 대입하면 식이 복잡해 지므로 판별식을 이용하는 것보다 원의 중심과 직선 사이의 거리와 원의 반지름의 길이를 비교하는 것이 편리하다.

2 원의 중심 $(-1, 2)$ 와 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1+2-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2}}$$

원과 직선이 만나지 않아야 하므로

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}, \quad |k-1| > 4$$

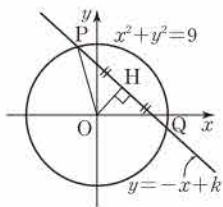
$$k-1 < -4 \text{ 또는 } k-1 > 4$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 5$$

$$\text{☞ } k < -3 \text{ 또는 } k > 5$$

3 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 교점을 P, Q라 하고, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$PH = \frac{1}{2} PQ = \sqrt{7}$$



$\overline{OP}=3$ 이므로 직각삼각형 POH에서

$$\overline{OH} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{7})^2} = \sqrt{2}$$

이때 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\overline{OH} = \frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

따라서 $\frac{|k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 이므로 $|k| = 2$

$$\therefore k = 2 (\because k > 0)$$

☞ 2

4 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 A라 하고, 점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

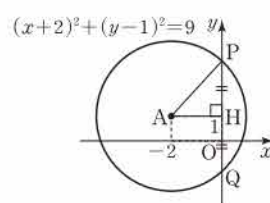
$$\overline{AH}=2$$

$\overline{AP}=3$ 이므로 직각삼각형 AHP

에서

$$\overline{PH} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = 2\sqrt{5}$$



☞ $2\sqrt{5}$

다른 풀이 $x=0$ 을 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 에 대입하면

$$y^2 - 2y - 4 = 0$$

$$\therefore y = 1 \pm \sqrt{5}$$

따라서 주어진 원이 y 축과 만나는 두 점 P, Q의 좌표는

$(0, 1+\sqrt{5}), (0, 1-\sqrt{5})$ 이므로

$$\overline{PQ} = |1+\sqrt{5} - (1-\sqrt{5})| = 2\sqrt{5}$$

5 오른쪽 그림과 같이 원

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = r^2$ 의 중심

을 A, 원과 직선의 교점을 P,

Q라 하고, 점 A에서 선분 PQ

에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PQ}=4$ 이므로

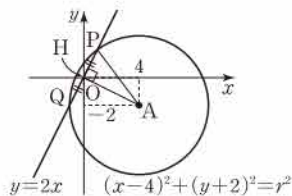
$$\overline{PH} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = 2$$

원의 중심 $A(4, -2)$ 와 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 사이의 거리는

$$\overline{AH} = \frac{|2 \cdot 4 - (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

따라서 직각삼각형 AHP에서

$$\begin{aligned} r &= \overline{AP} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$



☞ $2\sqrt{6}$

- 6 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면

$$\overline{CT} \perp \overline{PT}$$

이므로 삼각형 CTP는 $\angle CTP = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때 $C(4, 0)$ 이므로

$$\overline{CP} = \sqrt{(1-4)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

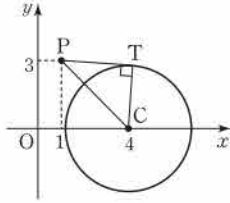
$\overline{CT}$ 는 원의 반지름이므로

$$\overline{CT} = 2\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 CTP에서

$$\overline{PT} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$$

답 $\sqrt{10}$



- 7 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 T라 하면

$$\overline{CT} \perp \overline{PT}$$

이므로 삼각형 CTP는 $\angle CTP = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\overline{CT} = r$$

이때

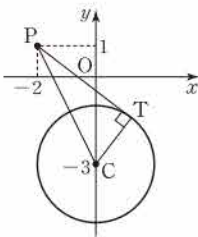
$$\overline{PT} = 4, \overline{CP} = \sqrt{(-2)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$$

이므로 직각삼각형 CTP에서

$$r = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4^2} = 2$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 2이다.

답 2



- 8 오른쪽 그림에서

$$\overline{OA} \perp \overline{AP}$$

이므로 삼각형 OAP는 $\angle OAP = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때

$$\overline{OA} = \sqrt{5},$$

$$\overline{OP} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

이므로 직각삼각형 OAP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5}$$

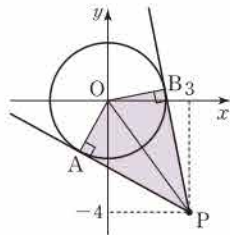
$$\therefore \triangle OAP = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{AP}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 5$$

따라서 사각형 OAPB의 넓이는

$$2\triangle OAP = 2 \cdot 5 = 10$$

답 10



- 9 원의 중심 $(2, 0)$ 과 직선 $x+y-8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+0-8|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $3\sqrt{2}+3$

최솟값은 $3\sqrt{2}-3$

답 최댓값: $3\sqrt{2}+3$, 최솟값: $3\sqrt{2}-3$

- 10 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $x-\sqrt{3}y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}} = \frac{k}{2} \quad (\because k > 4)$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $\frac{k}{2}+2$, 최솟값은 $\frac{k}{2}-2$ 이다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 5이므로

$$\left(\frac{k}{2}+2\right) + \left(\frac{k}{2}-2\right) = 5$$

$$\therefore k=5$$

답 5

- 11 두 점 $A(1, -4)$, $B(2, -2)$ 를

지나는 직선의 방정식은

$$y+4 = \frac{-2+4}{2-1}(x-1)$$

$$\therefore 2x-y-6=0$$

원의 중심 $(-1, 2)$ 과 직선

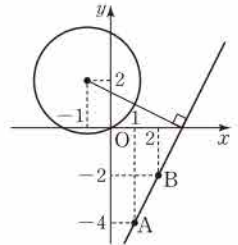
$2x-y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \cdot (-1) - 2 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 원 위의 점과 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은

$$2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$



03 원의 접선의 방정식

확인

본책 63쪽

$$1 \quad y = -x \pm 2\sqrt{(-1)^2 + 1} \quad \therefore y = -x \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{답 } y = -x \pm 2\sqrt{2}$$

$$2 \quad -4x + 2y = 20 \quad \therefore 2x - y + 10 = 0$$

$$\text{답 } 2x - y + 10 = 0$$

- 1 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 기울기는

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

원의 반지름의 길이는 3이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x \pm 3\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x \pm 6$$

$$\text{답 } y = \sqrt{3}x \pm 6$$

다른 풀이 1 구하는 직선의 방정식을 $y = \sqrt{3}x + n$ 이라 하면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = \sqrt{3}x + n$, 즉 $\sqrt{3}x - y + n = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3과 같아야 하므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = 3, \quad |n| = 6$$

$$\therefore n = \pm 6$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x \pm 6$$

다른 풀이 2 구하는 직선의 방정식을 $y = \sqrt{3}x + n$ 이라 하고 이 식을 원의 방정식 $x^2 + y^2 = 9$ 에 대입하면

$$x^2 + (\sqrt{3}x + n)^2 = 9$$

$$\therefore 4x^2 + 2\sqrt{3}nx + n^2 - 9 = 0$$

이 x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{3}n)^2 - 4(n^2 - 9) = 0$$

$$n^2 = 36 \quad \therefore n = \pm 6$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x \pm 6$$

- 2 직선 $x - y + 5 = 0$, 즉 $y = x + 5$ 에 평행한 직선의 기울기는 1이고 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{2}\sqrt{1^2 + 1} \quad \therefore y = x \pm 2$$

따라서 두 직선 $y = x + 2$, $y = x - 2$ 가 x 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-2, 0)$, $(2, 0)$ 이므로

$$PQ = |2 - (-2)| = 4$$

답 4

- 3 $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

직선 $x + 2y - 1 = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 과 수직인 직선의 기울기는 2이므로 구하는 직선의 방정식을 $y = 2x + n$ 이라 하면 원의 중심 $(2, -1)$ 과 직선 $y = 2x + n$, 즉 $2x - y + n = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같아야 한다.

$$\text{즉 } \frac{|2 \cdot 2 - (-1) + n|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$|n + 5| = 5, \quad n + 5 = \pm 5$$

$$\therefore n = -10 \text{ 또는 } n = 0$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = 2x - 10 \text{ 또는 } y = 2x$$

$$\text{답 } y = 2x - 10, y = 2x$$

- 4 원 $x^2 + y^2 = 26$ 위의 점 $(5, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$5x - y = 26 \quad \therefore y = 5x - 26$$

$$\therefore a = 5, b = -26$$

$$\text{답 } a = 5, b = -26$$

- 5 $2x + y - 5 = 0$, 즉 $y = -2x + 5$ 를 $x^2 + y^2 = 10$ 에 대입하면

$$x^2 + (-2x + 5)^2 = 10, \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 직선과 원의 교점의 좌표는

$$(1, 3), (3, -1)$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$x + 3y = 10, 3x - y = 10$$

$$\text{답 } x + 3y = 10, 3x - y = 10$$

- 6 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

원의 중심 $(1, -3)$ 과 접점 $(4, -7)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-7+3}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직이므로 접선의 기울기는

$$\frac{3}{4}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y + 7 = \frac{3}{4}(x - 4)$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}x - 10$$

$$\text{답 } y = \frac{3}{4}x - 10$$

다른 풀이 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선은 점 $(4, -7)$ 을 지나므로 접선의 방정식은

$$y + 7 = m(x - 4)$$

$$\therefore mx - y - 4m - 7 = 0$$

$$\dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

이때 원의 중심 $(1, -3)$ 과 접선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리는 반지름의 길이 5와 같아야 하므로

$$\frac{|m \cdot 1 - (-3) - 4m - 7|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 5$$

$$|3m + 4| = 5\sqrt{m^2 + 1}$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$16m^2 - 24m + 9 = 0, \quad (4m - 3)^2 = 0$$

$$\therefore m = \frac{3}{4}$$

$m = \frac{3}{4}$ 을 ①에 대입하면

$$\frac{3}{4}x - y - 3 - 7 = 0 \quad \therefore y = \frac{3}{4}x - 10$$

7 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 3$$

이 접선이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$-3y_1 = 3 \quad \therefore y_1 = -1$$

또 점점 $(x_1, -1)$ 은 원 $x^2 + y^2 = 3$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + (-1)^2 = 3, \quad x_1^2 = 2$$

$$\therefore x_1 = \pm\sqrt{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$-\sqrt{2}x - y = 3 \text{ 또는 } \sqrt{2}x - y = 3$$

$$\therefore \sqrt{2}x + y + 3 = 0 \text{ 또는 } \sqrt{2}x - y - 3 = 0$$

$$\text{답 } \sqrt{2}x + y + 3 = 0, \sqrt{2}x - y - 3 = 0$$

다른 풀이 1 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 접선의 방정식은

$$y = mx - 3 \quad \therefore mx - y - 3 = 0$$

이때 원의 중심 $(0, 0)$ 과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$ 과 같아야 하므로

$$\frac{|-3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3}, \quad \frac{3}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{3}, \quad m^2 = 2$$

$$\therefore m = \pm\sqrt{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$\sqrt{2}x + y + 3 = 0 \text{ 또는 } \sqrt{2}x - y - 3 = 0$$

다른 풀이 2 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 접선의 방정식은

$$y = mx - 3$$

이 식을 $x^2 + y^2 = 3$ 에 대입하면

$$x^2 + (mx - 3)^2 = 3$$

$$\therefore (m^2 + 1)x^2 - 6mx + 6 = 0$$

이 x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3m)^2 - 6(m^2 + 1) = 0$$

$$3m^2 - 6 = 0, \quad m^2 = 2$$

$$\therefore m = \pm\sqrt{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\sqrt{2}x - 3 \text{ 또는 } y = \sqrt{2}x - 3$$

8 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선이 원점을 지나므로 접선의 방정식은

$$y = mx$$

이 식을 $x^2 + (y - a)^2 = 5$ 에 대입하여 정리하면

$$(m^2 + 1)x^2 - 2amx + a^2 - 5 = 0$$

이 x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-am)^2 - (m^2 + 1)(a^2 - 5) = 0$$

$$5m^2 - a^2 + 5 = 0, \quad m^2 = \frac{a^2 - 5}{5}$$

$$\therefore m = \pm\sqrt{\frac{a^2 - 5}{5}}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$$-\sqrt{\frac{a^2 - 5}{5}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - 5}{5}} = -1$$

$$\frac{a^2 - 5}{5} = 1, \quad a^2 = 10$$

$$\therefore a = \sqrt{10} \quad (\because a > 0)$$

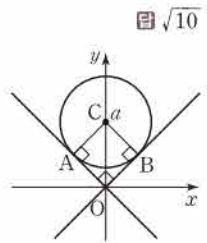
다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 원

$x^2 + (y - a)^2 = 5$ 의 중심을 C , 원점에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B 라 하자.

이때 $\square AOCB$ 는 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 정사각형이므로

$$OC = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

$$\therefore a = \sqrt{10}$$



중단원 연습 문제

본책 68쪽

- | | | | | |
|--------------------|---------------|-------------------------|---------------------|-------|
| 01 ② | 02 ③ | 03 -4 | 04 9 | 05 ⑤ |
| 06 $\frac{\pi}{9}$ | 07 $\sqrt{2}$ | 08 $-13 \leq k \leq -3$ | 09 ① | |
| 10 ④ | 11 4 | 12 ④ | 13 32 | 14 -6 |
| 15 ③ | 16 14 | 17 ④ | 18 $x + 3y - 5 = 0$ | |
| 19 $x + 3y = 0$ | 20 ④ | 21 ④ | | |

01 **전략** 두 점 A, B 를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 $\overline{AB}$ 의 중점이고, 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2} \overline{AB}$ 이다.

풀이 원의 중심은 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$\left(\frac{5+13}{2}, \frac{-4+2}{2} \right), \text{ 즉 } (9, -1)$$

또 $\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(13-5)^2 + (2+4)^2} = 5$$

따라서 원의 방정식은

$$(x-9)^2 + (y+1)^2 = 25$$

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$(x-9)^2 = 24, \quad x-9 = \pm 2\sqrt{6}$$

$$\therefore x = 9 \pm 2\sqrt{6}$$

따라서 구하는 거리는

$$|(9+2\sqrt{6})-(9-2\sqrt{6})|=4\sqrt{6} \quad \text{답 ②}$$

02 전략 외접원의 중심과 주어진 세 점 사이의 거리가 모두 같음을 이용한다.

풀이 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 P(a, b)라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2 \quad \dots\dots ①$$

$$\overline{AP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + (b-1)^2 = (a-3)^2 + (b-4)^2 \quad \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{을 연립하여 풀면 } a=1, b=3$$

따라서 외접원의 중심은 P(1, 3)이고 반지름의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{1^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$

이므로 구하는 외접원의 넓이는

$$\pi \cdot (\sqrt{5})^2 = 5\pi \quad \text{답 ③}$$

03 전략 선분 AB의 수직이등분선은 원의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + y^2 = 16$$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 원의 중심 (2, 0)을 지나므로 수직이등분선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 1$$

이 직선이 점 (a, 3)을 지나므로

$$3 = -\frac{1}{2}a + 1 \quad \therefore a = -4 \quad \text{답 -4}$$

다른 풀이 $y=2x$ 를 $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ 에 대입하면

$$x^2 + (2x)^2 - 4x - 12 = 0, \quad 5x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(5x+6)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -\frac{6}{5} \text{ 또는 } x = 2$$

$$x = -\frac{6}{5} \text{을 } y=2x \text{에 대입하면 } y = -\frac{12}{5}$$

$$x = 2 \text{를 } y=2x \text{에 대입하면 } y = 4$$

즉 두 점 A, B의 좌표는

$$\left(-\frac{6}{5}, -\frac{12}{5}\right), (2, 4)$$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 두 점 A,

B의 중점 $\left(\frac{-\frac{6}{5}+2}{2}, \frac{-\frac{12}{5}+4}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 를 지나므로 그 방정식은

$$y - \frac{4}{5} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{5}\right) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 1$$

이 직선이 점 (a, 3)을 지나므로

$$3 = -\frac{1}{2}a + 1 \quad \therefore a = -4$$

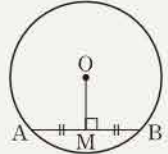
개념블라이트 보충학습

원의 중심과 현의 수직이등분선

① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

$$\rightarrow AB \perp OM \text{이면 } \overline{AM} = \overline{BM}$$

② 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.



04 전략 원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$ 꼴로 변형한 후 $\sqrt{c} \geq 2\sqrt{5}$ 임을 이용한다.

풀이 $x^2 + y^2 + 8x - 4y + k^2 - 8k = 0$ 에서

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = -k^2 + 8k + 20 \quad \dots\dots ①$$

이 방정식이 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이상인 원을 나타내야 하므로

$$\sqrt{-k^2 + 8k + 20} \geq 2\sqrt{5}$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2 - 8k \leq 0, \quad k(k-8) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq k \leq 8 \quad \dots\dots ②$$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, ..., 8의 9개이다. $\dots\dots ③$

답 9

채점 기준	비율
① 주어진 원의 방정식을 변형할 수 있다.	30 %
② k의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
③ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	10 %

05 전략 원이 x축에 접하므로 (반지름의 길이) = |중심의 y좌표|임을 이용한다.

풀이 원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$$

이 원이 두 점 (4, -1), (3, -2)를 지나므로

$$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = b^2 \text{에서}$$

$$a^2 - 8a + 2b + 17 = 0$$

$$\therefore b = \frac{-a^2 + 8a - 17}{2} \quad \dots\dots ①$$

$$(3-a)^2 + (-2-b)^2 = b^2 \text{에서}$$

$$a^2 - 6a + 4b + 13 = 0 \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면

$$a^2 - 6a + 4 \cdot \frac{-a^2 + 8a - 17}{2} + 13 = 0$$

$$a^2 - 10a + 21 = 0, \quad (a-3)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = 7$$

이것을 ①에 대입하면

$$a = 3 \text{일 때 } b = -1, \quad a = 7 \text{일 때 } b = -5$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(3, -1), (7, -5)$ 이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(7-3)^2 + (-5+1)^2} = 4\sqrt{2} \quad \text{답 ⑤}$$

06 전라 세 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ 임을 이용한다.

풀이 $P(a, b)$ 라 하면 무게중심 G 의 좌표는

$$\left(\frac{2-1+a}{3}, \frac{0+3+b}{3}\right), \approx \left(\frac{a+1}{3}, \frac{b+3}{3}\right)$$

$x = \frac{a+1}{3}, y = \frac{b+3}{3}$ 으로 놓으면

$$a = 3x - 1, b = 3y - 3 \quad \dots\dots \text{㉠} \quad \rightarrow \text{㉡}$$

이때 점 P 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠을 ㉢에 대입하면

$$(3x-1)^2 + (3y-3)^2 = 1$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{9} \quad \rightarrow \text{㉣}$$

따라서 무게중심 G 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{9} \quad \rightarrow \text{㉤}$$

$$\text{답 } \frac{\pi}{9}$$

채점 기준	비율
① a, b 를 x, y 로 나타낼 수 있다.	40 %
② 무게중심 G 가 나타내는 도형의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
③ 무게중심 G 가 나타내는 도형의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

07 전라 두 원의 중심 사이의 거리를 d , 두 원의 반지름의 길이를 각각 r, r' 이라 할 때, PQ 의 길이의 최솟값은 $d - (r + r')$ 임을 이용한다.

풀이 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

이므로 중심의 좌표는 $(-2, 1)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 11 = 0$$

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 18$$

이므로 중심의 좌표는 $(5, 2)$ 이고 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이다.

따라서 두 원의 중심 $(-2, 1), (5, 2)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(5+2)^2 + (2-1)^2} = 5\sqrt{2}$$

이므로 PQ 의 길이의 최솟값은

$$5\sqrt{2} - (\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) = \sqrt{2} \quad \text{답 } \sqrt{2}$$

08 전라 반지름의 길이가 r 인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d 라 할 때, 원과 직선이 만나려면 $d \leq r$ 이어야 함을 이용한다.

풀이 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$ 에서

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5 \quad \rightarrow \text{㉠}$$

원의 중심 $(3, -2)$ 와 직선 $y = 2x + k$, 즉 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \cdot 3 - (-2) + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k+8|}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow \text{㉡}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 만나려면

$$\frac{|k+8|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5}, \quad |k+8| \leq 5$$

$$-5 \leq k+8 \leq 5 \quad \therefore -13 \leq k \leq -3 \quad \rightarrow \text{㉢}$$

$$\text{답 } -13 \leq k \leq -3$$

채점 기준	비율
① 주어진 원의 방정식을 변형할 수 있다.	20 %
② 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %
③ 실수 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

09 전라 원의 넓이가 최소이려면 반지름의 길이가 최소이어야 하므로 주어진 직선과 원이 접해야 한다.

풀이 원의 넓이가 최소이면 반지름의 길이가 최소이므로 원 C 와 직선 $y = -2x + k$ 는 접한다.

원 C 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = -2x + k$, 즉 $2x + y - k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}, \quad |k| = 15$$

$$\therefore k = 15 (\because k > 0) \quad \text{답 ①}$$

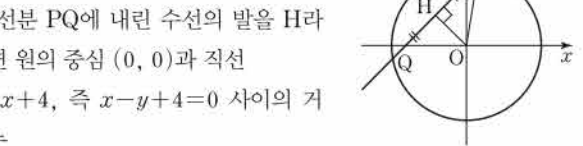
10 전라 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.

풀이 두 점 $(-2, 2), (1, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{5-2}{1+2}(x+2) \quad \therefore y = x + 4$$

오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 교점을 P, Q 라 하고, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 선분 PQ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선

$y = x + 4$, 즉 $x - y + 4 = 0$ 사이의 거리는



$$\overline{OH} = \frac{|4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

이때 $\overline{OP} = 2\sqrt{6}$ 이므로 직각삼각형 OPH 에서

$$\overline{PH} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 4$$

따라서 구하는 현의 길이는

$$\overline{PQ} = 2\overline{PH} = 8 \quad \text{답 ④}$$

11 [전략] 접선의 방정식을 $y=2x+k$ 라 하고, 원의 중심과 접선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

[풀이] 접선의 방정식을 $y=2x+k$ 라 하면 원의 중심 $(-2, 3)$ 과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \cdot (-2) - 3 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k-7|}{\sqrt{5}} \quad \cdots ①$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-7|}{\sqrt{5}} = 3, \quad |k-7| = 3\sqrt{5} \quad \cdots ②$$

$$k-7 = \pm 3\sqrt{5} \quad \therefore k = 7 \pm 3\sqrt{5}$$

따라서 두 접선 $y=2x+7+3\sqrt{5}$, $y=2x+7-3\sqrt{5}$ 의 y 절편이 각각 $7+3\sqrt{5}$, $7-3\sqrt{5}$ 이므로 구하는 곱은

$$(7+3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5}) = 4 \quad \cdots ③$$

답 4

채점 기준	비율
① 원의 중심과 접선 사이의 거리를 구할 수 있다.	40 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ y 절편의 곱을 구할 수 있다.	20 %

12 [전략] 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$ 임을 이용한다.

[풀이] 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(a, 4\sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은 $ax+4\sqrt{3}y=r^2$ $\therefore ax+4\sqrt{3}y-r^2=0$

이 직선이 직선 $x-\sqrt{3}y+b=0$ 과 일치하므로

$$\frac{a}{1} = \frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-r^2}{b}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \text{에서 } a = -4$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-r^2}{b} \text{에서 } r^2 = 4b \quad \cdots ①$$

점 $(-4, 4\sqrt{3})$ 이 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$$r^2 = (-4)^2 + (4\sqrt{3})^2 = 64$$

$$\therefore r = 8 \quad (\because r > 0)$$

$r=8$ 을 ①에 대입하면

$$64 = 4b \quad \therefore b = 16$$

$$\therefore a+b+r = 20 \quad \text{답 ④}$$

13 [전략] 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$ 임을 이용한다.

[풀이] 원 $x^2+y^2=18$ 위의 점 $(3, -3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3x-3y=18 \quad \therefore x-y-6=0 \quad \cdots ① \quad \cdots ①$$

$x^2+y^2-10x+6y+k=0$ 에서

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 34-k \quad \cdots ②$$

이므로 중심의 좌표는 $(5, -3)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{34-k}$ 이다. $\cdots ②$

이때 직선 ①과 원 ②이 접하므로

$$\frac{|5 - (-3) - 6|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{34-k}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{34-k} \quad \therefore k = 32 \quad \cdots ③$$

답 32

채점 기준	비율
① 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
② 원 $x^2+y^2-10x+6y+k=0$ 의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	40 %

14 [전략] 원 위의 점 P에서의 접선은 점 P와 원의 중심을 지나는 직선에 수직임을 이용한다.

[풀이] $x^2+y^2-4x+10y+19=0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 10$$

원의 중심 $(2, -5)$ 와 접점 $(3, -2)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-2+5}{3-2} = 3$$

접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직이므로 접선의 기울기는

$$-\frac{1}{3}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y+2 = -\frac{1}{3}(x-3)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x - 1$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1 = -\frac{1}{3}a - 1, \quad \frac{1}{3}a = -2$$

$$\therefore a = -6 \quad \text{답 -6}$$

15 [전략] 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하고 접선이 점 $(6, 0)$ 을 지남을 이용한다.

[풀이] 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=9$$

이 접선이 점 $(6, 0)$ 을 지나므로

$$6x_1=9 \quad \therefore x_1=\frac{3}{2}$$

또 접점 $(\frac{3}{2}, y_1)$ 이 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + y_1^2 = 9, \quad y_1^2 = \frac{27}{4}$$

$$\therefore y_1 = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$\frac{3}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y = 9 \text{ 또는 } \frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y = 9$$

$$\therefore x + \sqrt{3}y - 6 = 0 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y - 6 = 0$$

이때 두 접선의 y 절편은 $2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}$
 이므로 오른쪽 그림에서 두 접선과
 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$$

답 ③

다른 풀이 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선이 점 $(6, 0)$ 을 지나
 므로 접선의 방정식은

$$y = m(x-6) \quad \therefore mx - y - 6m = 0$$

이때 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $mx - y - 6m = 0$ 사이의 거리가
 원의 반지름의 길이 3과 같아야 하므로

$$\frac{|-6m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3, \quad |2m| = \sqrt{m^2 + 1}$$

$$4m^2 = m^2 + 1, \quad m^2 = \frac{1}{3}$$

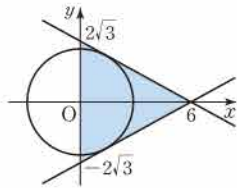
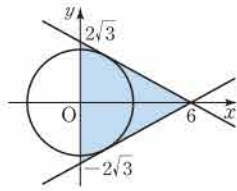
$$\therefore m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 접선의 방정식은

$$x + \sqrt{3}y - 6 = 0 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y - 6 = 0$$

이때 두 접선의 y 절편은 $2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}$
 이므로 오른쪽 그림에서 두 접선과
 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$$



16 전략 반원에 대한 원주각의 크기는 90° 임을 이용한다.

풀이 $\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 $\widehat{AB}$ 는 원의 지름이다.

조건 (가)에서 $\overline{OB} = \overline{OA} + 4$ 이므로 $A(t, 0)$ 이라 하면

$$B(0, t+4)$$

원의 중심 C 는 $\widehat{AB}$ 의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{t}{2}, \frac{t+4}{2}\right)$$

이때 조건 (나)에서 점 C 가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$$\frac{t+4}{2} = 3 \cdot \frac{t}{2}, \quad t+4=3t \quad \therefore t=2$$

즉 $C(1, 3)$ 이고 원의 반지름의 길이는

$$\overline{OC} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

이므로

$$a=1, b=3, r=\sqrt{10}$$

$$\therefore a+b+r^2=14$$

답 14

17 전략 원과 직선이 한 점에서만 만나면 원과 직선이 접함을 이용한다.

풀이 선분 AB 를 2:1로 내분하는 점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 9 + 1 \cdot 0}{2+1}, \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 6}{2+1}\right), \text{ 즉 } (6, 2)$$

점 $P(6, 2)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$ 위의 점이므로

$$36 + 4 - 12a - 4b = 0$$

$$\therefore 3a + b = 10 \quad \dots\dots ㉑$$

한편 원 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$ 의 중심을 C 라 하면 이 원과 직선
 AB 가 점 P 에서만 만나므로 직선 AB 는 직선 CP 과 수직이다.

$$\text{직선 } AB \text{의 기울기는 } \frac{0-6}{9-0} = -\frac{2}{3}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0 \text{에서}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$$

즉 $C(a, b)$ 이고, 직선 CP 의 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이므로

$$\frac{2-b}{6-a} = \frac{3}{2}, \quad 4-2b=18-3a$$

$$\therefore 3a - 2b = 14 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a = \frac{34}{9}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore a+b = \frac{22}{9}$$

답 ④

18 전략 호 AB 를 일부로 하는 원의 방정식을 구한 후 두 원의 교점을
 지나는 직선의 방정식을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 호 AB 를 일
 부로 하는 원을 생각하면 이 원의 반지
 림의 길이는 3이고 점 $(1, 0)$ 에서 x 축
 에 접하므로 중심의 좌표는 $(1, 3)$ 이다.

→ ①

따라서 호 AB 를 일부로 하는 원의 방
 정식은

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$$

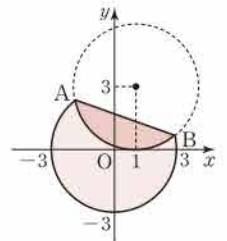
$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0 \quad \dots\dots ㉒$$

이때 직선 AB 는 두 원 $x^2 + y^2 - 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$
 의 교점을 지나므로 직선 AB 의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 9 - (x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1) = 0$$

$$\therefore x + 3y - 5 = 0 \quad \dots\dots ㉓$$

$$\text{답 } x + 3y - 5 = 0$$



채점 기준	비율
① $\widehat{AB}$ 를 일부로 하는 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
② $\widehat{AB}$ 를 일부로 하는 원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
③ 직선 AB 의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

19 전략 두 직선 사이의 거리를 이용하여 원의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 두 직선 $y=3x-9$, $y=3x+1$ 사이의 거리는 직선

$y=3x-9$ 위의 점 $(3, 0)$ 과 직선 $y=3x+1$, 즉 $3x-y+1=0$
 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3 \cdot 3 - 0 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 이므로 중심의 좌표를 (a, b)

라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{5}{2}$$

이때 이 원이 원점을 지나므로

$$a^2 + b^2 = \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 원의 중심 (a, b) 와 직선 $3x-y+1=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 과 같으므로

$$\frac{|3a-b+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad |3a-b+1|=5$$

$$3a-b+1=\pm 5$$

$$\therefore b=3a+6 \text{ 또는 } b=3a-4$$

$b=3a+6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a^2 + (3a+6)^2 = \frac{5}{2} \quad \therefore 20a^2 + 72a + 67 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 36^2 - 20 \cdot 67 = -44 < 0$$

이므로 조건을 만족시키는 실수 a 가 존재하지 않는다.

$b=3a-4$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a^2 + (3a-4)^2 = \frac{5}{2}, \quad 20a^2 - 48a + 27 = 0$$

$$(10a-9)(2a-3)=0$$

$$\therefore a = \frac{9}{10} \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$a = \frac{9}{10}$ 일 때 $b = -\frac{13}{10}$, $a = \frac{3}{2}$ 일 때 $b = \frac{1}{2}$ 이므로 두 원의 방정식은

$$\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{10}\right)^2 = \frac{5}{2} \text{ 또는 } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - \frac{9}{5}x + \frac{13}{5}y = 0 \text{ 또는 } x^2 + y^2 - 3x - y = 0$$

따라서 두 원의 공통현의 방정식은

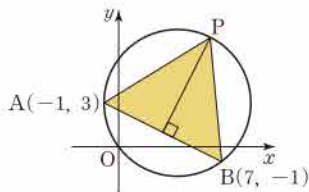
$$x^2 + y^2 - \frac{9}{5}x + \frac{13}{5}y - (x^2 + y^2 - 3x - y) = 0$$

$$\therefore x + 3y = 0$$

$$\text{답 } x + 3y = 0$$

20 [전략] 삼각형 PAB의 밑변을 $\overline{AB}$ 라 하면 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리임을 이용한다.

[풀이] 삼각형 PAB의 밑변을 $\overline{AB}$ 라 하면 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대이다.



직선 AB의 방정식은

$$y-3 = \frac{-1-3}{7+1}(x+1)$$

$$\therefore x + 2y - 5 = 0$$

원의 중심 $(4, 3)$ 과 직선 $x + 2y - 5 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4+2 \cdot 3-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 5이므로 직선 AB와 점 P 사이의 거리의 최댓값은

$$5 + \sqrt{5}$$

$\overline{AB} = \sqrt{(7+1)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot (5 + \sqrt{5}) = 10\sqrt{5} + 10$$

$$\text{답 } \textcircled{4}$$

21 [전략] $P(x_1, y_1)$ ($x_1 > 0, y_1 > 0$)이라 하고 두 점 B, H의 좌표를 x_1, y_1 을 이용하여 나타낸다.

[풀이] $P(x_1, y_1)$ ($x_1 > 0, y_1 > 0$)이라 하면 점선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 4$$

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$x_1x = 4 \quad \therefore x = \frac{4}{x_1}$$

$$\therefore B\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$$

또 $H(x_1, 0)$ 이므로 $2\overline{AH} = \overline{HB}$ 에서

$$2(x_1+2) = \frac{4}{x_1} - x_1, \quad 3x_1^2 + 4x_1 - 4 = 0$$

$$(x_1+2)(3x_1-2)=0$$

$$\therefore x_1 = \frac{2}{3} \quad (\because x_1 > 0)$$

점 $P\left(\frac{2}{3}, y_1\right)$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + y_1^2 = 4, \quad y_1^2 = \frac{32}{9}$$

$$\therefore y_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (\because y_1 > 0)$$

따라서 $P\left(\frac{2}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$, $B(6, 0)$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{PH} = \frac{1}{2} \cdot (6+2) \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{답 } \textcircled{4}$$

04 도형의 이동

I. 도형의 방정식

01 평행이동

확인

본책 72쪽

1 (1) $(-4-3, 1+1)$, 즉 $(-7, 2)$

(2) $(0-3, 7+1)$, 즉 $(-3, 8)$

답 (1) $(-7, 2)$ (2) $(-3, 8)$

2 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동하는 것이다.

(1) $(5+4, -2+5)$, 즉 $(9, 3)$

(2) $(-6+4, -3+5)$, 즉 $(-2, 2)$

답 (1) $(9, 3)$ (2) $(-2, 2)$

3 (1) $(x+3)-4(y-2)-3=0 \quad \therefore x-4y+8=0$

(2) $y-2=-(x+3)^2+4 \quad \therefore y=-(x+3)^2+6$

(3) $(x+3)^2+(y-2)^2=1$

답 (1) $x-4y+8=0$ (2) $y=-(x+3)^2+6$

(3) $(x+3)^2+(y-2)^2=1$

4 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동하는 것이다.

(1) $2(x+1)+(y-4)-1=0 \quad \therefore 2x+y-3=0$

(2) $y-4=2(x+1+1)^2-1 \quad \therefore y=2(x+2)^2+3$

(3) $(x+1)^2+(y-4-3)^2=4 \quad \therefore (x+1)^2+(y-7)^2=4$

답 (1) $2x+y-3=0$ (2) $y=2(x+2)^2+3$

(3) $(x+1)^2+(y-7)^2=4$

유제

본책 74쪽

1 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점

$(3, -2)$ 가 이동하는 점의 좌표는

$(3+1, -2-4)$, 즉 $(4, -6)$

따라서 점 $(4, -6)$ 이 직선 $y=ax+4$ 위의 점이므로

$-6=4a+4, \quad 4a=-10$

$\therefore a=-\frac{5}{2}$

답 $-\frac{5}{2}$

2 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(2, -3)$ 이라 하면

$-1+a=2, \quad -2+b=-3$

$\therefore a=3, b=-1$

즉 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 (x, y) 가 점 $(-5, 4)$ 로 이동한다고 하면

$x+3=-5, y-1=4 \quad \therefore x=-8, y=5$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(-8, 5)$

답 $(-8, 5)$

3 점 $(a, -2)$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 $a+1$ 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+3, -2+a+1)$, 즉 $(a+3, a-1)$

이 점이 제4사분면 위에 있으므로 $a+3>0, a-1<0$

$\therefore -3<a<1$

답 $-3<a<1$

4 직선 $ax+y+b=0$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$a(x-1)+(y+3)+b=0$

$\therefore ax+y-a+b+3=0$

이 직선이 직선 $2x+y-6=0$ 과 일치하므로

$a=2, -a+b+3=-6$

$\therefore a=2, b=-7$

답 $a=2, b=-7$

5 점 $(4, 0)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(-2, 2)$ 라 하면

$4+a=-2, 0+b=2$

$\therefore a=-6, b=2$

즉 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -6만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 직선

$y=mx+n$ 이 이동하는 직선의 방정식은

$y-2=m(x+6)+n$

$\therefore y=mx+6m+n+2$

이 직선이 직선 $y=mx+n$ 과 일치하므로

$6m+n+2=n, \quad 6m=-2$

$\therefore m=-\frac{1}{3}$

답 $-\frac{1}{3}$

6 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 - a 만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 직선

$2x-3y+4=0$ 이 이동하는 직선의 방정식은

$2(x-3)-3(y+a)+4=0$

$\therefore 2x-3y-3a-2=0$

이 직선이 직선 $2x-3y-5=0$ 과 일치하므로

$-3a-2=-5, \quad 3a=3$

$\therefore a=1$

답 1

7 $y=x^2-4x-3$ 에서 $y=(x-2)^2-7$ ㉠

점 (3, -3)을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표를 (-2, 1)이라 하면

$$3+a=-2, -3+b=1 \quad \therefore a=-5, b=4$$

즉 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -5만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 포물선 ㉠이 이동하는 포물선의 방정식은

$$y-4=(x+5-2)^2-7 \quad \therefore y=(x+3)^2-3$$

따라서 구하는 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$$(-3, -3) \quad \text{답 } (-3, -3)$$

다른 풀이 $y=x^2-4x-3=(x-2)^2-7$ 이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (2, -7)

주어진 평행이동에 의하여 점 (2, -7)이 이동하는 점이 평행이동하는 포물선의 꼭짓점이므로 구하는 꼭짓점의 좌표는

$$(2-5, -7+4), \text{ 즉 } (-3, -3)$$

8 $x^2+y^2-6x+4y+4=0$ 에서

$$(x-3)^2+(y+2)^2=9 \quad \dots\dots ㉡$$

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 원 ㉡이 이동하는 원의 방정식은

$$(x+2-3)^2+(y+5+2)^2=9 \\ \therefore (x-1)^2+(y+7)^2=9$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 (1, -7)이다.

$$\text{답 } (1, -7)$$

다른 풀이 $x^2+y^2-6x+4y+4=0$ 에서

$$(x-3)^2+(y+2)^2=9$$

이므로 원의 중심의 좌표는 (3, -2)

주어진 평행이동에 의하여 점 (3, -2)가 이동하는 점이 평행이동하는 원의 중심이므로 구하는 원의 중심의 좌표는

$$(3-2, -2-5), \text{ 즉 } (1, -7)$$

가성별라이트 보충학습

- ① 포물선 F 를 평행이동한 포물선을 F' 이라 하면 포물선 F 의 꼭짓점은 포물선 F' 의 꼭짓점으로 평행이동한다.
- ② 원 O 를 평행이동한 원을 O' 이라 하면 원 O 의 중심은 원 O' 의 중심으로 평행이동한다.

02 대칭이동

확인

본책 77쪽

1 ㉠ (1) (-3, -2) (2) (3, 2) (3) (3, -2) (4) (2, -3)

2 (1) $x+2 \cdot (-y)+4=0 \quad \therefore x-2y+4=0$

(2) $-x+2y+4=0 \quad \therefore x-2y-4=0$

(3) $-x+2 \cdot (-y)+4=0 \quad \therefore x+2y-4=0$

(4) $2x+y+4=0$

답 풀이 참조

유제

본책 80쪽

1 점 A(5, 3)을 x 축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 (5, -3)

점 A(5, 3)을 y 축에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는 (-5, 3)

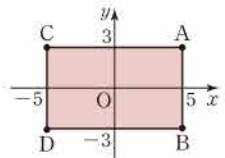
점 A(5, 3)을 원점에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표는 (-5, -3)

따라서 오른쪽 그림에서 사각형

ACDB의 넓이는

$$10 \cdot 6 = 60$$

답 60



2 점 (3, -1)을 x 축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 (3, 1)

점 (3, -1)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 (-1, 3)

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{3-1}{-1-3}(x-3) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

$$\text{답 } y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

3 점 (a, a-1)을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (-a, -a+1)

이 점이 직선 $ax+2y+1=0$ 위의 점이므로

$$a \cdot (-a)+2 \cdot (-a+1)+1=0$$

$$a^2+2a-3=0, \quad (a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=1$$

답 -3, 1

4 직선 $3x-4y+5=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$3x+4y+5=0$$

이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$4x+3y+5=0$$

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면 $x=-\frac{5}{4}$

따라서 구하는 x 절편은 $-\frac{5}{4}$ 이다.

$$\text{답 } -\frac{5}{4}$$

- 5 $y=x^2-4x+8$ 에서 $y=(x-2)^2+4$
이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
 $-y=(-x-2)^2+4 \quad \therefore y=-(x+2)^2-4$
따라서 구하는 포물선의 꼭짓점의 좌표는
(-2, -4) ㉠ (-2, -4)

다른 풀이 $y=x^2-4x+8=(x-2)^2+4$
대칭이동에 의하여 포물선의 꼭짓점 (2, 4)가 이동하는 점이 대칭이동한 포물선의 꼭짓점이므로 구하는 꼭짓점의 좌표는
(-2, -4)

- 6 직선 $y=mx-3$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $y=-mx-3$
이 직선이 원 $x^2+y^2-2x+10y+1=0$, 즉
 $(x-1)^2+(y+5)^2=25$ 의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 원의 중심 (1, -5)를 지난다.
따라서 $-5=-m-3$ 이므로
 $m=2$ ㉡ 2

- 7 직선 $y=3x-1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y+1=3(x-3)-1 \quad \therefore y=3x-11$
이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $x=3y-11 \quad \therefore x-3y+11=0$ ㉢ $x-3y+11=0$

- 8 $y=x^2-6x+1$ 에서 $y=(x-3)^2-8$
포물선 $y=(x-3)^2-8$ 을 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
 $y=(x-2-3)^2-8 \quad \therefore y=(x-5)^2-8$
이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
 $-y=(-x-5)^2-8 \quad \therefore y=-(x+5)^2+8$
이차함수 $y=-(x+5)^2+8$ 은 $x=-5$ 에서 최댓값 8을 가지므로
 $p=-5, q=8$ ㉣ $p=-5, q=8$

- 9 원 $(x-a)^2+(y+3)^2=9$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(x-a)^2+(-y+3)^2=9$
 $\therefore (x-a)^2+(y-3)^2=9$
이 원을 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $(x-a)^2+(y+1-3)^2=9$
 $\therefore (x-a)^2+(y-2)^2=9$
이 원이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 원의 중심 (a, 2)가 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.
 $\therefore a=2$ ㉤ 2

- 10 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 점 A는 두 점 (2, -3), (-6, 5)를 잇는 선분의 중점이므로
 $a=\frac{2-6}{2}=-2, b=\frac{-3+5}{2}=1$
따라서 점 A의 좌표는 (-2, 1)이다. ㉥ (-2, 1)

- 11 $y=2x^2+4x+3$ 에서
 $y=2(x+1)^2+1$ ㉦
 $y=-2x^2+12x-15$ 에서
 $y=-2(x-3)^2+3$ ㉧
두 포물선 ㉦, ㉧이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점 (-1, 1), (3, 3)도 점 (a, b)에 대하여 대칭이다.
따라서 점 (a, b)가 두 점 (-1, 1), (3, 3)을 잇는 선분의 중점이므로
 $a=\frac{-1+3}{2}=1, b=\frac{1+3}{2}=2$
㉨ $a=1, b=2$

다른 풀이 포물선 $y=2x^2+4x+3$ 위의 임의의 점 P(x, y)를 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 점을 P'(x', y')이라 하면 점 (a, b)가 선분 PP'의 중점이므로
 $\frac{x+x'}{2}=a, \frac{y+y'}{2}=b$
 $\therefore x=2a-x', y=2b-y'$
이때 점 P(x, y)가 포물선 $y=2x^2+4x+3$ 위의 점이므로
 $2b-y'=2(2a-x')^2+4(2a-x')+3$
 $\therefore y'=-2x'^2+4(2a+1)x'-8a^2-8a+2b-3$
 x' 을 x 로, y' 을 y 로 바꾸면 대칭이동한 포물선의 방정식은
 $y=-2x^2+4(2a+1)x-8a^2-8a+2b-3$
이 포물선이 포물선 $y=-2x^2+12x-15$ 와 일치해야 하므로
 $4(2a+1)=12, -8a^2-8a+2b-3=-15$
 $\therefore a=1, b=2$

- 12 원 $(x+5)^2+(y-13)^2=16$ 의 중심 (-5, 13)을 점 (-2, 5)에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 점 (-2, 5)가 두 점 (-5, 13), (a, b)를 잇는 선분의 중점이므로
 $\frac{-5+a}{2}=-2, \frac{13+b}{2}=5$
 $\therefore a=1, b=-3$
따라서 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 (1, -3)이고 반지름의 길이가 4이므로 원의 방정식은
 $(x-1)^2+(y+3)^2=16$
위의 식에 $y=0$ 을 대입하면 $(x-1)^2=7$
 $x-1=\pm\sqrt{7} \quad \therefore x=1\pm\sqrt{7}$
따라서 원과 x 축의 교점의 좌표가 $(1+\sqrt{7}, 0), (1-\sqrt{7}, 0)$ 이므로 두 점 사이의 거리는
 $(1+\sqrt{7})-(1-\sqrt{7})=2\sqrt{7}$ ㉩ $2\sqrt{7}$

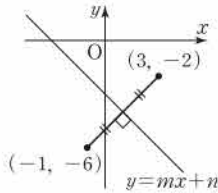
13 두 점 $(3, -2)$, $(-1, -6)$ 을 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-2-6}{2}\right)$, 즉 $(1, -4)$ 가 직선 $y=mx+n$ 위의 점 이므로

$$-4=m+n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 점 $(3, -2)$, $(-1, -6)$ 을 지나는 직선이 직선 $y=mx+n$ 과 수직이므로

$$\frac{-6+2}{-1-3} \cdot m = -1 \quad \therefore m = -1$$

$m = -1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $n = -3$



$$\text{답 } m = -1, n = -3$$

14 직선 $y=2x-3$ 위의 점

$P(x, y)$ 를 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하자.

선분 PP' 의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$

이 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{y+y'}{2} = \frac{x+x'}{2} - 1$$

$$\therefore x - y = -x' + y' + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 직선 PP' 과 직선 $y=x-1$ 이 서로 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x} \cdot 1 = -1 \quad \therefore x+y = x'+y' \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 x, y 에 대하여 풀면

$$x = y' + 1, y = x' - 1$$

이때 점 $P(x, y)$ 가 직선 $y=2x-3$ 위의 점이므로

$$x' - 1 = 2(y' + 1) - 3$$

$$\therefore x' - 2y' = 0$$

x' 을 x 로, y' 을 y 로 바꾸면 구하는 직선의 방정식은

$$x - 2y = 0 \quad \text{답 } x - 2y = 0$$

다른 풀이 두 직선의 방정식 $y=2x-3$, $y=x-1$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1$$

이므로 두 직선은 점 $(2, 1)$ 에서 만난다.

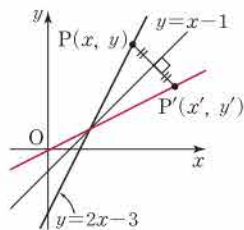
한편 직선 $y=2x-3$ 위의 점 $(0, -3)$ 을 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이동한 점을 (a, b) 라 하면 두 점 $(0, -3)$, (a, b) 를 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{-3+b}{2}\right)$ 가 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{-3+b}{2} = \frac{a}{2} - 1 \quad \therefore a - b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 점 $(0, -3)$, (a, b) 를 지나는 직선이 직선 $y=x-1$ 과 수직이므로

$$\frac{b+3}{a} \cdot 1 = -1 \quad \therefore a+b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -2, b = -1$



따라서 점 $(0, -3)$ 을 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2, -1)$ 이고, 구하는 직선은 두 점 $(2, 1)$, $(-2, -1)$ 을 지나는 직선과 같으므로

$$y-1 = \frac{-1-1}{-2-2}(x-2) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x$$

15 오른쪽 그림과 같이 점 $B(2, 4)$

를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한

점을 B' 이라 하면

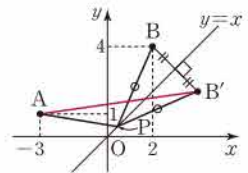
$$B'(4, 2)$$

이때 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{(4+3)^2 + (2-1)^2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다.

$$\text{답 } 5\sqrt{2}$$



16 오른쪽 그림과 같이 점 $B(-3, 7)$

을 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

$$B'(3, 7)$$

이때 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'} \end{aligned}$$

즉 구하는 점 P 의 좌표는 직선 AB' 과 y 축의 교점의 좌표이다.

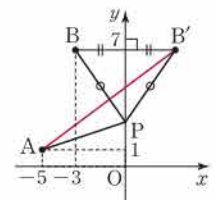
직선 AB' 의 방정식은

$$y-1 = \frac{7-1}{3+5}(x+5)$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{19}{4}$$

따라서 점 P 의 좌표는 $\left(0, \frac{19}{4}\right)$ 이다.

$$\text{답 } \left(0, \frac{19}{4}\right)$$



17 오른쪽 그림과 같이 점

$A(3, 3)$ 을 y 축에 대하여 대칭

이동한 점을 A' 이라 하면

$$A'(-3, 3)$$

또 점 $B(7, 2)$ 를 x 축에 대하여

대칭이동한 점을 B' 이라 하면

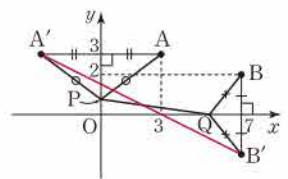
$$B'(7, -2)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{BQ} = \overline{B'Q}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{(7+3)^2 + (-2-3)^2} \\ &= 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{5}$ 이다.

$$\text{답 } 5\sqrt{5}$$



중단원 연습 문제

본책 88쪽

- 01 ⑤ 02 ② 03 24 04 -6 05 ①
 06 ① 07 15 08 ① 09 12 10 ②
 11 4 12 ① 13 17 14 ④ 15 12
 16 ③ 17 (-2, -1) 18 -1 19 $\sqrt{41}-1$

01 전략 점 (x, y) 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x+a, y+b)$ 임을 이용한다.

풀이 점 $A(6, -2)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 점 A' 의 좌표는

$$(6+a, -2+6), \text{ 즉 } (a+6, 4)$$

$$\overline{OA'} = 2\overline{OA} \text{에서 } \overline{OA'}^2 = 4\overline{OA}^2 \text{이므로}$$

$$(a+6)^2 + 4^2 = 4\{6^2 + (-2)^2\}$$

$$a^2 + 12a - 108 = 0, \quad (a+18)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

답 ⑤

02 전략 도형 $f(x, y) = 0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b) = 0$ 임을 이용한다.

풀이 직선 $2x+y-7=0$ 을 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x+3) + (y-k) - 7 = 0$$

$$\therefore 2x + y - k - 1 = 0$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-k - 1 = 0$$

$$\therefore k = -1$$

답 ②

03 전략 먼저 점 B의 좌표를 구한 후 직선 AB의 방정식을 구한다.

풀이 점 $A(3, -1)$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$$(3+1, -1-4), \text{ 즉 } (4, -5)$$

이므로 직선 AB의 방정식은

$$y+1 = \frac{-5+1}{4-3}(x-3)$$

$$\therefore y = -4x + 11$$

이 직선을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-1 = -4(x-3) + 11$$

$$\therefore y = -4x + 24$$

따라서 구하는 y 절편은 24이다.

답 24

참고 점 B가 점 A를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점이므로 직선 AB의 기울기는 -4이다.

따라서 직선 AB의 방정식은

$$y+1 = -4(x-3) \quad \therefore y = -4x + 11$$

즉 점 B의 좌표를 구하지 않고 직선 AB의 방정식을 구할 수도 있다.

04 전략 먼저 점 $(2, -5)$ 를 점 $(1, a)$ 로 이동하는 평행이동을 구한다.

풀이 점 $(2, -5)$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(1, a)$ 라 하면

$$2+m=1, \quad -5+n=a$$

$$\therefore m=-1, \quad n=a+5$$

→ ①

따라서 이차함수 $y=x^2-x+1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 $a+5$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-(a+5) = (x+1)^2 - (x+1) + 1$$

$$\therefore y = x^2 + x + a + 6$$

→ ②

이 이차함수의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = a + 6 \quad \therefore a = -6$$

→ ③

답 -6

채점 기준	비율
① m, n 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	50 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	10 %

05 전략 원 $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접하면 $|p| = |q| = |r|$ 임을 이용한다.

풀이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 원 C의 방정식은

$$(x-a-3)^2 + (y-b+8)^2 = b^2$$

이므로 원 C의 중심의 좌표는 $(a+3, b-8)$ 이고 반지름의 길이는 b 이다.

이때 원 C가 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$|a+3| = |b-8| = b$$

$$|b-8| = b \text{에서 } b-8 = -b \quad \therefore b = 4$$

$$|a+3| = 4 \text{에서 } a+3 = \pm 4 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore a+b = 5$$

답 ①

참고 $|b-8| = b$ 에서 $b-8 = b$ 를 만족시키는 양수 b 의 값은 존재하지 않으므로 $b-8 = -b$ 이다.

06 전략 점 (a, b) 를 원점과 직선 $y=x$ 에 대하여 각각 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, -b), (b, a)$ 임을 이용한다.

풀이 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$(3, -4)$$

점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$$(4, -3)$$

두 점 B, C를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \sqrt{(4-3)^2 + (-3+4)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

답 ①

07 전략 두 직선 l, l' 의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 직선 $2x-3y+6=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선 l' 의 방정식은

$$2y-3x+6=0 \quad \therefore 3x-2y-6=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$2x-3y+6=0, 3x-2y-6=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=6, y=6$$

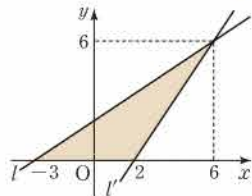
이므로 두 직선 l, l' 의 교점의 좌표는 $(6, 6)$ $\cdots \textcircled{2}$

이때 두 직선 l, l' 의 x 절편이 각각

$-3, 2$ 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15 \quad \cdots \textcircled{3}$$

图 15



채점 기준	비율
① 직선 l' 의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
② 두 직선 l, l' 의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
③ 넓이를 구할 수 있다.	30 %

08 전략 대칭이동한 원의 중심과 주어진 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 함을 이용한다.

풀이 원 $(x-3)^2+(y+k)^2=20$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+k)^2+(y-3)^2=20$$

이 원이 직선 $x-2y+7=0$ 에 접하려면 원의 중심 $(-k, 3)$ 과 직선 $x-2y+7=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{5}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|-k-2 \cdot 3+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}, \quad |k-1|=10$$

$$k-1=\pm 10 \quad \therefore k=-9 \text{ 또는 } k=11$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$(-9)+11=2 \quad \text{图 ①}$$

09 전략 세 방정식이 나타내는 도형은 주어진 도형을 각각 y 축, x 축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형이다.

풀이 세 방정식 $f(-x, y)=0, f(x, -y)=0, f(-x, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 각각 y 축, x 축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형이다.

따라서 구하는 넓이는 오른

쪽 그림의 네 직선으로 둘러

싸인 마름모의 넓이와 같다

므로

$$\frac{1}{2} \cdot (3+3) \cdot (2+2)$$

$$=12$$

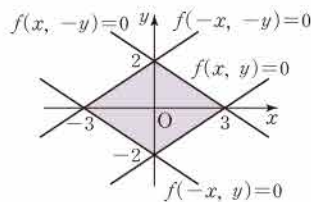


图 12

10 전략 대칭이동한 원의 방정식과 평행이동한 원의 방정식이 일치함을 이용한다.

풀이 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=25$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x+a)^2+(-y+b)^2=25$$

$$\therefore (x-a)^2+(y-b)^2=25 \quad \cdots \textcircled{1}$$

원 $(x+a)^2+(y+b)^2=25$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -8 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-4+a)^2+(y+8+b)^2=25 \quad \cdots \textcircled{2}$$

두 원 ①, ②이 일치하므로

$$-a=-4+a, -b=8+b$$

$$\therefore a=2, b=-4$$

$$\therefore a-b=6$$

图 ②

11 전략 두 직선이 y 축에서 수직으로 만나면 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이고, y 절편은 서로 같음을 이용한다.

풀이 직선 $y=ax+b$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-2=a(x+1)+b$$

$$\therefore y=ax+a+b+2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

직선 $y=ax+a+b+2$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y=-ax+a+b+2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

이 직선이 직선 $y=-2x+5$ 과 y 축에서 수직으로 만나므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이고, y 절편이 서로 같다.

따라서 $-a \cdot (-2)=-1, a+b+2=5$ 이므로

$$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{7}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore b-a=4 \quad \cdots \textcircled{4}$$

图 4

채점 기준	비율
① 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
② 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $b-a$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

12 전략 점 P 를 점 A 에 대하여 대칭이동한 점을 P' 이라 하면 점 A 는 선분 PP' 의 중점임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+2ax-4by=0$ 에서

$$(x+a)^2+(y-2b)^2=a^2+4b^2$$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(-a, 2b)$ 이다.

$$y=-x^2+4x+2$$

$$y=-(x-2)^2+6$$

이므로 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 6)$ 이다.

따라서 점 $(-a, 2b)$ 를 점 $(-1, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(2, 6)$ 이므로 점 $(-1, 1)$ 은 두 점 $(-a, 2b)$, $(2, 6)$ 을 잇는 선분의 중점이다.

$$\therefore \frac{-a+2}{2} = -1, \frac{2b+6}{2} = 1 \text{ 이므로 } a=4, b=-2$$

$$\therefore ab = -8$$

답 ①

13 전략 점 A를 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하면 선분 AB의 중점의 x 좌표는 2이고, 두 점 A, B의 y 좌표는 서로 같다.

풀이 점 $(a+b, 5)$ 를 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(-1, ab+1)$ 이므로 두 점 $(a+b, 5)$, $(-1, ab+1)$ 을 잇는 선분의 중점의 x 좌표는 2이고, 두 점의 y 좌표는 서로 같다. $\rightarrow$ ①

$$\therefore \frac{a+b-1}{2} = 2, 5 = ab+1 \text{ 이므로}$$

$$a+b=5, ab=4$$

$$\therefore a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 5^2 - 2 \cdot 4 = 17$$

답 17

채점 기준	비율
① 두 점 $(a+b, 5)$, $(-1, ab+1)$ 의 x 좌표와 y 좌표의 조건을 알 수 있다.	40 %
② $a+b$, ab 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ a^2+b^2 의 값을 구할 수 있다.	30 %

14 전략 먼저 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A(1, 0)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$$A'(0, 1)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$$

즉 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P₀은 두 직선 A'B, $y=x$ 의 교점이다.

따라서 직선 AP₀을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선은 직선 A'P₀, 즉 직선 A'B이므로 직선 A'B의 방정식은

$$y-1 = \frac{5-1}{6-0}x \quad \therefore y = \frac{2}{3}x+1$$

이 직선이 점 (9, a)를 지나므로

$$a = \frac{2}{3} \cdot 9 + 1 = 7$$

답 ④

15 전략 원과 직선이 접할 때 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 원 C를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행 이동한 원 C'의 방정식은

$$(x-a-1)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

조건 ㉞에서 원 C'은 원 C의 중심 (1, 0)을 지나므로

$$(1-a-1)^2 + (-b)^2 = r^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = r^2$$

..... ㉟

조건 ㉞에서 직선 $4x-3y+21=0$ 이 원 C에 접하므로 원의 중심 (1, 0)과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 r 와 같다.

$$\therefore r = \frac{|4+21|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 5$$

..... ㊱

$$\text{㉟, ㊱에서 } a^2 + b^2 = 25$$

..... ㊲

오른쪽 그림과 같이 두 원 C, C'의 중심을 각각 C, C'이라 하면

$$C(1, 0), C'(a+1, b)$$

두 원 C, C'과 직선 $4x-3y+21=0$ 의 접점을 각각 H, H'이라 하면

$$\overline{CH} = \overline{C'H'} \text{ 이고 } \overline{CH} \perp \overline{HH'}$$

$$\overline{C'H'} \perp \overline{HH'} \text{ 이므로 직선 } \overline{CC'} \text{ 과 직선 } 4x-3y+21=0, \text{ 즉}$$

$$y = \frac{4}{3}x + 7 \text{ 은 평행하다.}$$

$$\therefore \frac{b}{a+1-1} = \frac{4}{3} \text{ 이므로}$$

$$b = \frac{4}{3}a$$

..... ㊳

$$\text{㊳을 ㊲에 대입하면 } a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = 25$$

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$$

$$a = 3 \text{ 을 ㊳에 대입하면 } b = 4$$

$$\therefore a+b+r = 12$$

답 12

16 전략 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 방정식 $f(1-y, x) = 0$ 이 나타내는 도형으로 옮기는 평행이동과 대칭이동을 생각한다.

풀이 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x) = 0$$

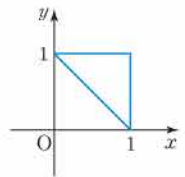
방정식 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형을 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(y+1, x) = 0$$

방정식 $f(y+1, x) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-y+1, x) = 0, \text{ 즉 } f(1-y, x) = 0$$

따라서 방정식 $f(1-y, x) = 0$ 이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다.



답 ③

다른 풀이 주어진 도형의 방정식은

$$\begin{cases} x=0 & (0 \leq y \leq 1) \end{cases}$$

..... ㉟

$$\begin{cases} y=1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

..... ㊱

$$\begin{cases} y=x & (0 \leq y \leq 1) \end{cases}$$

..... ㊲

도형 $f(x, y)=0$ 을 도형 $f(1-y, x)=0$ 으로 이동하는 평행이동과 대칭이동에 의하여 ㉠이 이동하는 도형의 방정식은

$$1-y=0 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad \therefore y=1 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

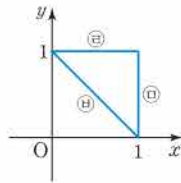
㉡이 이동하는 도형의 방정식은

$$x=1 \quad (0 \leq 1-y \leq 1) \quad \therefore x=1 \quad (0 \leq y \leq 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢이 이동하는 도형의 방정식은

$$x=1-y \quad (0 \leq x \leq 1) \\ \therefore y=1-x \quad (0 \leq x \leq 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

따라서 방정식 $f(1-y, x)=0$ 이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다.



17 전라 점 $P_2, P_3, P_4, \dots$ 의 좌표를 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 점 $P_1(1, 2)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 P_2 의 좌표는

$$(2, 1)$$

점 $P_2(2, 1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_3 의 좌표는

$$(-2, -1)$$

점 $P_3(-2, -1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 P_4 의 좌표는

$$(-1, -2)$$

점 $P_4(-1, -2)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_5 의 좌표는

$$(1, 2)$$

$\vdots$

따라서 점 $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ 의 좌표는 $(1, 2), (2, 1), (-2, -1), (-1, -2)$ 가 이 순서대로 반복된다.

이때 $111=4 \cdot 27+3$ 에서 점 P_{111} 의 좌표는 점 P_3 의 좌표와 같으므로

$$P_{111}(-2, -1) \quad \text{답 } (-2, -1)$$

18 전라 두 점 A, B가 직선 l 에 대하여 대칭이면 직선 l 은 선분 AB를 수직이등분함을 이용한다.

풀이 직선 $y=2x-4$ 위의 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y=-x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하자.

선분 PP' 의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ 이 직선 $y=-x+1$ 위의 점이므로

$$\frac{y+y'}{2} = -\frac{x+x'}{2} + 1 \\ \therefore x+y=2-x'-y' \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

또 직선 PP' 과 직선 $y=-x+1$ 이 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x} \cdot (-1) = -1$$

$$\therefore x-y=x'-y' \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 x, y 에 대하여 풀면

$$x=1-y', y=1-x'$$

이때 점 $P(x, y)$ 가 직선 $y=2x-4$ 위의 점이므로

$$1-x'=2(1-y')-4 \quad \therefore x'-2y'-3=0$$

x' 을 x 로, y' 을 y 로 바꾸면 대칭이동한 직선의 방정식은

$$x-2y-3=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

이 직선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$1-2a-3=0 \quad \therefore a=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

답 -1

채점 기준	비율
① 중점 조건을 이용하여 ㉢을 구할 수 있다.	30 %
② 수직 조건을 이용하여 ㉡을 구할 수 있다.	30 %
③ 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
④ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

19 전라 먼저 점 A를 직선 $x-2y-2=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 구한다.

풀이 점 $A(3, 3)$ 을 직선 $x-2y-2=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a, b)$ 라 하면 선분 AA' 의 중점 $\left(\frac{3+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$ 가 직선 $x-2y-2=0$ 위에 있으므로

$$\frac{3+a}{2} - 2 \cdot \frac{3+b}{2} - 2 = 0 \\ \therefore a-2b=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 직선 AA' 과 직선 $x-2y-2=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-1$ 이 수직이므로

$$\frac{b-3}{a-3} \cdot \frac{1}{2} = -1 \quad \therefore 2a+b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5, b=-1$

$$\therefore A'(5, -1)$$

오른쪽 그림에서 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{A'P} + \overline{PQ} \\ \geq \overline{A'Q}$$

이때 점 $A'(5, -1)$ 과 원의 중심 $(0, 3)$ 사이의 거리는

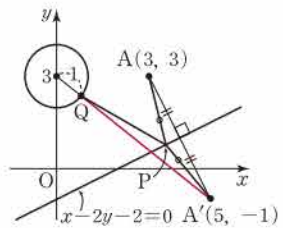
$$\sqrt{(-5)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{41}$$

이므로

$$\overline{A'Q} \geq \sqrt{41} - 1 \\ \therefore \overline{AP} + \overline{PQ} \geq \overline{A'Q} \geq \sqrt{41} - 1$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\sqrt{41}-1$ 이다.

답 $\sqrt{41}-1$



05 집합의 뜻과 포함 관계

01 집합

확인

본책 90쪽

1 ㉠ (1) 1, 2, 5, 10 (3) 2, 4, 6

2 ㉠ (1) $\in$ (2) $\in$ (3) $\notin$ (4) $\in$

3 ㉠ (1) $A = \{1, 3, 5, \dots, 59\}$
(2) $B = \{x | x \text{는 } 32 \text{의 양의 약수}\}$

4 $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 15\}$, $D = \emptyset$ 이므로 A , B , D 는 유한집합, D 는 공집합이다.

또 2보다 크고 3보다 작은 유리수는 무수히 많으므로 C 는 무한집합이다.

㉠ (1) A, B, D (2) C (3) D

5 $|x| \leq 2$ 에서 $-2 \leq x \leq 2$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이므로

$$n(C) = 5$$

$$\text{㉠ } n(A) = 8, n(B) = 0, n(C) = 5$$

유제

본책 93쪽

1 ①, ②, ③, ⑤ '잘하는', '유익한', '깨끗한', '큰'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

④ '가장 작은'은 조건이 명확하므로 집합이다.

㉠ ④

2 $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$$\text{① } 1 \in B$$

$$\text{② } 2 \notin A$$

$$\text{④ } 12 \in A$$

$$\text{⑤ } 24 \notin B$$

㉠ ③

3 $\neg$. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\neg$. $\{2, 4, 6, 8\}$

$$\neg$$
. $\{2, 4, 6, 8\}$

$$\neg$$
. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

이상에서 집합 $\{2, 4, 6, 8\}$ 을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

㉠ $\neg$, $\neg$

4 ② $\{x | x \text{는 } 10 < x < 20 \text{인 소수}\} \rightarrow \{11, 13, 17, 19\}$

㉠ ②

5 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, 2\}$ 에 대하여 $a \in A$, $b \in B$ 이므로

$$a = -1, 0, 1$$

$$b = -2, 2$$

따라서 $a+b$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로 집합 C 를 원소나열법으로 나타내면

$b \setminus a$	-1	0	1
-2	-3	-2	-1
2	1	2	3

$$C = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$$

$$\text{㉠ } C = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$$

6 ① $\{2\}$ 유한집합

② $\{-1\}$ 유한집합

③ $\{100, 101, 102, \dots, 999\}$ 유한집합

④ $\left\{(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, 1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \dots\right\}$

무한집합

⑤ $\{1, 3, 5, \dots\}$ 무한집합

㉠ ④, ⑤

7 $\neg$. $n(\{\emptyset\}) = 1$

$\neg$. $n(\{2, 3, 4\}) = 3$, $n(\{4, 5, 6\}) = 3$ 이므로

$$n(\{2, 3, 4\}) = n(\{4, 5, 6\})$$

$\neg$. $n(\{0, 2\}) = 2$, $n(\{0\}) = 1$ 이므로

$$n(\{0, 2\}) + n(\{0\}) = 3$$

$\neg$. $n(\{5\}) = 1$, $n(\{3\}) = 1$ 이므로

$$n(\{5\}) - n(\{3\}) = 0$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

㉠ $\neg$, $\neg$

02 집합 사이의 포함 관계

확인

본책 96쪽

1 ㉠ (1) $\emptyset$, $\{5\}$

$$(2) \emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}$$

$$(3) \emptyset, \{-3\}, \{3\}, \{-3, 3\}$$

$$(4) \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$$

2 (1) $B = \{1, 3, 9\}$ 이므로

$$A = B$$

(2) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 1\}$ 이므로

$$A \neq B$$

㉠ (1) $A = B$ (2) $A \neq B$

3 (1) $\emptyset, \{-1\}, \{3\}$

(2) $\{x|x \text{는 } 5 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5\}$

따라서 주어진 집합의 진부분집합은

$$\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}$$

답 풀이 참조

4 (1) $n(A)=6$ 이므로 구하는 부분집합의 개수는

$$2^6=64$$

(2) $2^6-1=63$

답 (1) 64 (2) 63

5 (1) 집합 A 에서 1, 5를 제외한 집합 $\{2, 3, 4\}$ 의 부분집합에 원소 1, 5를 넣은 집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$$2^{5-2}=2^3=8$$

(2) 집합 A 에서 2, 3, 4를 제외한 집합 $\{1, 5\}$ 의 부분집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$$2^{5-3}=2^2=4$$

(3) 집합 A 에서 1, 3과 4를 제외한 집합 $\{2, 5\}$ 의 부분집합에 원소 1, 3을 넣은 집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$$2^{5-2-1}=2^2=4$$

답 (1) 8 (2) 4 (3) 4

유제

본책 99쪽

1 ① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$

② a 는 집합 A 의 원소이므로 $a \in A$

③ a 는 집합 B 의 원소이므로 $\{a\} \subset B$

④ c 는 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{a, c\} \not\subset A$

⑤ b, c 는 집합 B 의 원소이므로 $\{b, c\} \subset B$

답 ④

2 $A=\{1, 3, 5, 7\}$

① 1은 집합 A 의 원소이므로 $1 \in A$

② 4는 집합 A 의 원소가 아니므로 $4 \notin A$

③ 3, 5는 집합 A 의 원소이므로 $\{3, 5\} \subset A$

④ 2는 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{2, 3, 7\} \not\subset A$

⑤ 집합 A 의 원소 1은 집합 $\{3, 5, 7, 9\}$ 의 원소가 아니므로

$$A \not\subset \{3, 5, 7, 9\}$$

답 ③

3 $\neg, \cup, \emptyset$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\emptyset \in A, \{\emptyset\} \subset A$

$\cap, 1, 2$ 는 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{1, 2\} \not\subset A$

$\cap, \{1\}, \{2\}$ 는 집합 A 의 원소이므로 $\{\{1\}, \{2\}\} \subset A$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \cup, \cap$ 이다.

답 $\neg, \cup, \cap$

개념블라이트 보충학습

집합을 원소로 갖는 집합

집합 $A=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ 는 집합을 원소로 갖는 집합이다. 집합 A 의 원소는 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ 이고 $\{\{1\}, \{2\}\}$ 는 $\{1\}$ 과 $\{2\}$ 를 원소로 갖는 집합 A 의 부분집합이다. 즉

$$\emptyset \in A, \{1\} \in A, \{2\} \in A, \{1, 2\} \in A,$$

$$\{\emptyset\} \subset A, \{\{1\}\} \subset A, \{\{2\}\} \subset A, \{\{1, 2\}\} \subset A, \{\{1\}, \{2\}\} \subset A$$

4 $A=B$ 이면 두 집합 A, B 의 모든 원소가 같다.

$1 \in A$ 에서 $1 \in B$ 이어야 하므로

$$a-b=1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$7 \in B$ 에서 $7 \in A$ 이어야 하므로

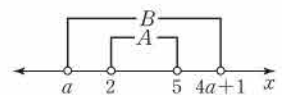
$$a+b=7 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=4, b=3$

$$\therefore ab=12$$

답 12

5 $A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를 수직선을 이용하여 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$a \leq 2, 4a+1 \geq 5$$

$$4a+1 \geq 5 \text{에서 } 4a \geq 4 \quad \therefore a \geq 1$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2$$

답 $1 \leq a \leq 2$

6 $A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A=B$

$-4 \in A$ 에서 $-4 \in B$ 이어야 하므로

$$a^2-5a=-4, \quad a^2-5a+4=0$$

$$(a-1)(a-4)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$2 \in B$ 에서 $2 \in A$ 이어야 하므로

$$a^2-2a-6=2, \quad a^2-2a-8=0$$

$$(a+2)(a-4)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $A=B$ 를 만족시키는 a 의 값은 4이다.

답 4

7 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

집합 X 는 집합 A 의 진부분집합이고, 2, 4를 반드시 원소로 가지므로 집합 X 의 개수는

$$2^{5-2}-1=2^3-1=7$$

답 7

8 $A=\{1, 6\}, B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{6-2}=2^4=16$$

답 16

중단원 연습 문제

본책 102쪽

- 01 ③ 02 ② 03 ③ 04 ⑤ 05 ②
 06 ④ 07 ⑤ 08 ⑤ 09 11 10 ⑤
 11 4 12 12 13 ④ 14 64 15 5
 16 30 17 3 18 9 19 ④ 20 21
 21 ①

01 **전략** 집합은 그 대상을 분명히 정할 수 있는 것들의 모임이다.

풀이 ㄱ, ㄴ, '따뜻한', '가까운'은 조건이 명확하지 않아 그 대상을 분명히 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
 이상에서 집합인 것은 ㄷ, ㄷ, ㄷ의 3개이다. **답 ③**

02 **전략** 조건제시법으로 나타내어진 집합을 원소나열법으로 나타낸다.

- 풀이** ① $A = \{1, 2, 5, 10\}$
 ② $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
 ③ $A = \{1, 5, 25\}$
 ④ $A = \{5, 10, 15, 20\}$
 ⑤ $A = \{10, 20\}$

답 ②

03 **전략** 소인수분해 하였을 때 소인수가 2, 5인 수는 집합 A의 원소이다.

- 풀이** ① $10 = 2^1 \times 5^1$
 ② $50 = 2^1 \times 5^2$
 ③ $70 = 2^1 \times 5^1 \times 7^1$
 ④ $80 = 2^4 \times 5^1$
 ⑤ $100 = 2^2 \times 5^2$

답 ③

04 **전략** 공집합은 원소가 하나도 없는 집합이다.

- 풀이** ⑤ $\{5\}$

답 ⑤

05 **전략** $n(A)$ 는 유한집합 A의 원소의 개수를 뜻한다.

- 풀이** ① $n(\{5\}) = 1$
 ② 집합 $\{0, \{0, 1\}\}$ 의 원소는 0, $\{0, 1\}$ 이므로
 $n(\{0, \{0, 1\}\}) = 2$
 ③ $n(\emptyset) = 0$, $n(\{\emptyset\}) = 1$ 이므로
 $n(\emptyset) + n(\{\emptyset\}) = 1$
 ④ $\{x | x \text{는 } 8 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로
 $n(\{x | x \text{는 } 8 \text{의 양의 약수}\}) = 4$
 ⑤ $n(\{1, 2, 3, 4\}) = 4$, $n(\{1, 2, 3\}) = 3$ 이므로
 $n(\{1, 2, 3, 4\}) - n(\{1, 2, 3\}) = 1$

답 ②

06 **전략** 먼저 두 집합 Y, Z를 원소나열법으로 나타낸다.

- 풀이** $Y = \{0, 1\}$, $Z = \{0, 1\}$ 이므로
 $Y = Z \subset X$

답 ④

07 **전략** $(\text{원소}) \in (\text{집합})$, $(\text{부분집합}) \subset (\text{집합})$ 임을 이용한다.

- 풀이** 집합 $A = \{\emptyset, 0, \{0\}\}$ 의 원소는 $\emptyset, 0, \{0\}$
 ①, ③ $\emptyset$ 은 집합 A의 원소이므로
 $\emptyset \in A$, $\{\emptyset\} \subset A$
 ②, ④ $\{0\}$ 은 집합 A의 원소이므로
 $\{0\} \in A$, $\{\{0\}\} \subset A$
 ⑤ $\emptyset, 0$ 은 집합 A의 원소이므로
 $\{\emptyset, 0\} \subset A$

답 ⑤

08 **전략** 성립하지 않는 예를 찾는다.

- 풀이** ① $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$ 이면 $A \subset B$ 이지만
 $n(A) = n(B)$ 이다.
 ② $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이지만
 $A \neq B$ 이다.
 ③ $A = \{1, 3\}$, $B = \{2\}$ 이면 $n(A) > n(B)$ 이지만 $B \not\subset A$ 이다.
 ④ $n(A) = 0$ 이면 $A = \emptyset$ 이다.
 ⑤ $n(\emptyset) = 0$ 이므로 $n(A) \leq 0$ 이면 $n(A) = 0$ 이다.
 따라서 $A = \emptyset$ 이다.

답 ⑤

09 **전략** $A \subset B$ 이면 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속한다.

- 풀이** $A \subset B$ 가 성립하려면 $3 \in B$ 이어야 한다.

- (i) $a^2 + 2 = 3$, 즉 $a = \pm 1$ 일 때,
 $a = 1$ 이면 $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 6\}$ 이므로
 $A \subset B$
 $a = -1$ 이면 $A = \{0, 3\}$, $B = \{2, 3, 8\}$ 이므로
 $A \not\subset B$
 (ii) $-a + 7 = 3$, 즉 $a = 4$ 일 때,
 $A = \{3, 5\}$, $B = \{2, 3, 18\}$ 이므로
 $A \not\subset B$

- (i), (ii)에서 $A \subset B$ 를 만족시키는 a의 값은 1이다. **... ①**
 따라서 $B = \{2, 3, 6\}$ 이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
 $2 + 3 + 6 = 11$ **... ②**

답 11

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	70 %
② 집합 B의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	30 %

10 **전략** $A=B$ 이면 두 집합 A, B 의 모든 원소가 같음을 이용한다.

풀이 $A=B$ 이므로

$$a+2=2 \text{ 또는 } a^2-2=2$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a=2$$

(i) $a=-2$ 일 때,

$$A=\{0, 2\}, B=\{2, 8\} \text{이므로 } A \neq B$$

(ii) $a=0$ 일 때,

$$A=\{-2, 2\}, B=\{2, 6\} \text{이므로 } A \neq B$$

(iii) $a=2$ 일 때,

$$A=\{2, 4\}, B=\{2, 4\} \text{이므로 } A=B$$

이상에서 $a=2$

답 ⑤

11 **전략** 집합 B 는 집합 A 의 부분집합 중에서 원소가 3개인 집합임을 이용한다.

풀이 $x^2=1$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$$x^2=4 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore A=\{-2, -1, 1, 2\}$$

$B \subset A$ 이고 $n(B)=3$ 을 만족시키는 집합 B 는 집합 A 의 부분집합 중에서 원소가 3개인 집합이므로

$$\{-2, -1, 1\}, \{-2, -1, 2\}, \{-2, 1, 2\}, \{-1, 1, 2\}$$

의 4개이다.

답 4

12 **전략** 원소의 개수가 n 인 집합의 부분집합의 개수는 2^n 임을 이용한다.

풀이 집합 A 의 원소의 개수를 a 라 하면 부분집합의 개수가 128이므로

$$2^a=128 \quad \therefore a=7$$

집합 B 의 원소의 개수를 b 라 하면 진부분집합의 개수가 31이므로

$$2^b-1=31, \quad 2^b=32$$

$$\therefore b=5$$

$$\therefore n(A)+n(B)=a+b=12$$

답 12

채점 기준	비율
① 집합 A 의 원소의 개수를 구할 수 있다.	40 %
② 집합 B 의 원소의 개수를 구할 수 있다.	40 %
③ $n(A)+n(B)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

13 **전략** 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는(갖지 않는) 부분집합의 개수는 그 원소를 제외한 집합의 부분집합의 개수와 같다.

풀이 집합 A 에서 1과 2, 8을 제외한 집합 $\{3, 4, 6, 12, 24\}$ 의 부분집합에 원소 1을 넣은 집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$$2^{8-1-2}=2^5=32$$

답 ④

14 **전략** 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 집합 A 의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합임을 이용한다.

풀이 $x^2-8x+15=0$ 에서

$$(x-3)(x-5)=0 \quad \therefore x=3 \text{ 또는 } x=5$$

$$\therefore A=\{3, 5\}$$

$B=\{x|x \text{는 } 30 \text{의 양의 약수}\}$ 이므로

$$B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

... ①

따라서 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중에서 3, 5를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{8-2}=2^6=64$$

... ②

답 64

채점 기준	비율
① 집합 A, B 를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.	40 %
② 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	60 %

15 **전략** 원소가 3개, 4개, 5개인 경우로 나누어 구한다.

풀이 집합 A 의 부분집합 중 모든 원소의 합이 12 이상이 되려면 원소의 개수가 3 이상이어야 한다.

(i) 원소의 개수가 3인 경우

$$\{3, 4, 5\} \text{의 1개}$$

(ii) 원소의 개수가 4인 경우

$$\{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\} \text{의 3개}$$

(iii) 원소의 개수가 5인 경우

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \text{의 1개}$$

... ①

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$$1+3+1=5$$

... ②

답 5

채점 기준	비율
① 원소가 3개, 4개, 5개인 경우로 나누어 각각의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	80 %
② 모든 원소의 합이 12 이상인 부분집합의 개수를 구할 수 있다.	20 %

16 **전략** m, n 에 집합 A 의 원소를 각각 대입하여 집합 X 의 원소를 구한다.

풀이 (i) $m=1, n=1$ 일 때,

$$2^m+3n=2^1+3 \cdot 1=5$$

(ii) $m=1, n=2$ 일 때,

$$2^m+3n=2^1+3 \cdot 2=8$$

(iii) $m=2, n=1$ 일 때,

$$2^m+3n=2^2+3 \cdot 1=7$$

(iv) $m=2, n=2$ 일 때,

$$2^m+3n=2^2+3 \cdot 2=10$$

이상에서 $X=\{5, 7, 8, 10\}$

따라서 집합 X 의 모든 원소의 합은

$$5+7+8+10=30$$

답 30

17 전략 집합 A 를 원소나열법으로 나타낸 후 A 의 원소를 이용하여 집합 B 의 원소를 구한다.

풀이 $i^1=i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i, \dots$ 이므로

$$A=\{i, -1, -i, 1\}$$

이때

$$i^2=-1, (-1)^2=1, (-i)^2=-1, 1^2=1$$

이므로 집합 A 의 원소 z 에 대하여 z^2 의 값은 $-1, 1$ 중 하나이다.

즉 집합 A 의 두 원소 z_1, z_2 에 대하여

$z_1^2+z_2^2$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으

므로

$$B=\{-2, 0, 2\}$$

따라서 집합 B 의 원소의 개수는 3이다.

답 3

참고 집합 A 의 두 원소 z_1, z_2

에 대하여 $z_1^2+z_2^2$ 의 값을 오른쪽 표를 이용하여 구할 수도 있다.

z_1^2, z_2^2	-1	1
-1	-2	0
1	0	2

z_1, z_2	i	-1	$-i$	1
i	-2	0	-2	0
-1	0	2	0	2
$-i$	-2	0	-2	0
1	0	2	0	2

18 전략 $A \subset B, B \subset A$ 이면 $A=B$ 임을 이용한다.

풀이 $A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A=B$

$A=B$ 에서 두 집합 A, B 의 모든 원소의 합이 서로 같으므로

$$a+b+c=ab+bc+ca$$

$$\therefore ab+bc+ca=4$$

→ ①

또 두 집합 A, B 의 모든 원소의 곱이 서로 같으므로

$$abc=ab \cdot bc \cdot ca, \quad abc=(abc)^2$$

$$abc(abc-1)=0 \quad \therefore abc=1 (\because abc \neq 0)$$

→ ②

$$\therefore a^2+b^2+c^2+abc$$

$$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+abc$$

$$=4^2-2 \cdot 4+1=9$$

→ ③

답 9

채점 기준	비율
① $ab+bc+ca$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② abc 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $a^2+b^2+c^2+abc$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

19 전략 원소의 개수가 n 인 집합에 대하여 특정한 k 개는 반드시 원소로 갖고, 특정한 m 개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-k-m} 임을 이용한다. (단, $k+m < n$)

풀이 $A=\{1, 2, 3, \dots, k\}$ 이므로 $n(A)=k$

따라서 3, 4, 5를 반드시 원소로 갖고 1, 2를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{k-3-2}=64, \quad 2^{k-5}=2^6$$

$$k-5=6 \quad \therefore k=11$$

답 ④

20 전략 두 수의 합이 7인 경우를 나누어 집합 X 의 개수를 구한다.

풀이 $7=1+6=2+5=3+4$ 이므로

(i) 원소 중 가장 큰 수가 6, 가장 작은 수가 1인 경우

집합 X 는 1, 6을 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 X 의 개수는

$$2^{6-2}=2^4=16$$

→ ①

(ii) 원소 중 가장 큰 수가 5, 가장 작은 수가 2인 경우

집합 X 는 2, 5를 반드시 원소로 갖고 1, 6을 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 X 의 개수는

$$2^{6-2-2}=2^2=4$$

→ ②

(iii) 원소 중 가장 큰 수가 4, 가장 작은 수가 3인 경우

집합 X 는 $\{3, 4\}$ 의 1개이다.

→ ③

이상에서 구하는 집합 X 의 개수는

$$16+4+1=21$$

→ ④

답 21

채점 기준	비율
① 원소 중 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 6, 1인 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	30 %
② 원소 중 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 5, 2인 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	30 %
③ 원소 중 가장 큰 수와 가장 작은 수가 각각 4, 3인 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	30 %
④ 조건을 만족시키는 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	10 %

21 전략 가장 작은 원소가 1, 2, 3, 4인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 집합 S 의 부분집합 중에서 원소가 2개 이상인 집합의 개수는 다음과 같다.

(i) 1이 가장 작은 원소인 경우

1을 반드시 원소로 갖는 집합에서 $\{1\}$ 을 제외하면 되므로

$$2^{5-1}-1=15$$

(ii) 2가 가장 작은 원소인 경우

2를 반드시 원소로 갖고 1을 원소로 갖지 않는 집합에서 $\{2\}$ 를 제외하면 되므로

$$2^{5-1-1}-1=7$$

(iii) 3이 가장 작은 원소인 경우

3을 반드시 원소로 갖고 1, 2를 원소로 갖지 않는 집합에서 $\{3\}$ 을 제외하면 되므로

$$2^{5-1-2}-1=3$$

(iv) 4가 가장 작은 원소인 경우

$\{4, 5\}$ 의 1개이다.

이상에서 구하는 값은

$$15 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 42$$

답 ①

06 집합의 연산

01 집합의 연산

확인

본책 106쪽

- 1 (1)
- $A = \{-1, 0, 1\}$
- ,
- $B = \{1, 2, 3\}$
- 이므로

$$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\},$$

$$A \cap B = \{1\}$$

- (2)
- $A = \{2, 3\}$
- ,
- $B = \{-4, 4\}$
- 이므로

$$A \cup B = \{-4, 2, 3, 4\},$$

$$A \cap B = \emptyset$$

따라서 A 와 B 는 서로소이다.

$$\text{답 (1) } A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}, A \cap B = \{1\}$$

$$(2) A \cup B = \{-4, 2, 3, 4\}, A \cap B = \emptyset,$$

 A 와 B 는 서로소이다.

- 2 ①
- $A \cup (A \cap \emptyset) = A \cup \emptyset = A$

$$\text{② } (A \cup \emptyset) \cap A = A \cap A = A$$

$$\text{③ } (A \cup \emptyset) \cup \emptyset = A \cup \emptyset = A$$

$$\text{④ } (A \cap A) \cap \emptyset = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\text{⑤ } (A \cap B) \subset A \text{이므로}$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

답 ④

- 3
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$= \{2, 3, 7\} \cup \{3, 6\}$$

$$= \{2, 3, 6, 7\}$$

답 {2, 3, 6, 7}

- 4
- $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
- ,
- $A = \{1, 3, 5, 15\}$
- ,

$$B = \{2, 5, 10\}$$

$$(1) A^c = \{2, 6, 10, 30\}$$

$$(2) B^c = \{1, 3, 6, 15, 30\}$$

$$(3) A - B = \{1, 3, 15\}$$

$$(4) B - A = \{2, 10\}$$

답 풀이 참조

- 5 ①
- $A \cap U^c = A \cap \emptyset = \emptyset$

$$\text{② } A \cup A^c = U$$

$$\text{③ } (A^c)^c \cap U = A \cap U = A$$

$$\text{④ } \emptyset - A = \emptyset$$

$$\text{⑤ } A^c \cap B = B - A$$

답 ③

유제

본책 110쪽

- 1
- $A = \{1, 4, 7, 10\}$
- ,
- $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- ,

$$C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$\text{③ } B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12\} \text{이므로}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 4, 10\}$$

$$\text{④ } B \cap C = \{2, 4, 6\} \text{이므로}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 4, 6, 7, 10\}$$

$$\text{⑤ } A \cap B = \{4, 10\} \text{이므로}$$

$$(A \cap B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}$$

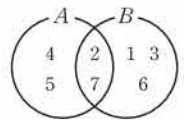
답 ⑤

- 2 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나

타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$$

$$\text{답 } \{1, 2, 3, 6, 7\}$$



- 3
- $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- ,
- $B = \{5, 10\}$
- 이므로

$$A - B = \{1, 3, 7, 9\}$$

$$\therefore (A - B)^c = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$$

답 {2, 4, 5, 6, 8, 10}

- 4
- $U = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$
- ,
- $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
- ,

$$B = \{1, 3, 5, 15\} \text{이므로}$$

$$A - B = \{2, 7, 11, 13\}, B - A = \{1, 15\}$$

$$\therefore (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 7, 11, 13, 15\}$$

답 {1, 2, 7, 11, 13, 15}

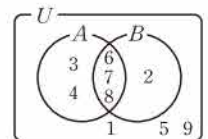
- 5
- $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$
- 이고 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$A^c = \{1, 2, 5, 9\}$$

따라서 집합 A^c 의 모든 원소의 합은

$$1 + 2 + 5 + 9 = 17$$

답 17



- 6
- $A \cap B = \{-3, 4\}$
- 에서
- $4 \in A$
- 이므로

$$2a + b = 4$$

..... ㉠

$$\text{또 } -3 \in B \text{이므로 } a - 2b = -3$$

..... ㉡

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a = 1, b = 2$$

$$\therefore a + b = 3$$

답 3

- 7
- $A - B = \{1\}$
- 에서
- $A \cap B = \{4, a^2 - a\}$
- 이므로

$$4 \in B, a^2 - a \in B$$

$4 \in B$ 에서 $a-3=4$ 또는 $a+1=4$

$\therefore a=7$ 또는 $a=3$

(i) $a=7$ 일 때,

$A=\{1, 4, 42\}, B=\{4, 6, 8\}$ 이므로

$A-B=\{1, 42\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$ 일 때,

$A=\{1, 4, 6\}, B=\{0, 4, 6\}$ 이므로

$A-B=\{1\}$

(i), (ii)에서 $a=3$

답 3

8 $A \cup B = \{-1, 2, 3, 4\}$ 이고 $A = \{a-3, 2, 3\}$ 이므로

$a-3=-1$ 또는 $a-3=4$

$\therefore a=2$ 또는 $a=7$

(i) $a=2$ 일 때,

$A=\{-1, 2, 3\}, B=\{-1, 3, 4\}$ 이므로

$A \cup B = \{-1, 2, 3, 4\}$

(ii) $a=7$ 일 때,

$A=\{2, 3, 4\}, B=\{-1, 14, 48\}$ 이므로

$A \cup B = \{-1, 2, 3, 4, 14, 48\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $B = \{-1, 3, 4\}$

답 $\{-1, 3, 4\}$

9 $A \cup B = B$ 이면 $A \subset B$

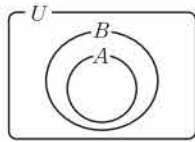
이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

① $A \cap B = A$

② $A \cup B^c \neq U$

③ $B - A \neq \emptyset$

④ $A^c - B^c \neq \emptyset$



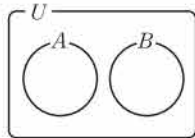
답 ⑤

10 $A - B = A$ 이면 $A \cap B = \emptyset$

이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

④ $A^c \not\subset B$

답 ④



11 $(A-B) \cup B = (A \cap B^c) \cup B$

$= (A \cup B) \cap (B^c \cup B)$

$= (A \cup B) \cap U$

$= A \cup B$

따라서 $A \cup B = A$ 이므로 $B \subset A$

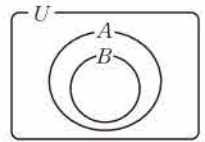
이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

① $A \not\subset B$

② $B^c \not\subset A$

③ $A - B \neq \emptyset$

⑤ $A \neq B$



답 ④

12 $(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$

$(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$

$\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$

이때 $A \cap B = \{4, 10\}, A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 집합 $\{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$ 의 부분집합 중에서 4, 10을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^{7-2} = 2^5 = 32$

답 32

13 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}, A = \{1, 2, 5, 10\}, B = \{4, 9\}$

$A - X = \emptyset$ 이므로 $A \subset X$

$B - X = B$ 이므로 $B \cap X = \emptyset$

따라서 집합 X 의 개수는 전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 의 부분집합 중에서 집합 A 의 원소 1, 2, 5, 10을 반드시 원소로 갖고 집합 B 의 원소 4, 9를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{10-4-2} = 2^4 = 16$

답 16

14 $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}, A = \{1, 3, 4, 12\},$

$B = \{3, 6, 24\}$ 이므로

$A - B = \{1, 4, 12\}$

$(A - B) \cap X = \{1, 4\}$ 에서 집합 X 는 1, 4를 반드시 원소로 갖고 12를 원소로 갖지 않는다.

또 $B \cup X = X$ 에서 $B \subset X$ 이므로 집합 X 는 집합 B 의 원소 3, 6, 24를 반드시 원소로 갖는다.

따라서 집합 X 의 개수는 전체집합

$U = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ 의 부분집합 중에서 1, 3, 4, 6, 24를 반드시 원소로 갖고 12를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{8-5-1} = 2^2 = 4$

답 4

02 드모르간의 법칙

확인

본책 115쪽

1 (1) $(A \cap B) \cup (A^c \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B)^c = U$

$$\begin{aligned}
 (2) (A^c \cup B)^c \cup B &= (A \cap B^c) \cup B \\
 &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \\
 &= (A \cup B) \cap U \\
 &= A \cup B
 \end{aligned}$$

답 (1) U (2) $A \cup B$

2 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서
 $39 = 26 + 18 - n(A \cap B)$
 $\therefore n(A \cap B) = 5$

답 5

3 (1) $n(A^c) = n(U) - n(A) = 30 - 13 = 17$
 (2) $n(B^c \cap A) = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
 $= 13 - 5 = 8$

답 (1) 17 (2) 8

유제

본책 117쪽

1 (1) $(A \cup B) \cup (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cup (A \cup B)^c$
 $= U$
 (2) $A - (A \cup B)^c = A \cap (A \cup B)^c$
 $= A \cap (A^c \cap B)$
 $= (A \cap A^c) \cap B$
 $= \emptyset \cap B$
 $= \emptyset$

답 (1) U (2) $\emptyset$

2 $A \cap B = A - (A - B) = \{4, 6\}$ 이므로
 $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{2, 8, 10\}$

답 {2, 8, 10}

3 주어진 식의 좌변을 정리하면
 $\{(A \cup B) \cap (A - B)^c\} \cup A$
 $= \{(A \cup B) \cap (A \cap B^c)^c\} \cup A$
 $= \{(A \cup B) \cap (A^c \cup B)\} \cup A$
 $= \{(A \cap A^c) \cup B\} \cup A$
 $= (\emptyset \cup B) \cup A$
 $= A \cup B$

따라서 $A \cup B = B$ 이므로 $A \subset B$

③ $B - A \neq B$

④ $A \cap B = A$

⑤ $A \cup B = B$

답 ①

4 (1) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ 에서
 $n(A \cap B) = n(A) - n(A - B) = 10 - 4 = 6$
 $\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 10 + 8 - 6 = 12$

(2) $n(A^c \cup B) = n((A \cap B^c)^c)$
 $= n(U) - n(A \cap B^c)$
 $= n(U) - n(A - B)$
 $= 25 - 4 = 21$

답 (1) 12 (2) 21

다른 풀이 (1) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(B) = 4 + 8 = 12$

5 $n(U) = 30$ 이고
 $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$
 $= n(U) - n(A \cup B)$

이므로

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B) &= n(U) - n(A^c \cap B^c) \\
 &= 30 - 8 = 22 \\
 \therefore n(A \cap B) &= n(A \cup B) - n(A - B) - n(B - A) \\
 &= 22 - 5 - 12 = 5
 \end{aligned}$$

답 5

6 $B \cap C = \emptyset$ 이므로 $A \cap B \cap C = \emptyset$
 $\therefore n(B \cap C) = 0, n(A \cap B \cap C) = 0$

또한

$$\begin{aligned}
 n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\
 &= 14 + 10 - 22 = 2, \\
 n(C \cap A) &= n(C) + n(A) - n(C \cup A) \\
 &= 9 + 14 - 18 = 5
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\
 &\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\
 &= 14 + 10 + 9 - 2 - 0 - 5 + 0 \\
 &= 26
 \end{aligned}$$

답 26

7 장미를 좋아하는 학생의 집합을 A , 백합을 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(A) = 12, n(B) = 10, n(A \cap B) = 7$$

장미 또는 백합을 좋아하는 학생의 집합은 $A \cup B$ 이므로

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\
 &= 12 + 10 - 7 = 15
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는 15이다.

답 15

8 산악 동호회 회원 전체의 집합을 U , 관악산을 등산한 회원의 집합을 A , 북한산을 등산한 회원의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=40, n(A)=29, n(B)=23, n(A^c \cap B^c)=6$$

이때

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(U) - n(A^c \cap B^c) \\ &= 40 - 6 = 34 \end{aligned}$$

관악산만 등산한 회원의 집합은 $A - B$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A \cup B) - n(B) \\ &= 34 - 23 = 11 \end{aligned}$$

따라서 구하는 회원 수는 11이다.

답 11

다른 풀이 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 29 + 23 - 34 = 18 \end{aligned}$$

관악산만 등산한 회원의 집합은 $A - B$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= 29 - 18 = 11 \end{aligned}$$

9 환경 동호회 회원 전체의 집합을 U , 텀블러를 사용하는 회원의 집합을 A , 머그잔을 사용하는 회원의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=50, n(A)=23, n(B)=34$$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 23 + 34 - n(A \cup B) \\ &= 57 - n(A \cup B) \end{aligned}$$

(i) $n(A \cap B)$ 의 값이 최대인 경우

$n(A \cup B)$ 의 값이 최소일 때, 즉 $A \subset B$ 일 때이므로

$n(A \cap B)$ 의 최댓값은

$$n(A \cap B) = n(A) = 23$$

(ii) $n(A \cap B)$ 의 값이 최소인 경우

$n(A \cup B)$ 의 값이 최대일 때, 즉 $A \cup B = U$ 일 때이므로

$n(A \cap B)$ 의 최솟값은

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= 57 - n(A \cup B) = 57 - n(U) \\ &= 57 - 50 = 7 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 텀블러와 머그잔을 모두 사용하는 회원 수의 최댓값은 23, 최솟값은 7이다. **답** 최댓값: 23, 최솟값: 7

기초문제 보충학습

유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값

전체집합 U 의 두 부분집합 X, Y 에 대하여 $n(X) + n(Y) \geq n(U)$, $n(X) < n(Y)$ 일 때,

$$X \subset (X \cup Y), Y \subset (X \cup Y) \text{이고 } (X \cup Y) \subset U$$

이므로 $n(Y) \leq n(X \cup Y) \leq n(U)$ 가 성립한다.

따라서 $n(X \cup Y)$ 의 최댓값은 $n(U)$, 최솟값은 $n(Y)$ 이다.

중단원 연습 문제

본책 120쪽

- | | | | |
|-------|-------|------------------|------------|
| 01 ④ | 02 ④ | 03 ④ | 04 {2, 10} |
| 05 ② | 06 32 | 07 ② | 08 4 |
| 10 40 | 11 ③ | 12 ③ | 13 10 |
| 15 6 | 16 8 | 17 $\frac{9}{2}$ | 18 7 |
| 20 ④ | 21 22 | 19 27 | |

01 **전략** 두 집합 A, B 가 서로소이면 $A \cap B = \emptyset$ 임을 이용한다.

풀이 $A = \{1, 2, 3, 6\}$

④ $B = \{x | x \text{는 } 4 \text{의 양의 배수}\}$ 라 하면

$$B = \{4, 8, 12, \dots\}$$

따라서 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.

답 ④

02 **전략** 합집합, 교집합, 여집합, 차집합의 뜻을 이용한다.

풀이 $B = \{1, 2, 4, 8\}$

④ $B - A^c = B \cap (A^c)^c = B \cap A = \{1, 2\}$

답 ④

03 **전략** $B - A = \{k\}$ 이면 k 를 제외한 집합 B 의 원소는 모두 집합 A 의 원소임을 이용한다.

풀이 $B - A = \{7\}$ 에서 $4 \in (A \cap B)$ 이므로

$$4 \in A \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore A = \{1, 4, 5\}, B = \{1, 4, 7\}$$

④ $A - B = \{5\}$

답 ④

04 **전략** 먼저 주어진 집합을 집합의 연산의 성질을 이용하여 간단히 한다.

풀이 $(B - A) \subset B$ 이므로 $(B - A) \cup B = B$

$$\therefore \{(B - A) \cup B\} \cap A^c = B \cap A^c = B - A = \{2, 10\}$$

답 {2, 10}

05 **전략** $A^c \cap B = B - A = \emptyset$ 임을 이용한다.

풀이 $A^c \cap B = \emptyset$ 이면 $B - A = \emptyset$ 이므로

$$B \subset A$$

③ $A^c \cup B \neq U$

④ $A \cap B = B$

답 ②

06 **전략** $A - X = A$ 이면 $A \cap X = \emptyset$ 임을 이용한다.

풀이 $A - X = A$ 이므로 $A \cap X = \emptyset$

답 ①

따라서 집합 X 의 개수는 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 집합 A 의 원소 1, 5를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$$2^{7-2}=2^5=32$$

→ ②

답 32

채점 기준	비율
① $A \cap X = \emptyset$ 임을 알 수 있다.	30 %
② 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	70 %

07 [전략] $B \cap X = \emptyset$ 이면 집합 X 는 집합 B 의 원소를 원소로 갖지 않음을 이용한다.

풀이 $A = \{6, 12, 18, \dots, 48\}$, $B = \{4, 8, 12, \dots, 48\}$

$$A \cup X = A \text{ 이므로 } X \subset A$$

이때 $B \cap X = \emptyset$ 이므로 집합 X 의 개수는 집합 $\{6, 12, 18, \dots, 48\}$ 의 부분집합 중에서 집합 B 의 원소 12, 24, 36, 48을 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같다.

$$\therefore 2^{8-4} = 2^4 = 16$$

답 ②

08 [전략] 먼저 주어진 집합을 드모르간의 법칙을 이용하여 간단히 한다.

풀이 $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A - B = \{1, 3\}$ 이므로 구하는 모든 원소의 합은

$$1+3=4$$

답 4

09 [전략] 집합의 연산 법칙과 드모르간의 법칙을 이용하여 주어진 집합을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } (B - A^c)^c \cap (A \cup B^c) &= (B \cap A)^c \cap (A \cup B^c) \\ &= (B^c \cup A^c) \cap (B^c \cup A) \\ &= B^c \cup (A^c \cap A) \\ &= B^c \cup \emptyset = B^c \end{aligned}$$

답 ⑤

10 [전략] $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{ 이므로} \\ n(A \cup B) &= n(U) - n(A^c \cap B^c) \\ &= 46 - 22 = 24 \end{aligned}$$

→ ①

이때 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로

$$24 = n(A) + n(B) - 16$$

$$\therefore n(A) + n(B) = 40$$

→ ②

답 40

채점 기준	비율
① $n(A \cup B)$ 를 구할 수 있다.	50 %
② $n(A) + n(B)$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

11 [전략] $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ 이면 $n(A \cap B) = 0$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소임을 이용한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } n(A \cup B) &= n(A) + n(B) \text{ 이므로} \\ A \cap B &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (A \cup C) \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup C \\ &= \emptyset \cup C = C \end{aligned}$$

따라서 $n((A \cup C) \cap (B \cup C)) = 2 \times n(B - C)$ 에서

$$n(C) = 2\{n(B \cup C) - n(C)\}$$

$$3 \times n(C) = 2 \times n(B \cup C)$$

$$\therefore n(C) = \frac{2}{3} \times n(B \cup C) = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

답 ③

12 [전략] $n(A \cap B)$ 를 $n(A \cup B)$ 에 대한 식으로 나타낸 후 $n(A \cup B)$ 의 값이 최소일 때와 최대일 때를 이용한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 22 + 17 - n(A \cup B) \\ &= 39 - n(A \cup B) \end{aligned}$$

(i) $n(A \cap B)$ 의 값이 최대인 경우

$n(A \cup B)$ 의 값이 최소일 때, 즉 $B \subset A$ 일 때이므로

$n(A \cap B)$ 의 최댓값은

$$n(A \cap B) = n(B) = 17$$

$$\therefore M = 17$$

(ii) $n(A \cap B)$ 의 값이 최소인 경우

$n(A \cup B)$ 의 값이 최대일 때, 즉 $A \cup B = U$ 일 때이므로

$n(A \cap B)$ 의 최솟값은

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= 39 - n(A \cup B) = 39 - n(U) \\ &= 39 - 35 = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore m = 4$$

(i), (ii)에서 $M + m = 21$

답 ③

13 [전략] 야구와 축구를 좋아하는 학생의 집합을 각각 A, B 라 할 때, 구하는 값은 $n(A \cap B)$ 임을 이용한다.

풀이 학생 전체의 집합을 U , 야구를 좋아하는 학생의 집합을 A , 축구를 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 37, n(A) = 17, n(B) = 25, n(A^c \cap B^c) = 5 \quad \rightarrow ①$$

이때

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$$

에서

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(U) - n(A^c \cap B^c) \\ &= 37 - 5 = 32 \end{aligned}$$

→ ②

따라서 야구와 축구를 모두 좋아하는 학생 수는

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 17 + 25 - 32 = 10 \end{aligned}$$

→ ③

답 10

채점 기준	비율
① 주어진 조건을 집합으로 나타낼 수 있다.	30 %
② $n(A \cup B)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ 야구와 축구를 모두 좋아하는 학생 수를 구할 수 있다.	40 %

14 전략 주어진 문제 상황을 집합으로 나타내어 본다.

풀이 1부터 100까지의 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 자연수의 집합을 A_3 , 5로 나누어떨어지는 자연수의 집합을 A_5 라 하면

$$n(A_3)=33, n(A_5)=20$$

집합 $A_3 \cap A_5$ 는 3과 5로 나누어떨어지는 자연수의 집합, 즉 3과 5의 최소공배수인 15로 나누어떨어지는 자연수의 집합이므로

$$n(A_3 \cap A_5)=6$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$\begin{aligned} n(A_3 \cup A_5) &= n(A_3) + n(A_5) - n(A_3 \cap A_5) \\ &= 33 + 20 - 6 = 47 \end{aligned}$$

답 47

15 전략 $a-3 < 1$ 일 때와 $a-3 \geq 1$ 일 때로 나누어 집합 $A \cap B$ 에 속하는 자연수를 구한다.

풀이 $x^2 - 1 > 0$ 에서 $(x+1)(x-1) > 0$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 1$$

$$\therefore A = \{x \mid x < -1 \text{ 또는 } x > 1\}$$

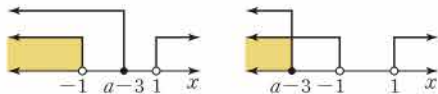
$x+3 \leq a$ 에서 $x \leq a-3$

$$\therefore B = \{x \mid x \leq a-3\}$$

→ ①

(i) $a-3 < 1$, 즉 $a < 4$ 일 때,

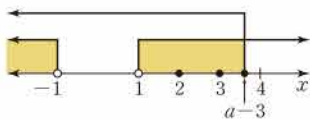
다음 그림과 같이 두 경우 모두 집합 $A \cap B$ 에 속하는 자연수는 없다.



→ ②

(ii) $a-3 \geq 1$, 즉 $a \geq 4$ 일 때,

집합 $A \cap B$ 의 원소 중 자연수의 개수가 2가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $3 \leq a-3 < 4$ 이므로 $6 \leq a < 7$

(i), (ii)에서 $6 \leq a < 7$ 이므로 정수 a 는 6이다.

→ ③

답 6

채점 기준	비율
① 집합 A, B 를 간단히 나타낼 수 있다.	20 %
② $a < 4$ 이면 조건을 만족시키지 않음을 알 수 있다.	40 %
③ 정수 a 의 값을 구할 수 있다.	40 %

16 전략 두 집합 $A \cap B, A \cup B$ 를 구한 후 각 원소가 속하는 집합을 생각해 본다.

풀이 $A \cap B = \{1, 3, 5\}, A \cup B = U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로 2, 4, 6은 두 집합 $A-B, B-A$ 중 한 집합에 속해야 한다.

2가 속하는 집합을 선택하는 경우의 수는 2

4가 속하는 집합을 선택하는 경우의 수는 2

6이 속하는 집합을 선택하는 경우의 수는 2

따라서 구하는 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

답 8

17 전략 $A \cap B = B$ 이면 $B \subset A$ 임을 이용한다.

풀이 $A \cap B = B$ 이므로 $B \subset A$

(i) $B = \emptyset$ 일 때,

공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $B \subset A$

$B = \emptyset$ 이라면 x 에 대한 방정식 $mx = x - 1$ 의 해가 존재하지 않아야 하므로 $(m-1)x = -1$ 에서

$$m = 1$$

→ ①

(ii) $B \neq \emptyset$ 일 때,

$B = \{-2\}$ 또는 $B = \{-1\}$ 이어야 한다.

$B = \{-2\}$ 이면

$$-2m = -3 \quad \therefore m = \frac{3}{2}$$

$B = \{-1\}$ 이면

$$-m = -2 \quad \therefore m = 2$$

→ ②

(i), (ii)에서 모든 실수 m 의 값의 합은

$$1 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$

→ ③

답 $\frac{9}{2}$

채점 기준	비율
① $B = \emptyset$ 일 때, m 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $B \neq \emptyset$ 일 때, m 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ 모든 실수 m 의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

개념블라이트 보충학습

x 에 대한 방정식 $ax = b$ 의 해는 다음과 같다.

① $a \neq 0$ 일 때, $x = \frac{a}{b}$

② $a = 0$ 일 때, $\begin{cases} b \neq 0 \text{이면 해는 없다. (불능)} \\ b = 0 \text{이면 해는 무수히 많다. (부정)} \end{cases}$

18 전략 집합의 연산 법칙을 이용하여 $A * B$ 를 파악한다.

풀이 $\neg, A * B = (A \cup B)^c \cup (A \cap B)$

$$= (B \cup A)^c \cup (B \cap A) = B * A$$

$$\therefore A * A = (A \cup A)^c \cup (A \cap A) = A^c \cup A = U$$

$$\therefore A * A * A = U * A = (U \cup A)^c \cup (U \cap A)$$

$$= U^c \cup A = \emptyset \cup A = A$$

$$A * A * A * A = A * A = U$$

$$A * A * A * A * A = U * A = A$$

⋮

따라서

$$\underbrace{A * A * A * \dots * A}_{A \text{가 짝수 개}} = U,$$

$$\underbrace{A * A * A * \dots * A}_{A \text{가 홀수 개}} = A$$

임을 알 수 있다.

2000이 짝수이므로

$$\underbrace{A * A * A * \dots * A}_{A \text{가 2000개}} = U$$

A가 2000개

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

참고 연산 *에 대한 결합법칙 $A * (B * C) = (A * B) * C$ 가 성립하므로 $A * (B * C)$, $(A * B) * C$ 는 모두 $A * B * C$ 로 나타낼 수 있다.

19 전략 조건 ㉞을 이용하여 a, b 가 될 수 있는 값을 구한다.

풀이 조건 ㉞에서 $\{3, 6\} \subset (A \cap B)$ 이고 $(A \cap B) \subset A$ 이므로

$$\{3, 6\} \subset A$$

이때 3, 6은 모두 a 의 배수이므로

$$a=1 \text{ 또는 } a=3$$

그런데 $a=1$ 이면 $A=U$ 이므로 $B-A=\emptyset$

즉 조건 ㉞을 만족시키지 않으므로 $a=3$

$$\therefore A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

마찬가지로 $\{3, 6\} \subset B$ 이므로 3, 6은 모두 b 의 약수이다.

$$\therefore b=6 \text{ 또는 } b=12 \text{ 또는 } b=18$$

(i) $b=6$ 일 때,

$$B=\{1, 2, 3, 6\} \text{이므로 } B-A=\{1, 2\}$$

따라서 조건 ㉞을 만족시키고, $A-B=\{9, 12, 15, 18\}$ 이므로 집합 $A-B$ 의 모든 원소의 합은

$$9+12+15+18=54$$

(ii) $b=12$ 일 때,

$$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \text{이므로 } B-A=\{1, 2, 4\}$$

따라서 조건 ㉞을 만족시키지 않는다.

(iii) $b=18$ 일 때,

$$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \text{이므로 } B-A=\{1, 2\}$$

따라서 조건 ㉞을 만족시키고, $A-B=\{12, 15\}$ 이므로 집합 $A-B$ 의 모든 원소의 합은

$$12+15=27$$

이상에서 집합 $A-B$ 의 모든 원소의 합의 최솟값은 27이다.

답 27

20 전략 집합의 연산 법칙과 드모르간의 법칙을 이용하여 좌변을 간단히 한다.

풀이 ① $(A \cup B^c) - (B - C) = (A \cup B^c) \cap (B \cap C^c)^c$

$$= (A \cup B^c) \cap (B^c \cup C)$$

$$= (A \cup B^c) \cap (C \cup B^c)$$

$$= (A \cap C) \cup B^c$$

$$\textcircled{2} (A - C) \cup (B - C) = (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)$$

$$= (A \cup B) \cap C^c$$

$$= (A \cup B) - C$$

$$\textcircled{3} (A \cup B) - (A^c \cap C) = (A \cup B) \cap (A^c \cap C)^c$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cup C^c)$$

$$= A \cup (B \cap C^c)$$

$$= A \cup (B - C)$$

$$\textcircled{4} (A \cap B) \cup (A - C) = (A \cap B) \cup (A \cap C^c)$$

$$= A \cap (B \cup C^c)$$

$$= A \cap (B^c \cap C)^c$$

$$= A \cap (C \cap B^c)^c$$

$$= A - (C - B)$$

$$\textcircled{5} (A - B) \cup (A - C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$$

$$= A \cap (B^c \cup C^c)$$

$$= A \cap (B \cap C)^c$$

$$= A - (B \cap C)$$

답 ④

21 전략 조건 ㉞에서 집합 $B-A$ 의 모든 원소의 합을 구하여 집합 $B-A$ 를 구한 후 집합 A 에 대한 조건을 찾는다.

풀이 집합 $B-A$ 의 모든 원소의 합을 k 라 하면 조건 ㉞에서 집합 $A \cup B^c$ 의 모든 원소의 합이 $6k$ 이고

$$A \cup B^c = (A^c \cap B)^c = (B - A)^c$$

이므로 전체집합 U 의 모든 원소의 합은 $7k$ 이다.

즉 $1+2+4+8+16+32=7k$ 이므로

$$k=9$$

집합 $B-A$ 의 모든 원소의 합이 9이므로

$$B-A=\{1, 8\}$$

$$\therefore A \subset \{2, 4, 16, 32\}$$

이때 $n(A \cup B) = n(A) + n(B - A)$ 이고 조건 ㉞에서

$$n(A \cup B) = 5 \text{이므로}$$

$$5 = n(A) + 2 \quad \therefore n(A) = 3$$

따라서 $A=\{2, 4, 16\}$ 일 때 집합 A 의 모든 원소의 합이 최소이므로 구하는 최솟값은

$$2+4+16=22$$

답 22

07 명제

01 명제와 조건

확인

본책 124쪽

- 1 $\neg$, $\supset$, $\supset$ 참인 명제이다.
 $\neg$, $\supset$, $\supset$ 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
 $\supset$, $\supset$ 거짓인 명제이다.
 이상에서 명제인 것은 $\neg$, $\supset$, $\supset$, $\supset$ 이다. **답** $\neg$, $\supset$, $\supset$, $\supset$

- 2 **답** (1) 3은 21의 약수가 아니다. (거짓)
 (2) $5+8 \neq 10$ (참)

- 3 **답** (1) $x \neq -1$
 (2) $x \leq 5$
 (3) $x \neq 0$ 이고 $y \neq -3$
 (4) $x < 2$ 또는 $x \geq 10$

- 4 (1) $x^2 - 4x + 3 = 0$ 에서 $(x-1)(x-3) = 0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=3$
 따라서 조건 p 의 진리집합은 $\{1, 3\}$
 (2) $3 \leq x-4 \leq 7$ 에서 $7 \leq x \leq 11$
 이때 전체집합이 자연수 전체의 집합이므로 조건 q 의 진리집합은 $\{7, 8, 9, 10, 11\}$
답 (1) $\{1, 3\}$ (2) $\{7, 8, 9, 10, 11\}$

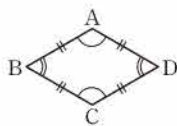
유제

본책 126쪽

- 1 ①, ④ 거짓인 명제이다.
 ② x 의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
 ③, ⑤ 참인 명제이다.

답 ②

- 2 $\neg$, x 의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
 $\neg$, 6은 3의 배수이지만 9의 배수가 아니므로 거짓인 명제이다.
 $\supset$, 오른쪽 그림에서 사각형 ABCD는 마름모이지만 정사각형이 아니다.
 따라서 거짓인 명제이다.
 $\supset$, 참인 명제이다.
 이상에서 참인 명제인 것은 $\supset$ 뿐이다.



답 $\supset$

개념블라이트 보충학습

여러 가지 사각형

여러 가지 사각형의 집합 사이의 포함 관계는 오른쪽 벤 다이어그램과 같다.



- 3 ①, ②, ④, ⑤ 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.
 ③ 명제가 거짓이므로 그 부정은 참이다.

답 ③

- 4 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{2, 4, 6, 8, 10\}, Q = \{3, 6, 9\}$
 이므로 조건 ' p 또는 q '의 진리집합은
 $P \cup Q = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

답 $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

- 5 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 $p: x^2 - 9 \leq 0$ 에서 $(x+3)(x-3) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq x \leq 3$
 $\therefore P = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 $q: x^2 - x - 2 = 0$ 에서 $(x+1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$
 $\therefore Q = \{-1, 2\}$

조건 ' p 그리고 $\sim q$ '의 진리집합은 $P \cap Q^c$ 이므로
 $P \cap Q^c = P - Q = \{-3, -2, 0, 1, 3\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 5이다.

답 5

- 6 $-3 \leq x \leq 1$ 에서 $x \geq -3$ 이고 $x \leq 1$ ㉠

$p: x > 1$ 에서 $\sim p: x \leq 1$ 이므로 $P^c = \{x | x \leq 1\}$

$q: x \geq -3$ 이므로 $Q = \{x | x \geq -3\}$

따라서 ㉠의 진리집합은 $P^c \cap Q$

답 $P^c \cap Q$

02 명제 $p \rightarrow q$

확인

본책 128쪽

- 1 **답** (1) 가정: $x=1$ 이다., 결론: $2x-3=1$ 이다.
 (2) 가정: a 가 홀수이다., 결론: a^2 은 홀수이다.

- 2 (1) $p: x < 4$, $q: x < 3$ 으로 놓고 그 진리집합을 각각 P , Q 라 하면

$$P = \{x | x < 4\}, Q = \{x | x < 3\}$$

따라서 $P \not\subset Q$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

- (2) $p: x^2 + y^2 = 0$, $q: xy = 0$ 으로 놓고 그 진리집합을 각각 P , Q 라 하면

$$P = \{(x, y) | x = 0 \text{이고 } y = 0\},$$

$$Q = \{(x, y) | x = 0 \text{ 또는 } y = 0\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

답 (1) 거짓 (2) 참

- 3 (1) $x^2 + 6x + 12 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 3^2 - 12 = -3 < 0$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 6x + 12 > 0$ 이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

- (2) 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 < -4$ 를 만족시키는 x 는 없다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

답 (1) 참 (2) 거짓

- 4 답 (1) 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 < 0$ 이다.

(2) 모든 실수 x 에 대하여 $x + 2 \neq 7$ 이다.

유제

본책 130쪽

- 1 (1) $p: 3x + 1 = 7$, $q: x^2 + x - 6 = 0$ 으로 놓고 그 진리집합을 각각 P , Q 라 하자.

$$p: 3x + 1 = 7 \text{에서 } x = 2 \quad \therefore P = \{2\}$$

$$q: x^2 + x - 6 = 0 \text{에서 } (x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2 \quad \therefore Q = \{-3, 2\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

- (2) $p: x^2 \geq 1$, $q: x \geq 1$ 로 놓고 그 진리집합을 각각 P , Q 라 하자.

$$p: x^2 \geq 1 \text{에서 } x^2 - 1 \geq 0, \quad (x + 1)(x - 1) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1$$

$$\therefore P = \{x | x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1\}$$

$$q: x \geq 1 \text{에서 } Q = \{x | x \geq 1\}$$

따라서 $P \not\subset Q$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

- (3) $p: xy > 0$, $q: x > 0$ 이고 $y > 0$ 으로 놓고 그 진리집합을 각각 P , Q 라 하면

$$P = \{(x, y) | x > 0 \text{이고 } y > 0 \text{ 또는 } x < 0 \text{이고 } y < 0\},$$

$$Q = \{(x, y) | x > 0 \text{이고 } y > 0\}$$

따라서 $P \not\subset Q$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

- (4) 모든 평행사변형은 사다리꼴이므로 주어진 명제는 참이다.

답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓 (4) 참

다른 풀이 (2) [반례] $x = -2$ 이면 $x^2 \geq 1$ 이지만 $x < 1$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

- (3) [반례] $x = -1$ 이고 $y = -1$ 이면 $xy > 0$ 이지만 $x < 0$ 이고 $y < 0$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

- 2 $\neg$. [반례] $x = 0$ 이면 $|x - 1| = 1$ 이지만 $x \neq 2$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

- $\perp$. p : x 는 8의 양의 배수, q : x 는 4의 양의 배수로 놓고 그 진리집합을 각각 P , Q 라 하면

$$P = \{8, 16, 24, 32, \dots\}, Q = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

- $\supset$. p : $x^2 + 3x - 4 = 0$, q : $x \leq 1$ 로 놓고 그 진리집합을 각각 P , Q 라 하자.

$$p: x^2 + 3x - 4 = 0 \text{에서 } (x + 4)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 1 \quad \therefore P = \{-4, 1\}$$

$$q: x \leq 1 \text{에서 } Q = \{x | x \leq 1\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

- $\supset$. [반례] $x = -2$, $y = 1$ 이면 $x + y < 0$ 이지만 $x < 0$, $y > 0$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

이상에서 참인 명제는 $\perp$, $\supset$ 이다.

답 $\perp$, $\supset$

- 3 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이므로 $Q \subset P$

$$\textcircled{1} P \cup Q = P$$

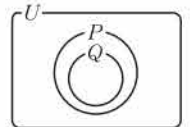
$$\textcircled{2} P \cup Q^c = U$$

$$\textcircled{3} P - Q \neq P$$

$$\textcircled{4} P - Q^c = P \cap Q = Q$$

$$\textcircled{5} P \cap Q^c = P - Q \neq \emptyset$$

답 ④

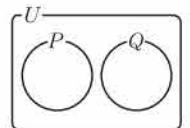


- 4 $P \cap Q = \emptyset$ 이므로

$$P \subset Q^c, Q \subset P^c$$

따라서 명제 $p \rightarrow \sim q$, $q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 항상 참인 명제는 $\perp$, $\supset$ 이다.

답 $\perp$, $\supset$



- 5 $P \cap Q = Q$, $P \cap R = \emptyset$ 이므로

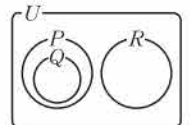
$$P \subset R^c, Q \subset P, R \subset P^c, R \subset Q^c$$

따라서 명제 $p \rightarrow \sim r$, $q \rightarrow p$,

$r \rightarrow \sim p$, $r \rightarrow \sim q$ 는 모두 참이다.

그러나 $P \neq Q$ 이면 $Q^c \not\subset P^c$ 이므로 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 거짓이다.

답 ③



- 6 $p: -3 \leq x < 2$, $q: x < a$ 로 놓고 그 진리집합을 각각 P , Q 라 하면

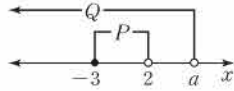
$$P = \{x \mid -3 \leq x < 2\},$$

$$Q = \{x \mid x < a\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a \geq 2$$



■ $a \geq 2$

- 7 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면

$$P = \{x \mid -2 \leq x \leq -3a+1\},$$

$$Q = \{x \mid a-2 \leq x \leq 7\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a-2 \leq -2, -3a+1 \leq 7$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 0$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0$ 의 3개이다.

■ 3

- 8 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하자.

$$p: |x-1| \leq a \text{에서} \quad -a \leq x-1 \leq a$$

$$\therefore -a+1 \leq x \leq a+1$$

$$\therefore P = \{x \mid -a+1 \leq x \leq a+1\}$$

$$q: x < -3 \text{에서} \quad Q = \{x \mid x < -3\}$$

$$\therefore Q^c = \{x \mid x \geq -3\}$$

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면

$P \subset Q^c$ 이어야 하므로 오른쪽 그림

에서

$$-a+1 \geq -3, \quad -a \geq -4 \quad \therefore a \leq 4$$

따라서 a 의 최댓값은 4이다.

■ 4

- 9 ① $p: 2x-1 \leq 3$ 으로 놓고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$2x-1 \leq 3 \text{에서}$$

$$2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2$$

$$\therefore P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

따라서 $P=U$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

- ② $p: x^2-4 \leq 0$ 으로 놓고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$x^2-4 \leq 0 \text{에서}$$

$$(x+2)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 2$$

$$\therefore P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

따라서 $P=U$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

- ③ $p: |x| > x$ 로 놓고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$|x| > x \text{에서} \quad x < 0$$

$$\therefore P = \{-2, -1\}$$

따라서 $P \neq \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

- ④ $p: x^2-x+1 < 0$ 으로 놓고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$x^2-x+1 < 0 \text{에서}$$

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

이므로 $x^2-x+1 < 0$ 을 만족시키는 실수 x 는 없다.

$$\therefore P = \emptyset$$

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

- ⑤ $p: 3x+1 > x-5$ 로 놓고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$3x+1 > x-5 \text{에서}$$

$$2x > -6 \quad \therefore x > -3$$

$$\therefore P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

따라서 $P \neq \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

■ ④

- 10 $\neg$, $P \neq \emptyset$ 이어도 $P \neq U$ 이면 '모든 x 에 대하여 p 이다.'는 거짓이다.

$\sqsubset$, $P=U$ 이면 $P \neq \emptyset$ 이므로 '어떤 x 에 대하여 p 이다.'는 참이다.

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\sqsubset$ 이다.

■ $\neg$, $\sqsubset$

03 명제 사이의 관계

확인

본책 134쪽

- 1 ① 역: $x^2=16$ 이면 $x=-4$ 이다.

대우: $x^2 \neq 16$ 이면 $x \neq -4$ 이다.

- (2) 역: $x^2 > y^2$ 이면 $x > y$ 이다.

대우: $x^2 \leq y^2$ 이면 $x \leq y$ 이다.

- 2 (1) 대우: x 가 홀수가 아니면 x 는 소수가 아니다. (거짓)

[반례] $x=2$ 이면 x 는 홀수가 아니지만 소수이다.

- (2) 대우: $|x| \neq 5$ 이면 $x \neq 5$ 이다. (참)

■ 풀이 참조

- 3 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하자.

$$(1) P = \{9, 18, 27, \dots\}, Q = \{3, 6, 9, \dots\}$$

즉 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

- (2) $Q \subset P$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

$$(3) (x-4)^2=0 \text{에서} \quad x=4$$

따라서 $P=Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

■ (1) 충분조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건

1 (1) 역: $x=0$ 이고 $y=0$ 이면 $x^2+y^2=0$ 이다. (참)

대우: $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이면 $x^2+y^2 \neq 0$ 이다. (참)

(2) 역: $xy > 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-1, y=-2$ 이면 $xy > 0$ 이지만 $x \leq 0, y \leq 0$ 이다.

대우: $xy \leq 0$ 이면 $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이다. (참)

㉠ 풀이 참조

2 ① 역: $x^2=y^2$ 이면 $x=y$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1, y=-1$ 이면 $x^2=y^2$ 이지만 $x \neq y$ 이다.

② 역: $xy < 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y < 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-2, y=1$ 이면 $xy < 0$ 이지만 $x \leq 0$ 이고 $y \geq 0$ 이다.

③ 역: $x+z > y+z$ 이면 $x > y$ 이다. (참)

④ 역: $xy=0$ 이면 $x=0$ 이고 $y=0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1, y=0$ 이면 $xy=0$ 이지만 $x \neq 0$ 이다.

⑤ 역: xy 가 정수이면 x, y 도 정수이다. (거짓)

[반례] $x=0, y=\frac{1}{2}$ 이면 xy 는 정수이지만 y 는 정수가 아니다.

㉠ ③

3 $\neg$. 역: $x^2 > 0$ 이면 $x \neq 0$ 이다. (참)

대우: $x^2 \leq 0$ 이면 $x=0$ 이다. (참)

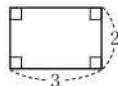
$\neg$. 역: $xy=0$ 이면 $|x|+|y|=0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1, y=0$ 이면 $xy=0$ 이지만 $|x|+|y| \neq 0$ 이다.

대우: $xy \neq 0$ 이면 $|x|+|y| \neq 0$ 이다. (참)

$\neg$. 역: 직사각형이면 정사각형이다. (거짓)

[반례] 오른쪽 그림의 사각형은 직사각형이지만 정사각형이 아니다.



대우: 직사각형이 아니면 정사각형이 아니다. (참)

$\neg$. 역: 3의 배수는 6의 배수이다. (거짓)

[반례] 9는 3의 배수이지만 6의 배수가 아니다.

대우: 3의 배수가 아니면 6의 배수가 아니다. (참)

이상에서 역은 거짓이고 대우는 참인 명제는 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

㉠ $\neg$, $\neg$, $\neg$

4 ① $x-y > 0$ 에서 $x > y$

따라서 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

[$p \rightarrow q$ 의 반례] $x=2, y=1$ 이면 $x-y > 0$ 이지만 $y \geq 0$ 이다.

② $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

[$q \rightarrow p$ 의 반례] $x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$ 이면 $x+y, xy$ 는 유리수이지만 x, y 는 유리수가 아니다.

③ $x^3 \neq y^3$ 에서 $x \neq y$

따라서 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

[$p \rightarrow q$ 의 반례] $x=2, y=3$ 이면 xy 는 짝수이지만 y 는 짝수가 아니다.

⑤ $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

[$p \rightarrow q$ 의 반례] $x=15$ 이면 x 는 5의 양의 배수이지만 10의 양의 배수가 아니다.

㉠ ②

5 $\neg$. $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

[$q \rightarrow p$ 의 반례] $x=2, y=6$ 이면 $xy=12$ 이지만 $x \neq 3$ 이고 $y \neq 4$ 이다.

$\neg$. $x^2=y^2$ 에서 $x=y$ 또는 $x=-y$

따라서 $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

[$p \rightarrow q$ 의 반례] $x=1, y=-1$ 이면 $x^2=y^2$ 이지만 $x \neq y$ 이다.

$\neg$. $|x|+|y|=0$ 에서 $x=0$ 이고 $y=0$

따라서 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 필요충분조건인 것은 $\neg$ 뿐이다.

㉠ $\neg$

6 $x \leq 4$ 가 $|x-2| \leq a$ 이기 위한 필요조건이므로 명제

' $|x-2| \leq a$ 이면 $x \leq 4$ 이다.'가 참이다.

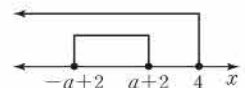
$|x-2| \leq a$ 에서 $-a \leq x-2 \leq a$

$$\therefore -a+2 \leq x \leq a+2$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$a+2 \leq 4 \quad \therefore a \leq 2$$

즉 a 의 최댓값은 2이다.



㉠ 2

7 $x+3=0$, 즉 $x=-3$ 은 $x^2+ax+b=0$ 이기 위한 필요충분조건이므로 명제 ' $x=-3$ 이면 $x^2+ax+b=0$ 이다.'와 명제 ' $x^2+ax+b=0$ 이면 $x=-3$ 이다.'가 참이다.

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 해는 $x=-3$ 뿐이므로

$$(x+3)^2=0 \text{에서 } x^2+6x+9=0$$

$$\text{즉 } a=6, b=9 \text{이므로 } b-a=3$$

㉠ 3

8 p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 명제 ' $-6 < x < a$ 이면 $x > b$ 이다.'가 참이다.

따라서 오른쪽 그림에서

$$b \leq -6$$

이므로 정수 b 의 최댓값은 -6 이다.

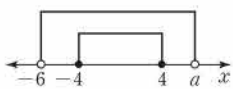
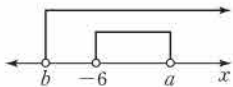
또 p 가 r 이기 위한 필요조건이므로 명제 ' $|x| \leq 4$ 이면 $-6 < x < a$ 이다.'가 참이다.

따라서 오른쪽 그림에서

$$a > 4$$

이므로 정수 a 의 최솟값은 5 이다.

따라서 a 의 최솟값: 5 , b 의 최댓값: -6



9 p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$

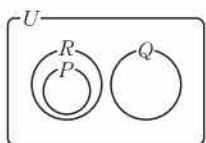
r 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $R \subset Q$

$$\therefore R \subset Q \subset P$$

답 ⑤

10 $P \cup R = R$ 에서 $P \subset R$

따라서 세 집합 P , Q , R 의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $R \subset Q^c$ 이므로 $r \Rightarrow \sim q$

따라서 $\sim q$ 는 r 이기 위한 필요조건이다.

(2) $R^c \subset P^c$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$

따라서 $\sim r$ 는 $\sim p$ 이기 위한 충분조건이다.

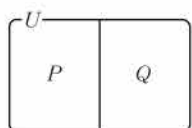
(3) $Q \subset P^c$ 이므로 $q \Rightarrow \sim p$

따라서 q 는 $\sim p$ 이기 위한 충분조건이다.

답 (1) 필요 (2) 충분 (3) 충분

11 주어진 조건을 만족시키도록 두 집합 P , Q 의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $P = Q^c$ 이므로 p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요충분조건이다.



답 필요충분조건

04 여러 가지 증명법

확인

본책 140쪽

1 두 명제 $q \rightarrow r$, $\sim p \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 각각의 대우인 $\sim r \rightarrow \sim q$, $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

또 두 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$, $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 삼단논법에 의하여 $\sim r \rightarrow \sim p$ 가 참이다.

답 ⑤

2 $\neg$. $x < -2$ 일 때에만 성립하는 부등식이다.

$\neg$. $x^2 > x^2 - 3$ 에서 $0 > -3$

x 에 어떤 실수를 대입하여도 항상 성립하므로 절대부등식이다.

$\neg$. $x \neq 1$ 일 때에만 성립하는 부등식이다.

$\neg$. $x^2 + 4x + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 5 < 0$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 5 > 0$ 이 항상 성립한다.

이상에서 절대부등식인 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 $\neg$, $\neg$

3 $a^2 + 4ab + 4b^2 \geq 0$ 의 좌변을 변형하면

$$a^2 + 4ab + 4b^2 = (a + 2b)^2$$

$$\therefore a^2 + 4ab + 4b^2 \geq 0$$

여기서 등호는 $a = -2b$ 일 때 성립한다.

$$\therefore (가) (a + 2b)^2 (나) \geq (다) a = -2b$$

답 풀이 참조

4 (1) $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$$

(단, 등호는 $a = \frac{1}{a}$, 즉 $a = 1$ 일 때 성립)

따라서 $a + \frac{1}{a}$ 의 최솟값은 2 이다.

(2) $\frac{4a}{b} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \cdot 2 = 4$$

(단, 등호는 $\frac{4a}{b} = \frac{b}{a}$, 즉 $a = \frac{b}{2}$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{4a}{b} + \frac{b}{a}$ 의 최솟값은 4 이다.

답 (1) 2 (2) 4

5 a , b , x , y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$a^2 + b^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 8$ 이므로

$$2 \cdot 8 \geq (ax + by)^2, \quad (ax + by)^2 \leq 16$$

$$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4 \quad (\text{단, 등호는 } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \text{ 일 때 성립})$$

답 $-4 \leq ax + by \leq 4$

유제

본책 143쪽

1 (1) 주어진 명제의 대우는

' $x \leq 0$ 이고 $y \leq 0$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다.'

이고 이것은 참이므로 주어진 명제도 참이다.

(2) 주어진 명제의 대우는

' n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'

n 이 짝수이면

$$n=2k \quad (k \text{는 자연수})$$

로 나타낼 수 있으므로

$$n^2=(2k)^2=4k^2=2 \cdot 2k^2$$

이때 $2k^2$ 은 자연수이므로 n^2 은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

☞ 풀이 참조

2 주어진 명제의 대우는

' x, y 가 모두 홀수이면 xy 는 홀수이다.'

x, y 가 모두 홀수이면

$$x=2m+1, y=2n+1 \quad (m, n \text{은 음이 아닌 정수})$$

로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} xy &= (2m+1)(2n+1) \\ &= 4mn+2m+2n+1 \\ &= 2(2mn+m+n)+1 \end{aligned}$$

이때 $2mn+m+n$ 은 음이 아닌 정수이므로 xy 는 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

☞ 풀이 참조

3 n^2 이 3의 배수일 때, n 이 3의 배수가 아니라고 가정하면

$$n=3k-1 \text{ 또는 } n=3k-2 \quad (k \text{는 자연수})$$

로 나타낼 수 있다.

(i) $n=3k-1$ 일 때,

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k-1)^2 \\ &= 9k^2-6k+1 \\ &= 3(3k^2-2k)+1 \end{aligned}$$

(ii) $n=3k-2$ 일 때,

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k-2)^2 \\ &= 9k^2-12k+4 \\ &= 3(3k^2-4k+1)+1 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 n^2 은 3으로 나누면 나머지가 1이므로 n^2 이 3의 배수라는 가정에 모순이다.

따라서 n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다. ☞ 풀이 참조

4 $\sqrt{2}+1$ 이 무리수가 아니라고 가정하면 $\sqrt{2}+1$ 은 유리수이므로 유리수 a 에 대하여 $\sqrt{2}+1=a$ 로 나타내면

$$\sqrt{2}=a-1$$

이때 유리수끼리의 뺄셈은 유리수이므로 $a-1$ 은 유리수이다.

그런데 좌변의 $\sqrt{2}$ 는 무리수이므로 모순이다.

따라서 $\sqrt{2}+1$ 은 무리수이다.

☞ 풀이 참조

5 ㄱ. 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우인 $q \rightarrow r$ 가 참이다.

따라서 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ 가 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $p \rightarrow r$ 가 참이다.

ㄴ. 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우인 $\sim q \rightarrow p$ 가 참이다.

따라서 두 명제 $\sim q \rightarrow p, p \rightarrow r$ 가 참이므로 삼단논법에 의하여 명제 $\sim q \rightarrow r$ 가 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

☞ ㄱ, ㄴ

참고 ㄴ. 주어진 조건만으로는 명제 $p \rightarrow \sim r$ 의 참, 거짓을 추론할 수 없다.

6 두 명제 $p \rightarrow q, r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참이므로 각각의 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p, q \rightarrow \sim r$ 도 참이다.

또 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \rightarrow \sim r$ 가 참이고, 그 대우인 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다. ☞ ②

7 명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 그 대우인 $p \rightarrow q$ 도 참이다. 또 명제 $\sim s \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 그 대우인 $r \rightarrow s$ 도 참이다.

따라서 두 명제 $p \rightarrow q, r \rightarrow s$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow s$ 가 참이 되려면 명제 $\sim q \rightarrow r$ 도 참이어야 한다. ☞ ③

$$\begin{aligned} 8 \quad (1) \quad a^2-4ab+5b^2 &= (a^2-4ab+4b^2)+b^2 \\ &= (a-2b)^2+b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a^2-4ab+5b^2 \geq 0$$

여기서 등호는 $a-2b=0, b=0$, 즉 $a=b=0$ 일 때 성립한다.

(2)(i) $|a| \geq |b|$ 일 때,

$$\begin{aligned} &(|a|-|b|)^2-|a-b|^2 \\ &= (|a|^2-2|a||b|+|b|^2)-(a-b)^2 \\ &= (a^2-2|ab|+b^2)-(a^2-2ab+b^2) \\ &= 2(ab-|ab|) \leq 0 \quad (\because ab \leq |ab|) \\ &\therefore (|a|-|b|)^2 \leq |a-b|^2 \end{aligned}$$

그런데 $|a|-|b| \geq 0, |a-b| \geq 0$ 이므로

$$|a|-|b| \leq |a-b|$$

(ii) $|a| < |b|$ 일 때,

$$|a|-|b| < 0, |a-b| > 0 \text{이므로}$$

$$|a|-|b| < |a-b|$$

(i), (ii)에서 $|a|-|b| \leq |a-b|$

여기서 등호는 $|a| \geq |b|, |ab|=ab$ 일 때 성립한다.

☞ 풀이 참조

9 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2$

$$=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$$

$$=2\sqrt{ab}\geq 0$$

$$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geq(\sqrt{a+b})^2$$

그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0$, $\sqrt{a+b}\geq 0$ 이므로

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$$

여기서 등호는 $ab=0$ 일 때 성립한다.

☞ 풀이 참조

10 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a>0$, $b>0$, $c>0$ 이므로

$$a+b+c>0$$

또

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$$

이므로 $a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0$

$$\therefore a^3+b^3+c^3\geq 3abc$$

여기서 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $a=b=c$ 일 때 성립한다.

☞ 풀이 참조

11 (1) $\frac{9b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{9b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{9b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2\cdot 3=6$$

(단, 등호는 $\frac{9b}{a}=\frac{a}{b}$, 즉 $a=3b$ 일 때 성립)

(2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$

$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$$

$\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=2\cdot 1+2=4$$

$$\therefore (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$$

(단, 등호는 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$, 즉 $a=b$ 일 때 성립)

☞ 풀이 참조

12 $a>0$, $b>0$, $c>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b\geq 2\sqrt{ab} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b+c\geq 2\sqrt{bc} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$c+a\geq 2\sqrt{ca} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①×②×③을 하면

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

☞ 풀이 참조

13 (1) $5a>0$, $2b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5a+2b\geq 2\sqrt{5a\cdot 2b}=2\sqrt{10ab}$$

그런데 $ab=10$ 이므로

$$5a+2b\geq 2\cdot 10=20 \quad (\text{단, 등호는 } 5a=2b \text{일 때 성립})$$

따라서 $5a+2b$ 의 최솟값은 20이다.

(2) $a>0$, $4b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a+4b}{2}\geq\sqrt{4ab}$$

그런데 $a+4b=16$ 이므로

$$8\geq 2\sqrt{ab}, \quad 4\geq\sqrt{ab}$$

$$\therefore ab\leq 16 \quad (\text{단, 등호는 } a=4b \text{일 때 성립})$$

따라서 ab 의 최댓값은 16이다.

☞ (1) 20 (2) 16

14 (1) x , y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+3^2)\{x^2+(2y)^2\}\geq (x+6y)^2$$

그런데 $x^2+4y^2=40$ 이므로

$$400\geq (x+6y)^2$$

$$\therefore -20\leq x+6y\leq 20$$

(단, 등호는 $x=\frac{2}{3}y$, 즉 $3x=2y$ 일 때 성립)

(2) x , y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}(x^2+y^2)\geq\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^2$$

그런데 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=25$ 이므로

$$\frac{25}{144}(x^2+y^2)\geq 25^2$$

$$\therefore x^2+y^2\geq 3600 \quad (\text{단, 등호는 } 3x=4y \text{일 때 성립})$$

따라서 x^2+y^2 의 최솟값은 3600이다.

☞ (1) $-20\leq x+6y\leq 20$ (2) 3600

15 x , y , z 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2)\geq (x+2y+3z)^2$$

그런데 $x^2+y^2+z^2=14$ 이므로

$$14^2\geq (x+2y+3z)^2$$

$$\therefore -14\leq x+2y+3z\leq 14$$

(단, 등호는 $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 일 때 성립)

☞ $-14\leq x+2y+3z\leq 14$

16 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=a$ 이므로

$$10a \geq (x+3y)^2$$

$$\therefore -\sqrt{10a} \leq x+3y \leq \sqrt{10a} \quad \left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{3} \text{ 일 때 성립} \right)$$

따라서 $x+3y$ 의 최댓값은 $\sqrt{10a}$, 최솟값은 $-\sqrt{10a}$ 이고 그 차이가 20이므로

$$2\sqrt{10a}=20, \quad \sqrt{10a}=10, \quad 10a=100$$

$$\therefore a=10$$

답 10

중단원 연습 문제

본책 149쪽

- 01 ④ 02 ③ 03 12 04 ① 05 ⑤
 06 6 07 ⑤ 08 ③, ④ 09 풀이 참조
 10 ④ 11 ㄷ, ㄹ 12 ④ 13 ② 14 ㄴ
 15 풀이 참조 16 ③ 17 17 18 ②
 19 12 20 14 21 ① 22 ⑤ 23 풀이 참조
 24 ⑤

01 **전략** 참, 거짓을 판별할 수 없는 문장이나 식을 찾는다.

풀이 ①, ②, ⑤ 참인 명제이다.

③ $-3=5$ 이므로 거짓인 명제이다.

④ 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

답 ④

02 **전략** '또는'의 부정은 '그리고'임을 이용한다.

풀이 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ 에서

$$a-b=0 \text{ 또는 } b-c=0 \text{ 또는 } c-a=0$$

$$\therefore a=b \text{ 또는 } b=c \text{ 또는 } c=a$$

따라서 주어진 조건의 부정은

$$a \neq b \text{이고 } b \neq c \text{이고 } c \neq a$$

답 ③

03 **전략** 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 조건 ' $\sim p$ 그리고 q '의 진리집합은 $P^c \cap Q$ 임을 이용한다.

풀이 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P=\{1, 3, 5, 7, 9\}, Q=\{1, 2, 5, 10\}$$

조건 ' $\sim p$ 그리고 q '의 진리집합은 $P^c \cap Q$ 이므로

$$\begin{aligned} P^c \cap Q &= \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 2, 5, 10\} \\ &= \{2, 10\} \end{aligned}$$

따라서 구하는 합은

$$2+10=12$$

답 ③

답 12

채점 기준	비율
① 두 조건 p, q 의 진리집합을 구할 수 있다.	40%
② 조건 ' $\sim p$ 그리고 q '의 진리집합을 구할 수 있다.	50%
③ 조건 ' $\sim p$ 그리고 q '의 진리집합의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	10%

04 **전략** 명제 ' p 이면 q 이다.'가 거짓임을 보이려면 P 의 원소 중에서 Q 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

풀이 주어진 명제가 거짓임을 보이는 원소는 집합

$$P \cap Q^c = P - Q$$

의 원소인 a 이다.

답 ①

05 **전략** 명제와 진리집합 사이의 관계를 이용하여 항상 참인 명제를 찾는다.

풀이 주어진 벤 다이어그램에서 $R \subset P$

따라서 $P^c \subset R^c$ 이므로 명제 $\sim p \rightarrow \sim r$ 가 참이다.

답 ⑤

06 **전략** 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 가 되도록 수직선 위에 나타낸다.

풀이 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

$$q: |x-6| \leq 3 \text{에서}$$

$$-3 \leq x-6 \leq 3 \quad \therefore 3 \leq x \leq 9$$

$$\therefore P=\{x | a-3 < x < a+2\}, Q=\{x | 3 \leq x \leq 9\}$$

... ①

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a-3 \geq 3, a+2 \leq 9$$

$$\therefore 6 \leq a \leq 7$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 6이다.

... ②

답 6

채점 기준	비율
① 두 조건 p, q 의 진리집합을 구할 수 있다.	50%
② 정수 a 의 최솟값을 구할 수 있다.	50%

07 **전략** '모든'이 있는 명제는 하나라도 성립하지 않으면 거짓이고, '어떤'이 있는 명제는 하나라도 성립하면 참이다.

풀이 ① 2는 소수이다.

$$\textcircled{3} x=\frac{1}{2} \text{이면 } x < \frac{1}{x}$$

$$\textcircled{5} [\text{반례}] x=1+\sqrt{2} \text{이면 } x^2=3+2\sqrt{2} \text{는 무리수이다.}$$

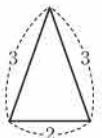
답 ⑤

08 **전략** 명제 $p \rightarrow q$ 의 역은 $q \rightarrow p$ 이다.

풀이 ① 역: 이등변삼각형이면 정삼각형이다. (거짓)

[반례] 오른쪽 그림의 삼각형은 이등변삼각형이

지만 정삼각형이 아니다.



- ② 역: 9의 약수이면 3의 약수이다. (거짓)
 [반례] 9는 9의 약수이지만 3의 약수가 아니다.
- ③ 역: 자연수 x, y 에 대하여 x, y 가 홀수이면 xy 가 홀수이다. (참)
- ④ 역: $x=3$ 이면 $3x-2=7$ 이다. (참)
- ⑤ 역: $5-2x>3$ 이면 $x>1$ 이다. (거짓)
 $5-2x>3$ 이면 $-2x>-2$
 $\therefore x<1$

답 ③, ④

09 전역 명제 $p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이고 명제와 그 대우는 참, 거짓이 일치함을 이용한다.

풀이 'a+b+c≥0'의 부정은

$$'a+b+c<0'$$

'적어도 하나는 ~이다.'의 부정은 '모두 ~가 아니다.'이므로

'a, b, c 중 적어도 하나는 양수이다.'의 부정은

'a, b, c는 모두 양수가 아니다.'

따라서 주어진 명제의 대우는

'a, b, c가 모두 양수가 아니면 a+b+c<0이다.' $\rightarrow$ ①

[반례] $a=b=c=0$ 은 모두 양수가 아니지만 $a+b+c=0$ 이다.

따라서 대우가 거짓이므로 주어진 명제는 거짓이다. $\rightarrow$ ②

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① 명제의 대우를 말할 수 있다.	70 %
② 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.	30 %

10 전역 $p \not\Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow p$ 인 것을 찾는다.

풀이 ① $|x+2|=6$ 에서 $x=-8$ 또는 $x=4$

따라서 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② $x^2=9$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

$$|x|=3 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

③ $x^2=2x$ 에서 $x(x-2)=0$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

④ $x^2>9$ 에서 $(x+3)(x-3)>0$

$$\therefore x<-3 \text{ 또는 } x>3$$

따라서 $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

⑤ $xy \geq 0$ 에서

$$'x \geq 0 \text{이고 } y \geq 0' \text{ 또는 } 'x \leq 0 \text{이고 } y \leq 0'$$

따라서 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

답 ④

11 전역 ' $x=0$ 이고 $y=0$ '과 서로 같은 것을 찾는다.

풀이 $\neg, x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$

따라서 $x+y=0$ 은 $x=0$ 이고 $y=0$ 이기 위한 필요조건이다.

$$\neg, xy=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ 또는 } y=0$$

따라서 $xy=0$ 은 $x=0$ 이고 $y=0$ 이기 위한 필요조건이다.

$$\neg, |x|+|y|=0 \Leftrightarrow x=0 \text{이고 } y=0$$

따라서 $|x|+|y|=0$ 은 $x=0$ 이고 $y=0$ 이기 위한 필요충분 조건이다.

$$\neg, x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=0 \text{이고 } y=0$$

따라서 $x^2+y^2=0$ 은 $x=0$ 이고 $y=0$ 이기 위한 필요충분조건 이다.

이상에서 필요충분조건인 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 $\neg, \neg$

12 전역 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, p 가 q 이기 위한 필요조건이면 $Q \subset P$ 이다.

풀이 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

$p: (x+1)(x+2)(x-3)=0$ 에서

$$x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore P=\{-2, -1, 3\}$$

$q: x^2+kx+k-1=0$ 에서 $(x+1)(x+k-1)=0$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=-k+1$$

$$\therefore Q=\{-1, -k+1\}$$

p 가 q 이기 위한 필요조건이라면 $Q \subset P$

즉 $-k+1 \in P$ 이어야 하므로

$$-k+1=-2 \text{ 또는 } -k+1=-1 \text{ 또는 } -k+1=3$$

$$\therefore k=3 \text{ 또는 } k=2 \text{ 또는 } k=-2$$

따라서 모든 정수 k 의 값의 곱은

$$3 \cdot 2 \cdot (-2) = -12$$

답 ④

13 전역 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, p 는 q 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$, p 는 q 이기 위한 필요조건이면 $Q \subset P$ 이다.

풀이 p 는 r 이기 위한 충분조건이므로

$$P \subset R$$

q 는 r 이기 위한 필요조건이므로

$$R \subset Q$$

$$\therefore P \subset R \subset Q$$

답 ②

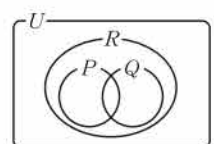
14 전역 $P \subset Q \Leftrightarrow p$ 는 q 이기 위한 충분조건

$$\Leftrightarrow q \text{는 } p \text{이기 위한 필요조건}$$

풀이 세 집합 P, Q, R 의 포함 관계를

벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\neg, P \subset R \text{이므로 } p \Rightarrow r$$



따라서 p 는 r 이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $Q \subset R$, 즉 $R^c \subset Q^c$ 이므로 $\sim r \implies \sim q$

따라서 $\sim q$ 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $(P \cup Q) \subset R$ 이므로 $(p \text{ 또는 } q) \implies r$

따라서 r 는 p 또는 q 이기 위한 필요조건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

15 전략 주어진 명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참임을 이용한다.

풀이 주어진 명제의 대우는

‘ a, b, c 가 모두 홀수이면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ 이다.’ $\rightarrow 1$

a, b, c 가 모두 홀수이면 a^2, b^2, c^2 은 모두 홀수이고, $a^2 + b^2$ 은 짝수이다.

이때 c^2 은 홀수이므로 $a^2 + b^2 \neq c^2$ 이다. $\rightarrow 2$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\rightarrow 3$

답 풀이 참조

채점 기준	비율
1 주어진 명제의 대우를 구할 수 있다.	30 %
2 주어진 명제의 대우가 참임을 보일 수 있다.	50 %
3 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

16 전략 주어진 명제와 그 대우의 참, 거짓이 항상 일치함과 삼단논법을 이용한다.

풀이 두 명제 $p \implies q, q \implies \sim r$ 가 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \implies \sim r$ 가 참이고, 그 대우인 $r \implies \sim p$ 도 참이다.

답 ③

17 전략 주어진 식을 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $x + \frac{49}{x-3} = (x-3) + \frac{49}{x-3} + 3$ $\rightarrow 1$

$x-3 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} (x-3) + \frac{49}{x-3} + 3 &\geq 2\sqrt{(x-3) \cdot \frac{49}{x-3}} + 3 \\ &= 2 \cdot 7 + 3 \\ &= 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $x-3 = \frac{49}{x-3}$, 즉 $x=10$ 일 때 성립)

따라서 $x + \frac{49}{x-3}$ 의 최솟값은 17이다. $\rightarrow 2$

답 17

채점 기준	비율
1 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
2 $x + \frac{49}{x-3}$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	70 %

18 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}$$

그런데 $a^2 + b^2 = 12$ 이므로

$$6 \geq |ab|$$

$\therefore -6 \leq ab \leq 6$ (단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

따라서 ab 의 최솟값은 -6 이다.

답 ②

19 전략 참인 명제와 진리집합 사이의 관계를 이용한다.

풀이 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 명제

$p \implies \sim q$ 가 참이므로 $P \subset Q^c$, 즉 $Q \subset P^c$

명제 $\sim p \implies q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$

$$\therefore P^c = Q$$

$p: 2x - a = 0$ 에서 $x = \frac{a}{2}$ 이므로 $P = \left\{ \frac{a}{2} \right\}$

$$\therefore Q = \left\{ x \mid x \neq \frac{a}{2} \text{인 실수} \right\}$$

해가 $x \neq \frac{a}{2}$ 인 모든 실수이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 > 0 \quad \therefore x^2 - ax + \frac{a^2}{4} > 0$$

이 부등식이 $x^2 - bx + 9 > 0$ 과 같으므로

$$a = b, \frac{a^2}{4} = 9 \quad \therefore a = 6, b = 6 \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore a + b = 12$$

답 12

20 전략 ‘어떤’의 부정은 ‘모든’임을 이용한다.

풀이 주어진 명제의 부정은

‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - kx + k + 3 > 0$ ’ $\rightarrow 1$

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 - kx + k + 3 > 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-k)^2 - 4(k+3) < 0$$

$$k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$(k+2)(k-6) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 6 \quad \rightarrow 2$$

따라서 모든 정수 k 의 값의 합은

$$(-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 14 \quad \rightarrow 3$$

답 14

채점 기준	비율
1 주어진 명제의 부정을 구할 수 있다.	30 %
2 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
3 모든 정수 k 의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

개념편라이트 보충학습

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

- ① 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$ 이 성립하려면 $a > 0, D \leq 0$
- ② 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c > 0$ 이 성립하려면 $a > 0, D < 0$

21 전략 명제와 그 대우는 참, 거짓이 일치함을 이용한다.

풀이 ㄱ. 명제: $|x|+|y|=0$ 이면 $x=0$ 이고 $y=0$ 이다. (참)

역: $x=0$ 이고 $y=0$ 이면 $|x|+|y|=0$ 이다. (참)

대우: 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄴ. 명제: $x < 0$ 이고 $y < 0$ 이면 $x+y < 0$ 이다. (참)

역: $x+y < 0$ 이면 $x < 0$ 이고 $y < 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x = -2, y = 1$ 이면 $x+y < 0$ 이지만

$x < 0$ 이고 $y > 0$

대우: 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄷ. 명제: $x^2 > y^2$ 이면 $x > y$ 이다. (거짓)

[반례] $x = -2, y = 1$ 이면 $x^2 > y^2$ 이지만 $x < y$

역: $x > y$ 이면 $x^2 > y^2$ 이다. (거짓)

[반례] $x = 1, y = -2$ 이면 $x > y$ 이지만 $x^2 < y^2$

대우: 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

이상에서 명제의 역과 대우가 모두 참인 명제는 ㄱ뿐이다.

답 ①

22 전략 먼저 진리집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 q 가 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$

q 가 r 이기 위한 충분조건이므로 $Q \subset R$

① $P \subset Q, Q \subset R$ 이므로 $P \subset R$

② $P \subset Q$ 이므로 $P \cap Q = P$

③ $Q \subset R$ 이므로 $Q \cup R = R$

④ $P \subset Q$ 에서 $P \cup Q = Q$ 이므로

$$P \cup Q = Q \not\subset R^c$$

⑤ $P \subset R$ 에서 $R^c \subset P^c$ 이므로

$$P^c \cap R^c = R^c$$

$$\therefore P^c \cap R^c = R^c \subset Q^c (\because Q \subset R)$$

답 ⑤

23 전략 결론을 부정하여 모순이 생김을 보임으로써 명제가 참임을 증명한다.

풀이 $b \neq 0$ 이라 가정하자.

→ ①

$$a+b\sqrt{2}=0 \text{에서} \quad b\sqrt{2}=-a$$

$$\therefore \sqrt{2} = -\frac{a}{b}$$

이때 $\sqrt{2}$ 는 무리수, $-\frac{a}{b}$ 는 유리수이므로 모순이다. → ②

$$\therefore b=0$$

$b=0$ 을 $a+b\sqrt{2}=0$ 에 대입하면

$$a=0$$

따라서 명제 '두 유리수 a, b 에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$ 이면 $a=b=0$ 이다.'는 참이다. → ③

답 풀이 참조

채점 기준	비율
① 결론의 부정을 구할 수 있다.	20 %
② 가정에 모순이 생김을 보일 수 있다.	60 %
③ 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.	20 %

24 전략 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ 임을 이용한다.

풀이 a, b 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$\left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1^2 \right] (a^2 + b^2) \geq \left(\frac{a}{2} + b \right)^2$$

그런데 $\frac{a}{2} + b = 10$ 이므로

$$\frac{5}{4} (a^2 + b^2) \geq 100$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq 80 \text{ (단, 등호는 } 2a=b \text{ 일 때 성립)}$$

따라서 a^2+b^2 의 최솟값은 80이다.

답 ⑤

08 함수

III. 함수

01 함수

확인

본책 155쪽

1 (1) X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 4, 7의 2개이므로 함수가 아니다.

(2) X 의 원소 3에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(3) X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

$\therefore$ 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{4, 5, 6, 7\}$,

치역: $\{4, 5, 7\}$

답 풀이 참조

2 (1) $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$, $f(0) = 0^2 - 1 = -1$,

$f(1) = 1^2 - 1 = 0$, $f(2) = 2^2 - 1 = 3$

이므로 치역은 $\{-1, 0, 3\}$

(2) $f(-1) = |-1| + 1 = 2$, $f(0) = |0| + 1 = 1$,

$f(1) = |1| + 1 = 2$, $f(2) = |2| + 1 = 3$

이므로 치역은 $\{1, 2, 3\}$

답 (1) $\{-1, 0, 3\}$ (2) $\{1, 2, 3\}$

3 (1) $f(-1) = 2$, $g(-1) = -2$ 이므로

$f(-1) \neq g(-1)$

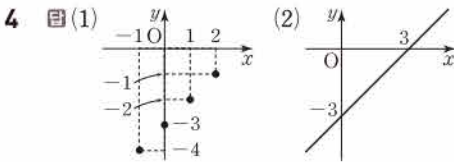
따라서 두 함수 f , g 는 서로 같은 함수가 아니다.

(2) $f(-1) = g(-1) = 1$, $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$

따라서 두 함수 f , g 는 서로 같은 함수이다.

답 (1) 서로 같은 함수가 아니다.

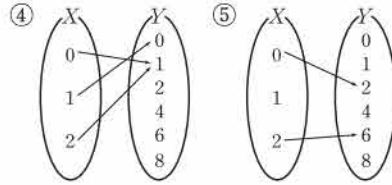
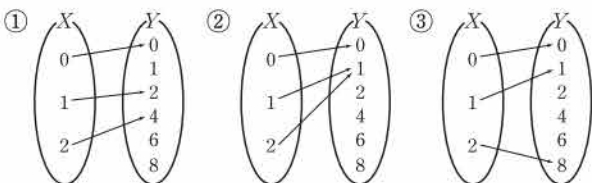
(2) 서로 같은 함수이다.



유제

본책 157쪽

1 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



⑤에서 X 의 원소 1에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

2 ① $f(6) = -1$ 에서 6에 대응하는 X 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

② $f(1) = \frac{5}{4}$ 에서 1에 대응하는 X 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

③ $f(2) = -1$ 에서 2에 대응하는 X 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

④ $f(1) = 2$, $f(2) = 12$, $f(3) = 36$, ..., 즉 X 의 각 원소에 X 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

⑤ $f(1) = \frac{1}{3}$ 에서 1에 대응하는 X 의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 답 ④

3 정의역은 $X = \{1, 3, 5, 7\}$, 공역은 $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로

$f(1) = |2-1| = 1$, $f(3) = |2-3| = 1$,

$f(5) = |2-5| = 3$, $f(7) = |2-7| = 5$

따라서 치역은 $\{1, 3, 5\}$

답 $\{1, 3, 5\}$

4 $2 - \sqrt{2} \geq 0$ 이므로

$f(2 - \sqrt{2}) = -(2 - \sqrt{2}) = -2 + \sqrt{2}$

$\sqrt{2} - 3 < 0$ 이므로

$f(\sqrt{2} - 3) = (\sqrt{2} - 3) + 1 = \sqrt{2} - 2$

$\therefore f(2 - \sqrt{2}) - f(\sqrt{2} - 3) = -2 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 2)$

$= 0$

답 0

5 정의역이 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 이므로

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 0$

따라서 치역은 $\{0, 1\}$

답 $\{0, 1\}$

6 $\neg$. $f(2) = 4$, $g(2) = 5$ 이므로 $f(2) \neq g(2)$

$\therefore f \neq g$

$\cup$. $f(1) = g(1) = 2$, $f(2) = g(2) = 6$ 이므로 $f = g$

$\cap$. $f(2) = \frac{1}{2}$, $g(2) = \frac{1}{4}$ 이므로 $f(2) \neq g(2)$

$\therefore f \neq g$

∴ $f(1)=g(1)=0$, $f(2)=g(2)=1$ 이므로

$$f=g$$

이상에서 $f=g$ 인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

7 $f(-1)=g(-1)$ 에서 $5=1-a+b$

$$\therefore a-b=-4$$

..... ㉠

$f(1)=g(1)$ 에서 $3=1+a+b$

$$\therefore a+b=2$$

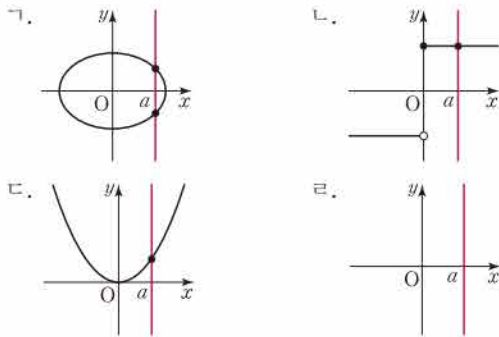
..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=3$$

$$\text{답 } a=-1, b=3$$

8 주어진 그래프에 정의역의 각 원소 a 에 대하여 직선 $x=a$ 를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 직선 $x=a$ 와 2개의 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

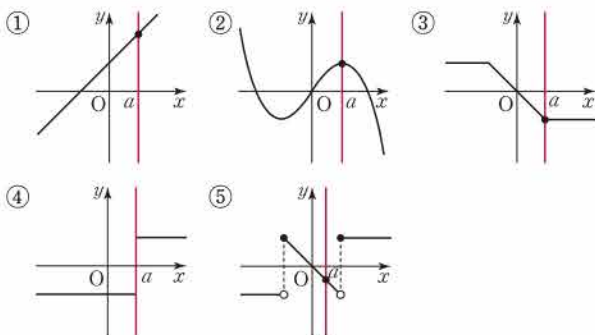
ㄴ. ㄷ. 직선 $x=a$ 와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

ㄹ. 직선 $x=a$ 와 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

이상에서 함수의 그래프인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

9 주어진 그래프에 정의역의 각 원소 a 에 대하여 직선 $x=a$ 를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



①, ②, ③, ⑤ 직선 $x=a$ 와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

④ 직선 $x=a$ 와 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

답 ④

02 여러 가지 함수

확인

본책 162쪽

1 일대일함수는 정의역의 서로 다른 원소에 공역의 서로 다른 원소가 대응하는 함수이므로 (1), (4)이다.

일대일대응은 일대일함수이고 치역과 공역이 같은 함수이므로 (1)이다.

답 일대일함수: (1), (4), 일대일대응: (1)

2 (1) 일대일함수는 정의역의 서로 다른 원소에 공역의 서로 다른 원소가 대응하는 함수이므로 ㄱ, ㄷ이다.

(2) 일대일대응은 일대일함수이고 치역과 공역이 같은 함수이므로 ㄷ이다.

(3) 항등함수는 정의역의 각 원소에 그 자신이 대응하는 함수이므로 ㄷ이다.

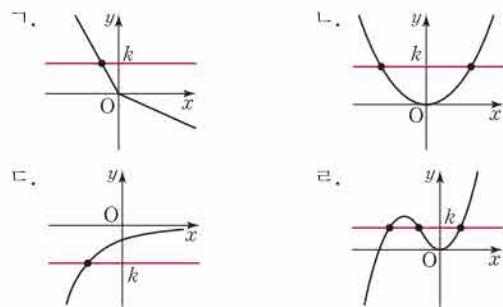
(4) 상수함수는 치역의 원소가 1개인 함수이므로 ㄴ이다.

답 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄷ (3) ㄷ (4) ㄴ

유제

본책 163쪽

1 주어진 그래프에 치역의 각 원소 k 에 대하여 직선 $y=k$ 를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 직선 $y=k$ 와 오직 한 점에서 만나고 치역이 실수 전체의 집합인 함수이므로 일대일대응이다.

ㄴ. 직선 $y=k$ 와 2개의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

ㄷ. 직선 $y=k$ 와 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다. 이때 공역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\{y|y < 0\}$ 이므로 일대일대응이 아니다.

ㄹ. 직선 $y=k$ 와 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

이상에서 구하는 함수의 그래프는 ㄱ뿐이다.

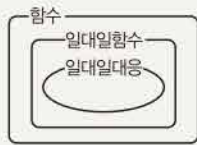
답 ㄱ

개념배라이트 보충학습

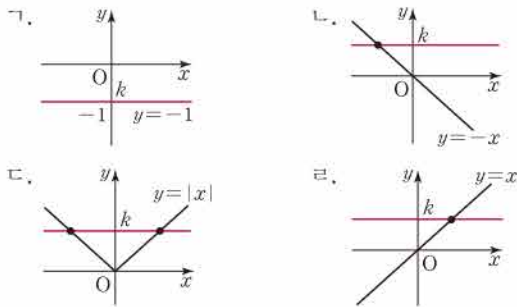
함수, 일대일함수, 일대일대응

함수, 일대일함수, 일대일대응 전체의 집합의 포함 관계는 오른쪽 벤 다이어그램과 같다.

- ① 일대일대응이면 일대일함수이다.
- ② 일대일함수라고 해서 모두 일대일대응인 것은 아니다.



2 주어진 함수의 그래프를 각각 좌표평면 위에 나타낸 후, 치역의 각 원소 k 에 대하여 직선 $y=k$ 를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



- (1) 일대일대응은 직선 $y=k$ 와 오직 한 점에서 만나고 치역이 실수 전체의 집합인 함수이므로 ㄴ, ㄹ이다.
- (2) 항등함수는 그래프가 직선 $y=x$ 인 함수이므로 ㄹ이다.
- (3) 상수함수는 그래프가 x 축에 평행한 직선인 함수이므로 ㄱ이다.

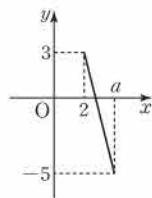
답 (1) ㄴ, ㄹ (2) ㄹ (3) ㄱ

3 함수 f 가 일대일대응이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore f(2) &= 3, f(a) = -5 \\ f(x) &= -4x + b \text{ 이므로} \\ -8 + b &= 3, -4a + b &= -5 \end{aligned}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 4, b = 11$$

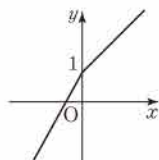


답 $a = 4, b = 11$

4 함수 f 가 일대일대응이고 $x \geq 0$ 에서 직선의 기울기가 양수이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 직선 $y = (a+2)x + 1$ 의 기울기 $a+2$ 도 양수여야 하므로

$$a + 2 > 0 \quad \therefore a > -2$$



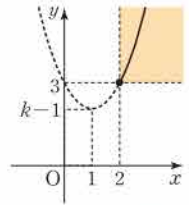
답 $a > -2$

5 $f(x) = x^2 - 2x + k = (x-1)^2 + k - 1$ 이므로 $x \geq 2$ 일 때 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가한다.

이때 함수 f 가 일대일대응이면 치역과 공역이 같으므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 $f(2) = 3$ 이므로

$$4 - 4 + k = 3 \quad \therefore k = 3$$



답 3

6 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수는

$$4! = 24$$

X 에서 X 로의 항등함수의 개수는 1

X 에서 X 로의 상수함수의 개수는 4

따라서 $a = 24, b = 1, c = 4$ 이므로

$$a + b + c = 29$$

답 29

7 $f(1) = c$ 를 만족시키는 일대일함수 f 의 개수는 집합 Y 의 원소 중 c 를 제외한 4개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_4P_2 = 12$$

답 12

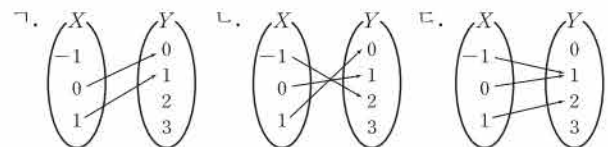
중단원 연습 문제

본책 166쪽

01 ④	02 ⑤	03 ⑤	04 3	05 ④
06 1	07 -5	08 7	09 ④	10 96
11 ③	12 87	13 $\frac{8}{3}$	14 12	15 25

01 **전략** X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하는 것을 찾는다.

풀이 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이상에서 X 에서 Y 로의 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

02 **전략** $f(2)$ 의 값을 구하기 위해 $f(x-2) = 2x^2 - x$ 에 대입해야 할 x 의 값을 구한다.

풀이 $x-2=2$ 에서 $x=4$

$f(x-2) = 2x^2 - x$ 에 $x=4$ 를 대입하면

$$f(2) = 2 \cdot 4^2 - 4 = 28$$

답 ⑤

다른 풀이 $x-2=t$ 라 하면 $x=t+2$ 이므로

$$f(t) = 2(t+2)^2 - (t+2)$$

$$= 2t^2 + 7t + 6$$

$$\therefore f(2) = 2 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 + 6 = 28$$

개념썬라이트 보충학습

함수 $f(ax+b)$ 에서 $f(k)$ 의 값 구하기

$ax+b=k$ 를 만족시키는 x 의 값을 구하여 x 대신 그 수를 대입한다.

03 전략 $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$ 임을 이용한다.

풀이 $f(x)=3x^2-6x+4$ 에서

$$f(0)=4, f(1)=1, f(2)=4$$

$g(x)=a|x-1|+b$ 에서

$$g(0)=a+b, g(1)=b, g(2)=a+b$$

두 함수 f 와 g 가 서로 같으려면

$$f(0)=g(0), f(1)=g(1), f(2)=g(2)$$

이어야 한다.

따라서 $a+b=4$, $b=1$ 이므로

$$a=3, b=1$$

$$\therefore 2a-b=5$$

답 ⑤

04 전략 서로 같은 함수는 정의역의 각 원소 x 에 대한 함수값이 같으므로 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 해를 구한다.

풀이 두 함수 f , g 가 서로 같으려면 정의역 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=g(x)$ 이어야 하므로

$$x^2-3=-x^2+x$$

$$2x^2-x-3=0, (x+1)(2x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

→ ①

따라서 집합 X 는 집합 $\{-1, \frac{3}{2}\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로

$$\{-1\}, \{\frac{3}{2}\}, \{-1, \frac{3}{2}\}$$

의 3개이다.

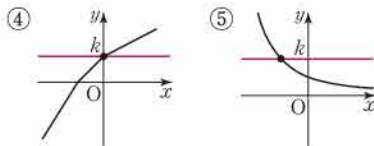
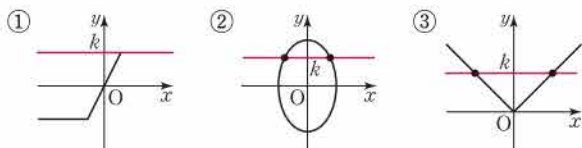
→ ②

답 3

채점 기준	비율
① $f(x)=g(x)$ 를 만족시키는 x 의 값을 구할 수 있다.	50%
② 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	50%

05 전략 y 축과 수직인 직선을 그어 교점이 1개인지 확인하고, 치역과 공역이 같은지 확인한다.

풀이 주어진 그래프에 치역의 각 원소 k 에 대하여 직선 $y=k$ 를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



④ 직선 $y=k$ 와 오직 한 점에서 만나고 치역이 실수 전체의 집합이므로 일대일대응의 그래프이다.

답 ④

06 전략 일대일대응의 성질을 이용하여 함수값을 구한다.

풀이 $f(2)-f(3)=-3$ 에서

$$f(2)=3, f(3)=6$$

$f(1)=5$ 이고 함수 f 가 일대일대응이므로 $f(4)=4$

$$\therefore f(4)-f(2)=4-3=1$$

답 1

07 전략 일차함수 $y=f(x)$ 가 $\{f(x)|x \in X\}=Y$ 를 만족시키면 함수 f 는 일대일대응이다.

풀이 일차함수 $y=f(x)$ 가 $\{f(x)|x \in X\}=Y$ 를 만족시키므로 일대일대응이다.

→ ①

$a < 0$ 이므로 함수 f 가 일대일대응이면

$$f(-1)=4, f(3)=-8$$

$f(x)=ax+b$ 이므로

$$-a+b=4, 3a+b=-8$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=1$$

→ ②

따라서 $f(x)=-3x+1$ 이므로

$$f(2)=-3 \cdot 2+1=-5$$

→ ③

답 -5

채점 기준	비율
① 함수 f 가 일대일대응임을 알 수 있다.	30%
② a , b 의 값을 구할 수 있다.	50%
③ $f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

개념썬라이트 보충학습

함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일대응일 때

① $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$ (단, $x_1 \in X, x_2 \in X$)

② $\{f(x)|x \in X\}=Y$

08 전략 집합 X 의 원소 x 에 대하여 $f(x)=x$ 임을 이용한다.

풀이 함수 f 가 항등함수이려면 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=x$ 이어야 하므로

$$\frac{1}{16}x^3=x, x^3-16x=0$$

$$x(x^2-16)=0, \quad x(x+4)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=4 \quad \rightarrow ①$$

따라서 집합 X 는 집합 $\{-4, 0, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로 집합 X 의 개수는

$$2^3-1=7 \quad \rightarrow ②$$

답 7

채점 기준	비율
① $f(x)=x$ 를 만족시키는 x 의 값을 구할 수 있다.	60 %
② 집합 X 의 개수를 구할 수 있다.	40 %

09 **전략** 상수함수의 정의에 의하여 $f(0)=f(2)=f(4)$ 임을 이용한다.

풀이 함수 f 는 상수함수이므로

$$f(0)=f(2)=f(4)$$

$$f(0)=f(2) \text{에서} \quad 2=4+2a+b$$

$$\therefore 2a+b=-2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(0)=f(4) \text{에서} \quad 2=16+4a+b$$

$$\therefore 4a+b=-14 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-6, b=10$$

$$\therefore a+b=4 \quad \text{답 ④}$$

10 **전략** 정의역의 각 원소의 함수값이 될 수 있는 수를 찾아 함수의 개수를 구한다.

풀이 (i) $x=1$ 일 때,

$$1+f(1) \geq 4 \text{이므로} \quad f(1) \geq 3$$

즉 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 3, 4 중 하나이므로
2개

(ii) $x=2$ 일 때,

$$2+f(2) \geq 4 \text{이므로} \quad f(2) \geq 2$$

즉 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4 중 하나이므로
3개

(iii) $x=3$ 일 때,

$$3+f(3) \geq 4 \text{이므로} \quad f(3) \geq 1$$

즉 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로
4개

(iv) $x=4$ 일 때,

$$4+f(4) \geq 4 \text{이므로} \quad f(4) \geq 0$$

즉 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로
4개

이상에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$$

답 96

11 **전략** 집합 Y 가 n 개의 원소를 가질 때 일대일함수의 개수를 구한다.

풀이 집합 Y 가 n 개의 원소를 갖는다고 하면 X 에서 Y 로의 일대일함수의 개수는 집합 Y 의 n 개의 원소 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_nP_4=120$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)=120=5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\therefore n=5$$

따라서 공역 Y 의 원소의 개수는 5이고 이때 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수는 공역 Y 의 원소의 개수와 같으므로 5이다.

답 ③

12 **전략** 조건 (가)에서 $1 \leq x \leq 3$ 인 x 의 값에 대해서만 함수값을 구할 수 있으므로 조건 (나)를 이용하여 $f(2100)$ 을 변형한다.

풀이 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} f(2100) &= f\left(3 \cdot \frac{2100}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{2100}{3}\right) \\ &= 3^2 f\left(\frac{2100}{3^2}\right) \\ &\vdots \\ &= 3^6 f\left(\frac{2100}{3^6}\right) \end{aligned}$$

이때 $2 < \frac{2100}{3^6} < 3$ 이므로 조건 (가)에 의하여

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2100}{3^6}\right) &= 1 - \left| \frac{2100}{3^6} - 2 \right| \\ &= 1 - \frac{2100}{3^6} + 2 \\ &= 3 - \frac{2100}{3^6} \\ \therefore f(2100) &= 3^6 f\left(\frac{2100}{3^6}\right) \\ &= 3^6 \left(3 - \frac{2100}{3^6}\right) \\ &= 3^7 - 2100 \\ &= 87 \end{aligned}$$

답 87

13 **전략** 함수 f 가 일대일대응이 되도록 그래프를 그려 본다.

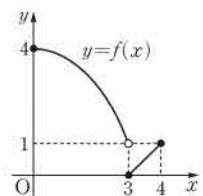
풀이 함수 f 가 일대일대응이므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$$\therefore a < 0$$

또 $y=ax^2+b$ 의 그래프가 두 점 $(0, 4)$, $(3, 1)$ 을 지나야 하므로

$$4=b, 1=9a+b \quad \therefore a=-\frac{1}{3}, b=4$$



따라서 $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 4$ ($0 \leq x < 3$)이므로

$$f(2) = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} \quad \text{답 } \frac{8}{3}$$

14 [전략] 주어진 조건을 모두 만족시키는 일대일함수 $f(x)$ 의 치역이 $\{1, 3, 4\}$ 이거나 $\{1, 2, 6\}$ 임을 이용한다.

[풀이] 조건 (가)에서 함수 f 는 일대일함수이고, 조건 (나)에서 $f(a)f(b)f(c) = 12$ 이므로 치역이 $\{1, 3, 4\}$ 일 때와 치역이 $\{1, 2, 6\}$ 일 때의 두 가지 경우로 나누어서 생각할 수 있다.

(i) 치역이 $\{1, 3, 4\}$ 일 때,

일대일함수의 개수는 치역 $\{1, 3, 4\}$ 의 3개의 원소 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_3P_3 = 3! = 6 \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

(ii) 치역이 $\{1, 2, 6\}$ 일 때,

일대일함수의 개수는 치역 $\{1, 2, 6\}$ 의 3개의 원소 중에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_3P_3 = 3! = 6 \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

(i), (ii)에서 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$6 + 6 = 12 \quad \rightarrow \textcircled{3}$$

답 12

채점 기준	비율
① 치역이 $\{1, 3, 4\}$ 인 함수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
② 치역이 $\{1, 2, 6\}$ 인 함수의 개수를 구할 수 있다.	40 %
③ 함수 f 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

15 [전략] $f(-2) = -f(2)$, $f(-1) = -f(1)$, $f(0) = 0$ 임을 이용한다.

[풀이] 함수 f 가 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여

$$f(-x) = -f(x) \text{이므로}$$

$$f(-2) = -f(2), f(-1) = -f(1), f(0) = 0$$

이어야 한다.

따라서 $f(2)$ 와 $f(1)$ 의 값은 $f(-2)$ 와 $f(-1)$ 의 값에 따라 결정되고, $f(-2)$ 와 $f(-1)$ 이 될 수 있는 값은 각각 5가지이므로 함수 f 의 개수는

$$5 \cdot 5 = 25 \quad \text{답 } 25$$

09 합성함수와 역함수

01 합성함수

확인

본책 170쪽

$$1 \quad (1) (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2) = 3$$

$$(2) (g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(8) = 1$$

$$(3) (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(2) = 2$$

$$(4) (f \circ g)(8) = f(g(8)) = f(1) = 6$$

$$\text{답 } (1) 3 \quad (2) 1 \quad (3) 2 \quad (4) 6$$

$$2 \quad (1) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1)$$

$$= -(2x-1) + 5 = -2x + 6$$

$$(2) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x+5)$$

$$= 2(-x+5) - 1 = -2x + 9$$

$$(3) (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x-1)$$

$$= 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$$

$$(4) (g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(-x+5)$$

$$= -(-x+5) + 5 = x$$

답 풀이 참조

$$3 \quad (1) f(-1) = 3 \cdot (-1) - 1 = -4 \text{이므로}$$

$$((h \circ g) \circ f)(-1) = (h \circ g)(f(-1))$$

$$= (h \circ g)(-4)$$

$$= -2 \cdot (-4) + 6$$

$$= 14$$

$$(2) f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \text{이므로}$$

$$(h \circ (g \circ f))(1) = ((h \circ g) \circ f)(1)$$

$$= (h \circ g)(f(1))$$

$$= (h \circ g)(2)$$

$$= -2 \cdot 2 + 6$$

$$= 2$$

$$\text{답 } (1) 14 \quad (2) 2$$

유제

본책 172쪽

$$1 \quad f(3) = 4 \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(4) = 1$$

$$\therefore f(3) + (f \circ f)(3) = 5$$

$$\text{답 } 5$$

2 $f(-2)=3 \cdot (-2)+1=-5$, $g(2)=2 \cdot 2-1=3$ 이므로

$$\begin{aligned} & (g \circ f)(-2) + (f \circ g)(2) \\ &= g(f(-2)) + f(g(2)) \\ &= g(-5) + f(3) \\ &= \{-(-5)^2 + 2 \cdot (-5)\} + (3 \cdot 3 + 1) \\ &= -25 \end{aligned}$$

답 -25

3 $(g \circ f)(1)=g(f(1))=1$ 이고 $f(1)=0$ 이므로

$$g(0)=1$$

$(f \circ g)(2)=f(g(2))=1$ 이고 $g(2)=0$ 이므로

$$f(0)=1$$

두 함수 f, g 는 각각 일대일대응이므로

$$f(2)=2, g(1)=2 \quad \therefore f(2)+g(1)=4$$

답 4

4 $f(x)=ax+2$, $g(x)=4x-3$ 에서

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(4x-3)$$

$$=a(4x-3)+2$$

$$=4ax-3a+2$$

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+2)$$

$$=4(ax+2)-3$$

$$=4ax+5$$

$f \circ g = g \circ f$ 이므로 $4ax-3a+2=4ax+5$ 에서

$$-3a=3 \quad \therefore a=-1$$

따라서 $f(x)=-x+2$ 이므로

$$f(-1)=-(-1)+2=3$$

답 3

5 $g(2)=-2$ 에서 $2b+4=-2 \quad \therefore b=-3$

따라서 $f(x)=ax-1$, $g(x)=-3x+4$ 에서

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(-3x+4)$$

$$=a(-3x+4)-1$$

$$=-3ax+4a-1$$

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-1)$$

$$=-3(ax-1)+4$$

$$=-3ax+7$$

$f \circ g = g \circ f$ 이므로 $-3ax+4a-1=-3ax+7$ 에서

$$4a=8 \quad \therefore a=2$$

답 $a=2, b=-3$

6 $g(x)=ax+b$ ($a \neq 0$, a, b 는 상수)라 하면

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)$$

$$=2(ax+b)-3$$

$$=2ax+2b-3$$

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-3)$$

$$=a(2x-3)+b$$

$$=2ax-3a+b$$

$f \circ g = g \circ f$ 이므로 $2ax+2b-3=2ax-3a+b$ 에서

$$3a+b=3$$

..... ㉠

$g(2)=0$ 에서

$$2a+b=0$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-6$$

따라서 $g(x)=3x-6$ 이므로

$$g(4)=3 \cdot 4 - 6 = 6$$

답 6

다른 풀이 $f \circ g = g \circ f$ 이므로

$$f(g(x))=g(f(x))$$

위의 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(g(2))=g(f(2))$$

이때 $g(2)=0$, $f(2)=2 \cdot 2 - 3 = 1$ 이므로

$$f(0)=g(1)$$

$f(0)=2 \cdot 0 - 3 = -3$ 이므로

$$g(1)=-3$$

$g(x)=ax+b$ ($a \neq 0$, a, b 는 상수)라 하면 $g(2)=0$,

$g(1)=-3$ 이므로

$$2a+b=0, a+b=-3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-6$$

따라서 $g(x)=3x-6$ 이므로

$$g(4)=3 \cdot 4 - 6 = 6$$

7 $f\left(\frac{x+1}{3}\right)=2x+1$ 에서 $\frac{x+1}{3}=t$ 로 놓으면 $x=3t-1$ 이므로

$$f(t)=2(3t-1)+1=6t-1$$

$$\therefore f(x)=6x-1$$

답 $f(x)=6x-1$

8 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-1)$ 이고, $(g \circ f)(x)=x^2+1$ 이므로

$$g(2x-1)=x^2+1$$

$2x-1=t$ 로 놓으면 $x=\frac{t+1}{2}$ 이므로

$$g(t)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{5}{4}$$

$$\therefore g(1)=\frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{5}{4} = 2$$

답 2

다른 풀이 $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ 에서

$$g(2x-1) = x^2 + 1$$

$$2x-1=1 \text{에서 } x=1$$

$x=1$ 을 $g(2x-1) = x^2 + 1$ 에 대입하면

$$g(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} 9 \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(-x+2) \\ &= 3(-x+2) - 5 = -3x+1 \end{aligned}$$

$(h \circ g \circ f)(x) = g(x)$ 에서 $(h \circ (g \circ f))(x) = g(x)$ 이므로

$$h(-3x+1) = 3x-5$$

$-3x+1=t$ 로 놓으면 $x = -\frac{t-1}{3}$ 이므로

$$h(t) = 3 \cdot \left(-\frac{t-1}{3}\right) - 5 = -t-4$$

$$\therefore h(x) = -x-4 \quad \text{답 } h(x) = -x-4$$

$$\begin{aligned} 10 \quad f^1(x) &= f(x) = -x+1 \text{에서} \\ f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+1) \\ &= -(-x+1) + 1 = x \end{aligned}$$

따라서 $f^3(x) = f(x)$, $f^4(x) = f^2(x)$, ...이므로

$$f^{49}(x) = f(x) = -x+1$$

$$f^{50}(x) = f^2(x) = x$$

$$\therefore f^{49}(2) + f^{50}(2) = (-2+1) + 2 = 1$$

답 1

$$11 \quad f^1(x) = f(x) = \frac{x}{2} \text{에서}$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2^2}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2^2} = \frac{x}{2^3}$$

$\vdots$

$$\therefore f^n(x) = \frac{x}{2^n}$$

따라서 $f^{10}(x) = \frac{x}{2^{10}}$ 이므로 $f^{10}(a) = 2$ 에서

$$\frac{a}{2^{10}} = 2 \quad \therefore a = 2^{11}$$

답 ③

$$12 \quad f^1(1) = f(1) = 2$$

$$f^2(1) = f(f(1)) = f(2) = 3$$

$$f^3(1) = f(f^2(1)) = f(3) = 1$$

$$f^4(1) = f(f^3(1)) = f(1) = 2$$

$\vdots$

즉 $f^n(1)$ 의 값은 2, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

$$\text{이때 } 100 = 3 \cdot 33 + 1 \text{이므로 } f^{100}(1) = f(1) = 2$$

한편

$$f^1(2) = f(2) = 3$$

$$f^2(2) = f(f(2)) = f(3) = 1$$

$$f^3(2) = f(f^2(2)) = f(1) = 2$$

$$f^4(2) = f(f^3(2)) = f(2) = 3$$

$\vdots$

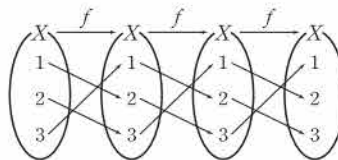
이므로 $f^n(2)$ 의 값은 3, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

$$\text{이때 } 200 = 3 \cdot 66 + 2 \text{이므로 } f^{200}(2) = f^2(2) = 1$$

$$\therefore f^{100}(1) + f^{200}(2) = 3$$

답 3

다른 풀이 f^1, f^2, f^3 의 대응 관계를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $f^3(x) = x$ 이므로

$$f^{100}(1) = f^{3 \cdot 33 + 1}(1) = f(1) = 2$$

$$f^{200}(2) = f^{3 \cdot 66 + 2}(2) = f^2(2) = 1$$

$$\therefore f^{100}(1) + f^{200}(2) = 3$$

02 역함수

확인

본책 176쪽

1 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 역함수가 존재하는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

$$2 \quad (1) f^{-1}(8) = 5$$

$$(2) (f^{-1})^{-1}(3) = f(3) = 2$$

$$(3) (f^{-1} \circ f)(7) = f^{-1}(f(7)) = f^{-1}(4) = 7$$

$$(4) (f \circ f^{-1})(6) = f(f^{-1}(6)) = f(1) = 6$$

답 (1) 5 (2) 2 (3) 7 (4) 6

3 (1) 함수 $y = -3x + 3$ 은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

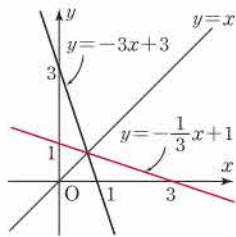
$y = -3x + 3$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$3x = -y + 3 \quad \therefore x = -\frac{1}{3}y + 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = -\frac{1}{3}x + 1$$

따라서 함수 $y = -3x + 3$ 의 역함수 $y = -\frac{1}{3}x + 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) 함수 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

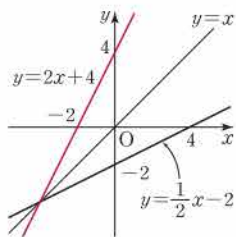
$y = \frac{1}{2}x - 2$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$\frac{1}{2}x = y + 2 \quad \therefore x = 2y + 4$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = 2x + 4$$

따라서 함수 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 의 역함수 $y = 2x + 4$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



㉔ 풀이 참조

유제

본책 179쪽

1 $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$f^{-1}(-1) = k$ 라 하면 $f(k) = -1$ 이므로

$$2k + 1 = -1 \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore f^{-1}(-1) = -1$$

$$\therefore f(3) + f^{-1}(-1) = 7 - 1 = 6$$

㉔ 6

2 $f^{-1}(4) = 3$ 에서 $f(3) = 4$ 이므로

$$3a + b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$(f \circ f)(3) = 7$ 에서 $f(f(3)) = f(4) = 7$ 이므로

$$4a + b = 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉔, ㉔을 연립하여 풀면

$$a = 3, b = -5$$

$$\therefore f(x) = 3x - 5$$

$f^{-1}(-2) = k$ 라 하면 $f(k) = -2$ 이므로

$$3k - 5 = -2 \quad \therefore k = 1$$

$$\therefore f^{-1}(-2) = 1$$

㉔ 1

3 $(g \circ f^{-1})(a) = g(f^{-1}(a)) = -2f^{-1}(a) + 5$ 이고,

$$(g \circ f^{-1})(a) = -1 \text{이므로}$$

$$-2f^{-1}(a) + 5 = -1, \quad -2f^{-1}(a) = -6$$

$$\therefore f^{-1}(a) = 3$$

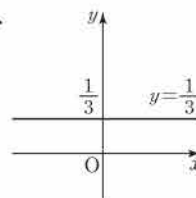
따라서 $f(3) = a$ 이므로

$$a = 3 \cdot 3 - 2 = 7$$

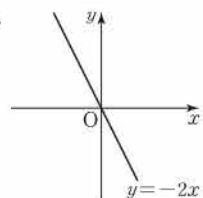
㉔ 7

4 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

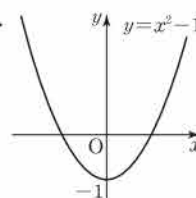
㉔.



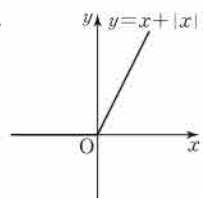
㉔.



㉔.



㉔.



이상에서 역함수가 존재하는 것은 ㉔뿐이다.

㉔ ㉔

5 함수 f 의 역함수가 존재하므로 함수 f 는 X 에서 Y 로의 일대일 대응이다.

직선 $y = f(x)$ 의 기울기가 음수이므로

$$f(3) = b, f(a) = -10$$

$f(x) = -3x + 2$ 이므로 $f(3) = b$ 에서

$$b = -3 \cdot 3 + 2 = -7$$

$f(a) = -10$ 에서

$$-3a + 2 = -10 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore a + b = -3$$

㉔ -3

6 함수 f 의 역함수가 존재하므로 함수 f 는 R 에서 R 로의 일대일 대응이다.

(i) $x \geq 1$ 일 때,

$$f(x) = x - 1 + kx = (k+1)x - 1$$

(ii) $x < 1$ 일 때,

$$f(x) = -(x-1) + kx = (k-1)x + 1$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 $x \geq 1$ 인 부분과 $x < 1$ 인 부분에서의 직선의 기울기가 같은 부호이어야 하므로

$$(k+1)(k-1) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 1$$

$$\text{㉔ } k < -1 \text{ 또는 } k > 1$$

7 $f(2)=4, g(4)=3$ 에서
 $f^{-1}(4)=2, g^{-1}(3)=4$
 $\therefore (g \circ f)^{-1}(3) = (f^{-1} \circ g^{-1})(3)$
 $= f^{-1}(g^{-1}(3))$
 $= f^{-1}(4)=2$

㉡ 2

8 $((f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f)(4) = (g^{-1} \circ f \circ f)(4)$
 $= g^{-1}(f(f(4)))$
 $= g^{-1}(f(-3))$
 $= g^{-1}(10)$

$g^{-1}(10)=k$ 라 하면 $g(k)=10$ 이므로

$3k-2=10 \quad \therefore k=4$

$\therefore ((f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f)(4) = g^{-1}(10)=4$

㉡ 4

9 $(f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(a) = (f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(a)$
 $= (f \circ g^{-1})(a)$
 $= f(g^{-1}(a))=9$

에서 $g^{-1}(a)=k$ 라 하면 $f(k)=9$ 이므로

$4k-7=9 \quad \therefore k=4$

$g^{-1}(a)=4$ 에서 $g(4)=a$ 이므로

$a = \frac{1}{2} \cdot 4 + 5 = 7$

㉡ 7

10 함수 $y = \frac{1}{3}x + 4$ 는 집합 $\{x|x \geq 3\}$ 에서 집합 $\{y|y \geq 5\}$ 로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = \frac{1}{3}x + 4$ 에서 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{3}x = y - 4 \quad \therefore x = 3y - 12$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y = 3x - 12 \quad (x \geq 5) \quad \Rightarrow y = 3x - 12 \quad (x \geq 5)$

11 $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x-3)$
 $= -(5x-3)+2 = -5x+5$

$y = -5x+5$ 로 놓고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$5x = -y + 5 \quad \therefore x = -\frac{1}{5}y + 1$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$y = -\frac{1}{5}x + 1$

$\therefore h^{-1}(x) = -\frac{1}{5}x + 1 \quad \Rightarrow h^{-1}(x) = -\frac{1}{5}x + 1$

12 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2x$ 에서 $\frac{x+1}{2} = t$ 로 놓으면 $x = 2t-1$ 이므로

$f(t) = 2(2t-1) = 4t-2$

$\therefore f(x) = 4x-2$

$y = 4x-2$ 로 놓고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$4x = y + 2 \quad \therefore x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

㉡ $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

13 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 그 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표와 같다.

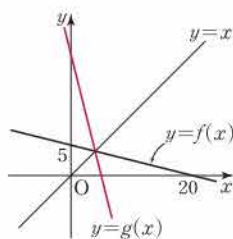
$-\frac{1}{4}x + 5 = x$ 에서 $\frac{5}{4}x = 5 \quad \therefore x = 4$

따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$ 이므로

$a = 4, b = 4$

$\therefore a + b = 8$

㉡ 8



14 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 교점의 좌표는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표와 같다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로

$5 \cdot (-1) + k = -1 \quad \therefore k = 4$

㉡ 4

15 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 그 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점 P, Q의 좌표는

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의

교점의 좌표와 같으므로 $\frac{1}{2}x^2 + 2x = x$ 에서

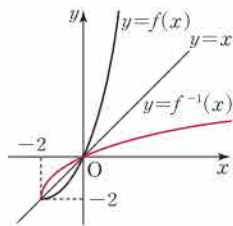
$x^2 + 2x = 0, \quad x(x+2) = 0$

$\therefore x = -2$ 또는 $x = 0$

즉 두 점 P, Q의 좌표는 $(-2, -2), (0, 0)$ 이므로

$PQ = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

㉡ $2\sqrt{2}$



개념썬라이트 보충학습

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

특히 원점 O 와 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

16 직선 $y=x$ 를 이용하여 y 축과 점선이 만나는 점의 y 좌표를 주어진 그림에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

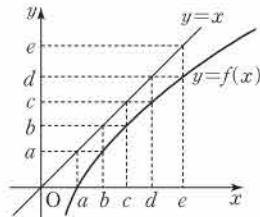
$f^{-1}(a)=k$ 라 하면 $f(k)=a$ 이므로

$$k=b$$

$f^{-1}(b)=l$ 이라 하면 $f(l)=b$ 이므로

$$l=c$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ f)^{-1}(a) &= f^{-1}(f^{-1}(a)) \\ &= f^{-1}(b) \\ &= c \end{aligned}$$



17 $f^{-1}(2)=k$, $f^{-1}(5)=l$ 이라 하면

$$f(k)=2, f(l)=5$$

이때 함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이므로

$$k=1, l=5 \text{ 또는 } k=5, l=1$$

$$\therefore f^{-1}(2)+f^{-1}(5)=k+l=6$$

중단원 연습 문제

본책 185쪽

- | | | | | |
|-------|------|----------------|-------|-------|
| 01 11 | 02 ⑤ | 03 9 | 04 21 | 05 9 |
| 06 ② | 07 ④ | 08 ② | 09 ② | 10 ③ |
| 11 10 | 12 ⑤ | 13 $3\sqrt{2}$ | 14 ③ | 15 13 |
| 16 6 | 17 ② | 18 ③ | 19 4 | 20 ④ |

01 [전범] 합성함수의 성질을 이용하여 함수값을 구한다.

[풀이] $g(1)=2 \cdot 1 - 4 = -2$, $f(-1)=(-1)^2 + 3 = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} (f \circ g)(1) + (g \circ f)(-1) &= f(g(1)) + g(f(-1)) \\ &= f(-2) + g(4) \\ &= \{(-2)^2 + 3\} + (2 \cdot 4 - 4) \\ &= 11 \end{aligned}$$

답 11

02 [전범] 주어진 $f(x)$ 에 대하여 $g(x)=(f \circ f \circ f)(x)$ 를 구한다.

[풀이] $f(x)=-3x+2$ 에서

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f(-3x+2) \\ &= -3(-3x+2)+2 \\ &= 9x-4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(x) &= f((f \circ f)(x)) \\ &= f(9x-4) \\ &= -3(9x-4)+2 \\ &= -27x+14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= (f \circ f \circ f)(x) \\ &= -27x+14 \end{aligned}$$

$g(a)=23$ 에서 $-27a+14=23$

$$-27a=9 \quad \therefore a=-\frac{1}{3}$$

답 ⑤

[다른 풀이] $g(a)=f(f(f(a)))=23$ 에서 $f(f(a))=b$ 라 하면

$f(b)=23$ 이므로

$$-3b+2=23 \quad \therefore b=-7$$

$f(f(a))=-7$ 에서 $f(a)=c$ 라 하면 $f(c)=-7$ 이므로

$$-3c+2=-7 \quad \therefore c=3$$

$f(a)=3$ 이므로

$$-3a+2=3 \quad \therefore a=-\frac{1}{3}$$

03 [전범] 합성함수 $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ 를 각각 구하여 동류항의 계수를 비교한다.

[풀이] $f(x)=2x+3$, $g(x)=4x+a$ 에서

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x+a) \\ &= 2(4x+a)+3 \\ &= 8x+2a+3 \end{aligned}$$

... ①

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x+3) \\ &= 4(2x+3)+a \\ &= 8x+12+a \end{aligned}$$

... ②

$f \circ g = g \circ f$ 이므로 $8x+2a+3=8x+12+a$ 에서

$$a=9$$

... ③

답 9

채점 기준	비율
① $(f \circ g)(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
② $(g \circ f)(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20%

04 **전략** $\frac{2x-1}{3}=t$ 로 놓고 $f(t)$ 를 구한다.

풀이 $f\left(\frac{2x-1}{3}\right)=5-4x$ 에서 $\frac{2x-1}{3}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{3t+1}{2}$

이므로 $f(t)=5-4\cdot\frac{3t+1}{2}=-6t+3$

$$\therefore f(x)=-6x+3$$

$$\therefore (f \circ f)(1)=f(f(1))=f(-3)$$

$$=-6 \cdot (-3)+3=21$$

답 21

05 **전략** 합성함수의 결합법칙을 이용하여 $(h \circ (g \circ f))(x)$ 를 $f(x)$ 로 나타낸다.

풀이 $(h \circ g)(x)=2x-3$ 이므로

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x))$$

$$=2f(x)-3$$

→ ①

또 $(h \circ (g \circ f))(x)=4x^2+2x-5$ 이므로

$$2f(x)-3=4x^2+2x-5$$

$$2f(x)=4x^2+2x-2$$

$$\therefore f(x)=2x^2+x-1$$

$$\therefore f(2)=2 \cdot 2^2+2-1=9$$

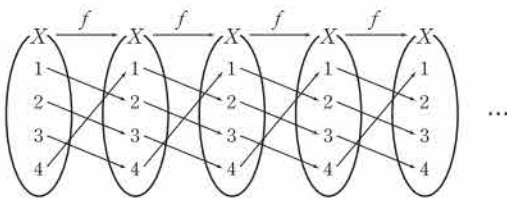
→ ②

답 9

채점 기준	비율
① $(h \circ (g \circ f))(x)$ 를 $f(x)$ 로 나타낼 수 있다.	40 %
② $f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %

06 **전략** $f^1, f^2, f^3, f^4, \dots$ 를 구하여 규칙성을 찾아 f^n 을 추론한다.

풀이 주어진 함수의 정의에 따라 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉 $f^4(x)=x$ 이므로

$$f^{99}(3)=f^{4 \cdot 24+3}(3)=f^3(3)=2$$

$$f^{100}(2)=f^{4 \cdot 25}(2)=2$$

$$\therefore f^{99}(3)+f^{100}(2)=4$$

답 ②

07 **전략** 합성함수와 역함수의 뜻을 이해한다.

풀이 $f^{-1}(2)=3$ 에서 $f(3)=2$

$$\therefore g(2)=g(f(3))=(g \circ f)(3)$$

$$=3 \cdot 3-1=8$$

답 ④

08 **전략** 함수 f 의 역함수가 존재하려면 함수 f 는 일대일대응이어야 한다.

풀이 함수 f 의 역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 $x < 1$ 인 부분과 $x \geq 1$ 인 부분에서의 직선의 기울기가 같은 부호이어야 하므로

$$(a+7)(-a+5) > 0, \quad (a+7)(a-5) < 0$$

$$\therefore -7 < a < 5$$

따라서 정수 a 는 $-6, -5, -4, \dots, 4$ 의 11개이다.

답 ②

09 **전략** $(f \circ g)^{-1}(a)=(g^{-1} \circ f^{-1})(a)$,

$(g \circ f)^{-1}(a)=(f^{-1} \circ g^{-1})(a)$ 임을 이용한다.

풀이 $(g \circ f)^{-1}(2)=(f^{-1} \circ g^{-1})(2)$

$$=f^{-1}(g^{-1}(2))$$

$$=f^{-1}(4)=4$$

$$(f \circ g)^{-1}(6)=(g^{-1} \circ f^{-1})(6)$$

$$=g^{-1}(f^{-1}(6))$$

$$=g^{-1}(1)=2$$

$$\therefore (g \circ f)^{-1}(2)+(f \circ g)^{-1}(6)=6$$

답 ②

10 **전략** 역함수와 합성함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

풀이 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)=(f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2)$

$$=(g^{-1} \circ f)(2)$$

$$=g^{-1}(f(2))$$

$$=g^{-1}(-4)$$

$g^{-1}(-4)=k$ 라 하면 $g(k)=-4$ 이므로

$$2k-4=-4, \quad 2k=0$$

$$\therefore k=0$$

$$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)=g^{-1}(-4)=0$$

답 ③

11 **전략** 먼저 $y=f(x)$ 를 구한 후 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.

풀이 $f(3x+3)=6x+1$ 에서 $3x+3=t$ 로 놓으면 $x=\frac{t-3}{3}$ 이므로

$$f(t)=6 \cdot \frac{t-3}{3}+1=2t-5$$

$$\therefore f(x)=2x-5$$

→ ①

$y=2x-5$ 로 놓고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$2x=y+5 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

→ ②

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$ 이므로

$$8ab = 10$$

→ ③

답 10

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $f^{-1}(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $8ab$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

12 전략 $f = f^{-1}$ 이면 $(f \circ f)(x) = x$ 임을 이용한다.

풀이 $f = f^{-1}$ 이므로 $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ 에서

$$(f \circ f)(x) = x$$

일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나므로

$$f(x) = a(x-1) + 5 = ax - a + 5 \quad (a \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수})$$

라 하면

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= af(x) - a + 5$$

$$= a(ax - a + 5) - a + 5$$

$$= a^2x - a^2 + 4a + 5$$

즉 $a^2x - a^2 + 4a + 5 = x$ 이므로

$$a^2 = 1, -a^2 + 4a + 5 = 0$$

$$a^2 = 1 \text{에서 } (a+1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 1$$

..... ㉠

$$-a^2 + 4a + 5 = 0 \text{에서 } (a+1)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 5$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -1$ 이므로

$$f(x) = -x + 6$$

$$\therefore f(-1) = -(-1) + 6 = 7$$

답 ⑤

다른 풀이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나므로 함수

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 점 $(5, 1)$ 을 지난다.

이때 두 함수 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치하므로

$y = f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(1, 5)$, $(5, 1)$ 을 지난다.

$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$, a, b 는 상수)라 하면

$$a + b = 5, 5a + b = 1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = 6$$

따라서 $f(x) = -x + 6$ 이므로

$$f(-1) = -(-1) + 6 = 7$$

13 전략 점 P는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점임을 이용한다.

풀이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역

함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선

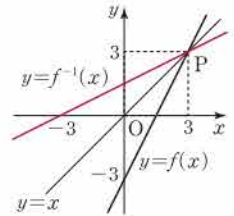
$y = x$ 에 대하여 대칭이므로 그 그래프

를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그

역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의

좌표는 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점의 좌표와 같다.



→ ①

$$2x - 3 = x \text{에서 } x = 3$$

따라서 P(3, 3)이므로

→ ②

$$OP = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

→ ③

답 $3\sqrt{2}$

채점 기준	비율
① $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점이 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점임을 알 수 있다.	40 %
② 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
③ OP의 길이를 구할 수 있다.	20 %

14 전략 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 (a, b) 를 지나면 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 점 (b, a) 를 지남을 이용한다.

풀이 직선 $y = x$ 를 이용하여 y 축과 점

선이 만나는 점의 y 좌표를 주어진 그

림에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$g(a) = b$ 이므로

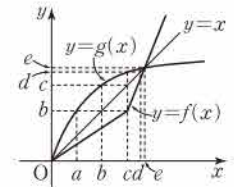
$$f^{-1}(g(a)) = f^{-1}(b)$$

$$f^{-1}(b) = k \text{라 하면 } f(k) = b$$

$$\text{이때 } f(c) = b \text{이므로 } k = c$$

$$\therefore f^{-1}(g(a)) = f^{-1}(b) = c$$

답 ③



15 전략 $f(1) = 4$ 일 때와 $f(1) = 6$ 일 때로 나누어 생각한다.

풀이 함수 f 가 일대일 대응이고, $f(2) = 5$ 이므로 $f(1)$ 의 값은 4 또는 6이다.

→ ①

(i) $f(1) = 4$ 일 때,

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(4) = 8 \neq 7$$

(ii) $f(1) = 6$ 일 때,

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(6) = 7$$

$$g(4) = 8, g(6) = 7 \text{이므로}$$

$$g(5) = 9$$

→ ②

(i), (ii)에서 $f(1) = 6$ 이고 $f(2) = 5$ 이므로

$$f(3) = 4$$

$$\therefore f(3) + g(5) = 13$$

→ ③

답 13

채점 기준	비율
① $f(1)$ 의 값이 4 또는 6임을 알 수 있다.	30 %
② $f(1), g(5)$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ $f(3)+g(5)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

16 전략 $f^n(50)$ 의 값을 $n=1, 2, 3, \dots$ 의 순서대로 구하여 $f^n(50)=1$ 이 되는 자연수 n 의 최솟값을 찾는다.

풀이 $f^{n+1}(x) = (f^n \circ f)(x) = (f \circ f^n)(x) = f(f^n(x))$ 이므로

$$f(50) = \frac{50}{2} = 25$$

$$f^2(50) = f(f(50)) = f(25) = \frac{25+1}{2} = 13$$

$$f^3(50) = f(f^2(50)) = f(13) = \frac{13+1}{2} = 7$$

$$f^4(50) = f(f^3(50)) = f(7) = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$f^5(50) = f(f^4(50)) = f(4) = \frac{4}{2} = 2$$

$$f^6(50) = f(f^5(50)) = f(2) = \frac{2}{2} = 1$$

:

따라서 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

답 6

17 전략 함수 f 의 역함수가 존재하면 함수 f 와 그 역함수 f^{-1} 는 모두 일대일대응임을 이용한다.

풀이 함수 f 의 역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.

$f(1)+2f(3)=12$ 이고 f 는 일대일대응이므로

$$f(1)=2, f(3)=5 \quad \dots\dots ①$$

$f^{-1}(1)-f^{-1}(3)=2$ 에서 $f^{-1}(1) \in X, f^{-1}(3) \in X$ 이므로

$$f^{-1}(1)=3, f^{-1}(3)=1$$

$$\text{또는 } f^{-1}(1)=4, f^{-1}(3)=2$$

$$\text{또는 } f^{-1}(1)=5, f^{-1}(3)=3$$

이때 ①에서 $f^{-1}(2)=1, f^{-1}(5)=3$ 이고 함수 f^{-1} 도 일대일대응이므로

$$f^{-1}(1)=4, f^{-1}(3)=2$$

$$\therefore f^{-1}(4)=5$$

$f^{-1}(1)=4$ 에서 $f(4)=1$ 이므로

$$f(4)+f^{-1}(4)=6$$

답 ②

18 전략 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재하고 $b=f(a)$ 이면 $a=f^{-1}(b)$ 임을 이용한다.

풀이 $f(-2)=k$ 라 하면 $f^{-1}(k)=-2$

$f(x)=f^{-1}(x)$ 이므로 $f(k)=-2$

$$-2x^2+1=-2 \text{에서 } x^2=\frac{3}{2}$$

$x^2=\frac{3}{2}$ 을 $f(x^2+1)=-2x^2+1$ 에 대입하면

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=-2$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이다.

따라서 $k=\frac{5}{2}$ 이므로 $f(-2)=\frac{5}{2}$

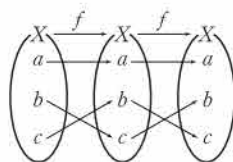
답 ③

19 전략 $f \circ f$ 가 항등함수가 되는 함수 f 의 개수를 구한다.

풀이 $f \circ f^{-1}$ 이므로 $f \circ f$ 가 항등함수인 함수 f 의 개수를 구하면 된다.

(i) $f(x)=x$ 인 함수는 1개

(ii) 오른쪽 그림과 같이 자기 자신에 대응되는 원소가 1개이고, 나머지 2개는 서로 엇갈려 대응되는 함수는 자기 자신에 대응되는 원소가 a, b, c 인 3가지 경우가 있으므로



3개

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$1+3=4$$

답 4

20 전략 세 함수 $y=x, y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 x 의 값을 구한다.

풀이 세 함수 $y=x, y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\{f(x)\}^2=f(x)f^{-1}(x)$ 에서

$$f(x)\{f(x)-f^{-1}(x)\}=0$$

$$\therefore f(x)=0$$

$$\text{또는 } f(x)=f^{-1}(x)$$

(i) $f(x)=0$ 일 때,

$y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 구하면 되므로 $x=1$

(ii) $f(x)=f^{-1}(x)$ 일 때,

두 함수 $y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표를 구하면 되므로

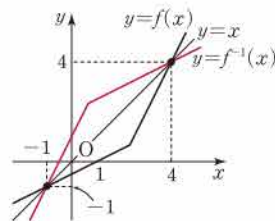
$$x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

(i), (ii)에서 $x=-1, 1, 4$

따라서 모든 실수 x 의 값의 합은

$$-1+1+4=4$$

답 ④



10 유리함수

01 유리식

확인

본책 190쪽

1 $\frac{1}{x-4}$, $\frac{1}{x-1}$

2 (1) $x^2-1=(x+1)(x-1)$

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

따라서 두 식을 통분하면

$$\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)(x-1)}, \frac{3(x+1)}{(x+2)(x+1)(x-1)}$$

(2) $\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x+4}{x-1}$

☞ 풀이 참조

3 (1) $\frac{5}{x-4} + 3 = \frac{5+3(x-4)}{x-4} = \frac{3x-7}{x-4}$

(2) $\frac{3x-1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)}$

$$= \frac{x(3x-1)-(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{3x^2-2x-1}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{(3x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{3x+1}{x(x+1)}$$

(3) $\frac{5}{x+3} \times \frac{x^2+3x}{x-2} = \frac{5}{x+3} \times \frac{x(x+3)}{x-2}$

$$= \frac{5x}{x-2}$$

(4) $\frac{x-4}{x+3} \div \frac{x^2-2x-8}{x-2} = \frac{x-4}{x+3} \div \frac{(x+2)(x-4)}{x-2}$

$$= \frac{x-4}{x+3} \times \frac{x-2}{(x+2)(x-4)}$$

$$= \frac{x-2}{(x+3)(x+2)}$$

☞ (1) $\frac{3x-7}{x-4}$ (2) $\frac{3x+1}{x(x+1)}$

(3) $\frac{5x}{x-2}$ (4) $\frac{x-2}{(x+3)(x+2)}$

4 $x=2k, y=3k (k \neq 0)$ 로 놓으면

$$\frac{x}{x-y} = \frac{2k}{2k-3k} = \frac{2k}{-k} = -2$$

유제

본책 193쪽

1 (1) $\frac{x+2}{x^2-2x-8} + \frac{x^2-x}{x^2-1}$

$$= \frac{x+2}{(x+2)(x-4)} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{x-4} + \frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)+x(x-4)}{(x+1)(x-4)}$$

$$= \frac{x^2-3x+1}{(x+1)(x-4)}$$

(2) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{x^2+1}$

$$= \frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1}$$

$$= \frac{2(x^2+1)-2(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$= \frac{4}{x^4-1}$$

(3) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-x-2} \times \frac{x-2}{x^2+4x+3}$

$$= \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-2)} \times \frac{x-2}{(x+3)(x+1)}$$

$$= \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

(4) $\frac{x-1}{x^2-4} \div \frac{x^2-4x+3}{x^2+3x+2} = \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} \div \frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x+1)}$

$$= \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} \times \frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$$

☞ (1) $\frac{x^2-3x+1}{(x+1)(x-4)}$ (2) $\frac{4}{x^4-1}$

(3) $\frac{x-1}{(x+1)^2}$ (4) $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$

2 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{x^2-2x}{x^3+1}$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{x^2-2x}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{(x^2-x+1)+(x+1)+(x^2-2x)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{2x^2-2x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{2}{x+1}$$

☞ $\frac{2}{x+1}$

3 주어진 식의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-5} = \frac{(x-5)+2(x-2)}{(x-2)(x-5)} = \frac{3x-9}{x^2-7x+10}$$

즉 $\frac{ax+b}{x^2-7x+10} = \frac{3x-9}{x^2-7x+10}$ 가 x 에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=3, b=-9$$

$$\text{☞ } a=3, b=-9$$

☞ -2

개념썬라이트 보충학습

항등식의 성질

- ① $ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식이다. $\Rightarrow a=b=c=0$
 ② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'y+c'0$ 이 x 에 대한 항등식이다.
 $\Rightarrow a=a', b=b', c=c'$
 ③ $ax+by+c=0$ 이 x, y 에 대한 항등식이다. $\Rightarrow a=b=c=0$
 ④ $ax+by+c=a'x+b'y+c'0$ 이 x, y 에 대한 항등식이다.
 $\Rightarrow a=a', b=b', c=c'$

4 주어진 식의 좌변을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned} & \frac{a}{x-1} - \frac{ax+b}{x^2+x+1} \\ &= \frac{a(x^2+x+1) - (ax+b)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(2a-b)x+a+b}{x^3-1} \\ &\approx \frac{(2a-b)x+a+b}{x^3-1} = \frac{5x+1}{x^3-1} \text{이 } x \text{에 대한 항등식이므로 양변} \end{aligned}$$

의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$2a-b=5, a+b=1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

$$\therefore a-b=3$$

답 3

5 주어진 식의 좌변을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned} & \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{a(x-1)^2 + bx(x-1) + cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-2a-b+c)x + a}{x(x-1)^2} \\ &\approx \frac{(a+b)x^2 + (-2a-b+c)x + a}{x(x-1)^2} = \frac{3}{x(x-1)^2} \text{이 } x \text{에 대한 항} \end{aligned}$$

등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a+b=0, -2a-b+c=0, a=3$$

$a=3$ 을 $a+b=0$ 에 대입하면 $b=-3$

$a=3, b=-3$ 을 $-2a-b+c=0$ 에 대입하면

$$-6+3+c=0 \quad \therefore c=3$$

$$\therefore abc=-27$$

답 -27

$$\begin{aligned} 6 \quad (1) \quad \frac{x-3}{x-4} - \frac{x+1}{x} &= \frac{(x-4)+1}{x-4} - \frac{x+1}{x} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x-4}\right) - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x-4)}{x(x-4)} \\ &= \frac{4}{x(x-4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{x^2+x-3}{x-1} - \frac{x^2+4x+5}{x+2} \\ &= \frac{(x-1)(x+2)-1}{x-1} - \frac{(x+2)^2+1}{x+2} \\ &= \left(x+2 - \frac{1}{x-1}\right) - \left(x+2 + \frac{1}{x+2}\right) \\ &= -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \\ &= -\frac{(x+2)+(x-1)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{-2x-1}{(x+2)(x-1)} \end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} \frac{4}{x(x-4)} \quad (2) \frac{-2x-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad \frac{x}{x-1} - \frac{x+3}{x+2} + \frac{x-2}{x-3} - \frac{x-5}{x-6} \\ &= \frac{(x-1)+1}{x-1} - \frac{(x+2)+1}{x+2} + \frac{(x-3)+1}{x-3} - \frac{(x-6)+1}{x-6} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) + \left(1 + \frac{1}{x-3}\right) - \left(1 + \frac{1}{x-6}\right) \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-6} \\ &= \frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)(x-1)} + \frac{(x-6)-(x-3)}{(x-3)(x-6)} \\ &= \frac{3}{(x+2)(x-1)} - \frac{3}{(x-3)(x-6)} \\ &= \frac{3(x-3)(x-6) - 3(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-3)(x-6)} \\ &= \frac{-30(x-2)}{(x+2)(x-1)(x-3)(x-6)} \\ &\text{답 } \frac{-30(x-2)}{(x+2)(x-1)(x-3)(x-6)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \quad \frac{x^2-2x+2}{x-1} - \frac{x^3}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(x-1)^2+1}{x-1} - \frac{(x-1)(x^2+x+1)+1}{x^2+x+1} \\ &= \left(x-1 + \frac{1}{x-1}\right) - \left(x-1 + \frac{1}{x^2+x+1}\right) \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(x^2+x+1)-(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{x^2+2}{x^3-1} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{x^2+2}{x^3-1} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3-1} \text{가 } x \text{에 대한 항등식이므로 양변의 분}$$

자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=1, b=0, c=2$$

$$\therefore a+b+c=3$$

답 3

$$\begin{aligned}
 9 \quad (1) & \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{1}{(x+1)-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \\
 & \quad + \frac{1}{(x+2)-(x+1)} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\
 & \quad + \frac{1}{(x+3)-(x+2)} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{(x+3)-x}{x(x+3)} \\
 &= \frac{3}{x(x+3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} \\
 &= \frac{1}{(x+2)-(x+1)} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\
 & \quad + \frac{2}{(x+4)-(x+2)} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\
 & \quad + \frac{4}{(x+8)-(x+4)} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+8} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+8} \right) \\
 &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+8} = \frac{(x+8)-(x+1)}{(x+1)(x+8)} \\
 &= \frac{7}{(x+1)(x+8)}
 \end{aligned}$$

(1) $\frac{3}{x(x+3)}$ (2) $\frac{7}{(x+1)(x+8)}$

$$\begin{aligned}
 10 & \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} \\
 &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} \\
 &= \frac{1}{(x+1)-(x-1)} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \\
 & \quad + \frac{1}{(x+3)-(x+1)} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) \\
 & \quad + \frac{1}{(x+5)-(x+3)} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+5)-(x-1)}{(x+5)(x-1)} \\
 &= \frac{3}{(x+5)(x-1)}
 \end{aligned}$$

(1) $\frac{3}{(x+5)(x-1)}$

$$11 \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 & f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}
 \end{aligned}$$

(1) $\frac{10}{11}$

$$\begin{aligned}
 12 \quad (1) & \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}}{\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)(x-1)}} = \frac{2}{2x} \\
 &= \frac{2(x+1)(x-1)}{2x(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & 1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3 - \frac{1}{x}}} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3x-1}{x}}} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{x}{3x-1}} \\
 &= 1 - \frac{1}{\frac{2(3x-1)+x}{3x-1}} = 1 - \frac{1}{\frac{7x-2}{3x-1}} \\
 &= 1 - \frac{3x-1}{7x-2} = \frac{(7x-2)-(3x-1)}{7x-2} \\
 &= \frac{4x-1}{7x-2}
 \end{aligned}$$

(1) $\frac{1}{x}$ (2) $\frac{4x-1}{7x-2}$

$$13 \quad x+y=3k, \quad y+z=4k, \quad z+x=5k \quad (k \neq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$$2(x+y+z)=12k \quad \therefore x+y+z=6k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 각각 대입하면

$$x=2k, \quad y=k, \quad z=3k$$

$$\therefore \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} = \frac{(2k)^3+k^3+(3k)^3}{2k \cdot k \cdot 3k} = \frac{36k^3}{6k^3} = 6$$

(1) 6

02 유리함수

확인

본책 198쪽

$$1 \quad (1) x+5=0 \text{에서} \quad x=-5$$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x \neq -5 \text{인 실수}\}$

$$(2) x^2-1=0 \text{에서} \quad x=\pm 1$$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x \neq \pm 1 \text{인 실수}\}$

$$(3) x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로 주어진 함수의 정의역은}$$

$\{x|x \text{는 실수}\}$

(1) $\{x|x \neq -5 \text{인 실수}\}$ (2) $\{x|x \neq \pm 1 \text{인 실수}\}$

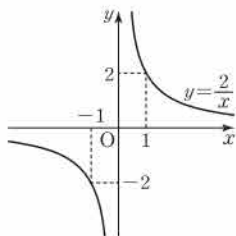
(3) $\{x|x \text{는 실수}\}$

2 (1) $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프는 오른쪽 그

림과 같고

정의역: $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$,

치역: $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$

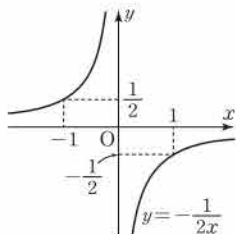


(2) $y = -\frac{1}{2x}$ 의 그래프는 오른쪽 그

림과 같고

정의역: $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$,

치역: $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$

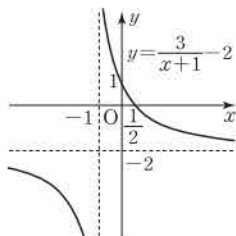


(3) $y = \frac{3}{x+1} - 2$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$

의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역: $\{x|x \neq -1 \text{인 실수}\}$,

치역: $\{y|y \neq -2 \text{인 실수}\}$

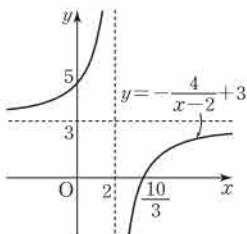


(4) $y = -\frac{4}{x-2} + 3$ 의 그래프는

$y = -\frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역: $\{x|x \neq 2 \text{인 실수}\}$,

치역: $\{y|y \neq 3 \text{인 실수}\}$



☐ 풀이 참조

유제

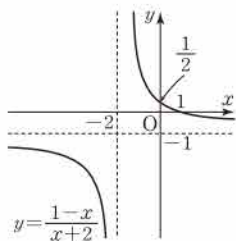
본책 200쪽

1 (1) $y = \frac{1-x}{x+2} = \frac{-(x+2)+3}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1$

이므로 주어진 함수의 그래프는

$y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은



$\{x|x \neq -2 \text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y|y \neq -1 \text{인 실수}\}$, 점근선의 방정식은 $x = -2$, $y = -1$ 이다.

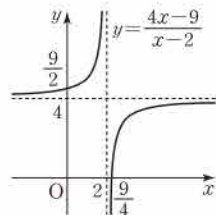
(2) $y = \frac{4x-9}{x-2} = \frac{4(x-2)-1}{x-2} = -\frac{1}{x-2} + 4$

이므로 주어진 함수의 그래프는

$y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같

고, 정의역은 $\{x|x \neq 2 \text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y|y \neq 4 \text{인 실수}\}$, 점근선의 방정식은 $x = 2$, $y = 4$ 이다.



☐ 풀이 참조

2 $y = \frac{4x-4}{2x+1} = \frac{4(x+\frac{1}{2})-6}{2(x+\frac{1}{2})} = -\frac{3}{x+\frac{1}{2}} + 2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = 2, k = -3$

☐ $a = -\frac{1}{2}, b = 2, k = -3$

3 $\neg. y = \frac{-x-1}{x+3} = \frac{-(x+3)+2}{x+3} = \frac{2}{x+3} - 1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

$\neg. y = \frac{x+1}{x+3} = \frac{(x+3)-2}{x+3} = -\frac{2}{x+3} + 1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

$\neg. y = \frac{2x-4}{x-3} = \frac{2(x-3)+2}{x-3} = \frac{2}{x-3} + 2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

$\neg. y = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동하여 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

☐ $\neg$, $\neg$, $\neg$

$$4 \quad y = \frac{-x-5}{x+3} = \frac{-(x+3)-2}{x+3} = -\frac{2}{x+3} - 1$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

$$x = -5 \text{ 일 때 } y = \frac{5-5}{-5+3} = 0,$$

$$x = -1 \text{ 일 때 } y = \frac{1-5}{-1+3} = -2$$

이므로 정의역이

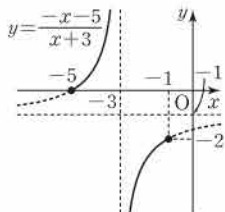
$$\{x \mid -5 \leq x < -3 \text{ 또는 } -3 < x \leq -1\}$$

일 때 $y = \frac{-x-5}{x+3}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은

$$\{y \mid y \leq -2 \text{ 또는 } y \geq 0\}$$

$$\text{답 } \{y \mid y \leq -2 \text{ 또는 } y \geq 0\}$$



$$5 \quad y = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2$$

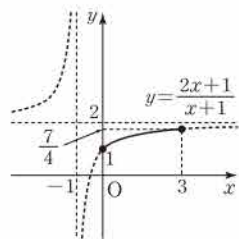
이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = \frac{2x+1}{x+1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$x = 3 \text{ 일 때 최댓값 } \frac{7}{4},$$

$$x = 0 \text{ 일 때 최솟값 } 1$$

을 갖는다.



$$\text{답 최댓값: } \frac{7}{4}, \text{ 최솟값: } 1$$

$$6 \quad y = \frac{2x+a}{x-1} = \frac{2(x-1)+a+2}{x-1} = \frac{a+2}{x-1} + 2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{a+2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a+2 > 0$ 이므로 $y = \frac{2x+a}{x-1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

$$x = 2 \text{ 일 때 최댓값 } 4+a,$$

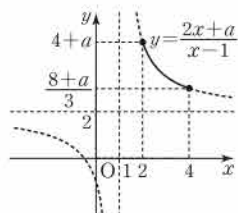
$$x = 4 \text{ 일 때 최솟값 } \frac{8+a}{3}$$

를 갖는다.

$$\text{즉 } \frac{8+a}{3} = 3 \text{ 이므로}$$

$$8+a=9 \quad \therefore a=1$$

따라서 구하는 최댓값은 $4+1=5$



답 5

7 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=-2$ 이므로

$$a=-4, c=-2$$

함수 $y = \frac{b}{x-4} - 2$ 의 그래프가 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = \frac{b}{0-4} - 2 \quad \therefore b=4$$

$$\therefore abc=32$$

답 32

8 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=1$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x+3} + 1 \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

로 놓을 수 있다. ㉠의 그래프가 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{k}{2+3} + 1 \quad \therefore k=5$$

$k=5$ 를 ㉠에 대입하면

$$y = \frac{5}{x+3} + 1 = \frac{5+(x+3)}{x+3} = \frac{x+8}{x+3}$$

$$\therefore a=1, b=8, c=3$$

$$\text{답 } a=1, b=8, c=3$$

$$\text{다른 풀이 } y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$$

$$= \frac{-ac+b}{x+c} + a \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이므로 ㉡의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-c, y=a$$

$$\therefore a=1, c=3$$

$$\dots\dots \text{㉢}$$

또 ㉡의 그래프가 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{2a+b}{2+c} \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉢을 ㉣에 대입하면 $b=8$

$$9 \quad y = \frac{3x+5}{x+1} = \frac{3(x+1)+2}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 3$$

이므로 $y = \frac{3x+5}{x+1}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-1, y=3$$

이때 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=x+k$ 에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+k$ 는 점근선의 교점 $(-1, 3)$ 을 지난다.

$$\text{즉 } 3 = -1+k \text{ 이므로 } k=4$$

답 4

10 주어진 함수의 그래프가 점 $(3, 2)$ 에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$$x=3, y=2$$

따라서 주어진 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-3} + 2 \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots \text{㉤}$$

로 놓으면 ⑦의 그래프가 점 (1, 3)을 지나므로

$$3 = \frac{k}{1-3} + 2 \quad \therefore k = -2$$

$k = -2$ 를 ①에 대입하면

$$y = \frac{-2}{x-3} + 2 = \frac{-2+2(x-3)}{x-3} = \frac{2x-8}{x-3}$$

$$\therefore a=2, b=-8, c=-3 \quad \text{답 } a=2, b=-8, c=-3$$

$$11 \quad y = \frac{5x+4}{x+1} = \frac{5(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 5$$

이므로 $y = \frac{5x+4}{x+1}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -1, y = 5$$

따라서 두 직선 $y = -x + a, y = x + b$ 가 점근선의 교점 $(-1, 5)$ 를 지나므로

$$5 = 1 + a, 5 = -1 + b$$

$$\therefore a=4, b=6 \quad \text{답 } a=4, b=6$$

12 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ 에서 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

$f(x) = \frac{5x-1}{x+2}$ 에서 $y = \frac{5x-1}{x+2}$ 로 놓으면

$$y(x+2) = 5x-1, \quad (y-5)x = -2y-1$$

$$\therefore x = \frac{-2y-1}{y-5}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{-2x-1}{x-5}$

$$\therefore g(x) = \frac{-2x-1}{x-5} \quad \text{답 } g(x) = \frac{-2x-1}{x-5}$$

13 $f(x) = \frac{4x-3}{x+a}$ 에서 $y = \frac{4x-3}{x+a}$ 으로 놓으면

$$y(x+a) = 4x-3, \quad (y-4)x = -ay-3$$

$$\therefore x = \frac{-ay-3}{y-4}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{-ax-3}{x-4}$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-ax-3}{x-4}$$

$f = f^{-1}$ 이므로 $\frac{4x-3}{x+a} = \frac{-ax-3}{x-4}$

$$\therefore a = -4$$

답 -4

다른 풀이 $f = f^{-1}$ 에서 $f \circ f = I$ (항등함수)이므로

$$(f \circ f)(x) = x \quad (\text{단, } x \neq -a, f(x) \neq -a)$$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \frac{4 \cdot f(x) - 3}{f(x) + a} = \frac{4 \cdot \frac{4x-3}{x+a} - 3}{\frac{4x-3}{x+a} + a} \\ &= \frac{13x-3a-12}{(a+4)x+a^2-3} = x \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 13x-3a-12 = (a+4)x^2 + (a^2-3)x$$

$$\therefore (a+4)x^2 + (a^2-16)x + 3a+12 = 0$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a+4=0, a^2-16=0, 3a+12=0$$

$$\therefore a = -4$$

14 $y = \frac{ax-7}{x+b}$ 의 그래프가 점 (2, 1)을 지나므로

$$1 = \frac{2a-7}{2+b}, \quad 2+b = 2a-7$$

$$\therefore 2a-b = 9 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 $y = \frac{ax-7}{x+b}$ 의 역함수의 그래프가 점 (2, 1)을 지나므로

$y = \frac{ax-7}{x+b}$ 의 그래프는 점 (1, 2)를 지난다.

$$\text{즉 } 2 = \frac{a-7}{1+b} \text{이므로 } 2+2b = a-7$$

$$\therefore a-2b = 9 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-3 \quad \text{답 } a=3, b=-3$$

중단원 연습 문제

본책 205쪽

01 0	02 ②	03 1	04 x^2	05 ③
06 1	07 ①	08 $a=-1, b=-5$	09 13	
10 30	11 3	12 ⑤	13 ③	14 148
15 ④	16 7	17 ⑤	18 ②	19 8

01 **전략** 분모를 통분하여 계산한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad & \frac{a}{(a-b)(c-a)} + \frac{b}{(a-b)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(b-c)} \\ &= \frac{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{ab-ac+bc-ab+ac-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 0

02 **전략** $\frac{A}{C} \div \frac{B}{D} = \frac{A}{C} \times \frac{D}{B} = \frac{A \times D}{C \times B}$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad & \frac{a^2-4a}{a^2+2a-3} \times \frac{a^2+5a+6}{a+1} \div \frac{a^2-2a-8}{a-1} \\ &= \frac{a(a-4)}{(a+3)(a-1)} \times \frac{(a+3)(a+2)}{a+1} \times \frac{a-1}{(a+2)(a-4)} \\ &= \frac{a}{a+1} \end{aligned}$$

답 ②

03 전략 좌변의 분모를 통분한 후 분자의 동류항의 계수를 비교한다.

풀이 주어진 식의 좌변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{2x+3} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b(2x+3)}{(2x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{(a+2b)x-a+3b}{2x^2+x-3} \quad \dots ①$$

즉 $\frac{(a+2b)x-a+3b}{2x^2+x-3} = \frac{7x+3}{2x^2+x-3}$ 이 x 에 대한 항등식이므로

양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a+2b=7, -a+3b=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=2 \quad \dots ②$

$$\therefore a-b=1 \quad \dots ③$$

답 1

채점 기준	비율
① 주어진 식의 좌변을 통분하여 정리할 수 있다.	50 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

04 전략 $\frac{1}{A} = \frac{B}{A}$ 임을 이용하여 유리식을 간단히 한다.

풀이 $\frac{x - \frac{x}{x+1}}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{\frac{x(x+1)-x}{x+1}}{1 - \frac{1}{\frac{x+1}{x}}} = \frac{\frac{x^2}{x+1}}{1 - \frac{x}{x+1}}$

$$= \frac{\frac{x^2}{x+1}}{\frac{(x+1)-x}{x+1}} = \frac{\frac{x^2}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}$$

$$= \frac{(x+1)x^2}{x+1} = x^2 \quad \text{답 } x^2$$

05 전략 함수 $y = \frac{k}{x-2} - 1$ 의 그래프를 그려 본다.

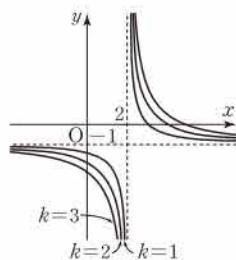
풀이 $\therefore y = \frac{k}{x-2} - 1$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=2, y=-1$$

$\therefore k > 0$ 이므로 $y = \frac{k}{x-2} - 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.

$\therefore k$ 의 값이 커질수록 그래프가 점 $(2, -1)$ 에서 멀어지므로 그래프와 y 축의 교점의 y 좌표는 작아진다.

이상에서 옳은 것은 $\neg, \text{ㄷ}$ 이다.



답 ③

06 전략 $y = \frac{-2x+5}{x-2}$ 를 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y = \frac{-2x+5}{x-2} = \frac{-2(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 2 \quad \dots ①$

$y = \frac{1}{x+3} + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{1}{x+3-m} + 2+n \quad \dots ②$$

이것이 $y = \frac{1}{x-2} - 2$ 와 일치하므로

$$3-m=-2, 2+n=-2 \quad \therefore m=5, n=-4 \quad \dots ③$$

$$\therefore m+n=1 \quad \dots ④$$

답 1

채점 기준	비율
① $y = \frac{-2x+5}{x-2}$ 를 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 꼴로 변형할 수 있다.	30 %
② $y = \frac{1}{x+3} + 2$ 의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30 %
③ m, n 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $m+n$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

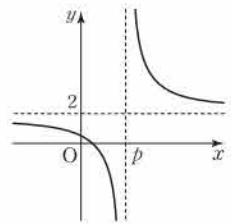
07 전략 조건을 만족시키도록 $y = \frac{5}{x-p} + 2$ 의 그래프를 그려 본다.

풀이 $p \leq 0$ 이면 주어진 함수의 그래프는 p 의 값에 관계없이 항상 제3사분면을 지나므로 $p > 0$

$y = \frac{5}{x-p} + 2$ 의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$ 에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로

$$\frac{5}{0-p} + 2 \geq 0 \quad \therefore p \geq \frac{5}{2}$$

따라서 정수 p 의 최솟값은 3이다.



답 ①

08 전략 함수의 그래프를 그린 후 주어진 범위에서 최댓값, 최솟값을 구한다.

풀이 $y = \frac{4x+b}{x-2} = \frac{4(x-2)+8+b}{x-2} = \frac{b+8}{x-2} + 4$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{b+8}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

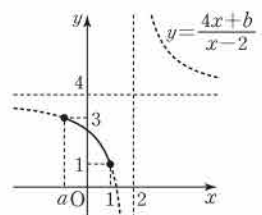
이때 $b+8 > 0$ 이므로 $y = \frac{4x+b}{x-2}$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같고,

$x=a$ 일 때 최댓값 3,

$x=1$ 일 때 최솟값 1

을 갖는다.



$$\text{즉 } \frac{4a+b}{a-2}=3, \frac{4+b}{-1}=1 \text{ 이므로}$$

$$a=-1, b=-5$$

$$\text{답 } a=-1, b=-5$$

09 전략 $y=\frac{k}{x-p}+q$ ($k \neq 0$)의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$ 임을 이용한다.

$$\text{풀이 } y=\frac{ax+b}{x-2}=\frac{a(x-2)+2a+b}{x-2}=\frac{2a+b}{x-2}+a$$

이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=2, y=a \quad \therefore a=6$$

또 $y=\frac{6x+b}{x-2}$ 의 그래프가 점 (1, 1)을 지나므로

$$1=\frac{6+b}{1-2} \quad \therefore b=-7$$

$$\therefore a-b=13$$

답 13

10 전략 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점과 이 점을 지나고 기울기가 ± 1 인 두 직선에 대하여 각각 대칭이다.

$$\text{풀이 } y=\frac{-3x+7}{x-2}=\frac{-3(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}-3$$

이므로 이 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 (2, -3)에 대하여 대칭이다.

$$\therefore a=2, b=-3$$

→ ①

또 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=x+c$ 에 대하여 대칭이므로 직선 $y=x+c$ 는 점 (2, -3)을 지난다.

$$\text{즉 } -3=2+c \text{ 이므로 } c=-5$$

→ ②

$$\therefore abc=30$$

→ ③

답 30

채점 기준	비율
① a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
② c의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ abc의 값을 구할 수 있다.	10 %

11 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수임을 이용한다.

$$\text{풀이 } y=\frac{x-1}{x+2} \text{의 그래프와 직선 } y=kx+1 \text{이 한 점에서 만나므로}$$

$$\frac{x-1}{x+2}=kx+1 \text{에서}$$

$$x-1=(kx+1)(x+2)$$

$$x-1=kx^2+(1+2k)x+2$$

$$\therefore kx^2+2kx+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-3k=0$$

$$k(k-3)=0 \quad \therefore k=3 (\because k>0)$$

답 3

개념블라이트 보충학습

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D라 할 때

① $D>0 \iff$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=0 \iff$ 중근을 갖는다.

③ $D<0 \iff$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

12 전략 $f^{-1}(x)$ 를 구한 후 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표를 구한다.

$$\text{풀이 } f(x)=\frac{2x+5}{x+3} \text{에서 } y=\frac{2x+5}{x+3} \text{로 놓으면}$$

$$y(x+3)=2x+5, \quad (y-2)x=-3y+5$$

$$\therefore x=\frac{-3y+5}{y-2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y=\frac{-3x+5}{x-2}$$

$$\begin{aligned} \therefore f^{-1}(x) &= \frac{-3x+5}{x-2} \\ &= \frac{-3(x-2)-1}{x-2} \\ &= -\frac{1}{x-2}-3 \end{aligned}$$

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-3$ 이므로 그래프는 점 (2, -3)에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=2$, $q=-3$ 이므로

$$p-q=5$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} \text{다른 풀이 } f(x) &= \frac{2x+5}{x+3} = \frac{2(x+3)-1}{x+3} \\ &= -\frac{1}{x+3}+2 \end{aligned}$$

$y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=2$ 이므로 그래프는 점 (-3, 2)에 대하여 대칭이다.

한편 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 점 (2, -3)에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=2$, $q=-3$ 이므로

$$p-q=5$$

13 전략 $(g \circ f^{-1})^{-1}(a)=(f \circ g^{-1})(a)$ 임을 이용한다.

$$\text{풀이 } (g \circ f^{-1})^{-1}(3)=(f \circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))$$

$$g^{-1}(3)=k \text{라 하면 } g(k)=3 \text{이므로}$$

$$\frac{2k-3}{k}=3, \quad 2k-3=3k$$

$$\therefore k=-3$$

따라서 $g^{-1}(3)=-3$ 이므로

$$(g \circ f^{-1})^{-1}(3) = f(g^{-1}(3)) = f(-3) \\ = \frac{3 \cdot (-3) + 1}{-3} = \frac{8}{3}$$

답 ③

14 전략 $\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ ($A \neq B$)임을 이용하여 $\frac{1}{f(x)}$ 을 부분분수로 변형한다.

풀이 $f(x) = 4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1)$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} \\ = \frac{1}{(2x+1)-(2x-1)} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) \\ \therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \dots + \frac{1}{f(49)} \\ = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right) \right] \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{99} \right) = \frac{49}{99}$$

따라서 $p=99$, $q=49$ 이므로

$$p+q=148$$

답 148

15 전략 먼저 세 점 A, B, C의 좌표를 k 에 대한 식으로 나타낸 후 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 이용한다.

풀이 $y=0$ 을 $y=\frac{k}{x-2}+1$ 에 대입하면

$$0 = \frac{k}{x-2} + 1, \quad x-2 = -k \\ \therefore x=2-k \quad \therefore A(2-k, 0)$$

$x=0$ 을 $y=\frac{k}{x-2}+1$ 에 대입하면

$$y = -\frac{k}{2} + 1 \quad \therefore B\left(0, -\frac{k}{2} + 1\right)$$

$y=\frac{k}{x-2}+1$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$ 이므로 $C(2, 1)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 서로 같아야 하므로

$$\frac{1}{2-(2-k)} = \frac{1-\left(-\frac{k}{2}+1\right)}{2} \\ \frac{1}{k} = \frac{k}{4}, \quad k^2=4 \\ \therefore k=-2 \quad (\because k < 0)$$

답 ④

다른 풀이 $y=\frac{k}{x-2}+1$ 의 그래프의 두 점근선의 교점 C를 지나 는 직선이 $y=\frac{k}{x-2}+1$ 의 그래프 위의 두 점 A, B를 지나려면 두 점 A, B는 점 C에 대하여 대칭이어야 한다.

$y=\frac{k}{x-2}+1$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$ 이므로 $C(2, 1)$

$A(a, 0)$, $B(0, b)$ 라 하면 점 C가 선분 AB의 중점이므로

$$\frac{a+0}{2} = 2, \quad \frac{0+b}{2} = 1$$

$$\therefore a=4, b=2$$

따라서 $y=\frac{k}{x-2}+1$ 의 그래프가 점 $A(4, 0)$ 을 지나므로

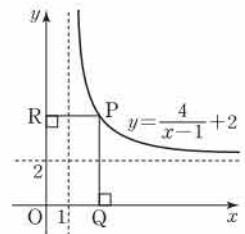
$$0 = \frac{k}{4-2} + 1 \quad \therefore k = -2$$

개념블라이트 보충학습

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ ($k \neq 0$)의 그래프는 두 점근선의 교점 (p, q) 에 대하여 대칭이므로 점 (p, q) 를 지나는 직선이 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나면 두 교점은 점 (p, q) 에 대하여 대칭이다.

16 전략 $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ 의 길이를 점 P의 x 좌표에 대한 식으로 나타낸 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $x>0$ 에서 정의된 함수 $y=\frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수 $y=\frac{4}{x-1}+2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



점 P의 좌표를 $\left(t, \frac{4}{t-1}+2\right)$ ($t>1$)라 하면

$$\overline{PQ} = \frac{4}{t-1} + 2, \quad \overline{PR} = t \quad \dots ②$$

이때 $t>1$ 에서 $t-1>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PQ} + \overline{PR} = \frac{4}{t-1} + 2 + t \\ = t - 1 + \frac{4}{t-1} + 3 \\ \geq 2\sqrt{(t-1) \cdot \frac{4}{t-1}} + 3 \\ = 2 \cdot 2 + 3 = 7 \quad (\text{단, 등호는 } t=3 \text{ 일 때 성립})$$

따라서 $\overline{PQ} + \overline{PR}$ 의 최솟값은 7이다.

③

답 7

채점 기준	비율
① 평행이동한 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
② $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ 의 길이를 한 문자에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ $\overline{PQ} + \overline{PR}$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

개념썬라이트 보충학습

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

17 전략 먼저 $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 사각형 OBCA의 모양을 파악한다.

풀이 $a > 1$ 이므로 $y = \frac{4}{x-a} - 4$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$y = 0$ 을 $y = \frac{4}{x-a} - 4$ 에 대입하면

$$0 = \frac{4}{x-a} - 4$$

$$x - a = 1 \quad \therefore x = a + 1$$

$$\therefore A(a+1, 0)$$

$x = 0$ 을 $y = \frac{4}{x-a} - 4$ 에 대입하면

$$y = -\frac{4}{a} - 4 \quad \therefore B(0, -\frac{4}{a} - 4)$$

$y = \frac{4}{x-a} - 4$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x = a, y = -4$ 이므로

$$C(a, -4)$$

이때 사각형 OBCA의 넓이가 24이고,

$\square OBCA = \triangle OCA + \triangle OBC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot (a+1) \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{a} + 4\right) \cdot a = 24$$

$$4a + 4 = 24 \quad \therefore a = 5$$

답 ⑤

18 전략 $f^1(x), f^2(x), f^3(x), \dots$ 를 구하여 규칙을 찾아 $f^n(x)$ 를 추정한다.

풀이 $f^1(x) = f(x) = \frac{x}{1-x}$ 에 대하여

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x-x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$$

$$f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = f\left(\frac{x}{1-2x}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{1-2x}}{1 - \frac{x}{1-2x}} = \frac{\frac{x}{1-2x}}{\frac{1-2x-x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$$

$\vdots$

$$\therefore f^n(x) = \frac{x}{1-nx}$$

따라서 $f^{20}(x) = \frac{x}{1-20x}$ 이므로

$$a = 1, b = 0, c = -20$$

$$\therefore a + b + c = -19$$

답 ②

19 전략 평행이동한 그래프의 식과 역함수 $f^{-1}(x)$ 를 구한 후 두 식이 일치함을 이용한다.

$$\text{풀이 } f(x) = \frac{x+5}{x-3} = \frac{(x-3)+8}{x-3} = \frac{8}{x-3} + 1$$

$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{8}{x-3-a} + 1 + b \quad \dots\dots ㉠ \quad \rightarrow ①$$

$$y = \frac{x+5}{x-3} \text{로 놓으면 } y(x-3) = x+5$$

$$(y-1)x = 3y+5 \quad \therefore x = \frac{3y+5}{y-1}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{3x+5}{x-1}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{x-1}$$

$$= \frac{3(x-1)+8}{x-1}$$

$$= \frac{8}{x-1} + 3 \quad \dots\dots ㉡ \quad \rightarrow ②$$

㉠, ㉡의 그래프가 일치하므로

$$-3-a = -1, 1+b = 3$$

$$\therefore a = -2, b = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8 \quad \dots\dots ③ \quad \rightarrow ③$$

답 8

채점 기준	비율
① $y = f(x)$ 의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30 %
② $f^{-1}(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %
③ $a^2 + b^2$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

11 무리함수

01 무리식

확인

본책 210쪽

1 (1) $x-2 \geq 0, x+3 \geq 0$ 이므로
 $x \geq 2, x \geq -3 \quad \therefore x \geq 2$

(2) $x-1 \geq 0, 5-x > 0$ 이므로
 $x \geq 1, x < 5 \quad \therefore 1 \leq x < 5$

답 (1) $x \geq 2$ (2) $1 \leq x < 5$

2 (1) $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})$
 $= (\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2$
 $= x+1 - (x-1) = 2$

(2) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} = \frac{2\sqrt{x}}{x-4}$

답 (1) 2 (2) $\frac{2\sqrt{x}}{x-4}$

유제

본책 211쪽

1 (1) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$
 $= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}$
 $= \frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)}{x^2-(x^2-1)}$
 $= \frac{2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}{1}$

(2) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
 $= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$
 $= \frac{x+2\sqrt{xy}+y+x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}$
 $= \frac{2x+2y}{x-y}$

답 (1) $2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}$ (2) $\frac{2x+2y}{x-y}$

2 $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$
 $= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$
 $= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{x+1-(x+2)}$
 $= \sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}} &= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{x+2-(x+3)} \\ &= \sqrt{x+3}-\sqrt{x+2} \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}} \\ &= (\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}) + (\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}) \\ &= \sqrt{x+3}-\sqrt{x+1} \quad \text{답 } \sqrt{x+3}-\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$
 $= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x-(x-1)} = \sqrt{x}-\sqrt{x-1}$
 $\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(16)$
 $= (1-0) + (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{16}-\sqrt{15})$
 $= \sqrt{16} = 4$ 답 4

4 $x+y=2\sqrt{3}, x-y=2\sqrt{2}$ 이므로
 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$
 $= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$
 $= \frac{x-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+y}{x-y}$
 $= \frac{x+y}{x-y} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

5 $x=-1+\sqrt{3}$ 에서 $x+1=\sqrt{3}$
 위의 식의 양변을 제곱하면 $x^2+2x+1=3$
 따라서 $x^2+2x-2=0$ 이므로
 $x^3+2x^2-2x+1 = x(x^2+2x-2)+1$
 $= x \cdot 0 + 1 = 1$ 답 1

02 무리함수

확인

본책 213쪽

1 (1) $x+1 \geq 0$ 에서 $x \geq -1$
 따라서 주어진 무리함수의 정의역은
 $\{x | x \geq -1\}$

(2) $2(3-x) \geq 0$ 에서 $x \leq 3$

따라서 주어진 무리함수의 정의역은

$$\{x | x \leq 3\}$$

(3) $4x-5 \geq 0$ 에서 $x \geq \frac{5}{4}$

따라서 주어진 무리함수의 정의역은

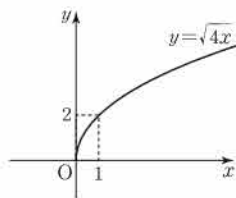
$$\{x | x \geq \frac{5}{4}\}$$

㉠ (1) $\{x | x \geq -1\}$ (2) $\{x | x \leq 3\}$ (3) $\{x | x \geq \frac{5}{4}\}$

2 (1) $y = \sqrt{4x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역: $\{x | x \geq 0\}$,

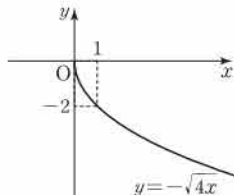
치역: $\{y | y \geq 0\}$



(2) $y = -\sqrt{4x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

정의역: $\{x | x \geq 0\}$,

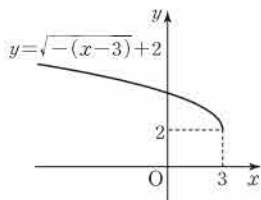
치역: $\{y | y \leq 0\}$



(3) $y = \sqrt{-(x-3)} + 2$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

정의역: $\{x | x \leq 3\}$,

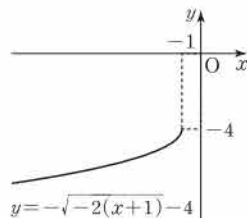
치역: $\{y | y \geq 2\}$



(4) $y = -\sqrt{-2(x+1)} - 4$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

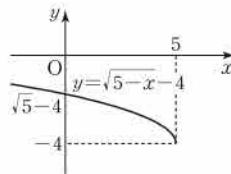
정의역: $\{x | x \leq -1\}$,

치역: $\{y | y \leq -4\}$



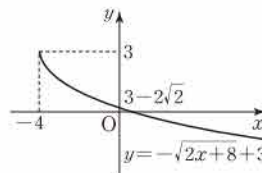
㉠ 풀이 참조

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x | x \leq 5\}$, 치역은 $\{y | y \geq -4\}$ 이다.



(2) $y = -\sqrt{2x+8} + 3 = -\sqrt{2(x+4)} + 3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x | x \geq -4\}$, 치역은 $\{y | y \leq 3\}$ 이다.



㉠ 풀이 참조

2 $y = \sqrt{-3x+6} - 1 = \sqrt{-3(x-2)} - 1$

이므로 $y = \sqrt{-3x+6} - 1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore a=2, b=-1, k=-3$$

㉠ $a=2, b=-1, k=-3$

3 $y = -\sqrt{2x-6} = -\sqrt{2(x-3)}$

따라서 $y = -\sqrt{2x-6}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 다음 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

㉠ $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동하여 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㉠, ㉡이다.

㉠ ㉠, ㉡

4 $y = -\sqrt{6-2x} + 2 = -\sqrt{-2(x-3)} + 2$

이므로 $y = -\sqrt{6-2x} + 2$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$x = -5$ 일 때

$$y = -\sqrt{6+10} + 2 = -2,$$

$x = 1$ 일 때

$$y = -\sqrt{6-2} + 2 = 0$$

유제

본책 215쪽

1 (1) $y = \sqrt{5-x} - 4 = \sqrt{-(x-5)} - 4$

이므로 정의역이

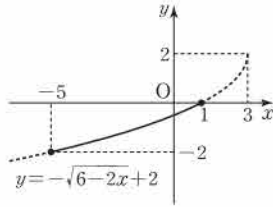
$\{x | -5 \leq x \leq 1\}$ 일 때

$y = -\sqrt{6-2x} + 2$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은

$$\{y | -2 \leq y \leq 0\}$$



$$\text{답 } \{y | -2 \leq y \leq 0\}$$

5 $y = \sqrt{2x-3} + 1 = \sqrt{2(x-\frac{3}{2})} + 1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2 \leq x \leq 6$ 에서 $y = \sqrt{2x-3} + 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

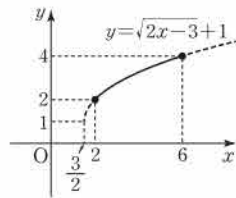
$x=6$ 일 때

$$\text{최댓값 } \sqrt{12-3} + 1 = 4,$$

$x=2$ 일 때

$$\text{최솟값 } \sqrt{4-3} + 1 = 2$$

를 갖는다.



$$\text{답 최댓값: 4, 최솟값: 2}$$

6 $y = -\sqrt{2x+6} + a = -\sqrt{2(x+3)} + a$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1 \leq x \leq 5$ 에서

$y = -\sqrt{2x+6} + a$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로

$x=-1$ 일 때

$$\text{최댓값 } -\sqrt{-2+6} + a = a-2,$$

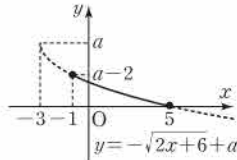
$x=5$ 일 때

$$\text{최솟값 } -\sqrt{10+6} + a = a-4$$

를 갖는다.

$$\text{즉 } a-4=0 \text{이므로 } a=4$$

$$\text{따라서 구하는 최댓값은 } 4-2=2$$



$$\text{답 2}$$

7 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{ax}$ ($a < 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y = -\sqrt{a(x-1)} + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓을 수 있다. ①의 그래프가 점 (0, 1)을 지나므로

$$1 = -\sqrt{a(0-1)} + 3, \quad \sqrt{-a} = 2$$

$$-a = 4 \quad \therefore a = -4$$

$a = -4$ 를 ①에 대입하면

$$y = -\sqrt{-4(x-1)} + 3 = -\sqrt{-4x+4} + 3$$

$$\therefore b=4, c=3$$

$$\text{답 } a=-4, b=4, c=3$$

8 $y = \sqrt{ax} + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{5}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{a(x-\frac{5}{2})} - 1$$

이 그래프가 점 (3, 1)을 지나므로

$$1 = \sqrt{a(3-\frac{5}{2})} - 1, \quad \sqrt{\frac{a}{2}} = 2$$

$$\frac{a}{2} = 4 \quad \therefore a = 8$$

$$\text{답 8}$$

9 $ax+4 \geq 0$ 에서 $ax \geq -4$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x | x \leq 4\}$ 이므로 $a < 0$ 이고

$$x \leq -\frac{4}{a} \text{에서 } -\frac{4}{a} = 4 \quad \therefore a = -1$$

또 함수 $y = \sqrt{4-x} + b$ 에서 $\sqrt{4-x} \geq 0$ 이므로 치역은

$$\{y | y \geq b\} \quad \therefore b = 2$$

$$\text{답 } a=-1, b=2$$

10 함수 $y = \sqrt{9-3x} + 1$ 의 치역이 $\{y | y \geq 1\}$ 이므로 역함수의 정의역은 $\{x | x \geq 1\}$ 이다.

$$y = \sqrt{9-3x} + 1 \text{에서 } y-1 = \sqrt{9-3x}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$(y-1)^2 = 9-3x$$

$$\therefore x = -\frac{1}{3}(y-1)^2 + 3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 역함수는

$$y = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + 3 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \quad (x \geq 1)$$

$$\text{따라서 } a = \frac{2}{3}, b = \frac{8}{3}, c = 1 \text{이므로}$$

$$a-b+c = -1$$

$$\text{답 -1}$$

11 함수 $y = \sqrt{x+a} + b$ 의 치역이 $\{y | y \geq b\}$ 이므로 역함수의 정의역은 $\{x | x \geq b\}$ 이다.

$$y = \sqrt{x+a} + b \text{에서 } y-b = \sqrt{x+a}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$(y-b)^2 = x+a$$

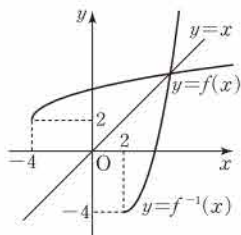
$$\therefore x = (y-b)^2 - a$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 역함수는

$$y = (x-b)^2 - a \quad (x \geq b)$$

함수 $y=(x-b)^2-a$ ($x \geq b$)는 $x=b$ 일 때 최솟값 $-a$ 를 가지므로 $b=3, -a=1$
 $\therefore a=-1, b=3$ ㉠ $a=-1, b=3$

12 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.



$$\sqrt{x+4}+2=x \text{에서} \quad \sqrt{x+4}=x-2$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $x+4=(x-2)^2$

$$x+4=x^2-4x+4, \quad x^2-5x=0$$

$$x(x-5)=0$$

이때 함수 $f(x)=\sqrt{x+4}+2$ 의 치역이 $\{y|y \geq 2\}$ 이므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x|x \geq 2\}$ 이다.

$$\therefore x=5 (\because x \geq 2)$$

따라서 교점의 좌표는 (5, 5)이다. ㉠ (5, 5)

13 $\sqrt{2x+4}=x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$2x+4=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2-4=0$$

이 x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-4)=0$$

$$-2k+5=0 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$$

$$\text{㉠ } \frac{5}{2}$$

14 $y=-\sqrt{2x-4}=-\sqrt{2(x-2)}$

이므로 $y=-\sqrt{2x-4}$ 의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=mx$ 는 기울기가 m 이고 원점을 지난다.

이때 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 $y=-\sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 직선 $y=mx$ 가 만나지 않아야 한다.

$y=-\sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 직선

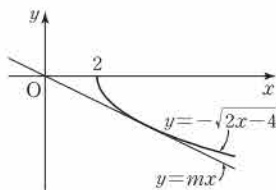
$y=mx$ 가 접할 때,

$-\sqrt{2x-4}=mx$ 의 양변을 제곱

하면

$$2x-4=m^2x^2$$

$$\therefore m^2x^2-2x+4=0$$



이 x 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-4m^2=0$$

$$m^2=\frac{1}{4} \quad \therefore m=-\frac{1}{2} (\because m < 0)$$

따라서 $y=-\sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 직선 $y=mx$ 가 만나지 않으려

$$\text{면} \quad m < -\frac{1}{2}$$

$$\text{㉠ } m < -\frac{1}{2}$$

중단원 연습 문제

본책 220쪽

- | | | | | |
|-------|-------|------------------|-------|------------------|
| 01 ③ | 02 ④ | 03 ④ | 04 9 | 05 ② |
| 06 26 | 07 3 | 08 (-4, -1) | | 09 ② |
| 10 ③ | 11 30 | 12 $\frac{1}{2}$ | 13 4 | 14 ③ |
| 15 ④ | 16 ② | 17 48 | 18 16 | 19 $\frac{9}{4}$ |
| 20 ② | | | | |

01 전력 두 무리식 $\sqrt{2x-5}$, $\frac{1}{\sqrt{6-x}}$ 의 값이 실수가 될 조건을 각각 구하여 공통 범위를 구한다.

풀이 $2x-5 \geq 0$ 에서 $2x \geq 5$

$$\therefore x \geq \frac{5}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$6-x > 0 \text{에서} \quad x < 6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서} \quad \frac{5}{2} \leq x < 6$$

따라서 정수 x 는 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$$3+4+5=12 \quad \text{㉠ } \text{㉢}$$

02 전력 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ 임을 이용하여 분모를 유리화한다.

$$\begin{aligned} \text{㉠ 풀이} \quad & \frac{x}{\sqrt{2x+1}-1} - \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1} \\ &= \frac{x(\sqrt{2x+1}+1)-x(\sqrt{2x+1}-1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)} \\ &= \frac{x\sqrt{2x+1}+x-x\sqrt{2x+1}+x}{2x+1-1} \\ &= \frac{2x}{2x}=1 \end{aligned}$$

㉠ ㉣

03 전력 주어진 식을 간단히 한 후 미지수의 값을 대입한다.

$$\text{㉠ 풀이} \quad x = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}$$

$$y = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$$

$$\text{이므로} \quad x+y=4, \quad xy=1, \quad x-y=2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\ &= \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y} \\ &= \frac{4+2}{2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ④

04 전략 주어진 함수의 그래프를 평행이동과 대칭이동하여 함수 $f(x)$ 를 구한다.

풀이 함수 $y=\sqrt{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\sqrt{4(x+3)}+5 \quad \cdots ①$$

이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{4(-x+3)}+5 \\ &= \sqrt{-4x+12}+5\end{aligned} \quad \cdots ②$$

이 함수의 그래프가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 일치하므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{-4x+12}+5 \\ \therefore f(-1) &= \sqrt{-4 \cdot (-1)+12}+5 \\ &= 4+5=9\end{aligned} \quad \cdots ③$$

답 9

채점 기준	비율
① 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
② 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
③ $f(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

05 전략 주어진 함수의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그린다.

풀이 $y=-\sqrt{6-3x}+1=-\sqrt{3(x-2)}+1$

① $y=-\sqrt{6-3x}+1$ 의 그래프는

$y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

② $y=0$ 을 $y=-\sqrt{6-3x}+1$ 에 대입하면

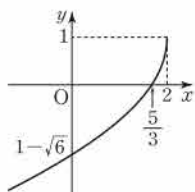
$$\begin{aligned}0 &= -\sqrt{6-3x}+1, & \sqrt{6-3x} &= 1 \\ 6-3x &= 1 & \therefore x &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

따라서 그래프는 x 축과 점 $(\frac{5}{3}, 0)$ 에서 만난다.

③ 그래프는 위의 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.

④, ⑤ 위의 그림에서 정의역은 $\{x|x \leq 2\}$, 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.

답 ②



06 전략 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ ($a < 0$)의 정의역은 $\{x|x \leq -\frac{b}{a}\}$, 치역은 $\{y|y \geq c\}$ 임을 이용한다.

풀이 $5-2x \geq 0$ 이므로 $x \leq \frac{5}{2}$

즉 주어진 함수의 정의역이 $\{x|x \leq \frac{5}{2}\}$ 이므로

$$a = \frac{5}{2} \quad \cdots ①$$

또 $\sqrt{5-2x} \geq 0$ 이므로 주어진 함수의 치역은

$$\{y|y \geq 1-3b\}$$

즉 $1-3b=-2$ 이므로 $b=1$

$$\therefore 10a+b=26$$

$\cdots ②$

$\cdots ③$

답 26

채점 기준	비율
① 정의역을 이용하여 a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 치역을 이용하여 b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $10a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 전략 주어진 함수의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형한 후 그래프를 그린다.

풀이 $f(x)=\sqrt{-ax+1}=\sqrt{-a(x-\frac{1}{a})}$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래

프는 $y=\sqrt{-ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{a}$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-5 \leq x \leq -1$ 에서 $y=f(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

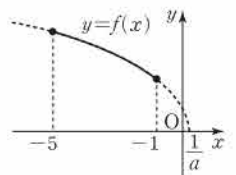
$$x=-5 \text{ 일 때 최댓값 } \sqrt{5a+1}$$

을 갖는다.

즉 $\sqrt{5a+1}=4$ 이므로

$$5a+1=16 \quad \therefore a=3$$

답 3



개념변라이트 보충학습

무리함수의 최대·최소

정의역이 $\{x|p \leq x \leq q\}$ 인 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$ 의 최대·최소는

① $a > 0$ 이면 최솟값은 $f(p)$, 최댓값은 $f(q)$

② $a < 0$ 이면 최솟값은 $f(q)$, 최댓값은 $f(p)$

08 전략 주어진 함수의 그래프의 식을 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 나타낸 후 상수 a, b, c 의 값을 구한다.

풀이 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ ($a < 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y=\sqrt{a(x-4)}-3$$

$\cdots \cdots ①$

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로
 $-1 = \sqrt{a(0-4)} - 3, \quad \sqrt{-4a} = 2$
 $-4a = 4 \quad \therefore a = -1$

$a = -1$ 을 ㉠에 대입하면

$$y = \sqrt{-(x-4)} - 3 = \sqrt{-x+4} - 3$$

$$\therefore b = 4, c = -3$$

$y = \frac{ax+c}{x+b}$ 에서

$$y = \frac{-x-3}{x+4} = \frac{-(x+4)+1}{x+4} = \frac{1}{x+4} - 1$$

따라서 점근선의 방정식은 $x = -4, y = -1$ 이므로 점근선의 교점의 좌표는 $(-4, -1)$ **답** $(-4, -1)$

09 전략 조건을 만족시키는 무리함수의 그래프를 그려 본다.

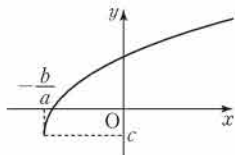
풀이 $y = \sqrt{ax+b} + c = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행 이동한 것이다.

이때 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프가 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면만을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$a > 0, -\frac{b}{a} < 0, c < 0$$

$$\therefore a > 0, b > 0, c < 0$$



답 ②

10 전략 역함수의 정의역은 원래 함수의 치역과 같음을 이용한다.

풀이 $y = -\sqrt{4x-1} + 2$ 의 치역이 $\{y | y \leq 2\}$ 이므로 역함수의 정의역은 $\{x | x \leq 2\}$ 이다.

$y = -\sqrt{4x-1} + 2$ 에서

$$\sqrt{4x-1} = 2-y$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $4x-1 = (2-y)^2$

$$4x = (2-y)^2 + 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{4}(2-y)^2 + \frac{1}{4}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 역함수는

$$y = \frac{1}{4}(2-x)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{5}{4} \quad (x \leq 2)$$

따라서 $a = -1, b = \frac{5}{4}, c = 2$ 이므로

$$a+4b+c=6$$

답 ③

11 전략 함수 f 의 역함수가 존재하고 $f^{-1}(a) = b$ 이면 $f(b) = a$ 임을 이용한다.

풀이 무리함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$\sqrt{4a+b} = 3$$

$$\therefore 4a+b=9$$

..... ㉠ ... ①

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 $(4, 3)$ 을 지나므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 점 $(3, 4)$ 를 지난다.

즉 $\sqrt{3a+b} = 4$ 이므로

$$3a+b=16$$

..... ㉡ ... ②

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -7, b = 37$

$$\therefore a+b=30$$

... ③

답 30

채점 기준	비율
① $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(4, 3)$ 을 지남을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40 %
② $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(3, 4)$ 를 지남을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 무리함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$\sqrt{4a+b} = 3$$

$$\therefore 4a+b=9$$

..... ㉠

$y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수를 구하면

$$y = \frac{1}{a}x^2 - \frac{b}{a} \quad (x \geq 0)$$

역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \frac{16}{a} - \frac{b}{a}$$

$$\therefore 3a+b=16$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -7, b = 37$

$$\therefore a+b=30$$

12 전략 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 구하는 식을 간단히 한다.

풀이 $(g^{-1} \circ f)^{-1}(4) = (f^{-1} \circ g)(4)$
 $= f^{-1}(g(4))$

이고 $g(4) = \frac{4}{4-2} = 2$ 이므로

$$f^{-1}(g(4)) = f^{-1}(2)$$

$$f^{-1}(2) = k \text{라 하면 } f(k) = 2 \text{이므로}$$

$$\sqrt{2k-1} + 2 = 2, \quad \sqrt{2k-1} = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(4) = f^{-1}(2) = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

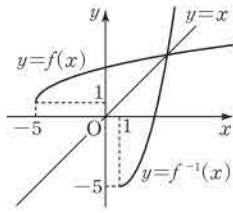
13 전략 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

풀이 $y = f(x)$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로

$$y = \sqrt{x+5} + 1$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{x+5} + 1$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.



$$\sqrt{x+5} + 1 = x \text{에서 } x-1 = \sqrt{x+5}$$

$$\text{위의 식의 양변을 제곱하면 } (x-1)^2 = x+5$$

$$x^2 - 2x + 1 = x + 5, \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0$$

이때 함수 $f(x) = \sqrt{x+5} + 1$ 의 치역이 $\{y | y \geq 1\}$ 이므로 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x | x \geq 1\}$ 이다.

$$\therefore x=4 (\because x \geq 1)$$

따라서 구하는 교점의 x 좌표는 4이다.

③

답 4

채점 기준	비율
① 함수 $y=f(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
② $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같음을 알 수 있다.	40 %
③ 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	40 %

14 전략 조건을 만족시키도록 함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 직선 $y=-x+k$ 를 그려 본다.

$$\text{풀이 } y=5-2\sqrt{1-x} = -2\sqrt{-(x-1)} + 5$$

이므로 함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프는 $y=-2\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$ 는 기울기가 -1 이고 y 절편이 k 이다.

(i) 직선 $y=-x+k$ 가 점 $(1, 5)$ 를 지날 때,

$$5 = -1 + k$$

$$\therefore k=6$$

(ii) $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 직선

$y=-x+k$ 가 y 축에서 만날 때,

$x=0$ 을 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 에 대입하면

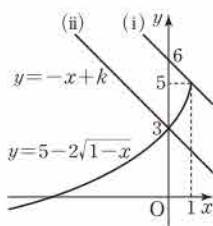
$$y=5-2\sqrt{1-0}=3$$

즉 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프가 y 축과 점 $(0, 3)$ 에서 만나므로

$$3=0+k \quad \therefore k=3$$

(i), (ii)에서 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 직선 $y=-x+k$ 가 제 1사분면에서 만나려면

$$3 < k \leq 6$$



따라서 정수 k 는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$$4+5+6=15$$

답 ③

15 전략 무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안의 식의 값이 양수 또는 0이어야 함을 이용한다.

풀이 $\sqrt{kx^2-kx+2}$ 의 값이 실수가 되려면 $kx^2-kx+2 \geq 0$ 이어야 한다.

(i) $k=0$ 일 때,

$0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 2 = 2 \geq 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $k \neq 0$ 일 때,

이차부등식 $kx^2-kx+2 \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

$$k > 0$$

..... ㉠

이차방정식 $kx^2-kx+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-k)^2 - 4 \cdot k \cdot 2 \leq 0$$

$$k^2 - 8k \leq 0, \quad k(k-8) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq k \leq 8$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $0 < k \leq 8$

(i), (ii)에서 $0 \leq k \leq 8$ 이므로 정수 k 는 0, 1, 2, ..., 8의 9개이다.

답 ④

개념변라이트 보충학습

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

① 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$ 이 성립하려면

$$a > 0, D \leq 0$$

② 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c > 0$ 이 성립하려면

$$a > 0, D < 0$$

16 전략 주어진 미지수의 값을 근호가 없어질 때까지 제공하여 정리한 후 주어진 식에 대입한다.

$$\text{풀이 } x^2 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 5-2\sqrt{6} \text{이므로}$$

$$x^2 - 5 = -2\sqrt{6}$$

$$\text{위의 식의 양변을 제곱하면 } x^4 - 10x^2 + 25 = 24$$

따라서 $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ 이므로

$$x^4 - 11x^2 + 6 = (x^4 - 10x^2 + 1) - (x^2 - 5)$$

$$= 0 - (-2\sqrt{6})$$

$$= 2\sqrt{6}$$

답 ②

17 전략 두 그래프의 관계를 이용하여 두 그래프와 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

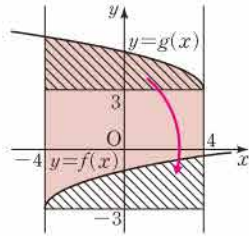
풀이 $y = \sqrt{x+4} - 3$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

또 $y = \sqrt{-x+4} + 3 = \sqrt{-(x-4)} + 3$ 이므로 $y = \sqrt{-x+4} + 3$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 다음 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 오른쪽 그림과 같이 도형을 이동시키면 구하는 도형의 넓이는

$$\{3 - (-3)\} \cdot \{4 - (-4)\} \\ = 6 \cdot 8 = 48$$

답 48



18 전략 주어진 범위에서 함수 $y = \frac{-2x+4}{x-1}$ 의 그래프를 그려서 두 그래프가 한 점에서 만날 조건을 구한다.

풀이 $y = \frac{-2x+4}{x-1} = \frac{-2(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} - 2$

이므로 $3 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 두 함수 $y = \frac{-2x+4}{x-1}$, $y = \sqrt{3x} + k$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

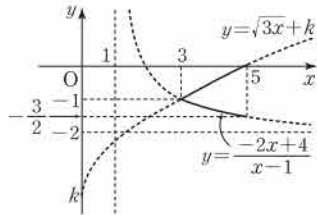
$y = \sqrt{3x} + k$ 의 그래프가 점 $(3, -1)$ 을 지날 때, 실수 k 가 최댓값을 가지므로

$$-1 = \sqrt{3 \cdot 3} + k \quad \therefore k = -4$$

따라서 $M = -4$ 이므로

$$M^2 = 16$$

답 16



19 전략 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 접함을 이용한다.

풀이 $y = \sqrt{x+2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{x-a+2} \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하면 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 도 접한다.

$\sqrt{x-a+2} = x$ 에서 양변을 제곱하면

$$x-a+2 = x^2 \\ \therefore x^2 - x + a - 2 = 0 \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-1)^2 - 4(a-2) = 0, \quad 9 - 4a = 0 \\ \therefore a = \frac{9}{4} \quad \rightarrow \textcircled{3}$$

답 $\frac{9}{4}$

채점 기준	비율
① 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	30 %
② 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하는 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30 %

20 전략 $f^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f)^{-1}$ 임을 이용한다.

풀이 $f^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f)^{-1}$ 이므로

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(a) = 25 \text{에서} \quad (f \circ f)^{-1}(a) = 25 \\ \therefore (f \circ f)(25) = a$$

이때 $f(25) = 1 - \sqrt{25} = 1 - 5 = -4$ 이고

$$f(-4) = \sqrt{1 - (-4)} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$a = (f \circ f)(25) = f(f(25)) \\ = f(-4) = \sqrt{5}$$

답 ②

MEMO

