

# 정답 및 풀이

## I. 도형의 방정식

|            |    |
|------------|----|
| 01 평면좌표    | 2  |
| 02 직선의 방정식 | 10 |
| 03 원의 방정식  | 21 |
| 04 도형의 이동  | 34 |

## II. 집합과 명제

|              |    |
|--------------|----|
| 05 집합의 뜻과 표현 | 43 |
| 06 집합의 연산    | 48 |
| 07 명제        | 56 |
| 08 절대부등식     | 64 |

## III. 함수

|                  |     |
|------------------|-----|
| 09 함수            | 69  |
| 10 합성함수와 역함수     | 75  |
| 11 여러 가지 함수의 그래프 | 83  |
| 12 유리함수          | 92  |
| 13 무리함수          | 102 |

01

평면좌표

I. 도형의 방정식

유제

본책 11~29쪽

001-① 점 B의 좌표를

$t$  ( $0 < t < 2$ )라 하면

$\overline{OB} : \overline{BA} = \overline{OA} : \overline{OB}$ 에서

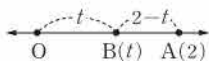
$$t : (2-t) = 2 : t$$

$$t^2 = 2(2-t), \quad t^2 + 2t - 4 = 0$$

$$\therefore t = -1 \pm \sqrt{5}$$

그런데  $0 < t < 2$ 이므로  $t = -1 + \sqrt{5}$

따라서 점 B의 좌표는  $-1 + \sqrt{5}$ 이다.



답  $-1 + \sqrt{5}$

001-②  $\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 에서  $\overline{AC}^2 = 4\overline{BC}^2$

즉  $(1+7)^2 + (7-a)^2 = 4\{(1+1)^2 + (7-3)^2\}$ 이므로

$$a^2 - 14a + 33 = 0, \quad (a-3)(a-11) = 0$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = 11$$

따라서 구하는 모든  $a$ 의 값의 합은

$$3 + 11 = 14$$

답 14

001-③ 두 점 A, B 사이의 거리  $\overline{AB}$ 는

$$\overline{AB} = \sqrt{\{0 - (t-2)\}^2 + \{2t-1-0\}^2}$$

$$= \sqrt{t^2 - 4t + 4 + 4t^2 - 4t + 1}$$

$$= \sqrt{5t^2 - 8t + 5}$$

이때  $\overline{AB} \leq 3$ 이므로

$$\sqrt{5t^2 - 8t + 5} \leq 3$$

양변을 제곱하면

$$5t^2 - 8t + 5 \leq 9, \quad 5t^2 - 8t - 4 \leq 0$$

$$(5t+2)(t-2) \leq 0 \quad \therefore -\frac{2}{5} \leq t \leq 2$$

따라서 실수  $t$ 의 최댓값은 2이고, 최솟값은  $-\frac{2}{5}$ 이다.

답 최댓값: 2, 최솟값:  $-\frac{2}{5}$

002-① 점 P가 직선  $y=x$  위의 점이므로 점 P의 좌표를  $(a, a)$ 라 하면  $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서  $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-2)^2 + (a+5)^2 = (a-4)^2 + (a+1)^2$$

$$2a^2 + 6a + 29 = 2a^2 - 6a + 17$$

$$12a = -12 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore P(-1, -1)$$

답  $(-1, -1)$

002-② 점 P가  $x$ 축 위의 점이므로 점 P의 좌표를  $(a, 0)$ 이라 하면  $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서  $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-2)^2 + 4^2 = (a-6)^2 + (-8)^2$$

$$a^2 - 4a + 20 = a^2 - 12a + 100$$

$$8a = 80 \quad \therefore a = 10 \quad \therefore P(10, 0)$$

또 점 Q가  $y$ 축 위의 점이므로 점 Q의 좌표를  $(0, b)$ 라 하면  $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서  $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$ 이므로

$$(-2)^2 + (b+4)^2 = (-6)^2 + (b-8)^2$$

$$b^2 + 8b + 20 = b^2 - 16b + 100$$

$$24b = 80 \quad \therefore b = \frac{10}{3} \quad \therefore Q(0, \frac{10}{3})$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(-10)^2 + (\frac{10}{3})^2}$$

$$= \frac{10\sqrt{10}}{3}$$

답  $\frac{10\sqrt{10}}{3}$

003-① 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$$\overline{AB}^2 = (5+1)^2 + 2^2 = 40$$

$$\overline{BC}^2 = (a-5)^2 + (-2-2)^2 = a^2 - 10a + 41$$

$$\overline{CA}^2 = (-1-a)^2 + 2^2 = a^2 + 2a + 5$$

삼각형 ABC가  $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이라면

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이어야 하므로

$$a^2 - 10a + 41 + a^2 + 2a + 5 = 40$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0, \quad (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 3$$

답 1, 3

004-① 점 P가  $y$ 축 위의 점이므로 점 P의 좌표를  $(0, a)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$$

$$= \{2^2 + (a-3)^2\} + \{(-1)^2 + (a+7)^2\}$$

$$= 2a^2 + 8a + 63$$

$$= 2(a+2)^2 + 55$$

따라서  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은  $a = -2$ 일 때 최솟값 55를 갖고, 이때의 점 P의 좌표는  $(0, -2)$ 이다.

답 최솟값: 55, 점 P의 좌표:  $(0, -2)$

004-② 점 P가 직선  $y=x+3$  위의 점이므로 점 P의 좌표를  $(a, a+3)$ 이라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$$

$$= \{(a-4)^2 + (a+5)^2\} + \{(a-1)^2 + (a+8)^2\}$$

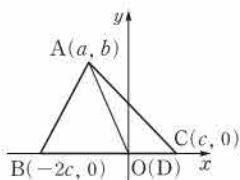
$$= 4a^2 + 16a + 106$$

$$= 4(a+2)^2 + 90$$

따라서  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은  $a = -2$ 일 때 최솟값 90을 가지므로 구하는 점 P의 좌표는  $(-2, 1)$ 이다.

답  $(-2, 1)$

**005-①** 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를  $x$ 축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을  $y$ 축으로 하는 좌표평면을 정하면 점 D는 원점이 된다.



A( $a, b$ ), C( $c, 0$ )이라 하면 B( $-2c, 0$ )이므로  
 $\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = \{(a+2c)^2 + b^2\} + 2\{(a-c)^2 + b^2\}$   
 $= 3(a^2 + b^2 + 2c^2)$   
 $3\overline{AD}^2 + 6\overline{CD}^2 = 3(a^2 + b^2) + 6c^2$   
 $= 3(a^2 + b^2 + 2c^2)$   
 $\therefore \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 3\overline{AD}^2 + 6\overline{CD}^2 \quad \cdots \text{증명 끝}$   
**답** 풀이 참조

**006-①** 점 P의 좌표는

$$\left( \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot (-3)}{1+3}, \frac{1 \cdot (-6) + 3 \cdot 6}{1+3} \right),$$

즉  $(-2, 3)$

점 Q의 좌표는

$$\left( \frac{1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1}{1+3}, \frac{1 \cdot 6 + 3 \cdot (-6)}{1+3} \right),$$

즉  $(0, -3)$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{2^2 + (-3-3)^2} = 2\sqrt{10}$$

**답**  $2\sqrt{10}$

**006-②** 선분 AB를 3:4로 내분하는 점의  $x$ 좌표는 0이므로

$$\frac{3 \cdot 12 + 4 \cdot a}{3+4} = 0$$

$$36 + 4a = 0 \quad \therefore a = -9$$

**답** -9

**007-①**  $\overline{AB} = 3\overline{BC}$ 에서

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 1$$

즉 점 B는 선분 AC를 3:1로 내분하는 점이므로

$$\frac{3 \cdot a + 1 \cdot 4}{3+1} = 1, \quad \frac{3 \cdot b + 1 \cdot 2}{3+1} = 5$$

$$\therefore a = 0, b = 6$$

$$\therefore a + b = 6$$

**답** 6

**007-②**  $3\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 에서  $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$ 이고, 점 C의  $x$ 좌표가 음수이므로 점 B는 선분 AC를 2:3으로 내분하는 점이다.

이때 점 C의 좌표를 ( $a, b$ )라 하면

$$\frac{2 \cdot a + 3 \cdot 2}{2+3} = -6, \quad \frac{2 \cdot b + 3 \cdot 5}{2+3} = 7$$

$$\therefore a = -18, b = 10$$

따라서 점 C의 좌표는  $(-18, 10)$ 이다.

**답**  $(-18, 10)$

**008-①** 오른쪽 그림에서

$\triangle OAP = 2\triangle OBP$ 이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

즉 점 P는 선분 AB를

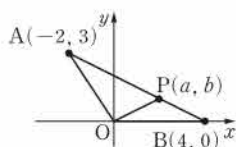
2:1로 내분하는 점이므로

$$a = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)}{2+1} = 2$$

$$b = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 3}{2+1} = 1$$

$$\therefore a - b = 1$$

**답** 1



**009-①** 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 AC의 중점과 BD의 중점이 일치한다.

AC의 중점의 좌표는

$$\left( \frac{a+1}{2}, \frac{3+4}{2} \right), \text{ 즉 } \left( \frac{a+1}{2}, \frac{7}{2} \right) \quad \cdots \text{㉠}$$

BD의 중점의 좌표는

$$\left( \frac{-4+3}{2}, \frac{b+3}{2} \right), \text{ 즉 } \left( -\frac{1}{2}, \frac{b+3}{2} \right) \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{a+1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{2} = \frac{b+3}{2}$$

$$\therefore a = -2, b = 4$$

**답**  $a = -2, b = 4$

**009-②** 마름모의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 AC의 중점과 BD의 중점이 일치한다.

AC의 중점의 좌표는

$$\left( \frac{5-3}{2}, \frac{4+b}{2} \right), \text{ 즉 } \left( 1, \frac{4+b}{2} \right) \quad \cdots \text{㉠}$$

BD의 중점의 좌표는

$$\left( \frac{1+1}{2}, \frac{a+7}{2} \right), \text{ 즉 } \left( 1, \frac{a+7}{2} \right) \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{4+b}{2} = \frac{a+7}{2} \quad \therefore b = a+3 \quad \cdots \text{㉢}$$

또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$$\overline{AB} = \overline{AD} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2$$

$$(1-5)^2 + (a-4)^2 = (1-5)^2 + (7-4)^2$$

$$a^2 - 8a + 7 = 0, \quad (a-1)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 7$$

그런데  $a=7$ 이면 두 점 B, D가 일치하므로

$$a \neq 7$$

$$\therefore a=1$$

$a=1$ 을 ㉠에 대입하면

$$b=4$$

$$\text{답 } a=1, b=4$$

**Remark▶** 마름모의 성질

- ① 네 변의 길이가 모두 같다.
- ② 두 대각선이 서로를 수직이등분한다.

**010-①** 변 AB를 1:2로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left( \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{1+2}, \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 8}{1+2} \right),$$

$$\text{즉 } (-1, 6)$$

변 BC를 1:2로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left( \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{1+2}, \frac{1 \cdot (-7) + 2 \cdot 2}{1+2} \right),$$

$$\text{즉 } (2, -1)$$

변 CA를 1:2로 내분하는 점 F의 좌표는

$$\left( \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4}{1+2}, \frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot (-7)}{1+2} \right),$$

$$\text{즉 } (2, -2)$$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left( \frac{-1+2+2}{3}, \frac{6+(-1)+(-2)}{3} \right),$$

$$\text{즉 } (1, 1)$$

$$\text{답 } (1, 1)$$

**다른 풀이** 삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left( \frac{-2+1+4}{3}, \frac{8+2+(-7)}{3} \right), \text{ 즉 } (1, 1)$$

**Remark▶**

삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA를 각각  $m:n (m>0, n>0)$ 으로 내분하는 점을 차례로 D, E, F라 할 때, 삼각형 ABC와 삼각형 DEF의 무게중심은 일치한다.

**010-②**  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ 이라 하면 변 AB의 중점의 좌표가  $(3, -1)$ 이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3, \frac{y_1+y_2}{2}=-1$$

$$\therefore x_1+x_2=6, y_1+y_2=-2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

변 BC의 중점의 좌표가  $(4, 6)$ 이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2}=4, \frac{y_2+y_3}{2}=6$$

$$\therefore x_2+x_3=8, y_2+y_3=12 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

변 CA의 중점의 좌표가  $(8, 7)$ 이므로

$$\frac{x_3+x_1}{2}=8, \frac{y_3+y_1}{2}=7$$

$$\therefore x_3+x_1=16, y_3+y_1=14 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠+㉡+㉢을 하면

$$2(x_1+x_2+x_3)=30, 2(y_1+y_2+y_3)=24$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3=15, y_1+y_2+y_3=12$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left( \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right), \text{ 즉 } (5, 4)$$

$$\text{답 } (5, 4)$$

**다른 풀이** D(3, -1), E(4, 6), F(8, 7)이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 DEF의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left( \frac{3+4+8}{3}, \frac{-1+6+7}{3} \right), \text{ 즉 } (5, 4)$$

**011-①** 점 P의 좌표를  $(x, y)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = 1 \text{에서}$$

$$\{(x-2)^2 + (y-1)^2\} - \{(x-3)^2 + (y+2)^2\} = 1$$

$$(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1)$$

$$- (x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4)$$

$$= 1$$

$$\therefore 2x - 6y - 9 = 0$$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$$2x - 6y - 9 = 0$$

$$\text{답 } 2x - 6y - 9 = 0$$

**중단원 연습 문제**

본책 30~34쪽

|                  |            |          |       |
|------------------|------------|----------|-------|
| 01 3             | 02 ③       | 03 풀이 참조 | 04 ③  |
| 05 8             | 06 풀이 참조   | 07 2     | 08 12 |
| 09 30            | 10 (1, 14) | 11 ②     | 12 ④  |
| 13 $4\sqrt{5}$   | 14 ④       | 15 ③     | 16 ③  |
| 17 $6+3\sqrt{3}$ | 18 ⑤       | 19 30    | 20 14 |
| 21 13            | 22 ⑤       | 23 ③     |       |

**01** **전략** 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } \overline{AB} &= \sqrt{(2-a)^2 + (a-4)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 - 12a + 20} \\ &= \sqrt{2(a-3)^2 + 2} \end{aligned}$$

따라서  $a=3$ 일 때  $\overline{AB}$ 의 길이가 최소이다.

$$\text{답 } 3$$

**02 [전략]** 점 P가 직선  $y=x+1$  위의 점이므로 점 P의 좌표를  $(a, a+1)$ 로 놓고  $\overline{AP}=\overline{BP}$ 임을 이용한다.

**풀이** 점 P( $a, b$ )가 직선  $y=x+1$  위의 점이므로  $b=a+1$  ..... ㉠

즉 점 P의 좌표가  $(a, a+1)$ 이고,  $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서  $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} a^2+(a+1-5)^2 &= (a-2)^2+(a+1-1)^2 \\ 2a^2-8a+16 &= 2a^2-4a+4 \\ -4a &= -12 \quad \therefore a=3 \end{aligned}$$

$a=3$ 을 ㉠에 대입하면  $b=4$

$$\therefore a^2+b^2=3^2+4^2=25 \quad \text{답 ③}$$

**03 [전략]** 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 세 변의 길이의 제곱을 각각 구한다.

**풀이** 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= a^2 + (-b)^2 = a^2 + b^2, \\ \overline{BC}^2 &= b^2 + (a-b+b)^2 = a^2 + b^2, \\ \overline{CA}^2 &= (-a-b)^2 + (-a+b)^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 \end{aligned}$$

이므로

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

또  $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$\overline{AB} = \overline{BC} \quad (\because \overline{AB} > 0, \overline{BC} > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는  $\angle B=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

답  $\angle B=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형

**04 [전략]** 점 P가  $x$ 축 위의 점이므로 점 P의 좌표를  $(a, 0)$ 으로 놓고  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 구한다.

**풀이** 점 P가  $x$ 축 위의 점이므로 점 P의 좌표를  $(a, 0)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 &= a^2 + (-1)^2 = a^2 + 1 \\ \overline{BP}^2 &= (a-2)^2 + (-k)^2 = a^2 - 4a + 4 + k^2 \\ \therefore \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= 2a^2 - 4a + 5 + k^2 \\ &= 2(a-1)^2 + 3 + k^2 \end{aligned}$$

즉  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은  $a=1$ 일 때 최솟값  $3+k^2$ 을 갖는다.

따라서  $3+k^2=12$ 이므로  $k^2=9$

$$\therefore k=3 \quad (\because k>0) \quad \text{답 ③}$$

**05 [전략]** 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

**풀이** 삼각형 ABC의 외심을 P(3, 1)이라 하면 점 P

에서 세 점 A, B, C에 이르는 거리가 모두 같으므로

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서  $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} 3^2 + 1^2 &= (3-a)^2 + 1^2 \\ 10 &= 9 - 6a + a^2 + 1, \quad a^2 - 6a = 0 \\ a(a-6) &= 0 \\ \therefore a &= 0 \text{ 또는 } a=6 \end{aligned}$$

그런데  $a=0$ 이면 점 B가 점 A와 일치하므로

$$\begin{aligned} a &\neq 0 \\ \therefore a &= 6 \quad \dots \text{ ①} \end{aligned}$$

$\overline{AP} = \overline{CP}$ 에서  $\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} 3^2 + 1^2 &= 3^2 + (1-b)^2 \\ 10 &= 9 + 1 - 2b + b^2, \quad b^2 - 2b = 0 \\ b(b-2) &= 0 \\ \therefore b &= 0 \text{ 또는 } b=2 \end{aligned}$$

그런데  $b=0$ 이면 점 C가 점 A와 일치하므로

$$\begin{aligned} b &\neq 0 \\ \therefore b &= 2 \quad \dots \text{ ②} \\ \therefore a+b &= 8 \quad \dots \text{ ③} \end{aligned}$$

답 8

| 채점 기준                 | 비율   |
|-----------------------|------|
| ① $a$ 의 값을 구할 수 있다.   | 40 % |
| ② $b$ 의 값을 구할 수 있다.   | 40 % |
| ③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**06 [전략]** 도형을 좌표평면 위에 나타낸 후, 좌표를 이용하여 각 선분의 길이의 제곱을 구한다.

**풀이** 오른쪽 그림과

같이 직선 BC를  $x$ 축, 직선 AB를  $y$ 축으로 하는 좌표평면을 정하면 점 B는 원점이 된다. 이때 직사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각  $(0, b)$ ,  $(a, 0)$ 이라 하면 꼭짓점 D의 좌표는  $(a, b)$ 이다.

점 P의 좌표를  $(x, y)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= x^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + y^2 \\ \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 &= x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 \\ \therefore \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 \quad \dots \text{ 증명 끝} \end{aligned}$$

답 풀이 참조

**07 [전략]** 주어진 조건을 만족시키도록 수직선 위에 네 점 A, B, M, P를 나타내어 본다.

**풀이** 선분 AB의 중점

M과 선분 AB를 5:3으

로 내분하는 점 P를 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같다.

즉 점 P는 선분 MB를 1:3으로 내분하는 점이므로

$$a=1, b=3$$

$$\therefore b-a=2$$

답 2

**08** **전략** 선분의 내분점을 구하는 공식을 이용하여 먼저  $b$ 의 값을 구한다.

**풀이** 점 P의  $y$ 좌표가  $-3$ 이므로

$$\frac{b \cdot (-5) + 1 \cdot 3}{b+1} = -3$$

$$-5b+3=-3b-3, \quad -2b=-6$$

$$\therefore b=3$$

→ ①

즉 점 P는 선분 AB를 3:1로 내분하는 점이고 점 P의  $x$ 좌표가 5이므로

$$\frac{3 \cdot a + 1 \cdot 8}{3+1} = 5$$

$$3a+8=20, \quad 3a=12$$

$$\therefore a=4$$

→ ②

$$\therefore ab=12$$

→ ③

답 12

| 채점 기준                | 비율  |
|----------------------|-----|
| ① $b$ 의 값을 구할 수 있다.  | 40% |
| ② $a$ 의 값을 구할 수 있다.  | 40% |
| ③ $ab$ 의 값을 구할 수 있다. | 20% |

**09** **전략**  $3\overline{AB}=\overline{BC}$ 를 만족시키도록 그림을 그려 점 C의 좌표를 구한다.

**풀이**  $3\overline{AB}=\overline{BC}$ 에서

$$\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$$

점 C의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면

(i) 점 C가 점 B의 방향으로 그은 선분 AB의 연장선 위에 있을 때,

오른쪽 그림에서 점 B

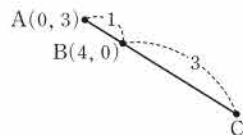
는 선분 AC를 1:3으

로 내분하는 점이므로

$$\frac{1 \cdot a + 3 \cdot 0}{1+3} = 4,$$

$$\frac{1 \cdot b + 3 \cdot 3}{1+3} = 0$$

$$\therefore a=16, b=-9$$



(ii) 점 C가 점 A의 방향으로 그은 선분 AB의 연장선 위에 있을 때,

오른쪽 그림에서 점 A는 선분 CB를 2:1로 내분하는 점이

므로

$$\frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot a}{2+1} = 0,$$

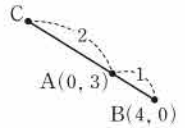
$$\frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot b}{2+1} = 3$$

$$\therefore a=-8, b=9$$

(i), (ii)에서 점 C의 좌표는  $(16, -9)$  또는  $(-8, 9)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-8-16)^2 + (9+9)^2} = \sqrt{900} = 30$$

답 30



**10** **전략** 두 점 B, C의 좌표를 각각  $(a, b)$ ,  $(c, d)$ 로 놓고, 선분의 중점을 구하는 공식을 이용한다.

**풀이** 점 B의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면 변 AB의 중점의

좌표는  $(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2})$ 이므로

$$\frac{1+a}{2} = 5, \quad \frac{2+b}{2} = 3$$

$$1+a=10, \quad 2+b=6$$

$$\therefore a=9, b=4$$

$$\therefore B(9, 4)$$

→ ①

또 점 C의 좌표를  $(c, d)$ 라 하면 변 BC의 중점의 좌표는  $(\frac{9+c}{2}, \frac{4+d}{2})$ 이므로

$$\frac{9+c}{2} = 9, \quad \frac{4+d}{2} = 10$$

$$9+c=18, \quad 4+d=20$$

$$\therefore c=9, d=16$$

$$\therefore C(9, 16)$$

→ ②

평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 AC의 중점과 BD의 중점이 일치한다.

AC의 중점의 좌표는

$$(\frac{1+9}{2}, \frac{2+16}{2}), \text{ 즉 } (5, 9) \quad \dots\dots ①$$

점 D의 좌표를  $(x, y)$ 라 하면 BD의 중점의 좌표는

$$(\frac{9+x}{2}, \frac{4+y}{2}) \quad \dots\dots ②$$

①, ②이 일치하므로

$$5 = \frac{9+x}{2}, \quad 9 = \frac{4+y}{2}$$

$$10 = 9+x, \quad 18 = 4+y$$

$$\therefore x=1, y=14$$

따라서 점 D의 좌표는  $(1, 14)$ 이다.

→ ③

답 (1, 14)

| 채점 기준               | 비율   |
|---------------------|------|
| ① 점 B의 좌표를 구할 수 있다. | 30 % |
| ② 점 C의 좌표를 구할 수 있다. | 30 % |
| ③ 점 D의 좌표를 구할 수 있다. | 40 % |

**11 [전략]** 세 점  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ 을 꼭짓점으로 하는  $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는  $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ 임을 이용한다.

**[풀이]** 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+x_1+x_2}{3}, \frac{0+y_1+y_2}{3}\right),$$

$$\approx \left(\frac{x_1+x_2}{3}, \frac{y_1+y_2}{3}\right)$$

이때 무게중심의 좌표가  $(-4, 8)$ 이므로

$$\frac{x_1+x_2}{3} = -4, \quad \frac{y_1+y_2}{3} = 8$$

$$\therefore x_1+x_2 = -12, \quad y_1+y_2 = 24$$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right), \text{ 즉 } (-6, 12)$$

**[답 ②]**

**[다른 풀이]** 선분 AB의 중점을  $M(a, b)$ 라 하면 삼각형 OAB의 무게중심은 선분 OM을 2:1로 내분하는 점 이므로

$$\frac{2 \cdot a + 1 \cdot 0}{2+1} = -4, \quad \frac{2 \cdot b + 1 \cdot 0}{2+1} = 8$$

$$\therefore a = -6, \quad b = 12$$

$$\therefore M(-6, 12)$$

**12 [전략]** 구하는 자취 위의 점의 좌표를  $(x, y)$ 로 놓고, 주어진 조건을 이용하여  $x$ 와  $y$  사이의 관계식을 구한다.

**[풀이]** 점 P의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면 점 P는 직선  $x+2y-7=0$  위의 점이므로

$$a+2b-7=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AP를 1:3으로 내분하는 점을  $(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{1 \cdot a + 3 \cdot 5}{1+3} = \frac{1}{4}a + \frac{15}{4}$$

$$y = \frac{1 \cdot b + 3 \cdot 3}{1+3} = \frac{1}{4}b + \frac{9}{4}$$

$$\therefore a = 4x - 15, \quad b = 4y - 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$4x - 15 + 2(4y - 9) - 7 = 0$$

$$\therefore x + 2y - 10 = 0$$

따라서 구하는 자취의 방정식은  $x+2y-10=0$ 이다.

**[답 ④]**

**13 [전략]**  $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ 의 좌변을 인수분해 하여  $x$ 를  $y$ 에 대한 식으로 나타낸다.

**[풀이]**  $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ 에서

$$(x+y)(x-2y) = 0$$

$$\therefore x = -y \text{ 또는 } x = 2y$$

(i)  $x = -y$ 를  $x^2 + 2xy - 3y^2 = 20$ 에 대입하면

$$y^2 - 2y^2 - 3y^2 = 20$$

$$\therefore y^2 = -5$$

이를 만족시키는 실수  $x, y$ 는 존재하지 않는다.

(ii)  $x = 2y$ 를  $x^2 + 2xy - 3y^2 = 20$ 에 대입하면

$$4y^2 + 4y^2 - 3y^2 = 20, \quad y^2 = 4$$

$$\therefore y = \pm 2$$

$y = \pm 2$ 를  $x = 2y$ 에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$$

(i), (ii)에서 두 점  $(a, b)$ ,  $(c, d)$ 의 좌표는  $(4, 2)$ ,

$(-4, -2)$ 이므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(4+4)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{5}$$

**[답 4]**  $4\sqrt{5}$

**14 [전략]** 삼각형 PAB가 이등변삼각형이 되기 위해서는  $\overline{AP} = \overline{BP}$ ,  $\overline{AP} = \overline{AB}$ ,  $\overline{BP} = \overline{AB}$  중 적어도 하나를 만족시켜야 한다.

**[풀이]** 점 P가 직선  $y = -x$  위의 점이므로 점 P의 좌표를  $(a, -a)$ 라 하고 삼각형 PAB의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$$\overline{AP}^2 = (a+2)^2 + (-a-6)^2$$

$$= a^2 + 4a + 4 + a^2 + 12a + 36$$

$$= 2a^2 + 16a + 40$$

$$\overline{BP}^2 = (a-4)^2 + (-a-4)^2$$

$$= a^2 - 8a + 16 + a^2 + 8a + 16$$

$$= 2a^2 + 32$$

$$\overline{AB}^2 = (4+2)^2 + (4-6)^2 = 40$$

(i)  $\overline{AP} = \overline{BP}$ 일 때,  $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$2a^2 + 16a + 40 = 2a^2 + 32, \quad 16a = -8$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(ii)  $\overline{AP} = \overline{AB}$ 일 때,  $\overline{AP}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로

$$2a^2 + 16a + 40 = 40, \quad 2a^2 + 16a = 0$$

$$a(a+8) = 0$$

$$\therefore a = -8 \text{ 또는 } a = 0$$

$$\therefore P(-8, 8) \text{ 또는 } P(0, 0)$$

그런데  $P(-8, 8)$ 이면 세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있으므로 삼각형이 만들어지지 않는다.

$$\therefore P(0, 0)$$

(iii)  $\overline{BP} = \overline{AB}$  일 때,  $\overline{BP}^2 = \overline{AB}^2$  이므로

$$2a^2 + 32 = 40, \quad 2a^2 = 8$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = \pm 2$$

$$\therefore P(-2, 2) \text{ 또는 } P(2, -2)$$

이상에서 점 P의 좌표가 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

**Remark**

(ii)에서 두 점  $A(-2, 6)$ ,  $B(4, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 4 = \frac{4 - 6}{4 - (-2)}(x - 4)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$$

이 직선의 방정식에 점  $(-8, 8)$ 의 좌표를 대입하면

$$8 = -\frac{1}{3} \cdot (-8) + \frac{16}{3}$$

따라서 점  $(-8, 8)$ 은 직선 AB 위의 점이다.

**15** **전략** 두 점 P, Q가  $\overline{AB}$ 를 내분하는 점임을 이용한다.

**풀이** ㄱ. 점 Q는 선분 AB를 2:1로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는

$$\left( \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-5)}{2 + 1}, \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 4}{2 + 1} \right), \text{ 즉 } (-1, 2)$$

따라서 점 Q는 제2사분면 위의 점이다.

ㄴ. 선분 AB의 중점을 M이라 하고 두 점 A, B에 대하여 세 점

M, P, Q를 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 점 M은 선분 PB를 1:3으로 내분하는 점이다.

ㄷ.  $d(A, Q) = d(P, B)$  이므로

$$\begin{aligned} d(A, B) &= d(A, P) + d(P, B) \\ &= d(A, P) + d(A, Q) \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

**16** **전략** 점 C가 x축 위의 점이므로 점 C의 y좌표가 0임을 이용한다.

**풀이** 점 C가 x축 위에 있으므로 점 C의 y좌표는 0이고, 선분 AB를  $m:n$ 으로 내분하므로

$$\frac{m \cdot (-4) + n \cdot 6}{m + n} = 0$$

따라서  $-4m + 6n = 0$  이므로  $2m = 3n$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{3}{2}$$

답 ③

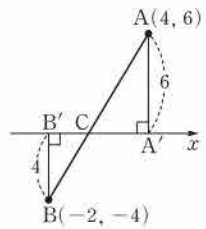
**다른 풀이** 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면

$$\triangle ACA' \sim \triangle CBB'$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{AC} : \overline{CB} &= \overline{AA'} : \overline{BB'} \\ &= 6 : 4 = 3 : 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{3}{2}$$



**17** **전략** 정삼각형의 외접원의 중심, 즉 외심은 무게 중심과 일치함을 이용한다.

**풀이** 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

$\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서  $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$  이므로

$$1^2 + (-1)^2 = (a-1)^2 + b^2$$

$$2 = a^2 - 2a + 1 + b^2$$

$$\therefore a^2 - 2a + b^2 - 1 = 0 \quad \dots\dots ①$$

$\overline{BC} = \overline{CA}$ 에서  $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$  이므로

$$(a-1)^2 + b^2 = (-a)^2 + (1-b)^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 = a^2 + 1 - 2b + b^2$$

$$\therefore b = a \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면  $2a^2 - 2a - 1 = 0$

$$\therefore a = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (\because a > 0)$$

②에서  $b = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  이므로

$$C\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \quad \dots\dots ③$$

정삼각형의 외심을 P라 하면 점 P는 정삼각형의 무게 중심과 일치하므로 점 P의 좌표는

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{3} \left( 0 + 1 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right), \frac{1}{3} \left( 1 + 0 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \right), \\ &\text{ 즉 } \left( \frac{3 + \sqrt{3}}{6}, \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \right) \end{aligned}$$

따라서 외접원의 넓이는  $\pi \overline{AP}^2$  이므로

$$\pi \left\{ \left( \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left( \frac{3 + \sqrt{3}}{6} - 1 \right)^2 \right\} = \frac{2}{3} \pi$$

$$\therefore p = 3, q = 2 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore abpq = 6 + 3\sqrt{3} \quad \dots\dots ③$$

$$\text{답 } 6 + 3\sqrt{3}$$

| 채점 기준               | 비율   |
|---------------------|------|
| ① 점 C의 좌표를 구할 수 있다. | 50 % |
| ② p, q의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ③ abpq의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**Remark ▶** 삼각형의 무게중심, 외심, 내심의 위치

- 정삼각형  $\Rightarrow$  무게중심, 외심, 내심이 모두 일치한다.
- 이등변삼각형  $\Rightarrow$  무게중심, 외심, 내심은 모두 꼭지각의 이등분선 위에 있다.
- 직각삼각형  $\Rightarrow$  외심은 빗변의 중점이다.

**18 [전략]** 복소수  $z=a+bi$ 의 실수부분  $a$ 가  $x$ 좌표, 허수부분  $b$ 가  $y$ 좌표임을 이용한다.

**풀이** ㄱ. 두 복소수  $1+3i$ ,  $-1-i$ 를 나타내는 점의 좌표는 각각  $(1, 3)$ ,  $(-1, -1)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

ㄴ.  $z=a+bi$  ( $a, b$ 는 실수)라 하면  $\bar{z}=a-bi$ 이므로  $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)$

$$=a^2+b^2$$

따라서 복소수  $z\bar{z}$ 를 나타내는 점의 좌표는  $(a^2+b^2, 0)$ 이므로 복소수  $z\bar{z}$ 를 나타내는 점은  $x$ 축 위에 있다.

ㄷ.  $z=a+bi$  ( $a, b$ 는 실수)라 하면

$$-\bar{z}=-(a-bi)=-a+bi$$

이므로 두 복소수  $z$ ,  $-\bar{z}$ 를 나타내는 점의 좌표는 각각  $(a, b)$ ,  $(-a, b)$ 이고, 이 두 점을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-a}{2}, \frac{b+b}{2}\right), \text{ 즉 } (0, b)$$

따라서 두 복소수  $z$ ,  $-\bar{z}$ 를 나타내는 두 점을 잇는 선분의 중점은  $y$ 축 위에 있다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

**답 5**

**19 [전략]**  $\overline{AP}=\overline{BP}$ 를 만족시키는 점  $P$ 가 직선  $l$  위에 있음을 이용하여  $a, b$ 의 값을 구한다.

**풀이**  $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서  $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-4)^2+b^2=a^2+(b-2)^2$$

$$a^2-8a+16+b^2=a^2+b^2-4b+4$$

$$-8a+4b=-12$$

$$\therefore 2a-b=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점  $P$ 가 직선  $l$  위에 있으므로

$$2a+3b=12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=\frac{21}{8}, b=\frac{9}{4}$$

$$\therefore 8a+4b=8 \cdot \frac{21}{8} + 4 \cdot \frac{9}{4} = 30$$

**답 30**

**20 [전략]** 두 점  $P, Q$ 의  $x$ 좌표를 각각  $\alpha, \beta$ 라 하고  $\alpha, \beta$ 에 대한 연립방정식을 세운다.

**풀이** 두 점  $P, Q$ 의  $x$ 좌표를 각각  $\alpha, \beta$ 라 하면 이차방정식  $x^2-2x=3x+k$ , 즉  $x^2-5x-k=0$ 의 두 근이  $\alpha, \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta=-k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

선분  $PQ$ 를 1:2로 내분하는 점의  $x$ 좌표가 1이므로

$$\frac{1 \cdot \beta + 2 \cdot \alpha}{1+2} = 1 \quad \therefore 2\alpha + \beta = 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면  $\alpha=-2, \beta=7$

따라서  $\textcircled{2}$ 에서

$$k=-\alpha\beta=14 \quad \text{답 14}$$

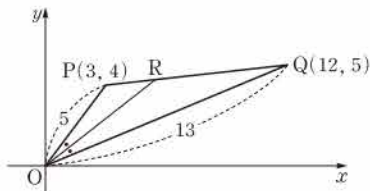
**Remark ▶** 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식  $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

**21 [전략]** 삼각형의 각의 이등분선의 성질을 이용한다.

**풀이**  $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5, \overline{OQ}=\sqrt{12^2+5^2}=13$



위의 그림과 같이  $\angle POQ$ 의 이등분선과  $\overline{PQ}$ 의 교점을  $R$ 라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{PR} : \overline{RQ} = \overline{OP} : \overline{OQ} = 5 : 13$$

즉 점  $R$ 는 선분  $PQ$ 를 5:13으로 내분하는 점이므로 점  $R$ 의  $x$ 좌표는

$$\frac{5 \cdot 12 + 13 \cdot 3}{5+13} = \frac{11}{2}$$

따라서  $a=2, b=11$ 이므로

$$a+b=13 \quad \text{답 13}$$

**22 [전략]** 삼각형  $ABP$ 에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용한다.

**풀이** 삼각형  $ABP$ 에서  $\overline{AP} \parallel \overline{DC}$ 이므로

$$\overline{BD} : \overline{DA} = \overline{BC} : \overline{CP}$$

이때

$$\overline{AD} = \overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5,$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5)^2 + (-9-3)^2} = 13$$

이므로

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = 8$$

$$\therefore \overline{BC} : \overline{CP} = 8 : 5$$

점 P의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면 점 C는  $\overline{BP}$ 를 8:5로 내분하는 점이므로

$$\frac{8 \cdot a + 5 \cdot (-5)}{8+5} = 4, \frac{8 \cdot b + 5 \cdot (-9)}{8+5} = 0$$

$$\therefore a = \frac{77}{8}, b = \frac{45}{8}$$

따라서 점 P의 좌표는  $\left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$ 이다. 답 ⑤

**23 [전략]** 두 점  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ 를 잇는 선분의 중점의 좌표는  $\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}\right)$ 임을 이용한다.

**[풀이]** 두 꼭짓점 B, C의 좌표를 각각  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ 라 하면 두 점  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 의 x좌표는 각각  $x_1 = \frac{1+a_1}{2}, x_2 = \frac{1+a_2}{2}$ 이므로

$$2x_1 = 1 + a_1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$2x_2 = 1 + a_2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$2(x_1+x_2) = 2 + a_1 + a_2$$

$$\therefore a_1 + a_2 = 2 \quad (\because x_1+x_2=2)$$

또 두 점  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 의 y좌표는 각각

$$y_1 = \frac{6+b_1}{2}, y_2 = \frac{6+b_2}{2} \text{이므로}$$

$$2y_1 = 6 + b_1 \quad \dots\dots ㉢$$

$$2y_2 = 6 + b_2 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢+㉣을 하면

$$2(y_1+y_2) = 12 + b_1 + b_2$$

$$\therefore b_1 + b_2 = -4 \quad (\because y_1+y_2=-2)$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+a_1+a_2}{3}, \frac{6+b_1+b_2}{3}\right), \text{ 즉 } \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

답 ③

## 02

### 직선의 방정식

유제

본책 40~68쪽

**012-①** 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{-3+5}{2}\right), \text{ 즉 } (2, 1)$$

따라서 점  $(2, 1)$ 을 지나고 기울기가  $-1$ 인 직선의 방정식은

$$y-1 = -1 \cdot (x-2)$$

$$\therefore y = -x + 3$$

답  $y = -x + 3$

**012-②** 두 직선  $x=1, y=2$

는 서로 수직이고 점  $(1, 2)$ 에서 만난다. 오른쪽 그림과 같이 두 직선  $x=1, y=2$ 가 이루는 각을 이등분하고 기울기가 양수인 직선을 ㉠이라 하면 직선 ㉠이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는  $45^\circ$ 이므로

직선 ㉠의 기울기는

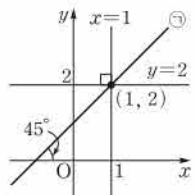
$$\tan 45^\circ = 1$$

따라서 기울기가 1이고 점  $(1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = 1 \cdot (x-1)$$

$$\therefore y = x + 1$$

답  $y = x + 1$



**013-①** 두 점  $(2, -1), (-4, 7)$ 을 지나는 직선 l의 방정식은

$$y - (-1) = \frac{7 - (-1)}{-4 - 2} (x - 2)$$

$$\therefore y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

직선 l이 두 점  $(a, 3), (5, b)$ 를 지나므로

$$3 = -\frac{4}{3}a + \frac{5}{3}, b = -\frac{4}{3} \cdot 5 + \frac{5}{3}$$

$$\therefore a = -1, b = -5$$

$$\therefore a + b = -6$$

답 -6

**013-②** x절편이  $-3, y$ 절편이 1인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{1} = 1 \quad \therefore y = \frac{x}{3} + 1$$

이 직선이 점  $(12, a)$ 를 지나므로

$$a = \frac{12}{3} + 1 = 5$$

답 5

**014-①** 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{-8-(-4)}{k-4} = \frac{(2k-2)-(-4)}{1-4}$$

$$\frac{2}{k-4} = \frac{k+1}{-3}, \quad (k-4)(k+1)=6$$

$$k^2-3k-10=0, \quad (k+2)(k-5)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=5$$

따라서 구하는 모든 실수  $k$ 의 값의 합은  
 $-2+5=3$

답 3

**Remark▶**

$k$ 에 대한 이차방정식  $k^2-3k-10=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계를 이용하면  $k$ 의 값을 직접 구하지 않고  $k$ 의 값의 합이 3임을 알 수 있다.

**014-②** 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같다. 즉

$$\frac{-2-(1-3a)}{2-(-4)} = \frac{1-(-2)}{a-2}$$

$$\frac{a-1}{2} = \frac{3}{a-2}, \quad (a-1)(a-2)=6$$

$$a^2-3a-4=0, \quad (a+1)(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

따라서 두 점 B(2, -2), C(4, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-2) = \frac{1-(-2)}{4-2}(x-2)$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x - 5$$

답  $y = \frac{3}{2}x - 5$

**015-①**  $ab=0$ 에서

$$a=0 \text{ 또는 } b=0$$

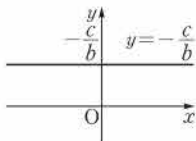
그런데  $bc<0$ 이므로  $b \neq 0$ 이다.

$$\therefore a=0$$

따라서 주어진 직선의 방정식은  $by+c=0$ 이므로

$$y = -\frac{c}{b}$$

이때  $bc<0$ 에서  $-\frac{c}{b}>0$ 이므로 직선  $ax+by+c=0$ 은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면과 제2사분면을 지난다.



답 제1사분면, 제2사분면

**015-②** 주어진 직선  $ax+by+c=0$ 의 개형에서

$$(y\text{절편}) = -\frac{c}{a} > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(y\text{절편}) = -\frac{c}{b} < 0 \quad \dots\dots ㉡$$

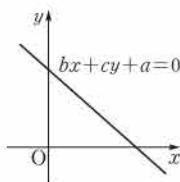
$c \neq 0$ 이므로  $bx+cy+a=0$ 에서

$$y = -\frac{b}{c}x - \frac{a}{c}$$

㉠에서  $-\frac{b}{c} < 0$ 이고, ㉡에서  $-\frac{a}{c} > 0$ 이므로 직선

$bx+cy+a=0$ 의 기울기는 음수,  $y$ 절편은 양수이다.

따라서 직선  $bx+cy+a=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



답 제3사분면

**다른 풀이**  $b \neq 0$ 이므로  $ax+by+c=0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

주어진 직선의 개형에서  $-\frac{a}{b} > 0$ ,  $-\frac{c}{b} < 0$ 이므로

$$a>0, b<0, c<0 \text{ 또는 } a<0, b>0, c>0$$

$c \neq 0$ 이므로  $bx+cy+a=0$ 에서

$$y = -\frac{b}{c}x - \frac{a}{c} \quad \dots\dots ㉢$$

$-\frac{b}{c} < 0$ ,  $-\frac{a}{c} > 0$ 이므로 직선 ㉢의 기울기는 음수이고,  $y$ 절편은 양수이다.

따라서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

**016-①** (1)  $y$ 절편이 1인 직선의 방정식을  $y=mx+1$ 이라 하면 이 직선이 점 (3, 4)를 지나므로

$$4=3m+1 \quad \therefore m=1$$

따라서 기울기가 1이고 원점을 지나는 직선의 방정식은

$$y=x$$

(2)  $x-3y+6=0$ 에서  $y = \frac{1}{3}x + 2$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는  $-3$ 이므로 기울기가  $-3$ 이고 점 (2, -1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-1) = -3(x-2)$$

$$\therefore y = -3x+5$$

답 (1)  $y=x$  (2)  $y=-3x+5$

**017-①** 두 직선  $ax+y-1=0$ ,  $6x+by+5=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{b} \neq \frac{-1}{5}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{b} \text{에서 } ab=6 \quad \dots\dots ㉣$$

두 직선  $ax+y-1=0$ ,  $(b-1)x-3y+1=0$ 이 서로 수직이므로

$$a(b-1)+1 \cdot (-3)=0$$

$$ab-a-3=0$$

①을 위의 식에 대입하면  $6-a-3=0 \quad \therefore a=3$   
 $a=3$ 을 ①에 대입하면  $3b=6 \quad \therefore b=2$

$$\boxed{\text{답}} a=3, b=2$$

**018-①** 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선  $ax+2y-5=0$ 이 두 직선  $2x-y-2=0$ ,  $3x-2y+a=0$ 의 교점을 지나야 한다.

$$2x-y-2=0, 3x-2y+a=0 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$x=a+4, y=2a+6$$

따라서 직선  $ax+2y-5=0$ 이 점  $(a+4, 2a+6)$ 을 지나야 하므로

$$a(a+4)+2(2a+6)-5=0$$

$$a^2+8a+7=0, \quad (a+7)(a+1)=0$$

$$\therefore a=-7 \text{ 또는 } a=-1 \quad \boxed{\text{답}} -7, -1$$

**018-②** 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 하므로

$$\frac{3}{a-1} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{1} = \frac{-1}{b} \neq \frac{2}{-3}$$

$$\frac{3}{a-1} = \frac{-1}{2} \text{에서} \quad a-1=-6 \quad \therefore a=-5$$

$$\frac{3}{1} = \frac{-1}{b} \text{에서} \quad 3b=-1 \quad \therefore b=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore ab = \frac{5}{3} \quad \boxed{\text{답}} \frac{5}{3}$$

**Remark▶**

서로 평행한  $n$ 개의 직선은 평면을  $(n+1)$ 개의 부분으로 나눈다. 예를 들어 오른쪽 그림과 같이 서로 평행한 세 직선은 평면을 ①, ②, ③, ④의 네 부분으로 나눈다.



**019-①** 구하는 수선의 발을 H라 하면 직선 AH는 직선  $3x+y-2=0$ , 즉  $y=-3x+2$ 에 수직이므로 직선 AH의 기울기는  $\frac{1}{3}$ 이다.

또 이 직선이 점 A $(-2, 0)$ 을 지나므로 직선 AH의 방정식은

$$y = \frac{1}{3}(x+2) \quad \therefore y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

따라서 점 H는 두 직선  $y=-3x+2$ 와  $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ 의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x = \frac{2}{5}, y = \frac{4}{5}$$

즉 구하는 수선의 발의 좌표는  $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ 이다.

$$\boxed{\text{답}} (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$$

**020-①** 직선 AB의 기울기는

$$\frac{2-1}{1-(-3)} = \frac{1}{4}$$

즉 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가  $-4$ 이고, 선분 AB의 중점  $(\frac{-3+1}{2}, \frac{1+2}{2})$ , 즉  $(-1, \frac{3}{2})$ 을 지나므로 그 직선의 방정식은

$$y - \frac{3}{2} = -4(x+1) \quad \therefore y = -4x - \frac{5}{2}$$

따라서 직선  $y = -4x - \frac{5}{2}$ 가 점  $(1, a)$ 를 지나므로

$$a = -4 - \frac{5}{2} = -\frac{13}{2} \quad \boxed{\text{답}} -\frac{13}{2}$$

**020-②** 선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$(\frac{2 \cdot 6 + 1 \cdot 0}{2+1}, \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 3}{2+1}), \text{ 즉 } (4, 1)$$

직선 AB의 기울기는

$$\frac{0-3}{6-0} = -\frac{1}{2}$$

즉 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 기울기가 2이고 점  $(4, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=2(x-4) \quad \therefore y=2x-7$$

따라서 구하는 직선의 y절편은  $-7$ 이다.  $\boxed{\text{답}} -7$

**021-①**  $(3k+1)x - (2k+4)y - 4k + 2 = 0$ 을  $k$ 에 대하여 정리하면

$$(3x-2y-4)k + (x-4y+2) = 0$$

이 식이  $k$ 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$3x-2y-4=0, x-4y+2=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면  $x=2, y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는  $(2, 1)$ 이다.  $\boxed{\text{답}} (2, 1)$

**021-②**  $2(m-1)x + (3m+1)y + m + 3 = 0$ 을  $m$ 에 대하여 정리하면

$$(2x+3y+1)m + (-2x+y+3) = 0$$

이 식이  $m$ 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x+3y+1=0, -2x+y+3=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면  $x=1, y=-1$

따라서 점 P의 좌표는  $(1, -1)$ 이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \boxed{\text{답}} \sqrt{2}$$

**022-①**  $y=mx+2m$ 을  $m$ 에 대하여 정리하면

$$m(x+2)-y=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

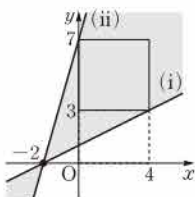
이 식이  $m$ 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+2=0, y=0$$

$$\therefore x=-2, y=0$$

즉 직선  $\textcircled{1}$ 은  $m$ 의 값에 관계없이 항상 점  $(-2, 0)$ 을 지난다.

$m$ 은 직선  $\textcircled{1}$ 의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선  $\textcircled{1}$ 이 주어진 정사각형과 만나도록 움직여 보면



(i) 직선  $\textcircled{1}$ 이 점  $(4, 3)$ 을 지날 때,

$$6m-3=0 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선  $\textcircled{1}$ 이 점  $(0, 7)$ 을 지날 때,

$$2m-7=0 \quad \therefore m=\frac{7}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는  $m$ 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{2}$$

$$\text{답} \quad \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{2}$$

**022-②**  $y=mx+m-2$ 를  $m$ 에 대하여 정리하면

$$(x+1)m+(-y-2)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

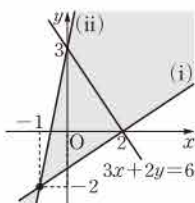
이 식이  $m$ 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+1=0, -y-2=0$$

$$\therefore x=-1, y=-2$$

즉 직선  $\textcircled{1}$ 은  $m$ 의 값에 관계없이 항상 점  $(-1, -2)$ 를 지난다.

$m$ 은 직선  $\textcircled{1}$ 의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선  $\textcircled{1}$ 이 직선  $3x+2y=6$ 과 제1사분면에서 만나도록 움직여 보면



(i) 직선  $\textcircled{1}$ 이 점  $(2, 0)$ 을 지날 때,

$$3m-2=0 \quad \therefore m=\frac{2}{3}$$

(ii) 직선  $\textcircled{1}$ 이 점  $(0, 3)$ 을 지날 때,

$$m-5=0 \quad \therefore m=5$$

(i), (ii)에서  $m$ 의 값의 범위는

$$\frac{2}{3} < m < 5$$

따라서 정수  $m$ 은 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$1+2+3+4=10$$

답 10

**023-①** 직선  $3x+2y-5=0$ 은 직선  $x-2y-6=0$

에 평행하지 않으므로 두 직선  $2x-3y+1=0$ ,

$3x+2y-5=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$(2x-3y+1)+k(3x+2y-5)=0,$$

$$\text{즉 } (2+3k)x+(-3+2k)y+1-5k=0$$

( $k$ 는 실수)  $\dots\dots \textcircled{1}$

으로 놓을 수 있다.

이 직선이 직선  $x-2y-6=0$ 에 평행하므로

$$\frac{2+3k}{1} = \frac{-3+2k}{-2} \neq \frac{1-5k}{-6}$$

$$\frac{2+3k}{1} = \frac{-3+2k}{-2} \text{에서}$$

$$-2(2+3k)=-3+2k$$

$$\therefore k=-\frac{1}{8}$$

$k=-\frac{1}{8}$ 을  $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 구하는 직선의 방정식은

$$x-2y+1=0$$

$$\text{답} \quad x-2y+1=0$$

**024-①** 직선  $x-2y+5=0$ , 즉  $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 의 기

울기가  $\frac{1}{2}$ 이므로 구하는 직선의 기울기는  $-2$ 이다.

구하는 직선의 방정식을  $y=-2x+n$ 이라 하면 원점과 직선  $y=-2x+n$ , 즉  $2x+y-n=0$  사이의 거리가  $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|-n|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}, \quad |n|=5$$

$$\therefore n=-5 \text{ 또는 } n=5$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=-2x-5 \text{ 또는 } y=-2x+5$$

$$\text{답} \quad y=-2x-5, y=-2x+5$$

**024-②**  $x+(k+1)y+k=0$ 을  $k$ 에 대하여 정리하면

$$(y+1)k+x+y=0$$

이 식이  $k$ 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$y+1=0, x+y=0$$

$$\therefore x=1, y=-1$$

즉 점  $P$ 의 좌표는  $(1, -1)$ 이므로 점  $P(1, -1)$ 과 직선  $3x+y-4=0$  사이의 거리는

$$\frac{|3-1-4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{답} \quad \frac{\sqrt{10}}{5}$$

**025-①** 두 직선  $x-2y+1=0$ ,  $x-2y+6=0$ 은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선

$x-2y+1=0$  위의 한 점  $(-1, 0)$ 과 직선

$x-2y+6=0$  사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|-1+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \text{답 } \sqrt{5}$$

**025-2** 두 직선  $x+my+1=0$ ,  $x+my+m-3=0$  이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선  $x+my+1=0$  위의 한 점  $(-1, 0)$ 과 직선  $x+my+m-3=0$  사이의 거리와 같다. 즉

$$\frac{|-1+m-3|}{\sqrt{1+m^2}} = 3, \quad |m-4| = 3\sqrt{1+m^2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$m^2 - 8m + 16 = 9m^2 + 9 \\ \therefore 8m^2 + 8m - 7 = 0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수  $m$ 의 값의 합은

$$-\frac{8}{8} = -1 \quad \text{답 } -1$$

**Remark▶**

이차방정식  $8m^2+8m-7=0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4^2 - 8 \cdot (-7) = 72 > 0$$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

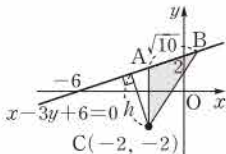
**025-3** 두 직선  $2x+ay-5=0$ ,  $x-3y+2=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{2}{1} = \frac{a}{-3} \neq \frac{-5}{2} \quad \therefore a = -6$$

따라서 구하는 거리는 직선  $x-3y+2=0$  위의 한 점  $(-2, 0)$ 과 직선  $2x-6y-5=0$  사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2}} = \frac{9}{\sqrt{40}} = \frac{9\sqrt{10}}{20} \\ \text{답 } a = -6, \text{ 거리: } \frac{9\sqrt{10}}{20}$$

**026-1**



점  $C(-2, -2)$ 와 직선  $x-3y+6=0$  사이의 거리를  $h$ 라 하면

$$h = \frac{|-2-3 \cdot (-2)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \sqrt{10}$$

따라서  $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5 \quad \text{답 } 5$$

**026-2** 선분 AC의 길이는

$$AC = \sqrt{4^2 + (8-2)^2} \\ = 2\sqrt{13}$$

직선 AC의 방정식은

$$y-2 = \frac{8-2}{4-0}x$$

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

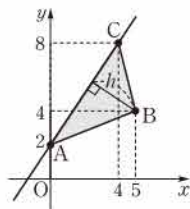
$$\therefore 3x - 2y + 4 = 0$$

점  $B(5, 4)$ 와 직선  $3x-2y+4=0$  사이의 거리를  $h$ 라 하면

$$h = \frac{|3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{11}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}$$

따라서  $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \frac{11\sqrt{13}}{13} = 11 \quad \text{답 } 11$$



**026-3** 오른쪽 그림과 같이

두 직선  $y=x$ ,  $2x+y=12$ 의

교점을 A라 하면

$$A(4, 4)$$

두 직선  $y=2x$ ,  $2x+y=12$ 의

교점을 B라 하면

$$B(3, 6)$$

선분 AB의 길이는

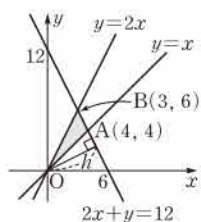
$$AB = \sqrt{(3-4)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{5}$$

원점과 직선  $2x+y=12$ , 즉  $2x+y-12=0$  사이의 거리를  $h$ 라 하면

$$h = \frac{|-12|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{12\sqrt{5}}{5} = 6 \quad \text{답 } 6$$



**027-1** 오른쪽 그림에서 직

선  $2x+y-1=0$  위의 임의의

점 P의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면

$$2a+b-1=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

선분 OP의 중점 M의 좌표를

$(x, y)$ 라 하면

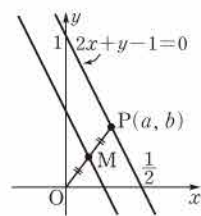
$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$$

이므로  $a=2x$ ,  $b=2y$

$\cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 을  $\textcircled{2}$ 에 대입하면 구하는 점 M의 자취의 방정식은

$$4x+2y-1=0 \quad \text{답 } 4x+2y-1=0$$



**Remark▶**

앞에서 구한 자취의 방정식

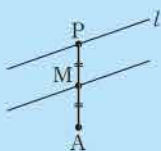
$4x+2y-1=0$ 은 주어진 직선

$2x+y-1=0$ 에 평행하면서  $y$ 절편

만  $\frac{1}{2}$  배로 변한 것임을 알 수 있다.

일반적으로 정점 A와 정직선  $l$ 이 주

어질 때,  $l$  위의 임의의 점 P에 대하여 선분 AP의 중점 M의 자취는 직선  $l$ 에 평행하고 선분 AP의 중점을 지나는 직선이다.



**027-2** 구하는 예각의 이등분선 위의 한 점을  $P(x, y)$ 라 하면 점 P에서 두 직선  $x+2y-1=0$ ,  $2x+y-3=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

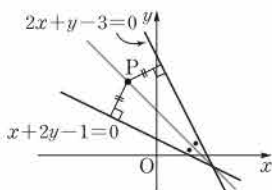
$$\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|x+2y-1| = |2x+y-3|$$

따라서  $x+2y-1 = \pm(2x+y-3)$ 이므로

$$x-y-2=0 \text{ 또는 } 3x+3y-4=0$$

그런데 오른쪽 그림에서 주어진 두 직선이 만나서 생기는 예각의 이등분선의 기울기는 음수이므로 구하는 직선의 방정식은



$$3x+3y-4=0$$

$$\text{답 } 3x+3y-4=0$$

**중단원 연습 문제**

본책 69~73쪽

**01** ④    **02** ②    **03**  $y=-x+2$

**04** 제4사분면    **05** 1    **06** ⑤

**07**  $y=-2x+12$     **08**  $\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{4}{3}$     **09** ②

**10** ③    **11**  $y=1, y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

**12**  $\frac{31}{2}$     **13**  $x+2y-1=0$     **14** ④

**15** (1, 1)    **16**  $\frac{6}{5}$     **17** ⑤

**18**  $-6 < a < -\frac{1}{2}$     **19** ②    **20** 6    **21** ③

**22** ⑤    **23** 4    **24** ⑤    **25** 15

**01** **전략** 직선이  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 할 때, 직선의 기울기는  $\tan \theta$ 임을 이용한다.

**풀이** 직선  $(a-2)x-y+b+1=0$ 에서

$$y=(a-2)x+b+1$$

이 직선이  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가  $45^\circ$ 이므로

$$a-2=\tan 45^\circ=1 \quad \therefore a=3$$

따라서 직선  $x-y+b+1=0$ 이 점  $(-2, 2)$ 를 지나므로

$$-2-2+b+1=0 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=6$$

**답** ④

**02** **전략** 두 점  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ 에 대하여 선분 AB를  $m:n(m>0, n>0)$ 으로 내분하는 점의 좌표는  $(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n})$ 임을 이용한다.

**풀이** 선분 AB를 5:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$(\frac{5 \cdot 5 + 3 \cdot (-3)}{5+3}, \frac{5 \cdot (-12) + 3 \cdot 4}{5+3}), \text{ 즉 } (2, -6)$$

두 점  $(2, -6)$ ,  $(6, 14)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-6)=\frac{14-(-6)}{6-2}(x-2) \quad \therefore y=5x-16$$

$y=0$ 을  $y=5x-16$ 에 대입하면

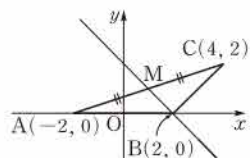
$$0=5x-16 \quad \therefore x=\frac{16}{5}$$

따라서 구하는 직선의  $x$ 절편은  $\frac{16}{5}$ 이다.

**답** ②

**03** **전략** 점 B를 지나고  $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하는 직선은  $\overline{AC}$ 의 중점을 지남을 이용한다.

**풀이** 점 B를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 AC의 중점을 지나야 한다.



선분 AC의 중점을 M이라 하면

$$M(\frac{-2+4}{2}, \frac{0+2}{2}) \quad \therefore M(1, 1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

따라서 두 점  $B(2, 0)$ ,  $M(1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{1-0}{1-2}(x-2) \quad \therefore y=-x+2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{답 } y=-x+2$$

| 채점 기준                                           | 비율   |
|-------------------------------------------------|------|
| ① 선분 AC의 중점의 좌표를 구할 수 있다.                       | 50 % |
| ② $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구할 수 있다. | 50 % |

**04 [전략]** 직선  $bx+(a+2)y-1=0$ 의 기울기와  $y$ 절편의 부호를 조사한다.

**풀이**  $y$ 축에 평행하고 제1사분면과 제4사분면을 지나는 직선의 방정식은

$$x=k (k>0)$$

풀이므로  $x+ay+b=0$ 에서

$$a=0, b<0$$

직선  $bx+(a+2)y-1=0$ 에서

$$bx+2y-1=0 \quad \therefore y=-\frac{b}{2}x+\frac{1}{2}$$

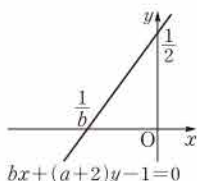
$b<0$ 에서  $-\frac{b}{2}>0$ 이므로 직선  $bx+2y-1=0$ 의 기울기와  $y$ 절편은 모두 양수이다.

따라서 직선

$bx+(a+2)y-1=0$ 의 개형

은 오른쪽 그림과 같으므로

제4사분면을 지나지 않는다.



답 제4사분면

**05 [전략]** 두 직선이 두 개 이상의 교점을 가지려면 두 직선이 일치해야 한다.

**풀이** 두 직선이 두 개 이상의 교점을 가지려면 두 직선이 일치해야 하므로

$$\frac{1}{a} = \frac{-(a+1)}{-2a} = \frac{a}{1} \quad \dots\dots ①$$

$$(i) \frac{1}{a} = \frac{-(a+1)}{-2a} \text{에서} \quad a^2+a=2a$$

$$a(a-1)=0 \quad \therefore a=1 (\because a \neq 0)$$

$$(ii) \frac{1}{a} = \frac{a}{1} \text{에서} \quad a^2=1$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=1$$

$$(i), (ii) \text{에서} \quad a=1$$

답 1

**06 [전략]** 서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 세 직선이 모두 평행하거나 어느 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나는 경우이다.

**풀이** 세 직선

$$x-y=0 \quad \dots\dots ①$$

$$x+2y-4=0 \quad \dots\dots ②$$

$$2x-ky-10=0 \quad \dots\dots ③$$

에서 두 직선 ①, ②은 한 점에서 만나므로 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 ①, ③이 서로 평행할 때,

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-k} \neq \frac{0}{-10} \quad \therefore k=2$$

(ii) 두 직선 ①, ③이 서로 평행할 때,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{-k} \neq \frac{-4}{-10} \quad \therefore k=-4$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

$$①, ② \text{을 연립하여 풀면} \quad x=\frac{4}{3}, y=\frac{4}{3}$$

즉 두 직선 ①, ②의 교점의 좌표가  $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ 이므로

직선 ③이 점  $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ 를 지나야 한다.

$$2 \cdot \frac{4}{3} - k \cdot \frac{4}{3} - 10 = 0 \text{에서} \quad k = -\frac{11}{2}$$

이상에서 모든 실수  $k$ 의 값의 합은

$$2 + (-4) + \left(-\frac{11}{2}\right) = -\frac{15}{2}$$

답 ⑤

**07 [전략]** 주어진 직선의 방정식을  $k$ 에 대하여 정리한 후, 이 등식이  $k$ 에 대한 항등식임을 이용한다.

**풀이**  $3(k+1)x-(k+4)y-3k+15=0$ 을  $k$ 에 대하여 정리하면

$$(3x-y-3)k + (3x-4y+15)=0$$

이 식이  $k$ 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$3x-y-3=0, 3x-4y+15=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=3, y=6 \quad \therefore P(3, 6)$$

따라서 기울기가  $-2$ 이고 점  $P(3, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=-2(x-3)$$

$$\therefore y=-2x+12$$

$$\text{답 } y=-2x+12$$

**08 [전략]** 주어진 직선이  $m$ 의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 찾는다.

**풀이**  $y=mx+2m+1$ 을  $m$ 에 대하여 정리하면

$$(x+2)m + (1-y)=0 \quad \dots\dots ①$$

이 식이  $m$ 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

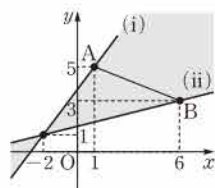
$$x+2=0, 1-y=0 \quad \therefore x=-2, y=1$$

즉 직선 ①은  $m$ 의 값에 관계없이 항상 점  $(-2, 1)$ 을 지난다.

$m$ 은 직선 ①의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ①이 선분 AB와 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ①이 점 A(1, 5)를 지날 때,

$$3m-4=0 \quad \therefore m=\frac{4}{3}$$



(ii) 직선 ㉠이 점 B(6, 3)을 지날 때,

$$8m-2=0 \quad \therefore m=\frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{2}$$

(i), (ii)에서 구하는  $m$ 의 값의 범위는

$$\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{4}{3} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } \frac{1}{4} \leq m \leq \frac{4}{3}$$

| 채점 기준                                          | 비율   |
|------------------------------------------------|------|
| ① 주어진 직선이 $m$ 의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 찾을 수 있다.     | 40 % |
| ② 주어진 직선이 두 점 A, B를 지날 때의 $m$ 의 값을 각각 구할 수 있다. | 40 % |
| ③ $m$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.                        | 20 % |

**09 [전략]** 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하여 조건을 만족시키는  $a$ 의 값을 구한다.

**풀이** 직선  $x+y-2=0$ 은 점 (3, 5)를 지나지 않으므로 두 직선  $2x-y+5=0$ ,  $x+y-2=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$(2x-y+5)+k(x+y-2)=0 \quad (k \text{는 실수})$$

으로 놓을 수 있다. 이 직선이 점 (3, 5)를 지나므로

$$2 \cdot 3 - 5 + 5 + k(3 + 5 - 2) = 0, \quad 6 + 6k = 0$$

$$\therefore k = -1$$

따라서 직선의 방정식은

$$2x - y + 5 - (x + y - 2) = 0$$

$$\therefore x - 2y + 7 = 0$$

이 직선이 점 ( $a$ , -1)을 지나므로

$$a - 2 \cdot (-1) + 7 = 0 \quad \therefore a = -9 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

**10 [전략]** 두 직선의 교점을 구한 후, 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

**풀이** 연립방정식  $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$ 을 풀면

$$x=1, y=2$$

따라서 두 직선  $x-y+1=0$ ,  $x-2y+3=0$ 의 교점의 좌표가 (1, 2)이므로 이 점과 직선  $4x-2y=1$ , 즉  $4x-2y-1=0$  사이의 거리는

$$\frac{|4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10} \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

**11 [전략]** 구하는 직선의 기울기를  $m$ 이라 하고 직선의 방정식을 구한 후, 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

**풀이** 구하는 직선의 기울기를  $m$ 이라 하면 점 (2, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=m(x-2)$$

$$\therefore y=mx-2m+1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

원점과 직선  $y=mx-2m+1$ , 즉

$mx-y-2m+1=0$  사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \quad |-2m+1|=\sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4m^2-4m+1=m^2+1$$

$$3m^2-4m=0, \quad m(3m-4)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{4}{3}$$

따라서 ㉠에서 구하는 직선의 방정식은

$$y=1 \text{ 또는 } y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$$

$$\text{답 } y=1, y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$$

**12 [전략]** 직선 AB의 방정식을 구하여 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 구한다.

**풀이** 선분 AB의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(-3-5)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{73} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

직선 AB의 방정식은

$$y = \frac{3-0}{-3-5}(x-5)$$

$$\therefore 3x+8y-15=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

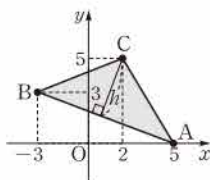
점 C(2, 5)와 직선  $3x+8y-15=0$  사이의 거리를  $h$ 라 하면

$$h = \frac{|3 \cdot 2 + 8 \cdot 5 - 15|}{\sqrt{3^2 + 8^2}} = \frac{31}{\sqrt{73}} \quad \cdots \textcircled{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{73} \cdot \frac{31}{\sqrt{73}} = \frac{31}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\text{답 } \frac{31}{2}$$



| 채점 기준                         | 비율   |
|-------------------------------|------|
| ① 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.         | 20 % |
| ② 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.        | 30 % |
| ③ 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 구할 수 있다. | 30 % |
| ④ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.          | 20 % |

**13 [전략]** 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 ( $x$ ,  $y$ )로 놓고,  $x$ 와  $y$  사이의 관계식을 구한다.

**풀이** 직선  $2x+4y-3=0$  위의 임의의 점 P의 좌표를 ( $a$ ,  $b$ )라 하면

$$2a+4b-3=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

선분 AP를 2:1로 내분하는 점의 좌표를  $(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{2 \cdot a + 1 \cdot 2}{2+1} = \frac{2a+2}{3}$$

$$y = \frac{2 \cdot b + 1 \cdot (-1)}{2+1} = \frac{2b-1}{3}$$

$$\therefore a = \frac{3x-2}{2}, b = \frac{3y+1}{2} \quad \dots\dots ㉔$$

㉔을 ㉑에 대입하면 구하는 자취의 방정식은

$$2 \cdot \frac{3x-2}{2} + 4 \cdot \frac{3y+1}{2} - 3 = 0$$

$$\therefore x + 2y - 1 = 0 \quad \text{답 } x + 2y - 1 = 0$$

**Remark ▶**

구하는 자취의 방정식이 주어진 직선과 기울기가 같은 직선의 방정식임을 이해하면 점 A(2, -1)과 주어진 직선 위의 한 점, 예를 들어 점 P( $\frac{3}{2}$ , 0)에 대하여 선분 AP를 2:1로 내분하는 점만 구해도 자취의 방정식을 구할 수 있다.

**14 전략** 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

**풀이** 직사각형의 대각선은 서로를 이등분하므로 작은 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{2+4}{2}\right), \text{ 즉 } (1, 3)$$

큰 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{-6-2}{2}, \frac{-5-3}{2}\right), \text{ 즉 } (-4, -4)$$

따라서 두 점 (1, 3), (-4, -4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{-4-3}{-4-1}(x-1)$$

$$\therefore 7x - 5y + 8 = 0 \quad \dots\dots ㉑$$

㉑이  $ax + by + 8 = 0$ 과 같아야 하므로

$$a = 7, b = -5$$

$$\therefore a + b = 2 \quad \text{답 } 4$$

**15 전략** 높이가 같은 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같음을 이용하여 두 점 P, Q가 AB와 AO를 각각 어떻게 내분하는 점인지 파악한다.

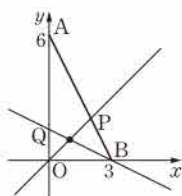
**풀이** 조건 (가)에 의하여

$$\overline{BP} : \overline{BA} = 1 : 3$$

즉  $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$ 이므로

점 P는 선분 AB를 2:1로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는



$$\left(\frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{2+1}, \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 6}{2+1}\right), \text{ 즉 } (2, 2)$$

이므로 직선 OP의 방정식은

$$y = x \quad \dots\dots ㉒ \quad \rightarrow 1$$

또 조건 (나)에 의하여

$$\overline{OQ} : \overline{OA} = 1 : 4$$

즉  $\overline{AQ} : \overline{QO} = 3 : 1$ 이므로 점 Q는 선분 AO를 3:1로 내분하는 점이다.

따라서 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{3+1}, \frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot 6}{3+1}\right), \text{ 즉 } \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

이므로 직선 BQ의 방정식은

$$\frac{x}{3} + y \div \frac{3}{2} = 1, \text{ 즉 } \frac{x}{3} + \frac{2}{3}y = 1$$

$$\therefore x + 2y = 3 \quad \dots\dots ㉓ \quad \rightarrow 2$$

㉑, ㉓을 연립하여 풀면  $x = 1, y = 1$

따라서 두 직선 OP, BQ의 교점의 좌표는 (1, 1)이다.

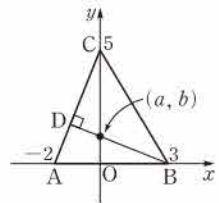
$\rightarrow 3$

답 (1, 1)

| 채점 기준                           | 비율   |
|---------------------------------|------|
| ① 직선 OP의 방정식을 구할 수 있다.          | 40 % |
| ② 직선 BQ의 방정식을 구할 수 있다.          | 40 % |
| ③ 두 직선 OP, BQ의 교점의 좌표를 구할 수 있다. | 20 % |

**16 전략** 점 C에서 변 AB에 그은 수선은 y축임을 이용한다.

**풀이** 세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 점 C에서 변 AB에 그은 수선은 y축이다. 따라서 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하면 선분 BD와 y축이 만나는 점이  $\triangle ABC$ 의 수심이다.



$\rightarrow 1$

직선 AC의 기울기가  $\frac{5}{2}$ 이므로 직선 BD는 기울기가  $-\frac{2}{5}$ 이고 점 B(3, 0)을 지나는 직선이다.

즉 직선 BD의 방정식은

$$y = -\frac{2}{5}(x-3) \quad \therefore y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5} \quad \dots\dots ㉔ \quad \rightarrow 2$$

선분 BD와 y축의 교점의 좌표는  $\left(0, \frac{6}{5}\right)$ 이므로

$$a = 0, b = \frac{6}{5} \quad \therefore a + b = \frac{6}{5} \quad \dots\dots ㉕ \quad \rightarrow 3$$

답  $\frac{6}{5}$

| 채점 기준                  | 비율   |
|------------------------|------|
| ① △ABC의 수심을 찾을 수 있다.   | 40 % |
| ② 직선 BD의 방정식을 구할 수 있다. | 40 % |
| ③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.  | 20 % |

**17 [전략]** 두 직선  $ax+by+c=0$ ,  $a'x+b'y+c'=0$ 이 서로 평행하면  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ 임을 이용한다.

**풀이**  $\therefore (x-y-3)+k(x+y+1)=0$ 이  $k$ 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-y-3=0, x+y+1=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=1, y=-2$$

이므로 직선  $l$ 은 항상 점  $(1, -2)$ 를 지난다.

$\therefore (x-y-3)+k(x+y+1)=0$ 에서

$$(k+1)x+(k-1)y+k-3=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

직선  $\textcircled{1}$ 이 직선  $x+y+1=0$ 에 평행하려면

$$k+1=k-1 \neq k-3 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

그런데  $\textcircled{2}$ 을 만족시키는 실수  $k$ 는 존재하지 않으므로 직선  $x+y+1=0$ 에 평행한 직선  $l$ 은 존재하지 않는다.

$\therefore$  두 점  $(1, 2)$ ,  $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-1-2}{2-1} = -3$$

$k \neq 1$ 일 때, 직선  $\textcircled{1}$ 의 기울기는  $-\frac{k+1}{k-1}$ 이므로 두

직선이 서로 수직이라면

$$-\frac{k+1}{k-1} = \frac{1}{3}, \quad 3k+3 = -k+1$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2}$$

따라서  $k = -\frac{1}{2}$ 일 때 직선  $l$ 은 두 점  $(1, 2)$ ,

$(2, -1)$ 을 지나는 직선과 수직이다.

이상에서  $\therefore$ ,  $\therefore$ ,  $\therefore$  모두 옳다. **답** ⑤

**18 [전략]** 주어진 직선이  $a$ 의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 찾는다.

**풀이**  $ax+y+2a+2=0$ 을  $a$ 에 대하여 정리하면  $(x+2)a+(y+2)=0 \quad \dots \dots \textcircled{1}$

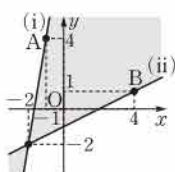
이 식이  $a$ 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+2=0, y+2=0$$

$$\therefore x=-2, y=-2$$

즉 직선  $\textcircled{1}$ 은  $a$ 의 값에 관계없이 항상 점  $(-2, -2)$ 를 지난다.

$-a$ 는 직선  $\textcircled{1}$ 의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선  $\textcircled{1}$ 이 두 점 A, B 사이를 지나도록 움직여 보면



(i) 직선  $\textcircled{1}$ 이 점 A $(-1, 4)$ 를 지날 때,

$$a+6=0 \quad \therefore a=-6$$

(ii) 직선  $\textcircled{1}$ 이 점 B $(4, 1)$ 을 지날 때,

$$6a+3=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는  $a$ 의 값의 범위는

$$-6 < a < -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -6 < a < -\frac{1}{2}$$

**19 [전략]** 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여  $f(k)$ 를  $k$ 에 대한 식으로 나타낸다.

**풀이** 원점과 직선  $x-y-2+k(x+y)=0$ , 즉  $(k+1)x+(k-1)y-2=0$  사이의 거리  $f(k)$ 는

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{|-2|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2(k^2+1)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}} \end{aligned}$$

이므로  $f(k)$ 는  $\sqrt{k^2+1}$ 의 값이 최소일 때 최댓값을 갖는다.

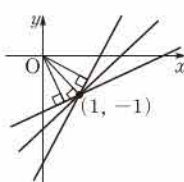
그런데  $k$ 는 실수이므로  $k^2 \geq 0$

즉  $\sqrt{k^2+1} \geq 1$ 이므로  $\sqrt{k^2+1}$ 의 최솟값은 1이다.

따라서  $f(k)$ 는  $\sqrt{k^2+1}=1$ , 즉  $k=0$ 일 때 최댓값  $\sqrt{2}$ 를 갖는다. **답** ②

**다른 풀이** 직선  $x-y-2+k(x+y)=0$ 은  $k$ 의 값에 관계없이 두 직선  $x-y-2=0$ ,  $x+y=0$ 의 교점  $(1, -1)$ 을 지나는 직선이다.

즉  $f(k)$ 는 원점과 점  $(1, -1)$ 을 지나는 직선 사이의 거리이다. 따라서 오른쪽 그림에서  $f(k)$ 가 최대일 때는  $f(k)$ 의 값이 원점과 점  $(1, -1)$  사이의 거리와 같을 때이므로 구하는 최댓값은  $\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$



**20 [전략]** 두 직선이 각각  $k$ 의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 구하고, 두 직선의 위치 관계를 살펴본다.

**풀이**  $x+ky-3=0$ 을  $k$ 에 대하여 정리하면  $yk+x-3=0$

이 식이  $k$ 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$y=0, x-3=0 \quad \therefore x=3, y=0$$

따라서 직선  $x+ky-3=0$ 은  $k$ 의 값에 관계없이 항상 점  $(3, 0)$ 을 지난다.

또  $kx-y+3k=0$ 을  $k$ 에 대하여 정리하면

$$(x+3)k-y=0$$

이 식이  $k$ 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+3=0, y=0$$

$$\therefore x=-3, y=0$$

따라서 직선  $kx-y+3k=0$ 은  $k$ 의 값에 관계없이 항상 점  $(-3, 0)$ 을 지난다.

한편  $1 \cdot k + k \cdot (-1) = 0$ 이므로 두 직선

$x+ky-3=0$ ,  $kx-y+3k=0$ 은 서로 수직이다.

오른쪽 그림과 같이  $A(3, 0)$ ,

$B(-3, 0)$ 이라 하면 두 직선

이 서로 수직이므로 두 직선의

교점  $P$ 는 선분  $AB$ 를 지름으

로 하는 원 위의 점이다.

따라서 점  $P$ 의 자취의 길이는

반지름의 길이가 3인 원의 둘레의 길이와 같으므로

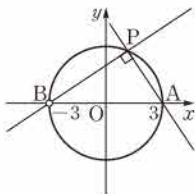
$$2\pi \cdot 3 = 6\pi$$

$$\therefore p=6$$

답 6

#### Remark▶

직선  $x+ky-3=0$ 은 점  $A(3, 0)$ 을 지나는 직선 중에서 직선  $y=0$ 을 포함하지 않고, 직선  $kx-y+3k=0$ 은 점  $B(-3, 0)$ 을 지나는 직선 중에서 직선  $x=-3$ 을 포함하지 않는다. 따라서 선분  $AB$ 를 지름으로 하는 원 위의 점 중 점  $B(-3, 0)$ 에서는 두 직선의 교점이 생기지 않으므로 점  $P$ 의 자취는 이 점을 제외한 원이다.



**21** [전략] 변  $BC$ 의 중점  $M$ 에 대하여 두 직선  $AM$ ,  $BC$ 가 서로 수직임을 이용한다.

[풀이] 오른쪽 그림과 같이

선분  $BC$ 의 중점을  $M$ 이라

하면  $\triangle ABC$ 는  $\overline{AB}=\overline{AC}$

인 이등변삼각형이므로 두

직선  $AM$ ,  $BC$ 는 서로 수직

이다.

이때 점  $M$ 은 직선

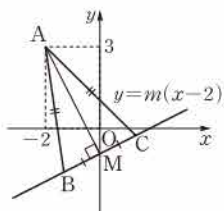
$y=m(x-2)$ 와  $y$ 축이 만나는 점이므로

$$M(0, -2m)$$

직선  $BC$ 의 기울기는  $m$ 이고 직선  $AM$ 의 기울기는

$$\frac{-2m-3}{0-(-2)}, \text{ 즉 } \frac{-2m-3}{2} \text{ 이므로}$$

$$m \cdot \frac{-2m-3}{2} = -1$$



$$2m^2+3m-2=0, \quad (m+2)(2m-1)=0$$

$$\therefore m=\frac{1}{2} (\because m>0)$$

답 ③

**22** [전략] 직선  $AP$ 의 기울기를 이용하여 직선  $l$ 의 기울기를 구한 후 직선의 방정식을 구한다.

[풀이] 직선  $AP$ 의 기울기는  $\frac{0-1}{t-0} = -\frac{1}{t}$

따라서 직선  $l$ 의 기울기는  $t$ 이므로 직선  $l$ 의 방정식은

$$y=t(x-t) \quad \dots\dots ㉠$$

ㄱ. 직선  $l$ 의 기울기는  $t$ 이므로  $t=1$ 일 때, 직선  $l$ 의 기울기는 1이다.

ㄴ.  $x=3, y=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$2=t(3-t), \quad t^2-3t+2=0$$

$$(t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 점  $(3, 2)$ 를 지나는 직선  $l$ 은  $y=x-1$ ,

$y=2x-4$ 의 2개이다.

ㄷ. ㉠을 부등식  $y \leq ax^2$ 에 대입하면

$$t(x-t) \leq ax^2$$

$$ax^2-tx+t^2 \geq 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡이 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하려면

$$a>0 \quad \dots\dots ㉢$$

또 방정식  $ax^2-tx+t^2=0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D=(-t)^2-4at^2 \leq 0, \quad t^2(1-4a) \leq 0$$

$$1-4a \leq 0 (\because t^2 > 0)$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{4} \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣에서  $a \geq \frac{1}{4}$ 이므로  $a$ 의 최솟값은  $\frac{1}{4}$ 이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

**23** [전략] 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분함을 이용한다.

[풀이] 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 직선  $l$ 은 선분  $AC$ 의 수직이등분선이다.

직선  $AC$ 의 기울기는

$$\frac{1-3}{5-1} = -\frac{1}{2}$$

이므로 직선  $l$ 의 기울기는 2이다.

선분  $AC$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 2)$$

이므로 직선  $l$ 은 점  $(3, 2)$ 를 지난다.

따라서 직선  $l$ 의 방정식은

$$y-2=2(x-3) \quad \therefore 2x-y-4=0$$

즉  $a=-1, b=-4$ 이므로  $ab=4$

답 4

**24 [전략]** 직선  $l$ 의 방정식을 구한 후 점 A와 직선  $l$  사이의 거리가 정사각형 ABCD의 한 변의 길이와 같음을 이용한다.

**풀이** 직선  $l$ 의  $x$ 절편이 6,  $y$ 절편이 3이므로 직선  $l$ 의 방정식은

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore x + 2y - 6 = 0$$

정사각형 ABCD의 넓이가  $\frac{81}{5}$ 이므로 한 변의 길이는  $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ 이다.

즉 점 A( $a$ , 6)과 직선  $l$  사이의 거리가  $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$\frac{|a + 2 \cdot 6 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

$$|a + 6| = 9, \quad a + 6 = \pm 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

**답** ⑤

**25 [전략]** 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 거리의 최솟값을 구한다.

**풀이** 직선  $y = 2x + k$ 와 평행하고 곡선  $y = -x^2 + 4$ 에 접하는 직선의 방정식을  $y = 2x + a$  ( $a$ 는 상수)라 하자.

$$-x^2 + 4 = 2x + a \text{에서}$$

$$x^2 + 2x + a - 4 = 0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - (a - 4) = 0 \quad \therefore a = 5$$

따라서 직선  $y = 2x + k$ 와 평행하고 곡선  $y = -x^2 + 4$ 에 접하는 직선의 방정식은  $y = 2x + 5$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 직선

$y = 2x + 5$  위의 한 점

(0, 5)와 직선  $y = 2x + k$ ,

즉  $2x - y + k = 0$  사이의

거리가 곡선  $y = -x^2 + 4$

위의 점과 직선  $y = 2x + k$

사이의 거리의 최솟값과 같으므로

$$\frac{|-5 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{5}$$

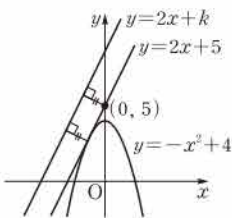
$$|k - 5| = 10, \quad k - 5 = \pm 10$$

$$\therefore k = 15 \text{ 또는 } k = -5$$

이때  $k = -5$ 이면 곡선  $y = -x^2 + 4$ 와 직선  $y = 2x - 5$ 가 만나므로  $k \neq -5$

$$\therefore k = 15$$

**답** 15



## 03

### 원의 방정식

I. 도형의 방정식

유제

본책 77~109쪽

**028-1** 원의 중심이  $y$ 축 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 (0,  $a$ ), 반지름의 길이를  $r$ 라 하면 원의 방정식은

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2$$

이 원이 두 점 (-2, 0), (2, 2)를 지나므로

$$(-2)^2 + (-a)^2 = r^2$$

$$\therefore 4 + a^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2^2 + (2 - a)^2 = r^2$$

$$\therefore 8 - 4a + a^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면  $a = 1, r^2 = 5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y - 1)^2 = 5$$

**답**  $x^2 + (y - 1)^2 = 5$

**다른 풀이** 원의 중심의 좌표를 (0,  $a$ )라 하면 점 (0,  $a$ )에서 두 점 (-2, 0), (2, 2)에 이르는 거리가 같으므로

$$\sqrt{(-2)^2 + (-a)^2} = \sqrt{2^2 + (2 - a)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 4 = a^2 - 4a + 8, \quad 4a = 4$$

$$\therefore a = 1$$

즉 원의 중심의 좌표는 (0, 1)이고, 원의 반지름의 길이는 두 점 (0, 1), (-2, 0) 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y - 1)^2 = 5$$

**028-2** 원  $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 과 중심이 같으므로 구하는 원의 중심의 좌표는 (-4, 2)이다.

구하는 원의 반지름의 길이를  $r$ 라 하면 원의 방정식은

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = r^2$$

이 원이 점 (-2, 1)을 지나므로

$$(-2 + 4)^2 + (1 - 2)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

**답**  $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$

**029-1** 구하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{1+3}{2}\right), \text{ 즉 } (2, 2)$$

또 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

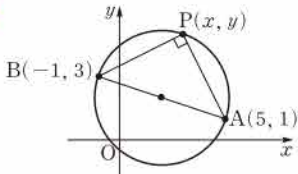
$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(-1-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$$

$$\text{답 } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$$

다른 풀이



위의 그림과 같이 원 위의 임의의 점을  $P(x, y)$ 라 하면  $\angle APB = 90^\circ$

따라서 삼각형 APB에서  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 = 40$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 2$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$$

**029-2** 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 PQ의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{10+8}{2}, \frac{1+5}{2}\right), \text{ 즉 } (9, 3)$$

또 선분 PQ가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{1}{2} \sqrt{(8-10)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{5}$$

따라서 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$$(x-9)^2 + (y-3)^2 = 5$$

즉  $x^2 + y^2 - 18x - 6y + 85 = 0$ 이므로

$$A = -18, B = -6, C = 85$$

$$\therefore A+B+C=61$$

답 61

**030-1** 주어진 세 점을  $P(-1, -1)$ ,  $Q(0, 2)$ ,  $R(1, 1)$ 이라 하자. 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심을  $C(a, b)$ 라 하면

$$\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR} \text{이므로 } \overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2$$

$$\overline{CP}^2 = (-1-a)^2 + (-1-b)^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2$$

$$\overline{CQ}^2 = (0-a)^2 + (2-b)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 4b + 4$$

$$\overline{CR}^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2$$

$$\overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 \text{에서 } a+3b=1$$

$$\overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2 \text{에서 } a-b=-1$$

$$\text{위의 두 식을 연립하여 풀면 } a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 반지름의 길이는

$$\overline{CP} = \sqrt{\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{10}}{2}$$

**030-2** 주어진 네 점을  $P(7, 4)$ ,  $Q(-5, 10)$ ,  $R(-1, -2)$ ,  $S(1, k)$ 라 하자. 네 점 P, Q, R, S를 지나는 원의 중심을  $C(a, b)$ 라 하면

$$\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR} \text{이므로 } \overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2$$

$$\overline{CP}^2 = (7-a)^2 + (4-b)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 14a - 8b + 65$$

$$\overline{CQ}^2 = (-5-a)^2 + (10-b)^2$$

$$= a^2 + b^2 + 10a - 20b + 125$$

$$\overline{CR}^2 = (-1-a)^2 + (-2-b)^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2a + 4b + 5$$

$$\overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 \text{에서 } 2a-b=-5$$

$$\overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2 \text{에서 } a-3b=-15$$

$$\text{위의 두 식을 연립하여 풀면 } a=0, b=5$$

따라서 원의 중심은 점  $C(0, 5)$ 이고 반지름의 길이는

$$\overline{CP} = \sqrt{(7-0)^2 + (4-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

이므로 원의 방정식은

$$x^2 + (y-5)^2 = 50$$

이때 점  $S(1, k)$ 가 이 원 위의 점이므로

$$1 + (k-5)^2 = 50, \quad k^2 - 10k - 24 = 0$$

$$(k+2)(k-12) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 12$$

답 -2, 12

**031-1**  $x^2 + y^2 + 4x - 8y + a = 0$ 을 변형하면

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 20-a$$

이 원의 중심의 좌표는  $(-2, 4)$ 이므로

$$b = -2, c = 4$$

원의 반지름의 길이는  $\sqrt{20-a}$ 이므로

$$\sqrt{20-a} = 5$$

양변을 제곱하면

$$20-a=25 \quad \therefore a=-5$$

$$\therefore a+b+c=-3$$

답 -3

**031-2** 방정식  $x^2 + y^2 + 8x + 2ky + 10k = 0$ 을 변형하면

$$(x+4)^2 + (y+k)^2 = k^2 - 10k + 16$$

이 방정식이 나타내는 도형이 넓이가  $9\pi$ 인 원이 되려면

$$k^2 - 10k + 16 = 9$$

$$\therefore k^2 - 10k + 7 = 0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수  $k$ 의 값의 곱은 7이다. 답 7

**032-①** 원의 중심의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면 반지름의 길이는  $|a|$ 이므로 이 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$$

이 원이 두 점  $(3, 0), (9, 0)$ 을 지나므로

$$(3-a)^2 + (0-b)^2 = a^2$$

$$\therefore b^2 - 6a + 9 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(9-a)^2 + (0-b)^2 = a^2$$

$$\therefore b^2 - 18a + 81 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면  $a=6, b=\pm 3\sqrt{3}$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 6으로 같으므로 두 원의 반지름의 길이의 합은

$$6+6=12$$

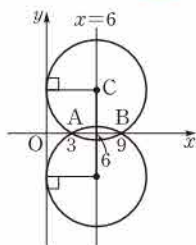
답 12

**다른 풀이**  $A(3, 0), B(9, 0)$

이라 하면 원의 중심  $C$ 는 선분  $AB$ 의 수직이등분선인 직선  $x=6$  위에 있다.

이때 원이  $y$ 축에 접하므로 중심  $C$ 의  $x$ 좌표의 절댓값이 반지름의 길이이다.

따라서 반지름의 길이가 6인 원이 2개이므로 구하는 반지름의 길이의 합은 12이다.



**032-②** 점  $(2, 4)$ 를 지나고  $x$ 축,  $y$ 축에 동시에 접하는 원의 중심은 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를  $a$ 라 하면 중심의 좌표는  $(a, a)$ 이고 원의 방정식은  $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$

이 원이 점  $(2, 4)$ 를 지나므로

$$(2-a)^2 + (4-a)^2 = a^2$$

$$a^2 - 12a + 20 = 0, \quad (a-2)(a-10) = 0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=10$$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 10이므로 두 원의 넓이의 합은

$$\pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 10^2 = 104\pi \quad \text{답 } 104\pi$$

**032-③** 원의 중심이 직선  $y=-x+1$  위에 있으므로 중심의 좌표를  $(a, -a+1)$ 이라 하면 반지름의 길이는  $|a|$ 이다. 즉 이 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y+a-1)^2 = a^2$$

이 원이 점  $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-a)^2 + (1+a-1)^2 = a^2$$

$$(2-a)^2 = 0 \quad \therefore a=2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$\text{답 } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

**033-①**  $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 이므로

$$2\overline{AP} = \overline{BP} \quad \therefore 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

점  $P$ 의 좌표를  $(x, y)$ 라 하면

$$4\{(x-1)^2 + y^2\} = (x-4)^2 + (y-3)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2y - 7 = 0$$

$$\therefore x^2 + (y+1)^2 = 8$$

따라서 점  $P$ 의 자취는 중심의 좌표가  $(0, -1)$ 이고 반지름의 길이가  $2\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$$2\pi \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi \quad \text{답 } 4\sqrt{2}\pi$$

**033-②** 점  $P$ 의 좌표를  $(x, y)$ 라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2 \text{ 이므로}$$

$$(x^2 + y^2) + \{(x-4)^2 + (y+2)^2\} = 20$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$$

따라서 점  $P$ 의 자취의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \quad \text{답 } x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$$

**Remark ▶**

세 점  $A, B, P$ 에 대하여  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2$ 이 성립하므로 삼각형  $PAB$ 는  $\angle P = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다. 즉 점  $P$ 의 자취는 두 점  $A, B$ 를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

**034-①**  $y=x+k$ 를  $x^2+y^2=3$ 에 대입하면

$$x^2 + (x+k)^2 = 3$$

$$\therefore 2x^2 + 2kx + k^2 - 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 할 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 3) > 0, \quad k^2 < 6$$

$$\therefore -\sqrt{6} < k < \sqrt{6}$$

따라서 정수  $k$ 는  $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다. 답 5

**034-②**  $y=2x+k$ 를  $x^2+y^2=4$ 에 대입하면

$$x^2 + (2x+k)^2 = 4$$

$$\therefore 5x^2 + 4kx + k^2 - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5(k^2 - 4) = 0$$

$$k^2 = 20$$

$$\therefore k = \pm 2\sqrt{5}$$

$$\text{답 } -2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$$

**035-①** 원의 중심  $(-4, 3)$ 과 직선  $ax - y - a = 0$  사이의 거리를  $d$ 라 하면

$$d = \frac{|-4a - 3 - a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{|5a + 3|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원과 직선이 접하려면  $d = 4$ 이어야 한다. 즉

$$\frac{|5a + 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 4, \quad |5a + 3| = 4\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$9a^2 + 30a - 7 = 0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수  $a$ 의 값의 곱은  $-\frac{7}{9}$ 이다.  $\text{답 } -\frac{7}{9}$

**036-①** 오른쪽 그림과 같이

원과 직선이 만나는 두 점을

A, B라 하고, 원의 중심

$(0, 0)$ 에서 직선  $y = 2x + 5$ ,

즉  $2x - y + 5 = 0$ 에 내린 수선

의 발을 H라 하면

$$\overline{OH} = \frac{|5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

따라서 직각삼각형 OAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{11}$$

이므로 구하는 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{11}$$

$$\text{답 } 2\sqrt{11}$$

**036-②** 오른쪽 그림과 같이

원과 직선이 만나는 두 점을

A, B, 원의 중심을 C라 하고,

원의 중심 C에서 직선

$y = x + 4$ 에 내린 수선의 발을

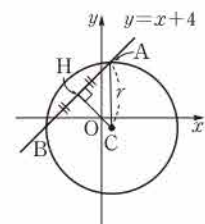
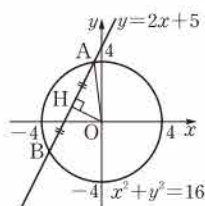
H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

또  $\overline{CH}$ 의 길이는 원의 중심 C(1, -1)과 직선

$y = x + 4$ , 즉  $x - y + 4 = 0$  사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH} = \frac{|1 + 1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{2}$$



따라서 직각삼각형 CAH에서

$$r = \overline{CA} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{답 } 3\sqrt{3}$$

**037-①**  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 6$$

원의 중심 (1, 2)와 직선  $2x + y + k = 0$  사이의 거리는

$$\frac{|2 + 2 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|k + 4|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가  $\sqrt{6}$ 이므로 원 위의 점 P와 직선  $2x + y + k = 0$  사이의 거리의

$$\text{최댓값은 } \frac{|k + 4|}{\sqrt{5}} + \sqrt{6}$$

$$\text{최솟값은 } \frac{|k + 4|}{\sqrt{5}} - \sqrt{6}$$

이때 최댓값과 최솟값의 합이 8이므로

$$\left(\frac{|k + 4|}{\sqrt{5}} + \sqrt{6}\right) + \left(\frac{|k + 4|}{\sqrt{5}} - \sqrt{6}\right) = 8$$

$$\frac{2|k + 4|}{\sqrt{5}} = 8, \quad |k + 4| = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore k = -4 - 4\sqrt{5} \text{ 또는 } k = -4 + 4\sqrt{5}$$

$$\text{답 } -4 - 4\sqrt{5}, -4 + 4\sqrt{5}$$

**037-②** 삼각형 PAB에서  $\overline{AB}$ 의 길이는

$$\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

로 일정하므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대이다.

직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-6} = 1$$

$$\therefore x - y - 6 = 0$$

원의 중심 (0, 0)과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|-6|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가  $\sqrt{2}$

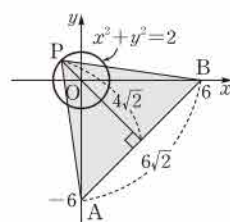
이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$$3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 24$$

$$\text{답 } 24$$



**038-①** 두 원의 중심의 좌표가 각각 (0, 0),

$(-2, a)$ 이므로 중심거리는

$$\sqrt{(-2)^2+a^2}=\sqrt{a^2+4}$$

두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 1이므로 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는

$$3-1<\sqrt{a^2+4}<3+1$$

$$\therefore 2<\sqrt{a^2+4}<4$$

각 변을 제곱하면

$$4<a^2+4<16, \quad 0<a^2<12$$

$$a^2-12<0, \quad a \neq 0$$

$$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0, \quad a \neq 0$$

$$\therefore -2\sqrt{3}<a<0 \text{ 또는 } 0<a<2\sqrt{3}$$

$$\boxed{\text{답}} -2\sqrt{3}<a<0 \text{ 또는 } 0<a<2\sqrt{3}$$

**039-①** 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2x+ay-4-(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$$

$$\therefore 2x+(a+2)y-8=0$$

이 직선과 직선  $y=x-1$ , 즉  $x-y-1=0$ 이 서로 수직이므로

$$2 \cdot 1 + (a+2) \cdot (-1) = 0$$

$$2-a-2=0 \quad \therefore a=0$$

$\boxed{\text{답}} 0$

**Remark ▶** 일반형으로 표현된 두 직선의 평행·수직

두 직선  $ax+by+c=0$ ,  $a'x+b'y+c'=0$  ( $abc \neq 0$ ,  $a'b'c' \neq 0$ )이

① 서로 평행하다.  $\Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

② 서로 수직이다.  $\Rightarrow aa'+bb'=0$

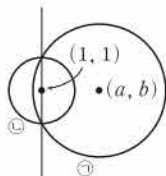
**039-②**  $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+6$

..... ㉠

..... ㉡

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4$$

원 ㉠이 원 ㉡의 둘레를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 ㉡의 중심  $(1, 1)$ 을 지나야 한다.



㉠에서

$$x^2+y^2-2ax-2by-6=0$$

㉡에서

$$x^2+y^2-2x-2y-2=0$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2ax-2by-6$$

$$-(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$$

$$\therefore (a-1)x+(b-1)y+2=0$$

이 직선이 점  $(1, 1)$ 을 지나므로

$$(a-1)+(b-1)+2=0$$

$$\therefore a+b=0$$

$\boxed{\text{답}} 0$

**040-①** 오른쪽 그

림과 같이 두 원의 교

점을 P, Q라 하고,

선분 PQ의 중점을 M

이라 하면 두 원의 중

심선은 공통현 PQ를

수직이등분하므로 직

각삼각형 POM에서

$$\overline{PM}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OM}^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{OP}$ 는 원  $x^2+y^2=9$ 의 반지름이므로  $\overline{OP}=3$

$(x-3)^2+(y-4)^2=9$ 에서

$$x^2+y^2-6x-8y+16=0$$

이므로 두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-6x-8y+16)=0$$

$$\therefore 6x+8y-25=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\overline{OM}$ 의 길이는 원점과 직선 ㉡ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{5}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \overline{PM}^2 = 3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

$$\therefore \overline{PM} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

따라서 구하는 공통현의 길이는

$$\overline{PQ} = 2\overline{PM} = 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} \quad \boxed{\text{답}} \sqrt{11}$$

**041-①** 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+12x+k(x^2+y^2-4x+4y-2)=0$$

$$(k \neq -1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이라 하면 이 원의 중심이  $y$ 축 위에 있으므로 중심의  $x$ 좌표는 0이어야 한다.

이때 원의 중심의  $x$ 좌표가 0이라면 ㉠의  $x$ 의 계수가 0이어야 하므로

$$12-4k=0 \quad \therefore k=3$$

$k=3$ 을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2+12x+3x^2+3y^2-12x+12y-6=0$$

$$4x^2+4y^2+12y-6=0$$

$$\therefore x^2+y^2+3y-\frac{3}{2}=0$$

$$\boxed{\text{답}} x^2+y^2+3y-\frac{3}{2}=0$$

**041-②** 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+4x-4+k(x^2+y^2+ax-6y+2)=0$$

$$(k \neq -1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이라 하면 이 원이 원점을 지나므로

$$-4+2k=0 \quad \therefore k=2$$

$k=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$x^2 + y^2 + 4x - 4 + 2x^2 + 2y^2 + 2ax - 12y + 4 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 + (2a+4)x - 12y = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2a+4}{3}x - 4y = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{a+2}{3}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{a^2+4a+40}{9}$$

이 원의 넓이가  $5\pi$ 이므로

$$\frac{a^2+4a+40}{9} = 5, \quad a^2+4a-5=0$$

$$(a+5)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

답 1

**042-①** 구하는 직선의 기울기는

$$\tan 45^\circ = 1$$

원  $x^2 + y^2 = 10$ 의 반지름의 길이는  $\sqrt{10}$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{10}\sqrt{1+1^2}$$

$$\therefore y = x \pm 2\sqrt{5}$$

$$\text{답 } y = x - 2\sqrt{5}, y = x + 2\sqrt{5}$$

**042-②**  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ 에서

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$$

구하는 직선은 직선  $x+3y-4=0$ , 즉  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

에 수직이므로 기울기는 3이다.

즉 구하는 직선의 방정식을  $y=3x+n$ 이라 하면 원의 중심  $(3, -2)$ 와 직선  $y=3x+n$ , 즉  $3x-y+n=0$  사이의 거리가 원의 반지름의 길이 5와 같으므로

$$\frac{|9+2+n|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = 5, \quad |n+11| = 5\sqrt{10}$$

$$\therefore n = -11 \pm 5\sqrt{10}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = 3x - 11 \pm 5\sqrt{10}$$

$$\text{답 } y = 3x - 11 - 5\sqrt{10}, y = 3x - 11 + 5\sqrt{10}$$

#### Remark▶

중심이 원점이 아닌 원의 접선의 방정식을 구할 때에는  
(원의 중심과 접선 사이의 거리) = (반지름의 길이)  
임을 이용하는 것이 편리하다.

**043-①** 원  $x^2 + y^2 = 5$  위의 점  $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2 \cdot x + (-1) \cdot y = 5$$

$$\therefore 2x - y = 5$$

이 직선의  $x$ 절편은  $\frac{5}{2}$ 이고  $y$ 절편은  $-5$ 이므로

$$P\left(\frac{5}{2}, 0\right), Q(0, -5)$$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = \frac{25}{4}$$

$$\text{답 } \frac{25}{4}$$

**043-②** 원의 중심  $(3, -2)$ 와 점  $(6, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-(-2)}{6-3} = \frac{4}{3}$$

접선은 원의 중심과 점점을 지나는 직선에 수직이므로  
접선의 기울기는  $-\frac{3}{4}$ 이다.

따라서 접선은 기울기가  $-\frac{3}{4}$ 이고 점  $(6, 2)$ 를 지나므로  
접선의 방정식은

$$y-2 = -\frac{3}{4}(x-6) \quad \therefore y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$$

따라서 접선의  $y$ 절편은  $\frac{13}{2}$ 이다.

$$\text{답 } \frac{13}{2}$$

**다른 풀이** 원  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$  위의 점  $(6, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$(6-3)(x-3) + (2+2)(y+2) = 25$$

$$3(x-3) + 4(y+2) = 25$$

$$\therefore 3x + 4y - 26 = 0$$

$x=0$ 을 위의 식에 대입하면

$$4y - 26 = 0 \quad \therefore y = \frac{13}{2}$$

따라서 접선의  $y$ 절편은  $\frac{13}{2}$ 이다.

**044-①**  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

접선의 기울기를  $m$ 이라 하면 원점을 지나는 접선의 방정식은

$$y = mx, \text{ 즉 } mx - y = 0$$

원의 중심  $(-2, 1)$ 과 직선  $mx - y = 0$  사이의 거리가  
원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1, \quad |2m+1| = \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3m^2 + 4m = 0, \quad m(3m+4) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{4}{3} \text{ 또는 } m = 0$$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 합은  $-\frac{4}{3}$ 이다.

$$\text{답 } -\frac{4}{3}$$

**다른 풀이** 접선의 방정식을  $y=mx$ 라 하고

$(x+2)^2+(y-1)^2=1$ 에 대입하면

$$(x+2)^2+(mx-1)^2=1$$

$$(1+m^2)x^2-2(m-2)x+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4}=\{-(m-2)\}^2-4(1+m^2)=0$$

$$-3m^2-4m=0, \quad m(3m+4)=0$$

$$\therefore m=-\frac{4}{3} \text{ 또는 } m=0$$

따라서 두 접선의 기울기의 합은  $-\frac{4}{3}$ 이다.

**045-①** 점 P에서 원에  
그은 접선의 접점을 T라  
하면  $PT=4\sqrt{2}$

오른쪽 그림에서

$$\overline{CT} \perp \overline{PT}$$

이므로 삼각형 CPT는

$\angle CTP=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때 구하는 원의 반지름의 길이를  $r$ 라 하면

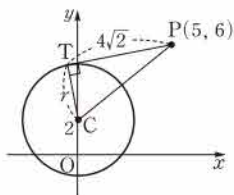
$$\overline{CT}=r,$$

$$\overline{CP}=\sqrt{(5-0)^2+(6-2)^2}=\sqrt{41}$$

이므로 직각삼각형 CPT에서

$$r=\sqrt{(\sqrt{41})^2-(4\sqrt{2})^2}=3$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 3이다. **답 3**



**045-②** 원의 중심을 C, 점  
점을 T라 하면  $PT=2$

오른쪽 그림에서

$$\overline{CT} \perp \overline{PT}$$

이므로 삼각형 CPT는

$\angle CTP=90^\circ$ 인 직각삼각  
형이다.

$C(1, 1)$ 이므로

$$\overline{CP}=\sqrt{(a-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{a^2-2a+2}$$

$\overline{CT}$ 는 원의 반지름이므로  $\overline{CT}=\sqrt{6}$

직각삼각형 CPT에서

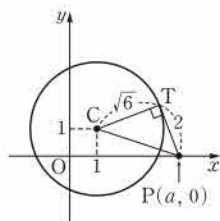
$$\overline{CP}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+2^2}=\sqrt{10}$$

따라서  $\sqrt{a^2-2a+2}=\sqrt{10}$ 이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-2a-8=0, \quad (a+2)(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

**답 4**



$$\mathbf{046-①} \quad x^2+y^2=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2+y^2+6x-4y+a=0 \text{에서}$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2=13-a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 원  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ 의 반지름의 길이는 각각 1,  $\sqrt{13-a}$ 이고,  
중심을 각각 O, O'이라 하면

$$O(0, 0), O'(-3, 2)$$

이므로 두 원의 중심거리는

$$\overline{OO'}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$$

오른쪽 그림과 같이 두 원  $\textcircled{1}$ ,

$\textcircled{2}$ 의 공통내접선의 접점을 각

각 A, B라 하고 점 O에서

$\overline{OB}$ 의 연장선에 내린 수선의

발을 B'이라 하면

$$\overline{AB}=\overline{OB'}$$

$$=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{B'O'}^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{13})^2-(1+\sqrt{13-a})^2}$$

공통내접선의 길이가 2이므로

$$\sqrt{13-(1+\sqrt{13-a})^2}=2$$

양변을 제곱하면

$$13-(1+\sqrt{13-a})^2=4$$

$$(1+\sqrt{13-a})^2=9, \quad 1+\sqrt{13-a}=\pm 3$$

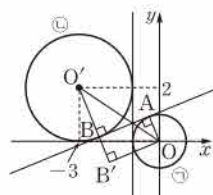
$$\therefore \sqrt{13-a}=-4 \text{ 또는 } \sqrt{13-a}=2$$

그런데  $\sqrt{13-a}>0$ 이므로

$$\sqrt{13-a}=2, \quad 13-a=4$$

$$\therefore a=9$$

**답 9**



중단원 연습 문제

본책 110~115쪽

01 5    02  $\frac{5}{2}$     03 ⑤    04 -2

05  $(x-3)^2+(y-3)^2=9$     06 ①    07  $\frac{32}{9}$

08  $\sqrt{10}$     09  $\frac{1}{2}$     10  $4\sqrt{10}$     11 -2    12 ①

13  $(x-4)^2+(y-1)^2=10$     14 27

15  $2\sqrt{2}$     16 16    17  $(-\frac{1}{2}, 1)$     18 ②

19 ⑤    20  $2\sqrt{6}$     21 ④    22 25    23 ①

24 ③    25 22    26 ④    27 ④

**01 [전략]** 원의 중심이 직선  $y=2x+1$  위에 있으므로 중심의 좌표를  $(a, 2a+1)$ 로 놓고 원의 방정식의 표준형을 이용한다.

**풀이** 원의 중심이 직선  $y=2x+1$  위에 있으므로 원의 중심의 좌표를  $(a, 2a+1)$ , 반지름의 길이를  $r$ 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-2a-1)^2 = r^2$$

이 원이 두 점  $(3, 2)$ ,  $(-4, 3)$ 을 지나므로

$$(3-a)^2 + (2-2a-1)^2 = r^2$$

$$\therefore 5a^2 - 10a + 10 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(-4-a)^2 + (3-2a-1)^2 = r^2$$

$$\therefore 5a^2 + 20 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -1, r = 5 (\because r > 0)$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다. **답 5**

**다른 풀이** 원의 중심의 좌표를  $(a, 2a+1)$ 이라 하면 점  $(a, 2a+1)$ 에서 두 점  $(3, 2)$ ,  $(-4, 3)$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\sqrt{(3-a)^2 + (2-2a-1)^2} = \sqrt{(-4-a)^2 + (3-2a-1)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-10a = 10 \quad \therefore a = -1$$

즉 원의 중심의 좌표는  $(-1, -1)$ 이고, 원의 반지름의 길이는 두 점  $(-1, -1)$ ,  $(3, 2)$  사이의 거리와 같으므로  $\sqrt{(3+1)^2 + (2+1)^2} = 5$

**02 [전략]** 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이고, 반지름의 길이는  $\frac{1}{2} \overline{AB}$ 이다.

**풀이** A(4, 4), B(12, -2)라 하면 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left( \frac{4+12}{2}, \frac{4-2}{2} \right), \text{ 즉 } (8, 1)$$

또 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(12-4)^2 + (-2-4)^2} = 5$$

$$\therefore r = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 직선  $y=mx-3$ 이 원의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 원의 중심  $(8, 1)$ 을 지난다.

즉  $1=8m-3$ 에서

$$8m = 4 \quad \therefore m = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore mr = \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } \frac{5}{2}$$

| 채점 기준                | 비율   |
|----------------------|------|
| ① $r$ 의 값을 구할 수 있다.  | 40 % |
| ② $m$ 의 값을 구할 수 있다.  | 40 % |
| ③ $mr$ 의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**03 [전략]** 원의 중심을  $C(a, b)$ 로 놓고 중심에서 주어진 세 점까지의 거리가 모두 같음을 이용한다.

**풀이** 주어진 세 점을  $P(4, 0)$ ,  $Q(-4, 6)$ ,  $R(3, -1)$ 이라 하자. 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심을  $C(a, b)$ 라 하면

$$\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR} \text{이므로 } \overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2$$

$$\overline{CP}^2 = (4-a)^2 + (0-b)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 8a + 16$$

$$\overline{CQ}^2 = (-4-a)^2 + (6-b)^2$$

$$= a^2 + b^2 + 8a - 12b + 52$$

$$\overline{CR}^2 = (3-a)^2 + (-1-b)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 6a + 2b + 10$$

$$\overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 \text{에서 } 4a - 3b = -9$$

$$\overline{CQ}^2 = \overline{CR}^2 \text{에서 } a - b = -3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면  $a=0, b=3$

따라서 원의 중심은 점  $C(0, 3)$ 이고 반지름의 길이는

$$\overline{CP} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = 5$$

즉  $a=0, b=3, r=5$ 이므로

$$a - b + r = 2$$

**답 ⑤**

**04 [전략]** 원의 방정식은  $x^2$ 의 계수와  $y^2$ 의 계수가 서로 같고,  $xy$ 항이 없는  $x, y$ 에 대한 이차방정식이다.

**풀이** 주어진 방정식이 원의 방정식이 되려면  $x^2$ 의 계수와  $y^2$ 의 계수가 서로 같아야 하므로

$$a = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또  $xy$ 항이 없어야 하므로  $b=0$   $\dots\dots \textcircled{2}$

$a=1, b=0$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$x^2 + y^2 - 2y + c = 0$$

$$\therefore x^2 + (y-1)^2 = 1 - c$$

원의 반지름의 길이가 2이므로

$$1 - c = 4 \quad \therefore c = -3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\therefore a + b + c = -2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

**답 -2**

| 채점 기준                   | 비율   |
|-------------------------|------|
| ① $a$ 의 값을 구할 수 있다.     | 20 % |
| ② $b$ 의 값을 구할 수 있다.     | 20 % |
| ③ $c$ 의 값을 구할 수 있다.     | 50 % |
| ④ $a+b+c$ 의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**05 [전략]** 중심이  $(p, q)$ 인 원이  $x$ 축,  $y$ 축에 동시에 접하면 (반지름의 길이)  $= |p| = |q|$ 임을 이용한다.

**[풀이]** 구하는 원은  $x$ 축,  $y$ 축에 동시에 접하고, 중심이 제1사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를  $(a, a)$  ( $a > 0$ )라 하면 구하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

이때 중심  $(a, a)$ 가 직선  $y=2x-3$  위에 있으므로

$$a=2a-3 \quad \therefore a=3$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$\text{답 } (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

**06 [전략]** 원 위의 점을  $P(a, b)$ 라 하고 점  $M$ 의 좌표를  $(x, y)$ 로 놓은 후  $a, b$ 를  $x, y$ 로 나타낸다.

**[풀이]**  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

원 위의 점을  $P(a, b)$ 라 하면

$$(a-2)^2 + (b+1)^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점  $M$ 의 좌표를  $(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{-2+a}{2}, y = \frac{4+b}{2}$$

$$\therefore a = 2x+2, b = 2y-4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(2x+2-2)^2 + (2y-4+1)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 3y = 0$$

$$\therefore x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

즉 점  $M$ 의 자취는 중심의 좌표가  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 이고 반지름의 길이가  $\frac{3}{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

**07 [전략]** 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 이용한다.

**[풀이]**  $y=k(x-5)$ 를  $x^2 + y^2 = 16$ 에 대입하면

$$x^2 + \{k(x-5)\}^2 = 16$$

$$\therefore (k^2+1)x^2 - 10k^2x + 25k^2 - 16 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 할 때, 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{D}{4} = (-5k^2)^2 - (k^2+1)(25k^2-16) < 0$$

$$9k^2 - 16 > 0, \quad (3k+4)(3k-4) > 0$$

$$\therefore k < -\frac{4}{3} \text{ 또는 } k > \frac{4}{3}$$

따라서  $\alpha = -\frac{4}{3}, \beta = \frac{4}{3}$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{9} \quad \text{답 } \frac{32}{9}$$

**[다른 풀이]** 원의 중심  $(0, 0)$ 과 직선  $y=k(x-5)$ , 즉  $kx - y - 5k = 0$  사이의 거리를  $d$ 라 하면

$$d = \frac{|-5k|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|5k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원과 직선이 만나지 않으려면  $d > 4$ 이어야 한다. 즉

$$\frac{|5k|}{\sqrt{k^2 + 1}} > 4, \quad |5k| > 4\sqrt{k^2 + 1}$$

양변을 제곱하면  $25k^2 > 16(k^2 + 1)$

$$9k^2 - 16 > 0, \quad (3k+4)(3k-4) > 0$$

$$\therefore k < -\frac{4}{3} \text{ 또는 } k > \frac{4}{3} \quad \therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{32}{9}$$

**08 [전략]** 원 밖의 한 점  $A$ 와 원의 중심 사이의 거리를  $d$ , 원의 반지름의 길이를  $r$ 라 할 때, 점  $A$ 와 원 위의 점 사이의 거리의 최솟값은  $d-r$ 이다.

**[풀이]** 점  $A(2, 6)$ 와 원의 중심  $(0, 0)$  사이의 거리는

$$\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 원의 반지름의 길이가  $r$ 이므로 선분  $AP$ 의 길이의 최솟값은  $2\sqrt{10} - r$   $\dots\dots \textcircled{2}$

따라서  $2\sqrt{10} - r = \sqrt{10}$ 이므로

$$r = \sqrt{10} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } \sqrt{10}$$

| 채점 기준                                    | 비율   |
|------------------------------------------|------|
| ① 점 $A$ 와 원의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.         | 40 % |
| ② $AP$ 의 길이의 최솟값을 $r$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 40 % |
| ③ $r$ 의 값을 구할 수 있다.                      | 20 % |

**09 [전략]** 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은 두 원의 방정식에서 이차항을 소거하여 구한다.

**[풀이]**  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ 에서

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

$(x-a)^2 + (y-2)^2 = 1$ 에서

$$x^2 + y^2 - 2ax - 4y + a^2 + 3 = 0$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6$$

$$- (x^2 + y^2 - 2ax - 4y + a^2 + 3) = 0$$

$$\therefore (2a-2)x - 2y - a^2 + 3 = 0$$

이 직선이 직선  $x+2y+5=0$ 에 평행하므로

$$\frac{2a-2}{1} = \frac{-2}{2} \neq \frac{-a^2+3}{5}$$

$2a-2=-1$ 에서  $a=\frac{1}{2}$   
 이때  $\frac{-a^2+3}{5}=\frac{11}{20} \neq -1$ 이므로 구하는  $a$ 의 값은  $\frac{1}{2}$ 이다. 답  $\frac{1}{2}$

**10** **전략** 원  $x^2+y^2=r^2$  ( $r>0$ )에 접하고 기울기가  $m$ 인 접선의 방정식은  $y=mx \pm r\sqrt{1+m^2}$ 임을 이용한다.

**풀이** 직선  $2x+y+3=0$ , 즉  $y=-2x-3$ 에 수직인 직선의 기울기는  $\frac{1}{2}$ 이다.

또 원  $x^2+y^2=8$ 의 반지름의 길이는  $2\sqrt{2}$ 이므로 조건을 만족시키는 두 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x \pm 2\sqrt{2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x \pm \sqrt{10} \quad \cdots \textcircled{1}$$

따라서 두 직선이  $x$ 축과 만나는 점의 좌표는 각각  $(-2\sqrt{10}, 0)$ ,  $(2\sqrt{10}, 0)$ 이므로

$$AB=2\sqrt{10}-(-2\sqrt{10})=4\sqrt{10} \quad \cdots \textcircled{2}$$

답  $4\sqrt{10}$

| 채점 기준                 | 비율   |
|-----------------------|------|
| ① 두 직선의 방정식을 구할 수 있다. | 60 % |
| ② 선분 AB의 길이를 구할 수 있다. | 40 % |

**11** **전략** 접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직임을 이용하여 접선의 기울기를 먼저 구한다.

**풀이**  $x^2+y^2+6x-2y+2=0$ 에서  
 $(x+3)^2+(y-1)^2=8$

원의 중심  $(-3, 1)$ 과 접점  $(-1, 3)$ 을 지나는 직선의 기울기는  $\frac{3-1}{-1-(-3)}=1$

접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직이므로 접선의 기울기는  $-1$ 이다.

즉 접선은 기울기가  $-1$ 이고 점  $(-1, 3)$ 을 지나므로 접선의 방정식은

$$y-3=-(x+1) \quad \therefore y=-x+2$$

따라서  $a=-1$ ,  $b=2$ 이므로  $ab=-2$  답  $-2$

**다른 풀이** 원  $x^2+y^2+6x-2y+2=0$ , 즉  $(x+3)^2+(y-1)^2=8$  위의 점  $(-1, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$(-1+3)(x+3)+(3-1)(y-1)=8$$

$$2(x+3)+2(y-1)=8$$

$$\therefore y=-x+2$$

따라서  $a=-1$ ,  $b=2$ 이므로  $ab=-2$

**12** **전략** 접선의 기울기를  $m$ 이라 하고 접선의 방정식을 세운 후 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

**풀이** 접선의 기울기를  $m$ 이라 하면 점  $(0, 0)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y=mx \quad \therefore mx-y=0$$

원  $x^2+y^2-6x-6y+17=0$ 에서

$$(x-3)^2+(y-3)^2=1$$

원의 중심  $(3, 3)$ 과 직선  $mx-y=0$  사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|3m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \quad |3m-3|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4m^2-9m+4=0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 곱은 1이다. 답 ①

**13** **전략** 원의 중심의 좌표를  $(a, b)$ 로 놓고 원의 방정식의 표준형을 이용한다.

**풀이** 구하는 원의 중심의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=10$$

이 원이 두 점  $(1, 2)$ ,  $(3, 4)$ 를 지나므로

$$(1-a)^2+(2-b)^2=10$$

$$\therefore a^2+b^2-2a-4b-5=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(3-a)^2+(4-b)^2=10$$

$$\therefore a^2+b^2-6a-8b+15=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$4a+4b-20=0$$

$$\therefore b=-a+5 \quad \cdots \textcircled{3}$$

③을 ①에 대입한 후 정리하면

$$2a^2-8a=0, \quad a(a-4)=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=4$$

그런데  $a=0$ 이면 원의 중심은  $(0, 5)$ 가 되어 주어진 점들의 모양을 만족시키지 않으므로  $a=4$

$a=4$ 를 ③에 대입하면  $b=1$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2+(y-1)^2=10$$

$$\text{답 } (x-4)^2+(y-1)^2=10$$

**14** **전략** 정사각형의 두 대각선은 서로 수직임을 이용한다.

**풀이**  $x^2+y^2-4x-6y=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y-3)^2=13 \quad \cdots \textcircled{1}$$

정사각형의 두 대각선은 서로 수직이므로 직선 BD의 기울기는  $-2$ 이고, 직선 BD는 원의 중심  $(2, 3)$ 을 지나므로 직선 BD의 방정식은

$$y-3=-2(x-2) \quad \therefore y=-2x+7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} (x-2)^2+(-2x+7-3)^2 &= 13 \\ 5x^2-20x+7 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{10 \pm \sqrt{65}}{5} \end{aligned}$$

이때 점 D의  $x$ 좌표가 점 B의  $x$ 좌표보다 작으므로 점 D의  $x$ 좌표는  $\frac{10-\sqrt{65}}{5}$ 이다.

$x = \frac{10-\sqrt{65}}{5}$ 를 ①에 대입하여 계산하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{15+2\sqrt{65}}{5} \\ \therefore D &\left( \frac{10-\sqrt{65}}{5}, \frac{15+2\sqrt{65}}{5} \right) \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

따라서  $a=10, b=15, c=2$ 이므로

$$a+b+c=27 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 27

| 채점 기준                   | 비율   |
|-------------------------|------|
| ① 직선 BD의 방정식을 구할 수 있다.  | 40 % |
| ② 점 D의 좌표를 구할 수 있다.     | 40 % |
| ③ $a+b+c$ 의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**15** **전략** 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값 또는 최솟값을 구할 때에는 원의 중심과 직선 사이의 거리와 원의 반지름의 길이를 이용한다.

**풀이** 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left( \frac{0-3+3}{3}, \frac{3+0+0}{3} \right), \text{ 즉 } (0, 1)$$

직선 AC의 기울기는  $\frac{0-3}{3-0}=-1$ 이므로 직선  $l$ 의 방정식은

$$y-1=-x \quad \therefore x+y-1=0$$

$$x^2+y^2-8x-6y+23=0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2+(y-3)^2=2$$

이므로 원의 중심  $(4, 3)$ 과 직선  $x+y-1=0$  사이의 거리는

$$\frac{|4+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가  $\sqrt{2}$ 이므로 구하는 거리의 최솟값은

$$3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2} \quad \text{답 } 2\sqrt{2}$$

**16** **전략** 두 원을 좌표평면 위에 나타낸 후 선분 PQ의 길이가 최대일 때와 최소일 때를 생각해 본다.

**풀이** 두 원의 중심이 각각  $C(-1, 2), C'(3, -1)$ 이므로 두 원의 중심거리는

$$CC'=\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2}=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 원  $C, C'$ 의 반지름의 길이는 각각 1, 2이므로 오른쪽 그림에서 선분 PQ의 길이의 최댓값은

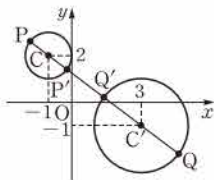
$$\begin{aligned} \overline{PC}+\overline{CC'}+\overline{C'Q} \\ =1+5+2=8 \end{aligned}$$

최솟값은

$$\overline{CC'}-\overline{CP'}-\overline{C'Q'}=5-1-2=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은 16이다.  $\cdots \cdots \textcircled{3}$

답 16



| 채점 기준                           | 비율   |
|---------------------------------|------|
| ① 두 원의 중심거리를 구할 수 있다.           | 30 % |
| ② 선분 PQ의 길이의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다. | 60 % |
| ③ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.         | 10 % |

**17** **전략** 두 원의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 두 원의 공통현을 지름으로 하는 원임을 이용한다.

**풀이** 두 원의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 두 원의 공통현을 지름으로 하는 원이다. 즉 구하는 원의 중심은 두 원의 공통현과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점이다.

$$(x+1)^2+y^2=16 \text{에서}$$

$$x^2+y^2+2x-15=0$$

$$x^2+(y-2)^2=16 \text{에서}$$

$$x^2+y^2-4y-12=0$$

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2+y^2+2x-15-(x^2+y^2-4y-12)=0$$

$$\therefore 2x+4y-3=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 원의 중심의 좌표가 각각  $(-1, 0), (0, 2)$ 이므로 두 원의 중심을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1$$

$$\therefore 2x-y=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x=-\frac{1}{2}, y=1$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$$\left( -\frac{1}{2}, 1 \right) \quad \text{답 } \left( -\frac{1}{2}, 1 \right)$$

**Remark ▶**

$x$ 절편이  $a$ ,  $y$ 절편이  $b$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (\text{단, } a \neq 0, b \neq 0)$$

**18** **[전략]** 접은 부분을 포함하는 새로운 원의 방정식을 구한다.

**[풀이]** 오른쪽 그림과 같이 접은 부분을 포함하는 새로운 원은 반지름의 길이가 5이고 점  $(-2, 0)$ 에서  $x$ 축에 접하므로 원의 중심의 좌표는

$$(-2, 5)$$

따라서 접은 부분을 포함하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 25,$$

$$\text{즉 } x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$$

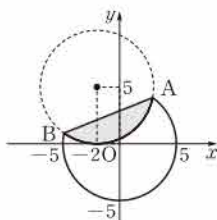
현 AB는 두 원  $x^2 + y^2 - 25 = 0$ ,

$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$ 의 공통현이므로 직선 AB의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 25 - (x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4) = 0$$

$$\therefore 4x - 10y + 29 = 0$$

따라서 이 직선의  $y$ 절편은  $\frac{29}{10}$ 이다. **[답] ②**



**19** **[전략]** 접선의 기울기를  $m$ 이라 하고 접선의 방정식을 세운 후 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

**[풀이]** 접선의 기울기를  $m$ 이라 하면 기울기가  $m$ 이고 점  $(0, a)$ 를 지나는 접선의 방정식은

$$y - a = mx$$

$$\therefore mx - y + a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선  $\textcircled{1}$ 이 원  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$ 와 접하므로 원의 중심  $(2, 2)$ 와 직선  $\textcircled{1}$  사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같다. 즉

$$\frac{|2m - 2 + a|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3$$

$$|2m - 2 + a| = 3\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$5m^2 - 4(a-2)m - a^2 + 4a + 5 = 0$$

이 이차방정식의 두 근을  $m_1, m_2$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1 m_2 = \frac{-a^2 + 4a + 5}{5}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로  $m_1 m_2 = -1$ 에서

$$\frac{-a^2 + 4a + 5}{5} = -1, \quad a^2 - 4a - 10 = 0$$

$$\therefore a = 2 + \sqrt{14} \quad (\because a > 0)$$

**[답] ⑤**

**20** **[전략]** 원의 접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직임을 이용한다.

**[풀이]** 원  $x^2 + y^2 = 10$

의 중심이  $O(0, 0)$ 이

고

$$\overline{OP} \perp \overline{AP}$$

이므로 삼각형 OPA

는  $\angle OPA = 90^\circ$ 인

직각삼각형이다.

$\overline{OP}$ 는 원의 반지름이므로  $\overline{OP} = \sqrt{10}$

$\overline{OA} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$ 이므로 직각삼각형 OPA에서

$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - (\sqrt{10})^2} = \sqrt{15}$$

$\overline{OA}$ 와  $\overline{PQ}$ 의 교점을 R라 하면  $\overline{OA}$ 는  $\overline{PQ}$ 를 수직이등분하므로 직각삼각형 OPA에서

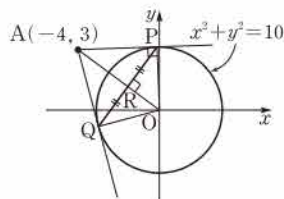
$$\frac{1}{2} \overline{AP} \cdot \overline{OP} = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{PR}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{10} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \overline{PR}$$

따라서  $\overline{PR} = \sqrt{6}$ 이므로

$$\overline{PQ} = 2\overline{PR} = 2\sqrt{6}$$

**[답] 2√6**



**21** **[전략]** 삼각형 ABP의 밑변을 선분 AB라 하고, 직선  $y = 2x - 1$ 이 원의 중심을 지나므로 선분 AB는 원의 지름임을 이용한다.

**[풀이]**  $x^2 + y^2 - 2x - ay - b = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b + 1$$

원 C의 중심  $\left(1, \frac{a}{2}\right)$ 가 직선  $y = 2x - 1$  위에 있으므로

$$\frac{a}{2} = 2 - 1 \quad \therefore a = 2$$

즉 원 C의 반지름의 길이는

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b + 1} = \sqrt{\frac{2^2}{4} + b + 1} = \sqrt{b + 2}$$

삼각형 ABP의 밑변을 선분 AB라 하면 선분 AB는 원의 지름이므로 삼각형 ABP의 높이의 최댓값은 원 C의 반지름의 길이와 같다.

이때 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값이 4이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{b+2} \cdot \sqrt{b+2} = 4$$

$$b + 2 = 4 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 4$$

**[답] ④**

**22 [전략]**  $f(x)=ax+b$  ( $a, b$ 는 상수)로 놓고 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식  $D$ 가  $D=0$ 임을 이용한다.

**[풀이]**  $f(x)=ax+b$  ( $a, b$ 는 상수)라 하자.

$y=ax+b$ 를  $x^2+y^2=25$ 에 대입하면

$$x^2+(ax+b)^2=25$$

$$\therefore (a^2+1)x^2+2abx+b^2-25=0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4}=(ab)^2-(a^2+1)(b^2-25)=0$$

$$25a^2-b^2+25=0$$

$$\therefore 25a^2-b^2=-25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore f(-5)f(5)=(-5a+b)(5a+b)$$

$$=-25a^2+b^2$$

$$=-(25a^2-b^2)$$

$$=25 \quad (\because \textcircled{1})$$

**[답]** 25

**23 [전략]** 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

**[풀이]** 원  $C_1$ 의 중심  $(0, 0)$ 과 직선  $l: ax+by+1=0$  사이의 거리는 원  $C_1$ 의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

$$\therefore a^2+b^2=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선  $l_1, l_2$ 가 모두 직선  $l$ 에 평행하므로

$$l_1: ax+by+m_1=0,$$

$$l_2: ax+by+m_2=0 \quad (m_1 \neq 1, m_2 \neq 1, m_2 > m_1)$$

이라 하면 원  $C_2$ 의 중심  $(0, 0)$ 과 두 직선  $l_1, l_2$  사이의 거리는 모두 원  $C_2$ 의 반지름의 길이  $2\sqrt{2}$ 와 같다. 즉

$$\frac{|m_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|m_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}$$

$$|m_1|=|m_2|=2\sqrt{2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$m_1=-2\sqrt{2}, m_2=2\sqrt{2} \quad (\because m_2 > m_1)$$

$$\therefore l_1: ax+by-2\sqrt{2}=0$$

$$l_2: ax+by+2\sqrt{2}=0$$

이때 점  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 는 각각 직선  $l_1, l_2$  위에 있으므로

$$ax_1+by_1-2\sqrt{2}=0, ax_2+by_2+2\sqrt{2}=0$$

$$\therefore ax_1+by_1=2\sqrt{2}, ax_2+by_2=-2\sqrt{2}$$

$$\therefore (ax_1+by_1+1)(ax_2+by_2+1)$$

$$=(2\sqrt{2}+1)(-2\sqrt{2}+1)$$

$$=-7$$

**[답]** ①

**24 [전략]** 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.

**[풀이]**  $x^2+y^2-10x=0$ 에서

$$(x-5)^2+y^2=25$$

원의 중심을  $C(5, 0)$ 이라 하고, 점  $A(1, 0)$ 을 지나는 직선이 이 원과 만나는 두 점을 각각  $P, Q$ 라 하자.

현  $PQ$ 의 길이가 최소일 때

는 오른쪽 그림과 같이

$\overline{CA} \perp \overline{PQ}$ 일 때이고 직각삼

각형  $ACP$ 에서  $\overline{CA}=4,$

$\overline{CP}=5$ 이므로

$$\overline{AP}=\sqrt{5^2-4^2}=3$$

$$\therefore \overline{PQ}=2\overline{AP}=6$$

따라서 현  $PQ$ 의 길이의 최솟값은 6이다.

또 현  $PQ$ 의 길이가 최대일 때는 현  $PQ$ 가 원의 지름일 때이므로 현  $PQ$ 의 길이의 최댓값은 10이다.

따라서 현의 길이가 자연수인 경우는

$$6, 7, 8, 9, 10$$

이때 길이가 7, 8, 9인 현은 각각 2개씩 존재하고, 길이가 6, 10인 현은 각각 1개씩 존재하므로 구하는 현의 개수는

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$$

**[답]** ③

**25 [전략]** 원점과 점  $(3, 4)$ 를 지나는 직선과 직선  $l$ 이 수직으로 만남을 이용한다.

**[풀이]** 직선  $l$ 이 점  $(3, 4)$ 를 지나는 직선 중에서 원점과의 거리가 최대이므로 원점과 점  $(3, 4)$ 를 지나는 직선과 직선  $l$ 이 수직으로 만나야 한다.

원점과 점  $(3, 4)$ 를 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$$

이므로 직선  $l$ 의 기울기는  $-\frac{3}{4}$ 이다.

따라서 직선  $l$ 의 방정식은

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3), \text{ 즉 } 3x+4y-25=0$$

원의 중심  $(7, 5)$ 와 직선  $l$  사이의 거리는

$$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원 위의 점  $P$ 와 직선  $l$  사이의 거리의 최솟값  $m$ 은

$$m=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$$

$$\therefore 10m=10 \cdot \frac{11}{5}=22$$

**[답]** 22

**26 [전략]** 원과 한 점에서만 만나는 직선은 원의 접선임을 이용한다.

**풀이** 선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 9 + 1 \cdot 0}{2+1}, \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 6}{2+1}\right), \text{ 즉 } (6, 2)$$

점 P가 원  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$  위의 점이므로

$$36 + 4 - 12a - 4b = 0$$

$$\therefore 3a + b = 10 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

직선 AB가 원  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$ 과 점 P에서만 만나므로 직선 AB는 이 원의 접선이다.

즉 원의 중심과 점 P를 지나는 직선을  $l$ 이라 하면 직선  $l$ 은 직선 AB와 수직이고 직선 AB의 기울기가

$$\frac{0-6}{9-0} = -\frac{2}{3} \text{ 이므로 직선 } l \text{의 방정식은}$$

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 6) \quad \therefore y = \frac{3}{2}x - 7$$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$ 에서

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$$

원의 중심  $(a, b)$ 가 직선  $l$  위의 점이므로

$$b = \frac{3}{2}a - 7 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{34}{9}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore a + b = \frac{22}{9} \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

**27 [전략]** 원의 접선의 성질과 피타고라스 정리를 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

**풀이**  $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$$

원  $C_2$ 의 중심을  $A(4, -3)$ ,

점 P의 좌표를  $(a, 0)$ 이라

하면  $\overline{OQ} \perp \overline{PQ}$ 이므로 직각

삼각형 OPQ에서

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 1} \end{aligned}$$

또  $\overline{AR} \perp \overline{PR}$ 이므로 직각삼

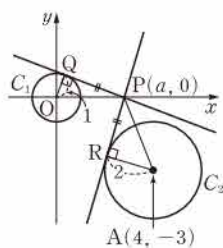
각형 APR에서

$$\begin{aligned} \overline{PR} &= \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{AR}^2} \\ &= \sqrt{\{(a-4)^2 + (0+3)^2\} - 2^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 8a + 21} \end{aligned}$$

$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 에서  $\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2$ 이므로

$$a^2 - 1 = a^2 - 8a + 21$$

$$8a = 22 \quad \therefore a = \frac{11}{4}$$



답 ④

## 04 도형의 이동

I. 도형의 방정식

유제

본책 119~136쪽

**047-①** 평행이동  $(x, y) \rightarrow (x+7, y-2)$ 는  $x$ 축의 방향으로 7만큼,  $y$ 축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점  $(a, -1)$ 이 옮겨지는 점의 좌표는

$$(a+7, -1-2), \text{ 즉 } (a+7, -3)$$

이 점이 직선  $y=2x-1$  위에 있으므로

$$-3 = 2(a+7) - 1, \quad a+7 = -1$$

$$\therefore a = -8$$

답 -8

**047-②** 점  $(1, -2)$ 를  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동한 점의 좌표를  $(9, 1)$ 이라 하면

$$1+a=9, \quad -2+b=1$$

$$\therefore a=8, b=3$$

즉 주어진 평행이동은  $x$ 축의 방향으로 8만큼,  $y$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점  $(3, -3)$ 으로 옮겨지는 점의 좌표를  $(x, y)$ 라 하면

$$x+8=3, \quad y+3=-3$$

$$\therefore x=-5, y=-6$$

따라서 구하는 점의 좌표는  $(-5, -6)$ 이다.

답  $(-5, -6)$

**048-①**  $4x+y-5=0$ 에  $x$  대신  $x-a$ 를,  $y$  대신  $y-3$ 을 대입하면

$$4(x-a) + (y-3) - 5 = 0$$

$$\therefore 4x + y - 4a - 8 = 0$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-4a - 8 = 0 \quad \therefore a = -2$$

답 -2

**048-②** 주어진 평행이동은  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 -5만큼 평행이동하는 것이므로

$2x-3y-1=0$ 에  $x$  대신  $x-1$ 을,  $y$  대신  $y+5$ 를 대입하면

$$2(x-1) - 3(y+5) - 1 = 0$$

$$\therefore 2x - 3y - 18 = 0$$

이 직선이 직선  $2x+ay+b=0$ 과 일치해야 하므로

$$a = -3, b = -18$$

$$\therefore a-b = 15$$

답 15

**049-①** 점 (2, 1)을 점 (-1, 0)으로 옮기는 평행 이동은  $x$ 축의 방향으로 -3만큼,  $y$ 축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것이다.

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 16$$

이므로 이 원이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은

$$\{(x+3)-4\}^2 + \{(y+1)+1\}^2 = 16$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

따라서 구하는 중심의 좌표는

$$(1, -2) \quad \text{답 } (1, -2)$$

**다른 풀이** 구하는 원의 중심은 주어진 평행이동에 의하여 원  $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 16$ 의 중심 (4, -1)이 옮겨지는 점이므로

$$(4-3, -1-1), \text{ 즉 } (1, -2)$$

**049-②**  $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + y^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에  $x$  대신  $x-a$ 를,  $y$  대신  $y-b$ 를 대입하면

$$(x-a-1)^2 + (y-b-1)^2 = 9$$

이 식이 ②과 같아야 하므로

$$-a-1=1, -b=-1$$

$$\therefore a=-2, b=1 \quad \therefore ab=-2 \quad \text{답 } -2$$

**다른 풀이**  $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + y^2 = 9$$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 (1, 0)

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 (-1, 1)

즉 점 (1, 0)을  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동한 점의 좌표가 (-1, 1)이므로

$$1+a=-1, 0+b=1$$

$$\therefore a=-2, b=1 \quad \therefore ab=-2$$

**050-①** 점 (5, -2)를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 (-5, 2)

점 (5, -2)를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 (-2, 5)

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = \frac{5-2}{-2-(-5)}(x+5)$$

$$\therefore y=x+7 \quad \text{답 } y=x+7$$

**050-②** 점 (3, -4)를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-3, 4)$$

이 점이 직선  $ax+5y-2a^2=0$  위의 점이므로

$$a \cdot (-3) + 5 \cdot 4 - 2a^2 = 0, \quad 2a^2 + 3a - 20 = 0$$

$$(a+4)(2a-5) = 0$$

$$\therefore a = -4 \text{ 또는 } a = \frac{5}{2} \quad \text{답 } -4, \frac{5}{2}$$

**051-①** 직선  $y=kx+1$ 을  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=kx+1$$

$$\therefore y=-kx-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 ①이 원  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ , 즉

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4 \text{의 넓이를 이등분하므로 직선}$$

①은 원의 중심 (-2, 3)을 지난다. 즉

$$3 = -k \cdot (-2) - 1, \quad 2k = 4$$

$$\therefore k = 2 \quad \text{답 } 2$$

**Remark▶** 원의 넓이를 이등분하는 직선

직선이 원의 중심을 지나면 직선은 원의 넓이를 이등분한다. 또 원의 넓이를 이등분하는 직선은 반드시 원의 중심을 지난다.

**051-②**  $y=x^2-2mx+m^2-1$ 에서

$$y=(x-m)^2-1$$

포물선의 꼭짓점의 좌표가  $(m, -1)$ 이므로 이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는  $(-m, 1)$

즉  $-m=-2, 1=k$ 이므로

$$m=2, k=1$$

$$\therefore mk=2 \quad \text{답 } 2$$

**052-①** 직선  $y=3x-4$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=3 \cdot (-x) - 4$$

$$\therefore y=3x+4$$

이 직선을 다시  $x$ 축의 방향으로 2만큼,  $y$ 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+1=3(x-2)+4$$

$$\therefore y=3x-3 \quad \text{답 } y=3x-3$$

**052-②** 원  $x^2 + y^2 = r^2$ 을  $x$ 축의 방향으로 -1만큼,  $y$ 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = r^2$$

이 원을 다시 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = r^2$$

원의 중심이  $(4, -1)$ 이고, 이 원이  $y$ 축에 접하므로  
원의 중심의  $x$ 좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같다.

$$\therefore r=4 \quad \text{답 4}$$

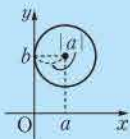
**Remark ▶**  $y$ 축에 접하는 원의 방정식

$y$ 축에 접하는 원은

$$|(\text{중심의 } x\text{좌표})| \\ = (\text{반지름의 길이})$$

이므로 중심의 좌표가  $(a, b)$ 이고  $y$ 축  
에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$$



**053-①** 점  $(-3, a)$ 를 점  $(9, 5)$ 에 대하여 대칭이  
동한 점의 좌표가  $(b, 2)$ 이므로 점  $(9, 5)$ 는 두 점  
 $(-3, a)$ ,  $(b, 2)$ 를 잇는 선분의 중점이다.

$$\therefore \frac{-3+b}{2}=9, \frac{a+2}{2}=5 \text{이므로}$$

$$a=8, b=21$$

$$\therefore 2a-b=2 \cdot 8-21 \\ =-5 \quad \text{답 -5}$$

**053-②**  $y=x^2-8x+19$ 에서

$$y=(x-4)^2+3$$

주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표가  $(4, 3)$ 이므로 점  
 $(4, 3)$ 을 점  $(a, b)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가  
 $(0, -3)$ 이어야 한다.

즉 점  $(a, b)$ 가 두 점  $(4, 3)$ ,  $(0, -3)$ 을 잇는 선분  
의 중점이므로

$$a=\frac{4+0}{2}=2, b=\frac{3-3}{2}=0$$

$$\therefore a+b=2 \quad \text{답 2}$$

**053-③** 주어진 원을 점  $(2, -3)$ 에 대하여 대칭이  
동한 원의 중심의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면 점  $(2, -3)$   
은 주어진 원의 중심  $(-1, 1)$ 과 점  $(a, b)$ 를 잇는 선  
분의 중점이다.

$$\therefore \frac{-1+a}{2}=2, \frac{1+b}{2}=-3 \text{이므로}$$

$$a=5, b=-7$$

따라서 대칭이동한 원은 중심의 좌표가  $(5, -7)$ 이고  
반지름의 길이가 2이다.

이 원이 직선  $y=mx-3$ , 즉  $mx-y-3=0$ 과 접하므로  
원의 중심  $(5, -7)$ 과 직선  $mx-y-3=0$  사이의  
거리가 원의 반지름의 길이 2와 같다. 즉

$$\frac{|5m+7-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$|5m+4|=2\sqrt{m^2+1}$$

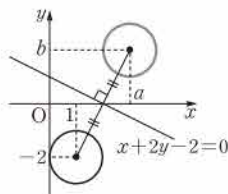
양변을 제곱하여 정리하면

$$21m^2+40m+12=0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수  
 $m$ 의 값의 합은  $-\frac{40}{21}$ 이다.

$$\text{답 } -\frac{40}{21}$$

**054-①** 원  $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 의 중심  $(1, -2)$   
를 직선  $x+2y-2=0$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표  
를  $(a, b)$ 라 하자.



(i) 두 점  $(1, -2)$ ,  $(a, b)$ 를 잇는 선분의 중점

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right) \text{는 직선 } x+2y-2=0 \text{ 위의 점이다}$$

므로

$$\frac{1+a}{2}+2 \cdot \frac{-2+b}{2}-2=0$$

$$\therefore a+2b-7=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(ii) 두 점  $(1, -2)$ ,  $(a, b)$ 를 지나는 직선과 직선  
 $x+2y-2=0$ 은 서로 수직이므로

$$\frac{b-(-2)}{a-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$$b+2=2(a-1)$$

$$\therefore 2a-b-4=0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=3, b=2$$

따라서 대칭이동한 도형은 점  $(3, 2)$ 를 중심으로 하고  
반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 도형의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-2)^2=1$$

$$\text{답 } (x-3)^2+(y-2)^2=1$$

**055-①** 오른쪽 그림과 같

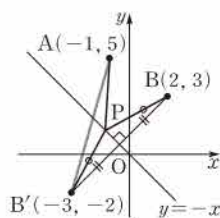
이 점  $B(2, 3)$ 을 직선

$y=-x$ 에 대하여 대칭이동

한 점을  $B'$ 이라 하면

$$B'(-3, -2)$$

$\overline{BP}=\overline{B'P}$ 이므로

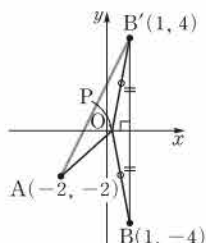


$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{(-3+1)^2 + (-2-5)^2} \\ &= \sqrt{53}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은  $\sqrt{53}$ 이다.

답  $\sqrt{53}$

**055-2** 오른쪽 그림과 같이 점  $B(1, -4)$ 를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 점을  $B'$ 이라 하면



$$\begin{aligned}B'(1, 4) \\ \overline{BP} = \overline{B'P} \text{이므로} \\ \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'}\end{aligned}$$

즉  $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소일 때의 점  $P$ 는 직선  $AB'$ 이  $x$ 축과 만나는 점이다.

이때 직선  $AB'$ 의 방정식은

$$\begin{aligned}y+2 &= \frac{4-(-2)}{1-(-2)}(x+2) \\ \therefore y &= 2x+2\end{aligned}$$

따라서 직선  $AB'$ 의  $x$ 절편이  $-1$ 이므로 구하는 점  $P$ 의 좌표는  $(-1, 0)$

답  $(-1, 0)$

### 중단원 연습 문제

본책 137~141쪽

- |         |                |                       |               |      |
|---------|----------------|-----------------------|---------------|------|
| 01 -2   | 02 ⑤           | 03 23                 | 04 -1         | 05 3 |
| 06 10   | 07 ③           | 08 8                  | 09 $y = -x+3$ |      |
| 10 ②    | 11 $5\sqrt{2}$ | 12 $y = x + \sqrt{3}$ | 13 ②          |      |
| 14 1    | 15 풀이 참조       | 16 ④                  |               |      |
| 17 20 m | 18 7           | 19 12                 | 20 ④          | 21 ⑤ |
| 22 ④    |                |                       |               |      |

**01** **전략** 평행이동  $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 는 점  $(x, y)$ 를  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동하는 것이다.

**풀이** 점  $(1, -3)$ 을  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동한 점의 좌표가  $(5, -7)$ 이므로

$$\begin{aligned}1+a &= 5, -3+b = -7 \\ \therefore a &= 4, b = -4\end{aligned}$$

따라서 평행이동  $(x, y) \rightarrow (x+4, y-4)$ 에 의하여 점  $(c, d)$ 가 옮겨지는 점의 좌표가  $(1, -3)$ 이므로

$$c+4=1, d-4=-3$$

$$\therefore c=-3, d=1$$

$$\therefore a+b+c+d=-2$$

답 -2

**02** **전략** 도형  $f(x, y)=0$ 을  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동한 도형의 방정식은  $f(x-a, y-b)=0$ 이다.

**풀이** 직선  $y=4x-3$ 을  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+1=4(x-a)-3$$

$$\therefore y=4x-4a-4$$

이 직선이 직선  $y=mx+4$ 와 일치해야 하므로

$$4=m, -4a-4=4$$

$$\therefore a=-2, m=4$$

$$\therefore a+m=2$$

답 ⑤

**03** **전략** 두 직선이 수직으로 만나는  $x$ 축 위의 점의 좌표를 구한다.

**풀이** 직선  $y=ax+b$ 를  $x$ 축의 방향으로  $2$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+1=a(x-2)+b$$

$$\therefore y=ax-2a+b-1 \quad \dots\dots ①$$

직선 ①이 직선  $y=-\frac{1}{2}x-4$ 에 수직이므로

$$a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \therefore a=2$$

또  $y=0$ 을  $y=-\frac{1}{2}x-4$ 에 대입하면

$$0 = -\frac{1}{2}x - 4 \quad \therefore x = -8$$

따라서 직선 ①과 직선  $y=-\frac{1}{2}x-4$ 는 점  $(-8, 0)$ 에서 만난다.

즉 직선  $y=2x+b-5$ 가 점  $(-8, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -16 + b - 5$$

$$\therefore b = 21$$

$$\therefore a+b=23$$

답 23

**04** **전략** 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동을 이 용한다.

**풀이** 원  $x^2+(y-1)^2=4$ 의 중심의 좌표는  $(0, 1)$ 이고, 원  $(x-1)^2+y^2=4$ 의 중심의 좌표는  $(1, 0)$ 이므로 주어진 평행이동은  $x$ 축의 방향으로  $1$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 직선  $y=ax+b$  ( $a, b$ 는 상수)가 직선  $y=-3x+1$ 로 옮겨진다고 하면

$$y+1=a(x-1)+b$$

$$\therefore y=ax-a+b-1$$

이 직선이 직선  $y=-3x+1$ 과 일치해야 하므로

$$a=-3, -a+b-1=1$$

$$\therefore a=-3, b=-1$$

$$\therefore y=-3x-1$$

따라서 구하는 직선의  $y$ 절편은  $-1$ 이다. **답 -1**

**05 [전략]** 두 점 Q, R의 좌표를 구하고 좌표평면 위에 삼각형 PQR를 그려 본다.

**풀이** 점 P( $-1, -4$ )를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는  $(1, -4)$  **→ ①**

점 P( $-1, -4$ )를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는

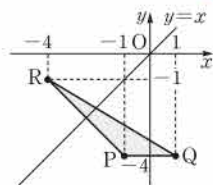
$$(-4, -1) \quad \text{→ ②}$$

세 점 P, Q, R를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$\triangle PQR$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1+1) \cdot (-1+4)$$

$$= 3$$



**→ ③**

**답 3**

| 채점 기준                            | 비율   |
|----------------------------------|------|
| ① 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.              | 30 % |
| ② 점 R의 좌표를 구할 수 있다.              | 30 % |
| ③ $\triangle PQR$ 의 넓이를 구할 수 있다. | 40 % |

**06 [전략]** 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동을 이용한다.

**풀이**  $x^2+y^2+6x-4y-12=0$ 에서

$$(x+3)^2+(y-2)^2=25$$

이 원의 중심이 점  $(-3, 2)$ 이므로 이 원을  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 원의 중심은 점  $(3, 2)$ 이다.

$$\therefore a=3, b=2$$

또 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로  $c=5$

$$\therefore a+b+c=10 \quad \text{답 10}$$

**다른 풀이** 원  $(x+3)^2+(y-2)^2=25$ 를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x+3)^2+(y-2)^2=25$$

$$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=25$$

이 원의 중심은  $(3, 2)$ 이고 반지름의 길이는 5이므로

$$a=3, b=2, c=5$$

$$\therefore a+b+c=10$$

**07 [전략]** 처음 직선의 기울기를  $m$ 이라 하고, 이 직선을 주어진 순서대로 이동해 본다.

**풀이** 처음 직선의 기울기를  $m$ 이라 하면 이 직선이 점  $(-2, 1)$ 을 지나므로 직선의 방정식은

$$y-1=m(x+2)$$

$$\therefore y=mx+2m+1$$

이 직선을  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-2=mx+2m+1$$

$$\therefore y=mx+2m+3$$

이 직선을 다시  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=mx+2m+3$$

이 직선이 점  $(1, -2)$ 를 지나므로

$$-(-2)=m+2m+3, \quad 3m=-1$$

$$\therefore m=-\frac{1}{3}$$

따라서 처음 직선의 기울기는  $-\frac{1}{3}$ 이다. **답 ③**

**08 [전략]** 두 포물선이 점  $(a, b)$ 에 대하여 대칭이면 두 포물선의 꼭짓점도 점  $(a, b)$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

**풀이** 두 포물선이 점  $(a, b)$ 에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점  $(a, b)$ 에 대하여 대칭이다.

포물선  $y=x^2-8x+2$ , 즉  $y=(x-4)^2-14$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(4, -14)$$

포물선  $y=-x^2+16x-54$ , 즉  $y=-(x-8)^2+10$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(8, 10)$$

따라서 점  $(a, b)$ 가 두 꼭짓점  $(4, -14)$ ,  $(8, 10)$ 을 잇는 선분의 중점이므로

$$a=\frac{4+8}{2}=6, b=\frac{-14+10}{2}=-2$$

$$\therefore a-b=8 \quad \text{답 8}$$

**09 [전략]** 직선  $l$ 은 두 점  $(2, 3)$ ,  $(0, 1)$ 을 잇는 선분의 수직이등분선임을 이용한다.

**풀이** A( $2, 3$ ), B( $0, 1$ )이라 하면 직선  $l$ 은 두 점 A, B를 잇는 선분의 수직이등분선이다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+1}{2}\right), \text{ 즉 } (1, 2) \quad \cdots ①$$

또 직선 AB의 기울기는

$$\frac{1-3}{0-2}=1$$

이므로 직선 l의 기울기는 -1이다. ②

따라서 직선 l의 방정식은

$$y-2=-(x-1)$$

$$\therefore y=-x+3$$

$$\text{답 } y=-x+3$$

| 채점 기준                         | 비율   |
|-------------------------------|------|
| ① 직선 l이 지나는 한 점의 좌표를 구할 수 있다. | 40 % |
| ② 직선 l의 기울기를 구할 수 있다.         | 40 % |
| ③ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.         | 20 % |

**10** **전략** 점 B를 주어진 직선에 대하여 대칭이동한 점을  $B'(a, b)$ 라 하고 점 B'의 좌표를 구한다.

**풀이** 오른쪽 그림과 같이

점 B(4, 2)를 직선

$y=-x+2$ 에 대하여 대칭

이동한 점을  $B'(a, b)$ 라 하

면  $\overline{BB'}$ 의 중점

$\left(\frac{4+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$ 가 직선

$y=-x+2$  위의 점이므로

$$\frac{2+b}{2}=-\frac{4+a}{2}+2$$

$$\therefore a+b=-2 \quad \cdots \cdots ㉠$$

직선  $\overline{BB'}$ 과 직선  $y=-x+2$ 는 서로 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-4} \cdot (-1)=-1$$

$$\therefore a-b=2 \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=0, b=-2$$

$$\therefore B'(0, -2)$$

$\overline{BP}=\overline{B'P}$ 이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

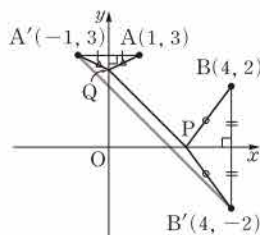
$$=\sqrt{(0-1)^2+(-2-3)^2}$$

$$=\sqrt{26}$$

따라서 구하는 최솟값은  $\sqrt{26}$ 이다. ②

**11** **전략** 두 점 A, B를 각각 y축, x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구한 후 최솟값을 구한다.

**풀이**



위의 그림과 같이 점 A(1, 3)을 y축에 대하여 대칭이동한 점을  $A'(-1, 3)$

$$A'(-1, 3)$$

점 B(4, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을  $B'(4, -2)$ 이라 하면

$$B'(4, -2)$$

$$\overline{AQ}=\overline{A'Q}, \overline{PB}=\overline{PB'}$$
이므로

$$\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}=\overline{A'Q}+\overline{QP}+\overline{PB'}$$

$$\geq \overline{A'B'}$$

$$=\sqrt{(4+1)^2+(-2-3)^2}$$

$$=5\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은  $5\sqrt{2}$ 이다. ②

**12** **전략** 점 C를 점 A로 옮기는 평행이동을 생각한다.

**풀이**  $C(x, y)$ ,  $A(x', y')$

이라 하면 정삼각형 ABC의

한 변의 길이가 2이므로 오른쪽

그림과 같이 점 A는 점 C

를 x축의 방향으로 -1만큼,

y축의 방향으로  $\sqrt{3}$ 만큼 평행

이동한 점이다.

$$\text{즉 } x'=x-1, y'=y+\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$x=x'+1, y=y'-\sqrt{3}$$

점 C(x, y)가 직선  $y=x-1$  위의 점이므로

$$y'-\sqrt{3}=(x'+1)-1$$

$$\therefore y'=x'+\sqrt{3}$$

따라서 점 A의 자취의 방정식은

$$y=x+\sqrt{3}$$

$$\text{답 } y=x+\sqrt{3}$$

**다른 풀이** 점 A는 점 C를 x축의 방향으로 -1만큼,

y축의 방향으로  $\sqrt{3}$ 만큼 평행이동한 점이므로 점 A의

자취는 점 C의 자취인 직선  $y=x-1$ 을 x축의 방향으

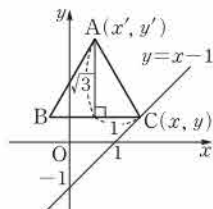
로 -1만큼, y축의 방향으로  $\sqrt{3}$ 만큼 평행이동한 것이

다.

따라서 점 A의 자취의 방정식은

$$y-\sqrt{3}=(x+1)-1$$

$$\therefore y=x+\sqrt{3}$$



**13 [전략]** 방정식  $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형과 직선  $kx-y+k-1=0$ 이 만나도록 하는  $k$ 의 값의 범위를 그래프를 이용하여 구한다.

**풀이** 도형  $|x|+|y|=1$ 을  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

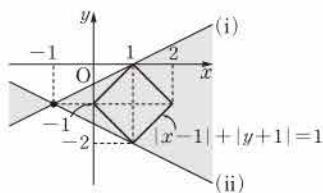
$$|x-1|+|y+1|=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$kx-y+k-1=0$ 에서

$$k(x+1)-(y+1)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이므로 직선  $\textcircled{2}$ 은  $k$ 의 값에 관계없이 항상 점  $(-1, -1)$ 을 지난다.

두 방정식  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 실수  $x, y$ 가 존재하려면 방정식  $\textcircled{1}$ 이 나타내는 도형과 직선  $\textcircled{2}$ 이 만나야 한다.



이때  $k$ 는 직선  $\textcircled{2}$ 의 기울기이므로 위의 그림과 같이 직선  $\textcircled{2}$ 이 방정식  $\textcircled{1}$ 이 나타내는 도형과 만나도록 움직여 보면

(i) 직선  $\textcircled{2}$ 이 점  $(1, 0)$ 을 지날 때,

$$2k-1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선  $\textcircled{2}$ 이 점  $(1, -2)$ 을 지날 때,

$$2k+1=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서  $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$ 이므로

$$M=\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore 16M^2m^2=16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2=1 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

**14 [전략]** 주어진 조건에 따라 점  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$ 의 좌표를 차례로 구한 후 규칙을 찾는다.

**풀이** 점  $P(-2, 1)$ 을  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 점  $P_1$ 의 좌표는  $(2, 1)$

점  $P_1$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점  $P_2$ 의 좌표는  $(-2, -1)$

점  $P_2$ 를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 점  $P_3$ 의 좌표는  $(2, -1)$

점  $P_3$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점  $P_4$ 의 좌표는  $(-2, 1)$

점  $P_4$ 를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 점  $P_5$ 의 좌표는  $(2, 1)$

$\vdots$

즉 점  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ 의 좌표는  $(2, 1), (-2, -1), (2, -1), (-2, 1)$ 이 이 순서대로 반복된다.  $\cdots \textcircled{1}$

이때  $111=4 \cdot 27+3$ 에서 점  $P_{111}$ 의 좌표는 점  $P_3$ 의 좌표와 같으므로  $(2, -1)$   $\cdots \textcircled{2}$

따라서 점  $P_{111}(2, -1)$ 과 직선  $3x-4y-5=0$  사이의 거리는

$$\frac{|6+4-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

답 1

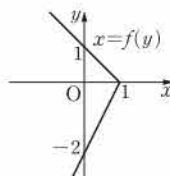
| 채점 기준                                              | 비율   |
|----------------------------------------------------|------|
| ① 점 $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ 의 좌표의 규칙을 찾을 수 있다. | 40 % |
| ② 점 $P_{111}$ 의 좌표를 구할 수 있다.                       | 30 % |
| ③ 점 $P_{111}$ 과 직선 $3x-4y-5=0$ 사이의 거리를 구할 수 있다.    | 30 % |

**15 [전략]** 도형의 대칭이동을 이용하여 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를 순서대로 대칭이동한다.

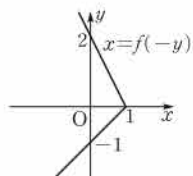
**풀이** 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은  $x=f(y)$ 이고,  $x=f(y)$ 의 그래프를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은  $x=f(-y)$ 이다.

즉  $x=f(-y)$ 의 그래프는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후,  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 것이다.  $\cdots \textcircled{1}$

주어진 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는 [그림 1]과 같고, 이 그래프를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 그래프는 [그림 2]와 같으므로 구하는 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$\cdots \textcircled{2}$

답 풀이 참조

| 채점 기준                       | 비율   |
|-----------------------------|------|
| ① 대칭이동 과정을 설명할 수 있다.        | 50 % |
| ② $x=f(-y)$ 의 그래프를 그릴 수 있다. | 50 % |

**다른 풀이** 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은  $y=f(-x)$ 이고,  $y=f(-x)$ 의 그래프를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은  $x=f(-y)$ 이다.

따라서  $x=f(-y)$ 의 그래프는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 후, 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

**16 [전략]** 도형  $f(x, y)=0$ 을 주어진 순서에 따라 대칭이동하여 도형  $g(x, y)=0$ 을 찾는다.

**풀이** 도형  $f(x, y)=0$ 을 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은  $f(y, x)=0$ 이고, 도형  $f(y, x)=0$ 을 직선  $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은  $f(-x, -y)=0$ 이므로 방정식  $g(x, y)=0$ 이 나타내는 도형은  $f(-x, -y)=0$ 이 나타내는 도형과 같다.

ㄱ.  $f(x, y)=x^2-y+1$ 이면 방정식  $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형은 포물선  $y=x^2+1$ 이고,  $f(-x, -y)=x^2+y+1$ 이므로 방정식  $g(x, y)=0$ 이 나타내는 도형은 포물선  $y=-x^2-1$ 이다.

포물선  $y=x^2+1$ 은 평행이동하여 포물선  $y=-x^2-1$ 과 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. 도형  $f(x, y)=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은  $f(-x, -y)=0$ 이므로 방정식  $g(x, y)=0$ 과 같다.

따라서 도형  $f(x, y)=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동하면 도형  $g(x, y)=0$ 이 된다.

ㄷ. 도형  $f(x, y)=0$ 을 중심이  $(a, b)$ , 반지름의 길이가  $r$ 인 원이라 하면 그 도형의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

도형  $g(x, y)=0$ , 즉 도형  $f(-x, -y)=0$ 의 방정식은

$$\begin{aligned} (-x-a)^2+(-y-b)^2 &= r^2 \\ \therefore (x+a)^2+(y+b)^2 &= r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒} \end{aligned}$$

㉑, ㉒이 일치하면

$$-a=a, -b=b$$

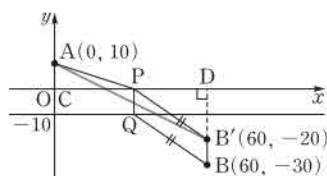
$$\therefore a=0, b=0$$

따라서 원 ㉑의 중심은 원점이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **[답]** ④

**17 [전략]** A 마을 쪽의 강변을  $x$ 축, 직선 AC를  $y$ 축으로 하는 좌표평면을 정하여 A 마을, B 마을의 위치를 좌표로 나타낸다.

**풀이** 다음 그림과 같이 A 마을 쪽의 강변을  $x$ 축, 직선 AC를  $y$ 축으로 하는 좌표평면을 정하면 A 마을의 위치는 점  $(0, 10)$ 이고, B 마을의 위치는 점  $(60, -30)$ 이다.



이때 건설되는 다리의 A 마을 쪽의 지점을 P, B 마을 쪽의 지점을 Q라 하면 두 마을 사이를 오가는 거리는

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$$

그런데  $\overline{PQ}=10$ 으로 일정하므로 두 마을 사이를 오가는 거리가 최소이려면  $\overline{AP} + \overline{QB}$ 의 값이 최소이어야 한다.

점 B를  $y$ 축의 방향으로 10만큼 평행이동한 점을 B'이라 하면  $B'(60, -20)$ 이고  $\overline{QB} = \overline{PB'}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{QB} = \overline{AP} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'}$$

따라서 점 P가 선분 AB' 위에 있을 때  $\overline{AP} + \overline{QB}$ 의 값이 최소가 된다.

이때 직선 AB'의 방정식은

$$\begin{aligned} y-10 &= \frac{-20-10}{60-0}x \\ \therefore y &= -\frac{1}{2}x+10 \end{aligned}$$

점 P는  $x$ 축 위의 점이므로  $y=0$ 을 위의 식에 대입하면

$$0 = -\frac{1}{2}x+10 \quad \therefore x=20$$

따라서  $P(20, 0)$ 이므로 C 지점에서 D 지점 쪽으로 20 m 떨어진 곳에 다리를 건설해야 한다.

**[답]** 20 m

**18 [전략]** 점 A를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 점을 이용한다.

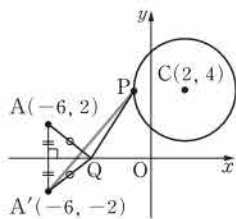
**풀이** 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 점 A를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$$\begin{aligned} C(2, 4), \\ A'(-6, -2) \end{aligned}$$

$$\overline{AQ} = \overline{A'Q} \text{이므로}$$

$$\overline{AQ} + \overline{QP} = \overline{A'Q} + \overline{QP} \geq \overline{A'P}$$

이때  $\overline{A'P}$ 의 길이는 원 위의 점 P와 점 A'(-6, -2) 사이의 거리이므로



$$\begin{aligned}\overline{AP} &\geq \overline{CA'} - \overline{CP} \\ &= \sqrt{(-6-2)^2 + (-2-4)^2} - 3 \\ &= 10 - 3 = 7\end{aligned}$$

따라서  $\overline{AQ} + \overline{QP}$ 의 최솟값은 7이다.

답 7

**19** **전략** 조건 ④에서  $r$ 의 값을 구하여 원  $C'$ 의 방정식을 구한 후 조건 ③에서  $a, b$  사이의 관계식을 구한다.

**풀이** 원  $C$ 의 중심의 좌표가  $(1, 0)$ 이므로 조건 ④에 의하여

$$r = \frac{|4-0+21|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5$$

원  $C$ 를  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동한 원  $C'$ 의 방정식은

$$(x-a-1)^2 + (y-b)^2 = 25$$

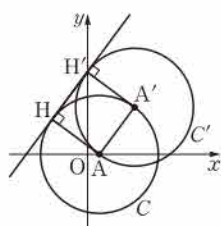
조건 ③에서 원  $C'$ 이 원  $C$ 의 중심  $(1, 0)$ 을 지나므로

$$(1-a-1)^2 + (0-b)^2 = 25$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 25$$

오른쪽 그림과 같이 두 원  $C, C'$ 의 중심을 각각  $A, A'$ 이라 하고, 두 점  $A, A'$ 에서

직선  $4x-3y+21=0$ 에 내린 수선의 발을 각각  $H, H'$ 이라 하면



$$\begin{aligned}\overline{AH} &\perp \overline{HH'}, \\ \overline{A'H'} &\perp \overline{HH'} \\ \therefore \overline{AA'} &\parallel \overline{HH'}\end{aligned}$$

이때  $A(1, 0), A'(a+1, b)$ 이고, 직선

$4x-3y+21=0$ 의 기울기는  $\frac{4}{3}$ 이므로

$$\frac{b-0}{(a+1)-1} = \frac{4}{3} \quad \therefore b = \frac{4}{3}a \quad \dots\dots ①$$

①을 ①에 대입하면  $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 25$

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

$a=3$ 을 ①에 대입하면  $b=4$

$$\therefore a+b+r=12$$

답 12

**20** **전략** 직선의 수직 조건을 이용하여  $a$ 의 값을 구한 후 점  $B$ 를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동하여 점  $C$ 의 좌표를 구한다.

**풀이** 조건 ③에 의하여

$$\frac{3-0}{1-0} \cdot \frac{5-0}{a-0} = -1 \quad \therefore a = -15$$

조건 ④에서 점  $B(-15, 5)$ 를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 점  $C(b, c)$ 이므로

$$b=5, c=-15$$

두 점  $A(1, 3), C(5, -15)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{-15-3}{5-1}(x-1)$$

$$\therefore y = -\frac{9}{2}x + \frac{15}{2}$$

따라서 구하는  $y$ 절편은  $\frac{15}{2}$ 이다.

답 ④

**21** **전략** 주어진 이차함수의 그래프를 대칭이동한 후 평행이동한 그래프의 식과 직선의 방정식에서  $y$ 를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 이용한다.

**풀이** 이차함수  $y=-x^2$ 의 그래프를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=x^2$$

이 이차함수의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 4만큼,  $y$ 축의 방향으로  $m$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=(x-4)^2+m$$

이 이차함수의 그래프가 직선  $y=2x+3$ 에 접하므로 이차방정식  $(x-4)^2+m=2x+3$ , 즉

$x^2-10x+m+13=0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-5)^2 - (m+13) = 0$$

$$\therefore m=12$$

답 ⑤

**22** **전략** 점  $A$ 를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 이용하여 점  $P_0$ 을 찾는다.

**풀이** 오른쪽 그림과

같이 점  $A$ 를 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이

동한 점을  $A'$ 이라 하면

$$A'(0, 1)$$

$\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B}\end{aligned}$$

에서 점  $P_0$ 은 선분  $A'B$  위에 있다.

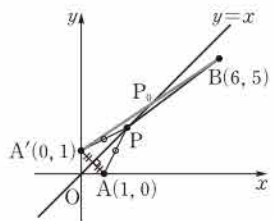
직선  $AP_0$ 을 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선  $A'P_0$ 은 직선  $A'B$ 과 일치하므로 직선  $A'P_0$ 의 방정식은

$$y-1 = \frac{5-1}{6-0}x \quad \therefore y = \frac{2}{3}x + 1$$

이 직선이 점  $(9, a)$ 를 지나므로

$$a = \frac{2}{3} \cdot 9 + 1 = 7$$

답 ④



05

집합의 뜻과 표현

II. 집합과 명제

유제

본책 150~159쪽

056-① 집합  $B$ 를 원소나열법으로 나타내면

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

이므로  $x \in A, y \in B$ 일 때,  $x+y$ 의 값은 다음 표와 같다.

| $x \backslash y$ | 2 | 3 | 5 | 7  |
|------------------|---|---|---|----|
| 1                | 3 | 4 | 6 | 8  |
| 2                | 4 | 5 | 7 | 9  |
| 3                | 5 | 6 | 8 | 10 |
| 4                | 6 | 7 | 9 | 11 |

$$\therefore C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

따라서 집합  $C$ 의 원소의 개수는 9이다.

답 9

056-②  $x \in S, y \in S$ 에 대하여  $(x, y)$ 를 구해 보면 다음 표와 같다.

| $x \backslash y$ | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1                | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) |
| 2                | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) |
| 3                | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) |
| 4                | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) |
| 5                | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) |

이 중에서  $x < y$ 인 것은 색칠한 부분과 같으므로

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

따라서 집합  $A$ 의 원소의 개수는 10이다.

답 10

057-① ① 집합  $\{\emptyset\}$ 의 원소의 개수가 1이므로

$$n(\{\emptyset\}) = 1$$

②  $n(\{1, 2\}) = 2, n(\{2, 3\}) = 2$ 이므로

$$n(\{1, 2\}) = n(\{2, 3\})$$

③  $n(\{2, 3, 4\}) - n(\{2, 3\}) = 3 - 2 = 1$

⑤  $n(\{3, 5, 7, 9\}) = 4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

057-②  $x^3 - x^2 - 6x = 0$ 에서

$$x(x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore A = \{-2, 0, 3\}$$

$$|x| = 0 \text{에서 } x = 0 \text{이므로 } B = \{0\}$$

따라서  $n(A) = 3, n(B) = 1$ 이므로

$$n(A) + n(B) = 4$$

답 4

058-①  $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로

①  $2 \in A$

②  $5 \in A, \{5\} \subset A$

③  $\{2, 7\} \subset A$

⑤ 집합  $A$ 의 원소 2에 대하여  $2 \notin \{1, 3, 5, 7\}$ 이므로

$$A \not\subset \{1, 3, 5, 7\}$$

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

058-② 집합  $A$ 의 원소는

$$a, b, \{c\}, \{c, d\}$$

① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로  $\emptyset \subset A$

②  $\{a, b\}$ 는 집합  $A$ 의 부분집합이므로

$$\{a, b\} \subset A$$

③  $\{c\}$ 는 집합  $A$ 의 원소이므로  $\{c\} \in A$

④  $\{c\}$ 는 집합  $A$ 의 부분집합이 아니므로  $\{c\} \not\subset A$

⑤  $\{c, d\}$ 는 집합  $A$ 의 원소이므로  $\{c, d\} \in A$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

059-①  $3 \in B$ 이므로  $3 \in A$

즉  $a^2 + 5a - 3 = 3$ 이므로

$$a^2 + 5a - 6 = 0, \quad (a+6)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -6 \text{ 또는 } a = 1$$

(i)  $a = -6$ 일 때,

$$A = \{-2, 3\}, B = \{3, 54\} \text{이므로}$$

$$A \neq B$$

(ii)  $a = 1$ 일 때,

$$A = \{-2, 3\}, B = \{-2, 3\} \text{이므로}$$

$$A = B$$

(i), (ii)에서  $A = B$ 를 만족시키는  $a$ 의 값은 1이다.

답 1

059-②  $2 \in A$ 이므로  $2 \in B$

(i)  $a - 1 = 2$ , 즉  $a = 3$ 일 때,

$$A = \{2, 4\}, B = \{2, 4, 5\} \text{이므로}$$

$$A \subset B$$

(ii)  $3a - 4 = 2$ , 즉  $a = 2$ 일 때,

$$A = \{2, 3\}, B = \{1, 2, 4\} \text{이므로}$$

$$A \not\subset B$$

(i), (ii)에서  $A \subset B$ 를 만족시키는  $a$ 의 값은 3이다.

답 3

**060-①** 집합  $C$ 를 원소나열법으로 나타내면

$$C = \{2, 4, 6\}$$

$C \subset X \subset B$ 에서 집합  $X$ 는 집합  $B$ 의 부분집합 중 2, 4, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합  $X$ 의 개수는

$$2^{7-3} = 2^4 = 16 \quad \text{답 16}$$

**060-②** 집합  $A$ 의 원소 중 3의 배수는 3, 6, 9이고, 4의 배수는 4, 8이다.

따라서 구하는 집합의 개수는 집합  $A$ 의 부분집합 중 3, 6, 9는 반드시 원소로 갖고, 4, 8은 원소로 갖지 않는 집합의 개수이므로

$$2^{10-3-2} = 2^5 = 32 \quad \text{답 32}$$

### 중단원 연습 문제

본책 160~163쪽

**01** ③, ⑤      **02**  $B = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right\}$

**03** 6      **04** ①, ②      **05** ①      **06** 3

**07** ⑤      **08** 12      **09** -1      **10** 64      **11** ④

**12** 6      **13**  $\{1, 2, 5, 8, 9\}$       **14** ②, ⑤

**15** 5      **16** 64      **17** 56      **18** 1      **19** 8

**20** 3      **21** 48      **22** ②      **23** ③

**01** **전략** 집합은 어떤 대상이 그 모임에 속하는지 판단할 수 있는 기준이 분명해야 한다.

**풀이** ‘많이’, ‘가까운’, ‘잘하는’과 같은 조건은 명확하지 않으므로 ①, ②, ④는 집합이라고 할 수 없다.

**답** ③, ⑤

### Remark▶

③과 같이 모임에 속하는 대상이 무수히 많거나 ⑤와 같이 모임에 속하는 대상이 하나도 없더라도 기준이 명확하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것은 집합이다.

**02** **전략** 집합  $B$ 의 원소는 집합  $A$ 의 원소에 의하여 정해지므로 먼저 집합  $A$ 의 원소를 구한다.

**풀이**  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$a=1$ 일 때,  $b = \frac{1}{12}$

$a=2$ 일 때,  $b = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$a=3$ 일 때,  $b = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$a=4$ 일 때,  $b = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\therefore B = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right\}$

**답**  $B = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right\}$

**03** **전략** 집합  $A \otimes B$ 의 원소를 먼저 구한다.

**풀이**  $a \in A, b \in B$ 일 때,  $ab$ 의 값은 오른쪽 표와 같다.

$\therefore A \otimes B$

$= \{-3, -2, -1, 0\}$

→ ①

또  $c \in A \otimes B, d \in A$ 일 때,  $cd$ 의 값은 오른쪽 표와 같다.

$\therefore (A \otimes B) \otimes A$

$= \{0, 1, 2, 3\}$

→ ②

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$0+1+2+3=6$

→ ③

| $a \backslash b$ | 1  | 2  | 3  |
|------------------|----|----|----|
| -1               | -1 | -2 | -3 |
| 0                | 0  | 0  | 0  |

| $c \backslash d$ | -1 | 0 |
|------------------|----|---|
| -3               | 3  | 0 |
| -2               | 2  | 0 |
| -1               | 1  | 0 |
| 0                | 0  | 0 |

**답** 6

| 채점 기준                                               | 비율   |
|-----------------------------------------------------|------|
| ① 집합 $A \otimes B$ 를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.              | 40 % |
| ② 집합 $(A \otimes B) \otimes A$ 를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.  | 40 % |
| ③ 집합 $(A \otimes B) \otimes A$ 의 모든 원소의 합을 구할 수 있다. | 20 % |

**04** **전략** 각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 원소의 개수를 조사한다.

**풀이** ①  $|x| < 1$ 인 정수  $x$ 는 0이므로  $\{0\}$

따라서 유한집합이다.

②  $x^2+1=0$ 인 실수  $x$ 는 없다.

따라서 공집합이므로 유한집합이다.

③ 0과 1 사이에 유리수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

④  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.

⑤  $-1 < x-y < 1$ 이고, -1과 1 사이에 실수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

따라서 유한집합인 것은 ①, ②이다.

**답** ①, ②

**05** **전략** 원소의 개수가 0인 집합을 찾는다.

**풀이** ① 0과 곱하여 1이 되는  $x$ 는 없다.

②  $x^3+1=0$ 에서  $x=-1 \quad \therefore \{-1\}$

③  $x^2+4x+3<0$ 에서  $(x+3)(x+1)<0$   
 $-3<x<-1$   
 따라서  $-3$ 과  $-1$  사이에 유리수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

④  $x^2=0$ 에서  $x=0 \therefore \{0\}$

⑤ 1보다 작은 실수는 무수히 많으므로 무한집합이다.  
 따라서 공집합인 것은 ①이다. 답 ①

**06** 전략 두 집합  $A, B$ 를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로

$$A=\{1, 2, 4\}$$

3 이상 15 미만인 짝수는 4, 6, 8, 10, 12, 14이므로

$$B=\{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

따라서  $n(A)=3, n(B)=6$ 이므로

$$n(B)-n(A)=3 \quad \text{답 3}$$

**07** 전략  $x$ 가 집합  $S$ 의 원소이면  $x \in S$ 이고,  $\{x\} \subset S$ 이다.

풀이 ⑤ 1, 2는  $S$ 의 원소이므로  $\{1, 2\} \subset S$  답 ⑤

**08** 전략 먼저 집합  $A$ 의 원소를 구한 후  $B \subset A$ 임을 이용한다.

풀이  $A=\{12, 24, 36, \dots\}$ 이고  $B \subset A$ 이므로  $k$ 는 12의 양의 배수이다.

따라서 자연수  $k$ 의 최솟값은 12이다. 답 12

**09** 전략  $2 \in A$ 이므로  $2 \in B$ 이어야 함을 이용한다.

풀이  $A=B$ 이므로  $a^2-3a-2=2$   
 $a^2-3a-4=0, (a+1)(a-4)=0$   
 $\therefore a=-1$  또는  $a=4$  ... ①

(i)  $a=-1$ 일 때,  
 $A=\{-1, 2, 3\}, B=\{-1, 2, 3\}$ 이므로  
 $A=B$

(ii)  $a=4$ 일 때,  
 $A=\{-7, 2, 4\}, B=\{-1, 2, 3\}$ 이므로  
 $A \neq B$

(i), (ii)에서  $a=-1$  ... ②  
답 -1

| 채점 기준                                    | 비율   |
|------------------------------------------|------|
| ① $a^2-3a-2=2$ 를 만족시키는 $a$ 의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ② $A=B$ 를 만족시키는 $a$ 의 값을 구할 수 있다.        | 50 % |

**10** 전략 먼저 집합  $A$ 의 원소의 개수를 구한다.

풀이  $A=\{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$ 이므로  
 $n(A)=6$

따라서 집합  $A$ 의 부분집합의 개수는

$$2^6=64 \quad \text{답 64}$$

**11** 전략 집합  $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 에 대하여 집합  $P$ 의 특정한 원소  $k (k < n)$ 개를 반드시 원소로 갖는 부분 집합의 개수는  $2^{n-k}$ 임을 이용한다.

풀이 10 이하의 자연수의 개수는 10이므로

$$n(A)=10$$

이때  $X \subset A$ 이지만  $X \neq A$ 이므로 집합  $X$ 는 집합  $A$ 의 진부분집합이다.

따라서 집합  $X$  중에서 2, 4, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{10-3}-1=127 \quad \text{답 ④}$$

**12** 전략 세 집합  $A, B, C$ 의 원소를 각각 구해 본다.

풀이  $A=\{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$ 이므로

$$n(A)=4 \quad \text{... ①}$$

$|x|=-1$ 을 만족시키는  $x$ 의 값은 존재하지 않으므로

$$B=\emptyset$$

$$\therefore n(B)=0 \quad \text{... ②}$$

$x^4+x^3-x^2+x-2=0$ 에서

$$(x^2+1)(x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1 (\because x \text{는 실수})$$

즉  $C=\{-2, 1\}$ 이므로

$$n(C)=2 \quad \text{... ③}$$

$$\therefore n(A)+n(B)+n(C)=6 \quad \text{... ④}$$

답 6

| 채점 기준                            | 비율   |
|----------------------------------|------|
| ① $n(A)$ 를 구할 수 있다.              | 30 % |
| ② $n(B)$ 를 구할 수 있다.              | 30 % |
| ③ $n(C)$ 를 구할 수 있다.              | 30 % |
| ④ $n(A)+n(B)+n(C)$ 의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**13** 전략 조건 (나)에서  $1 \in A, 5 \in A, 8 \in A$ 이므로 집합  $A$ 의 나머지 두 원소를  $a, b$ 로 놓고 주어진 조건을 만족시키는  $a, b$ 의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 집합  $A$ 의 원소는 5개이고, 조건 (나)에서 1, 5, 8이 집합  $A$ 의 원소이므로 나머지 두 원소를  $a, b$ 라 하면 조건 (다)에서

$$1+5+8+a+b=25$$

$$\therefore a+b=11$$

(i)  $a=3$ 일 때,

$$b=8 \text{ 이므로 } A=\{1, 3, 5, 8\}$$

따라서  $n(A)=5$ 를 만족시키지 않는다.

(ii)  $a=6$ 일 때,

$$b=5 \text{ 이므로 } A=\{1, 5, 6, 8\}$$

따라서  $n(A)=5$ 를 만족시키지 않는다.

(iii)  $a=9$ 일 때,

$$b=2 \text{ 이므로 } A=\{1, 2, 5, 8, 9\}$$

따라서 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

이상에서  $A=\{1, 2, 5, 8, 9\}$

$$\text{답 } \{1, 2, 5, 8, 9\}$$

**14** **전략**  $n(A)$ 는 유한집합  $A$ 의 원소의 개수임을 이용한다.

**풀이** ①  $n(\{0, 1\}) - n(\{\emptyset\}) = 2 - 1 = 1$

③  $A=\{1, 2\}$ ,  $B=\{3, 4\}$ 이면  $n(A)=n(B)$ 이지만  $A \neq B$ 이다.

④  $A=\{1, 2\}$ ,  $B=\{3, 4, 5\}$ 이면  $n(A) < n(B)$ 이지만  $A \not\subset B$ 이다.

⑤  $A=\emptyset$ 이므로  $n(A)=0$

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다. **답** ②, ⑤

**15** **전략** 조건제시법으로 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내어 본다.

**풀이**  $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

이고  $B \subset A$ ,  $A \neq B$ 이므로  $a$ 의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 6, 9의 5개이다. **답** 5

**Remark ▶**

- $a=1$ 일 때,  $B=\{1\}$
- $a=2$ 일 때,  $B=\{1, 2\}$
- $a=3$ 일 때,  $B=\{1, 3\}$
- $a=6$ 일 때,  $B=\{1, 2, 3, 6\}$
- $a=9$ 일 때,  $B=\{1, 3, 9\}$

**16** **전략** 집합  $X$ 는 집합  $A$ 의 부분집합 중에서 1, 2를 원소로 갖는 집합이다.

**풀이** 집합  $X$ 의 개수가 16이므로

$$2^{n-2}=2^4$$

즉  $n-2=4$ 이므로  $n=6$

따라서 집합  $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 원소의 개수는 6이므로 부분집합의 개수는

$$2^6=64$$

**답** 64

**17** **전략** 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합은 전체 부분집합에서 홀수를 원소로 갖지 않는 부분집합을 제외한 것과 같다.

**풀이**  $A=\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$ 이므로 집합  $A$ 의 부분집합의 개수는

$$2^6=64$$

→ ①

집합  $A$ 의 부분집합 중 홀수를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합  $\{2, 10, 50\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^3=8$$

→ ②

따라서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$64-8=56$$

→ ③

**답** 56

| 채점 기준                                                    | 비율   |
|----------------------------------------------------------|------|
| ① 집합 $A$ 의 부분집합의 개수를 구할 수 있다.                            | 40 % |
| ② 집합 $A$ 의 부분집합 중 홀수를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 구할 수 있다.       | 40 % |
| ③ 집합 $A$ 의 부분집합 중 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구할 수 있다. | 20 % |

**18** **전략** 집합  $A$ 는 자연수를 원소로 가지므로  $x$ 와  $7-x$ 가 모두 자연수임을 이용한다.

**풀이**  $x$ 와  $7-x$ 가 모두 자연수이므로

$$x \geq 1, 7-x \geq 1$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 6$$

따라서 집합  $A$ 의 원소가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

원소의 개수에 따라 집합  $A$ 를 구해 보면 다음과 같다.

(i) 집합  $A$ 의 원소의 개수가 2일 때,

$$\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$$

(ii) 집합  $A$ 의 원소의 개수가 4일 때,

$$\{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}$$

(iii) 집합  $A$ 의 원소의 개수가 6일 때,

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

∴ 원소의 개수가 1인 집합  $A$ 는 존재하지 않는다.

∴ 2를 원소로 갖는 집합  $A$ 는  $\{2, 5\}$ ,  $\{1, 2, 5, 6\}$ ,  $\{2, 3, 4, 5\}$ ,  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 4개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. **답** ㄴ

**19** **전략** 주어진 조건을 이용하여 집합  $X$ 가 될 수 있는 경우를 찾아본다.

**풀이** 조건 ㉠에서 집합  $X$ 의 모든 원소는 홀수이어야 한다.

또 조건 (나)에서 집합  $X$ 의 원소의 개수는 홀수이어야 한다.

즉 집합  $X$ 는 집합  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 원소가 모두 홀수이고, 원소의 개수가 홀수인 집합이다. → ①

(i)  $n(X)=1$ 일 때,

집합  $X$ 는  $\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}$ 의 4개이다. → ②

(ii)  $n(X)=3$ 일 때,

집합  $X$ 는  $\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}$ 의 4개이다. → ③

(i), (ii)에서 집합  $X$ 의 개수는

$$4+4=8 \quad \text{→ ④}$$

답 8

| 채점 기준                                 | 비율   |
|---------------------------------------|------|
| ① 집합 $X$ 의 조건을 알 수 있다.                | 30 % |
| ② $n(X)=1$ 일 때, 집합 $X$ 의 개수를 구할 수 있다. | 30 % |
| ③ $n(X)=3$ 일 때, 집합 $X$ 의 개수를 구할 수 있다. | 30 % |
| ④ 집합 $X$ 의 개수를 구할 수 있다.               | 10 % |

### Remark ▶

자연수  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 에 대하여

①  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ 의 값이 홀수이려면  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 이 모두 홀수이어야 한다.

②  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ 의 값이 짝수이려면  $a_1, a_2, \dots, a_n$  중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

③  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 의 값이 홀수이려면  $a_1, a_2, \dots, a_n$  중 홀수인 것이 홀수 개이어야 한다.

④  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 의 값이 짝수이려면  $a_1, a_2, \dots, a_n$  중 홀수인 것이 짝수 개이거나 없어야 한다.

**20** **전략** 먼저  $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때  $i^n$ 의 값을 구하여 집합  $A$ 를 찾는다.

**풀이**  $i^1=i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i, \dots$

즉  $i^n$  ( $n$ 은 자연수)은  $i, -1, -i, 1$ 이 반복되어 나타나므로

$$A=\{i, -1, -i, 1\}$$

$i^2=-1, (-1)^2=1, (-i)^2=-1, 1^2=1$ 이므로 집합  $B$ 의 원소는

$$-1+1=0, -1+(-1)=-2, 1+1=2$$

따라서  $B=\{-2, 0, 2\}$ 이므로 구하는 원소의 개수는 3이다. 답 3

**21** **전략** 집합  $A_{25}$ 를 원소나열법으로 나타낸 후  $A_n \subset A_{25}$ 를 만족시키는 자연수  $n$ 의 조건을 구한다.

**풀이**  $\sqrt{25}$  이하의 홀수는 1, 3, 5이므로

$$A_{25}=\{1, 3, 5\}$$

$A_n \subset A_{25}$ 이려면  $1 \leq \sqrt{n} < 7$ 이어야 하므로

$$1 \leq n < 49$$

따라서 자연수  $n$ 의 최댓값은 48이다. 답 48

**22** **전략** 조건 (나)에 의하여 6이 집합  $X$ 의 원소인지 아닌지에 따라 경우를 나누어 생각한다.

**풀이** (i)  $6 \in X$ 일 때,

조건 (가)에서 집합  $X$ 의 원소의 개수가 2 이상이므로 집합  $X$ 는 6 이외의 원소를 1개 이상 가져야 한다.

따라서 집합  $X$ 의 개수는 집합  $\{3, 4, 5, 7\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^4 - 1 = 15$$

(ii)  $6 \notin X$ 일 때,

조건 (나)에 의하여 집합  $X$ 는 3, 4를 반드시 원소로 가져야 하므로 집합  $X$ 의 개수는

$$2^{5-1-2} = 2^2 = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 집합  $X$ 의 개수는

$$15 + 4 = 19 \quad \text{답 ②}$$

**23** **전략** 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 이용하여  $f(n)$ 을 구한다.

**풀이** 집합  $X=\{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 원소  $n$ 에 대하여  $X$ 의 부분집합 중  $n$ 을 최소의 원소로 갖는 집합의 원소는 모두  $n$  이상이어야 한다.

즉  $f(n)$ 은  $n$ 을 반드시 원소로 갖고  $n$ 보다 작은 자연수를 원소로 갖지 않는 집합  $X$ 의 부분집합의 개수이므로

$$f(n)=2^{10-1-(n-1)}=2^{10-n} \quad (\text{단, } 1 \leq n < 10)$$

$$\therefore f(8)=2^{10-8}=4$$

ㄴ.  $1 \in X, 2 \in X$ 이고  $1 < 2$ 이지만

$$f(1)=2^{10-1}=2^9, f(2)=2^{10-2}=2^8$$

이므로  $f(1) > f(2)$ 이다.

$$\therefore f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)$$

$$=2^9+2^7+2^5+2^3+2$$

$$=512+128+32+8+2$$

$$=682$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

### Remark ▶

$n=10$ 일 때, 10을 최소의 원소로 갖는 집합은  $\{10\}$ 뿐이므로  $f(10)=1$

06

집합의 연산

유제

본책 167~188쪽

061-①  $|x|=1$ 에서  $x=\pm 1$ 이므로

$$A=\{-1, 1\}$$

$x^3-x=0$ 에서  $x(x+1)(x-1)=0$ 이므로

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$$\therefore B=\{-1, 0, 1\}$$

5 이하의 소수는 2, 3, 5이므로

$$C=\{2, 3, 5\}$$

$$(1) A \cup B = \{-1, 0, 1\}$$

$$(2) A \cap B = \{-1, 1\}$$

$$(3) A \cap B = \{-1, 1\} \text{이므로}$$

$$(A \cap B) \cup C = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$$

풀이 참조

061-② 두 집합  $B, C$ 를 원소나열법으로 나타내면

$$B=\{3, 6, 9, \dots\}, C=\{1, 3, 9\}$$

이므로

$$A \cap B = \{6\} \neq \emptyset, A \cap C = \emptyset,$$

$$B \cap C = \{3, 9\} \neq \emptyset$$

따라서 서로소인 두 집합은  $A$ 와  $C$ 이다.

A, C

061-③  $a \in A, b \in A$ 일 때,  
 $x=a+2b$ 의 값은 오른쪽 표와 같다.

따라서

$$B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

이므로

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\therefore n(A \cup B) = 9$$

9

062-①  $A \cap B = \{4\}$ 에서  $4 \in (A \cap B)$ 이므로

$$4 \in A$$

따라서  $a^2+3a=4$ 이므로  $a^2+3a-4=0$

$$(a+4)(a-1)=0 \quad \therefore a=-4 \text{ 또는 } a=1$$

(i)  $a=-4$ 일 때,

$$A=\{3, 4\}, B=\{-2, 4, 6\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \{4\}$$

(ii)  $a=1$ 일 때,

$$A=\{3, 4\}, B=\{3, 4, 6\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

(i), (ii)에서  $A \cap B = \{4\}$ 를 만족시키는  $a$ 의 값은  $-4$ 이다.

-4

062-②  $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$ 에서  $4 \in A$  또는

$5 \in A$ 이므로

$$2a+1=4 \text{ 또는 } 2a+1=5$$

$$\therefore a=\frac{3}{2} \text{ 또는 } a=2$$

(i)  $a=\frac{3}{2}$ 일 때,

$$A=\{1, 2, 4\}, B=\left\{2, \frac{7}{2}\right\} \text{이므로}$$

$$A \cup B = \left\{1, 2, \frac{7}{2}, 4\right\}$$

(ii)  $a=2$ 일 때,

$$A=\{1, 2, 5\}, B=\{2, 4\} \text{이므로}$$

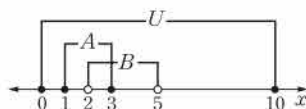
$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$$

(i), (ii)에서  $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$ 를 만족시키는  $a$ 의 값은 2이므로

$$A=\{1, 2, 5\}$$

{1, 2, 5}

063-① 세 집합  $U, A, B$ 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



위의 수직선에서 각 집합을 구하면

$$(1) A^c = \{x | 0 \leq x < 1 \text{ 또는 } 3 < x \leq 10\}$$

$$(2) B^c = \{x | 0 \leq x \leq 2 \text{ 또는 } 5 < x \leq 10\}$$

$$(3) A - B = \{x | 1 \leq x < 2\}$$

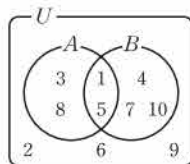
$$(4) B - A = \{x | 2 < x \leq 3\}$$

풀이 참조

063-② 전체집합  $U=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 과 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합  $A, B$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore A=\{1, 3, 5, 8\}$$

{1, 3, 5, 8}



064-①  $A \cap B = A \iff A \subset B$

$$\textcircled{1} A \cup B = B \iff A \subset B$$

$$\textcircled{2} B^c \subset A^c \iff A \subset B$$

$$\textcircled{3} (A-B)^c = U \iff A-B = \emptyset \iff A \subset B$$

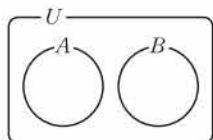
$$\textcircled{4} B^c - A^c = \emptyset \iff B^c \subset A^c \iff A \subset B$$

$$\textcircled{5} A \cup B^c = U \iff B \subset A$$

따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

**064-2**  $A, B$ 가 서로소이므로 이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$A \cap B = \emptyset$$

$$\iff A - B = A$$

$$\iff A \subset B^c$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

**065-1**  $B \cap X = X$ 에서  $X \subset B$ 이고,  
 $(B-A) \cup X = X$ 에서  $(B-A) \subset X$ 이므로

$$(B-A) \subset X \subset B$$

이때  $B-A = \{5, 6, 7\}$ 이므로

$$\{5, 6, 7\} \subset X \subset \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

따라서 집합  $X$ 는 집합  $B-A$ 의 원소 5, 6, 7을 반드시 원소로 갖는 집합  $B$ 의 부분집합이므로 구하는 집합  $X$ 의 개수는

$$2^{5-3} = 2^2 = 4$$

답 4

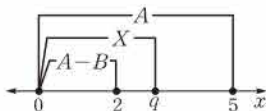
**065-2**  $X-A = \emptyset$ 에서  $X \subset A$ 이고,  
 $(A-B) \cup X = X$ 에서  $(A-B) \subset X$ 이므로

$$(A-B) \subset X \subset A$$

이때  $A-B = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ 이므로

$$\{x \mid 0 \leq x \leq 2\} \subset X \subset \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$$

이를 만족시키도록 집합  $X$ 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$p=0, 2 \leq q \leq 5$$

따라서  $q$ 의 최댓값은 5, 최솟값은 2이므로 구하는 차는

$$5-2=3$$

답 3

$$\textcircled{1} (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B = U \cap B = B$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \{A \cap (A^c \cup B)\} \cap \{B \cap (B \cup C)\} \\ = \{(A \cap A^c) \cup (A \cap B)\} \cap B \\ = \{\emptyset \cup (A \cap B)\} \cap B \\ = (A \cap B) \cap B = A \cap B \end{aligned}$$

답 (1)  $B$  (2)  $A \cap B$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} (A-B) - C &= (A \cap B^c) \cap C^c \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) \\ &= A \cap (B \cup C)^c \\ &= A - (B \cup C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} A - (B-C) &= A \cap (B \cap C^c)^c \\ &= A \cap (B^c \cup C) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \\ &= (A-B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

답 풀이 참조

**067-1** 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned} \{(A \cup B) \cap (A \cup B^c)\} \cap B \\ = \{A \cup (B \cap B^c)\} \cap B \\ = (A \cup \emptyset) \cap B \\ = A \cap B \end{aligned}$$

따라서 주어진 조건은  $A \cap B = A$ 이므로

$$A \subset B$$

답 ①

**Remark ▶**

$$\textcircled{2} A^c \subset B^c \iff B \subset A$$

$$\textcircled{4} A \cap B = \emptyset \iff A, B \text{는 서로소}$$

**067-2** 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned} \{A \cap (A^c \cap B^c)^c\} \cup \{A \cap (A^c \cup B)\} \\ = \{A \cap (A \cup B)\} \cup \{(A \cap A^c) \cup (A \cap B)\} \\ = A \cup \{\emptyset \cup (A \cap B)\} \\ = A \cup (A \cap B) \\ = A \end{aligned}$$

따라서 주어진 조건은

$$A = A \cup B \quad \therefore B \subset A$$

답 풀이 참조

**068-1** 주어진 연산을 정리하면

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cup B) \cap B^c \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup \emptyset \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} A \triangle \emptyset = A \cap \emptyset^c = A \cap U = A$$

$$\textcircled{2} A \triangle U = A \cap U^c = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\textcircled{3} A \triangle A^c = A \cap (A^c)^c = A \cap A = A$$

$$\textcircled{4} A \triangle B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} A^c \triangle B^c &= A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B \\ &= B \cap A^c = B \triangle A \end{aligned}$$

따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ③이다.

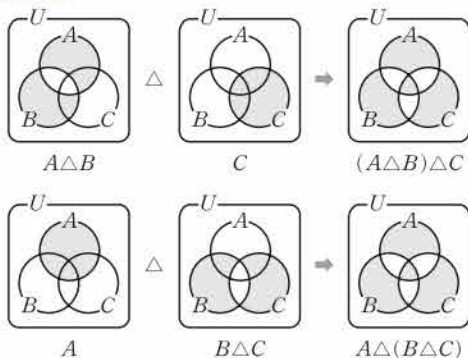
답 ③

068-2 주어진 연산을 정리하면

$$\begin{aligned} A * B &= (A^c \cap B^c)^c - (A \cap B) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{3, 5\} \\ &= \{1, 2, 4, 6\} \end{aligned}$$

따라서 집합  $A * B$ 의 원소의 개수는 4이다. [답] 4

069-1



$$\therefore (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

[답] 풀이 참조

070-1 (1)  $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

이고 세 집합  $A - B$ ,  $B - A$ ,  $A \cap B$ 는 어느 두 집합을 짝 지어도 서로소이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A - B) + n(B - A) \\ &\quad + n(A \cap B) \\ &= 10 + 8 + 5 = 23 \end{aligned}$$

(2)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

..... ㉠

그런데

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(U) - n(A^c \cap B^c) \\ &= 45 - 15 = 30 \end{aligned}$$

따라서 ㉠에서

$$n(A) + n(B) = 30 + 10 = 40$$

[답] (1) 23 (2) 40

070-2 (1) 1부터 30까지의 자연수의 집합을  $U$ , 4의

배수의 집합을  $A$ 라 하면

$$n(U) = 30, n(A) = 7$$

이때 4의 배수가 아닌 수의 집합은  $A^c$ 이므로

$$n(A^c) = n(U) - n(A) = 30 - 7 = 23$$

(2) 1부터 30까지의 자연수의 집합을  $U$ , 2의 배수의 집합을  $A$ , 3의 배수의 집합을  $B$ 라 하면

$$\begin{aligned} n(U) &= 30, n(A) = 15, n(B) = 10, \\ n(A \cap B) &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 15 + 10 - 5 \\ &= 20 \end{aligned}$$

이때 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수의 집합은  $A^c \cap B^c$ , 즉  $(A \cup B)^c$ 이므로

$$\begin{aligned} n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 30 - 20 = 10 \end{aligned}$$

[답] (1) 23 (2) 10

071-1 1부터 100까지의 자연수 중 2의 배수의 집합을  $A$ , 3의 배수의 집합을  $B$ , 5의 배수의 집합을  $C$ 라 하자.  $A \cap B$ 는 6의 배수의 집합,  $B \cap C$ 는 15의 배수의 집합,  $C \cap A$ 는 10의 배수의 집합,  $A \cap B \cap C$ 는 30의 배수의 집합이고, 2 또는 3 또는 5로 나누어떨어지는 수의 집합은  $A \cup B \cup C$ 이다.

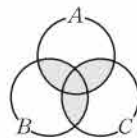
$$\begin{aligned} n(A) &= 50, n(B) = 33, n(C) = 20, \\ n(A \cap B) &= 16, n(B \cap C) = 6, \\ n(C \cap A) &= 10, n(A \cap B \cap C) = 3 \\ \therefore n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ &\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 50 + 33 + 20 - 16 - 6 - 10 + 3 \\ &= 74 \end{aligned}$$

[답] 74

071-2  $U = A \cup B \cup C$ 이므로

$$n(A \cup B \cup C) = n(U) = 44$$

$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



$$\begin{aligned} &n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \\ &= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) \\ &\quad - 2 \times n(A \cap B \cap C) \\ &= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 10 \\ &\quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

그런데

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ &\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned}
 44 &= 24 + 19 + 23 - n(A \cap B) \\
 &\quad - n(B \cap C) - n(C \cap A) + 5 \\
 \therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) \\
 &= 71 - 44 = 27
 \end{aligned}$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned}
 n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \\
 = 27 - 10 = 17
 \end{aligned}$$

답 17

**Remark ▶**

$A \cap B$ ,  $B \cap C$ ,  $C \cap A$ 에는 모두  $A \cap B \cap C$ 가 포함되어 있으므로  $n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$ 를 구하려면  $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$ 에서  $2 \times n(A \cap B \cap C)$ 를 빼야 한다.

**072-①** 동호회 회원 전체의 집합을  $U$ , 바둑을 좋아하는 회원의 집합을  $A$ , 장기를 좋아하는 회원의 집합을  $B$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 n(U) &= 60, n(A) = 38, n(B) = 29, \\
 n(A^c \cap B^c) &= 10
 \end{aligned}$$

그런데  $n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 10$ 에서

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\
 &= 60 - 10 = 50
 \end{aligned}$$

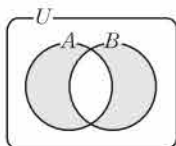
또한

$$\begin{aligned}
 n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\
 &= 38 + 29 - 50 = 17
 \end{aligned}$$

바둑과 장기 중 한 가지만 좋아하는 회원의 집합은 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분이므로 구하는 회원 수는

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B) - n(A \cap B) \\
 = 50 - 17 = 33
 \end{aligned}$$

답 33



**072-②** 영화 A, B, C를 관람한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$$\begin{aligned}
 n(A) &= 26, n(B) = 16, n(C) = 25, \\
 n(A \cap B \cap C) &= 5, n(A \cup B \cup C) = 50
 \end{aligned}$$

그런데

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B \cup C) \\
 = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\
 \quad - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)
 \end{aligned}$$

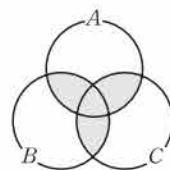
이므로

$$\begin{aligned}
 50 &= 26 + 16 + 25 - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\
 &\quad - n(C \cap A) + 5 \\
 \therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) &= 22
 \end{aligned}$$

영화를 두 편 이상 관람한 학생들의 집합은 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분이므로 구하는 학생 수는

$$\begin{aligned}
 n(A \cap B) + n(B \cap C) \\
 + n(C \cap A) \\
 - 2 \times n(A \cap B \cap C) \\
 = 22 - 10 = 12
 \end{aligned}$$

답 12



**중단원 연습 문제**

본책 189~193쪽

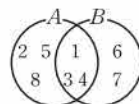
- |                    |       |              |                 |
|--------------------|-------|--------------|-----------------|
| 01 ④               | 02 3  | 03 16        | 04 {1, 5, 6, 9} |
| 05 ⑤               | 06 8  | 07 {b, c, d} | 08 ③            |
| 09 33              | 10 22 | 11 10        | 12 38           |
| 13 16              |       |              |                 |
| 14 ⑤               | 15 9  | 16 ①         |                 |
| 17 {3, 4, 5, 7, 9} | 18 25 | 19 ④         | 20 ③            |
| 21 22              | 22 ②  | 23 22        | 24 75           |

**01** **전략** 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내어 본다.

**풀이**  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$$

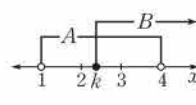
답 ④



**02** **전략** 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 \text{풀이 } x^2 - 5x + 4 < 0 \text{에서 } (x-1)(x-4) < 0 \\
 \therefore 1 < x < 4
 \end{aligned}$$

두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



집합  $A \cap B$ 의 정수인 원소의 개수가 1이려면

$$2 < k \leq 3$$

→ ②

따라서 정수  $k$ 의 값은 3이다.

→ ③

답 3

| 채점 기준                         | 비율   |
|-------------------------------|------|
| ① 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타낼 수 있다. | 40 % |
| ② k의 값의 범위를 구할 수 있다.          | 40 % |
| ③ 정수 k의 값을 구할 수 있다.           | 20 % |

**03 [전략]**  $A \cap B = \{2\}$ 에서  $2 \in B$ 임을 이용하여  $a$ 의 값을 먼저 구한다.

**풀이**  $A \cap B = \{2\}$ 이므로  $2 \in B$

즉  $a^2 - a - 4 = 2$ 이어야 하므로

$$a^2 - a - 6 = 0, \quad (a+2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 3$$

(i)  $a = -2$ 일 때,

$$A = \{2, 3, 10\}, B = \{2, 3\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

(ii)  $a = 3$ 일 때,

$$A = \{-2, 2, 15\}, B = \{2, 3\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

(i), (ii)에서  $A \cap B = \{2\}$ 를 만족시키는  $a$ 의 값은 3이다. → ①

즉  $A = \{-2, 2, 15\}, B = \{2, 3\}$ 이므로

$$(A-B) \cup (B-A) = \{-2, 15\} \cup \{3\} \\ = \{-2, 3, 15\} \quad \rightarrow ②$$

따라서 집합  $(A-B) \cup (B-A)$ 의 모든 원소의 합은  $-2 + 3 + 15 = 16$  → ③

**답** 16

| 채점 기준                              | 비율   |
|------------------------------------|------|
| ① $a$ 의 값을 구할 수 있다.                | 70 % |
| ② 집합 $(A-B) \cup (B-A)$ 를 구할 수 있다. | 20 % |
| ③ 모든 원소의 합을 구할 수 있다.               | 10 % |

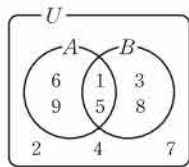
**04 [전략]** 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내어 본다.

**풀이** 전체집합

$U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 와 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합  $A, B$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore A = \{1, 5, 6, 9\}$$

**답**  $\{1, 5, 6, 9\}$



**05 [전략]** 조건  $A \cup B = A$ 로부터 두 집합  $A, B$  사이의 포함 관계를 생각한다.

**풀이**  $A \cup B = A \iff B \subset A \quad \leftarrow ①$

$$\iff A \cap B = B \quad \leftarrow ②$$

$$\iff A^c \subset B^c \quad \leftarrow ③$$

$$\iff A^c \cap B = \emptyset \quad \leftarrow ④$$

⑤  $U - A = A^c$ 이므로  $A^c \cup B \neq U - A$   
따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

**답** ⑤

**Remark ▶**

$$A^c \cup B = U - A \iff A \cap B = \emptyset$$

**06 [전략]** 세 집합  $A, X, (B-A)^c$  사이의 포함 관계를 조사한다.

**풀이** 조건 ㉗에서  $A \cup X = X$ 이므로  $A \subset X$

조건 ㉘에서  $(B-A) \subset X^c$ 이므로

$$X \subset (B-A)^c$$

$$\therefore A \subset X \subset (B-A)^c \quad \rightarrow ①$$

이때

$$B-A = \{2, 6, 7, 8\} - \{1, 2\} \\ = \{6, 7, 8\}$$

$$\text{이므로 } (B-A)^c = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \rightarrow ②$$

따라서 집합  $X$ 는 집합  $A$ 의 원소 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합이므로 구하는 집합  $X$ 의 개수는

$$2^{5-2} = 2^3 = 8 \quad \rightarrow ③$$

**답** 8

| 채점 기준                                     | 비율   |
|-------------------------------------------|------|
| ① 세 집합 $A, X, (B-A)^c$ 사이의 포함 관계를 알 수 있다. | 40 % |
| ② 집합 $(B-A)^c$ 를 구할 수 있다.                 | 20 % |
| ③ 집합 $X$ 의 개수를 구할 수 있다.                   | 40 % |

**07 [전략]** 집합의 분배법칙과 드모르간의 법칙을 이용한다.

**풀이**  $(A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$

$$= A \cap (B^c \cup C^c)$$

$$= A \cap (B \cap C)^c$$

$$= \{a, b, c, d\} \cap \{b, c, d, e, f\}^c$$

$$= \{b, c, d\} \quad \text{답 } \{b, c, d\}$$

**08 [전략]** 집합의 연산 법칙과 연산에 대한 성질, 드모르간의 법칙을 이용한다.

**풀이** ①  $B-A = B \cap A^c = A^c \cap B$

$$\text{② } (A^c - B)^c = (A^c \cap B^c)^c = A \cup B$$

$$\text{③ } (A-B^c) \cup B = \{A \cap (B^c)^c\} \cup B \\ = (A \cap B) \cup B = B$$

$$\text{④ } (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap (B \cup B^c) \\ = A \cap U = A$$

$$\text{⑤ } (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B)^c \\ = \emptyset$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

**답** ③

**09 [전략]** 먼저 분배법칙을 이용하여 주어진 집합을 간단한 연산으로 정리한다.

**풀이**  $A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4)$   
 $= A_6 \cup A_4$

따라서 구하는 원소의 개수는

$$n(A_6 \cup A_4) = n(A_6) + n(A_4) - n(A_6 \cap A_4)$$

$$= n(A_6) + n(A_4) - n(A_{12})$$

이때  $n(A_6) = 16$ ,  $n(A_4) = 25$ ,  $n(A_{12}) = 8$ 이므로

$$n(A_6 \cup A_4) = 16 + 25 - 8 = 33 \quad \text{답 33}$$

**10 [전략]**  $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ 임을 이용하여 먼저  $n(A \cap B)$ 를 구한다.

**풀이**  $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$   
 $= 18 + 15 - 25 = 8 \quad \cdots ①$

$$\therefore n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c)$$

$$= n(U) - n(A \cap B)$$

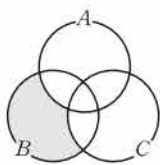
$$= 30 - 8 = 22 \quad \cdots ②$$

답 22

| 채점 기준                          | 비율   |
|--------------------------------|------|
| ① $n(A \cap B)$ 를 구할 수 있다.     | 50 % |
| ② $n(A^c \cup B^c)$ 를 구할 수 있다. | 50 % |

**11 [전략]** 먼저 집합  $A^c \cap B \cap C^c$ 를 벤 다이어그램으로 나타내어 본다.

**풀이** 집합  $A^c \cap B \cap C^c$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



이때

$$n(A \cup C)$$

$$= n(A) + n(C) - n(A \cap C)$$

$$= 12 + 11 - 5 = 18$$

이므로

$$n(A^c \cap B \cap C^c) = n(A \cup B \cup C) - n(A \cup C)$$

$$= 28 - 18 = 10 \quad \text{답 10}$$

**12 [전략]** 두 집합의 교집합의 원소의 개수가 최대, 최소일 때를 생각해 본다.

**풀이** 반 학생 전체의 집합을  $U$ , 사과를 좋아하는 학생의 집합을  $A$ , 배를 좋아하는 학생의 집합을  $B$ 라 하면

$$n(U) = 40, n(A) = 30, n(B) = 24$$

사과와 배를 모두 좋아하는 학생의 집합은  $A \cap B$ 이므로  $n(A \cap B)$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 하면

$B \subset A$ 일 때  $n(A \cap B)$ 가 최대이다.

$$\therefore M = 24$$

또  $A \cup B = U$ 일 때  $n(A \cap B)$ 가 최소이므로

$$n(U) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$40 = 30 + 24 - m$$

$$\therefore m = 14$$

따라서 구하는 합은

$$M + m = 38$$

답 38

**Remark ▶** 유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값

전체집합  $U$ 의 두 부분집합  $A, B$  ( $n(B) < n(A)$ )에 대하여  $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ 이므로

①  $n(A \cap B)$ 가 최대가 되는 경우

⇒  $n(A \cup B)$ 가 최소가 될 때, 즉  $B \subset A$

②  $n(A \cap B)$ 가 최소가 되는 경우

⇒  $n(A \cup B)$ 가 최대가 될 때, 즉  $A \cup B = U$

**13 [전략]** 두 집합  $A, B$ 는 집합  $A \cap B$ 의 원소를 반드시 원소로 가져야 함을 이용한다.

**풀이**  $A \cap B = \{1, 2\}$ ,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로 두 집합  $A, B$ 는 모두 1과 2를 원소로 갖고, 집합  $\{3, 4, 5, 6\}$ 의 모든 원소를 중복 없이 나누어 가져야 한다.

즉 집합  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 원소 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합  $A$ 에 대하여

$$B = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - A) \cup \{1, 2\}$$

이므로 집합  $A$ 가 정해지면 집합  $B$ 가 하나로 결정된다.

따라서 구하는 순서쌍  $(A, B)$ 의 개수는 집합  $\{3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^4 = 16$$

답 16

**14 [전략]** 2를 제외한 집합  $A$ 의 나머지 원소로 가능한 것을 찾는다.

**풀이**  $2 \in A$ 이고, 집합  $A$ 의 모든 원소의 곱이 12이므로 2를 제외한 집합  $A$ 의 나머지 원소의 곱은 6이 되어야 한다.

$$1 \cdot 6 = 6 \text{이므로}$$

$$A = \{1, 2, 6\} \text{ 또는 } A = \{2, 6\}$$

$$A \cup B = U, A \cap B = \{2\} \text{이므로}$$

(i)  $A = \{1, 2, 6\}$ 이면

$$B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$$

따라서 집합  $B$ 의 모든 원소의 합은

$$2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 21$$

(ii)  $A = \{2, 6\}$ 이면

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

따라서 집합  $B$ 의 모든 원소의 합은

$$1+2+3+4+5+7=22$$

(i), (ii)에서 집합  $B$ 의 모든 원소의 합의 최댓값은 22이다. 답 ⑤

**15** **전략** 집합  $A \cup B$ 의 원소 중 하나가 집합  $A$  또는  $B$ 에 있을 경우를 조사해 본다.

**풀이**  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로  $3 \in A$  또는  $3 \in B$ 이다. → ①

$3 \in A$ 이면

$$a^2 + a + 3 = 3, \quad a^2 + a = 0$$

$$a(a+1) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = -1$$

(i)  $a = 0$ 일 때,

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{-3, 3, 4, 6\} \text{이므로}$$

$$A \cup B = \{-3, 1, 2, 3, 4, 6\}$$

(ii)  $a = -1$ 일 때,

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{-1, 4, 6\} \text{이므로}$$

$$A \cup B = \{-1, 1, 2, 3, 4, 6\} \quad \rightarrow ②$$

한편  $3 \in B$ 이면  $3 - a = 3$  또는  $a^2 - a - 3 = 3$ 이므로

$$a = 0 \text{ 또는 } a^2 - a - 6 = 0$$

이때  $a = 0$ 인 경우는 (i)의 경우이므로

$$a^2 - a - 6 = 0 \text{에서 } (a+2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 3$$

(iii)  $a = -2$ 일 때,

$$A = \{1, 2, 4, 5\}, B = \{3, 4, 5, 6\} \text{이므로}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(iv)  $a = 3$ 일 때,

$$A = \{1, 2, 4, 15\}, B = \{0, 3, 4, 6\} \text{이므로}$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 15\} \quad \rightarrow ③$$

이상에서 조건을 만족시키는  $a$ 의 값은  $-2$ 이다. → ④

이때  $A \cap B = \{4, 5\}$ 이므로 집합  $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은  $4+5=9$  → ⑤

답 9

| 채점 기준                                  | 비율   |
|----------------------------------------|------|
| ① $3 \in A$ 또는 $3 \in B$ 임을 알 수 있다.    | 20 % |
| ② $3 \in A$ 일 때, $A \cup B$ 를 구할 수 있다. | 30 % |
| ③ $3 \in B$ 일 때, $A \cup B$ 를 구할 수 있다. | 30 % |
| ④ $a$ 의 값을 구할 수 있다.                    | 10 % |
| ⑤ 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.   | 10 % |

**Remark**

$5 \in A$  또는  $5 \in B$ 로 생각하여도 같은 결과를 얻는다.

**16** **전략** 집합의 연산 법칙과 연산에 대한 성질, 드모르간의 법칙을 이용한다.

**풀이**  $\neg, A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = U - (A \cap B)$

$$\neg, (A-B) \cap (A-C) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c)$$

$$= A \cap (B^c \cap C^c)$$

$$= A \cap (B \cup C)^c$$

$$= A - (B \cup C)$$

$$\neg, A = \{1, 3\}, B = \{1, 2\}, C = \{2, 3\} \text{이면}$$

$$(B-C) \cup (C-B) = \{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\} \text{이므로}$$

$$A \subset \{(B-C) \cup (C-B)\}$$

이지만  $A \not\subset B$ 이고  $A \not\subset C$ 이다.

이상에서 옳은 것은  $\neg$ 뿐이다. 답 ①

**17** **전략**  $A \triangle B$ 를 먼저 구한 후 이 집합과 집합  $C$ 를 다시 연산한다.

**풀이**  $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 9\},$

$$C = \{2, 3, 5, 7\} \quad \rightarrow ①$$

$$\therefore A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$$

$$= \{2, 4\} \cup \{9\}$$

$$= \{2, 4, 9\} \quad \rightarrow ②$$

$$\therefore (A \triangle B) \triangle C$$

$$= \{(A \triangle B) - C\} \cup \{C - (A \triangle B)\}$$

$$= \{4, 9\} \cup \{3, 5, 7\}$$

$$= \{3, 4, 5, 7, 9\} \quad \rightarrow ③$$

답 {3, 4, 5, 7, 9}

| 채점 기준                                      | 비율   |
|--------------------------------------------|------|
| ① 두 집합 $B, C$ 를 원소나열법으로 나타낼 수 있다.          | 20 % |
| ② $A \triangle B$ 를 구할 수 있다.               | 40 % |
| ③ $(A \triangle B) \triangle C$ 를 구할 수 있다. | 40 % |

**18** **전략**  $(X \cap Y) \subset Y \subset (X \cup Y)$ 임을 이용하여  $n(Y)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다.

**풀이**  $n(X^c) = n(U) - n(X)$ 이므로

$$13 = 30 - n(X) \quad \therefore n(X) = 17$$

$$\text{또 } n(X-Y) = n(X) - n(X \cap Y) \text{이므로}$$

$$11 = 17 - n(X \cap Y) \quad \therefore n(X \cap Y) = 6$$

이때  $(X \cap Y) \subset Y$ 이므로

$$n(Y) \geq n(X \cap Y) = 6 \quad \dots\dots ①$$

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y) \text{에서}$$

$$n(X \cup Y) = 17 + n(Y) - 6$$

$$\therefore n(Y) = n(X \cup Y) - 11$$

따라서  $n(X \cup Y)$ 의 값이 최대일 때  $n(Y)$ 가 최댓값을 갖는다.

$(X \cup Y) \subset U$ 에서  $n(X \cup Y) \leq n(U) = 30$ 이므로  
 $n(Y) \leq 30 - 11 = 19$  ..... ㉔

㉓, ㉔에서  $6 \leq n(Y) \leq 19$ 이므로

$$M = 19, m = 6$$

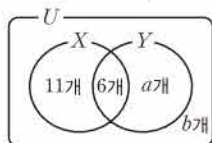
$$\therefore M + m = 25$$

답 25

**다른 풀이**  $n(X) = 17, n(X - Y) = 11$ 에서

$$n(X \cap Y) = n(X) - n(X - Y) = 6$$

이므로  $n(Y - X) = a, n((X \cup Y)^c) = b$ 라 하고 각 영역에 해당하는 집합의 원소의 개수를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$n(U) = 30$ 이므로

$$a + b = 13$$

$n(Y)$ 는  $a = 13, b = 0$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$M = 6 + 13 = 19$$

$n(Y)$ 는  $a = 0, b = 13$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$m = 6 + 0 = 6$$

$$\therefore M + m = 25$$

**19 전략**  $X_3$ 과  $X_4 \cap X_5$ 의 원소의 개수를 각각 구한 다음 합집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

**풀이**  $X_4 = \{x | x = 4n + 1, n \text{은 정수}\},$

$X_5 = \{x | x = 5n + 1, n \text{은 정수}\}$ 이므로

$x \in (X_4 \cap X_5)$ 라 하면  $x - 1$ 은 4와 5의 공배수이다.

즉  $x - 1$ 은 20의 배수이므로

$$x - 1 = 0, 20, 40, 60, 80 (\because 0 \leq x - 1 \leq 99)$$

$$\therefore x = 1, 21, 41, 61, 81$$

즉  $X_4 \cap X_5 = \{1, 21, 41, 61, 81\}$ 이므로

$$n(X_4 \cap X_5) = 5$$

한편  $X_3 = \{x | x = 3n + 1, n \text{은 정수}\},$

즉  $X_3 = \{1, 4, 7, \dots, 100\}$ 이므로  $n(X_3) = 34$

이때  $X_4 \cap X_5$ 의 원소 중에서  $X_3$ 의 원소는 1, 61이므로

$$n(X_3 \cap X_4 \cap X_5) = 2$$

따라서  $X_3 \cup (X_4 \cap X_5)$ 의 원소의 개수는

$$n(X_3 \cup (X_4 \cap X_5))$$

$$= n(X_3) + n(X_4 \cap X_5) - n(X_3 \cap X_4 \cap X_5)$$

$$= 34 + 5 - 2 = 37$$

답 4

**20 전략** 조건 ㉔를 이용하여  $S(B)$ 를  $k$ 에 대한 식으로 나타낸 후  $B = (A \cup B) - (A - B)$ 이므로  $S(B) = S(A \cup B) - S(A - B)$ 임을 이용한다.

**풀이** 조건 ㉔에서

$$S(A) = a + b + c + d + e = 37$$

이므로

$$\begin{aligned} S(B) &= (a + k) + (b + k) + (c + k) + (d + k) \\ &\quad + (e + k) \\ &= (a + b + c + d + e) + 5k \\ &= 37 + 5k \end{aligned}$$

이때  $S(B) = S(A \cup B) - S(A - B)$ 이고, 조건 ㉔에서

$$S(A - B) = 2 + 4 + 9 = 15$$

이므로

$$37 + 5k = 92 - 15 \quad \therefore k = 8$$

답 3

**21 전략** 집합  $A \cap B$ 의 원소가 집합  $X$ 의 원소인 경우와 원소가 아닌 경우로 나누어 생각한다.

**풀이**  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{2\}$ 이므로 2가 집합  $X$ 의 원소인 경우와 원소가 아닌 경우로 나누어 구하면 다음과 같다.

(i)  $2 \in X$ 일 때,

$X \cap A \neq \emptyset, X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키므로 집합  $X$ 의 개수는 집합  $\{1, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$$\therefore 2^4 = 16$$

(ii)  $2 \notin X$ 일 때,

$X \cap A \neq \emptyset, X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키려면 집합  $X$ 는 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4를 원소로 가져야 한다.

즉  $1 \in X, 3 \in X, 4 \notin X$  또는  $1 \in X, 3 \notin X, 4 \in X$  또는  $1 \in X, 3 \in X, 4 \in X$ 인 3가지 경우가 있고, 각 경우에서 집합  $X$ 는 5를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있으므로 집합  $X$ 의 개수는

$$3 \cdot 2 = 6$$

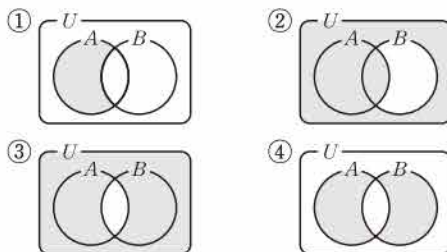
(i), (ii)에서 구하는 집합  $X$ 의 개수는

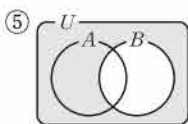
$$16 + 6 = 22$$

답 22

**22 전략** 주어진 각 집합을 벤 다이어그램으로 나타내어 본다.

**풀이** 주어진 각 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.





따라서 구하는 집합은 ②이다.

답 ②

**23 [전략]** 조건 (가)에서 집합  $B-A$ 의 모든 원소의 합을 구하여 집합  $B-A$ 를 구한 후 집합  $A$ 에 대한 조건을 찾는다.

**[풀이]** 집합  $B-A$ 의 모든 원소의 합을  $k$ 라 하면 조건 (가)에서 집합  $A \cup B^c$ 의 모든 원소의 합이  $6k$ 이고

$$A \cup B^c = (A^c \cap B)^c = (B-A)^c$$

이므로 전체집합  $U$ 의 모든 원소의 합은  $7k$ 이다.

즉  $1+2+4+8+16+32=7k$ 이므로

$$k=9$$

집합  $B-A$ 의 모든 원소의 합이 9이므로

$$B-A = \{1, 8\}$$

$$\therefore A \subset \{2, 4, 16, 32\}$$

이때  $n(A \cup B) = n(A) + n(B-A)$ 이고 조건 (나)에서  $n(A \cup B) = 5$ 이므로

$$5 = n(A) + 2 \quad \therefore n(A) = 3$$

따라서  $A = \{2, 4, 16\}$ 일 때 집합  $A$ 의 모든 원소의 합이 최소이므로 구하는 최솟값은

$$2+4+16=22$$

답 22

**24 [전략]** 주어진 조건을 집합으로 나타내어 유한집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

**[풀이]** 2학년 전체 학생의 집합을  $U$ , 문학 체험, 역사 체험, 과학 체험을 신청한 학생의 집합을 각각  $A, B, C$ 라 하면 조건 (가), (나)에서

$$n(U) = 212, n(A) = 80, n(B) = 90,$$

$$n(A \cap B) = 45$$

$$\begin{aligned} \therefore n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 80 + 90 - 45 = 125 \end{aligned}$$

조건 (다)에서  $n(A^c \cap B^c \cap C^c) = 12$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(U) - n((A \cup B \cup C)^c) \\ &= n(U) - n(A^c \cap B^c \cap C^c) \\ &= 212 - 12 = 200 \end{aligned}$$

따라서 과학 체험만 신청한 학생의 수는

$$\begin{aligned} n(C - (A \cup B)) &= n(A \cup B \cup C) - n(A \cup B) \\ &= 200 - 125 = 75 \end{aligned}$$

답 75

## 07

## 명제

II. 집합과 명제

유제

본책 201~225쪽

**073-①** 조건  $p(x)$ 의 진리집합을  $P$ 라 하자.

(1)  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로

$$P = \{1, 2, 3, 4\}$$

(2)  $U = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 이므로

$$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

답 (1)  $\{1, 2, 3, 4\}$  (2)  $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

**073-②**  $x^2 \leq 4$ 를 만족시키는 자연수  $x$ 는

$$x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore P = \{1, 2\} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x$ 는 6의 약수를 만족시키는 자연수  $x$ 는 1, 2, 3, 6이므로

$$Q = \{1, 2, 3, 6\} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또  $|x+2| < 3$ 을 만족시키는 자연수  $x$ 는 없으므로

$$R = \emptyset \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③에서  $R \subset P \subset Q$

답  $R \subset P \subset Q$

**074-①** 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면

$$P = \{1, 2, 3, 4\}, Q = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

(1) 조건  $\sim p$ 의 진리집합은  $P^c$ 이므로

$$P^c = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

(2) 조건 ' $p$  그리고  $q$ '의 진리집합은  $P \cap Q$ 이므로

$$P \cap Q = \{4\}$$

(3) 조건 ' $\sim p$  또는  $\sim q$ '의 진리집합은  $P^c \cup Q^c$ 이므로

$$\begin{aligned} P^c \cup Q^c &= (P \cap Q)^c \\ &= \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \end{aligned}$$

답 풀이 참조

**074-②** 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면

$$P = \{4, 8, 12, 16, 20\}, Q = \{5, 10, 15, 20\}$$

조건 ' $\sim(p \text{ 또는 } \sim q)$ '는 ' $\sim p$  그리고  $q$ '이므로 그 진리집합은  $P^c \cap Q$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore P^c \cap Q &= Q \cap P^c = Q - P \\ &= \{5, 10, 15\} \end{aligned}$$

답  $\{5, 10, 15\}$

**075-①** (1)  $p: 0 < x < 2$ ,  $q: 0 \leq x < 2$ 라 하고, 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면

$$P = \{x | 0 < x < 2\}, Q = \{x | 0 \leq x < 2\}$$

따라서  $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(2) [반례]  $x = -5$ 이면  $x^2 \geq 16$ 이지만  $x < 4$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(3) [반례]  $x = \sqrt{2}$ 이면  $x^2 = 2$ 이므로  $x^2$ 은 유리수이지만  $x$ 는 무리수이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(4)  $p: 2x - 3 = 5$ ,  $q: x^2 - 5x + 4 = 0$ 이라 하고 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면

$$p: 2x - 3 = 5 \text{에서}$$

$$2x = 8 \quad \therefore x = 4$$

$$\therefore P = \{4\}$$

$$q: x^2 - 5x + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

$$\therefore Q = \{1, 4\}$$

따라서  $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

**답** (1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓 (4) 참

**075-②** [반례]  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = -\sqrt{2}$ 이면  $a, b$ 는 무리수이지만

$$a + b = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

이므로  $a + b$ 는 유리수이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

**답** 풀이 참조

**076-①** 명제  $\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로  $P^c \subset Q$   
 $\therefore Q^c \subset P$  **답** ③

**076-②** 세 집합  $P, Q, R$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

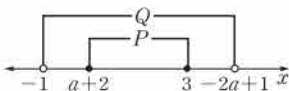
$$P \subset Q, P \not\subset R,$$

$$Q \not\subset P, Q \not\subset R, R \not\subset P$$

따라서 항상 참인 명제는 ①이다.

**답** ①

**077-①** 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하자. 명제  $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면  $P \subset Q$ 이어야 한다. 따라서  $P \subset Q$ 가 성립하도록 두 집합  $P, Q$ 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉  $a+2 > -1$ ,  $-2a+1 > 3$ 이므로

$$a > -3, a < -1$$

$$\therefore -3 < a < -1$$

**답** ④

**078-①** (1) 대우:  $x^2 + y^2 \leq 0$ 이면  $xy \geq 0$ 이다. (참)

(2) 대우:  $x \leq 0$  또는  $y \leq 0$ 이면  $x + y \leq 0$ 이다. (거짓)

[반례]  $x = -1$ ,  $y = 2$ 이면  $x + y > 0$ 이다.

**답** 풀이 참조

#### Remark▶

임의의 두 실수  $x, y$ 에 대하여  $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ 이므로

$$x^2 + y^2 \leq 0 \iff x^2 = 0, y^2 = 0 \iff x = 0, y = 0$$

**079-①** (1)  $x > 0$ 이고  $y > 0 \implies xy > 0$

$$x > 0 \text{이고 } y > 0 \not\iff xy > 0$$

따라서  $x > 0$ 이고  $y > 0$ 인 것은  $xy > 0$ 이기 위한

**충분** 조건이다.

[ $\leftarrow$ 의 반례]  $x = -1$ ,  $y = -2$ 이면  $xy > 0$ 이지만  $x < 0, y < 0$ 이다.

(2)  $x + y$ 가 정수  $\implies x, y$ 가 모두 정수

$$x + y \text{가 정수} \iff x, y \text{가 모두 정수}$$

따라서  $x + y$ 가 정수인 것은  $x, y$ 가 모두 정수이기 위한 **필요** 조건이다.

[ $\rightarrow$ 의 반례]  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ 이면  $x + y$ 는 정수이지만  $x, y$ 는 모두 정수가 아니다.

(3)  $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형  $\implies \triangle ABC$ 가 정삼각형  
 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형  $\iff \triangle ABC$ 가 정삼각형  
 따라서  $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형인 것은  $\triangle ABC$ 가 정삼각형이기 위한 **필요** 조건이다.

[ $\rightarrow$ 의 반례] 삼각형의 세 변의 길이가 2, 2, 3이면 이등변삼각형이지만 정삼각형은 아니다.

(4)  $x = y = 0 \iff |x| + |y| = 0$

따라서  $x = y = 0$ 은  $|x| + |y| = 0$ 이기 위한

**필요충분** 조건이다.

**답** (1) 충분 (2) 필요 (3) 필요 (4) 필요충분

**080-①**  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요조건이므로

$$Q \subset P$$

$$\therefore P \cup Q = P, P \cap Q = Q,$$

$$Q - P = \emptyset, P^c - Q^c = \emptyset$$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

**답** ④

**080-②**  $q$ 가  $p$ 이기 위한 필요조건이므로

$$q \iff p, \text{ 즉 } P \subset Q$$

또  $q$ 가  $r$ 이기 위한 충분조건이므로

$$q \implies r, \text{ 즉 } Q \subset R$$

$\therefore P \subset Q, Q \subset R$ 이므로  $P \subset R$

$\therefore P \subset Q$ 에서  $P \cup Q = Q$ 이므로

$$(P \cup Q) \subset R$$

$\therefore P \subset R$ 에서  $R^c \subset P^c$ 이므로

$$P^c \cap R^c = R^c$$

$$\therefore (P^c \cap R^c) \subset Q^c \quad (\because Q \subset R)$$

이상에서 항상 옳은 것은  $\neg, \supset$ 이다. ▶ ㄱ, ㄷ

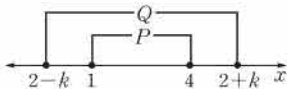
### 081-① 주어진 조건을 각각

$$p: 1 \leq x \leq 4, \quad q: |x-2| \leq k$$

로 놓고 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면

$$P = \{x | 1 \leq x \leq 4\}, \quad Q = \{x | 2-k \leq x \leq 2+k\}$$

$p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이므로  $P \subset Q$ 이고, 이를 만족시키도록 두 집합  $P, Q$ 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$2-k \leq 1 \text{에서} \quad k \geq 1$$

$$2+k \geq 4 \text{에서} \quad k \geq 2$$

따라서  $k \geq 2$ 이므로  $k$ 의 최솟값은 2이다. ▶ 2

### 081-② 주어진 조건을 각각

$$p: a \leq x \leq b, \quad q: x+4 > 0, \quad r: |x| < 1$$

로 놓고 진리집합을 각각  $P, Q, R$ 라 하면

$$P = \{x | a \leq x \leq b\},$$

$$Q = \{x | x > -4\},$$

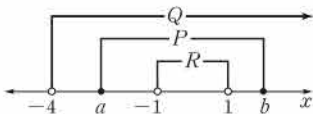
$$R = \{x | -1 < x < 1\}$$

이때  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이고  $r$ 이기 위한 필요조건이므로

$$p \implies q, r \implies p$$

즉  $P \subset Q, R \subset P$ 이므로  $R \subset P \subset Q$

이를 만족시키도록 세 집합  $P, Q, R$ 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore -4 < a \leq -1, b \geq 1$$

따라서  $a$ 의 최댓값은  $-1$ 이고  $b$ 의 최솟값은  $1$ 이므로 구하는 합은

$$-1+1=0 \quad \text{▶} \quad 0$$

### 082-① 주어진 명제의 대우는

‘ $x=2$ 이고  $y=3$ 이면  $xy=6$ 이다.’

이고, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

... 증명 끝

▶ 풀이 참조

### 083-① $x$ 가 유리수라고 가정하면 유리수끼리의 곱

셈은 유리수이므로  $x \cdot x = x^2$ 은 유리수이다.

이것은  $x^2$ 이 무리수라는 가정에 모순이므로  $x^2$ 이 무리수이면  $x$ 도 무리수이다. ... 증명 끝

▶ 풀이 참조

### 083-② 오른쪽 그림에서 직

사각형의 대각선의 길이는 피

타고라스 정리에 의하여

$$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$\sqrt{5}$ 가 유리수라고 가정하면

$$\sqrt{5} = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{는 서로소인 정수, } p \neq 0)$$

로 놓을 수 있다.

$\sqrt{5} = \frac{q}{p}$ 의 양변을 제곱하면

$$5 = \frac{q^2}{p^2} \quad \therefore q^2 = 5p^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서  $q^2$ 이 5의 배수이므로  $q$ 도 5의 배수이다.

$q=5k$  ( $k$ 는 정수)로 놓고 ①에 대입하면

$$(5k)^2 = 5p^2 \quad \therefore p^2 = 5k^2$$

$p^2$ 이 5의 배수이므로  $p$ 도 5의 배수이다.

따라서  $p, q$ 가 서로소라는 가정에 모순이므로  $\sqrt{5}$ 는 유리수가 아니다. ... 증명 끝

▶ 풀이 참조

### 084-① ① 명제 $p \implies q$ 가 참이므로 그 대우

$\sim q \implies \sim p$ 도 참이다.

② 명제  $q \implies \sim r$ 가 참이므로 그 대우  $r \implies \sim q$ 도 참이다.

③ 두 명제  $p \implies q, q \implies \sim r$ 가 모두 참이므로  $p \implies \sim r$ 도 참이다.

④ 명제  $\sim r \implies p$ 는 명제  $p \implies \sim r$ 의 역이므로 반드시 참이라고는 할 수 없다.

⑤ 명제  $p \implies \sim r$ 가 참이므로 그 대우  $r \implies \sim p$ 도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다.

▶ ④

**084-2** ㄱ. 두 명제  $r \rightarrow s, s \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 명제  $r \rightarrow q$ 도 참이다.

ㄴ. 두 명제  $r \rightarrow \sim p, \sim p \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 명제  $r \rightarrow q$ 도 참이다.

ㄷ. 명제  $p \rightarrow \sim s$ 가 참이면 그 대우  $s \rightarrow \sim p$ 도 참이다. 즉 명제  $r \rightarrow s, s \rightarrow \sim p,$

$\sim p \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 명제  $r \rightarrow q$ 도 참이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 명제  $r \rightarrow q$ 가 참임을 보일 수 있다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

**Remark▶**

참인 두 명제가 주어졌을 때, 앞의 명제의 결론과 뒤의 명제의 가정이 같아야만 삼단논법을 활용할 수 있다. 두 명제에서 연결 고리를 찾을 수 없을 때에는 두 명제의 대우를 찾아 삼단논법을 활용하도록 한다.

**중단원 연습 문제**

본책 226~230쪽

01 3    02 ④    03 ④    04 a    05 -1

06 ④    07 ④    08 ④    09 -10

10 풀이 참조    11 ③    12  $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{3}$

13 ③    14 ⑤    15 ④    16 ①

17 (가) 홀수 (나) 음이 아닌 정수 (다) 홀수

18 12    19 9    20 ④    21 ①

**01** **전략** 참, 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 식을 명제라 한다.

**풀이** ㄱ.  $x$ 의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 명제가 아니다.

ㄴ.  $3+4=7$ 은 참인 명제이다.

ㄷ. 2는 소수이지만 짝수이므로 거짓인 명제이다.

ㄹ. 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

ㅁ. 마름모는 두 대각선이 직교하는 사각형이지만 정사각형이 아니므로 거짓인 명제이다.

이상에서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ의 3개이다.

답 3

**02** **전략** 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면  $\sim p$ 의 진리집합은  $P^c$ , ' $p$ 이고  $q$ '의 진리집합은  $P \cap Q$ 임을 이용한다.

**풀이** 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면  $P = \{2, 3, 4, 5\}, Q = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

①  $\sim p$ 의 진리집합은  $P^c$ 이므로

$$P^c = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

②  $\sim q$ 의 진리집합은  $Q^c$ 이므로

$$Q^c = \{1, 2, 3, 9, 10\}$$

③ ' $p$ 이고  $\sim q$ '의 진리집합은  $P \cap Q^c$ 이므로

$$P \cap Q^c = \{2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 9, 10\} = \{2, 3\}$$

④ ' $\sim p$ 이고  $q$ '의 진리집합은  $P^c \cap Q$ 이므로

$$P^c \cap Q = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{4, 5, 6, 7, 8\} = \{6, 7, 8\}$$

⑤ ' $\sim p$ 이고  $\sim q$ '의 진리집합은  $P^c \cap Q^c$ 이므로

$$P^c \cap Q^c = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 2, 3, 9, 10\} = \{1, 9, 10\}$$

따라서 진리집합이  $\{6, 7, 8\}$ 인 것은 ④이다. **답** ④

**03** **전략** 명제  $p \rightarrow q$ 에서  $p$ 를 만족시키지만  $q$ 를 만족시키지 않는 경우가 있는 것을 찾는다.

**풀이** ④  $x(x+1)=12$ 에서  $x^2+x-12=0$

$$(x+4)(x-3)=0 \quad \therefore x=-4 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 -4는 자연수가 아니므로 주어진 명제는 거짓이다.

⑤  $x(x+2)=6$ 에서  $x^2+2x-6=0$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$$

따라서  $x$ 는 무리수이므로 주어진 명제는 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ④이다. **답** ④

**Remark▶**

계수가 실수인 이차방정식  $ax^2+bx+c=0$ 의 해는

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**04** **전략** 조건  $p$ 의 진리집합이  $P$ 일 때,  $\sim p$ 의 진리집합은  $P^c$ 임을 이용한다.

**풀이** 두 조건  $\sim p, \sim q$ 의 진리집합은 각각  $P^c, Q^c$ 이다.

명제 ' $\sim q$ 이면  $\sim p$ 이다.'가 거짓이라면  $Q^c \not\subset P^c$ 이어야 하므로  $Q^c$ 의 원소이면서  $P^c$ 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

$a \in Q^c$ 이지만  $a \notin P^c$ 이므로 명제 ‘ $\sim q$ 이면  $\sim p$ 이다.’가 거짓임을 보여주는 반례는  $a$ 이다. 답 a

**다른 풀이** 명제 ‘ $\sim q$ 이면  $\sim p$ 이다.’의 대우가 ‘ $p$ 이면  $q$ 이다.’이므로  $P$ 의 원소이면서  $Q$ 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

$a \in P$ 이지만  $a \notin Q$ 이므로 명제 ‘ $\sim q$ 이면  $\sim p$ 이다.’가 거짓임을 보여주는 반례는  $a$ 이다.

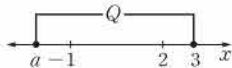
**05** **전략** 두 조건  $p, q$ 의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

**풀이**  $p: x^2 - x - 2 = 0$ 에서  
 $(x+1)(x-2) = 0$   
 $\therefore x = -1$  또는  $x = 2$

두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면

$$P = \{-1, 2\}, Q = \{x \mid a \leq x \leq 3\} \quad \cdots ①$$

명제  $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면  $P \subset Q$ 이어야 하고, 이를 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore a \leq -1 \quad \cdots ②$$

따라서  $a$ 의 최댓값은  $-1$ 이다. ③

답 -1

| 채점 기준                          | 비율   |
|--------------------------------|------|
| ① 두 조건 $p, q$ 의 진리집합을 구할 수 있다. | 40 % |
| ② $a$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.        | 40 % |
| ③ $a$ 의 최댓값을 구할 수 있다.          | 20 % |

**06** **전략** ‘모든  $x$ 에 대하여  $p$ 이다.’  $\Rightarrow$  전체집합의 모든 원소가  $p$ 를 만족시킨다.

‘어떤  $x$ 에 대하여  $p$ 이다.’  $\Rightarrow$  전체집합의 원소 중  $p$ 를 만족시키는 원소가 적어도 하나 존재한다.

**풀이** ① [반례]  $x=1$ 일 때  $2x=2$ 이므로  $2x > 2$ 가 성립하지 않는다.

따라서 거짓인 명제이다.

②  $x-5=6$ 에서  $x=11$

따라서 전체집합  $U$ 의 원소 중  $x-5=6$ 을 만족시키는 원소는 없으므로 거짓인 명제이다.

③ [반례]  $x=10$ 일 때  $x^2=100$ 이므로  $x^2 < 100$ 이 성립하지 않는다.

따라서 거짓인 명제이다.

④  $-x \geq -1$ 에서  $x \leq 1$

따라서  $x=1$ 이면  $-x \geq -1$ 을 만족시키므로 참인 명제이다.

⑤ [반례]  $x=2$ 일 때  $2+5=7$ 이므로  $x+5 \geq 8$ 이 성립하지 않는다.

따라서 거짓인 명제이다.

따라서 참인 명제는 ④이다. 답 ④

**07** **전략** 명제와 그 대우의 참, 거짓은 항상 일치하므로 명제 또는 그 대우와 역의 참, 거짓을 알아본다.

**풀이**  $\neg$ . 대우:  $x$  또는  $y$ 가 짝수이면  $xy$ 는 짝수이다. (참)

$$[\text{증명}] (\text{짝수}) \times (\text{짝수}) = (\text{짝수}),$$

$$(\text{짝수}) \times (\text{홀수}) = (\text{짝수}),$$

$$(\text{홀수}) \times (\text{짝수}) = (\text{짝수})$$

이므로  $x$  또는  $y$ 가 짝수이면  $xy$ 는 짝수이다.

역:  $x, y$ 가 모두 홀수이면  $xy$ 는 홀수이다. (참)

$\neg$ . 대우:  $xy$ 가 홀수이면  $x^2 + y^2$ 는 짝수이다. (참)

[증명]  $xy$ 가 홀수이면  $x, y$ 는 모두 홀수이고  $x^2, y^2$ 도 홀수이다. 따라서  $x^2 + y^2$ 는 짝수이다.

역:  $xy$ 가 짝수이면  $x^2 + y^2$ 는 홀수이다. (거짓)

[반례]  $x=2, y=2$ 이면  $xy$ 가 짝수이지만

$$x^2 + y^2 = 8 \text{이므로 짝수이다.}$$

$\neg$ . 명제:  $x^2 + xy + y^2 = 0$ 이면  $x=0$ 이고  $y=0$ 이다.

(참)

$$[\text{증명}] x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0 \text{이면}$$

$$x + \frac{y}{2} = 0, y = 0 \quad \therefore x = 0, y = 0$$

따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

역:  $x=0$ 이고  $y=0$ 이면  $x^2 + xy + y^2 = 0$ 이다. (참)

이상에서 명제의 역, 대우가 모두 참인 명제는  $\neg$ ,  $\neg$ 이다. 답 ④

**Remark**

실수  $a, b$ 에 대하여

$$a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0, b = 0$$

**08** **전략** 명제  $p \rightarrow q$ 와 그 역  $q \rightarrow p$ 가 모두 참인 것을 찾는다.

**풀이** ①  $p: xy < 0 \implies q: x^2 + y^2 > 0$

$$p: xy < 0 \not\iff q: x^2 + y^2 > 0$$

따라서  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.

[ $\leftarrow$ 의 반례]  $x=1, y=2$ 이면  $x^2 + y^2 > 0$ 이지만  $xy > 0$ 이다.

②  $p: x > y > 0 \implies q: x^2 > y^2$

$$p: x > y > 0 \not\iff q: x^2 > y^2$$

따라서  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.

[←의 반례]  $x = -3, y = 1$ 이면  $x^2 > y^2$ 이지만  $x < y$ 이다.

③  $p: x^2 + y^2 > 0 \not\Rightarrow q: x + y > 0$

$p: x^2 + y^2 > 0 \Leftarrow q: x + y > 0$

따라서  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요조건이다.

[→의 반례]  $x = 1, y = -2$ 이면  $x^2 + y^2 > 0$ 이지만  $x + y < 0$ 이다.

④  $p: x^2 + y^2 = 0 \iff q: |x| + |y| = 0$

따라서  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요충분조건이다.

⑤  $p: x > 1$ 이고  $y > 1 \implies q: x + y > 2$

$p: x > 1$ 이고  $y > 1 \Leftarrow q: x + y > 2$

따라서  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.

[←의 반례]  $x = -1, y = 5$ 이면  $x + y > 2$ 이지만  $x < 1$ 이고  $y > 1$ 이다.

따라서  $p$ 가  $q$ 이기 위한 필요충분조건인 것은 ④이다.

답 ④

**09 전략** 세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합을 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타낸다.

**풀이** 세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합을 각각  $P, Q, R$ 라 하면

$P = \{x | -2 < x < -1 \text{ 또는 } x > 5\},$

$Q = \{x | x > a\},$

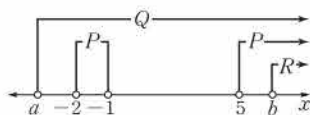
$R = \{x | x > b\}$

$q$ 는  $p$ 이기 위한 필요조건이고,  $r$ 는  $p$ 이기 위한 충분조건이므로

$P \subset Q, R \subset P$ , 즉  $R \subset P \subset Q$

이어야 한다. ... ①

이를 만족시키도록 집합  $P, Q, R$ 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore a \leq -2, b \geq 5$  ... ②

따라서  $a$ 의 최댓값은  $-2$ ,  $b$ 의 최솟값은  $5$ 이므로 구하는 곱은

$-2 \cdot 5 = -10$  ... ③

답 -10

| 채점 기준                                   | 비율   |
|-----------------------------------------|------|
| ① 세 조건 $p, q, r$ 의 진리집합의 포함 관계를 알 수 있다. | 40 % |
| ② $a, b$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.              | 40 % |
| ③ $a$ 의 최댓값과 $b$ 의 최솟값의 곱을 구할 수 있다.     | 20 % |

**10 전략** 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용한다.

**풀이** 주어진 명제의 대우는

' $x \neq 0$  또는  $y \neq 0$ 이면  $x^2 + y^2 \neq 0$ 이다.' ... ①

(i)  $x \neq 0$ 일 때,

$x^2 > 0, y^2 \geq 0$ 이므로  $x^2 + y^2 \neq 0$

(ii)  $y \neq 0$ 일 때,

$x^2 \geq 0, y^2 > 0$ 이므로  $x^2 + y^2 \neq 0$

(i), (ii)에서  $x \neq 0$  또는  $y \neq 0$ 이면  $x^2 + y^2 \neq 0$ 이므로 주어진 명제의 대우가 참이다. ... ②

따라서 주어진 명제도 참이다. ... ③

답 풀이 참조

| 채점 기준                       | 비율   |
|-----------------------------|------|
| ① 주어진 명제의 대우를 말할 수 있다.      | 30 % |
| ② 주어진 명제의 대우가 참임을 증명할 수 있다. | 60 % |
| ③ 주어진 명제가 참임을 증명할 수 있다.     | 10 % |

**11 전략** 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용한다.

**풀이** 명제  $\sim q \implies \sim p$ 가 참이므로 그 대우

$p \implies q$ 도 참이다.

따라서 두 명제  $p \implies q, q \implies r$ 가 모두 참이므로 명제  $p \implies r$ 와 그 대우  $\sim r \implies \sim p$ 도 반드시 참이다. ... ③

**12 전략** 세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합의 포함 관계를 생각한다.

**풀이**  $q: 3x - 1 = 10$ 에서  $x = \frac{11}{3}$

$r: x^2 + 3x - 10 = 0$ 에서  $(x + 5)(x - 2) = 0$

$\therefore x = -5$  또는  $x = 2$

세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합을 각각  $P, Q, R$ 라 하면

$P = \{x | x < 2a + 3\}, Q = \{\frac{11}{3}\}, R = \{-5, 2\}$

... ①

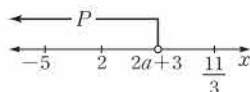
명제  $q \implies p$ 는 거짓이고, 명제  $r \implies p$ 는 참이므로

$Q \not\subset P, R \subset P$

이를 만족시키도록 집합

$P$ 를 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같다.



... ②

따라서  $2 < 2a + 3 \leq \frac{11}{3}$  이므로

$-1 < 2a \leq \frac{2}{3} \therefore -\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{3}$  ... ③

답  $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{3}$

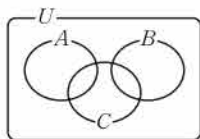
| 채점 기준                                            | 비율   |
|--------------------------------------------------|------|
| ① 세 조건 $p, q, r$ 의 진리집합을 구할 수 있다.                | 40 % |
| ② 주어진 조건을 만족시키도록 조건 $p$ 의 진리집합을 수직선 위에 나타낼 수 있다. | 40 % |
| ③ $a$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.                          | 20 % |

**13 [전략]** 명제 ‘어떤  $x$ 에 대하여  $p(x)$ ’가 거짓이면 ‘모든  $x$ 에 대하여  $\sim p(x)$ ’는 참이고, 명제 ‘모든  $x$ 에 대하여  $\sim q(x)$ ’가 거짓이면 ‘어떤  $x$ 에 대하여  $q(x)$ ’는 참이다.

**[풀이]**  $\neg$ .  $p$ 의 부정 ‘ $x \in A$ 인 모든  $x$ 에 대하여  $x \notin B$ 이다.’가 참이므로  $A \cap B = \emptyset$ 이다.

$\neg$ .  $q$ 의 부정 ‘ $x \in C$ 인 어떤  $x$ 에 대하여  $x \in A$ 이다.’가 참이므로  $A \cap C \neq \emptyset$ 이다. 이때  $(A \cap C) \subset (A \cup C)$ 이므로  $A \cup C \neq \emptyset$ 이다.

$\neg$ . 세 집합  $A, B, C$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같이  $B \cap C \neq \emptyset$ 인 경우도 있다. 이상에서 옳은 것은  $\neg, \neg$ 이다.



**[답]** ③

**14 [전략]** 조건이 ‘적어도~’의 꼴로 주어지면 조건의 부정을 이용한다.

**[풀이]** 조건  $t$ 의 부정은

$\sim t$ :  $a$ 와  $b$ 는 모두 1이 아니다.

조건  $a \neq 1$ 의 진리집합은  $P \cup Q$ 이고, 조건  $b \neq 1$ 의 진리집합은  $R \cup S$ 이므로 조건  $\sim t$ 의 진리집합은  $(P \cup Q) \cap (R \cup S)$

조건  $t$ 의 진리집합을  $T$ 라 하면 조건  $\sim t$ 의 진리집합은  $T^c$ 이므로

$$\begin{aligned} T^c &= (P \cup Q) \cap (R \cup S) \\ \therefore T &= \{((P \cup Q) \cap (R \cup S))^c\} \\ &= (P \cup Q)^c \cap (R \cup S)^c \\ &= (P^c \cap Q^c) \cap (R^c \cap S^c) \\ &= (P^c - Q) \cap (R^c - S) \end{aligned}$$

**[답]** ⑤

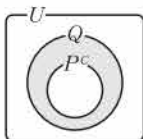
**15 [전략]** 두 조건  $p, q$  사이의 관계를 이용하여 진리 집합  $P, Q$  사이의 포함 관계를 구한다.

**[풀이]**  $\sim p \Rightarrow q$ 이기 위한 충분조건이므로

$\sim p \Rightarrow q$ , 즉  $P^c \subset Q$

$\neg$ .  $P^c \subset Q$ 이므로  $x \in P^c$ 이면  $x \in Q$ 이다.

$\neg$ .  $x$ 가 오른쪽 벤 다이어그램의 색 칠한 부분의 원소이면  $x \in P$ 이지만  $x \in Q$ , 즉  $x \notin Q^c$ 이다.



$\neg$ .  $P^c \subset Q$ 에서  $Q^c \subset P$

$$\therefore P - Q = P \cap Q^c = Q^c$$

따라서  $x \in Q^c$ 이면  $x \in (P - Q)$ 이다.

이상에서 항상 참인 명제는  $\neg, \neg$ 이다.

**[답]** ④

**Remark**

두 집합  $A, B$ 에 대하여

$$A \subset B \iff x \in A \text{이면 } x \in B \text{이다.}$$

**16 [전략]**  $p \Rightarrow q$ 이고  $q \Rightarrow p$ , 즉  $p \iff q$ 이면  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요충분조건이다.

**[풀이]**  $\neg$ .  $p: A \cup B^c = U \iff q: B - A = \emptyset$

따라서  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요충분조건이다.

$$\begin{aligned} [\iff \text{의 증명}] A \cup B^c = U &\iff (A \cup B^c)^c = U^c \\ &\iff A^c \cap B = \emptyset \\ &\iff B - A = \emptyset \end{aligned}$$

$\neg$ .  $p: A \cup B = \emptyset \Rightarrow q: A \subset B$

$$p: A \cup B = \emptyset \not\Rightarrow q: A \subset B$$

따라서  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.

[ $\Leftarrow$ 의 반례] 오른쪽 그림과 같은

경우  $A \subset B$ 이지만

$$A \cup B = B \neq \emptyset \text{이다.}$$

$\neg$ .  $p: A - B = A \Rightarrow q: B = \emptyset$

$$p: A - B = A \Leftarrow q: B = \emptyset$$

따라서  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요조건이다.

[ $\Rightarrow$ 의 반례] 오른쪽 그림과

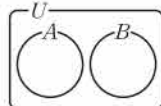
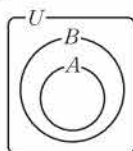
같은 경우  $A - B = A$ 이지만

$$B \neq \emptyset \text{이다.}$$

이상에서  $p$ 가  $q$ 이기 위한 필요충분

조건인 것은  $\neg$ 뿐이다.

**[답]** ①



**17 [전략]** 귀류법은 결론을 부정하여 가정에 모순이 됨을 이끌어냄으로써 그 명제가 참임을 증명하는 방법이다.

**[풀이]**  $a, b$ 를 모두 **[홀수]**라 하면

$$a = 2k - 1, b = 2l - 1 \quad (k, l \text{은 자연수})$$

로 놓을 수 있으므로

$$\begin{aligned} ab &= (2k - 1)(2l - 1) = 4kl - 2k - 2l + 1 \\ &= 2(2kl - k - l) + 1 \end{aligned}$$

그런데  $k, l$ 이 자연수이므로  $2kl - k - l$ 은

**[음이 아닌 정수]**이다. 따라서  $ab$ 는 **[홀수]**가 되어  $ab$ 가 짝수라는 가정에 모순이므로  $ab$ 가 짝수이면  $a$  또는  $b$ 는 짝수이다.

$$\therefore \text{(가) 홀수 (나) 음이 아닌 정수 (다) 홀수}$$

**[답]** 풀이 참조

**18** **전략** 주어진 명제가 참이 되도록 하는 진리집합의 포함 관계를 생각해 본다.

**풀이**  $p: 2x-a=0$ 에서  $x=\frac{a}{2}$

$$\therefore P=\left\{\frac{a}{2}\right\}$$

두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면 명제  $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로

$$P \subset Q^c \quad \therefore Q \subset P^c \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 명제  $\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로

$$P^c \subset Q \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서

$$Q=P^c=\left\{x \mid x \neq \frac{a}{2} \text{인 실수}\right\}$$

즉 부등식  $x^2-bx+9>0$ 의 해가  $x \neq \frac{a}{2}$ 인 모든 실수이다.

이때 해가  $x \neq \frac{a}{2}$ 인 모든 실수이고  $x^2$ 의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2>0 \quad \therefore x^2-ax+\frac{a^2}{4}>0$$

이 부등식이  $x^2-bx+9>0$ 과 같으므로

$$a=b, \frac{a^2}{4}=9$$

$$\therefore a=6, b=6 (\because a>0, b>0)$$

$$\therefore a+b=12$$

**답** 12

**19** **전략** 모든 실수  $x$ 에 대하여 이차부등식  $ax^2+bx+c>0$ 이 성립하려면  $a>0, b^2-4ac<0$ 이어야 함을 이용한다.

**풀이** 모든 실수  $x$ 에 대하여  $x^2+2kx+4k+5>0$ 이므로 이차방정식  $x^2+2kx+4k+5=0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(4k+5)<0$$

$$k^2-4k-5<0, \quad (k+1)(k-5)<0$$

$$\therefore -1<k<5$$

어떤 실수  $x$ 에 대하여  $x^2=k-2$ 이므로

$$k-2 \geq 0 \quad \therefore k \geq 2$$

정수  $k$ 에 대한 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면

$$P=\{0, 1, 2, 3, 4\}, Q=\{2, 3, 4, \dots\}$$

$P \cap Q = \{2, 3, 4\}$ 이므로 두 조건  $p, q$ 가 모두 참인 명제가 되도록 하는 정수  $k$ 의 값은 2, 3, 4이다.

따라서 구하는 합은

$$2+3+4=9$$

**답** 9

**20** **전략** 두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 수직선 위에 나타낸다.

**풀이**  $p: |x-1| \leq 3$ 에서  $-3 \leq x-1 \leq 3$

$$\therefore -2 \leq x \leq 4$$

$q: |x| \leq a$ 에서  $-a \leq x \leq a$

두 조건  $p, q$ 의 진리집합을 각각  $P, Q$ 라 하면

$$P=\{x \mid -2 \leq x \leq 4\}, Q=\{x \mid -a \leq x \leq a\}$$

$p$ 가  $q$ 이기 위한 충분조건이 되려면  $P \subset Q$ 이어야 한다.

이를 만족시키도록 집합  $P, Q$

를 수직선 위에 나타내면 오른

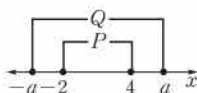
쪽 그림과 같으므로

$$-a \leq -2, 4 \leq a$$

$$\therefore a \geq 4$$

따라서 자연수  $a$ 의 최솟값은 4이다.

**답** ④



**21** **전략** 조건 (내) 명제의 대우를 이용하여 집합  $A$ 의 원소를 찾는다.

**풀이** 조건 (내) 명제 ' $a^2-2 \notin A$ 이면  $a \notin A$ 이다.'가 참이므로 그 대우 ' $a \in A$ 이면  $a^2-2 \in A$ 이다.'도 참이다.

이때 조건 (가)에 의하여  $0 \in A$ 이고,  $0^2-2=-2$ 이므로

$$-2 \in A$$

$-2 \in A$ 이고,  $(-2)^2-2=2$ 이므로  $2 \in A$

$2 \in A$ 이고,  $2^2-2=2$ 이므로  $2 \in A$

$$\therefore \{-2, 0, 2\} \subset A$$

조건 (다)에서  $n(A)=4$ 이므로

$$A=\{-2, 0, 2, k\} \quad (k \neq -2, k \neq 0, k \neq 2)$$

라 하자.

$k \in A$ 이면  $k^2-2 \in A$ 이므로  $k^2-2$ 의 값은  $-2, 0, 2, k$  중 하나이다.

$$(i) k^2-2=-2 \text{ 일 때, } k^2=0 \quad \therefore k=0$$

그런데  $k \neq 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$(ii) k^2-2=0 \text{ 일 때, } k^2=2 \quad \therefore k=\pm\sqrt{2}$$

$$(iii) k^2-2=2 \text{ 일 때, } k^2=4 \quad \therefore k=\pm 2$$

그런데  $k \neq -2, k \neq 2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$(iv) k^2-2=k \text{ 일 때, } k^2-k-2=0$$

$$(k+1)(k-2)=0 \quad \therefore k=-1 \text{ 또는 } k=2$$

그런데  $k \neq 2$ 이므로  $k=-1$

이상에서  $k=-\sqrt{2}$  또는  $k=-1$  또는  $k=\sqrt{2}$ 이므로

집합  $A$ 가 될 수 있는 것은  $\{-2, 0, 2, -\sqrt{2}\},$

$\{-2, 0, 2, -1\}, \{-2, 0, 2, \sqrt{2}\}$ 의 3개이다.

**답** ①

유제

본책 236~244쪽

$$\begin{aligned} 085-① \quad & (1) (a^2+b^2)-(2a+2b-2) \\ & = (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1) \\ & = (a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0 \\ & \therefore a^2+b^2 \geq 2a+2b-2 \end{aligned}$$

여기서 등호는  $a-1=0$ ,  $b-1=0$ , 즉  $a=b=1$ 일 때 성립한다.

(2) 세 수  $A, B, C$ 에 대하여

$$\begin{aligned} A^2 &= (\sqrt{6}+\sqrt{7})^2 = 6+7+2\sqrt{42} = 13+2\sqrt{42} \\ B^2 &= (\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2 = 5+8+4\sqrt{10} = 13+2\sqrt{40} \\ C^2 &= (\sqrt{3}+\sqrt{10})^2 = 3+10+2\sqrt{30} \\ &= 13+2\sqrt{30} \end{aligned}$$

$$\sqrt{42} > \sqrt{40} > \sqrt{30} \text{ 이므로 } A^2 > B^2 > C^2$$

그런데  $A, B, C$ 는 모두 양수이므로

$$A > B > C$$

$$\text{㉠ } (1) a^2+b^2 \geq 2a+2b-2 \quad (2) A > B > C$$

$$\begin{aligned} 086-① \quad & (1) (a^2+b^2+1)-(ab-a-b) \\ & = \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2-2ab+2a+2b) \\ & = \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2+2a+1) \\ & \quad + (b^2+2b+1)\} \\ & = \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2\} \end{aligned}$$

$a, b$ 가 실수이므로

$$(a-b)^2 \geq 0, (a+1)^2 \geq 0, (b+1)^2 \geq 0$$

따라서  $a^2+b^2+1-(ab-a-b) \geq 0$ 이므로

$$a^2+b^2+1 \geq ab-a-b$$

여기서 등호는  $a-b=0$ ,  $a+1=0$ ,  $b+1=0$ , 즉  $a=b=-1$ 일 때 성립한다. ... 증명 끝

$$\begin{aligned} (2) \quad & (|a|+|b|)^2-|a+b|^2 \\ & = |a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2 \\ & = a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2 \\ & = 2|ab|-2ab \\ & = 2(|ab|-ab) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } |ab| \geq ab \text{ 이므로 } |ab|-ab \geq 0$$

$$\therefore (|a|+|b|)^2-|a+b|^2 \geq 0$$

그런데  $|a|+|b| \geq 0$ ,  $|a+b| \geq 0$ 이므로

$$|a|+|b| \geq |a+b|$$

여기서 등호는  $|ab|=ab$ , 즉  $ab \geq 0$ 일 때 성립한다.

... 증명 끝

㉠ 풀이 참조

087-① (1)  $\frac{4y}{x} > 0$ ,  $\frac{x}{y} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 4$$

$$\therefore \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \geq 4$$

(단, 등호는  $\frac{4y}{x} = \frac{x}{y}$ , 즉  $x=2y$ 일 때 성립)

... 증명 끝

$$\begin{aligned} (2) \quad & \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right) = xy+9+1+\frac{9}{xy} \\ & = xy+\frac{9}{xy}+10 \end{aligned}$$

$xy > 0$ ,  $\frac{9}{xy} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$xy+\frac{9}{xy} \geq 2\sqrt{xy \cdot \frac{9}{xy}} = 6$$

$$\therefore xy+\frac{9}{xy}+10 \geq 16$$

$$\therefore \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right) \geq 16$$

(단, 등호는  $xy=\frac{9}{xy}$ , 즉  $xy=3$ 일 때 성립)

... 증명 끝

㉠ 풀이 참조

087-②  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} \quad \dots\dots ㉠$$

$$y+z \geq 2\sqrt{yz} \quad \dots\dots ㉡$$

$$z+x \geq 2\sqrt{zx} \quad \dots\dots ㉢$$

㉠  $\times$  ㉡  $\times$  ㉢을 하면

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

(단, 등호는  $x=y=z$ 일 때 성립) ... 증명 끝

㉠ 풀이 참조

$$\begin{aligned} 088-① \quad & (1) \left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{8}{x}+y\right) = 8+xy+\frac{16}{xy}+2 \\ & = 10+xy+\frac{16}{xy} \end{aligned}$$

$xy > 0$ ,  $\frac{16}{xy} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$10 + xy + \frac{16}{xy} \geq 10 + 2\sqrt{xy \cdot \frac{16}{xy}}$$

$$= 10 + 2 \cdot 4 = 18$$

(단, 등호는  $xy = \frac{16}{xy}$ , 즉  $xy = 4$ 일 때 성립)

따라서  $(x + \frac{2}{y})(\frac{8}{x} + y)$ 의 최솟값은 18이다.

(2)  $x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립})$$

그런데  $x+y=8$ 이므로

$$4 \geq \sqrt{xy}$$

양변을 제곱하면  $xy \leq 16$

따라서  $xy$ 의 최댓값은 16이다.

답 (1) 18 (2) 16

**088-2**  $x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x + 9y \geq 2\sqrt{4x \cdot 9y} \quad \therefore 20 \geq 12\sqrt{xy}$$

$$\therefore (2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})^2$$

$$= 4x + 9y + 12\sqrt{xy}$$

$$= 20 + 12\sqrt{xy}$$

$$\leq 20 + 20$$

$$= 40 \quad (\text{단, 등호는 } 4x = 9y \text{일 때 성립})$$

따라서  $2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}$ 의 최댓값은  $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ 이다.

답  $2\sqrt{10}$

**089-1** (1)  $a, b$ 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(3^2 + 4^2)(a^2 + 4b^2) \geq (3a + 8b)^2$$

(단, 등호는  $\frac{a}{3} = \frac{2b}{4}$ , 즉  $2a = 3b$ 일 때 성립)

$$a^2 + 4b^2 = 10 \text{이므로}$$

$$25 \cdot 10 \geq (3a + 8b)^2$$

$$\therefore -5\sqrt{10} \leq 3a + 8b \leq 5\sqrt{10}$$

따라서  $3a + 8b$ 의 최댓값은  $5\sqrt{10}$ 이다.

(2)  $a, b$ 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2 + 3^2)(a^2 + b^2) \geq (a + 3b)^2$$

(단, 등호는  $a = \frac{b}{3}$ , 즉  $3a = b$ 일 때 성립)

$$a + 3b = 20 \text{이므로}$$

$$10(a^2 + b^2) \geq 400$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq 40$$

따라서  $a^2 + b^2$ 의 최솟값은 40이다.

답 (1)  $5\sqrt{10}$  (2) 40

**089-2** 실수  $a, b, c, x, y, z$ 에 대하여

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

이 성립하므로  $a=1, b=2, c=2$ 를 대입하면

$$(1^2 + 2^2 + 2^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 2z)^2$$

(단, 등호는  $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ 일 때 성립)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{이므로}$$

$$9 \cdot 4 \geq (x + 2y + 2z)^2$$

$$\therefore -6 \leq x + 2y + 2z \leq 6$$

답  $-6 \leq x + 2y + 2z \leq 6$

**090-1** 오른쪽 그림과 같이

꽃밭에서 직각을 낀 두 변의 길

이를 각각  $x$  m,  $y$  m라 하면

피타고라스 정리에 의하여

$$x^2 + y^2 = 64$$

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2}$$

$$64 \geq 2xy$$

$$\therefore xy \leq 32 \quad (\text{단, 등호는 } x = y = 4\sqrt{2} \text{일 때 성립})$$

꽃밭의 넓이를  $S$ 라 하면  $S = \frac{1}{2}xy$  (m<sup>2</sup>)이므로

$$S = \frac{1}{2}xy \leq \frac{1}{2} \cdot 32 = 16 \text{ (m}^2\text{)}$$

따라서 꽃밭의 넓이의 최댓값은  $x = y = 4\sqrt{2}$ 일 때 16 m<sup>2</sup>이다.

답 16 m<sup>2</sup>

**090-2** 세 개의 구  $O_1, O_2, O_3$ 의 반지름의 길이를 각각  $r_1, r_2, r_3$ 이라 하면 겹넓이는 각각  $4\pi r_1^2, 4\pi r_2^2, 4\pi r_3^2$ 이므로

$$4\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = 60\pi$$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \geq (r_1 + r_2 + r_3)^2$$

(단, 등호는  $r_1 = r_2 = r_3$ 일 때 성립)

이 식에  $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$3 \cdot 15 \geq (r_1 + r_2 + r_3)^2$$

$$\therefore -3\sqrt{5} \leq r_1 + r_2 + r_3 \leq 3\sqrt{5}$$

이때  $r_1 > 0, r_2 > 0, r_3 > 0$ 이므로

$$0 < r_1 + r_2 + r_3 \leq 3\sqrt{5}$$

$\overline{PQ} = 2(r_1 + r_2 + r_3)$ 이므로 구하는 선분 PQ의 길이의 최댓값은

$$2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

답  $6\sqrt{5}$

중단원 연습 문제

본책 245~247쪽

- 01  $P < Q$       02 ③      03  $A < B < C$   
 04 풀이 참조      05 ④      06 6      07 6  
 08 ②      09 ③      10 4      11  $\frac{2}{3}$       12 8  
 13 ②      14 8      15 ①

01 **전략** 두 식의 제곱의 차의 부호를 조사한다.

**풀이**  $a > 0, b > 0$ 이므로  $P, Q$ 는 양수이다.

$$\begin{aligned} P^2 - Q^2 &= \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{2} \\ &= -\sqrt{ab} < 0 \\ \therefore P^2 &< Q^2 \end{aligned}$$

그런데  $P, Q$ 는 모두 양수이므로

$$P < Q \quad \text{답 } P < Q$$

02 **전략** 두 식의 차의 부호를 조사한다.

**풀이**  $0 < a < 1$ 일 때,

$$0 < a^2 < 1, 0 < \sqrt{a} < 1, \frac{1}{a} > 1$$

이므로 주어진 네 수 중  $\frac{1}{a}$ 가 가장 크다.

$$\begin{aligned} a^2 - a &= a(a-1) < 0 \text{이므로} \\ a^2 &< a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - \sqrt{a} &= \sqrt{a}(\sqrt{a}-1) < 0 \text{이므로} \\ a &< \sqrt{a} \end{aligned}$$

$$\therefore a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a} \quad \text{답 } ③$$

03 **전략** 주어진 세 수는 근호를 포함한 양수이므로 제곱하여 대소를 비교한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } A^2 &= (2\sqrt{3} + \sqrt{15})^2 = 12 + 15 + 4\sqrt{45} \\ &= 27 + 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$B^2 = (2\sqrt{5} + 3)^2 = 20 + 9 + 12\sqrt{5} = 29 + 12\sqrt{5}$$

$$C^2 = (\sqrt{30} + \sqrt{6})^2 = 30 + 6 + 2\sqrt{180} = 36 + 12\sqrt{5}$$

$$\text{이므로 } A^2 < B^2 < C^2 \quad \dots ①$$

그런데  $A, B, C$ 는 모두 양수이므로

$$A < B < C \quad \dots ②$$

답  $A < B < C$

| 채점 기준                             | 비율   |
|-----------------------------------|------|
| ① $A^2, B^2, C^2$ 의 대소를 비교할 수 있다. | 70 % |
| ② $A, B, C$ 의 대소를 비교할 수 있다.       | 30 % |

04 **전략** 양변의 제곱의 차의 부호를 조사한다.

**풀이** (i)  $|a| \geq |b|$ 일 때,

$$\begin{aligned} &(|a| - |b|)^2 - |a - b|^2 \\ &= a^2 - 2|a||b| + b^2 - (a - b)^2 \\ &= a^2 - 2|ab| + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 \\ &= 2(ab - |ab|) \end{aligned}$$

$$ab \leq |ab| \text{이므로 } ab - |ab| \leq 0$$

$$\therefore (|a| - |b|)^2 \leq |a - b|^2$$

그런데  $|a| - |b| \geq 0, |a - b| \geq 0$ 이므로

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

(ii)  $|a| < |b|$ 일 때,

$$|a| - |b| < 0, |a - b| > 0 \text{이므로}$$

$$|a| - |b| < |a - b|$$

(i), (ii)에서  $|a| - |b| \leq |a - b|$

여기서 등호는  $|a| \geq |b|, |ab| = ab$ 일 때 성립한다.

... 증명 끝

답 풀이 참조

05 **전략** 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

**풀이**  $x > 2$ 에서  $x^2 - 4 > 0, \frac{25}{x^2 - 4} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{25}{x^2 - 4} &= (x^2 - 4) + \frac{25}{x^2 - 4} + 4 \\ &\geq 2\sqrt{(x^2 - 4) \cdot \frac{25}{x^2 - 4}} + 4 \\ &= 2 \cdot 5 + 4 = 14 \end{aligned}$$

$$\left( \text{단, 등호는 } x^2 - 4 = \frac{25}{x^2 - 4}, \text{ 즉 } x = 3 \text{일 때 성립} \right)$$

따라서  $x^2 + \frac{25}{x^2 - 4}$ 의 최솟값은 14이다. 답 ④

06 **전략** 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } &\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \\ &= \left( \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right) + \left( \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \right) + \left( \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right) \\ &= \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} + 2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} \\ &= 2 + 2 + 2 \\ &= 6 \quad \left( \text{단, 등호는 } a = b = c \text{일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 6이다.

답 6

**Remark ▶**

$x + \frac{1}{x} + x + \frac{4}{x}$  ( $x > 0$ )의 최솟값을 구할 때,

$$x + \frac{1}{x} + x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 2 + 2 \cdot 2 = 6$$

에서  $x + \frac{1}{x} + x + \frac{4}{x}$ 의 최솟값이 6이라 생각하면 안 된다.

$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$ 에서 등호가 성립하는 조건은  $x=1$ 이고,

$x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}}$ 에서 등호가 성립하는 조건은  $x=2$ 이므로

두 식의 등호가 동시에 성립할 수 없기 때문이다.

그러나 이 문제에서는 세 식  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}}$ ,

$\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}}$ ,  $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}}$ 에서 등호가 성립할 조건을 동시에 만족시키는 양수  $a, b, c$ 가 존재하므로 앞과 같이 풀 수 있다.

**07 [전략]**  $x, y, z$ 가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

**풀이** 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2 + 1^2 + 2^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + 2z)^2$$

(단, 등호는  $x=y=\frac{z}{2}$ 일 때 성립) ... ①

$$x + y + 2z = 6 \text{이므로} \quad 6(x^2 + y^2 + z^2) \geq 36 \quad \dots ②$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 \geq 6 \quad \dots ③$$

따라서  $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 6이다. ... ④ 6

| 채점 기준                                 | 비율   |
|---------------------------------------|------|
| ① 코시-슈바르츠 부등식을 이용하여 식을 세울 수 있다.       | 50 % |
| ② $x^2 + y^2 + z^2$ 의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40 % |
| ③ $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값을 구할 수 있다.   | 10 % |

**08 [전략]** 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각  $2x, y$ 로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

**풀이** 직사각형의 가로의 길이를  $2x$ , 세로의 길이를  $y$ 로 놓으면

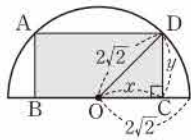
$\triangle OCD$ 에서 피타고라스 정리에 의하여  $x^2 + y^2 = 8$

$x^2, y^2$ 는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여  $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2}$

$$\therefore 8 \geq 2xy \text{ (단, 등호는 } x=y=2 \text{일 때 성립)}$$

따라서 직사각형의 넓이  $2xy$ 는  $x=y=2$ 일 때 최댓값 8을 갖고, 이때 직사각형의 둘레의 길이는

$$4x + 2y = 12 \quad \text{답 ②}$$



**09 [전략]**  $A - B > 0 \iff A > B$ 임을 이용한다.

**풀이**  $\neg \cdot \frac{a^2}{1+a^2} - \frac{b^4}{1+b^4}$

$$= \frac{a^2(1+b^4) - b^4(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^4)}$$

$$= \frac{a^2 - b^4}{(1+a^2)(1+b^4)} < 0$$

$$\therefore \frac{a^2}{1+a^2} < \frac{b^4}{1+b^4}$$

$\therefore 1 < a^2 < b^4$ 이고  $a > 0, b > 0$ 이므로

$$1 < a < b^2$$

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a} = \frac{a - b^2}{ab^2} < 0 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{b^2} < \frac{1}{a}$$

$\therefore$  [반례]  $a=1.2, b=1.1$ 이면  $1 < a^2 < b^4$ 이지만

$$\frac{a^4 b^2}{a^2 b^4} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{1.2}{1.1}\right)^2 > 1$$

$$\therefore a^4 b^2 > a^2 b^4$$

이상에서 옳은 것은  $\neg, \perp$ 이다.

답 ③

**10 [전략]** ‘허근을 갖는다.’는 조건에서  $a$ 의 값의 범위를 구하고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

**풀이**  $x^2 - 2x + a = 0$ 이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - a < 0 \quad \therefore a > 1 \quad \dots ①$$

따라서  $a - 1 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a - 1 + \frac{4}{a - 1} \geq 2\sqrt{(a - 1) \cdot \frac{4}{a - 1}} = 4$$

$$\text{(단, 등호는 } a - 1 = \frac{4}{a - 1}, \text{ 즉 } a = 3 \text{일 때 성립)}$$

따라서  $a - 1 + \frac{4}{a - 1}$ 의 최솟값은 4이다. ... ②

답 4

| 채점 기준                                       | 비율   |
|---------------------------------------------|------|
| ① $a$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.                     | 40 % |
| ② $a - 1 + \frac{4}{a - 1}$ 의 최솟값을 구할 수 있다. | 60 % |

**11 [전략]** 코시-슈바르츠 부등식을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

**풀이**  $a + b + c = 1$ 에서

$$a + b = 1 - c \quad \dots \dots \text{㉠}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3 \text{에서}$$

$$a^2 + b^2 = 3 - c^2 \quad \dots\dots ㉔$$

$a, b$ 는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

(단, 등호는  $a = b$ 일 때 성립)  $\dots\dots ㉕$

㉔, ㉕을 ㉔에 대입하면

$$2(3 - c^2) \geq (1 - c)^2, \quad 6 - 2c^2 \geq 1 - 2c + c^2$$

$$3c^2 - 2c - 5 \leq 0, \quad (3c - 5)(c + 1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq c \leq \frac{5}{3}$$

따라서  $c$ 의 최댓값은  $\frac{5}{3}$ , 최솟값은  $-1$ 이므로

$$\alpha = \frac{5}{3}, \beta = -1$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{2}{3}$$

답  $\frac{2}{3}$

**다른 풀이**  $a + b + c = 1$ 에서

$$a + b = 1 - c \quad \dots\dots ㉖$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3 \text{에서}$$

$$a^2 + b^2 = 3 - c^2 \quad \dots\dots ㉗$$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 에 ㉖, ㉗을 대입하면

$$(1 - c)^2 = 3 - c^2 + 2ab$$

$$\therefore ab = c^2 - c - 1 \quad \dots\dots ㉘$$

㉖, ㉘에서  $a, b$ 는  $t$ 에 대한 이차방정식

$$t^2 - (1 - c)t + c^2 - c - 1 = 0 \text{의 두 근이다.}$$

이때  $a, b$ 는 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D = (1 - c)^2 - 4(c^2 - c - 1) \geq 0$$

$$3c^2 - 2c - 5 \leq 0, \quad (3c - 5)(c + 1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq c \leq \frac{5}{3}$$

**12 [전략]**  $\overline{AP} = x, \overline{BP} = y$ 로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여  $xy$ 의 최댓값을 구한다.

**풀이** 오른쪽 그림과 같이

$\angle APB$ 는 반원에 대한 원주각

이므로  $\angle APB = 90^\circ$

$\overline{CM}, \overline{CN}$ 은 현의 수직이등분

선이므로

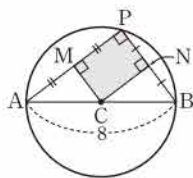
$$\angle CMP = \angle CNP = 90^\circ$$

따라서  $\square MCNP$ 는 직사각형이다.

$\overline{AP} = x, \overline{BP} = y$ 라 하면  $\triangle APB$ 는 직각삼각형이므로

$$x^2 + y^2 = 64$$

$x^2 > 0, y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여



$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} = 2xy, \quad 64 \geq 2xy$$

$\therefore xy \leq 32$  (단, 등호는  $x = y$ 일 때 성립)

한편  $\overline{MP} = \frac{x}{2}, \overline{NP} = \frac{y}{2}$ 이므로  $\square MCNP$ 의 넓이는

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{4}xy \leq \frac{1}{4} \cdot 32 = 8$$

따라서  $\square MCNP$ 의 넓이의 최댓값은 8이다.

답 8

**다른 풀이** 오른쪽 그림과 같이

$\overline{PC}$ 를 그으면

$$\square MCNP$$

$$= \triangle MCP + \triangle NCP$$

$$= \frac{1}{2} \triangle ACP + \frac{1}{2} \triangle BCP$$

$$= \frac{1}{2} \triangle ABP$$

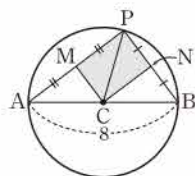
따라서  $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대일 때  $\square MCNP$ 의 넓이도 최대이다. 이때  $\triangle ABP$ 의 밑변을  $\overline{AB}$ 로 정하면 높이의 최댓값은 반지름의 길이이므로

$$\triangle ABP \leq \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times (\text{반지름의 길이})$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$$

$$\therefore \square MCNP = \frac{1}{2} \triangle ABP \leq \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$

따라서  $\square MCNP$ 의 넓이의 최댓값은 8이다.



**13 [전략]** 두 식의 차의 부호를 조사한다.

**풀이**  $0 < a < b$ 에서  $a - b < 0$

$$A - B = \frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1} = \frac{a-b}{(a+1)(b+1)} < 0$$

$$\therefore A < B \quad \dots\dots ㉙$$

$$A - C = \frac{a}{a+1} - \frac{a+b}{a+b+2} = \frac{a-b}{(a+1)(a+b+2)} < 0$$

$$\therefore A < C \quad \dots\dots ㉚$$

$$B - C = \frac{b}{b+1} - \frac{a+b}{a+b+2} = \frac{b-a}{(b+1)(a+b+2)} > 0$$

$$\therefore B > C \quad \dots\dots ㉛$$

$$\text{㉙, ㉚, ㉛에서 } A < C < B$$

답 ②

**14 [전략]** 두 직선이 평행함을 이용하여  $ab$ 의 값을 구하고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

**풀이** 두 직선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 가 서로 평행하므로

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{b} \quad \therefore ab=2$$

$$\begin{aligned} \therefore (a+1)(b+2) &= ab+2a+b+2 \\ &= 2+2a+b+2 \\ &= 4+2a+b \end{aligned}$$

$2a>0$ ,  $b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 4+2a+b &\geq 4+2\sqrt{2a \cdot b} \\ &= 4+2 \cdot 2 = 8 \end{aligned}$$

(단, 등호는  $2a=b$ 일 때 성립)

따라서  $(a+1)(b+2)$ 의 최솟값은 8이다. **답** 8

**15** **전략** 점 C의  $x$ 좌표를 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

**풀이** 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=g(x)$ 의 교점의  $x$ 좌표는  $x^2-2ax=\frac{1}{a}x$ 에서

$$x^2 - \left(2a + \frac{1}{a}\right)x = 0, \quad x \left\{ x - \left(2a + \frac{1}{a}\right) \right\} = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2a + \frac{1}{a}$$

$$\therefore A\left(2a + \frac{1}{a}, 2 + \frac{1}{a^2}\right)$$

한편  $f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$ 이므로

$$B(a, -a^2)$$

따라서 선분 AB의 중점 C의 좌표는

$$\left(\frac{1}{2}\left(2a + \frac{1}{a} + a\right), \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{a^2} - a^2\right)\right),$$

$$\text{즉 } \left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2a}, 1 + \frac{1}{2a^2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

이때 오른쪽 그림에서 선분 CH의 길이는 점 C의  $x$ 좌표와 같으므로

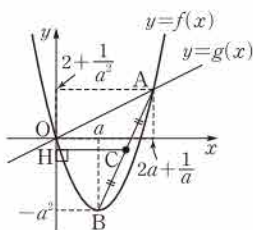
$$\overline{CH} = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2a}$$

이때  $a>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3}{2}a + \frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}a \cdot \frac{1}{2a}} = \sqrt{3}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{2}a = \frac{1}{2a}, \text{ 즉 } a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 최솟값은  $\sqrt{3}$ 이다. **답** ①



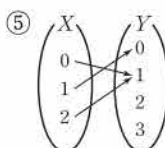
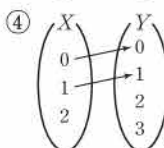
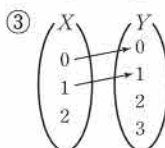
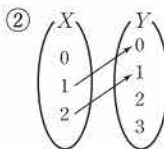
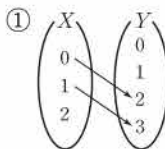
## 09 함수

Ⅲ. 함수

유제

본책 254~270쪽

**091-①** 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



⑤는  $X$ 의 각 원소에  $Y$ 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 이 대응은 함수이다. **답** ⑤

**092-①**  $f(-3) = \frac{6}{-3} = -2$ ,  $f(-2) = \frac{6}{-2} = -3$ ,

$f(2) = \frac{6}{2} = 3$ ,  $f(3) = \frac{6}{3} = 2$ 이므로 함수  $f$ 의 치역은  $\{-3, -2, 2, 3\}$

**답**  $\{-3, -2, 2, 3\}$

**092-②**  $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 이므로

(i)  $x$ 가 짝수, 즉  $x=2, 4, 6, 8, 10$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(2) &= 2+2=4, & f(4) &= 4+2=6, \\ f(6) &= 6+2=8, & f(8) &= 8+2=10, \\ f(10) &= 10+2=12 \end{aligned}$$

(ii)  $x$ 가 홀수, 즉  $x=1, 3, 5, 7, 9$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(1) &= 7-1=6, & f(3) &= 7-3=4, \\ f(5) &= 7-5=2, & f(7) &= 7-7=0, \\ f(9) &= 7-9=-2 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 함수  $f$ 의 치역은

$$\{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

**답**  $\{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

**092-③** 자연수  $k$ 에 대하여

(i)  $n=3k$ 일 때,  $f(n)=0$

(ii)  $n=3k-1$ 일 때,  $n=3(k-1)+2$ 이므로

$$f(n)=2$$

(iii)  $n=3k-2$ 일 때,  $n=3(k-1)+1$ 이므로

$$f(n)=1$$

이상에서 함수  $f$ 의 치역은  $\{0, 1, 2\}$ 이므로 치역의 모든 원소의 합은

$$0+1+2=3$$

답 3

093-①  $f(-2)=g(-2)$ 에서

$$f(-2)=-(-2)^2+3 \cdot (-2)-5=-15,$$

$$g(-2)=(-2)^2+a \cdot (-2)+b \\ =-2a+b+4$$

이므로  $-2a+b+4=-15$

$$\therefore 2a-b=19 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$f(2)=g(2)$ 에서

$$f(2)=-2^2+3 \cdot 2-5=-3,$$

$$g(2)=2^2+2a+b=2a+b+4$$

이므로

$$2a+b+4=-3$$

$$\therefore 2a+b=-7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=3, b=-13 \quad \text{답 } a=3, b=-13$$

093-② ㄱ.  $f(-1)=-6, f(0)=-5, f(1)=-4$

$$g(-1)=-4, g(0)=-5, g(1)=-4$$

즉  $f(0)=g(0), f(1)=g(1)$ 이지만

$f(-1) \neq g(-1)$ 이므로 두 함수  $f, g$ 는 서로 같지 않다.

ㄴ.  $f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=2$

$$g(-1)=0, g(0)=0, g(1)=2$$

즉  $f(-1)=g(-1), f(0)=g(0), f(1)=g(1)$

이므로 두 함수  $f, g$ 는 서로 같다.

ㄷ.  $f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=1$

$$g(-1)=-1, g(0)=0, g(1)=1$$

즉  $f(0)=g(0), f(1)=g(1)$ 이지만

$f(-1) \neq g(-1)$ 이므로 두 함수  $f, g$ 는 서로 같지 않다.

ㄹ.  $f(-1)=1, f(0)=\frac{1}{2}, f(1)=\frac{1}{3}$

$$g(-1)=1, g(0)=\frac{1}{2}, g(1)=\frac{1}{3}$$

즉  $f(-1)=g(-1), f(0)=g(0), f(1)=g(1)$

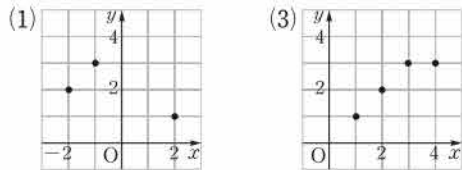
이므로 두 함수  $f, g$ 는 서로 같다.

이상에서 두 함수  $f, g$ 가 서로 같은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

094-① (1), (3)은  $X$ 의 각 원소에  $Y$ 의 원소가 하나씩 대응하므로 함수이고, (2)는  $X$ 의 원소 3에 대응하는  $Y$ 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 (1), (3)의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



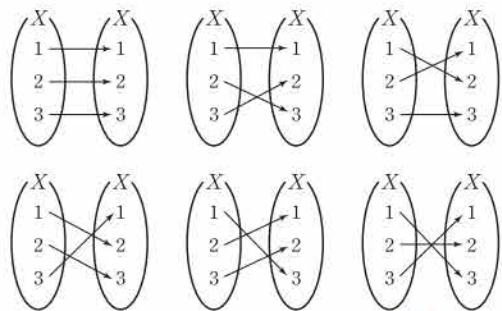
답 풀이 참조

094-② 그래프 (1)에서는  $X$ 의 원소 0에 대응하는 원소가 없으므로 함수의 그래프가 아니다. 또 그래프 (3)에서는  $X$ 의 원소 1에 대응하는 원소가 -1, 2의 2개이므로 함수의 그래프가 아니다.

그래프 (2)는  $X$ 의 각 원소에 공역의 원소가 하나씩 대응하므로 함수의 그래프이다.

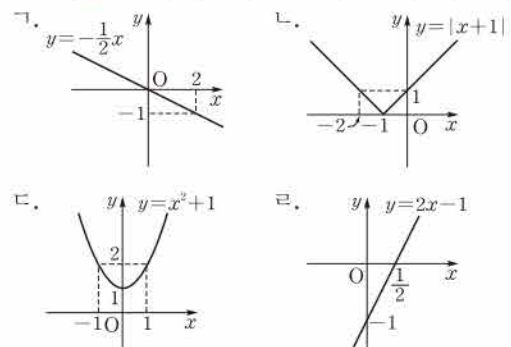
답 (2)

095-①  $X=\{1, 2, 3\}$ 일 때,  $X$ 에서  $X$ 로의 일대일 대응은 다음 그림과 같이 6가지가 있다.

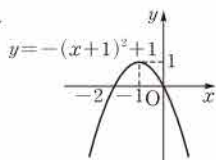


답 풀이 참조

095-② 각 함수의 그래프를 그려 보면 다음과 같다.



□.



ㄴ.  $x=-2$ 일 때,  $y=|-2+1|=-1|=1$

$x=0$ 일 때,  $y=1$

따라서 일대일대응이 아니다.

ㄷ.  $x=-1$ 일 때,  $y=(-1)^2+1=2$

$x=1$ 일 때,  $y=1^2+1=2$

따라서 일대일대응이 아니다.

□.  $x=-2$ 일 때,  $y=-(-2+1)^2+1=0$

$x=0$ 일 때,  $y=-(0+1)^2+1=0$

따라서 일대일대응이 아니다.

이상에서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

**096-①** 함수  $f$ 가 일대일대응이 되려면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

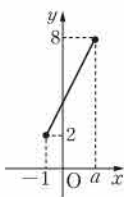
$$f(-1)=2, f(a)=8$$

$$f(x)=2x+b \text{ 이므로}$$

$$-2+b=2, 2a+b=8$$

두 식을 연립하여 풀면  $a=2, b=4$

$$\therefore a+b=6$$



답 6

**097-①** 두 집합  $X, Y$ 에 대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수를  $f$ 라 하자.

$f$ 가 일대일함수이면 집합  $Y$ 의 5개의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개를 택하여 집합  $X$ 의 원소  $a, b, c$ 에 대응시키면 되므로 일대일함수의 개수는

$${}_5P_3=60$$

$$\therefore p=60$$

한편  $f$ 가 상수함수일 때, 상수함수는 5개이므로

$$q=5$$

$$\therefore p+q=65$$

답 65

**다른 풀이**  $f$ 가 일대일함수일 때,  $f(a)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로 5개  
 $f(b)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $f(a)$ 의 값을 제외한 4개

$f(c)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $f(a), f(b)$ 의 값을 제외한 3개

따라서 일대일함수의 개수는

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \quad \therefore p=60$$

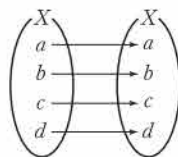
**097-②** 집합  $X$ 에 대하여  $X$ 에서  $X$ 로의 함수를  $f$ 라 하면

(1)  $f(a), f(b), f(c), f(d)$ 의 값이 될 수 있는 것은 각각  $a, b, c, d$  중 하나이므로 함수의 개수는

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256$$

(2) 항등함수는 오른쪽 그림과 같은 1가지 경우뿐이므로 항등함수의 개수는 1이다.

답 (1) 256 (2) 1



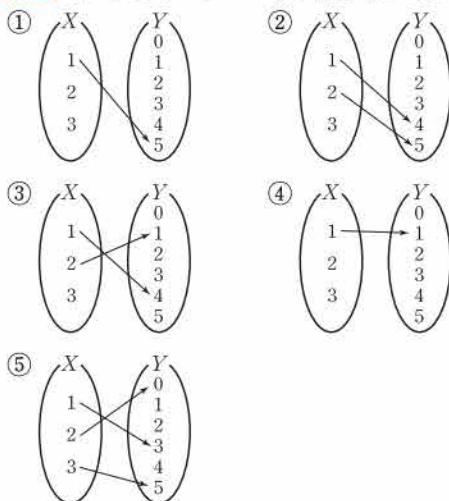
### 중단원 연습 문제

본책 271~274쪽

|                   |             |      |      |       |
|-------------------|-------------|------|------|-------|
| 01 ⑤              | 02 6        | 03 8 | 04 6 |       |
| 05 -2             | 06 ⑤        | 07 2 | 08 5 | 09 ②  |
| 10 $\frac{21}{4}$ | 11 $a > -1$ | 12 2 | 13 ③ |       |
| 14 ②              | 15 20       | 16 ④ | 17 ⑤ | 18 17 |

**01** **전략** 집합  $X$ 의 각 원소에 집합  $Y$ 의 원소가 오직 하나씩 대응하는지 확인한다.

**풀이** 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 집합  $X$ 의 각 원소에 집합  $Y$ 의 원소가 오직 하나씩 대응하는 것은 ⑤이므로  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수는 ⑤이다.

답 ⑤

**02** **전략** 먼저  $x$ 가 유리수인지 무리수인지 판단한 후 함숫값을 구한다.

**풀이** 5는 유리수이므로  $f(5)=5\sqrt{5}+4$

$\sqrt{5}$ 는 무리수이므로  $f(\sqrt{5})=-5\sqrt{5}+2$

$$\therefore f(5)+f(\sqrt{5})=5\sqrt{5}+4-5\sqrt{5}+2$$

$$=6$$

답 6

**03** **전략** 정의역의 원소를 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의  $x$ 에 각각 대입하여 함숫값을 구한다.

**풀이**  $X=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서

$$f(-3)=3, f(-2)=f(2)=2, f(-1)=f(1)=1,$$

$$f(0)=0 \text{ 이므로 함수 } f(x) \text{의 치역 } A \text{는}$$

$$A=\{0, 1, 2, 3\} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } g(-3)=1, g(-2)=0, g(-1)=-1,$$

$$g(0)=-2, g(1)=-3, g(2)=-4 \text{ 이므로 함수 } g(x)$$

의 치역  $B$ 는

$$B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{따라서 } A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \text{이}$$

므로

$$n(A \cup B)=8 \quad \cdots \textcircled{4}$$

답 8

| 채점 기준                      | 비율   |
|----------------------------|------|
| ① 집합 $A$ 를 구할 수 있다.        | 40 % |
| ② 집합 $B$ 를 구할 수 있다.        | 40 % |
| ③ $A \cup B$ 를 구할 수 있다.    | 10 % |
| ④ $n(A \cup B)$ 를 구할 수 있다. | 10 % |

**04** **전략** 주어진 관계식에  $g(x+1)$ 이  $g(2)$ 가 되도록 하는  $x$ 의 값을 대입한다.

**풀이**  $f(2x-3)=g(x+1)$ 의 양변에  $x=1$ 을 대입하면  $f(-1)=g(2)$

$$\therefore g(2)=f(-1)=(-1)^2-2 \cdot (-1)+3=6$$

답 6

**05** **전략** 주어진 정의역의 각 원소에 대한 두 함수  $f$ ,  $g$ 의 함숫값이 각각 같도록 하는  $a$ ,  $b$ 의 값을 구한다.

**풀이** 두 함수  $f(x)=ax+b$ ,  $g(x)=x^3+x-1$ 이 서로 같으므로

$$f(-1)=g(-1), f(1)=g(1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때  $f(-1)=g(-1)$ 에서

$$-a+b=(-1)^3+(-1)-1$$

$$\therefore -a+b=-3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(1)=g(1) \text{에서 } a+b=1^3+1-1$$

$$\therefore a+b=1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=2, b=-1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

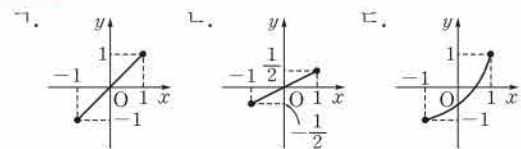
$$\therefore ab=-2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

답 -2

| 채점 기준                                 | 비율   |
|---------------------------------------|------|
| ① $f(-1)=g(-1), f(1)=g(1)$ 임을 알 수 있다. | 40 % |
| ② $a, b$ 의 값을 구할 수 있다.                | 50 % |
| ③ $ab$ 의 값을 구할 수 있다.                  | 10 % |

**06** **전략** 주어진 정의역과 공역에서 각각의 함수의 그래프를 그려 본다.

**풀이** 각 함수의 그래프를 그려 보면 다음과 같다.



그래프가 치역의 임의의 원소  $a$ 에 대하여 직선  $y=a$ 와 한 점에서 만나고, 치역과 공역이 같으면 일대일대응이다.

따라서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

#### Remark

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x \text{의 치역은 } \left\{f(x) \mid -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\right\} \text{이므로}$$

로 치역과 공역이 같지 않다.

따라서 함수  $f(x)=\frac{1}{2}x$ 는 일대일함수이지만 일대일대응은 아니다.

**07** **전략** 함수  $f(x)=ax+b$ 가 일대일대응이면  $x$ 의 값이 증가할 때,  $y$ 의 값은 항상 증가하거나 항상 감소한다.

**풀이** (i)  $a=0$ 일 때,  $f(x)=b$ 가 되어 일대일대응이 될 수 없다.

(ii)  $a>0$ 일 때, 함수  $f$ 가 일대일

대응이 되려면 그 그래프는

오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(-1)=1, f(2)=3$$

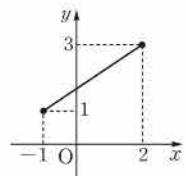
$$f(x)=ax+b \text{이므로}$$

$$-a+b=1, 2a+b=3$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=\frac{2}{3}, b=\frac{5}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}+\frac{5}{3}=2$$



(iii)  $a < 0$  일 때, 함수  $f$ 가 일대일 대응이 되려면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(-1)=3, f(2)=1$$

$f(x)=ax+b$ 이므로

$$-a+b=3, 2a+b=1$$

두 식을 연립하여 풀면

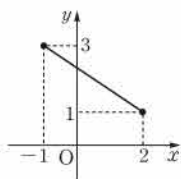
$$a=-\frac{2}{3}, b=\frac{7}{3}$$

따라서  $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{3} = 2$$

이상에서  $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

답 2



**08 [전략]** 정의역의 각 원소에 대하여 함수값으로 가능한 것의 개수를 찾는다.

**풀이** 두 집합  $X, Y$ 에 대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수를  $f$ 라 하자.

함수  $f$ 에서  $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $a, b, c, d, e$  중 하나이므로 5개

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $a, b, c, d, e$  중 하나이므로 5개

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $a, b, c, d, e$  중 하나이므로 5개

따라서 함수의 개수는  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$

$$\therefore p=125$$

한편  $f$ 가 일대일함수이면 집합  $Y$ 의 5개의 원소  $a, b, c, d, e$  중에서 서로 다른 3개를 택하여 집합  $X$ 의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 일대일함수의 개수는

$${}_5P_3=60 \quad \therefore q=60$$

$$\therefore p-2q=125-2 \cdot 60=5$$

답 5

**09 [전략]**  $f(x)=f(-x)$ 에서  $f(1)=f(-1)$ 임을 알 수 있다.

**풀이**  $f(x)=f(-x)$ 에서  $f(1)=f(-1)$

$f(-1)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $-1, 0, 1$  중 하나이므로 3개

$f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $-1, 0, 1$  중 하나이므로 3개

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $f(-1)$ 의 값과 같으므로 1개

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 개수는

$$3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$$

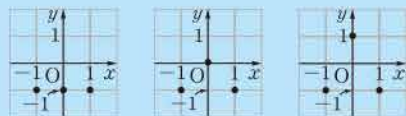
답 ②

**Remark**

$f(x)=f(-x)$ 를 만족시키는 함수  $f$ 의 그래프는  $y$ 축에 대하여 대칭이므로

$$f(1)=f(-1)=-1$$

인 경우의 함수  $f$ 의 그래프는 다음과 같다.



**10 [전략]**  $f(x+y)=f(x)f(y)$ 의 양변에 적당한 수를 대입하여 함수값을 구한다.

**풀이**  $f(x+y)=f(x)f(y)$  ..... ①

①의 양변에  $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)f(0)$$

$f(0) > 0$ 이므로 양변을  $f(0)$ 으로 나누면

$$f(0)=1$$

①의 양변에  $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$f(1+1)=f(1)f(1)$$

$$\therefore f(2)=2 \cdot 2 = 4$$

①의 양변에  $x=2, y=-2$ 를 대입하면

$$f(2-2)=f(2)f(-2)$$

$$f(0)=f(2)f(-2), \quad 1=4f(-2)$$

$$\therefore f(-2)=\frac{1}{4}$$

$$\therefore f(-2)+f(0)+f(2)=\frac{21}{4}$$

답  $\frac{21}{4}$

**11 [전략]**  $y=f(x)$ 가 일대일대응이려면  $x$ 의 값이 증가할 때  $y$ 의 값도 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

**풀이**  $y=x^2+2x-2$ 에서  $y=(x+1)^2-3$ 이므로 이 차함수  $y=x^2+2x-2$ 는  $x \geq -1$ 에서  $x$ 의 값이 증가할 때  $y$ 의 값이 항상 증가한다.

$y=x^2+2x-2$ 는  $x \geq 0$ 에서  $x$ 의 값이 증가할 때  $y$ 의 값도 증가하므로 함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 일대일대응이 되려면 오른쪽

그림과 같이  $x < 0$ 에서

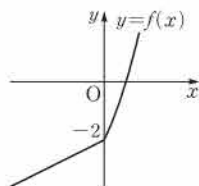
$y=(a+1)x-2$ 도  $x$ 의 값이 증가할 때  $y$ 의 값도 증가해야 한다. .... ①

즉  $a+1 > 0$ 이므로

$$a > -1$$

..... ②

이때 두 함수  $y=x^2+2x-2$ 와  $y=(a+1)x-2$ 의 그래프는 모두 점  $(0, -2)$ 를 지나므로 함수  $f(x)$ 는 치역과 공역이 실수 전체의 집합으로 같다. .... ③



따라서 함수  $f(x)$ 가 일대일대응이 되도록 하는 실수  $a$ 의 값의 범위는

$$a > -1 \quad \dots \textcircled{4}$$

답  $a > -1$

| 채점 기준                                                | 비율   |
|------------------------------------------------------|------|
| ① $x < 0$ 에서 $x$ 의 값이 증가할 때 $y$ 의 값도 증가해야 함을 알 수 있다. | 20 % |
| ② 직선 $y = (a+1)x - 2$ 의 기울기가 양수임을 이용할 수 있다.          | 30 % |
| ③ 함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같음을 알 수 있다.                    | 30 % |
| ④ $a$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.                              | 20 % |

**12** **전략** 함수  $f$ 의 치역과 공역이 같아야 함을 이용한다.

**풀이** 집합  $Y$ 에 속하는 임의의 원소  $y$ 에 대하여  $y = f(x)$ 인  $x$ 가 집합  $X$ 에 속하므로 함수  $f$ 의 치역과 공역이 같아야 한다.

오른쪽 그림에서

$$f(2) = 3, f(5) = 9$$

이어야 하므로

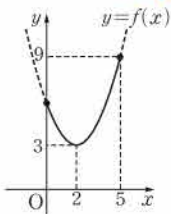
$$b = 3, 9a + b = 9$$

$b = 3$ 을  $9a + b = 9$ 에 대입하면

$$9a + 3 = 9$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

$$\therefore ab = 2$$



| 채점 기준                             | 비율   |
|-----------------------------------|------|
| ① 함수 $f$ 의 치역과 공역이 같아야 함을 알 수 있다. | 30 % |
| ② $a, b$ 의 값을 구할 수 있다.            | 60 % |
| ③ $ab$ 의 값을 구할 수 있다.              | 10 % |

**13** **전략** 공역의 원소가 2개이므로 함수의 총개수에서 상수함수가 되는 경우를 제외한다.

**풀이**  $X$ 의 원소 1에 대응할 수 있는  $Y$ 의 원소는 4, 5의 2개

$X$ 의 원소 2에 대응할 수 있는  $Y$ 의 원소는 4, 5의 2개

$X$ 의 원소 3에 대응할 수 있는  $Y$ 의 원소는 4, 5의 2개

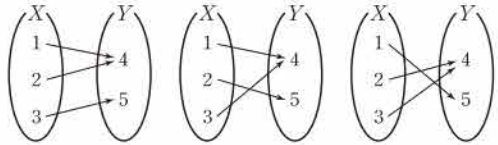
따라서 함수의 개수는  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

이때 치역이  $\{4\}$  또는  $\{5\}$ 인 함수의 개수는 2이므로 치역과 공역이 같은 함수의 개수는

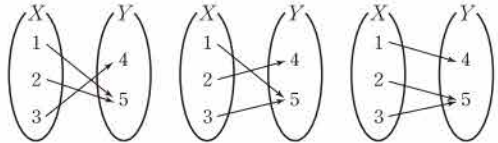
$$8 - 2 = 6 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

**다른 풀이** 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수도 있다.

(i)  $Y$ 의 원소 4에  $X$ 의 원소가 2개 대응할 때,



(ii)  $Y$ 의 원소 5에  $X$ 의 원소가 2개 대응할 때,



(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는 6이다.

**14** **전략** 정의역의 각 원소에 대하여 함수값으로 가능한 것의 개수를 찾는다.

**풀이**  $f(-x) = -f(x)$ 이므로

$$f(-2) = -f(2), f(-1) = -f(1),$$

$$f(0) = -f(0)$$

$\therefore f(0) = -f(0)$ 이므로

$$2f(0) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$\therefore f(-2) = -f(2)$ 이고  $f(1) = -f(-1)$ 이므로

$$f(-2) = f(1) \text{ 이면}$$

$$-f(2) = -f(-1) \quad \therefore f(2) = f(-1)$$

$\therefore f(-2)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $-2, -1, 0, 1, 2$  중 하나이므로 5개

$f(-2) = -f(2)$ 이므로  $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $-f(-2)$ 의 값과 같은 1개

$f(-1)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $-2, -1, 0, 1, 2$  중 하나이므로 5개

$f(-1) = -f(1)$ 이므로  $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은  $-f(-1)$ 의 값과 같은 1개

또  $\therefore$ 에서  $f(0) = 0$ 이므로 구하는 함수의 개수는  $5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 25$

이상에서 옳은 것은  $\therefore, \perp$ 이다.

**15** **전략** 주어진 관계식에  $f(x-3)$ 이  $f(2)$ 가 되도록 하는  $x$ 의 값을 대입한다.

**풀이**  $f(x-3) = x^2 - 5$ 의 양변에  $x=5$ 를 대입하면

$$f(2) = 5^2 - 5 = 20$$

**16** **전략** 주어진 정의역의 각 원소에 대한 두 함수  $f, g$ 의 함수값이 각각 같도록 하는 상수  $a, b$ 의 값을 구한다.

**풀이**  $f(0)=g(0)$ 에서

$$3=a+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(1)=g(1)$ 에서

$$1=b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$f(2)=g(2)$ 에서  $3=a+b$

②을 ①에 대입하면

$$3=a+1 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore 2a-b=2 \cdot 2-1=3 \quad \text{답 ④}$$

**17** **전략** 항등함수와 상수함수의 정의를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 두 함수  $g, h$ 를 구한다.

**풀이** 조건 ㉠에서  $f$ 가 항등함수이므로

$$f(x)=x$$

또  $g$ 가 상수함수이므로

$$g(x)=k(k \in \mathbb{R})$$

라 하면 조건 ㉡에서

$$f(x)+g(x)+h(x)=x+k+h(x)=7$$

$$\therefore h(x)=-x-k+7$$

이때  $1 \leq x \leq 5$ 이므로

$$-k+2 \leq -x-k+7 \leq -k+6$$

또한  $1 \leq h(x) \leq 5$ 이므로

$$-k+2 \geq 1, -k+6 \leq 5$$

$$k \leq 1, k \geq 1 \quad \therefore k=1$$

따라서  $g(x)=1, h(x)=-x+6$ 이므로

$$g(3)+h(1)=1+5=6 \quad \text{답 ⑤}$$

**18** **전략** 일대일대응의 정의를 이용하여 실수  $a, b$  사이의 관계를 파악한 후  $a-b$ 의 최댓값을 구한다.

**풀이**  $f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ 이므로 함수  $f$ 가 일대일대응이라면  $a \geq 2$ 이어야 한다.

이때 함수  $f$ 의 치역이  $\{y|y \geq f(a)\}$ 이고 치역과 공역은 같아야 하므로  $b=f(a)$

$$\therefore a-b=a-f(a)$$

$$=a-(a^2-4a+3)$$

$$=-a^2+5a-3$$

$$=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{4} \quad (a \geq 2)$$

따라서  $a-b$ 는  $a=\frac{5}{2}$ 일 때 최댓값  $\frac{13}{4}$ 을 가지므로

$$p=4, q=13$$

$$\therefore p+q=17 \quad \text{답 17}$$

## 10

## 합성함수와 역함수

유제

본책 280~298쪽

**098-①**  $g(x)=(h \circ f)(x)=h(f(x))$ 에서

$f(x)=2$ 를 만족시키는  $x$ 의 값은 1이므로

$$g(1)=(h \circ f)(1)=h(f(1))=h(2)$$

그런데  $g(1)=0$ 이므로  $h(2)=0$

답 0

**099-①**  $f(x)=\frac{x}{2}$ 에서

$$f^1(x)=f(x)=\frac{x}{2}$$

$$f^2(x)=(f \circ f)(x)=\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2}=\frac{x}{4}=\frac{x}{2^2}$$

$$f^3(x)=(f \circ f^2)(x)=\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2^2}=\frac{x}{2^3}$$

$\vdots$

$$\therefore f^n(x)=\frac{x}{2^n}$$

따라서  $f^6(x)=\frac{x}{2^6}$ 이므로

$$f^6(192)=\frac{192}{2^6}=\frac{192}{64}=3$$

답 3

**099-②**  $f(x)=-x+4$ 에서

$$f^1(x)=f(x)=-x+4$$

$$f^2(x)=(f \circ f)(x)=-(-x+4)+4=x$$

$$f^3(x)=(f \circ f^2)(x)=-x+4$$

$$f^4(x)=(f \circ f^3)(x)=-(-x+4)+4=x$$

$\vdots$

$$\therefore f^n(x)=\begin{cases} -x+4 & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\text{답 } f^n(x)=\begin{cases} -x+4 & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

**100-①**  $f(x)=x-1, g(x)=ax+5$ 에서

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+5)$$

$$=ax+5-1=ax+4$$

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)$$

$$=a(x-1)+5=ax-a+5$$

이때  $f \circ g = g \circ f$ 이므로  $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$

즉  $ax+4=ax-a+5$ 이므로

$$4=-a+5 \quad \therefore a=1$$

따라서  $g(x)=x+5$ 이므로

$$g(-2)=-2+5=3$$

답 3

**100-2**  $f(x)=ax+b$ ,  $g(x)=4x-3$ 에서

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(4x-3) \\ &= a(4x-3) + b \\ &= 4ax - 3a + b \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(ax+b) \\ &= 4(ax+b) - 3 \\ &= 4ax + 4b - 3\end{aligned}$$

이때  $f \circ g = g \circ f$ 이므로  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

즉  $4ax - 3a + b = 4ax + 4b - 3$ 이므로

$$\begin{aligned}-3a + b &= 4b - 3, & 3a + 3b &= 3 \\ \therefore a + b &= 1 & \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

또  $f(-1)=5$ 이므로

$$-a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = 3 \quad \text{답 } a = -2, b = 3$$

**101-1** (1)  $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = 3h(x) - 1$ 이고,

$$\begin{aligned}(f \circ h)(x) &= g(x) \text{이므로} \\ 3h(x) - 1 &= 2x + 5 & \therefore h(x) &= \frac{2}{3}x + 2\end{aligned}$$

(2)  $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(3-2x)$ 이고,

$$\begin{aligned}(h \circ g)(x) &= f(x) \text{이므로} \\ h(3-2x) &= 2x - 1 & \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$3 - 2x = 1 \text{ 일 때, } x = 1$$

$x=1$ 을  $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$h(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\text{답 (1) } h(x) = \frac{2}{3}x + 2 \quad (2) \quad 1$$

**101-2**  $f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 4x-5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\frac{2x-1}{3} = t$ 로 놓으면

$$2x - 1 = 3t \quad \therefore x = \frac{3t+1}{2}$$

$x = \frac{3t+1}{2}$ 을  $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$f(t) = 4 \cdot \frac{3t+1}{2} - 5 = 6t - 3$$

$$\therefore f\left(\frac{3-x}{2}\right) = 6 \cdot \frac{3-x}{2} - 3 = -3x + 6$$

$$\text{답 } f\left(\frac{3-x}{2}\right) = -3x + 6$$

**102-1** (i)  $x < 3$ 일 때,  $f(x) = 1$ 이므로

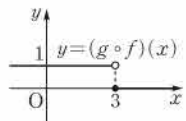
$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1) = 1$$

(ii)  $x \geq 3$ 일 때,  $f(x) = 4$ 이므로

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4) = 0$$

(i), (ii)에서  $y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



**103-1**  $f^{-1}(2) = a$ ,  $f^{-1}(9) = b$  ( $a, b$ 는 실수)라 하면

$$f(a) = 2, f(b) = 9$$

$$a^3 + 1 = 2, b^3 + 1 = 9$$

$$\therefore a^3 = 1, b^3 = 8$$

이때  $a, b$ 는 실수이므로  $a = 1, b = 2$

$$\therefore f^{-1}(2) + f^{-1}(9) = 1 + 2 = 3 \quad \text{답 } 3$$

**103-2** 함수  $f$ 의 역함수  $f^{-1}$ 가 존재하므로 두 함수  $f, f^{-1}$ 는 모두  $X$ 에서  $X$ 로의 일대일 대응이다.

따라서  $X$ 의 각 원소 2, 4, 6은  $f^{-1}$ 에 의하여  $X$ 의 각 원소 2, 4, 6에 하나씩 대응하므로

$f^{-1}(2) + f^{-1}(4) + f^{-1}(6)$ 의 값은 집합  $X = \{2, 4, 6\}$ 의 원소의 합과 같다.

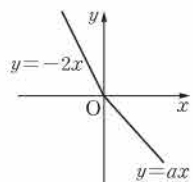
$$\therefore f^{-1}(2) + f^{-1}(4) + f^{-1}(6) = 12 \quad \text{답 } 12$$

**104-1** 함수  $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면  $f(x)$ 는 일대일 대응이어야 한다.

따라서  $x \geq 0$ 인 부분에서의 직선의 기울기는 오른쪽 그림과 같이 음수가 되어야 하므로

$$a < 0$$

$$\text{답 } a < 0$$



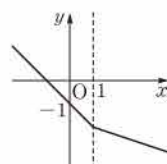
**104-2** (i)  $x \geq 1$ 일 때,

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1) + kx - 2 \\ &= (k+1)x - 3\end{aligned}$$

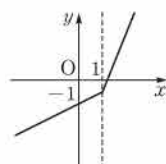
(ii)  $x < 1$ 일 때,

$$\begin{aligned}f(x) &= -(x-1) + kx - 2 \\ &= (k-1)x - 1\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 함수  $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면  $f(x)$ 가 일대일 대응이어야 하므로  $y = f(x)$ 의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

즉  $x \geq 1$ 인 부분과  $x < 1$ 인 부분의 직선의 기울기는 같은 부호이어야 하므로

$$(k+1)(k-1) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 1$$

**답**  $k < -1$  또는  $k > 1$

**105-①**  $(f^{-1} \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ (f^{-1})^{-1} = g^{-1} \circ f$ 이므로

$$\begin{aligned} & f^{-1} \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1} \\ &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f) \circ f^{-1} \\ &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (f \circ f^{-1}) \\ &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ I \quad (I \text{는 항등함수}) \\ &= f^{-1} \circ g^{-1} \\ &= (g \circ f)^{-1} \\ &\therefore (f^{-1} \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(2) = (g \circ f)^{-1}(2) \\ &(g \circ f)^{-1}(2) = k \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하면 } (g \circ f)(k) = 2 \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned} (g \circ f)(k) &= g(f(k)) = g(-3k+2) \\ &= \frac{1}{2}(-3k+2)+3 = -\frac{3}{2}k+4 \end{aligned}$$

이므로

$$-\frac{3}{2}k+4=2$$

$$\therefore k = \frac{4}{3}$$

$$\therefore (g \circ f)^{-1}(2) = \frac{4}{3} \quad \text{답 } \frac{4}{3}$$

**105-②**  $f \circ g = g \circ f = I$ 이므로  $g = f^{-1}$

$$\therefore g(x) = f^{-1}(x)$$

이때  $f(1)=2$ 에서  $f^{-1}(2)=1$ 이고,

$(g^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g$ 이므로

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ f)^{-1}(2) &= (f^{-1} \circ g)(2) \\ &= f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(f^{-1}(2)) \\ &= f^{-1}(1) = g(1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

**답** 3

**105-③**  $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h = I$  ( $I$ 는 항등함수)에서

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ h = I$$

이므로

$$\begin{aligned} h &= (g^{-1} \circ f^{-1})^{-1} = f \circ g \\ \therefore h(x) &= (f \circ g)(x) \\ &= f(g(x)) \\ &= f(-x+3) \\ &= 2(-x+3)-7 \\ &= -2x-1 \end{aligned}$$

**답**  $h(x) = -2x-1$

**106-①** 함수  $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{4}{3}$ 는 실수 전체의 집합  $R$ 에서  $R$ 로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = \frac{3}{2}x - \frac{4}{3}$ 라 하고  $x$ 에 대하여 풀면

$$\frac{3}{2}x = y + \frac{4}{3} \quad \therefore x = \frac{2}{3}\left(y + \frac{4}{3}\right)$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{2}{3}\left(x + \frac{4}{3}\right), \text{ 즉 } f^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}$$

함수  $g(x) = -2x + \frac{1}{3}$ 은 실수 전체의 집합  $R$ 에서  $R$ 로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = -2x + \frac{1}{3}$ 이라 하고  $x$ 에 대하여 풀면

$$2x = -y + \frac{1}{3} \quad \therefore x = \frac{1}{2}\left(-y + \frac{1}{3}\right)$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{2}\left(-x + \frac{1}{3}\right), \text{ 즉 } g^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \therefore (f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) \\ &= f^{-1}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\right) + \frac{8}{9} \\ &= -\frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

**답**  $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

**107-①** (1) 주어진 그림에서  $f(-1)=0$ 이므로

$$f^{-1}(0) = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ f)(0) + f^{-1}(0) &= f(f(0)) + f^{-1}(0) \\ &= f(1) + (-1) \\ &= \frac{3}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

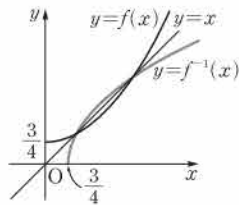
(2) 주어진 그림에서  $f(1) = \frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) &= 1, f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \\ \therefore (f \circ f)^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) &= (f^{-1} \circ f^{-1})\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= f^{-1}\left(f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right) \\ &= f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

**답** (1)  $\frac{1}{2}$  (2) 1

108-① 함수  $y=f(x)$

의 그래프와 역함수  $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 그 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수  $y=f(x)$ 와 그 역함수의 그래프의 교점이 2개 존재하고, 그 교점이 직선  $y=x$  위에 있으므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수  $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=x$ 의 교점과 같다.

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} = x \text{에서}$$

$$x^2 + 3 = 4x, \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 (1, 1), (3, 3)이므로

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

답  $2\sqrt{2}$

중단원 연습 문제

본책 299~303쪽

- |       |       |        |      |       |
|-------|-------|--------|------|-------|
| 01 -9 | 02 -1 | 03 ②   | 04 ② | 05 3  |
| 06 -1 | 07 8  | 08 ④   | 09 ④ | 10 50 |
| 11 5  | 12 1  | 13 4   | 14 ③ | 15 ①  |
| 16 ③  | 17 6  | 18 510 | 19 ⑤ |       |

01 [전략]  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 임을 이용한다.

[풀이]  $g(2) = 2 + 2 = 4$ 이므로

$$(f \circ g)(2) = f(g(2))$$

$$= f(4)$$

$$= -4^2 + 1 = -15$$

→ ①

$f(-3) = 1 - (-3) = 4$ 이므로

$$(g \circ f)(-3) = g(f(-3))$$

$$= g(4)$$

$$= 4 + 2 = 6$$

→ ②

$$\therefore (f \circ g)(2) + (g \circ f)(-3) = -9$$

→ ③

답 -9

| 채점 기준                                              | 비율   |
|----------------------------------------------------|------|
| ① $(f \circ g)(2)$ 의 값을 구할 수 있다.                   | 40 % |
| ② $(g \circ f)(-3)$ 의 값을 구할 수 있다.                  | 40 % |
| ③ $(f \circ g)(2) + (g \circ f)(-3)$ 의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

02 [전략]  $f^2, f^3, f^4, \dots$ 를 구하여 규칙성을 찾아  $f^n$ 을 추론한다.

[풀이]  $f(x) = 2x + 1$ 에서

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1$$

$$= 4x + 3$$

$$= 2^2x + 2^2 - 1$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(4x + 3) = 2(4x + 3) + 1$$

$$= 8x + 7$$

$$= 2^3x + 2^3 - 1$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f(8x + 7) = 2(8x + 7) + 1$$

$$= 16x + 15$$

$$= 2^4x + 2^4 - 1$$

⋮

$$f^n(x) = 2^n x + 2^n - 1$$

$$\therefore f^n(-1) = -2^n + 2^n - 1 = -1$$

답 -1

[다른 풀이]  $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$ 이므로

$$f^2(-1) = f(f(-1)) = f(-1) = -1$$

$$f^3(-1) = f(f^2(-1)) = f(-1) = -1$$

⋮

$$f^n(-1) = -1$$

03 [전략] 모든 실수  $x$ 에 대하여

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하므로 이 등식이  $x$ 에 대한 항등식임을 이용하여 동류항의 계수를 비교한다.

[풀이]  $f(x) = ax + b, g(x) = bx + a$ 에서

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(bx + a)$$

$$= a(bx + a) + b$$

$$= abx + a^2 + b$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(ax + b)$$

$$= b(ax + b) + a$$

$$= abx + b^2 + a$$

이때  $f \circ g = g \circ f$ 이므로

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

따라서  $abx + a^2 + b = abx + b^2 + a$ 이므로

$$a^2 + b = b^2 + a, \quad a^2 - b^2 - a + b = 0$$

$$(a-b)(a+b) - (a-b) = 0$$

$$(a-b)(a+b-1) = 0$$

$$\therefore a-b=0 \text{ 또는 } a+b-1=0$$

그런데  $a \neq b$ , 즉  $a-b \neq 0$ 이므로

$$a+b-1=0$$

$$\therefore a+b=1$$

$$\therefore f(1) + g(1) = a + b + b + a$$

$$= 2(a+b) = 2$$

답 ②

**04** **전략**  $(g \circ h)(x) = g(h(x))$ 에서  $h(x)$ 를  $g(x)$ 의  $x$ 에 대입하여 정리한다.

**풀이**  $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 2h(x) - 5$ 이고,  
 $(g \circ h)(x) = f(x)$ 이므로  
 $2h(x) - 5 = 2x^2 - 7$   
 $2h(x) = 2x^2 - 2$   
 $\therefore h(x) = x^2 - 1$

**답** ②

**05** **전략** 함수  $g$ 가 일대일대응이므로 정의역의 서로 다른 두 원소에 대응하는 공역의 원소가 서로 다름을 이용한다.

**풀이** 함수  $g$ 는 일대일대응이고  $g(1) = 1$ 이므로  
 $g(2) = 0$  또는  $g(2) = 2$   
 $g(2) = 0$ 이라 하면  
 $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(0) = 1$   
 그런데 이것은 주어진 조건  $(f \circ g)(2) = 2$ 에 모순이므로  $g(2) = 2$ 이다.  
 $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2)$ 이므로  
 $f(2) = 2$   
 따라서  $f(0) = 1$ ,  $f(2) = 2$ 이므로  $f(1) = 0$ 이고,  
 $g(1) = 1$ ,  $g(2) = 2$ 이므로  $g(0) = 0$ 이다.  
 $f(2) = 2$ 에서  $f^{-1}(2) = 2$ 이고,  $g(2) = 2$ 에서  
 $g^{-1}(2) = 2$ 이므로  
 $(f \circ g)(0) + (g^{-1} \circ f^{-1})(2)$   
 $= f(g(0)) + g^{-1}(f^{-1}(2))$   
 $= f(0) + g^{-1}(2)$   
 $= 1 + 2 = 3$

**답** 3

**06** **전략**  $y = f(x)$ 를  $x$ 에 대하여 풀 후  $x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸어  $f^{-1}(x)$ 를 구한다.

**풀이**  $y = ax + 5$ 라 하고  $x$ 에 대하여 풀면

$$x = \frac{1}{a}(y - 5)$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{a}(x - 5)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{5}{a}$$

**...** ①

$f(x) = f^{-1}(x)$ 에서  $ax + 5 = \frac{1}{a}x - \frac{5}{a}$ 이므로

$$a = \frac{1}{a}, 5 = -\frac{5}{a}$$

$$\therefore a = -1$$

**...** ②

**답** -1

| 채점 기준                    | 비율   |
|--------------------------|------|
| ① $f^{-1}(x)$ 를 구할 수 있다. | 60 % |
| ② $a$ 의 값을 구할 수 있다.      | 40 % |

**07** **전략**  $g(x)$ 가  $f(x)$ 의 역함수이면  $f(p) = q \iff g(q) = p$ 임을 이용하여  $k$ 의 값을 구한다.

**풀이** 임의의 실수  $x$ 에 대하여  $(f \circ g)(x) = x$ 를 만족시키므로 함수  $g(x)$ 는  $f(x)$ 의 역함수이다. **...** ①  
 $g(g(k)) = 0$ 에서  $f(0) = g(k)$ 이고,  $f(0) = 3$ 이므로  
 $g(k) = 3$   
 따라서  $f(3) = k$ 이므로  
 $k = 3^2 - 2 \cdot 3 + 5 = 8$

**...** ②

**답** 8

| 채점 기준                             | 비율   |
|-----------------------------------|------|
| ① $g(x)$ 가 $f(x)$ 의 역함수임을 알 수 있다. | 30 % |
| ② $k$ 의 값을 구할 수 있다.               | 70 % |

**08** **전략**  $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$ ,  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 임을 이용한다.

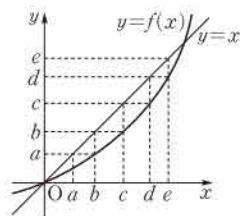
**풀이**  $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$ 이므로  
 $(g \circ f)^{-1}(1) = (f^{-1} \circ g^{-1})(1) = 2$   
 $\therefore (g \circ f)(2) = 1$   
 이때  $(g \circ f)(2) = g(f(2))$ 이고,  $f(2) = 2$ 이므로  
 $g(2) = 1$   
 또  $(g \circ f)(1) = 3$ 에서  
 $g(f(1)) = 3$   
 $g(3) = 3$ 이고, 함수  $g$ 는 일대일대응이므로  
 $f(1) = 3$   
 $\therefore f(1) + g(2) = 3 + 1 = 4$

**답** ④

**09** **전략** 직선  $y = x$ 를 이용하여  $y$ 축과 점선이 만나는 점의  $y$ 좌표를 구하여 표시한 후  $f(p) = q \iff f^{-1}(q) = p$ 임을 이용한다.

**풀이** 직선  $y = x$ 를 이용하여  $y$ 축과 점선이 만나는 점의  $y$ 좌표를 주어진 그림에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면  
 $f(k) = b$   
 위의 그림에서  $f(c) = b$ 이므로  
 $k = c$ , 즉  $f^{-1}(b) = c$   
 $f^{-1}(c) = l$ 이라 하면  $f(l) = c$



앞의 그림에서  $f(d)=c$ 이므로

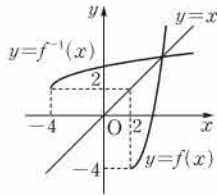
$$l=d, \text{ 즉 } f^{-1}(c)=d$$

$$\begin{aligned} \therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(b) &= f^{-1}(f^{-1}(b)) \\ &= f^{-1}(c) \\ &= d \end{aligned}$$

답 ④

**10** **전략**  $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수  $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

**풀이** 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수  $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 그 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다. 이때 함수  $y=f(x)$ 와 그 역



함수의 그래프의 교점이 1개 존재하고, 그 교점이 직선  $y=x$  위에 있으므로 함수  $y=x^2-4x(x \geq 2)$ 의 그래프와 그 역함수  $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수  $y=x^2-4x(x \geq 2)$ 의 그래프와 직선  $y=x$ 의 교점과 같다.

$$\begin{aligned} x^2-4x &= x \text{에서 } x^2-5x=0 \\ x(x-5) &= 0 \quad \therefore x=5 \quad (\because x \geq 2) \end{aligned}$$

따라서 교점의 좌표가 (5, 5)이므로

$$\begin{aligned} a &= 5, b = 5 \\ \therefore 2ab &= 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50 \end{aligned}$$

답 50

**11** **전략** 합성함수  $f^2, f^3, f^4, \dots$ 의 치역을 조사하고  $f^n(a)=0$ 이면  $f^{n+1}(a)=0$ 임을 이용한다.

**풀이** 정의역의 원소를 30부터 차례대로 대입하여 각각의  $f^n(x)$ 의 함수값을 구하면 다음 표와 같다.

| $x$      | $f(x)$   | $f^2(x)$ | $f^3(x)$ | $f^4(x)$ | $f^5(x)$ | $\dots$  |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 30       | 15       | 7        | 3        | 1        | 0        | 0        |
| 29, 28   | 14       | 7        | 3        | 1        | 0        | 0        |
| 27, 26   | 13       | 6        | 3        | 1        | 0        | 0        |
| 25, 24   | 12       | 6        | 3        | 1        | 0        | 0        |
| 23, 22   | 11       | 5        | 2        | 1        | 0        | 0        |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 3, 2     | 1        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 1        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |
| 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        |

따라서  $n=5, 6, 7, \dots$ 일 때, 합성함수  $f^n$ 의 정의역의 모든 원소의 함수값이 0이 되므로 구하는  $n$ 의 최솟값은 5이다.

답 5

**12** **전략**  $(h \circ g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x))$ 에서  $(g \circ f)(x)$ 를  $h(x)$ 의  $x$ 에 대입하여 정리한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(5x+1) \\ &= 2(5x+1)-1 \\ &= 10x+1 \end{aligned}$$

→ ①

이므로

$$\begin{aligned} (h \circ g \circ f)(x) &= (h \circ (g \circ f))(x) \\ &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(10x+1) \end{aligned}$$

즉  $(h \circ g \circ f)(x) = h(10x+1) = 100x^2$ 이므로  $10x+1=t$ 로 놓으면

$$x = \frac{t-1}{10}$$

따라서  $h(t) = 100\left(\frac{t-1}{10}\right)^2 = t^2 - 2t + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 - 2x + 1 \\ \therefore h(2) &= 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

→ ②

→ ③

답 1

| 채점 기준                         | 비율   |
|-------------------------------|------|
| ① $(g \circ f)(x)$ 를 구할 수 있다. | 30 % |
| ② $h(x)$ 를 구할 수 있다.           | 60 % |
| ③ $h(2)$ 의 값을 구할 수 있다.        | 10 % |

**13** **전략**  $f(x)=t$ 로 놓고  $t$ 의 값의 범위를  $a$ 로 나타낸다.

**풀이** 함수  $f(x)$ 는  $x$ 의 값이 증가할 때  $y$ 의 값도 증가하므로  $-a-2 \leq x \leq a$ 일 때,

$$f(-a-2) \leq f(x) \leq f(a)$$

그런데

$$\begin{aligned} f(-a-2) &= 2(-a-2)+3 = -2a-1, \\ f(a) &= 2a+3 \end{aligned}$$

이므로

$$-2a-1 \leq f(x) \leq 2a+3$$

$f(x)=t$ 로 놓으면

$$-2a-1 \leq t \leq 2a+3 \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(t) = (t-2)^2 \text{이고 } ① \text{에서} \\ -2a-3 &\leq t-2 \leq 2a+1 \end{aligned}$$

이때  $|-2a-3| > |2a+1|$ 이므로

$$\begin{aligned} 0 &\leq (t-2)^2 \leq (-2a-3)^2 \\ \therefore 0 &\leq (t-2)^2 \leq (2a+3)^2 \end{aligned}$$

즉  $(g \circ f)(x)$ 의 치역은

$$A = \{y \mid 0 \leq y \leq (2a+3)^2\}$$

집합  $A$ 의 원소 중 자연수가 100개 이상이어야 하므로

$$(2a+3)^2 \geq 100$$

이때  $a$ 는 자연수이므로

$$2a+3 \geq 10 \quad \therefore a \geq \frac{7}{2}$$

따라서 구하는 자연수  $a$ 의 최솟값은 4이다.

답 4

**14** **전략**  $x$ 의 값의 범위를 나누어  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 함수식을 각각 구한다.

$$\text{풀이 } f(x) = \begin{cases} 4x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ -4x+4 & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \\ 0 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이고,}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x \leq 1) \\ -2x+4 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq f(x) \leq 1) \\ -2f(x)+4 & (1 \leq f(x) \leq 2) \end{cases}$$

(i)  $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$  일 때,

$$f(x) = 4x \text{이고 } 0 \leq f(x) \leq 1 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = 2$$

(ii)  $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$  일 때,

$$f(x) = -4x+4 \text{이고 } 1 \leq f(x) \leq 2 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = -2f(x)+4$$

$$= -2 \cdot 4x+4$$

$$= -8x+4$$

(iii)  $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$  일 때,

$$f(x) = -4x+4 \text{이고 } 1 \leq f(x) \leq 2 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = -2f(x)+4$$

$$= -2(-4x+4)+4$$

$$= 8x-4$$

(iv)  $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$  일 때,

$$f(x) = -4x+4 \text{이고 } 0 \leq f(x) \leq 1 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = 2$$

(v)  $1 \leq x \leq 2$  일 때,

$$f(x) = 0 \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = 2$$

이상에서 합성함수  $y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프는 ③과 같다.

답 ③

**다른 풀이** 본책 286쪽 **특강 097**을 이용하여 합성함수의 그래프를 그리는 방법을 나타내면 다음과 같다.

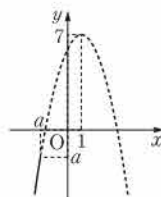
| ① 단계                        | ② 단계              | ③ 단계                            | ④ 단계    |
|-----------------------------|-------------------|---------------------------------|---------|
| $x$ 의 값                     | $t=f(x)$ 의 값      | $y=g(t)$ 의 값                    | 그래프의 개형 |
| $0 \rightarrow \frac{1}{2}$ | $0 \rightarrow 2$ | $2 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ |         |
| $\frac{1}{2} \rightarrow 1$ | $2 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow 2 \rightarrow 2$ |         |
| $1 \rightarrow 2$           | $0$               | $2$                             |         |

**15** **전략** 함수  $f$ 의 역함수가 존재하려면  $f$ 는 일대일 대응이어야 함을 이용한다.

$$\text{풀이 } f(x) = -x^2 + 2x + 6$$

$$= -(x-1)^2 + 7$$

이고 함수  $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면  $f(x)$ 는 일대일 대응이어야 하므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉  $a \leq 1$ ,  $f(a) = a$ 이어야 하므로  $f(a) = a$ 에서

$$-a^2 + 2a + 6 = a$$

$$a^2 - a - 6 = 0, \quad (a+2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -2 \quad (\because a \leq 1)$$

답 ①

**Remark**

$f(x)$ 의 공역은  $\{x | x \leq a\}$ 이고  $a \leq 1$ 일 때 치역은  $\{f(x) | f(x) \leq f(a)\}$ 이므로  $f(x)$ 가 일대일 대응이려면  $f(a) = a$ 를 만족시켜야 한다.

**16** **전략** 이차함수의 그래프가 축에 대하여 대칭임을 이용하여 주어진 방정식을 만족시키는 모든 실근의 합을 구한다.

$$\text{풀이 } \text{방정식 } f(f(x)) = -5 \text{에서 } f(x) = t \text{로 놓으면}$$

$$f(t) = -5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때  $y=f(x)$ 의 그래프는 직선  $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$f(0) = f(4) = -5$$

따라서 ①을 만족시키는  $t$ 의 값은

$$t=0 \text{ 또는 } t=4$$

$$\therefore f(x)=0 \text{ 또는 } f(x)=4$$

방정식  $f(x)=0$ 을 만족시키

는  $x$ 의 값을 각각  $x_1, x_2$ 라 하

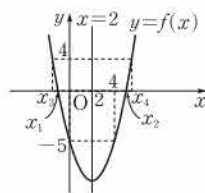
고, 방정식  $f(x)=4$ 를 만족

시키는  $x$ 의 값을 각각  $x_3, x_4$

라 하면 오른쪽 그림에서

$y=f(x)$ 의 그래프는 직선

$x=2$ 에 대하여 대칭이므로



$$\frac{x_1+x_2}{2}=2, \frac{x_3+x_4}{2}=2$$

$$\therefore x_1+x_2=4, x_3+x_4=4$$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$$x_1+x_2+x_3+x_4=4+4=8$$

답 ③

**17** **전략**  $f(a)=b$ 라 하고  $b$ 의 값의 범위를 나누어 조건을 만족시키는 실수  $a$ 의 값을 구한다.

**풀이**  $f(a)=b$ 라 하면  $(f \circ f)(a)=f(a)$ 에서  
 $f(f(a))=f(a) \quad \therefore f(b)=b$

(i)  $b < 2$ 일 때,

$$2b+2=b \text{이므로} \quad b=-2$$

$$\therefore f(a)=-2$$

①  $a < 2$ 일 때,

$$2a+2=-2 \quad \therefore a=-2$$

②  $a \geq 2$ 일 때,

$$a^2-7a+16=-2 \quad \therefore a^2-7a+18=0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D=(-7)^2-4 \cdot 18=-23 < 0$$

이므로 조건을 만족시키는 실수  $a$ 의 값이 존재하지 않는다.

(ii)  $b \geq 2$ 일 때,

$$b^2-7b+16=b \text{이므로} \quad b^2-8b+16=0$$

$$(b-4)^2=0 \quad \therefore b=4$$

$$\therefore f(a)=4$$

③  $a < 2$ 일 때,

$$2a+2=4 \quad \therefore a=1$$

④  $a \geq 2$ 일 때,

$$a^2-7a+16=4, \quad a^2-7a+12=0$$

$$(a-3)(a-4)=0$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=4$$

(i), (ii)에서 모든 실수  $a$ 의 값의 합은

$$-2+1+3+4=6$$

답 6

**18** **전략** 함수  $f$ 의 역함수가 존재하지 않으면  $f$ 가 일대일대응이 아님을 이용한다.

**풀이** 조건 (가)를 만족시키려면 집합  $X$ 의 원소 중에서 서로 다른 4개를 택하여 큰 수부터 차례대로 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

즉  $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는  ${}_6C_4={}_6C_2=15$

조건 (나)를 만족시키려면 함수  $f$ 가 일대일대응이 아니어야 한다.

(i)  $f(5)$ 의 값이  $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값 중 하나와 같은 경우

$$f(5) \text{의 값을 정하는 경우의 수는} \quad {}_4C_1=4$$

$f(6)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 6개

$$\text{따라서 경우의 수는} \quad 4 \cdot 6=24$$

(ii)  $f(5)$ 의 값이  $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값과 같지 않은 경우

$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은 집합  $X$ 의 원소 중  $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 2개의 원소 중 하나이므로 2개

$f(6)$ 의 값은  $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중 하나와 같아야 하므로  ${}_5C_1=5$

$$\text{따라서 경우의 수는} \quad 2 \cdot 5=10$$

(i), (ii)에서 구하는 함수  $f$ 의 개수는

$$15 \cdot (24+10)=510$$

답 510

**다른 풀이** 조건 (가)를 만족시키려면 집합  $X$ 의 원소 중에서 서로 다른 4개를 택하여 큰 수부터 차례대로 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

즉  $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는  ${}_6C_4={}_6C_2=15$

조건 (나)를 만족시키려면 함수  $f$ 가 일대일대응이 아니어야 하므로  $f(5), f(6)$  중 적어도 한 개의 값이 다른 함수값과 같아야 한다.

$f(5), f(6)$ 의 값으로 집합  $X$ 의 6개의 원소 중 임의의 값을 선택하는 경우 중에서  $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 아닌 나머지 2개의 원소를 각각  $f(5), f(6)$ 의 값으로 선택하는 경우를 제외해야 하므로 그 경우의 수는

$$6 \cdot 6 - {}_2P_2 = 36 - 2 = 34$$

따라서 구하는 함수  $f$ 의 개수는

$$15 \cdot 34=510$$

**19** **전략** 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수의 대응 관계를 그림으로 나타내어 본다.

**풀이** ㄱ. 함수  $f$ 가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

조건 (가)에서 집합  $X$ 의 모든 원소  $x$ 에 대하여  $(f \circ f)(x)=x$ 이므로 집합  $X$ 의 모든 원소  $x$ 에 대하여  $f(x)=f^{-1}(x)$ 이다.

$$\therefore f(3)=f^{-1}(3)$$

ㄴ. 조건 (나)에 의하여 집합  $X$ 의 원소 중  $f(x)=2x$ 를 만족시키는 원소  $x$ 가 적어도 하나 존재하므로

$$f(1)=2 \text{ 또는 } f(2)=4$$

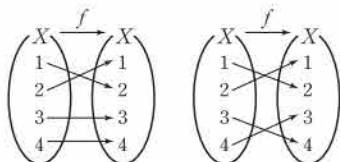
11

여러 가지 함수의 그래프

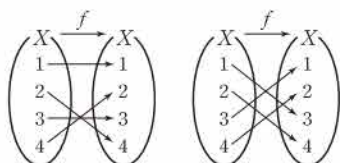
유제

본책 308~324쪽

- 그런데  $f(1)=3$ 이므로  
 $f(2)=4$   
 다. 조건 ㄴ에 의하여 함수  $f$ 의 대응 관계는 다음 세 가지 경우로 나눌 수 있다.  
 (i)  $f(1)=2, f(2) \neq 4$ 일 때,  
 조건 ㄱ에서  $(f \circ f)(1)=1$ 이므로  
 $f(f(1))=f(2)=1$   
 따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수  $f$ 는 다음의 2가지이다.



- (ii)  $f(1) \neq 2, f(2)=4$ 일 때,  
 조건 ㄱ에서  $(f \circ f)(2)=2$ 이므로  
 $f(f(2))=f(4)=2$   
 따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수  $f$ 는 다음의 2가지이다.



- (iii)  $f(1)=2, f(2)=4$ 일 때,  
 $f(f(1))=f(2)=4$   
 그런데 조건 ㄱ에서  $(f \circ f)(1)=1$ 이므로 모순이다.  
 따라서 가능한 함수  $f$ 의 개수는 4이다.  
 이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

**109-①** 함수  $y=(a-2)x+a-2b$ 의 그래프는 기울기가  $a-2$ 이고,  $y$ 절편이  $a-2b$ 인 직선이다.  
 이때 주어진 함수의 그래프가  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가  $45^\circ$ 이므로

$$a-2=\tan 45^\circ, \text{ 즉 } a-2=1$$

$$\therefore a=3 \quad \dots\dots ㉠$$

또  $y$ 절편이 1이므로

$$a-2b=1 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠을 ㉡에 대입하면 \quad 3-2b=1 \quad \therefore b=1$$

$$\therefore a+b=4$$

답 4

Remark▶

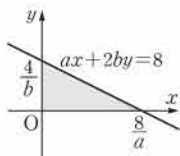
함수  $y=ax+b$ 의 그래프가  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ )라 하면

$$a=\tan \theta$$

**109-②**  $ax+2by=8$ 에서  $x$ 절편은  $\frac{8}{a}$ ,  $y$ 절편은  $\frac{4}{b}$ 이고,  $a>0, b>0$ 이므로

$$\frac{8}{a}>0, \frac{4}{b}>0$$

따라서 직선  $ax+2by=8$ 과  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같고, 그 넓이가 4이므로



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{4}{b} = 4$$

$$\therefore ab=4$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

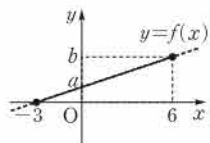
$$=2\sqrt{4}=4 \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

따라서  $a+b$ 의 최솟값은 4이다.

답 4

**110-①**  $f(x)=\frac{1}{3}x+a$ 라

하면  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$f(-3)=0, f(6)=b$$

이때  $f(-3)=\frac{1}{3} \cdot (-3)+a=a-1$ 이므로

$$a-1=0 \quad \therefore a=1$$

따라서  $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ 이므로

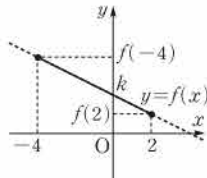
$$f(6) = \frac{1}{3} \cdot 6 + 1 = 3 \quad \therefore b = 3$$

답  $a = 1, b = 3$

**110-2**  $f(x) = -\frac{1}{2}x + k$

라 하면  $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$-4 \leq x \leq 2$ 에서 주어진 일차 함수는  $x = 2$ 일 때 최솟값을 갖고,  $x = -4$ 일 때 최댓값을 갖는다.



즉  $f(2) = 1$ 에서  $-\frac{1}{2} \cdot 2 + k = 1 \quad \therefore k = 2$

따라서  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ 이므로 구하는 최댓값은

$$f(-4) = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + 2 = 4 \quad \text{답 4}$$

**111-1** (1)  $f(x) = 2mx - m - 3$ 이라 하면  $y = f(x)$ 의 그래프는 직선이고,  $-1 < x \leq 1$ 에서 항상  $y < 0$ 이 되어야 하므로  $f(-1) \leq 0, f(1) < 0$ 이어야 한다. 이때

$$f(-1) = -2m - m - 3 = -3m - 3$$

이므로  $-3m - 3 \leq 0$

$$\therefore m \geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또  $f(1) = 2m - m - 3 = m - 3$ 이므로

$$m - 3 < 0 \quad \therefore m < 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$-1 \leq m < 3$$

(2)  $y$ 를  $m$ 에 대한 함수로 생각하고

$$f(m) = (2x - 1)m - 3$$

이라 하자.  $y = f(m)$ 의 그래프는 직선이고,

$1 < m \leq 2$ 에서 항상  $y > 0$ 이 되어야 하므로

$f(1) \geq 0, f(2) > 0$ 이어야 한다. 이때

$$f(1) = (2x - 1) - 3 = 2x - 4$$

이므로  $2x - 4 \geq 0$

$$\therefore x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또

$$f(2) = (2x - 1) \cdot 2 - 3 = 4x - 5$$

이므로  $4x - 5 > 0$

$$\therefore x > \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

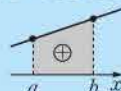
$$x \geq 2$$

답 (1)  $-1 \leq m < 3$  (2)  $x \geq 2$

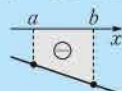
**Remark**

일차함수  $y = f(x)$ 에 대하여  $a \leq x \leq b$ 에서  $y$ 의 값의 부호와 함수값 사이의 관계는 다음과 같다.

(1)  $y$ 가 항상 양일 때 (2)  $y$ 가 항상 음일 때

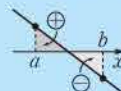


$$f(a) > 0, f(b) > 0$$



$$f(a) < 0, f(b) < 0$$

(3)  $y$ 가 양의 값과 음의 값을 모두 가질 때



$$f(a)f(b) < 0$$

**111-2**  $y = mx + m + 1$ 을  $m$ 에 대하여 정리하면

$$m(x+1) + 1 - y = 0$$

이므로  $y = mx + m + 1$ 의 그래프는  $m$ 의 값에 관계없이 항상 점  $(-1, 1)$ 을 지난다.

$f(x) = mx + m + 1$ 이라 하면  $y = f(x)$ 는 집합  $A$ 를 정의역, 집합  $B$ 를 공역으로 하는 함수이다.

이때  $y = f(x)$ 의 그래프는 직선

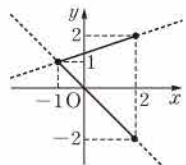
이므로  $y = f(x)$ 의 기울기는 오른쪽 그림과 같이 두 점

$(-1, 1), (2, 2)$ 를 지나는 직

선의 기울기보다 작거나 같고,

두 점  $(-1, 1), (2, -2)$ 를 지나는 직선의 기울기보다

크거나 같아야 한다.



(i) 두 점  $(-1, 1), (2, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

(ii) 두 점  $(-1, 1), (2, -2)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-2-1}{2-(-1)} = -1$$

(i), (ii)에서 구하는  $m$ 의 값의 범위는

$$-1 \leq m \leq \frac{1}{3} \quad \text{답 } -1 \leq m \leq \frac{1}{3}$$

**다른 풀이** 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가  $m$ 의 값에 관계없이 항상 점  $(-1, 1)$ 을 지나므로 집합  $A$ 에서 집합  $B$ 로의 함수가 정의되려면  $-2 \leq f(2) \leq 2$ 이면 된다.

$$f(x) = mx + m + 1 \text{에서}$$

$$f(2) = 2m + m + 1 = 3m + 1$$

이므로

$$-2 \leq 3m + 1 \leq 2, \quad -3 \leq 3m \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq m \leq \frac{1}{3}$$

**112-①**  $y=x^2+kx-3k$ 를  $k$ 에 대하여 정리하면

$$k(x-3)+x^2-y=0$$

이 식이  $k$ 의 값에 관계없이 성립하려면

$$x-3=0, x^2-y=0$$

$$\therefore x=3, y=9$$

따라서  $P(3, 9)$ 이고 점  $P$ 가 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로

$$y=(x-3)^2+9=x^2-6x+18$$

이 식이  $y=x^2+kx-3k$ 와 일치하므로

$$k=-6$$

답 -6

**112-②**  $f(x)=ax^2+bx+c$ 라 하면

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

① 그래프가 위로 볼록하므로  $a<0$

② 축이  $y$ 축의 왼쪽에 있으므로

$$-\frac{b}{2a}<0 \quad \therefore b<0 (\because a<0)$$

③  $y$ 축과  $y>0$ 인 부분에서 만나므로  $c>0$

④  $f(1)=a+b+c$ 이고 그래프에서  $x=1$ 일 때  $y<0$ 이므로

$$a+b+c<0$$

⑤  $f(-2)=4a-2b+c$ 이고 그래프에서  $x=-2$ 일 때  $y<0$ 이므로

$$4a-2b+c<0$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

**113-①** (1)  $y=-|x-3|+x$ 에서

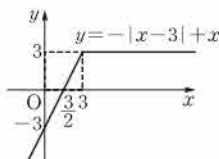
(i)  $x<3$ 일 때,  $x-3<0$ 이므로

$$y=-\{-(x-3)\}+x \\ =2x-3$$

(ii)  $x\geq 3$ 일 때,  $x-3\geq 0$ 이므로

$$y=-(x-3)+x \\ =3$$

(i), (ii)에서 구하는 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2)  $y=\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$ 에서

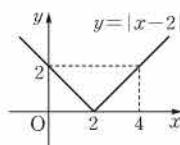
(i)  $x<2$ 일 때,  $x-2<0$ 이므로

$$y=-(x-2)=-x+2$$

(ii)  $x\geq 2$ 일 때,  $x-2\geq 0$ 이므로

$$y=x-2$$

(i), (ii)에서 구하는 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



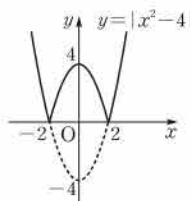
풀이 참조

**Remark**

$$\sqrt{\{f(x)\}^2}=|f(x)| \text{ 이므로}$$

$$y=\sqrt{\{f(x)\}^2} \iff y=|f(x)|$$

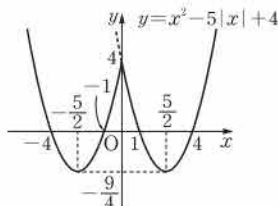
**114-①** (1)  $y=|x^2-4|$ 의 그래프는  $y=x^2-4$ 의 그래프에서  $y\geq 0$ 인 부분은 그대로 두고,  $y<0$ 인 부분은  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



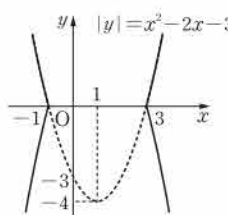
(2)  $x^2=|x|^2$ 이므로

$$y=x^2-5|x|+4=|x|^2-5|x|+4$$

따라서 주어진 식의 그래프는  $y=x^2-5|x|+4$ 의 그래프에서  $x\geq 0$ 인 부분만 남기고,  $x<0$ 인 부분을 없앤 다음  $x\geq 0$ 인 부분을  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



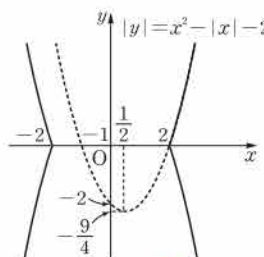
(3)  $|y|=x^2-2x-3$ 의 그래프는  $y=x^2-2x-3$ 의 그래프에서  $y\geq 0$ 인 부분만 남기고,  $y<0$ 인 부분을 없앤 다음  $y\geq 0$ 인 부분을  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(4)  $x^2=|x|^2$ 이므로

$$|y|=x^2-|x|-2=|x|^2-|x|-2$$

따라서 주어진 식의 그래프는  $y=x^2-x-2$ 의 그래프에서  $x\geq 0, y\geq 0$ 인 부분만 남긴 후  $x\geq 0, y\geq 0$ 인 부분을  $x$ 축,  $y$ 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

**115-①**  $2|x| + |y| = 6$ 에서

(i)  $x \geq 0, y \geq 0$ 일 때,

$$2x + y = 6 \\ \therefore y = -2x + 6$$

(ii)  $x \geq 0, y < 0$ 일 때,

$$2x - y = 6 \\ \therefore y = 2x - 6$$

(iii)  $x < 0, y \geq 0$ 일 때,

$$-2x + y = 6 \\ \therefore y = 2x + 6$$

(iv)  $x < 0, y < 0$ 일 때,

$$-2x - y = 6 \\ \therefore y = -2x - 6$$

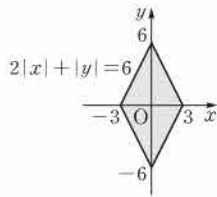
이상에서 방정식

$2|x| + |y| = 6$ 이 나타내는

도형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$$



답 36

**Remark▶**

$2|x| + |y| = 6$ 의 그래프는  $2x + y = 6$ 의 그래프에서  $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을  $x$ 축,  $y$ 축, 원점에 대하여 각각 대칭 이동한 것이다.

**115-②**  $|x-2| + |y-1| = 1$ 에서

(i)  $x \geq 2, y \geq 1$ 일 때,

$$(x-2) + (y-1) = 1 \\ \therefore y = -x + 4$$

(ii)  $x \geq 2, y < 1$ 일 때,

$$(x-2) - (y-1) = 1 \\ \therefore y = x - 2$$

(iii)  $x < 2, y \geq 1$ 일 때,

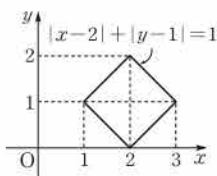
$$-(x-2) + (y-1) = 1 \\ \therefore y = x$$

(iv)  $x < 2, y < 1$ 일 때,

$$-(x-2) - (y-1) = 1 \\ \therefore y = -x + 2$$

이상에서

$|x-2| + |y-1| = 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

**Remark▶**

$|x-2| + |y-1| = 1$ 의 그래프는  $|x| + |y| = 1$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 2만큼,  $y$ 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

**116-①**  $y = |x+2| + |x| + |x-3|$ 에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는  $x$ 의 값은  $-2, 0, 3$ 이다.

(i)  $x < -2$ 일 때,

$$x+2 < 0, x < 0, x-3 < 0 \text{ 이므로} \\ y = -(x+2) - x - (x-3) \\ \therefore y = -3x + 1$$

(ii)  $-2 \leq x < 0$ 일 때,

$$x+2 \geq 0, x < 0, x-3 < 0 \text{ 이므로} \\ y = x+2 - x - (x-3) \\ \therefore y = -x + 5$$

(iii)  $0 \leq x < 3$ 일 때,

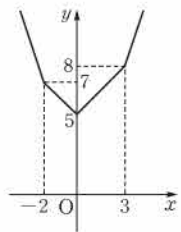
$$x+2 > 0, x \geq 0, x-3 < 0 \text{ 이므로} \\ y = x+2 + x - (x-3) \\ \therefore y = x + 5$$

(iv)  $x \geq 3$ 일 때,

$$x+2 > 0, x \geq 0, x-3 \geq 0 \text{ 이므로} \\ y = x+2 + x + x-3 \\ \therefore y = 3x - 1$$

이상에서

$y = |x+2| + |x| + |x-3|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

**116-②**  $y = |x| - |x-1|$ 에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는  $x$ 의 값은  $0, 1$ 이다.

(i)  $x < 0$ 일 때,

$$x < 0, x-1 < 0 \text{ 이므로} \\ y = -x + (x-1) \\ \therefore y = -1$$

(ii)  $0 \leq x < 1$ 일 때,

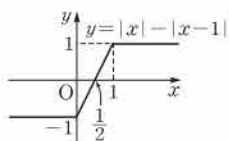
$$x \geq 0, x-1 < 0 \text{ 이므로} \\ y = x + (x-1) \\ \therefore y = 2x - 1$$

(iii)  $x \geq 1$ 일 때,

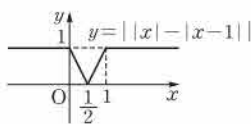
$$x > 0, x-1 \geq 0 \text{ 이므로} \\ y = x - (x-1) \\ \therefore y = 1$$

이상에서  $y = |x| - |x-1|$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.

그런데  $y = ||x| - |x-1||$ 의 그래프는 [그림 1]에서  $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고,  $y < 0$ 인 부분은  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그림 2]와 같고, 치역은  $\{y | 0 \leq y \leq 1\}$ 이다.



[그림 1]



[그림 2]

풀이 참조

**117-①**  $y = |x-4| + |x+3|$  ( $-4 \leq x \leq 5$ )에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는  $x$ 의 값은 -3, 4이다.

(i)  $-4 \leq x < -3$ 일 때,

$$y = -(x-4) - (x+3) = -2x+1$$

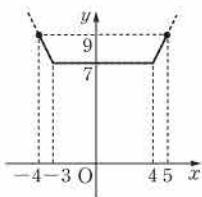
(ii)  $-3 \leq x < 4$ 일 때,

$$y = -(x-4) + (x+3) = 7$$

(iii)  $4 \leq x \leq 5$ 일 때,

$$y = x-4 + x+3 = 2x-1$$

이상에서  $-4 \leq x \leq 5$ 에서 함수  $y = |x-4| + |x+3|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 9, 최솟값은 7이다. **답** 최댓값: 9, 최솟값: 7



**117-②**  $y = x-2|x-1|$  ( $0 \leq x \leq 3$ )에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는  $x$ 의 값은 1이다.

(i)  $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$y = x+2(x-1) = 3x-2$$

(ii)  $1 \leq x \leq 3$ 일 때,

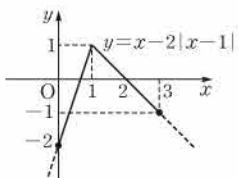
$$y = x-2(x-1) = -x+2$$

(i), (ii)에서  $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수  $y = x-2|x-1|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 1, 최솟값은 -2이다.

따라서  $M=1$ ,  $m=-2$ 이므로

$$M+m=-1$$

**답** -1



**118-①**  $f(x)$ 는 우함수,  $g(x)$ 는 기함수이므로  $f(-x)=f(x)$ ,  $g(-x)=-g(x)$

$$\begin{aligned} \therefore f(-3)+g(-2) &= f(3)-g(2) \\ &= 1-(-3)=4 \end{aligned}$$

**답** 4

**118-②**  $f \circ g$ 는 우함수이므로  $h=f \circ g$ 로 놓으면  $h(-x)=h(x)$ 이다.

ㄱ, ㄴ. [반례]  $f(x)=x^2$  (우함수),  $g(x)=x^4$  (우함수)이면

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) \\ &= f(x^4) = x^8 \text{ (우함수)} \end{aligned}$$

ㄷ.  $g$ 가 기함수이면  $g(-x)=-g(x)$ 를 만족시키므로

$$h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x))$$

그런데  $h$ 는 우함수이므로

$$h(-x) = h(x) = f(g(x))$$

$$\therefore f(-g(x)) = f(g(x))$$

따라서  $f$ 는 우함수이다.

ㄹ.  $k=g \circ f$ 로 놓으면

(i)  $f$ 가 우함수일 때,

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x) \text{ 이므로} \\ k(-x) &= g(f(-x)) \\ &= g(f(x)) = k(x) \end{aligned}$$

따라서  $k$ 는 우함수이다.

(ii)  $f$ 가 기함수일 때,

$$\begin{aligned} f \circ g &\text{가 우함수이므로} \\ f(g(-x)) &= f(g(x)) \\ \text{즉 } g &\text{는 우함수이어야 하므로} \\ k(-x) &= g(f(-x)) \\ &= g(-f(x)) \\ &= g(f(x)) \\ &= k(x) \end{aligned}$$

따라서  $k$ 는 우함수이다.

(i), (ii)에서  $g \circ f$ 는 우함수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

**답** ㄷ, ㄹ

### 중단원 연습 문제

본책 325~327쪽

**01** 5, 13 **02**  $m < -1$  **03**  $a > \frac{1}{4}$

**04** 풀이 참조 **05**  $k=0$  또는  $k > 1$  **06** 13

**07** ③ **08** -2 **09**  $a > 2$  **10** ⑤ **11** 4

**12** 6 **13** 풀이 참조 **14** ④ **15** 48

**16** ①

**01** **전략**  $a > 0$ 일 때와  $a < 0$ 일 때로 나누어 그래프를 그려 본다.

**풀이**  $f(x) = ax + b$ 라 하면  $-2 \leq x \leq 1$ 에서

(i)  $a > 0$ 일 때,

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽  
그림과 같으므로

$$\begin{aligned} f(-2) &= -1, f(1) = 5 \\ \therefore -2a + b &= -1, \\ a + b &= 5 \end{aligned}$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = 3$$

(ii)  $a < 0$ 일 때,

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽  
그림과 같으므로

$$\begin{aligned} f(-2) &= 5, f(1) = -1 \\ \therefore -2a + b &= 5, \\ a + b &= -1 \end{aligned}$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = 1$$

(i), (ii)에서

$$a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$\text{또는 } a^2 + b^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$$

답 5, 13

| 채점 기준                              | 비율   |
|------------------------------------|------|
| ① $a > 0$ 일 때 $a, b$ 의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ② $a < 0$ 일 때 $a, b$ 의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ③ $a^2 + b^2$ 의 값을 모두 구할 수 있다.     | 20 % |

**02** **전략** 주어진 구간에서 함숫값이 항상 음이 되는 경우를 생각해 본다.

**풀이** 함수  $f(x) = mx + 2m + 3$ 에 대하여  $1 \leq x < 3$ 에서  $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면  $y = f(x)$ 의 그래프가 이 범위에서  $x$ 축보다 아래쪽에 있어야 하므로  $f(1) < 0$ 이고  $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.

$$f(1) = m + 2m + 3 < 0 \text{에서}$$

$$3m < -3$$

$$\therefore m < -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(3) = 3m + 2m + 3 \leq 0 \text{에서}$$

$$5m \leq -3$$

$$\therefore m \leq -\frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 구하는  $m$ 의 값의 범위는

$$m < -1$$

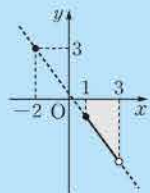
답  $m < -1$

**Remark**

$$\begin{aligned} f(x) &= mx + 2m + 3 \\ &= (x + 2)m + 3 \end{aligned}$$

에서  $y = f(x)$ 의 그래프는  $m$ 의 값에 관계없이 항상 점  $(-2, 3)$ 을 지나므로  $1 \leq x < 3$ 에서 항상  $f(x) < 0$ 이라면  $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때  $f(1) < 0$ 이면  $f(3) \leq 0$ 이 항상 성립함을 알 수 있다.



**03** **전략** 주어진 식을  $y = k(x - p)^2 + q$  꼴로 변형하여 꼭짓점의 좌표를 구한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } y &= -x^2 + 6x + 4a - 10 \\ &= -(x - 3)^2 + 4a - 1 \end{aligned}$$

이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$$(3, 4a - 1)$$

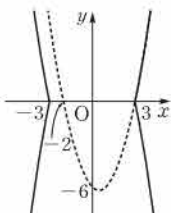
꼭짓점이 제1사분면 위에 있으므로

$$4a - 1 > 0 \quad \therefore a > \frac{1}{4}$$

$$\text{답 } a > \frac{1}{4}$$

**04** **전략**  $f(x) = x^2 - x - 6$ 의 그래프를 그린 후  $|y| = f(|x|)$ 의 그래프를 그리는 방법을 이용한다.

**풀이**  $|y| = f(|x|)$ 의 그래프는  $y = f(x)$ , 즉  $y = x^2 - x - 6$ 의 그래프에서  $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분만 남긴 다음 이 부분을  $x$ 축,  $y$ 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

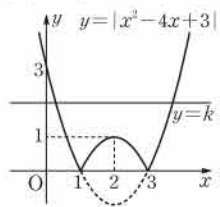


답 풀이 참조

**05** **전략** 방정식  $|x^2 - 4x + 3| = k$ 의 실근의 개수는 함수  $y = |x^2 - 4x + 3|$ 의 그래프와 직선  $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

**풀이** 방정식  $|x^2 - 4x + 3| = k$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수  $y = |x^2 - 4x + 3|$ 의 그래프와 직선  $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$y = |x^2 - 4x + 3|$ 의 그래프는  $y = x^2 - 4x + 3$ 의 그래프에서  $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고,  $y < 0$ 인 부분은  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는  $k$ 의 값 또는  $k$ 의 값의 범위는

$$k = 0 \text{ 또는 } k > 1$$

$$\text{답 } k = 0 \text{ 또는 } k > 1$$

**06 [전략]**  $x$ 의 값의 범위를 나누어 주어진 함수의 그래프를 그려 본다.

**풀이**  $y = |x+3| + |x+1| + |x|$ 에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는  $x$ 의 값은  $-3, -1, 0$ 이다.

→ ①

(i)  $-4 \leq x < -3$ 일 때,

$$y = -(x+3) - (x+1) - x \\ = -3x - 4$$

(ii)  $-3 \leq x < -1$ 일 때,

$$y = x+3 - (x+1) - x = -x+2$$

(iii)  $-1 \leq x < 0$ 일 때,

$$y = x+3 + x+1 - x = x+4$$

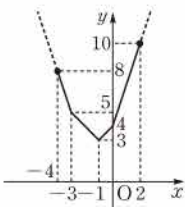
(iv)  $0 \leq x \leq 2$ 일 때,

$$y = x+3 + x+1 + x \\ = 3x+4$$

이상에서  $-4 \leq x \leq 2$ 에서

$y = |x+3| + |x+1| + |x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

→ ②



따라서 최댓값은 10, 최솟값은 3이므로

$$M = 10, m = 3$$

$$\therefore M+m = 13$$

→ ③

답 13

| 채점 기준                                          | 비율   |
|------------------------------------------------|------|
| ① 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 $x$ 의 값을 구할 수 있다.     | 20 % |
| ② 함수 $y =  x+3  +  x+1  +  x $ 의 그래프를 그릴 수 있다. | 60 % |
| ③ $M+m$ 의 값을 구할 수 있다.                          | 20 % |

**07 [전략]** 함수  $F(x)$ 가  $F(-x) = F(x)$ 를 만족시키면 우함수,  $F(-x) = -F(x)$ 를 만족시키면 기함수이다.

**풀이**  $\neg$ .  $F(x) = f(x) + f(-x)$ 로 놓으면

$$F(-x) = f(-x) + f(x) = F(x)$$

따라서  $f(x) + f(-x)$ 는 우함수이다.

$\neg$ .  $G(x) = f(x) - f(-x)$ 로 놓으면

$$G(-x) = f(-x) - f(x) \\ = -\{f(x) - f(-x)\} = -G(x)$$

따라서  $f(x) - f(-x)$ 는 기함수이다.

$\neg$ .  $H(x) = f(x)f(-x)$ 로 놓으면

$$H(-x) = f(-x)f(x) = H(x)$$

따라서  $f(x)f(-x)$ 는 우함수이다.

이상에서 우함수인 것은  $\neg$ ,  $\neg$ 이다.

답 ③

**08 [전략]** 직선  $y = mx - 3m + 10$ 이  $m$ 의 값에 관계없이 지나는 점의 좌표를 구한 후 직선이 두 점 A, B 사이를 지나는 경우를 알아본다.

**풀이**  $y = mx - 3m + 10 = m(x-3) + 10 \dots\dots ①$

에서 직선 ①은  $m$ 의 값에 관계없이 항상 점 (3, 1)을 지난다.

→ ①

(i) 직선 ①이 점 A(-1, -4)

를 지날 때,

$$m = \frac{1 - (-4)}{3 - (-1)} = \frac{5}{4}$$

(ii) 직선 ①이 점 B(1, 6)을

지날 때,

$$m = \frac{1 - 6}{3 - 1} = -\frac{5}{2}$$

(i), (ii)에서 직선 ①이 두 점 A, B 사이를 지나도록 하는  $m$ 의 값의 범위는

$$-\frac{5}{2} < m < \frac{5}{4}$$

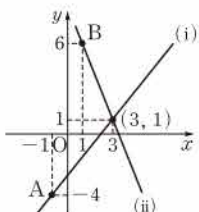
→ ②

따라서 정수  $m$ 은  $-2, -1, 0, 1$ 이므로 구하는 모든 정수  $m$ 의 값의 합은

$$-2 + (-1) + 0 + 1 = -2$$

→ ③

답 -2



| 채점 기준                             | 비율   |
|-----------------------------------|------|
| ① 주어진 직선이 반드시 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다. | 20 % |
| ② $m$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.           | 60 % |
| ③ 모든 정수 $m$ 의 값의 합을 구할 수 있다.      | 20 % |

**09 [전략]** 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는  $x$ 의 값을 경계로 구간을 나누어  $f(x)$ 를 구한다.

**풀이**  $|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} ax & (x \geq 0) \\ (a-2)x & (x < 0) \end{cases}$$

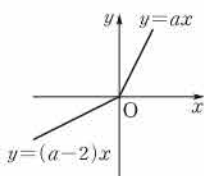
그런데  $a > 0$ 이므로  $x \geq 0$ 일 때 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 기울기가 양수인 직선이다.

따라서 실수 전체의 집합에서 함수  $f(x)$ 가 일대일 대응이려면 오른쪽 그림과 같이  $x < 0$ 일 때도 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 기울기가 양수인 직선이어야 한다.

즉  $a-2 > 0$ 이어야 하므로

$$a > 2$$

답  $a > 2$



**Remark▶**

문제에서  $a$ 가 양수라는 조건이 없으면 두 직선  $y=ax$ ,  $y=(a-2)x$ 의 기울기가 모두 음수인 경우, 즉  $a<0$ 이고  $a-2<0$ 인 경우에도  $f(x)$ 가 일대일대응이 된다.

**10** **전략**  $A \cap B \neq \emptyset$ 이라면 함수  $y=|x|-|x-2|$ 의 그래프와 직선  $y=n$ 이 만나야 함을 이용한다.

**풀이**  $y=|x|-|x-2|$ 에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는  $x$ 의 값은 0, 2이다.

(i)  $x<0$ 일 때,

$$y=-x+(x-2)=-2$$

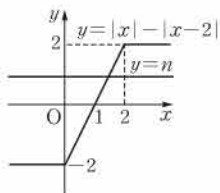
(ii)  $0 \leq x < 2$ 일 때,

$$y=x+(x-2)=2x-2$$

(iii)  $x \geq 2$ 일 때,

$$y=x-(x-2)=2$$

이상에서  $y=|x|-|x-2|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선  $y=n$ 은  $x$ 축에 평행하므로  $A \cap B \neq \emptyset$ 이라면



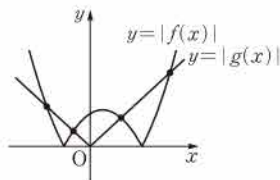
$$-2 \leq n \leq 2$$

따라서  $n$ 의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

**11** **전략** 방정식  $|f(x)|=|g(x)|$ 의 실근의 개수는 두 함수  $y=|f(x)|$ ,  $y=|g(x)|$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

**풀이** 방정식  $|f(x)|=|g(x)|$ 의 실근의 개수는 두 함수  $y=|f(x)|$ ,  $y=|g(x)|$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다. 이때 두 함수  $y=|f(x)|$ ,  $y=|g(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고 두 함수의 그래프의 교점의 개수는 4이다.



따라서 집합  $A$ 의 원소의 개수는 4이다.

답 4

**12** **전략** 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리의 합을 식으로 나타낸다.

**풀이** 점 P의 좌표를  $x$ 라 하면 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리가 각각  $|x+3|$ ,  $|x|$ ,  $|x-3|$ 이므로 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리의 합은

$$|x+3|+|x|+|x-3| \quad \cdots ①$$

$y=|x+3|+|x|+|x-3|$ 으로 놓으면 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는  $x$ 의 값은 -3, 0, 3이다.

(i)  $x < -3$ 일 때,

$$y=-(x+3)-x-(x-3)=-3x$$

(ii)  $-3 \leq x < 0$ 일 때,

$$y=x+3-x-(x-3)=-x+6$$

(iii)  $0 \leq x < 3$ 일 때,

$$y=x+3+x-(x-3)=x+6$$

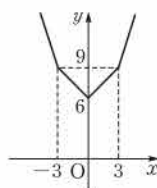
(iv)  $x \geq 3$ 일 때,

$$y=x+3+x+x-3=3x \quad \cdots ②$$

이상에서

$y=|x+3|+|x|+|x-3|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 최솟값은 6이다.

답 6



| 채점 기준                                       | 비율   |
|---------------------------------------------|------|
| ① 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리의 합을 식으로 나타낼 수 있다. | 30 % |
| ② $x$ 의 값의 범위를 나누어 함수식을 구할 수 있다.            | 40 % |
| ③ 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리의 합의 최솟값을 구할 수 있다. | 30 % |

**Remark▶**

점 P가 점 B의 위치에 있을 때, 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리의 합이 최소가 된다.

**13** **전략**  $x$ 의 값이 (정수)  $-\frac{1}{2}$ 이 되는 값을 경계로 구간을 나눈다.

**풀이** (i)  $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$ 일 때,  $\{x\} = -1$ 이므로

$$y=\{x\}=-1$$

(ii)  $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ 일 때,  $\{x\} = 0$ 이므로

$$y=\{x\}=0$$

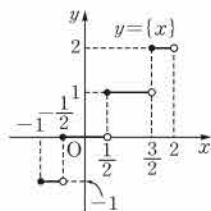
(iii)  $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ 일 때,  $\{x\} = 1$ 이므로

$$y=\{x\}=1$$

(iv)  $\frac{3}{2} \leq x < 2$ 일 때,  $\{x\} = 2$ 이므로

$$y=\{x\}=2$$

이상에서  $-1 \leq x < 2$ 에서 함수  $y=\{x\}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

**Remark▶**

$x \geq 0$ 인  $x$ 에 대하여  $\{x\}$ 는  $x$ 를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값과 같다.

**14 전략**  $f(x) < 0, f(x) \geq 0$ 일 때  $x$ 의 값의 범위를 나누어 함수  $y=g(x)$ 의 그래프를 그린다.

**풀이**  $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ -f(x) & (-1 < x < 3) \end{cases}$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ 0 & (-1 < x < 3) \end{cases}$$

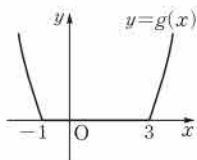
따라서 함수  $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

∴  $y=g(x)$ 의 그래프는 직선  $x=1$ 에 대하여 대칭이다.

∴  $y=g(x)$ 의 그래프와 직선

$y=1$ 은 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식  $g(x)=1$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



답 ④

**15 전략** 주어진 함수의 그래프를 이용하여 두 함수  $y=|f(x)|$ 와  $y=-g(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

**풀이**  $|f(x)| + g(x) = 0$ 에서

$$|f(x)| = -g(x)$$

두 함수  $y=|f(x)|$ 와

$y=-g(x)$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같고, 직선

$x=8$ 에 대하여 대칭이므

로 두 함수의 그래프의 교

점의  $x$ 좌표는

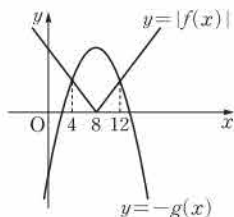
$$x=4 \text{ 또는 } x=12$$

따라서 방정식  $|f(x)| + g(x) = 0$ 의 근은

$$x=4 \text{ 또는 } x=12$$

이므로 구하는 모든 실근의 곱은

$$4 \cdot 12 = 48$$



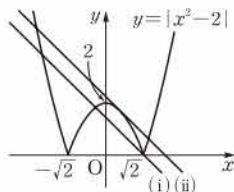
답 48

**16 전략** 주어진 방정식을  $f(x)=g(x)$  꼴로 변형하여 두 함수  $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점이 3개가 될 때를 조사한다.

**풀이**  $|x^2-2| + x - k = 0$ 에서

$$|x^2-2| = -x + k$$

함수  $y=|x^2-2|$ 의 그래프와 직선  $y=-x+k$ 는 다음 그림과 같다.



(i) 직선  $y=-x+k$ 가 점  $(\sqrt{2}, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = -\sqrt{2} + k \quad \therefore k = \sqrt{2}$$

(ii) 함수  $y=-x^2+2$ 의 그래프와 직선  $y=-x+k$ 가 접할 때,

이차방정식  $-x^2+2=-x+k$ , 즉

$x^2-x+k-2=0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D = 1 - 4(k-2) = 0, \quad -4k + 9 = 0$$

$$\therefore k = \frac{9}{4}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 실수  $k$ 의 값의 곱은

$$\sqrt{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

답 ①

12

유리함수

III. 함수

유제

본책 334~356쪽

119-① 주어진 식의 우변을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned} & \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \\ &= \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1} \\ \text{즉 } \frac{2x}{x^2-1} &= \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1} \text{가 } x \text{에 대한 항등식이} \\ \text{므로} \end{aligned}$$

$$a+b=2, a-b=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=1$$

$$\therefore ab=1$$

답 1

119-② 주어진 식의 우변을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned} & \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{a(x-1)^2+bx(x-1)+cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{a(x^2-2x+1)+bx^2-bx+cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2-(2a+b-c)x+a}{x(x-1)^2} \\ \text{즉 } \frac{1}{x(x-1)^2} &= \frac{(a+b)x^2-(2a+b-c)x+a}{x(x-1)^2} \text{가 } x \text{에} \end{aligned}$$

대한 항등식이므로

$$a+b=0, 2a+b-c=0, a=1$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-1, c=1$$

$$\therefore a+b+c=1$$

답 1

$$\begin{aligned} 120-① (1) \frac{x^2+3x+1}{x+3} &= \frac{x(x+3)+1}{x+3} \\ &= x + \frac{1}{x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-3x+1}{x-3} &= \frac{x(x-3)+1}{x-3} \\ &= x + \frac{1}{x-3} \end{aligned}$$

$\therefore$  (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \left(x + \frac{1}{x+3}\right) - \left(x + \frac{1}{x-3}\right) \\ &= \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3} \\ &= \frac{x-3-(x+3)}{(x+3)(x-3)} \\ &= -\frac{6}{(x+3)(x-3)} \end{aligned}$$

$$(2) \frac{x+3}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}, \frac{x+5}{x+3} = 1 + \frac{2}{x+3},$$

$$\frac{x+7}{x+5} = 1 + \frac{2}{x+5}, \frac{x+9}{x+7} = 1 + \frac{2}{x+7}$$

$\therefore$  (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \left(1 + \frac{2}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{2}{x+3}\right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{2}{x+5}\right) + \left(1 + \frac{2}{x+7}\right) \\ &= \left(\frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+3}\right) - \left(\frac{2}{x+5} - \frac{2}{x+7}\right) \\ &= \frac{2(x+3)-2(x+1)}{(x+1)(x+3)} - \frac{2(x+7)-2(x+5)}{(x+5)(x+7)} \\ &= \frac{4}{(x+1)(x+3)} - \frac{4}{(x+5)(x+7)} \\ &= \frac{4(x+5)(x+7)-4(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)} \\ &= \frac{32(x+4)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)} \end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} - \frac{6}{(x+3)(x-3)}$$

$$(2) \frac{32(x+4)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}$$

$$\begin{aligned} 121-① & \frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{(a+b)(a+b+c)} \\ &+ \frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)} \\ &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right) + \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b+c}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{a+b+c+d}\right) \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b+c+d} \\ &= \frac{a+b+c+d-a}{a(a+b+c+d)} \\ &= \frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}$$

$$\begin{aligned}
 121-② \quad (1) \quad & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{19 \cdot 20} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \\
 &\quad + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{20} \\
 &= \frac{19}{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{18 \cdot 20} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{19}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{20}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{20}\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right) \\
 &= \frac{531}{760}
 \end{aligned}$$

답 (1)  $\frac{19}{20}$  (2)  $\frac{531}{760}$

**Remark▶**

부분분수로의 변형을 이용하여 분수의 합을 구할 때 (1)과 같이 연달아 소거되는 경우에는 앞에서 첫 번째 수가 남으면 뒤에서도 첫 번째 수가 남는다. 또 (2)와 같이 건너뛰며 소거되는 경우에는 앞에서 첫 번째, 세 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째가 남는다.

즉 수가 연쇄적으로 소거될 때 앞에서 남는 수와 뒤에서 남는 수는 서로 대칭이 되는 위치에 있다.

$$\begin{aligned}
 122-① \quad (1) \quad & \frac{\frac{2x-3y}{x-y} - 1}{2 - \frac{x}{x-y}} = \frac{\frac{2x-3y-(x-y)}{x-y}}{\frac{2(x-y)-x}{x-y}} \\
 &= \frac{x-2y}{x-2y} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{1}{1 - \frac{1}{1-a}} = \frac{1}{1 - \frac{1-a}{(1-a)-1}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1-a}{a}} \\
 &= \frac{a}{a + (1-a)} \\
 &= a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 - \frac{1}{1-a}} &= \frac{1}{1 - \frac{1+a}{(1+a)-1}} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1+a}{a}} \\
 &= \frac{a}{a - (1+a)} \\
 &= -a
 \end{aligned}$$

$\therefore$  (주어진 식)  $= a \cdot (-a) = -a^2$

답 (1) 1 (2)  $-a^2$

**다른 풀이** (1)  $\frac{\frac{2x-3y}{x-y} - 1}{2 - \frac{x}{x-y}} = \frac{(x-y) \left( \frac{2x-3y}{x-y} - 1 \right)}{(x-y) \left( 2 - \frac{x}{x-y} \right)} = \frac{2x-3y-(x-y)}{2(x-y)-x} = \frac{x-2y}{x-2y} = 1$

$$\begin{aligned}
 122-② \quad & \frac{36}{151} = \frac{1}{\frac{151}{36}} = \frac{1}{4 + \frac{7}{36}} \\
 &= \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{36}{7}}} = \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7}}}
 \end{aligned}$$

이므로

$a=4, b=5, c=7$

$\therefore a+b+c=16$

답 16

123-①  $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 양변을  $x$ 로 나누면

$x - 2 - \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x - \frac{1}{x} = 2$

(1)  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$

(2)  $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 2^3 + 3 \cdot 2 = 14$

(3)  $x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2 + 2 = 14^2 + 2 = 198$

답 (1) 6 (2) 14 (3) 198

123-②  $x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 양변을  $x$ 로 나누면

$x - 4 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 4$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^2 - x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \\ = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ = 2\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] - \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ = 2 \cdot (4^2 - 2) - 4 = 24 \end{aligned}$$

답 24

124-①  $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{4}$  이므로

$$4(x-y) = x+y$$

$$\therefore 3x = 5y, \text{ 즉 } \frac{x}{5} = \frac{y}{3}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = k \ (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$x = 5k, y = 3k$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2xy}{x^2+y^2} &= \frac{2 \cdot 5k \cdot 3k}{(5k)^2 + (3k)^2} \\ &= \frac{30k^2}{34k^2} = \frac{15}{17} \end{aligned}$$

답  $\frac{15}{17}$

124-②  $x + \frac{2}{y} = 0$ 에서  $x = -\frac{2}{y}$

$$y + \frac{1}{z} = 0 \text{에서 } \frac{1}{z} = -y \quad \therefore z = -\frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{xz}{x^2+z^2} &= \frac{\left(-\frac{2}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y}\right)}{\left(-\frac{2}{y}\right)^2 + \left(-\frac{1}{y}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{2}{y^2}}{\frac{4}{y^2} + \frac{1}{y^2}} = \frac{\frac{2}{y^2}}{\frac{5}{y^2}} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

답  $\frac{2}{5}$

125-①  $y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1}$

$$= \frac{3}{x-1} + 2$$

따라서 주어진 함수의 그래프는  $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

(1)  $x=2$ 일 때  $y=5$ 이고,  $x=4$ 일 때  $y=3$ 이므로

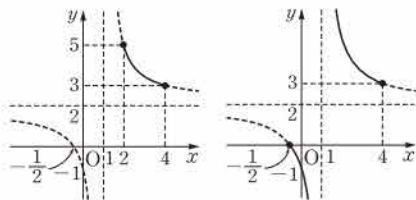
[그림 1]에서 치역은

$$\{y \mid 3 \leq y \leq 5\}$$

(2)  $y=0$ 일 때  $x = -\frac{1}{2}$ 이고,  $y=3$ 일 때  $x=4$ 이므로

[그림 2]에서 정의역은

$$\left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ 또는 } 1 < x \leq 4\right\}$$



[그림 1]

[그림 2]

답 (1)  $\{y \mid 3 \leq y \leq 5\}$

(2)  $\left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ 또는 } 1 < x \leq 4\right\}$

126-① 점근선의 방정식이  $x=1$ ,  $y=3$ 이므로 주어진 함수를

$$y = \frac{k}{x-1} + 3 \ (k \neq 0)$$

으로 놓을 수 있다. 이 함수의 그래프가 점  $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{k}{-1} + 3 \quad \therefore k = 1$$

따라서  $y = \frac{1}{x-1} + 3 = \frac{3x-2}{x-1}$  이므로

$$a=3, b=-2, c=-1$$

$$\therefore abc = 6$$

답 6

다른 풀이  $y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$

$$= \frac{-ac+b}{x+c} + a$$

이므로 이 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -c, y = a$$

$$\therefore a=3, c=-1$$

즉  $y = \frac{3x+b}{x-1}$ 의 그래프가 점  $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{b}{-1} \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore abc = 6$$

127-①  $y = \frac{4x+5}{2x-1} = \frac{2(2x-1)+7}{2x-1}$

$$= \frac{7}{2x-1} + 2 = \frac{7}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} + 2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 점근선  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y=2$ 의

교점  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 에 대하여 대칭이다.

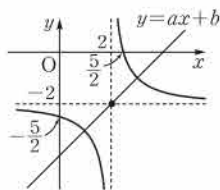
따라서  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b=2$ 이므로

$$a+b = \frac{5}{2}$$

답  $\frac{5}{2}$

$$127-2 \quad y = \frac{-2x+5}{x-2} = \frac{-2(x-2)+1}{x-2} \\ = \frac{1}{x-2} - 2$$

에서 점근선의 방정식은  
 $x=2$ ,  $y=-2$ 이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.  
 주어진 함수의 그래프는 점근선의 교점  $(2, -2)$ 를 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이다.



이때  $a>0$ 이므로  $a=1$   
 따라서 직선  $y=x+b$ 가 점  $(2, -2)$ 를 지나므로  
 $-2=2+b$   
 $\therefore b=-4$

$$\text{답 } a=1, b=-4$$

$$128-1 \quad y = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} \\ = -\frac{1}{x-1} + 2$$

이므로  $y = \frac{2x-3}{x-1}$ 의 그래프는  $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

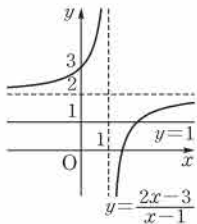
한편 직선  $y=mx+1$ 은  $m$ 의 값에 관계없이 점  $(0, 1)$ 을 지난다.

(i)  $m=0$ 일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수

$y = \frac{2x-3}{x-1}$ 의 그래프와 직선

$y=1$ 은 한 점에서 만난다.



(ii)  $m \neq 0$ 일 때,

$$\frac{2x-3}{x-1} = mx+1 \text{에서}$$

$$2x-3 = (mx+1)(x-1)$$

$$\therefore mx^2 - (m+1)x + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면 주어진 함수의 그래프와 직선이 만나야 하므로

$$D = (m+1)^2 - 8m \geq 0$$

$$m^2 - 6m + 1 \geq 0 \quad \dots\dots ①$$

이때 이차방정식  $m^2 - 6m + 1 = 0$ 의 두 근이

$3-2\sqrt{2}$ ,  $3+2\sqrt{2}$ 이므로 부등식 ①의 해는

$$m \leq 3-2\sqrt{2} \text{ 또는 } m \geq 3+2\sqrt{2}$$

그런데  $m \neq 0$ 이므로

$$m < 0 \text{ 또는 } 0 < m \leq 3-2\sqrt{2}$$

$$\text{또는 } m \geq 3+2\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 구하는  $m$ 의 값의 범위는

$$m \leq 3-2\sqrt{2} \text{ 또는 } m \geq 3+2\sqrt{2}$$

$$\text{답 } m \leq 3-2\sqrt{2} \text{ 또는 } m \geq 3+2\sqrt{2}$$

128-2  $n(A \cap B) = 0$ 이라면  $y = \frac{2x+4}{x+1}$ 의 그래프

와 직선  $y=mx$ 가 만나지 않아야 한다.

$$y = \frac{2x+4}{x+1} = \frac{2(x+1)+2}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 2$$

이므로  $y = \frac{2x+4}{x+1}$ 의 그래프는  $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 -1만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

(i)  $m=0$ 일 때,

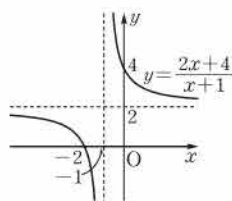
오른쪽 그림과 같이 함수

$y = \frac{2x+4}{x+1}$ 의 그래프

와 직선  $y=0$ , 즉  $x$ 축이

만나므로 조건을 만족시

키지 않는다.



(ii)  $m \neq 0$ 일 때,

$$\frac{2x+4}{x+1} = mx \text{에서 } 2x+4 = mx(x+1)$$

$$\therefore mx^2 + (m-2)x - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면 함수

$y = \frac{2x+4}{x+1}$ 의 그래프와 직선  $y=mx$ 가 만나지 않아야 하므로

$D < 0$ 라 하면

$$D = (m-2)^2 + 16m < 0$$

$$m^2 + 12m + 4 < 0$$

$$\therefore -6-4\sqrt{2} < m < -6+4\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 구하는  $m$ 의 값의 범위는

$$-6-4\sqrt{2} < m < -6+4\sqrt{2}$$

$$\text{답 } -6-4\sqrt{2} < m < -6+4\sqrt{2}$$

129-1  $f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1(f_1(x))$

$$= \frac{f_1(x)}{f_1(x)-1}$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}$$

$$= x$$

따라서  $f_2(x) = f_4(x) = \dots = f_{2k}(x)$  ( $k$ 는 자연수)는 항등함수이므로

$$f_{2000}(x) = f_{2 \times 1000}(x) = x$$

$$\therefore f_{2000}(3) = 3$$

$$\text{답 } 3$$

**130-①**  $(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로  $f^{-1}(x)$ 의 역함수가  $f(x)$ 이다.

$y=\frac{x-5}{-2x+3}$ 로 놓고  $x$ 에 대하여 풀면

$$y(-2x+3)=x-5, \quad (2y+1)x=3y+5$$

$$\therefore x=\frac{3y+5}{2y+1}$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면  $y=\frac{3x+5}{2x+1}$

따라서  $f(x)=\frac{3x+5}{2x+1}$ 이므로

$$a=3, b=5, c=1$$

$$\therefore a+b+c=9$$

답 9

### 중단원 연습 문제

본책 357~361쪽

**01**  $\frac{8}{1-a^8}$

**02**  $f(x)=6x^2+36x+42$

**03**  $\frac{4}{x(x+4)}$

**04** ②

**05** ②

**06** 4

**07** ②

**08** 12

**09** ③

**10**  $\frac{3}{8} \leq m \leq \frac{2}{3}$

**11** 3

**12** 4

**13** 3

**14** 46

**15**  $-\frac{13}{2}$

**16** 103

**17** ⑤

**18**  $(-3, \frac{1}{2})$

**19** ⑤

**20** ①

**21** ①

**22** ②

**01** **전략**  $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ 임을 이용하여 분모를 통분한다.

**풀이** (주어진 식)

$$=\frac{1+a+1-a}{(1-a)(1+a)}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$$

$$=\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$$

$$=\frac{2(1+a^2)+2(1-a^2)}{(1-a^2)(1+a^2)}+\frac{4}{1+a^4}$$

$$=\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}$$

$$=\frac{4(1+a^4)+4(1-a^4)}{(1-a^4)(1+a^4)}$$

$$=\frac{8}{1-a^8}$$

답  $\frac{8}{1-a^8}$

**02** **전략** (분자의 차수) < (분모의 차수)가 되도록 분수식을 변형한 후 두 개씩 묶어서 계산한다.

**풀이**  $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2(x+1)+1}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$

$$\frac{3x+7}{x+2}=\frac{3(x+2)+1}{x+2}=3+\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{2x+9}{x+4}=\frac{2(x+4)+1}{x+4}=2+\frac{1}{x+4}$$

$$\frac{3x+16}{x+5}=\frac{3(x+5)+1}{x+5}=3+\frac{1}{x+5}$$

이므로 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned} & \frac{2x+3}{x+1}+\frac{3x+7}{x+2}-\frac{2x+9}{x+4}-\frac{3x+16}{x+5} \\ &= \left(2+\frac{1}{x+1}\right)+\left(3+\frac{1}{x+2}\right)-\left(2+\frac{1}{x+4}\right) \\ & \quad -\left(3+\frac{1}{x+5}\right) \end{aligned}$$

$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}\right)$$

$$=\frac{3}{(x+1)(x+4)}+\frac{3}{(x+2)(x+5)}$$

$$=\frac{3(x+2)(x+5)+3(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)}$$

$$=\frac{6x^2+36x+42}{(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)}$$

$$\therefore f(x)=6x^2+36x+42$$

답  $f(x)=6x^2+36x+42$

**03** **전략**  $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ 임을 이용하여 각 유리식을 부분분수로 변형한다.

**풀이**  $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$$+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}$$

$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}=\frac{x+4-x}{x(x+4)}$$

$$=\frac{4}{x(x+4)}$$

답  $\frac{4}{x(x+4)}$

**04** **전략** 분모, 분자를 각각 통분하여 간단히 한다.

**풀이**  $\frac{x-\frac{2}{x-1}}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=\frac{x-\frac{2}{x-1}}{1-\frac{x}{x-1}}=\frac{x(x-1)-2}{(x-1)-x}$

$$=-x^2+x+2$$

따라서  $-x^2+x+2=ax^2+bx+c$ 이므로  
 $a=-1, b=1, c=2$   
 $\therefore abc=-2$

답 ②

**05 [전략]** 주어진 등식의 양변을  $x$ 로 나누 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

**풀이**  $x^2-5x+1=0$ 의 양변을  $x$ 로 나누면

$$x-5+\frac{1}{x}=0, \text{ 즉 } x+\frac{1}{x}=5 \text{ 이므로}$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 4 \\ = 5^2 - 4 = 21$$

그런데  $0 < x < 1$ 에서  $x-\frac{1}{x} < 0$ 이므로

$$x-\frac{1}{x} = -\sqrt{21}$$

답 ②

**06 [전략]**  $\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5} = k (k \neq 0)$ 로 놓고,  $x, y, z$ 를  $k$ 에 대한 식으로 나타낸다.

**풀이**  $\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5} = k (k \neq 0)$ 로 놓으면

$$x+y=3k, y+z=4k, z+x=5k \quad \cdots \cdots ①$$

①의 세 식을 변끼리 더하면

$$2(x+y+z)=12k$$

$$\therefore x+y+z=6k \quad \cdots \cdots ②$$

①, ②에서

$$x=2k, y=k, z=3k \quad \cdots \cdots ③$$

$$\therefore \frac{2x-y+3z}{x+y} = \frac{4k-k+9k}{2k+k} \\ = \frac{12k}{3k} = 4 \quad \cdots \cdots ④$$

답 4

| 채점 기준                                | 비율   |
|--------------------------------------|------|
| ① $x, y, z$ 를 $k$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 70 % |
| ② 주어진 식의 값을 구할 수 있다.                 | 30 % |

**07 [전략]** 주어진 함수식을

$y = \frac{k}{3(x-p)} + q (k \neq 0)$  꼴로 변형하여 그래프를 그린 후 최댓값과 최솟값을 찾는다.

**풀이**  $y = \frac{6x-1}{3x-1} = \frac{2(3x-1)+1}{3x-1}$   
 $= \frac{1}{3x-1} + 2 = \frac{1}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} + 2$

이므로 주어진 함수의 그래프는  $y = \frac{1}{3x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $\frac{1}{3}$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$$x = -\frac{1}{3} \text{ 일 때 } y = \frac{3}{2} \text{ 이고,}$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ 일 때 } y = 3 \text{ 이므로 오른쪽}$$

그림에서

$$x = \frac{2}{3} \text{ 일 때 최댓값 } 3,$$

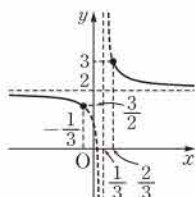
$$x = -\frac{1}{3} \text{ 일 때 최솟값 } \frac{3}{2}$$

을 갖는다.

$$\text{따라서 } M=3, m=\frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$M+m=\frac{9}{2}$$

답 ②



**08 [전략]** 주어진 함수를  $y = \frac{k}{x-p} + q (k \neq 0)$ 로 놓고  $p, q, k$ 의 값을 구한다.

**풀이** 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이  $x=1, y=2$ 이므로 주어진 함수를

$$y = \frac{k}{x-1} + 2 (k \neq 0) \quad \cdots \cdots ①$$

로 놓을 수 있다.

이때 ①의 그래프가 점  $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{3-1} + 2 \quad \therefore k = -4$$

$k = -4$ 를 ①에 대입하면

$$y = \frac{-4}{x-1} + 2 = \frac{2(x-1)-4}{x-1} \\ = \frac{2x-6}{x-1}$$

따라서  $a=2, b=-6, c=-1$ 이므로

$$abc=12$$

②

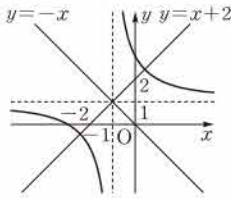
③

답 12

| 채점 기준                           | 비율   |
|---------------------------------|------|
| ① 주어진 함수의 그래프를 이용하여 식을 세울 수 있다. | 30 % |
| ② $a, b, c$ 의 값을 구할 수 있다.       | 60 % |
| ③ $abc$ 의 값을 구할 수 있다.           | 10 % |

**09 [전략]** 유리함수  $y = \frac{k}{x-p} + q (k \neq 0)$ 의 그래프는 두 점근선의 교점  $(p, q)$ 를 지나고 기울기가  $\pm 1$ 인 직선에 대하여 각각 대칭이다.

**풀이** 두 직선  $y=x+2$ ,  $y=-x$ 의 교점의 좌표는  $(-1, 1)$ 이므로 오른쪽 그림에서 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은



$$x=-1, y=1$$

따라서 주어진 함수의 식은

$$y=\frac{2}{x+1}+1$$

이므로

$$a=-1, b=1$$

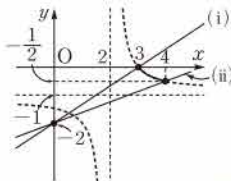
$$\therefore a+b=0$$

답 ③

**10** **전략** 조건을 만족시키도록 함수  $y=\frac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프와 직선  $y=mx-2$ 를 그려 본다.

**풀이**  $y=\frac{-x+3}{x-2}=\frac{-(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}-1$

이므로  $3 \leq x \leq 4$ 에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선  $y=mx-2$ 는  $m$ 의 값에 관계없이 점  $(0, -2)$ 를 지난다.



→ ①

(i) 직선  $y=mx-2$ 가 점  $(3, 0)$ 을 지날 때,

$$0=3m-2 \quad \therefore m=\frac{2}{3}$$

(ii) 직선  $y=mx-2$ 가 점  $(4, -\frac{1}{2})$ 을 지날 때,

$$-\frac{1}{2}=4m-2 \quad \therefore m=\frac{3}{8}$$

→ ②

(i), (ii)에서 구하는  $m$ 의 값의 범위는

$$\frac{3}{8} \leq m \leq \frac{2}{3}$$

→ ③

답  $\frac{3}{8} \leq m \leq \frac{2}{3}$

| 채점 기준                                                                           | 비율   |
|---------------------------------------------------------------------------------|------|
| ① 조건을 만족시키도록 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.                                                  | 40 % |
| ② 직선 $y=mx-2$ 가 두 점 $(3, 0)$ , $(4, -\frac{1}{2})$ 을 지날 때의 $m$ 의 값을 각각 구할 수 있다. | 40 % |
| ③ $m$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.                                                         | 20 % |

**11** **전략**  $f^2(x)$ ,  $f^3(x)$ ,  $f^4(x)$ , ...를 차례대로 구하여  $f^p(x)=x$ 가 되는 자연수  $p$ 를 찾는다.

**풀이**  $f^2(x)=(f \circ f^1)(x)=f(f^1(x))$

$$\begin{aligned} &= \frac{f^1(x)+1}{f^1(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} \\ &= \frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = x \end{aligned}$$

따라서  $f^2(x)=f^4(x)=\dots=f^{2k}(x)$  ( $k$ 는 자연수)는 항등함수이고,  $1001=2 \times 500 + 1$ 이므로

$$f^{1001}(x)=f^1(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$\therefore f^{1001}(2)=\frac{2+1}{2-1}=3$$

답 3

**12** **전략** 주어진 함수의 역함수를 구하여 원래 함수와 비교한다.

**풀이**  $y=\frac{ax+b}{x-3}$ 라 하고  $x$ 에 대하여 풀면

$$y(x-3)=ax+b$$

$$(y-a)x=3y+b$$

$$\therefore x=\frac{3y+b}{y-a}$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면  $y=\frac{3x+b}{x-a}$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{3x+b}{x-a}$$

이때  $f=f^{-1}$ 이므로

$$\frac{ax+b}{x-3}=\frac{3x+b}{x-a}$$

$$\therefore a=3$$

함수  $y=\frac{3x+b}{x-3}$ 의 그래프가 점  $(1, -\frac{1}{2})$ 을 지나므로

$$-\frac{1}{2}=\frac{3+b}{1-3} \quad \therefore b=-2$$

$$\therefore 2a+b=2 \cdot 3-2=4$$

답 4

**13** **전략** 주어진 식을 통분한 후 인수분해 공식을 이용한다.

**풀이** 주어진 식을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned} &\frac{a^2+2}{bc} + \frac{b^2+2}{ca} + \frac{c^2+2}{ab} \\ &= \frac{a(a^2+2)+b(b^2+2)+c(c^2+2)}{abc} \\ &= \frac{a^3+b^3+c^3+2(a+b+c)}{abc} \\ &= \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \quad (\because a+b+c=0) \end{aligned}$$

→ ①

또  $a+b+c=0$ 이므로

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= 0 \end{aligned}$$

에서

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{3abc}{abc} = 3$$

→ 2

→ 5

답 3

| 채점 기준                           | 비율   |
|---------------------------------|------|
| ① 주어진 식을 통분할 수 있다.              | 40 % |
| ② $a^3+b^3+c^3=3abc$ 임을 알 수 있다. | 40 % |
| ③ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.            | 20 % |

**14** **전략**  $\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여  $f(x)$ 를 변형한다.

**풀이**  $f(x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} \\ &\quad + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \cdots + \frac{1}{(x-59)(x-60)} \\ &= \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) + \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{x-60} - \frac{1}{x-59} \right) \\ &= \frac{1}{x-60} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{60}{x(x-60)} \end{aligned}$$

이므로

$$f(62) = \frac{60}{62(62-60)} = \frac{15}{31}$$

따라서  $p=31$ ,  $q=15$ 이므로

$$p+q=46$$

답 46

**15** **전략** 주어진 조건에서  $x+y=a$ ,  $xy=b$ 로 놓고  $a$ ,  $b$ 의 값을 구한다.

**풀이**  $x+y-3xy=9$ ,  $3x+3y+xy=7$ 에서

$x+y=a$ ,  $xy=b$ 로 놓으면

$$a-3b=9, 3a+b=7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-2$$

즉  $x+y=3$ ,  $xy=-2$ 이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned} & \frac{1-\frac{y}{x+y}}{1-\frac{x}{x+y}} - \frac{1-\frac{x}{x-y}}{1+\frac{y}{x-y}} \\ &= \frac{(x+y)-y}{(x+y)-x} \cdot \frac{(x-y)-x}{(x-y)+y} \\ &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy} \\ &= \frac{(x+y)^2-2xy}{xy} = \frac{3^2-2 \cdot (-2)}{-2} \\ &= -\frac{13}{2} \end{aligned}$$

답  $-\frac{13}{2}$

**16** **전략**  $x^4-7x^2+1=0$ 의 양변을  $x^2$ 으로 나눈 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

**풀이**  $x^4-7x^2+1=0$ 의 양변을  $x^2$ 으로 나누면

$$x^2-7+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

→ 1

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2} = 7+2=9$ 이고  $x>0$ 이므로

$$x+\frac{1}{x}=3$$

→ 2

$$\begin{aligned} \therefore x^4+\frac{1}{x^4} &= \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2 \\ &= 7^2-2=47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3+\frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3-3 \cdot 3=18 \end{aligned}$$

→ 3

$$\begin{aligned} \therefore x^4+3x^3+2+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4} \\ &= \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+2 \\ &= 47+3 \cdot 18+2 \\ &= 103 \end{aligned}$$

→ 4

답 103

| 채점 기준                                                     | 비율   |
|-----------------------------------------------------------|------|
| ① $x^2+\frac{1}{x^2}$ 의 값을 구할 수 있다.                       | 30 % |
| ② $x+\frac{1}{x}$ 의 값을 구할 수 있다.                           | 30 % |
| ③ $x^4+\frac{1}{x^4}$ , $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ④ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.                                      | 10 % |

**17** **전략** 자연수  $n$ 에 대하여

$f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x) = x$ 이면  $f^n(x)$ 의 역함수는  $f(x)$ 임을 이용한다.

**풀이**  $f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$  이므로

$$f^2(x) = f(f^1(x)) = 1 - \frac{1}{f^1(x)}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = 1 - \frac{1}{f^2(x)}$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = x$$

$$\vdots$$

따라서  $f^3(x) = f^6(x) = f^9(x) = \dots = f^{3k}(x)$  ( $k$ 는 자연수)는 항등함수이므로

$$f^{2001}(x) = f^{667 \times 3}(x) = x$$

이때  $f^{2001}(x) = (f \circ f^{2000})(x) = x$ 에서  $f^{2000}(x)$ 의 역함수는  $f(x)$ 이므로

$$g(x) = f(x)$$

$$\therefore g(2000) = f(2000) = \frac{2000-1}{2000} = \frac{1999}{2000}$$

답 ⑤

**18** **전략** 주어진 유리함수를  $y=f(x)$ 로 놓고  $x$ 에 대하여  $y$ 를 바꾸어 역함수를 구한다.

**풀이**  $y = \frac{-6x+4}{2x-1}$ 라 하고  $x$ 에 대하여 풀면

$$y(2x-1) = -6x+4$$

$$(2y+6)x = y+4 \quad \therefore x = \frac{y+4}{2y+6}$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면  $y = \frac{x+4}{2x+6}$

$$\therefore g(x) = \frac{x+4}{2x+6}$$

$$g(x) = \frac{x+4}{2x+6} = \frac{\frac{1}{2}(2x+6)+1}{2x+6}$$

$$= \frac{1}{2x+6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2(x+3)} + \frac{1}{2}$$

에서 함수  $y=g(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3, y=\frac{1}{2}$ 이므로 두 점근선의 교점의 좌표는

$$\left(-3, \frac{1}{2}\right) \quad \text{답} \left(-3, \frac{1}{2}\right)$$

**다른 풀이**  $f(x) = \frac{-6x+4}{2x-1} = \frac{-3(2x-1)+1}{2x-1}$

$$= \frac{1}{2x-1} - 3 = \frac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} - 3$$

에서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은  $x=\frac{1}{2}, y=-3$ 이므로 두 점근선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{1}{2}, -3\right) \text{이다.}$$

한편  $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수  $y=g(x)$ 의 그래프는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 역함수  $y=g(x)$ 의 그래프의 점근선은  $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선과 각각 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서  $y=g(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점은  $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 교점과 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 그 좌표는  $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ 이다.

**19** **전략** 주어진 연산의 정의에 따라 각 괄호 안을 먼저 계산한다.

**풀이**  $x \odot 1 = \frac{x+1}{x-1}, \frac{1}{x \odot 1} = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1}$

이므로

$$(x \odot 1) \odot \left(\frac{1}{x \odot 1}\right) = \frac{x+1}{x-1} \odot \frac{x-1}{x+1}$$

$$= \frac{\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)^2 - (x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1}{2x} \quad \text{답 ⑤}$$

**20** **전략** 함수  $y = \frac{k}{x-p} + q$  ( $k \neq 0$ )의 그래프는 점근선과 만나지 않고 점근선에 평행한 직선과 한 점에서 만난다.

**풀이** 조건 (가)에서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 직선  $y=-2$ 와 만나는 점의 개수와 직선  $y=2$ 와 만나는 점의 개수의 합은 1이다.

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가  $x$ 축과 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로 두 직선  $y=2, y=-2$  중 하나는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선이다.

이때 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선이 직선  $y=b$ 이므로

$$b=-2 \text{ 또는 } b=2 \quad \dots\dots ㉠$$

한편  $y = \frac{a}{x} + b$ 라 하면  $y-b = \frac{a}{x}$

$$\therefore x = \frac{a}{y-b}$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면  $y = \frac{a}{x-b}$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{a}{x-b}$$

조건 ㄴ)에서  $f^{-1}(2) = f(2) - 1$ 이므로

$$\frac{a}{2-b} = \frac{a}{2} + b - 1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$b \neq 2$ 이어야 하므로 ㉠에서  $b = -2$

이것을 ㉠에 대입하면  $\frac{a}{4} = \frac{a}{2} - 3$

$$\therefore a = 12$$

따라서  $f(x) = \frac{12}{x} - 2$ 이므로

$$f(8) = \frac{12}{8} - 2 = -\frac{1}{2} \quad \text{답 ①}$$

**21** **전략** 함수  $y = \frac{k}{x}$  ( $k > 0$ )의 그래프와 직선

$y = -x + 6$ 은 모두 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

**풀이** 오른쪽 그림과 같이 직선  $y = -x + 6$ 이  $x$ 축,  $y$ 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$$A(6, 0), B(0, 6)$$

이므로

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$$

함수  $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프와 직선  $y = -x + 6$ 은 모두 직선

$y = x$ 에 대하여 대칭이므로 삼각형 OAP와 삼각형 OQB의 넓이는 서로 같다.

이때 삼각형 OPQ의 넓이가 14이므로

$$\triangle OAP = \triangle OQB$$

$$= \frac{1}{2} (18 - 14) = 2$$

점 P의 좌표를  $(a, b)$ 라 하면

$$\triangle OAP = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot b = 2 \quad \therefore b = \frac{2}{3}$$

점 P는 직선  $y = -x + 6$  위의 점이므로

$$\frac{2}{3} = -a + 6 \quad \therefore a = \frac{16}{3}$$

또 점 P는 함수  $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$k = ab = \frac{32}{9} \quad \text{답 ①}$$

**22** **전략**  $k > 0$ ,  $k = 0$ ,  $k < 0$ 인 경우로 나누어  $h(k)$ 를 구한 후 조건을 만족시키는 정수  $k$ 의 값을 찾는다.

**풀이** (i)  $k > 0$ 일 때,

두 함수  $y = f(x)$ ,  
 $y = g(x)$ 의 그래프는  
오른쪽 그림과 같으므로  
교점 중  $x$ 좌표가 양수인  
점의 개수는 2이다.

$$\therefore h(k) = 2$$

(ii)  $k = 0$ 일 때,

두 함수  $y = f(x)$ ,  
 $y = g(x)$ 의 그래프는 오  
른쪽 그림과 같으므로  
교점 중  $x$ 좌표가 양수인  
점의 개수는 1이다.

$$\therefore h(k) = 1$$

(iii)  $k < 0$ 일 때,

두 함수  $y = f(x)$ ,  
 $y = g(x)$ 의 그래프는 오  
른쪽 그림과 같으므로  
교점 중  $x$ 좌표가 양수인  
점의 개수는 1이다.

$$\therefore h(k) = 1$$

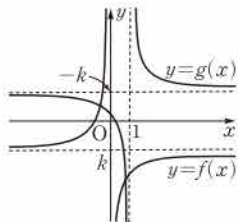
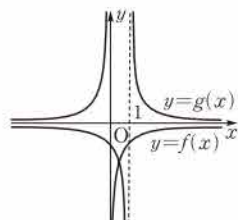
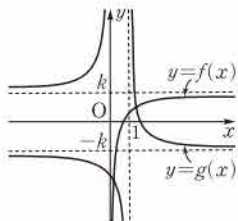
이상에서  $h(k) = \begin{cases} 1 & (k \leq 0) \\ 2 & (k > 0) \end{cases}$ 이므로 연속하는 세 정수

$k, k+1, k+2$ 가  $h(k) + h(k+1) + h(k+2) = 4$ 를  
만족시키려면  $h(k) = h(k+1) = 1$ ,  $h(k+2) = 2$ 이어  
야 한다.

즉  $k \leq 0$ ,  $k+1 \leq 0$ ,  $k+2 > 0$ 이므로

$$-2 < k \leq -1$$

따라서 정수  $k$ 의 값은  $-1$ 이다. 답 ②



# 13 무리함수

유제

본책 366~383쪽

$$\begin{aligned} 131-① \quad & \sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}} - \sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}} \\ &= \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2} - \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} \\ &= \left|a+\frac{1}{a}\right| - \left|a-\frac{1}{a}\right| \end{aligned}$$

이때  $0 < a < 1$ 에서  $a + \frac{1}{a} > 0$ ,  $a - \frac{1}{a} < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(a - \frac{1}{a}\right) \\ &= 2a \end{aligned}$$

답 2a

$$\begin{aligned} 131-② \quad & \sqrt{x^2-4} = \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4} \\ &= \sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2} \\ &= \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} = \left|a-\frac{1}{a}\right| \end{aligned}$$

이때  $0 < a < 1$ 에서  $a - \frac{1}{a} < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-4} &= -\left(a - \frac{1}{a}\right) = -a + \frac{1}{a} \\ \therefore \sqrt{x^2-4} + x &= \left(-a + \frac{1}{a}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{2}{a} \end{aligned}$$

답  $\frac{2}{a}$

$$\begin{aligned} 132-① \quad (1) \quad & \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}} \\ &= (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) + (\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}) \\ &+ (\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}) \\ &= \sqrt{x+3}-\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \\ &= \frac{4\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}} \\ &= \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}+2-\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \sqrt{2}+1 \end{aligned}$$

답 (1)  $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$  (2)  $\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$  (3)  $\sqrt{2}+1$

133-① (1) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면  
 $(x+2\sqrt{2}y)(\sqrt{2}+1) = (x+4y) + (x+2y)\sqrt{2}$   
 즉  $(x+4y) + (x+2y)\sqrt{2} = -7-3\sqrt{2}$ 이고  
 $x+4y$ ,  $x+2y$ 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+4y = -7, \quad x+2y = -3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=1, \quad y=-2$$

$$\therefore x^2+y^2=5$$

(2) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$(x-\sqrt{3})(y-\sqrt{3})=(xy+3)-(x+y)\sqrt{3}$$

즉  $(xy+3)-(x+y)\sqrt{3}=6-4\sqrt{3}$ 이고  $xy+3$ ,  $x+y$ 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{aligned} xy+3 &= 6, \quad x+y=4 \\ \therefore xy &= 3, \quad x+y=4 \\ \therefore x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ &= 16-6=10 \end{aligned}$$

답 (1) 5 (2) 10

**133-2**  $x^2+\sqrt{2}y^2-5x+4\sqrt{2}y-6-5\sqrt{2}=0$ 에서

$$x^2-5x-6+(y^2+4y-5)\sqrt{2}=0$$

$x^2-5x-6$ ,  $y^2+4y-5$ 는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{aligned} x^2-5x-6 &= 0, \quad y^2+4y-5=0 \\ \text{두 방정식을 풀면} \\ x &= -1 \text{ 또는 } x=6, \quad y=-5 \text{ 또는 } y=1 \\ \text{따라서 } x+y \text{의 최댓값은} \\ 6+1 &= 7 \end{aligned}$$

답 7

**134-1** (1) 주어진 함수의 그래프는  $y=\sqrt{ax}$  ( $a>0$ )의 그래프이므로  $x=1$ ,  $y=2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{a} \quad \therefore a=4 \\ \therefore y &= \sqrt{4x} \end{aligned}$$

(2) 주어진 함수의 그래프는  $y=-\sqrt{ax}$  ( $a<0$ )의 그래프이므로  $x=-1$ ,  $y=-2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} -2 &= -\sqrt{-a}, \quad \sqrt{-a}=2 \\ -a &= 4 \quad \therefore a=-4 \\ \therefore y &= -\sqrt{-4x} \end{aligned}$$

답 (1)  $y=\sqrt{4x}$  (2)  $y=-\sqrt{-4x}$

**134-2**  $y=\sqrt{-x}$  ( $x\leq 0$ )에서

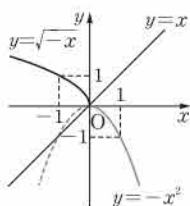
$$\begin{aligned} y^2 &= -x \\ \therefore x &= -y^2 \quad (y\geq 0) \end{aligned}$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면

$$y=-x^2 \quad (x\geq 0)$$

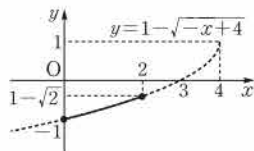
따라서  $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프는  $y=-x^2$  ( $x\geq 0$ )의 그래프를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



**135-1**  $y=1-\sqrt{-x+4}=1-\sqrt{-(x-4)}$

따라서 주어진 함수의 그래프는  $y=-\sqrt{-x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 4만큼,  $y$ 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 주어진 함수는

$$x=2 \text{ 일 때 최댓값 } 1-\sqrt{2},$$

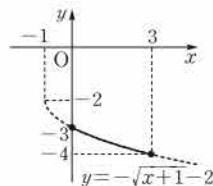
$$x=0 \text{ 일 때 최솟값 } -1$$

을 갖는다.

답 최댓값:  $1-\sqrt{2}$ , 최솟값:  $-1$

**135-2**  $y=-\sqrt{x+1}-2$

의 그래프는  $y=-\sqrt{x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-2$ 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때

$$y=-4 \text{ 일 때 } x=3,$$

$$y=-3 \text{ 일 때 } x=0$$

이므로 정의역은

$$\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$$

즉  $a=0$ ,  $b=3$ 이므로

$$a+b=3$$

답 3

**136-1** 주어진 함수의 그래프는  $y=a\sqrt{-x}$  ( $a<0$ )의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수식을

$$y=a\sqrt{-(x-1)}+1 \quad (a<0) \text{로 놓을 수 있다.}$$

이 함수의 그래프가 점  $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1=a\sqrt{-(0-1)}+1$$

$$-1=a+1 \quad \therefore a=-2$$

따라서 주어진 함수는

$$y=-2\sqrt{-(x-1)}+1=-2\sqrt{-x+1}+1$$

즉  $a=-2$ ,  $b=1$ ,  $c=1$ 이므로

$$a+b+c=0$$

답 0

**136-2**  $y=\sqrt{a-x}+2$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $-2$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동한 그래프의 함수식은

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{a-(x+2)}+2+b \\ &= \sqrt{a-2-x}+2+b \end{aligned}$$

이 식이  $y=\sqrt{1-x}+5$ 와 같아야 하므로

$$a-2=1, 2+b=5$$

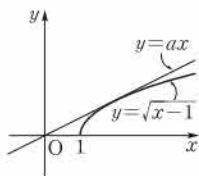
$$\therefore a=3, b=3$$

$$\text{답 } a=3, b=3$$

**Remark▶**

두 무리함수  $y=\sqrt{a(x-p)}+q$  ( $a \neq 0$ ),  
 $y=\sqrt{a'(x-p')}+q'$  ( $a' \neq 0$ )에서  $a=a'$ 이면 두 함수의  
 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있다.

**137-①**  $y=\sqrt{x-1}$ 의 그래프는  $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고,  $y=ax$ 는 원점을 지나 는 직선이므로 오른쪽 그림에 서  $y=\sqrt{x-1}$ 의 그래프와 직 선이 접하려면  $a>0$ 이어야 한다.



$ax=\sqrt{x-1}$ 의 양변을 제곱하면

$$a^2x^2=x-1$$

$$\therefore a^2x^2-x+1=0$$

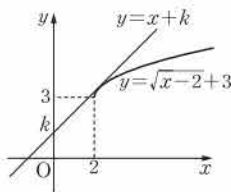
이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D=1-4a^2=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2} \quad (\because a>0)$$

$$\text{답 } \frac{1}{2}$$

**137-②**  $y=\sqrt{x-2}+3$ 의 그래프는  $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 2만큼,  $y$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고,  $y=x+k$ 는 기울기가 1이고  $y$ 절편이  $k$ 인 직선이다.



$y=\sqrt{x-2}+3$ 의 그래프와 직선  $y=x+k$ 가 접할 때,

$$\sqrt{x-2}+3=x+k \text{에서}$$

$$x+k-3=\sqrt{x-2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2+(2k-7)x+k^2-6k+11=0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D=(2k-7)^2-4(k^2-6k+11)=0$$

$$4k^2-28k+49-4k^2+24k-44=0$$

$$-4k+5=0 \quad \therefore k=\frac{5}{4}$$

따라서 주어진 함수의 그래프와 직선이 만나지 않으려면

$$k>\frac{5}{4}$$

$$\text{답 } k>\frac{5}{4}$$

**138-①** 함수  $y=-\sqrt{2x+1}-1$ 의 치역이

$\{y|y \leq -1\}$ 이므로 역함수의 정의역은  $\{x|x \leq -1\}$ 이다.

$y=-\sqrt{2x+1}-1$ 에서

$$\sqrt{2x+1}=-y-1, \quad 2x+1=(y+1)^2$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}(y+1)^2-\frac{1}{2}$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2} \quad (x \leq -1)$$

$$\text{답 } y=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2} \quad (x \leq -1)$$

**138-②**  $y=x^2-4x+7$ 이라 하면

$$y=(x-2)^2+3 \quad (x \geq 2)$$

에서 치역이  $\{y|y \geq 3\}$ 이므로 역함수의 정의역은  $\{x|x \geq 3\}$ 이다.

$y=(x-2)^2+3$ 에서

$$(x-2)^2=y-3, \quad x-2=\pm\sqrt{y-3}$$

그런데  $x \geq 2$ 이므로

$$x-2=\sqrt{y-3} \quad \therefore x=\sqrt{y-3}+2$$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y=\sqrt{x-3}+2 \quad (x \geq 3)$$

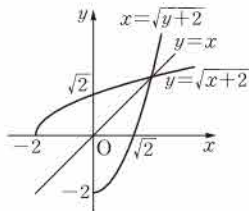
따라서  $a=1, b=-3, c=2, d=3$ 이므로

$$a+b+c+d=3$$

$$\text{답 } 3$$

**138-③** 함수  $y=\sqrt{x+2}$ 에서  $x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면  $x=\sqrt{y+2}$ 이므로 두 함수는 서로 역함수이다. 따라서 두 함수  $y=\sqrt{x+2}$ ,  $x=\sqrt{y+2}$ 의 그래프는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

즉 두 함수  $y=\sqrt{x+2}$ ,  
 $x=\sqrt{y+2}$ 의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수의 그래프의 교점은 함수  $y=\sqrt{x+2}$ 의 그래프와 직선  $y=x$ 의 교점과 같다.



$\sqrt{x+2}=x$ 의 양변을 제곱하면

$$x+2=x^2, \quad x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

그런데  $x>0$ 이므로

$$x=2, y=2$$

따라서 구하는 교점의 좌표는  $(2, 2)$ 이다.

$$\text{답 } (2, 2)$$

중단원 연습 문제

본책 384~387쪽

- 01  $2a-2c$       02  $-x+2$       03 5  
 04 99      05  $2-\sqrt{2}$       06 11      07 ⑤  
 08 ⑤      09 0      10 8      11  $-\frac{1}{2}$       12 3  
 13 ③      14  $0 < k < \frac{1}{2}$       15  $\frac{3}{8}$   
 16  $5+\sqrt{13}$       17 ②      18 10      19 ③  
 20 ②

01 **전략**  $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A & (A \geq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$  임을 이용한다.

**풀이**  $a-b > 0, b-c > 0, c-a < 0$ 이므로  

$$\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(b-c)^2} + \sqrt{(c-a)^2}$$

$$= |a-b| + |b-c| + |c-a|$$

$$= (a-b) + (b-c) - (c-a)$$

$$= 2a-2c$$
 답 2a-2c

02 **전략**  $\sqrt{A}$ 의 값이 실수하려면  $A \geq 0$ 이어야 함을 이용한다.

**풀이**  $\sqrt{x+2}$ 에서  $x+2 \geq 0$   
 $\therefore x \geq -2$  ..... ㉠  
 $\sqrt{2-x}$ 에서  $2-x \geq 0$   
 $\therefore x \leq 2$  ..... ㉡  
 ㉠, ㉡에서  $\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}$ 의 값이 실수가 되도록 하는  $x$ 의 값의 범위는  
 $-2 \leq x \leq 2$  ..... ①  
 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때,  $2x-5 < 0, x-3 < 0$ 이므로  
 $|2x-5| - \sqrt{x^2-6x+9}$   
 $= |2x-5| - \sqrt{(x-3)^2}$   
 $= |2x-5| - |x-3|$   
 $= -(2x-5) + (x-3)$   
 $= -x+2$  ..... ②  
답 -x+2

| 채점 기준                                                           | 비율   |
|-----------------------------------------------------------------|------|
| ① $\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}$ 의 값이 실수가 되도록 하는 $x$ 의 값의 범위를 구할 수 있다. | 50 % |
| ② 주어진 식을 간단히 할 수 있다.                                            | 50 % |

03 **전략** 분모를 유리화하여 간단히 정리한다.

**풀이** 
$$\frac{5}{1+\frac{1}{4-\sqrt{15}}} + \frac{5}{1+\frac{1}{4+\sqrt{15}}}$$

$$= \frac{5}{1+\frac{4+\sqrt{15}}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}}$$

$$+ \frac{5}{1+\frac{4-\sqrt{15}}{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}}$$

$$= \frac{5}{1+(4+\sqrt{15})} + \frac{5}{1+(4-\sqrt{15})}$$

$$= \frac{5}{5+\sqrt{15}} + \frac{5}{5-\sqrt{15}}$$

$$= \frac{5(5-\sqrt{15}) + 5(5+\sqrt{15})}{(5+\sqrt{15})(5-\sqrt{15})}$$

$$= \frac{50}{10} = 5$$
 답 5

04 **전략** 먼저  $x+y, xy$ 의 값을 구한 후 주어진 식을  $x+y, xy$ 를 포함한 식으로 변형한다.

**풀이**  $x+y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$   

$$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$= 10$$
  
 $xy = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1$   
 $\therefore x^2+xy+y^2 = (x+y)^2-xy$   

$$= 10^2-1=99$$
 답 99

05 **전략**  $x=a+\sqrt{b}$  꼴은  $x-a=\sqrt{b}$ 로 변형한 후 양변을 제곱한다.

**풀이**  $x=2-\sqrt{2}$ 에서  $x-2=-\sqrt{2}$   
 양변을 제곱하면  $(x-2)^2=2$   

$$x^2-4x+4=2$$
  

$$\therefore x^2-4x+2=0$$
 ..... ①  
 $x^4-4x^3+3x^2-3x+2$ 를  $x^2-4x+2$ 로 나누면 몫이  $x^2+1$ , 나머지가  $x$ 이므로  

$$x^4-4x^3+3x^2-3x+2$$

$$= (x^2-4x+2)(x^2+1) + x$$

$$= x (\because x^2-4x+2=0)$$

$$= 2-\sqrt{2}$$
 ..... ②  
답 2-√2

| 채점 기준                     | 비율   |
|---------------------------|------|
| ① $x^2-4x+2=0$ 임을 알 수 있다. | 40 % |
| ② 주어진 식의 값을 구할 수 있다.      | 60 % |

**06** [전략] 주어진 등식에  $x$ 의 값을 대입한 후 정리한다.

**풀이**  $x=2-\sqrt{3}$ 을  $ax^2+bx=\frac{1}{x}$ 에 대입하면

$$a(2-\sqrt{3})^2+b(2-\sqrt{3})=\frac{1}{2-\sqrt{3}} \quad \cdots \cdots ㉠$$

㉠의 좌변을 전개하여 정리하면

$$\begin{aligned} & a(2-\sqrt{3})^2+b(2-\sqrt{3}) \\ &= a(4-4\sqrt{3}+3)+b(2-\sqrt{3}) \\ &= (7a+2b)-(4a+b)\sqrt{3} \end{aligned}$$

㉠의 우변을 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-\sqrt{3}} &= \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= 2+\sqrt{3} \end{aligned}$$

즉

$$(7a+2b)-(4a+b)\sqrt{3}=2+\sqrt{3} \quad \cdots \cdots ㉡$$

이고  $7a+2b$ ,  $-(4a+b)$ 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$7a+2b=2, -(4a+b)=1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-4, b=15$$

$$\therefore a+b=11$$

$\cdots \cdots ㉢$

$\cdots \cdots ㉣$

답 11

| 채점 기준                                      | 비율   |
|--------------------------------------------|------|
| ① 주어진 등식에 $x=2-\sqrt{3}$ 을 대입한 후 정리할 수 있다. | 40 % |
| ② $a, b$ 의 값을 구할 수 있다.                     | 50 % |
| ③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.                      | 10 % |

**07** [전략] 주어진 함수를  $y=\sqrt{a(x-p)}+q$  ( $a \neq 0$ ) 꼴로 나타낸 후 평행이동 또는 대칭이동을 조사한다.

**풀이** ㄴ.  $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프는  $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ.  $y=-\sqrt{3-x}=-\sqrt{-(x-3)}$   
 $y=-\sqrt{3-x}$ 의 그래프는  $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후  $x$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ.  $y=\sqrt{x+1}-2$ 의 그래프는  $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-2$ 만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여  $y=\sqrt{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

**08** [전략] 주어진 함수를  $y=\sqrt{a(x-p)}+q$  ( $a \neq 0$ ) 꼴로 변형한다.

**풀이** ①  $6-2x \geq 0$ 에서  $x \leq 3$ 이므로 주어진 함수의 정의역은  $\{x|x \leq 3\}$ 이다.

②  $\sqrt{6-2x} \geq 0$ 에서  $y=\sqrt{6-2x}+1 \geq 1$ 이므로 주어진 함수의 치역은  $\{y|y \geq 1\}$ 이다.

③  $x=0$ 을  $y=\sqrt{6-2x}+1$ 에 대입하면  $y=\sqrt{6}+1$ 이므로  $y=\sqrt{6-2x}+1$ 의 그래프는 점  $(0, \sqrt{6}+1)$ 을 지난다.

④  $y=\sqrt{6-2x}+1=\sqrt{-2(x-3)}+1$ 이므로  $y=\sqrt{6-2x}+1$ 의 그래프는  $y=\sqrt{-2x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 3만큼,  $y$ 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤  $y=-\sqrt{2x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 3만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼 평행이동하면

$$y=-\sqrt{2(x-3)}-1$$

이것을 다시  $x$ 축에 대하여 대칭이동하면

$$-y=-\sqrt{2(x-3)}-1$$

$$\therefore y=\sqrt{2x-6}+1$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

**09** [전략] 그래프를 보고 주어진 식을

$f(x)=-\sqrt{a(x-p)}+q$  ( $a \neq 0$ ) 꼴로 나타낸 후 그래프가 지나는 한 점의 좌표를 함수식에 대입한다.

**풀이** 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $y=-\sqrt{ax}$  ( $a < 0$ )의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 4만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x)=-\sqrt{a(x-4)}+2$$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점  $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-2=-\sqrt{a(0-4)}+2$$

$$\therefore a=-4$$

따라서  $f(x)=-\sqrt{-4(x-4)}+2$ 이므로

$$f(3)=-\sqrt{-4(3-4)}+2=0$$

답 0

**10** [전략] 주어진 함수의 그래프를 평행이동한 함수식과  $y=x-3$ 을 연립하여 이차방정식을 세운다.

**풀이**  $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-4$ 만큼 평행이동하면

$$y=\sqrt{a(x-1)}-4 \quad (a \neq 0)$$

이 그래프와 직선  $y=x-3$ 이 접할 때,  
 $\sqrt{a(x-1)}-4=x-3$ 에서  $\sqrt{a(x-1)}=x+1$   
 양변을 제곱하면

$$ax-a=x^2+2x+1$$

$$\therefore x^2+(2-a)x+1+a=0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D=(2-a)^2-4(1+a)=0$$

$$a^2-8a=0, \quad a(a-8)=0$$

$$\therefore a=8 (\because a \neq 0)$$

답 8

**11** **전략**  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 임을 이용한다.

**풀이**  $(f \circ g)^{-1}(1) = (g^{-1} \circ f^{-1})(1)$   
 $= g^{-1}(f^{-1}(1))$

에서  $f^{-1}(1)=k$ 라 하면  $f(k)=1$ 이므로

$$\sqrt{k+4}-1=1$$

$$\sqrt{k+4}=2, \quad k+4=4$$

$$\therefore k=0$$

→ ①

즉  $(f \circ g)^{-1}(1)=g^{-1}(0)$ 에서  $g^{-1}(0)=m$ 이라 하면  
 $g(m)=0$ 이므로

$$\sqrt{2m+1}=0, \quad 2m+1=0$$

$$\therefore m=-\frac{1}{2}$$

→ ②

$$\therefore (f \circ g)^{-1}(1) = g^{-1}(f^{-1}(1))$$

$$= g^{-1}(0)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

→ ③

답 - $\frac{1}{2}$

| 채점 기준                                 | 비율   |
|---------------------------------------|------|
| ① $f^{-1}(1)$ 의 값을 구할 수 있다.           | 40 % |
| ② $g^{-1}(0)$ 의 값을 구할 수 있다.           | 40 % |
| ③ $(f \circ g)^{-1}(1)$ 의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

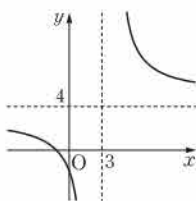
**12** **전략**  $k < 0$ 일 때와  $k > 0$ 일 때로 나누어 생각한다.

**풀이**  $k < 0$ 이면 함수  $y = \frac{k}{x-3} + 4$ 의 그래프가 제3  
 사분면을 지나지 않으므로  $k > 0$ 이어야 한다.

또 [그림 1]과 같이 그래프가  $y$   
 축과  $y < 0$ 인 부분에서 만날 때  
 에만 이 함수의 그래프가 모든  
 사분면을 지나므로

$$\frac{k}{0-3} + 4 < 0$$

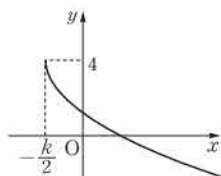
$$\therefore k > 12 \quad \dots\dots ①$$



[그림 1]

한편  $y = -\sqrt{2x+k} + 4 = -\sqrt{2(x+\frac{k}{2})} + 4$ 에서  
 $k < 0$ 이면 이 함수의 그래프가 제2사분면을 지나지 않  
 으므로  $k > 0$ 이어야 한다.

또 [그림 2]와 같이 그래프가  
 $y$ 축과  $y > 0$ 인 부분에서 만  
 날 때에만 이 함수의 그래프  
 가 제1사분면, 제2사분면,  
 제4사분면을 지나므로



[그림 2]

$$-\sqrt{k} + 4 > 0$$

$$\sqrt{k} < 4$$

$$\therefore 0 < k < 16$$

→ ②

①, ②에서  $12 < k < 16$

따라서 정수  $k$ 는 13, 14, 15의 3개이다.

답 3

**13** **전략** 주어진 그래프에서 점근선과  $y$ 절편을 이용  
 하여  $a, b, c$ 의 값의 부호를 구한다.

**풀이**  $y = \frac{bx+c}{x-a} = \frac{b(x-a)+ab+c}{x-a}$   
 $= \frac{ab+c}{x-a} + b$

의 그래프의 점근선의 방정식은  $x=a, y=b$ 이므로 주  
 어진 그래프에서  $a < 0, b > 0$

또  $y = \frac{bx+c}{x-a}$ 의 그래프가  $y$ 축과  $y < 0$ 인 부분에서 만  
 나므로

$$-\frac{c}{a} < 0 \quad \therefore c < 0 (\because a < 0)$$

따라서  $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프는  $y = a\sqrt{x}$  ( $a < 0$ )  
 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $-b$  ( $-b < 0$ )만큼,  $y$ 축  
 의 방향으로  $c$  ( $c < 0$ )만큼 평행이동한 것이므로 그래  
 프의 개형으로 옳은 것은 ③이다.

답 ③

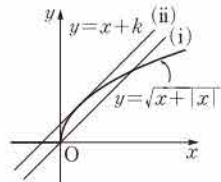
**14** **전략** 함수  $y = \sqrt{x+|x|}$ 의 그래프와 직선  
 $y=x+k$ 를 좌표평면 위에 나타내어 본다.

**풀이**  $x \geq 0$ 일 때,

$$y = \sqrt{x+|x|} = \sqrt{x+x} = \sqrt{2x}$$

$$x < 0 \text{ 일 때, } y = \sqrt{x+|x|} = \sqrt{x+(-x)} = 0$$

함수  $y = \sqrt{x+|x|}$ 의 그래프  
 와 직선  $y=x+k$ 를 좌표평  
 면 위에 나타내면 오른쪽 그  
 림과 같다.



(i) 직선  $y=x+k$ 가 원점을  
 지날 때,

$$k=0$$

→ ②

(ii)  $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선  $y=x+k$ 가 접할 때,

$\sqrt{2x}=x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$2x=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=0, \quad -2k+1=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{2} \quad \cdots \rightarrow \textcircled{4}$$

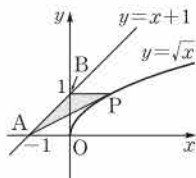
(i), (ii)에서  $0 < k < \frac{1}{2}$ 일 때, 함수  $y=\sqrt{x+|x|}$ 의 그래프와 직선  $y=x+k$ 는 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식  $\sqrt{x+|x|}=x+k$ 는 서로 다른 세 실근을 갖는다.  $\cdots \rightarrow \textcircled{4}$

$$\textcircled{4} \quad 0 < k < \frac{1}{2}$$

| 채점 기준                                                         | 비율   |
|---------------------------------------------------------------|------|
| ① $y=\sqrt{x+ x }$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 를 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.      | 30 % |
| ② 직선 $y=x+k$ 가 원점을 지날 때 $k$ 의 값을 구할 수 있다.                     | 20 % |
| ③ 함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 접할 때 $k$ 의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ④ $k$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.                                       | 20 % |

**15** **전략** 밑변의 길이가 일정한 삼각형의 넓이는 삼각형의 높이가 최소일 때 최소가 된다.

**풀이** 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABP에서 선분 AB를 밑변으로 생각하면 점 P에서 직선 AB에 이르는 거리가 높이가 된다.



따라서 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행한 직선이 함수  $y=\sqrt{x}$ 의 그래프에 접할 때의 접점이 P일 때, 삼각형 ABP의 넓이는 최소가 된다.

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식이  $y=x+1$ 이므로 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행하면서  $y=\sqrt{x}$ 의 그래프와 접하는 직선의 방정식을

$$y=x+k \quad (k \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$x+k=\sqrt{x}$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2+2kx+k^2=x$$

$$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D=(2k-1)^2-4k^2=0, \quad -4k+1=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{4}$$

직선  $y=x+\frac{1}{4}$  위의 한 점  $(0, \frac{1}{4})$ 과 직선  $y=x+1$ ,

즉  $x-y+1=0$  사이의 거리는

$$\frac{|0-\frac{1}{4}+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

이고, 밑변 AB의 길이는

$$\sqrt{(-1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은

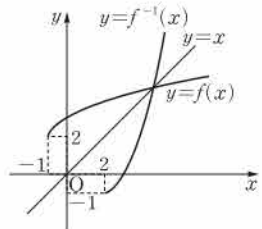
$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{3}{8} \quad \textcircled{4}$$

**16** **전략** 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수  $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

**풀이** 주어진 그래프에서  $a=1, b=2$ 이므로

$$f(x)=\sqrt{x+1}+2$$

함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수  $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=x$ 의 교점과 같다.



$\sqrt{x+1}+2=x$ 에서

$$\sqrt{x+1}=x-2$$

양변을 제곱하면

$$x+1=(x-2)^2, \quad x^2-5x+3=0$$

$$\therefore x=\frac{5+\sqrt{13}}{2} \quad (\because x \geq 2)$$

따라서 교점의 좌표가  $(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2})$ 이므로

$$p+q=5+\sqrt{13}$$

$$\textcircled{4} \quad 5+\sqrt{13}$$

**17** **전략** 주어진 식을 통분하여 간단히 정리한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad & \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} \\ &= \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1-x} \\ &= 2\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은

$$2\sqrt{8+1}=6$$

$$\textcircled{4} \quad \textcircled{2}$$

**18 [전략]** 두 직선 OA, OB와  $y=f(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같음을 이용한다.

**[풀이]** 구하는 넓이를 S라 하자.

함수  $y=\sqrt{x}$ 의 그래프는 함수  $y=x^2$  ( $x \leq 0$ )의 그래프를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 후 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하고 이때 점 A는 점 B로 이동한다.

즉 오른쪽 그림에서  $S'$ 의 영역과  $S''$ 의 영역의 넓이는 서로 같으므로 넓이 S는 삼각형 AOB의 넓이와 같다.

삼각형 AOB에서 밑변을  $\overline{AB}$ 라 하면 높이는 원점과 직선  $x+3y-10=0$  사이의 거리이다.

따라서

$$\overline{AB} = \sqrt{\{4 - (-2)\}^2 + \{2 - 4\}^2} = 2\sqrt{10}$$

이고, 높이는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10}$$

이므로

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$$

답 10

**19 [전략]** 두 방정식  $f(x)=a$ ,  $f(x)=\beta$ 의 실근에 따라 경우를 나누어 실근  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 의 값과 상수  $a$ ,  $b$ 의 값을 구한다.

**[풀이]**  $\{f(x)-a\}\{f(x)-\beta\}=0$ 에서

$$f(x)=a \text{ 또는 } f(x)=\beta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (가)에서 방정식  $\textcircled{1}$ 의 실근은  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 뿐이고 조건 (나)에서  $f(\alpha)=a$ ,  $f(\beta)=\beta$ 이므로 방정식  $f(x)=a$ 의 실근이  $\alpha$ ,  $\gamma$ 이고 방정식  $f(x)=\beta$ 의 실근이  $\beta$ 뿐이거나 방정식  $f(x)=a$ 의 실근이  $\alpha$ 뿐이고 방정식  $f(x)=\beta$ 의 실근이  $\beta$ ,  $\gamma$ 이다.

(i) 방정식  $f(x)=a$ 의 실근이  $\alpha$ ,  $\gamma$ 이고 방정식

$f(x)=\beta$ 의 실근이  $\beta$ 뿐일 때,

함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=a$ 는 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의  $x$ 좌표는  $\alpha$ ,  $\gamma$ 이다.

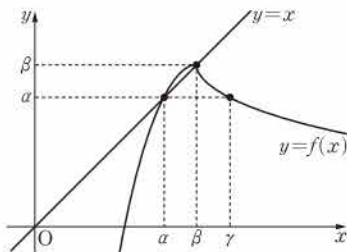
또 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=\beta$ 는 한 점에서 만나고 이 점의  $x$ 좌표는  $\beta$ 이다.

이때 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축에 평행한 직선이 한 점에서 만나려면 만나는 점의 좌표가  $(a, b)$ 이어야 하므로

$$a=b=\beta$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

한편  $f(\alpha)=a$ ,  $f(\beta)=\beta$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=x$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다. 따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$f(x)=x \text{에서 } -(x-a)^2+b=x$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } -(x-\beta)^2+\beta=x$$

$$(x-\beta)^2+(x-\beta)=0$$

$$(x-\beta)(x-\beta+1)=0$$

$$\therefore x=\beta-1 \text{ 또는 } x=\beta$$

$$f(\alpha)=a \text{이고 } \alpha \neq \beta \text{이므로}$$

$$\alpha=\beta-1$$

$$\text{또 } f(\gamma)=a \text{이고 } \gamma > \beta=a \text{이므로}$$

$$-\sqrt{\gamma-a}+b=a$$

$$-\sqrt{\gamma-\beta}+\beta=\beta-1$$

$$\sqrt{\gamma-\beta}=1 \quad \therefore \gamma=\beta+1$$

$$\text{이때 } \alpha+\beta+\gamma=15 \text{이므로}$$

$$\beta-1+\beta+\beta+1=15 \quad \therefore \beta=5$$

$$\therefore \alpha=4, \gamma=6$$

$$\therefore a=b=5$$

(ii) 방정식  $f(x)=a$ 의 실근이  $\alpha$ 뿐이고 방정식

$f(x)=\beta$ 의 실근이  $\beta$ ,  $\gamma$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면  $a=b=a$ 이고

$$\beta=a-1, \gamma=a+1 \text{이므로}$$

$$a=5, \beta=4, \gamma=6$$

$$\therefore a=b=5$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} -(x-5)^2+5 & (x \leq 5) \\ -\sqrt{x-5}+5 & (x > 5) \end{cases}$$

$$\therefore f(\alpha+\beta)=f(9)$$

$$=-\sqrt{9-5}+5$$

$$=3$$

답 ③

**20 [전략]** 먼저  $f(x)$ 의 역함수를 구하여  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 관계를 파악한다.

**[풀이]** 함수  $f(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k$ 는 집합  $\{x|x \geq 0\}$ 에서

집합  $\{y|y \geq \frac{1}{5}k\}$ 로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}k$ 라 하고  $x$ 에 대하여 풀면

$$\frac{1}{5}x^2 = y - \frac{1}{5}k, \quad x^2 = 5y - k$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{5y - k}$$

그런데  $x \geq 0$ 이므로  $x = \sqrt{5y - k}$

$x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면  $y = \sqrt{5x - k}$

즉 함수  $g(x) = \sqrt{5x - k}$ 는  $f(x)$ 의 역함수이다.

따라서 함수  $y = f(x)$ 의

그래프와 그 역함수

$y = g(x)$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같이 직선

$y = x$ 에 대하여 대칭이

므로 두 함수  $y = f(x)$ ,

$y = g(x)$ 의 그래프의 교

점은  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}k = x \text{에서}$$

$$x^2 - 5x + k = 0$$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 두 근을  $\alpha, \beta$ , 판별식을  $D$ 라 하면

$$\alpha\beta = k \geq 0, \quad D = (-5)^2 - 4k > 0$$

$$\therefore 0 \leq k < \frac{25}{4}$$

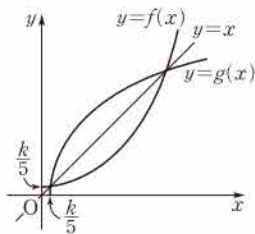
따라서 정수  $k$ 는 0, 1, 2, ..., 6의 7개이다.

답 ②

**Remark▶**

계수가 실수인 이차방정식  $ax^2 + bx + c = 0$ 이 음이 아닌 서로 다른 두 실근  $\alpha, \beta$ 를 가질 때, 판별식을  $D$ 라 하면

$$\Rightarrow D > 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta \geq 0$$





M

E

M

O