

일품 최상위의 품격 확률과 통계

정답 및 풀이

◆ 빠른 정답 찾기	2~3
◆ 자세한 풀이	
Ⅰ 순열과 조합	4
Ⅱ 확률	22
Ⅲ 통계	45

I. 순열과 조합

I -1. 여러 가지 순열

본책 8~9 쪽	01 12	02 ②	03 30
04 ⑤	05 6번	06 60	07 90
08 ④	09 ④	10 ④	11 ③
12 78			
본책 10~11 쪽	01 288	02 ③	03 ④
04 9	05 ④	06 150	07 54400
08 4200	09 ②	10 55	11 ③
12 ③	13 138		
본책 12~13 쪽	01 864	02 315	03 ①
04 ③	05 18	06 ⑤	07 ④
08 72	09 ⑤	10 19	11 ③
12 156			

I -2. 중복조합과 이항정리

본책 14~15 쪽	01 71	02 30	03 ④
04 ③	05 ③	06 2	07 ③
08 127	09 ④	10 ②	11 30
본책 16~18 쪽	01 ④	02 ⑤	03 31
04 36	05 7	06 ①	07 36
08 ③	09 21	10 ①	11 ②
12 56	13 3	14 2	15 ③
16 33	17 ④	18 304	19 ①
20 90			
본책 19~20 쪽	01 ②	02 22	03 35
04 19	05 628	06 ②	07 ⑤
08 ④	09 ①	10 10	11 128
12 63	13 9	14 ①	
본책 21~24 쪽	01 ③	02 ②	03 ⑤
04 ③	05 ⑤	06 ③	07 ④
08 ②	09 ②	10 ②	11 ①
12 ⑤	13 ③	14 ①	15 ①
16 ④	17 ⑤	18 120	19 256
20 960	21 164	22 116	23 14
24 56			
본책 25 쪽	01 ③	02 30	03 ④
04 ②			

II. 확률

II -1. 확률의 뜻과 활용

본책 28~31 쪽	01 ②	02 ⑤	03 32
04 ④	05 $\frac{1}{15}$	06 ③	07 ②
08 ③	09 225	10 $\frac{11}{18}$	11 ③
12 $\frac{2}{3}$	13 ③	14 ⑤	15 7
16 ③	17 ③	18 $\frac{1}{2}$	19 ③
20 ④	21 ④	22 $\frac{11}{12}$	
본책 32~35 쪽	01 19	02 11	03 ③
04 $\frac{1}{15}$	05 ④	06 $\frac{1}{5}$	07 ②
08 ③	09 $\frac{5}{21}$	10 113	11 ③
12 $\frac{1}{2}$	13 537	14 ④	15 $\frac{2}{3}$
16 ②	17 ②	18 $\frac{1}{3}$	19 $\frac{5}{8}$
20 ⑤	21 ③	22 7	23 $\frac{37}{45}$
24 ①			
본책 36 쪽	01 42	02 ③	03 ④
04 ③	05 131	06 ③	

II -2. 조건부확률

본책 38~39 쪽	01 $\frac{9}{19}$	02 $\frac{2}{3}$	03 $\frac{2}{3}$
04 ②	05 $\frac{13}{30}$	06 ③	07 5
08 ③	09 ⑤	10 ②	11 1120
본책 40~42 쪽	01 ④	02 ④	03 $\frac{3}{5}$
04 ③	05 ②	06 39	07 $\frac{73}{648}$
08 ②	09 9	10 ②	11 $\frac{1}{4}$
12 ②	13 ③	14 $\frac{8}{27}$	15 $\frac{9}{128}$
16 $\frac{1}{8}$	17 ①		
본책 43~44 쪽	01 40	02 ④	03 54
04 29	05 86	06 ④	07 ①
08 55	09 ③	10 ②	

본책 45~49 쪽

01 ③	02 ②	03 ④
04 ③	05 ④	06 ④
07 ①	08 ④	
09 ④	10 ④	11 ②
12 ③	13 ①	
14 ④	15 ⑤	16 ②
17 ③	18 ③	
19 ④	20 7	21 $\frac{1}{1920}$
22 $\frac{233}{550}$	23 $\frac{5}{18}$	
24 $\frac{11}{32}$	25 5	26 20
27 11	28 $\frac{5}{12}$	

본책 50 쪽

01 ③	02 ②	03 31
04 ⑤		

Ⅲ. 통계

Ⅲ-1. 확률변수와 확률분포

본책 52~54 쪽

01 $\frac{5}{16}$	02 ④	03 $\frac{1}{8}$
04 ②	05 ⑤	06 ⑤
07 1800원	08 ③	
09 ③	10 $\frac{13}{4}$	11 ②
12 ④	13 6	
14 ④	15 ④	16 ⑤

본책 55~57 쪽

01 ③	02 ③	03 ⑤
04 ③	05 $\frac{1}{4}$	06 $\frac{3}{2}$
07 ④	08 ④	
09 $\frac{\sqrt{105}}{6}$	10 ①	11 30
12 11	13 ②	
14 ③		

본책 58 쪽

01 ③	02 ①	03 ④
04 5		

Ⅲ-2. 이항분포와 정규분포

본책 60~62 쪽

01 15	02 ④	03 120
04 $a-2b$	05 ②	06 $\frac{37}{2}$
07 ③	08 7	
09 28.5	10 ③	11 ③
12 21	13 20시간	
14 ③	15 0.9332	16 ②

본책 63~66 쪽

01 ③	02 $\frac{51}{2}$	03 220
04 ④	05 ③	06 ②
07 36	08 0.5	
09 ③	10 ④	11 0.3753
12 ⑤	13 ②	
14 240 g	15 ⑤	16 ②
17 ②	18 228	
19 0.16		

본책 67 쪽

01 ③	02 ⑤	03 ③
04 ④		

Ⅲ-3. 통계적 추정

본책 68~69 쪽

01 ②	02 $\frac{5}{6}$	03 ④
04 ③	05 23	06 ⑤
07 ⑤	08 62	
09 $68.75 \leq m \leq 71.25$	10 ①	

본책 70~71 쪽

01 $\frac{19}{20}$	02 ①	03 $\frac{27}{8}$
04 300	05 18	06 ②
07 0.0548	08 30	
09 ②	10 ③	11 ④
12 858		

본책 72 쪽

01 ④	02 9	03 ③
04 83		

본책 73~77 쪽

01 ④	02 ③	03 ①
04 ③	05 ④	06 ③
07 ②	08 ⑤	
09 ③	10 ②	11 ②
12 ④	13 ①	
14 ⑤	15 ②	16 ④
17 ②	18 ④	
19 $\frac{1}{4}$	20 $\frac{2}{3}$	21 $\frac{13}{2}$
22 $2\sqrt{6}$	23 0.07	
24 0.8413	25 400	

본책 78 쪽

01 ③	02 $\frac{53}{4}$	03 ④
04 900		

I 순열과 조합

I -1. 여러 가지 순열

개념 & 핵심 기술

본책 8~9쪽

01 북한의 대표의 자리가 결정되면 한국의 대표의 자리는 마주 보는 자리에 고정된다.

한편 북한과 중국의 대표를 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

이때 북한과 중국의 대표가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \cdot 2 = 12$$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 한국과 북한의 대표가 마주 보게 앉은 후에 중국의 대표가 북한의 대표와 이웃하게 앉는 경우의 수는

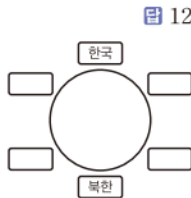
$${}_2C_1 = 2$$

나머지 3개의 자리에 대표 3명이 앉는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \cdot 6 = 12$$



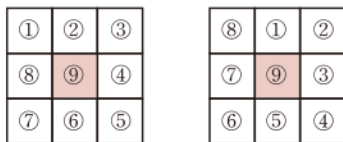
답 12

서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수
 $\Rightarrow (n-1)!$

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
 $= (\text{모든 경우의 수}) - (\text{사건 A가 일어나지 않는 경우의 수})$

02 가운데 정사각형을 칠하는 경우의 수는 9이다.

이때 나머지 8가지 색을 원형으로 배열하여 칠하는 한 가지 경우에 대하여 정사각형에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$$9 \cdot (8-1)! \cdot 2 = 18 \cdot 7!$$

답 ②

8가지 색을 원형으로 배열하여 칠하는 원순열의 수

03 정육면체의 한 밑면에 한 가지 색을 칠하면 다른 한 밑면을 칠하는 경우의 수는 5이다.

또 옆면을 칠하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$5 \cdot 6 = 30$$

답 30

04 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_6 = 4^6 = 2^{12}$$

답 ⑤

05 부호를 n 번 이용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_n = 2^n$$

이므로 부호를 n 번 이하로 이용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_1 + {}_2\Pi_2 + {}_2\Pi_3 + \cdots + {}_2\Pi_n \\ = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

$n=5$ 일 때,

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62 < 100$$

$n=6$ 일 때,

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 126 > 100$$

이므로 부호를 최소한 6번 이용해야 한다.

답 6번

1등급 비밀노트 >>>

신호를 만들 때 부호를 n 번 모두 이용한다는 조건이 없으므로 $2^n \geq 100$ 으로 생각하지 않도록 주의한다.

06 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

한 개의 숫자로만 이루어진 세 자리 자연수는

$$111, 222, 333, 444 \text{의 } 4 \text{개}$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$64 - 4 = 60$$

답 60

07 (i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

2, 2, 3, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

1, 2, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$$30 + 60 = 90$$

답 90

08 a 를 c 로 바꾸어 생각하여 7개의 문자 b, c, c, c, d, d, d 를 일렬로 나열한 후 가운데 c 를 a 로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3! \cdot 3!} = 140$$

답 ④

09 b, f 를 a 로 바꾸어 생각하여 6개의 문자 a, a, a, c, d, e 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!} = 120$$

이때 두 번째 a 와 세 번째 a 를 b 또는 f 로 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \cdot 2 = 240$$

답 ④

10 오른쪽 그림과 같이 P 지점을 잡으면 A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \cdot 10 = 60$$

답 ④

11 주어진 도로망에서 A에서 B까지 최단 거리로 이동하려면 → 또는 ↗의 방향으로 이동해야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

답 ③

12 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$$

A → C → D → B로 가는 경우의 수는

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{4!}{2!} = 12$$

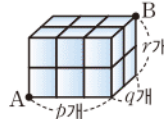
따라서 구하는 경우의 수는

$$90 - 12 = 78$$

답 78

정사각형이 아닌 직사각형 모양의 탁자에 n 명의 사람이 둘러앉는 경우의 수
 $\Rightarrow (n-1)! \times \frac{n}{2}$

나머지 두 쌍의 마주 보는 면에 적힌 숫자가 2, 5와 3, 4인 경우



위의 그림과 같이 정육면체 여러 개를 쌓아 올려 만든 직육면체에서 작은 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수
 $\Rightarrow \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$

02 정육각형 모양의 탁자에서는 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 서로 다른 경우가 2가지씩 존재하므로

$$b = 2a$$

또 직사각형 모양의 탁자에서는 원탁에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 서로 다른 경우가 6가지씩 존재하므로

$$c = 6a$$

$$\therefore \frac{bc}{a^2} = \frac{2a \cdot 6a}{a^2} = 12$$

답 ③

◀참고 $a = 11!, b = 2 \cdot 11!, c = 6 \cdot 11!$

03 1부터 6까지의 자연수 중 두 수의 합이 7이 되는 경우는

1, 6 또는 2, 5 또는 3, 4

(i) 한 쌍의 마주 보는 면에 적힌 숫자의 합이 7인 경우

마주 보는 한 쌍의 면에 적힌 숫자가 1, 6인 경우 나머지 4개의 면에 수를 적는 경우의 수는

$$(4-1)! = 2 = 4$$

한 쌍의 면에 적힌 숫자가 2, 5 또는 3, 4인 경우에도 각각 4가지씩 존재하므로 그 경우의 수는 $3 \cdot 4 = 12$

(ii) 두 쌍의 마주 보는 면에 적힌 숫자의 합이 7인 경우

나머지 한 쌍의 마주 보는 면에 적힌 숫자의 합도 7이 되므로 한 쌍을 고정시키고 나머지 4개의 면에 두 쌍의 숫자를 적는 경우의 수는 2

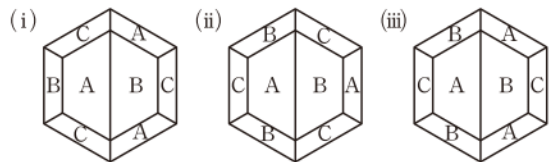
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12 + 2 = 14$$

답 ④

◀참고 정육면체의 한 면을 고정시켰을 때, 옆면에 숫자를 적는 경우의 수는 원순열의 수를 이용하여 구할 수 있다.

04 가운데 부분에 칠할 2가지 색을 정했을 때 인접한 영역이 서로 다른 색이 되도록 각 영역을 칠하는 경우는 다음 그림과 같이 3가지가 있다.



A, B에 칠할 색을 정하는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

이때 (ii)의 경우는 B, A를 바꾸고 회전하였을 때 (i)과 일치하고, (iii)의 경우는 회전하였을 때 가운데 부분에 칠한 색이 A, B인 경우와 B, A인 경우가 일치하므로 각 경우에 회전했을 때 일치하는 경우가 2가지씩이다.

$$\text{따라서 구하는 경우의 수는 } \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

답 9

05 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이므로 X 의 원소 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 7개 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 X 의 원소 0, 1, 2, 3에 대응시키면 $-3, -2, -1$ 의 함숫값도 정해진다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$${}_7\Pi_4 = 7^4$$

답 ④

1등급을 위한 고난도 문제

본책 10~11쪽

01 조건 (가)에서 여자 4명은 이웃하게 앉아야 하므로 여자 4명을 한 사람으로 생각하여 이 사람과 특정한 남자 2명을 제외한 남자 2명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(3-1)! = 2$$

→ ①

여자끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$4! = 24$$

→ ②

조건 (나)에서 특정한 남자 2명이 이웃하게 앉은 여자 4명과 남자 2명 사이의 3개의 자리 중 2개의 자리에 앉는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

→ ③

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \cdot 24 \cdot 6 = 288$$

→ ④

답 288

채점 기준	비율
① 여자 4명을 한 사람으로 생각하여 남자 2명과 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
② 여자끼리 자리를 바꾸는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
③ 특정한 남자 2명이 자리에 앉는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
④ 답을 구할 수 있다.	20%

$$\begin{aligned} f(-1) &= f(1), \\ f(-2) &= f(2), \\ f(-3) &= f(3) \end{aligned}$$

06 조건 (나)에서

$$A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c = \{2, 3, 5\} \text{이므로}$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 4, 6, 7, 8\}$$

이때 세 집합 A, B, C 는 공집합이 아니므로 조건 (가)에서 구하는 순서쌍의 개수는 집합 $X = \{1, 4, 6, 7, 8\}$ 에서 집합 $Y = \{A, B, C\}$ 로의 함수 중 공역과 치역이 같은 함수의 개수와 같다.

집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수는

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 중 치역의 원소의 개수가 1인 함수의 개수는

$$3$$

집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 중 치역의 원소의 개수가 2인 함수의 개수는

$$3({}_2\Pi_5 - 2) = 3(2^5 - 2) = 90$$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B, C) 의 개수는

$$243 - (3 + 90) = 150$$

답 150

다른 풀이 $A \cup B \cup C = \{1, 4, 6, 7, 8\}$ 이므로 조건 (가)에서 세 집합 A, B, C 는 집합 $\{1, 4, 6, 7, 8\}$ 의 서로소인 부분집합이다.

5개의 원소를 세 개의 집합으로 나눌 때, 각 집합의 원소의 개수는

$$1, 1, 3 \text{ 또는 } 1, 2, 2$$

(i) 원소를 1개, 1개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 10$$

세 집합 A, B, C 에 배정하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 순서쌍 (A, B, C) 의 개수는 $10 \cdot 6 = 60$

(ii) 원소를 1개, 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 15$$

세 집합 A, B, C 에 배정하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 순서쌍 (A, B, C) 의 개수는 $15 \cdot 6 = 90$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$60 + 90 = 150$$

드모르간의 법칙

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$$\textcircled{1} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\textcircled{2} (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

• 치역의 원소 2개를 택하는 경우의 수

• 치역의 원소의 개수가 1인 경우의 수

• A, B, C 는 공집합이 아니므로 각 집합의 원소의 개수는 1 이상이어야 한다.

• 같은 경우가 2!가지씩 존재하므로 2!로 나누어야 한다.

수 있으므로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$$4 \cdot {}_5\Pi_2 = 4 \cdot 5^2 = 100$$

→ ①

100개의 자연수 중에서 백의 자리의 숫자가 2, 4, 6, 8인 자연수가 각각 25개씩이므로 백의 자리의 합은

$$(2 + 4 + 6 + 8) \cdot 25 \cdot 100 = 50000$$

100개의 자연수 중에서 십의 자리의 숫자가 0, 2, 4, 6, 8인 자연수가 각각 20개씩이므로 십의 자리의 합은

$$(0 + 2 + 4 + 6 + 8) \cdot 20 \cdot 10 = 4000$$

100개의 자연수 중에서 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4, 6, 8인 자연수가 각각 20개씩이므로 일의 자리의 합은

$$(0 + 2 + 4 + 6 + 8) \cdot 20 = 400$$

→ ②

따라서 구하는 자연수의 총합은

$$50000 + 4000 + 400 = 54400$$

→ ③

답 54400

채점 기준	비율
① 세 자리 자연수의 개수를 구할 수 있다.	30%
② 백의 자리의 합, 십의 자리의 합, 일의 자리의 합을 각각 구할 수 있다.	50%
③ 세 자리 자연수의 총합을 구할 수 있다.	20%

1등급 비밀노트 >>>

100개의 자연수 중 $2\square\square, 4\square\square, 6\square\square, 8\square\square$ 꼴의 자연수의 개수가 모두 같으므로 백의 자리의 숫자가 2, 4, 6, 8인 자연수는 각각 $100 \div 4 = 25$ (개)이다.

또 100개의 자연수 중 $\square 0\square, \square 2\square, \square 4\square, \square 6\square, \square 8\square$ 꼴의 자연수의 개수가 모두 같으므로 십의 자리의 숫자가 0, 2, 4, 6, 8인 자연수는 각각 $100 \div 5 = 20$ (개)이다.

08 택시를 a , 화물차를 b , 비어 있는 주차 구역을 c 로 생각하면 구하는 경우의 수는 10개의 문자 $a, a, a, a, b, b, b, c, c, c$ 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = 4200$$

답 4200

09 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

(i) 각 자리의 숫자의 합이 6인 경우

1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 2, 2이므로 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 4 + 6 = 10$$

(ii) 각 자리의 숫자의 합이 9인 경우

1, 2, 3, 3이므로 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$$10 + 12 = 22$$

답 ②

10 조건 (가), (나), (다)에서 앞에서 첫 번째, 두 번째, 세 번째에 올 수 있는 숫자는 2와 4뿐이다.

→ ①

1등급 비밀노트 >>>

(1) 분할의 수

서로 다른 n 개를 p 개, q 개, r 개($p+q+r=n$)의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$$\textcircled{1} p, q, r \text{가 모두 다른 수일 때, } {}_nC_p \cdot {}_{n-p}C_q \cdot {}_rC_r$$

$$\textcircled{2} p, q, r \text{ 중 어느 두 수가 같을 때, } {}_nC_p \cdot {}_{n-p}C_q \cdot {}_rC_r \cdot \frac{1}{2!}$$

$$\textcircled{3} p, q, r \text{가 모두 같은 수일 때, } {}_nC_p \cdot {}_{n-p}C_q \cdot {}_rC_r \cdot \frac{1}{3!}$$

(2) 분배의 수

n 묶음으로 분할하여 n 명에게 분배하는 경우의 수는

$$(n \text{묶음으로 분할하는 경우의 수}) \cdot n!$$

07 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 4개이고, 십의 자리와 일의 자리에는 0, 2, 4, 6, 8이 중복하여 올

(i) 2448□□□□□인 경우

나머지 6, 6, 6, 8, 8, 8의 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

(ii) 4248□□□□□인 경우

나머지 6, 6, 6, 8, 8, 8의 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

(iii) 4426□□□□□인 경우

나머지 6, 6, 8, 8, 8, 8의 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$20 + 20 + 15 = 55$$

→ ②

→ ③

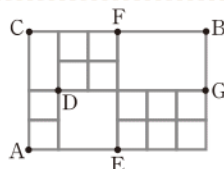
답 55

채점 기준	비율
① 앞에서 첫 번째, 두 번째, 세 번째에 올 수 있는 숫자를 구할 수 있다.	30%
② 앞에서 네 번째까지의 숫자에 따라 경우를 나누어 각 경우의 수를 구할 수 있다.	50%
③ 답을 구할 수 있다.	20%

1등급 비밀노트 >>>

6 다음에는 2나 4가 올 수 없고, 8 다음에도 2나 4가 올 수 없으므로 2와 4는 항상 6과 8 앞에 놓여야 한다. 따라서 2, 4가 앞에서 첫 번째, 두 번째, 세 번째 자리에 놓여야 한다.

11 오른쪽 그림과 같이 다섯 지점 C, D, E, F, G를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → C → F → B로 가는 경우의 수

$$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

(ii) A → D → F → B로 가는 경우의 수

$$\frac{3!}{2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 1 = 18$$

(iii) A → D → G → B로 가는 경우의 수

$$\frac{3!}{2!} \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

(iv) A → E → F → B로 가는 경우의 수

$$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

(v) A → E → G → B로 가는 경우의 수

$$1 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 1 = 10$$

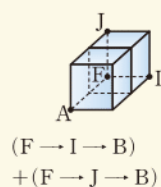
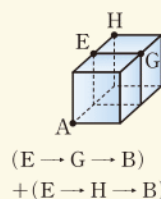
이상에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 18 + 3 + 1 + 10 = 33$$

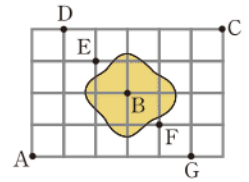
→ ③

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 가기 위해서는 C 또는 D 또는 E 또는 F를 반드시 지나야 한다.

길이 연결되어 있지 않거나 장애물이 있을 때 최단 거리로 가는 경우의 수
→ 반드시 거쳐야 하는 점을 잡아 각각의 경로를 따라 최단 거리로 가는 경우의 수를 구한다.



12 오른쪽 그림과 같이 네 지점 D, E, F, G를 잡으면 A에서 색칠한 부분을 지나지 않고 C까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → D → C로 가는 경우의 수

$$\frac{5!}{4!} \cdot 1 = 5$$

(ii) A → E → C로 가는 경우의 수

$$\frac{4!}{3!} \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(iii) A → F → C로 가는 경우의 수

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{4!}{3!} = 4$$

(iv) A → G → C로 가는 경우의 수

$$1 \cdot \frac{5!}{4!} = 5$$

이상에서 A에서 색칠한 부분을 지나지 않고 C까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$5 + 4 + 4 + 5 = 18$$

이때 C에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

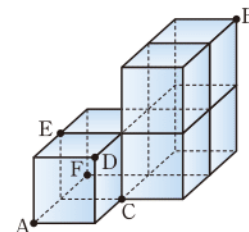
$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$18 \cdot 10 = 180$$

→ ③

13 아래 그림과 같이 네 점 C, D, E, F를 잡으면 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) A → C → B로 가는 경우의 수

$$2 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 60$$

(ii) A → D → B로 가는 경우의 수

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{4!}{2!} = 24$$

(iii) A → E → B로 가는 경우의 수

$$2 \cdot \left(1 \cdot \frac{4!}{2!} + 1 \cdot 1 \cdot 3! \right) = 36$$

(iv) A → F → B로 가는 경우의 수

$$1 \cdot \left(1 \cdot \frac{4!}{2!} + 1 \cdot 1 \cdot 3! \right) = 18$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 24 + 36 + 18 = 138$$

→ 138

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 12~13쪽

01 네 명의 남자를 A, B, C, D라 하고 처음에 함께 앉았던 여자를 각각 a, b, c, d라 하자.

다시 의자에 앉을 때, A와 b가 A B C D
함께 앉는 경우는 오른쪽과 같이
3가지이고, A와 c, A와 d가 함
께 앉는 경우도 각각 3가지이므로
처음에 함께 앉았던 사람이 아닌 다른 사람과 앉게 되는
경우의 수는 $3 \cdot 3 = 9$

이때 네 쌍의 짝이 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$$(4-1)! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$9 \cdot 96 = 864$$

답 864

02 조건 (가)에서 안쪽의 원판에는 짝수를 적고 조건 (나)에서 색칠한 5개의 영역에 적힌 수의 합이 홀수이므로 색칠한 영역에 적힌 짝수의 개수는 2 또는 4이어야 한다.

(i) 색칠한 영역에 홀수 3개, 짝수 2개를 적는 경우

1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수 3개, 짝수 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 \cdot {}_4C_2 = 60$$

안쪽의 원판에 짝수를 적고 홀수 3개, 짝수 1개를 바깥쪽 4개의 영역에 적는 경우의 수는

$$2 \cdot (4-1)! = 12$$

나머지 영역에 남은 4개의 숫자를 적는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 그 경우의 수는

$$60 \cdot 12 \cdot 24 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5$$

(ii) 색칠한 영역에 홀수 1개, 짝수 4개를 적는 경우

1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수 1개, 짝수 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_1 \cdot {}_4C_4 = 5$$

안쪽의 원판에 짝수를 적고 홀수 1개, 짝수 3개를 바깥쪽 4개의 영역에 적는 경우의 수는

$$4 \cdot (4-1)! = 24$$

나머지 영역에 남은 4개의 숫자를 적는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 그 경우의 수는

$$5 \cdot 24 \cdot 24 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$$

(i), (ii)에서

$$k = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 + 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2^6 (270 + 45) = 2^6 \cdot 315$$

$$\text{이므로 } \frac{k}{2^6} = \frac{2^6 \cdot 315}{2^6} = 315$$

답 315

03 서로 다른 2가지 색을 2개의 밑면에 칠하는 경우의 수는

$$\frac{{}_6P_2}{2} = 15$$

4가지 색을 원형으로 배열하여 칠하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.

각 의자에서 남자, 여자가 자리를 바꾸는 경우의 수

또 옆면을 칠하는 경우의 수는

$$(4-1)! \cdot 2 = 12$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \cdot 12 = 180$$

답 ①

04 a, b, c, d에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 문자열의 개수는 ${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$

만든 문자열을 사전식으로 배열하면

$$aaaa, aaab, \dots, ddca, ddcb, ddcc, ddcd, ddda, dddb, dddc, dddd$$

이때 ddcd는 끝에서 다섯 번째 문자열이므로 252번째에 온다.

답 ③

05 (i) 0을 한 개 포함할 때,

십의 자리의 숫자가 0이고 일의 자리의 숫자가 0이 아니거나 십의 자리의 숫자가 0이 아니고 일의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수이므로

$$a = {}_9\Pi_2 \cdot 2 = 9^2 \cdot 2 = 162$$

(ii) 0을 두 개 포함할 때,

십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 0인 세 자리 자연수이므로 $b = 9$

$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{a}{b} = \frac{162}{9} = 18$$

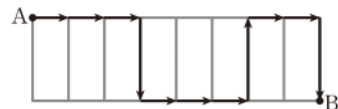
답 18

06 도로망의 윗부분의 가로 한 칸을 이동하는 것을 a, 아랫부분의 가로 한 칸을 이동하는 것을 b라 하면 구하는 경우의 수는 a, b 중에서 8개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_8 = 2^8 = 256$$

답 ⑤

◦참고 예를 들어 aaabbbbaa는 다음과 같이 이동하는 것이다.



07 2개의 1을 A로 생각하여 A, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

A와 1이 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} \cdot 2 = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60 - 24 = 36$$

답 ④

다른 풀이 1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$

(i) 1이 이웃하지 않는 경우

2, 2, 3을 일렬로 나열하고 그 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리 중 3개의 자리에 1을 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \cdot {}_4C_3 = 12$$

A와 1의 자리를 바꾸는 경우의 수

회전하였을 때 같은 경우가 2가지씩이므로 2로 나누어야 한다.

(ii) 1이 세 개 모두 이웃하는 경우

3개의 1을 B로 생각하여 B, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$60 - (12 + 12) = 36$$

08 a, b, b, c, d, d 를 일렬로 나열할 때 a 가 맨 앞에 오지 않게 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \cdot 2!} - \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 150$$

(i) a 가 맨 앞에 오지 않고 b 와 b 는 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 48$$

(ii) a 가 맨 앞에 오지 않고 d 와 d 는 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 48$$

(iii) a 가 맨 앞에 오지 않고 b 와 b, d 와 d 는 각각 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$$4! - 3! = 18$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$150 - (48 + 48 - 18) = 72$$

답 72

09 맨 왼쪽에 흰 공을 놓는 경우의 수는 1, 맨 오른쪽에 파란 공을 놓는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$ 이고, 나머지 8개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2! \cdot 4!} = 840$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$1 \cdot 3 \cdot 840 = 2520$$

답 ⑤

10 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=8$ 을 만족시키는 $f(a), f(b), f(c), f(d)$ 의 값을 순서쌍으로 나타내면

(1, 1, 3, 3) 또는 (1, 2, 2, 3) 또는 (2, 2, 2, 2)

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{4!}{2!} + 1 = 19$$

답 19

11 5의 배수가 되려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

① 추가된 카드에 적힌 숫자가 0일 때,

$$6! - 5! = 600$$

② 추가된 카드에 적힌 숫자가 0이 아닐 때,

$$5 \cdot \frac{6!}{2!} = 1800$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

① 추가된 카드에 적힌 숫자가 0일 때,

$$\frac{6!}{2!} - 5! = 240$$

a, b, b, c, d, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수

b, b, c, d, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수

크기가 같은 흰 공 2개, 검은 공 4개와 크기가 서로 다른 파란 공 2개가 남는다.

1, 1, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수

1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수

0, 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수

1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수

0, 0, 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수

0, 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수

② 추가된 카드에 적힌 숫자가 5일 때,

$$6! - 5! = 600$$

③ 추가된 카드에 적힌 숫자가 0, 5가 아닐 때,

$$4 \left(\frac{6!}{2!} - \frac{5!}{2!} \right) = 1200$$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$$600 + 1800 + 240 + 600 + 1200 = 4440$$

답 ③

12 (i) ①의 방향으로 1번, ④의 방향으로 5번 움직이는 경우의 수

$$\frac{6!}{5!} = 6$$

(ii) ②, ⑤의 방향으로 각각 1번씩, ④의 방향으로 4번 움직이는 경우의 수

$$\frac{6!}{4!} = 30$$

(iii) ③, ⑥의 방향으로 각각 1번씩, ④의 방향으로 4번 움직이는 경우의 수

$$\frac{6!}{4!} = 30$$

(iv) ③, ④, ⑤의 방향으로 각각 2번씩 움직이는 경우의 수

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 30 + 30 + 90 = 156$$

답 156

I -2. 중복조합과 이항정리

개념 & 핵심 기술

본책 14~15쪽

01 기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$$a = {}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$$

무기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$b = {}_2H_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$$

$$\therefore a + b = 71$$

답 71

02 a, b, c 중에서 짝수 2개를 정하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = 3$$

이때 a, b 가 짝수, c 가 홀수라 하고 $a = 2l + 2$,

$b = 2m + 2, c = 2n + 1$ (l, m, n 은 음이 아닌 정수)로 놓으면 조건 ⑦에 의하여

$$(2l + 2) + (2m + 2) + (2n + 1) = 11$$

$$\therefore l + m + n = 3$$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수인 해의 개수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$3 \cdot 10 = 30$$

답 30

03 구하는 항의 개수는 세 문자 x, y, z 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

답 ④

04 $(2x - 1)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r (2x)^{7-r} (-1)^r = {}_7C_r 2^{7-r} (-1)^r x^{7-r}$$

이므로 계수가 음수인 항 중에서 계수가 가장 작은 것을 찾으면 된다.

(i) $r = 1$ 일 때,

$${}_7C_1 2^6 (-1)^1 x^6 = -448x^6$$

(ii) $r = 3$ 일 때,

$${}_7C_3 2^4 (-1)^3 x^4 = -560x^4$$

(iii) $r = 5$ 일 때,

$${}_7C_5 2^2 (-1)^5 x^2 = -84x^2$$

(iv) $r = 7$ 일 때,

$${}_7C_7 (-1)^7 = -1$$

이상에서 계수가 가장 작은 항의 차수는 4이다.

답 ③

05 $\left(ax^2 - \frac{2}{x}\right)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (ax^2)^{6-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = {}_6C_r a^{6-r} (-2)^r \frac{x^{12-2r}}{x^r}$$

상수항은 $12 - 2r = r$, 즉 $r = 4$ 일 때이므로

$${}_6C_4 a^2 (-2)^4 = 60, \quad a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because a > 0)$$

답 ③

무기명 투표는 어느 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다.

방정식

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

(m, n 은 자연수)

의 음이 아닌 정수인 해의 개수

$$\Rightarrow {}_mH_n$$

06 $(x + 1)^8$ 의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r x^{8-r}$$

$(x - 1)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s x^{4-s} (-1)^s$$

따라서 $(x + 1)^8(x - 1)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r x^{8-r} \cdot {}_4C_s x^{4-s} (-1)^s = {}_8C_r \cdot {}_4C_s (-1)^s x^{12-r-s}$$

x^{10} 항은 $12 - r - s = 10$, 즉 $r + s = 2$ 일 때이므로 이를 만족시키는 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는

$$(0, 2), (1, 1), (2, 0)$$

즉 x^{10} 의 계수는

$${}_8C_0 \cdot {}_4C_2 (-1)^2 + {}_8C_1 \cdot {}_4C_1 (-1)^1 + {}_8C_2 \cdot {}_4C_0$$

$$= 6 - 32 + 28 = 2$$

답 2

07 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ 이므로

$${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - {}_nC_0$$

$$= 2^n - 1$$

즉 주어진 부등식은

$$500 < 2^n - 1 < 1500, \quad 501 < 2^n < 1501$$

$2^8 = 256, 2^9 = 512, 2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048$ 이므로

$$n = 9 \text{ 또는 } n = 10$$

따라서 구하는 n 의 값의 합은

$$9 + 10 = 19$$

답 ③

08 원소의 개수가 2, 4, 6, 8인 부분집합의 개수는 각각

$${}_8C_2, {}_8C_4, {}_8C_6, {}_8C_8$$

이때

$${}_8C_0 + {}_8C_2 + {}_8C_4 + {}_8C_6 + {}_8C_8 = 2^{8-1} = 2^7$$

이므로 구하는 부분집합의 개수는

$${}_8C_2 + {}_8C_4 + {}_8C_6 + {}_8C_8 = 2^7 - {}_8C_0$$

$$= 128 - 1 = 127$$

답 127

09 ${}_{20}C_0 + {}_{20}C_2 + {}_{20}C_4 + \cdots + {}_{20}C_{20} = 2^{19}$

또 ${}_{40}C_0 - {}_{40}C_1 + {}_{40}C_2 - {}_{40}C_3 + \cdots - {}_{40}C_{39} + {}_{40}C_{40} = 0$ 이므로

$${}_{40}C_1 - {}_{40}C_2 + {}_{40}C_3 - \cdots + {}_{40}C_{39} = {}_{40}C_0 + {}_{40}C_{40}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

따라서 주어진 등식은

$$2^{19} = 2 \cdot 2^n \quad \therefore n = 18$$

답 ④

10 $\neg, {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$ 이므로

$${}_nC_r + {}_nC_{r+1} = {}_{n+1}C_{r+1}$$

$$\therefore {}_6C_6 + {}_7C_6 + {}_8C_6 + {}_9C_6 = {}_7C_7 + {}_7C_6 + {}_8C_6 + {}_9C_6$$

$$= {}_8C_7 + {}_8C_6 + {}_9C_6$$

$$= {}_9C_7 + {}_9C_6$$

$$= {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3$$

$$\therefore {}_{91}C_0 + {}_{92}C_1 + {}_{93}C_2 + {}_{94}C_3 = {}_{92}C_0 + {}_{92}C_1 + {}_{93}C_2 + {}_{94}C_3$$

$$= {}_{93}C_1 + {}_{93}C_2 + {}_{94}C_3$$

$$= {}_{94}C_2 + {}_{94}C_3$$

$$= {}_{95}C_3$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \perp$ 이다.

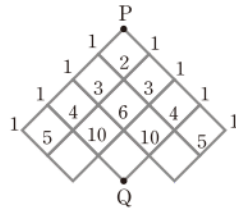
답 ②

11 각 교차점에 도착하는 경우의 수를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$5 + 10 + 10 + 5 = 30$$

답 30



1등급 비밀노트 >>>

주어진 문제는 P에서 Q까지 가는 모든 경우의 수를 구하는 것이다. P에서 Q까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하는 것으로 생각하여 $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ 으로 계산하지 않도록 주의한다.

1등급을 위한 고난도 문제

본책 16~18쪽

01 2, 3, 5가 모두 소수이므로 집합 A의 원소의 개수는 3개의 숫자 2, 3, 5 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

따라서 집합 A의 부분집합의 개수는 2^{21} 이다.

답 ④

1등급 비밀노트 >>>

2, 3, 5를 각각 x 개, y 개, z 개 택한다고 하면 2, 3, 5가 모두 소수이므로 방정식 $x+y+z=5$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$)를 만족시키는 서로 다른 해의 순서쌍 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ 에 대하여 $2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1} \neq 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$ 이다. 즉 방정식의 각각의 해에 대하여 집합 A의 원소가 1개씩 결정되므로 방정식 $x+y+z=5$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$)의 해의 개수와 집합 A의 원소의 개수는 같다.

02 여학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 4! 여학생 4명의 면접 순서가 '홀수 번째 → 짝수 번째 → 홀수 번째 → 짝수 번째'이려면 여학생과 여학생 사이에 남학생이 없거나 짝수 명이 있어야 한다.

$$\vee \textcircled{\text{여}} \vee \textcircled{\text{여}} \vee \textcircled{\text{여}} \vee \textcircled{\text{여}} \vee$$

즉 위의 그림과 같이 여학생 4명의 사이사이 및 양 끝의 다섯 개의 자리 중 중복을 허용하여 세 개의 자리를 택한 후 각 자리에 남학생을 2명씩 일렬로 세우면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5H_3 \cdot 6! = {}_7C_3 \cdot 6! = 35 \cdot 6!$$

따라서 구하는 경우의 수는 $35 \cdot 4! \cdot 6!$

답 ⑤

03 (i) 동전을 1개 사용하는 경우

10원, 100원, 500원짜리 동전 중에서 1개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

(ii) 동전을 2개 사용하는 경우

10원, 100원, 500원짜리 동전 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

각 동전을 4개 이하로 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수는 동전을 지불하는 경우의 수와 같다.

3개의 문자 X, Y, Z에서 7개를 택하는 중복조합의 수

남학생을 세울 여섯 개의 자리가 정해진 후 이 자리에 6명을 일렬로 세우는 경우의 수

똑같은 공이므로 구별하지 않는다.

(iii) 동전을 3개 사용하는 경우

10원, 100원, 500원짜리 동전 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

(iv) 동전을 4개 사용하는 경우

10원, 100원, 500원짜리 동전 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

이때 10원, 100원, 500원짜리 동전은 각각 3개씩 있으므로 각 동전을 4개씩 택하는 경우를 제외하면 그 경우의 수는

$$15 - 3 = 12$$

이상에서 지불할 수 있는 금액의 수는

$$3 + 6 + 10 + 12 = 31$$

답 31

04 $x = X + 1, y = Y + 2, z = Z + 3$ (X, Y, Z 는 음이 아닌 정수)으로 놓으면 $x + y + z = 13$ 에서

$$X + Y + Z = 7$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

답 36

05 I. 세 주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수를 각각 x, y, z 라 하면

$$x + y + z = 6 \quad (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x = X + 1, y = Y + 1, z = Z + 1$ (X, Y, Z 는 음이 아닌 정수)로 놓으면 $\textcircled{1}$ 에서

$$X + Y + Z = 3$$

따라서 조건 I을 만족시키는 경우의 수는

$$p = {}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

→ ①

II. 세 주머니에 공을 넣는 모든 경우의 수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

이때 조건 I에서 모든 주머니에 적어도 한 개의 공이 들어 있는 경우의 수가 10이므로 조건 II를 만족시키는 경우의 수는

$$q = 28 - 10 = 18$$

→ ②

III. 세 주머니에 들어 있는 공이 0개, 1개, 5개인 경우의 수는 $3! = 6$

세 주머니에 들어 있는 공이 1개, 1개, 4개인 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

세 주머니에 들어 있는 공이 1개, 2개, 3개인 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 조건 III을 만족시키는 경우의 수는

$$r = 6 + 3 + 6 = 15$$

→ ③

$$\therefore p - q + r = 7$$

→ ④

답 7

채점 기준	비율
① p 의 값을 구할 수 있다.	30%
② q 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ r 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $p-q+r$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

06 $x+y+z=8$ ($x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$) ㉠
 $x=X+1, y=Y+1, z=Z+1$ (X, Y, Z 는 음이 아닌 정수)로 놓으면 ㉠에서

$$X+Y+Z=5$$

따라서 구하는 학습 계획표의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21 \quad \text{답 ㉠}$$

07 과일 바구니에 사과, 배, 복숭아를 각각 x 개, y 개, z 개 넣는다고 하면

$$x+y+z=10$$
 ($x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2$) ... ㉡ ①

$x=X, y=Y+1, z=Z+2$ (X, Y, Z 는 음이 아닌 정수)로 놓으면 ㉡에서

$$X+Y+Z=7 \quad \text{..... ②}$$

따라서 구하는 경우의 수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36 \quad \text{..... ③}$$

답 36

채점 기준	비율
① 방정식을 세울 수 있다.	40%
② 치환하여 방정식을 변형할 수 있다.	30%
③ 경우의 수를 구할 수 있다.	30%

08 $P(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$ 라 하면 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 18이므로 나머지정리에 의하여

$$P(2) = 2a + 2b + c = 18 \quad \text{..... ㉢}$$

이때 $2a+2b$ 는 짝수이므로 c 도 짝수이어야 한다.

$a=X+1, b=Y+1, c=2(Z+1)$ (X, Y, Z 는 음이 아닌 정수)로 놓으면 ㉢에서

$$X+Y+Z=6$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28 \quad \text{답 ③}$$

09 $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수는

$${}_5H_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = 126 \quad \text{..... ①}$$

$f(1) \leq f(2) = f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수는

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$$

$f(1) \leq f(2) = f(3) = f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수가 중복되어 세어지므로 빼준다.

3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 정의역의 원소 4, 5에 대응시키면 된다.

다항식 $P(x)$ 를 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지 $R = P(a)$

(짝수) + c = (짝수)이므로 c 는 짝수이다.

두 집합 X, Y 의 원소의 개수가 각각 m, n 일 때, 함수 $f: X \rightarrow Y$ 중에서 $a < b$ 이면 $f(a) \leq f(b)$ 를 만족시키는 함수의 개수 $\Rightarrow {}_nH_m$

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) = f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수는

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70 \quad \text{..... ②}$$

$f(1) \leq f(2) = f(3) = f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수는

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35 \quad \text{..... ③}$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$126 - (70 + 70 - 35) = 21 \quad \text{..... ④}$$

답 21

채점 기준	비율
① $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.	20%
② $f(1) \leq f(2) = f(3) \leq f(4) \leq f(5)$, $f(1) \leq f(2) \leq f(3) = f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수를 각각 구할 수 있다.	30%
③ $f(1) \leq f(2) = f(3) = f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.	30%
④ 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 $f(1) \leq f(2) < f(3) < f(4) \leq f(5)$ 이므로 $f(3)$ 이 될 수 있는 값은 2, 3, 4이다.

(i) $f(3)=2$ 일 때,

$f(1)=f(2)=1$ 이고, $f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 그 함수의 개수는 6

(ii) $f(3)=3$ 일 때,

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$$

$f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$$

따라서 그 함수의 개수는 $3 \cdot 3 = 9$

(iii) $f(3)=4$ 일 때,

$f(4)=f(5)=5$ 이고, $f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 그 함수의 개수는 6

이상에서 구하는 함수의 개수는

$$6 + 9 + 6 = 21$$

10 구하는 경우의 수는 정의역이 $\{A, B, C\}$, 공역이 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 인 함수 f 중에서

$$f(A) \leq f(B) \leq f(C)$$

를 만족시키는 함수 f 의 개수와 같으므로

$${}_7H_3 = {}_9C_3 = 84 \quad \text{답 ①}$$

11 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{2n}C_r x^{2n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_{2n}C_r \frac{x^{2n-r}}{x^r}$$

x^2 항은 $\frac{x^{2n-r}}{x^r} = x^2$ 에서

$$2n - r - r = 2 \quad \therefore r = n - 1$$

x^4 항은 $\frac{x^{2n-r}}{x^r} = x^4$ 에서

$$2n-r-r=4 \quad \therefore r=n-2$$

x^6 항은 $\frac{x^{2n-r}}{x^r} = x^6$ 에서

$$2n-r-r=6 \quad \therefore r=n-3$$

즉 x^2, x^4, x^6 의 계수는 각각

$${}_{2n}C_{n-1}, {}_{2n}C_{n-2}, {}_{2n}C_{n-3}$$

따라서 $a_2 = {}_{2n}C_{n-1}, a_4 = {}_{2n}C_{n-2}, a_6 = {}_{2n}C_{n-3}$ 이고,

$$a_4 = \frac{a_2 + a_6}{2}, \text{ 즉 } 2a_4 = a_2 + a_6 \text{ 이므로}$$

$$2 \cdot {}_{2n}C_{n-2} = {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-3}$$

$$2 \cdot \frac{(2n)!}{(n-2)!(n+2)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{(2n)!}{(n-3)!(n+3)!}$$

$$2(n-1)(n+3) = (n+3)(n+2) + (n-1)(n-2)$$

$$2n=14 \quad \therefore n=7$$

답 ②

1등급 비밀노트 >>>

$2 \cdot \frac{(2n)!}{(n-2)!(n+2)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{(2n)!}{(n-3)!(n+3)!}$
의 양변에 $(n-2)!, (n-1)!, (n-3)!$ 중 n 에 대한 차수가 가장 큰 $(n-1)!$ 과 $(n+2)!, (n+1)!, (n+3)!$ 중 n 에 대한 차수가 가장 큰 $(n+3)!$ 을 곱해야 분모에 미지수가 없도록 만들 수 있다.

12 $(x^2 + \frac{a}{x})^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r (x^2)^{7-r} \left(\frac{a}{x}\right)^r = {}_7C_r a^r \frac{x^{14-2r}}{x^r}$$

→ ①

x^2 항은 $\frac{x^{14-2r}}{x^r} = x^2$ 에서 $14-2r-r=2$

$$3r=12 \quad \therefore r=4$$

즉 ${}_7C_4 a^4 = 140$ 이므로 $35a^4 = 140, a^4 = 4$

$$\therefore a^2 = 2$$

→ ②

$\frac{1}{x^4}$ 항은 $\frac{x^{14-2r}}{x^r} = \frac{1}{x^4}$ 에서 $r - (14-2r) = 4$

$$3r=18 \quad \therefore r=6$$

따라서 $\frac{1}{x^4}$ 의 계수는

$${}_7C_6 a^6 = 7 \cdot (a^2)^3 = 7 \cdot 2^3 = 56$$

→ ③

답 56

13 $(ax^2 + x - 1)^8$ 의 전개식의 일반항은

$$\frac{8!}{p!q!r!} (ax^2)^p x^q (-1)^r = \frac{8!}{p!q!r!} (-1)^r a^p x^{2p+q}$$

(단, $p+q+r=8, p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$)

$2p+q=4, p+q+r=8$ 을 동시에 만족시키는 순서쌍

(p, q, r) 는

$$(0, 4, 4), (1, 2, 5), (2, 0, 6)$$

$$0! = 1$$

이므로 x^4 의 계수는

$$\begin{aligned} & \frac{8!}{0! \cdot 4! \cdot 4!} - \frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 5!} a + \frac{8!}{2! \cdot 0! \cdot 6!} a^2 \\ &= 28a^2 - 168a + 70 \\ &= 28(a-3)^2 - 182 \end{aligned}$$

따라서 $a > 0$ 일 때 x^4 의 계수는 $a=3$ 일 때 최소이다.

답 3

14 $(5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + a)^6$ 의 전개식에서 x 항은 6개의 $(5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + a)$ 중 1개에서 x 를 택하고 남은 5개에서 모두 a 를 택하여 곱한 것이므로 그 계수는

$${}_6C_5 a^5$$

따라서 ${}_6C_5 a^5 = 192$ 이므로

$$6a^5 = 192, \quad a^5 = 32 = 2^5$$

$$\therefore a = 2$$

답 2

15 $\neg. f(2) = {}_2C_1 + 2 \cdot {}_2C_2$

$$= 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$\hookrightarrow. k \cdot {}_nC_k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n \cdot {}_{n-1}C_{k-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore f(n) = n({}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + \dots + {}_{n-1}C_{n-1})$$

$$= n \cdot 2^{n-1}$$

따라서 $n \geq 2$ 일 때, $f(n)$ 은 짝수이다.

$\square. \hookrightarrow$ 에서 $f(n) = n \cdot 2^{n-1}$, 즉 $\frac{f(n)}{n} = 2^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \frac{f(2)}{2} \cdot \frac{f(3)}{3} \cdot \frac{f(4)}{4} \cdot \dots \cdot \frac{f(10)}{10} \\ &= 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^9 \\ &= 2^{1+2+3+\dots+9} \\ &= 2^{45} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \hookrightarrow$ 이다.

답 ③

16 ${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \dots + {}_{2n}C_{2n} = 2^{2n-1}$

즉 2^{2n-1} 이 8의 거듭제곱이 되려면

$$2^{2n-1} = 8^k \quad (k \text{는 자연수})$$

풀이해야 하므로 $2^{2n-1} = 2^{3k}$ 에서 $2n-1=3k$

$$\therefore n = \frac{3k+1}{2}$$

이때 n 이 자연수이므로 k 는 홀수, 즉 $k=2m-1$ (m 은 자연수)이어야 한다.

즉 $n = \frac{3(2m-1)+1}{2} = 3m-1$ 이고, n 은 100 이하의 자연수이므로

$$1 \leq 3m-1 \leq 100, \quad 2 \leq 3m \leq 101$$

$$\therefore \frac{2}{3} \leq m \leq \frac{101}{3}$$

$3k+1=2n$ 이므로
 $3k+1$ 은 짝수, 즉 k 는 홀수이어야 한다.

채점 기준	비율
① 전개식의 일반항을 구할 수 있다.	30%
② a^2 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $\frac{1}{x^4}$ 의 계수를 구할 수 있다.	40%

따라서 m 은 1, 2, ..., 33이므로 구하는 n 의 개수는 33이다.

답 33

17 $(1+x^2)^n$ ($n \geq 2$)의 전개식에서 x^4 의 계수는 ${}_nC_2$ 이다.

따라서 주어진 다항식의 전개식에서 x^4 의 계수는

$$\begin{aligned} & {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 \\ &= {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 \\ &= {}_4C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 \\ &= {}_5C_3 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 \\ &\vdots \\ &= {}_{10}C_3 + {}_{10}C_2 \\ &= {}_{11}C_3 = 165 \end{aligned}$$

답 ④

18 $a = {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{12}C_{10}$
 $= {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{12}C_{10}$
 $= {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{12}C_{10}$
 $= {}_5C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{12}C_{10}$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ &= {}_{12}C_9 + {}_{12}C_{10} \\ &= {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = 286 \end{aligned}$$

→ ①

이때 ${}_{13}C_3$ 은 제14행의 왼쪽에서 4번째의 수이고, ${}_{13}C_{10}$ 은 제14행의 왼쪽에서 11번째의 수이므로

$$b=14, c=4 \text{ 또는 } b=14, c=11$$

→ ②

따라서 $a+b+c$ 의 최솟값은

$$286 + 14 + 4 = 304$$

→ ③

답 304

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	50%
② b, c 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $a+b+c$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

19 먼저 사탕, 초콜릿, 쿠키를 각각 한 개씩 꺼내고, 나머지 중에서 7개 이하를 꺼내면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개 이하를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} & {}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 + \cdots + {}_3H_7 \\ &= {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_9C_7 \\ &= {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_9C_7 \\ &= {}_4C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_9C_7 \\ &\vdots \\ &= {}_9C_6 + {}_9C_7 \\ &= {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = 120 \end{aligned}$$

답 ①

20 (i) $\square 1 \square$ 인 경우

2개의 $\square$ 에 2가 적힌 카드를 1장 이상 5장 이하로 놓는 경우의 수는

$$\begin{aligned} & {}_2H_1 + {}_2H_2 + {}_2H_3 + {}_2H_4 + {}_2H_5 \\ &= {}_2C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + {}_5C_4 + {}_6C_5 \\ &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20 \end{aligned}$$

(n 의 개수)
 $= (m$ 의 개수)

서로 다른 3개에서 4개 이하를 택하는 중복조합의 수

$(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_nC_r x^{2r}$
 x^4 항은 $2r=4$, 즉 $r=2$ 일 때이므로 x^4 의 계수는
 ${}_nC_2$

서로 다른 4개에서 3개 이하를 택하는 중복조합의 수

(ii) $\square 1 \square 1 \square$ 인 경우

1과 1 사이의 $\square$ 에 2가 적힌 카드를 1장 놓은 후 3개의 $\square$ 에 2가 적힌 카드를 4장 이하로 놓는 경우의 수는

$$\begin{aligned} & {}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 + {}_3H_3 + {}_3H_4 \\ &= {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 \\ &= {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 \\ &= {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 \\ &= {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 \\ &= {}_6C_3 + {}_6C_4 \\ &= {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35 \end{aligned}$$

(iii) $\square 1 \square 1 \square 1 \square$ 인 경우

1과 1 사이의 2개의 $\square$ 에 각각 2가 적힌 카드를 1장씩 놓은 후 4개의 $\square$ 에 2가 적힌 카드를 3장 이하로 놓는 경우의 수는

$$\begin{aligned} & {}_4H_0 + {}_4H_1 + {}_4H_2 + {}_4H_3 \\ &= {}_3C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 \\ &= {}_4C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 \\ &= {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 \\ &= {}_6C_2 + {}_6C_3 \\ &= {}_7C_3 = 35 \end{aligned}$$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$$20 + 35 + 35 = 90$$

답 90

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 19~20쪽

01 각 임원이 선택할 수 있는 경우는

$$(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)$$

의 6가지이다.

따라서 나올 수 있는 서로 다른 결과의 수는 서로 다른 6개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_5 = {}_{10}C_5 = 252$$

답 ②

02 (i) 일의 자리의 숫자가 1일 때,

세 주사위의 눈의 수가 모두 1이어야 하므로 1가지이다.

(ii) 일의 자리의 숫자가 3일 때,

1, 2, 3 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

(iii) 일의 자리의 숫자가 5일 때,

1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$$

이상에서 구하는 홀수의 개수는

$$1 + 6 + 15 = 22$$

답 22

다른 풀이 만들 수 있는 세 자리 자연수의 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자를 각각 a, b, c 라 하면 $a \leq b \leq c$ 이어야 한다.

(i) $c=1$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1)$ 의 1개

(ii) $c=3$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3),$

$(3, 3)$ 의 6개

(iii) $c=5$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),$

$(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3),$

$(3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5)$

의 15개

이상에서 구하는 홀수의 개수는

$$1+6+15=22$$

03 손 선풍기를 받는 4명의 학생을 x 라 하면

$$\square x \square x \square x \square x \square$$

이때 구하는 경우의 수는 학생들을 구별하지 않고 x 와 x 사이의 3개의 $\square$ 에 각각 1명씩 세운 후 5개의 $\square$ 에 남은 3명을 중복을 허용하여 세우는 경우의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

☐ 35

04 서로 다른 세 봉지에 담는 과자의 개수를 각각 x, y, z 라 하면 조건 ㉞에서

$$x+y+z=9 \quad (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x=X+1, y=Y+1, z=Z+1$ (X, Y, Z 는 음이 아닌 정수)로 놓으면 ㉞에서

$$X+Y+Z=6$$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z) 의 개수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

이때 조건 ㉞을 만족시키지 않는 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z) 는

$(6, 0, 0), (0, 6, 0), (0, 0, 6), (5, 1, 0),$

$(5, 0, 1), (1, 5, 0), (1, 0, 5), (0, 5, 1),$

$(0, 1, 5)$

의 9가지이므로 구하는 경우의 수는

$$28-9=19$$

☐ 19

05 $28=1 \cdot 28=2 \cdot 14=4 \cdot 7$ 이므로 조건 ㉞, ㉟에서

$$f(2)=1, f(5)=28 \text{ 또는 } f(2)=2, f(5)=14$$

$$\text{또는 } f(2)=4, f(5)=7$$

(i) $f(2)=1, f(5)=28$ 일 때,

$f(1)=1$ 이고, $f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1부터 28까지의 자연수 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 함수의 개수는

$${}_{28}H_2 = {}_{29}C_2 = 406$$

(ii) $f(2)=2, f(5)=14$ 일 때,

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2이고, $f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2부터 14까지의 자연수 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 함수의 개수는

$$2 \cdot {}_{13}H_2 = 2 \cdot {}_{14}C_2 = 182$$

(iii) $f(2)=4, f(5)=7$ 일 때,

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4이고, $f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 4부터 7까지의 자연수 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 함수의 개수는

$$4 \cdot {}_4H_2 = 4 \cdot {}_5C_2 = 40$$

이상에서 구하는 함수의 개수는

$$406+182+40=628$$

☐ 628

06 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^n$ 은 $(1+x+x^2+x^3+x^4)$ 을 n 개 곱한 것이므로 n 개의 $(1+x+x^2+x^3+x^4)$ 에서 각각 $x^{p_1}, x^{p_2}, \dots, x^{p_n}$ ($p_i=0, 1, 2, 3, 4, i=1, 2, \dots, n$)을 택하여 곱하면

$$x^{p_1} \cdot x^{p_2} \cdot \dots \cdot x^{p_n} = x^4$$

$$\therefore x^{p_1+p_2+\dots+p_n} = x^4$$

따라서 $f(n)$ 은 $p_1+p_2+\dots+p_n=4$ 를 만족시키는 순서쌍 $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 의 개수이므로

$$\begin{aligned} f(n) &= {}_nH_4 = {}_{n+3}C_4 = \frac{(n+3)!}{4!(n-1)!} \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f(11)}{f(10)} = \frac{\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{24}}{\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{24}} = \frac{7}{5}$$

☐ ②

$(a+b)^n$ 의 전개식의 일반항
 $\Rightarrow {}_nC_r a^{n-r} b^r$

$$\begin{aligned} \text{07 } (2x^2+x+2)\left(x+\frac{3}{x}\right)^{10} \\ = 2x^2\left(x+\frac{3}{x}\right)^{10} + x\left(x+\frac{3}{x}\right)^{10} + 2\left(x+\frac{3}{x}\right)^{10} \end{aligned}$$

$\left(x+\frac{3}{x}\right)^{10}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r x^{10-r} \left(\frac{3}{x}\right)^r = {}_{10}C_r 3^r \frac{x^{10-r}}{x^r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $(2x^2+x+2)\left(x+\frac{3}{x}\right)^{10}$ 의 전개식에서 x^3 항은 $2x^2$ 과 ㉠의 x 항, x 와 ㉠의 x^2 항, 2와 ㉠의 x^3 항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠의 x 항은 $\frac{x^{10-r}}{x^r} = x$ 에서

$$10-r-r=1 \quad \therefore r=\frac{9}{2}$$

그런데 r 는 $0 \leq r \leq 10$ 인 정수이므로 ㉠에서 x 항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠의 x^2 항은 $\frac{x^{10-r}}{x^r} = x^2$ 에서

$$10-r-r=2 \quad \therefore r=4$$

$$\text{따라서 } x^3\text{항은 } x \cdot {}_{10}C_4 3^4 x^2 = {}_{10}C_4 3^4 \cdot x^3$$

(iii) ㉠의 x^3 항은 $\frac{x^{10-r}}{x^r} = x^3$ 에서

$$10-r-r=3 \quad \therefore r=\frac{7}{2}$$

그런데 r 는 $0 \leq r \leq 10$ 인 정수이므로 ㉠에서 x^3 항은 존재하지 않는다.

이상에서 x^3 의 계수는 $3^4 \cdot {}_{10}C_4$ 이다.

☐ ⑤

$$\begin{aligned} 08 \quad a_n &= {}_nC_0 + \frac{{}_nC_1}{2} + \frac{{}_nC_2}{2^2} + \cdots + \frac{{}_nC_n}{2^n} \\ &= {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot \frac{1}{2} + {}_nC_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + {}_nC_n \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$b_n = {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot 2 + {}_nC_2 \cdot 2^2 + \cdots + {}_nC_n \cdot 2^n = (1+2)^n = 3^n$$

이므로

$$A_3 = \left\{ x \mid \left(\frac{3}{2}\right)^3 < x < 3^3, x \text{는 자연수} \right\}$$

$$A_5 = \left\{ x \mid \left(\frac{3}{2}\right)^5 < x < 3^5, x \text{는 자연수} \right\}$$

$$\begin{aligned} \therefore A_3 \cap A_5 &= \left\{ x \mid \left(\frac{3}{2}\right)^5 < x < 3^3, x \text{는 자연수} \right\} \\ &= \{8, 9, 10, \dots, 26\} \end{aligned}$$

$$\therefore n(A_3 \cap A_5) = 19 \quad \text{답 ④}$$

$$\begin{aligned} 09 \quad {}_{10}C_0 \cdot 5^{10} + {}_{10}C_1 \cdot 5^9 + {}_{10}C_2 \cdot 5^8 + \cdots + {}_{10}C_9 \cdot 5 + {}_{10}C_{10} \cdot 5^0 \\ = (5+1)^{10} = 6^{10} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} N &= 6^{10} - 1 = (7-1)^{10} - 1 \\ &= ({}_{10}C_0 \cdot 7^{10} - {}_{10}C_1 \cdot 7^9 + {}_{10}C_2 \cdot 7^8 \\ &\quad - \cdots - {}_{10}C_9 \cdot 7 + {}_{10}C_{10} \cdot 7^0) - 1 \end{aligned}$$

이때 ${}_{10}C_0 \cdot 7^{10} - {}_{10}C_1 \cdot 7^9 + {}_{10}C_2 \cdot 7^8 - \cdots - {}_{10}C_9 \cdot 7$ 은 7로 나누어떨어지므로 N 을 7로 나눈 나머지는 ${}_{10}C_{10} \cdot 7^0 - 1$ 을 7로 나눈 나머지와 같다.

따라서 ${}_{10}C_{10} \cdot 7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ 이므로 구하는 나머지는 0이다. 답 ①

$$10 \quad a_n = {}_{2n}C_{n+1} + {}_{2n}C_{n+2} + {}_{2n}C_{n+3} + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 이므로

$$a_n = {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2} + {}_{2n}C_{n-3} + \cdots + {}_{2n}C_0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} 2a_n &= {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + \cdots + {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n+1} \\ &\quad + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} + {}_{2n}C_{2n} \\ \therefore 2a_n + {}_{2n}C_n &= {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \\ &= 2^{2n} = 4^n \end{aligned}$$

따라서 주어진 부등식은 $4^n < 1000$

$$4^4 = 256, 4^5 = 1024 \text{이므로}$$

$$n=1 \text{ 또는 } n=2 \text{ 또는 } n=3 \text{ 또는 } n=4$$

따라서 구하는 n 의 값의 합은

$$1+2+3+4=10 \quad \text{답 10}$$

$$11 \quad (i) \text{ 한 자리인 경우 } \quad 8 \text{의 } 1 \text{개}$$

$$(ii) \text{ 두 자리인 경우}$$

각 자리의 숫자를 a, b 라 하면

$$a+b=8 \quad (a \geq 1, b \geq 1)$$

이 방정식을 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는 ${}_2H_6 = {}_7C_6$

$$(iii) \text{ 세 자리인 경우}$$

각 자리의 숫자를 a, b, c 라 하면

$$a+b+c=8 \quad (a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1)$$

방정식
 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$
 $(m, n \text{은 자연수})$
 의 자연수인 해의 개수
 $\Rightarrow {}_mH_{n-m}$ (단, $n \geq m$)

이 방정식을 만족시키는 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_3H_5 = {}_7C_5$

$\vdots$

$$(iv) 7 \text{자리인 경우}$$

각 자리의 숫자를 $a, b, \dots, g$ 라 하면

$$a+b+\cdots+g=8$$

이 방정식을 만족시키는 자연수 $a, b, \dots, g$ 의 순서쌍 $(a, b, \dots, g)$ 의 개수는 ${}_7H_1 = {}_7C_1$

$$(v) 8 \text{자리인 경우 } \quad 11111111 \text{의 } 1 \text{개}$$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$$\begin{aligned} &1 + {}_7C_6 + {}_7C_5 + {}_7C_4 + \cdots + {}_7C_1 + 1 \\ &= {}_7C_7 + {}_7C_6 + {}_7C_5 + {}_7C_4 + \cdots + {}_7C_1 + {}_7C_0 \\ &= 2^7 = 128 \end{aligned} \quad \text{답 128}$$

다른 풀이 구하는 자연수의 개수는 8개의 1을 일렬로 나열하고 1과 1의 사이사이의 일품 자리에 덧셈 기호 $+$ 를 7개 이하로 넣는 경우의 수와 같으므로

$${}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + \cdots + {}_7C_7 = 2^7 = 128$$

12 6명의 가족 중에서 사진에 나오는 사람을 1명, 2명, 3명, 4명, 5명, 6명으로 택하는 경우의 수만큼 가족의 구성원이 다른 사진을 촬영할 수 있다.

따라서 사진의 개수의 최댓값은

$$\begin{aligned} &{}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + \cdots + {}_6C_6 \\ &= ({}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + \cdots + {}_6C_6) - {}_6C_0 \\ &= 2^6 - 1 = 63 \end{aligned} \quad \text{답 63}$$

13 두 집합 A, B 가 서로소이므로 $A = \{1\}$ 이면 $1 \notin B$

또 $n(A) < n(B)$ 이므로 $n(B) \geq 2$

따라서 가능한 집합 B 의 개수는

$$\begin{aligned} &{}_{n-1}C_2 + {}_{n-1}C_3 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1} \\ &= ({}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1}) - {}_{n-1}C_0 - {}_{n-1}C_1 \\ &= 2^{n-1} - 1 - (n-1) = 2^{n-1} - n \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 2^{n-1} - n = 247 \text{이므로 } n=9 \quad \text{답 9}$$

14 $x+y+z < 10$ ($x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$)에서

$x=X+1, y=Y+1, z=Z+1$ (X, Y, Z 는 음이 아닌 정수)로 놓으면 $X+Y+Z < 7$

$X+Y+Z=0$ 의 해의 개수는 ${}_3H_0$

$X+Y+Z=1$ 의 해의 개수는 ${}_3H_1$

$X+Y+Z=2$ 의 해의 개수는 ${}_3H_2$

$\vdots$

$X+Y+Z=6$ 의 해의 개수는 ${}_3H_6$

따라서 구하는 부등식의 해의 개수는

$$\begin{aligned} &{}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 + \cdots + {}_3H_6 \\ &= {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_8C_6 \\ &= {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_8C_6 \\ &= {}_4C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_8C_6 \\ &\quad \vdots \\ &= {}_8C_5 + {}_8C_6 \\ &= {}_9C_6 = {}_9C_3 \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

① 만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 21~24쪽

01 전략 먼저 정사각뿔의 네 개의 옆면을 칠하는 경우의 수를 원순열을 이용하여 구한다.

풀이 정사각뿔의 옆면을 칠하는 경우의 수는

$${}_9C_4 \cdot (4-1)! = 126 \cdot 3!$$

나머지 5개의 색 중에서 입체도형의 밑면에 칠할 1가지 색을 고르고 정육면체의 옆면에 나머지 색을 칠하는 경우의 수는

$${}_5C_1 \cdot 4! = 5 \cdot 4! = 5!$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$126 \cdot 3! \cdot 5!$$

$$\therefore a = 3! \cdot 5!$$

답 ③

02 전략 A와 B, C와 D가 각각 이웃하게 앉으려면 탁자의 두 긴 변에 각각 앉아야 한다.

풀이 A와 B, C와 D가 각각 이웃하면서 서로 맞은편에 앉은 후 남은 자리에 나머지 4명이 앉으면 되므로 구하는 경우의 수는

$$2 \cdot 2! \cdot 2 \cdot 2! \cdot 4! = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 24 = 384$$

답 ②

03 전략 16진법으로 나타낸 수의 각 자리에는 숫자 또는 알파벳이 16개씩 들어갈 수 있음을 이용한다.

풀이 ㄱ. 두 자리 수의 16의 자리의 값은 0이 아니어야 하고 일의 자리의 값은 A, B, C, D, E, F 중 하나이어야 하므로

$$15 \cdot 6 = 90$$

ㄴ. n 자리 수의 16^{n-1} 의 자리의 숫자는 0이 아니어야 하므로

$$15 \cdot {}_{16}P_{n-1} = 15 \cdot 16^{n-1}$$

ㄷ. n 자리 이하의 수의 개수는 16개에서 n 개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_{16}P_n = 16^n$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

04 전략 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수임을 이용한다.

풀이 3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로 1을 적어도 한 개 포함하도록 5개의 숫자를 택하는 경우는

$$(1, 1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3, 3), (1, 1, 2, 2, 3), \\ (1, 2, 2, 2, 2), (1, 2, 3, 3, 3)$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$\frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{5!}{2! \cdot 2!} + \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!}$$

$$= 5 + 10 + 30 + 5 + 20$$

$$= 70$$

답 ③

A와 B가 이웃하게 앉을 두 자리를 선택하는 경우의 수가 2, A와 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가 2!이다.

조건 ㄴ에서 자동차 B의 뒷좌석 두 자리는 같은 자리로 생각한다.

16의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, ..., 9의 9개

문자는

A, B, ..., F의 6개

이므로 16의 자리에 올 수 있는 것의 개수는

$$9 + 6 = 15$$

1의 개수는

$$5 - (a + b) = 5 - 3 = 2$$

1등급 비밀노트 >>>

다섯 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 합을 A라 하면 1을 적어도 한 개 포함해야 하므로

$$5 \leq A \leq 13$$

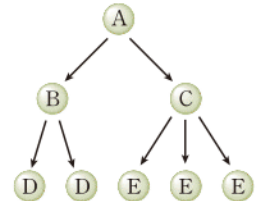
따라서 각 자리의 숫자의 합이 6, 9, 12인 경우만 생각하면 된다.

05 전략 마지막으로 연락받는 사람들은 서로 구분할 필요가 없으므로 같은 것이 있는 순열을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서 비상 연락망을 만드는 경우의 수는 A, B, C, D, D, E, E, E를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3360$$

답 ⑤



06 전략 뒷좌석에서 자리를 바꿔 앉는 경우는 같은 경우로 생각하므로 같은 것이 있는 순열을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서 두 자동차 A, B에 나누어 타는 경우의 수는 a, b, c, d, e, f, f 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{2!} = 2520$$

답 ③

	A		B	
앞	a	b	d	e
뒤	c		f	f

07 전략 $x_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 중 주어진 조건을 만족시키는 $-2, 1, 2$ 의 개수를 각각 구한다.

풀이 $x_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 중 $-2, 2$ 의 개수를 각각 a, b 라 하면 1의 개수는 $5 - (a + b) = 5 - a - b$ 이므로

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \text{에서} \\ -2a + (5 - a - b) + 2b = 4$$

$$\therefore b = 3a - 1$$

..... ㉠

이때 $0 \leq a \leq 5, 0 \leq b \leq 5, 5 - a - b \geq 0$ 이므로 ㉠에서

$$a = 1, b = 2$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $-2, 1, 1, 2, 2$ 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$

답 ④

08 전략 1000을 소인수분해하여 각 자리에 들어갈 수 있는 수를 생각해 본다.

풀이 $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ 이므로 다섯 개의 한 자리 자연수의 곱이 1000이 되는 경우는

$$1, 8, 5, 5, 5 \text{ 또는 } 2, 4, 5, 5, 5$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3!} = 20 + 20 = 40$$

답 ②

09 전략 C 회사의 휴대 전화 중 가장 오른쪽에 진열된 것의 위치를 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

풀이 A, B 회사의 휴대 전화를 각각 a , b 라 하고, C 회사의 휴대 전화를 c , 태블릿폰을 t 라 하자.

(i) C 회사의 휴대 전화 중 가장 오른쪽에 진열된 것이 왼쪽에서 다섯 번째 자리에 있는 경우
 t 는 왼쪽에서 여섯 번째 자리에 진열되어야 하므로 a , b , c , c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

이때 a , b 가 이웃하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \cdot 2 = 6$$

이므로 이 경우의 수는

$$12 \cdot 6 = 6$$

(ii) C 회사의 휴대 전화 중 가장 오른쪽에 진열된 것이 왼쪽에서 여섯 번째 자리에 있는 경우

a , b , c , c , t 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

이때 a , b 가 이웃하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} \cdot 2 = 24$$

이므로 이 경우의 수는

$$60 - 24 = 36$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 36 = 42$$

답 ②

10 전략 점 P의 좌표가 (4, 1)이 되려면 앞면과 뒷면이 각각 몇 번씩 나와야 하는지 구한다.

풀이 동전을 n 번 던져서 앞면이 나온 횟수를 a , 뒷면이 나온 횟수를 b 라 하면

$$2a - b = 4, -a + 2b = 1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 3, b = 2$$

따라서 동전을 5번 던져서 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나와야 하므로

$$n = 5, m = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

$$\therefore m - n = 5$$

답 ②

11 전략 C, D, E의 세 지점을 모두 지나는 경우와 세 지점 중 두 지점만 지나는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) C, D, E를 모두 지나는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{4!}{3!} = 48$$

(ii) C, D는 지나고 E는 지나지 않는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \cdot 2 \cdot \left\{ \left(\frac{6!}{4! \cdot 2!} - 1 \right) - 2 \cdot \frac{4!}{3!} \right\}$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$$

(iii) C, E는 지나고 D는 지나지 않는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \cdot 2 \cdot \frac{4!}{3!} = 24$$

A → C → D로 가는 경우의 수

A에서 D까지 최단 거리로 가는 경우의 수

a 와 b 의 자리를 바꾸는 경우의 수

(iv) D, E는 지나고 C는 지나지 않는 경우의 수는

$$\left\{ \left(\frac{5!}{3! \cdot 2!} - 1 \right) - \frac{3!}{2!} \cdot 2 \right\} \cdot 2 \cdot \frac{4!}{3!}$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$48 + 36 + 24 + 24 = 132$$

답 ①

12 전략 주어진 세 점을 모두 지나지 않는 경우의 수를 이용한다.

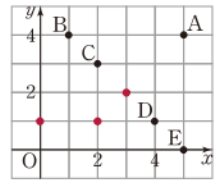
풀이 점 P가 원점에서 출발하여 직선 $x = m$, $y = n$ (m, n 은 정수)을 따라 점 A(5, 4)까지 최단 거리로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$$

이때 오른쪽 그림과 같이 네 개의 점 B(1, 4), C(2, 3), D(4, 1), E(5, 0)을 잡으면

$$O \rightarrow B \rightarrow A, O \rightarrow C \rightarrow A,$$

$$O \rightarrow D \rightarrow A, O \rightarrow E \rightarrow A$$



로 갈 때, 세 점 (0, 1), (2, 1), (3, 2) 중 적어도 한 점을 지나고 최단 거리로 이동하는 경우의 수는

$$126 - \left(1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{4!}{3!} + 2 \cdot \frac{4!}{3!} + 1 \cdot 1 \right)$$

$$= 126 - (1 + 8 + 8 + 1) = 108$$

답 ⑤

13 전략 두 회사의 골프공을 상자에 넣는 조건을 각각 생각해 본다.

풀이 B 회사의 골프공 8개를 개수가 서로 다르도록 세 상자에 나누어 넣으려면

1개, 2개, 5개 또는 1개, 3개, 4개

로 넣으면 되므로 그 경우의 수는

$$3! + 3! = 6 + 6 = 12$$

A 회사의 골프공 6개를 세 상자에 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$12 \cdot 28 = 336$$

답 ③

14 전략 각 점수를 맞춘 화살의 개수에 대한 방정식을 세운 후 중복조합을 이용한다.

풀이 1점, 2점, 3점, 4점, 5점, 6점을 맞춘 화살의 개수를 각각 a, b, c, d, e, f 라 하면

$$a + b + c + d + e + f = 6$$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e, f 의 순서쌍 (a, b, c, d, e, f)의 개수는

$${}_6H_6 = {}_{11}C_6 = {}_{11}C_5 = 462$$

이때 얻은 점수가 34점 이상인 경우는

$$(0, 0, 0, 0, 0, 6), (0, 0, 0, 0, 1, 5),$$

$$(0, 0, 0, 1, 0, 5), (0, 0, 0, 0, 2, 4)$$

의 4가지이므로 구하는 경우의 수는

$$462 - 4 = 458$$

답 ①

15 전략 조건 (가)를 만족시키는 함수의 개수는 조합을 이용하고, 조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수는 중복조합을 이용하여 구한다.

풀이 조건 (가)에서 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 2개를 택하여 $f(2) < f(4)$ 가 되도록 하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

조건 (나)에서 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허용하여 3개를 택하여 $f(1) \leq f(3) \leq f(5)$ 가 되도록 하는 경우의 수는

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$10 \cdot 35 = 350$$

답 ①

16 전략 이항정리를 이용하여 $(N+1)^7$ 을 전개한 후 7로 나눈 나머지를 구한다.

풀이 $(N+1)^7 = {}_7C_0 N^7 + {}_7C_1 N^6 + \cdots + {}_7C_6 N + {}_7C_7 N^0$ 이때 ${}_7C_1 N^6 + \cdots + {}_7C_6 N$ 은 7로 나누어떨어지므로

$(N+1)^7$ 을 7로 나눈 나머지는 ${}_7C_0 N^7 + {}_7C_7 N^0$ 을 7로 나눈 나머지와 같다.

${}_7C_0 N^7 + {}_7C_7 N^0 = N^7 + 1$ 이므로 N^7 을 7로 나눈 나머지가 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6일 때, $(N+1)^7$ 을 7로 나눈 나머지는 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0이다.

따라서 오늘부터 N^7 째 되는 날이 금요일이면 $(N+1)^7$ 째 되는 날은 토요일이다.

답 ④

1등급 비밀노트 >>>

오늘부터 7N째 되는 날이 월요일이면 $(7N_1+1)$ 째 되는 날은 화요일, $(7N_2+2)$ 째 되는 날은 수요일, ..., $(7N_6+6)$ 째 되는 날은 일요일이다. (단, $N, N_1, N_2, \dots, N_6$ 은 자연수이다.)

17 전략 조합을 이용하여 세트 상품의 개수를 나타내고, 이 항계수의 성질을 이용한다.

풀이 서로 다른 21개의 제품 중에서 0개, 1개, ..., 10개를 택하고 나머지를 똑같은 제품으로 구성하면 된다.

따라서 만들 수 있는 세트 상품의 개수는

$$\begin{aligned} & {}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 + {}_{21}C_2 + \cdots + {}_{21}C_{10} \\ &= {}_{21}C_{21} + {}_{21}C_{20} + {}_{21}C_{19} + \cdots + {}_{21}C_{11} \\ &= \frac{1}{2} ({}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 + {}_{21}C_2 + \cdots + {}_{21}C_{21}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{21} = 2^{20} \end{aligned}$$

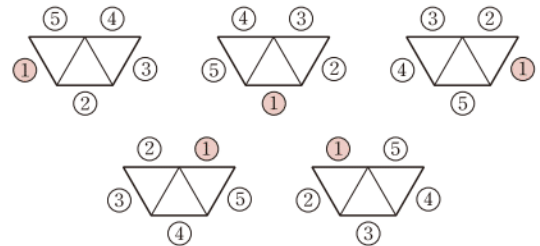
답 ⑤

18 전략 5명을 원형으로 배열한 후 각각의 경우에 대하여 서로 다른 경우가 몇 가지씩 존재하는지 생각해 본다.

풀이 5명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 주어진 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $24 \cdot 5 = 120$

답 120

다른 풀이 주어진 모양의 탁자에 5명이 둘러앉을 때, 회전하여 일치하는 경우가 없으므로 구하는 경우의 수는 5명을 일렬로 세우는 경우의 수와 같다.

$$\therefore 5! = 120$$

19 전략 1, 2를 제외한 나머지 원소들은 A, B 중 어느 한 집합의 원소임을 이용한다.

풀이 $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \cup B = U$ 이므로

$$B = (U - A) \cup \{1, 2\}$$

즉 원소 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10은 A, B 중 어느 한 집합의 원소이므로 순서쌍 (A, B) 의 개수는 A, B 중에서 8개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

→ ①

따라서 구하는 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$${}_2P_8 = 2^8 = 256$$

→ ②

답 256

채점 기준	비율
① 순서쌍 (A, B) 의 개수가 어떤 중복순열의 수와 같은지 알 수 있다.	50%
② 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구할 수 있다.	50%

20 전략 숫자와 문자의 개수에 따라 경우를 나눈다.

풀이 숫자를 □, 문자를 ○라 하면 조건 (나)에서 다음과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) 숫자가 1개, 문자가 4개인 경우

□, ○, ○, ○, ○를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

숫자 1개를 택하는 순열의 수는 ${}_3P_1 = 3$

문자 4개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_2P_4 = 2^4 = 16$

따라서 암호의 개수는 $5 \cdot 3 \cdot 16 = 240$

→ ①

(ii) 숫자가 2개, 문자가 3개인 경우

□, □, ○, ○, ○를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

숫자 2개를 택하는 순열의 수는 ${}_3P_2 = 6$

문자 3개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_2P_3 = 2^3 = 8$

따라서 암호의 개수는 $10 \cdot 6 \cdot 8 = 480$

→ ②

(iii) 숫자가 3개, 문자가 2개인 경우

□, □, □, ○, ○를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

숫자 3개를 택하는 순열의 수는 ${}_3P_3 = 6$

문자 2개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$
따라서 암호의 개수는

$$10 \cdot 6 \cdot 4 = 240 \quad \cdots \textcircled{3}$$

이상에서 만들 수 있는 모든 암호의 개수는

$$240 + 480 + 240 = 960 \quad \cdots \textcircled{4}$$

답 960

채점 기준	비율
① 숫자가 1개, 문자가 4개인 암호의 개수를 구할 수 있다.	30%
② 숫자가 2개, 문자가 3개인 암호의 개수를 구할 수 있다.	30%
③ 숫자가 3개, 문자가 2개인 암호의 개수를 구할 수 있다.	30%
④ 답을 구할 수 있다.	10%

21 전략 갑과 을이 만날 수 있는 지점을 생각한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 사람이 만날 수 있는 지점을 P, Q, R, S라 하자.

(i) 갑과 을이 P에서 만나는 경우의 수는

$$(1 \cdot 1)^2 = 1$$

(ii) 갑과 을이 Q에서 만나는 경우의 수는

$$\left(\frac{3!}{2!} \cdot \frac{3!}{2!}\right)^2 = 81$$

(iii) 갑과 을이 R에서 만나는 경우의 수는

$$\left(\frac{3!}{2!} \cdot \frac{3!}{2!}\right)^2 = 81$$

(iv) 갑과 을이 S에서 만나는 경우의 수는

$$(1 \cdot 1)^2 = 1$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 81 + 81 + 1 = 164 \quad \text{답 164}$$

1등급 비밀노트 >>>

- 갑과 을이 동시에 출발하고 속력이 같으므로 만나는 순간에 갑과 을의 이동 거리가 같아야 한다. 따라서 P, Q, R, S 이외의 지점에서는 만날 수 없다.
- 갑과 을이 P에서 만나는 경우의 수는
(A에서 P까지 가는 경우의 수)
× (B에서 P까지 가는 경우의 수)
× (P에서 B까지 가는 경우의 수)
× (P에서 A까지 가는 경우의 수)
= {(A에서 P까지 가는 경우의 수)
× (B에서 P까지 가는 경우의 수)}²

22 전략 $11^{11} = (10+1)^{11}$ 로 놓고 이항정리를 이용한다.

풀이 $11^{11} = (10+1)^{11}$

$$\begin{aligned} &= {}_{11}C_0 \cdot 10^{11} + {}_{11}C_1 \cdot 10^{10} + {}_{11}C_2 \cdot 10^9 \\ &\quad + \cdots + {}_{11}C_9 \cdot 10^2 + {}_{11}C_{10} \cdot 10 + {}_{11}C_{11} \cdot 10^0 \\ &= k \cdot 10^3 + 5500 + 110 + 1 \\ &= k \cdot 10^3 + 5611 \quad (\text{단, } k \text{는 자연수}) \end{aligned}$$

따라서 11^{11} 의 일의 자리의 숫자는 1, 십의 자리의 숫자는 1, 백의 자리의 숫자는 6이므로

$$a=1, b=1, c=6$$

$$\therefore 100a + 10b + c = 116$$

$\cdots \textcircled{2}$

답 116

채점 기준	비율
① $(10+1)^{11}$ 을 전개하여 간단히 할 수 있다.	70%
② $100a + 10b + c$ 의 값을 구할 수 있다.	30%

23 전략 이항계수의 성질을 이용한다.

풀이 n 이 짝수이므로

$${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + {}_nC_4 - {}_nC_5 + \cdots + {}_nC_n = 0$$

$$\therefore {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 = {}_nC_3 - {}_nC_4 + {}_nC_5 - \cdots - {}_nC_n$$

$\cdots \textcircled{1}$

즉 ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 = 78$ 이므로

$$1 - n + \frac{n(n-1)}{2} = 78 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$n^2 - 3n - 154 = 0, \quad (n+11)(n-14) = 0$$

$$\therefore n = 14 \quad \cdots \textcircled{3}$$

답 14

채점 기준	비율
① ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 = {}_nC_3 - {}_nC_4 + {}_nC_5 - \cdots - {}_nC_n$ 임을 알 수 있다.	50%
② n 에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30%
③ n 의 값을 구할 수 있다.	20%

24 전략 중복조합과 파스칼의 삼각형을 이용한다.

풀이 ${}_nH_0 + {}_nH_1 + {}_nH_2 + \cdots + {}_nH_n$

$$= {}_{2n-1}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n+1}C_2 + \cdots + {}_{3n-1}C_n$$

$$= {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n+1}C_2 + \cdots + {}_{3n-1}C_n$$

$$= {}_{2n+1}C_1 + {}_{2n+1}C_2 + \cdots + {}_{3n-1}C_n$$

$\vdots$

$$= {}_{3n-1}C_{n-1} + {}_{3n-1}C_n$$

$$= {}_{3n}C_n$$

이므로 ${}_{3n}C_n = {}_{18}C_{12} = {}_{18}C_6$ 에서

$$n = 6$$

$$\therefore {}_nH_2 = {}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$$

답 56

최상위로는 최고 수준 문제

본책 25쪽

01

해결 단계

- 50원짜리 동전 4개와 500원짜리 동전 4개를 앞면, 뒷면을 구분하지 않고 위로 쌓는 경우의 수를 구한다.
- 8개의 동전을 쌓을 때 그림이 새겨진 면이 맞닿지 않도록 8개의 동전의 각 면을 정하는 경우의 수를 구한다.
- ①, ②에서 구한 경우의 수를 곱한다.

풀이 ① 50원짜리 동전 4개와 500원짜리 동전 4개를 앞면, 뒷면을 구분하지 않고 위로 쌓는 경우의 수는

$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70 \quad \cdots \textcircled{1}$$

② 한 개의 동전을 쌓을 때 그림이 새겨진 면이 위로 오게 쌓는 경우를 a , 숫자가 새겨진 면이 위로 오게 쌓는 경우를 b 라 하면 주어진 조건에 의하여 a, b 가 이 순서로 연속하여 나열될 수 없다.

따라서 그림이 새겨진 면이 맞닿지 않도록 8개의 동전의 각 면을 정하는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 맨 아래에 있는 동전이 a 인 경우

aaaaaaa의 1가지

(ii) 맨 아래에 있는 동전이 b 인 경우

baaaaaa, bbaaaaa, bbbaaaaa,
bbbaaaaa, bbbbaaaa, bbbbaaaa,
bbbbbbba, bbbbbbbb의 8가지

(i), (ii)에서 8개의 동전의 각 면을 정하는 경우의 수는
 $1+8=9$

③ 즉 ①의 각각의 경우에 대하여 동전의 각 면을 정하는 경우의 수가 9이므로 구하는 경우의 수는

$$70 \cdot 9 = 630 \quad \text{답 ③}$$

02

해결 단계

- ① 말이 두 칸씩 3번 이동하는 경우를 구한다.
- ② 앞면이 먼저 나오는 경우와 뒷면이 먼저 나오는 경우로 나누어 각각의 경우의 수를 구한다.
- ③ ②에서 구한 경우의 수를 더한다.

풀이 ▶ ① 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 앞면이 6번, 뒷면이 4번 나오는 경우는 6개의 H와 4개의 T를 일렬로 나열하는 경우와 같다.

이때 말이 두 칸씩 3번 이동하는 경우는

HTHT 또는 THTH

이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

② (i) HTHT인 경우

남은 4개의 H는 H와 이웃하게 나열하고 남은 2개의 T는 T와 이웃하게 나열해야 하므로 경우의 수는

$${}_2H_4 \cdot {}_2H_2 = {}_5C_4 \cdot {}_3C_2 = {}_5C_1 \cdot {}_3C_1 \\ = 5 \cdot 3 = 15$$

(ii) THTH인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 경우의 수는 15이다.

③ (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$15 + 15 = 30 \quad \text{답 30}$$

03

해결 단계

- ① $n(A-B)=0, n(B-A)=2$ 일 때 함수 f 의 개수를 구한다.
- ② $n(A-B)=1, n(B-A)=1$ 일 때 함수 f 의 개수를 구한다.
- ③ $n(A-B)=2, n(B-A)=0$ 일 때 함수 f 의 개수를 구한다.
- ④ ①, ②, ③에서 구한 함수의 개수를 모두 더한다.

풀이 ▶ ① (i) $n(A-B)=0, n(B-A)=2$ 인 경우

두 집합 A, B 를 정하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 = 10 \cdot 3 = 30$$

이때 $n(A)=2, n(B)=4$ 이므로 함수 f 의 개수는

$$30 \cdot {}_4H_2 = 30 \cdot {}_5C_2 = 30 \cdot 10 = 300$$

• $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $A \cap B$ 의 원소 2개를 정하는 경우의 수

• 집합 $B-A$ 의 원소 2개를 정하는 경우의 수

② (ii) $n(A-B)=1, n(B-A)=1$ 인 경우

두 집합 A, B 를 정하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_1 = 10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$$

이때 $n(A)=3, n(B)=3$ 이므로 함수 f 의 개수는

$$60 \cdot {}_3H_3 = 60 \cdot {}_5C_3 = 60 \cdot 10 = 600$$

③ (iii) $n(A-B)=2, n(B-A)=0$ 인 경우

두 집합 A, B 를 정하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 = 10 \cdot 3 = 30$$

이때 $n(A)=4, n(B)=2$ 이므로 함수 f 의 개수는

$$30 \cdot {}_2H_4 = 30 \cdot {}_5C_4 = 30 \cdot 5 = 150$$

④ 이상에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$300 + 600 + 150 = 1050 \quad \text{답 ④}$$

04

해결 단계

- ① 주어진 등식의 양변에 $11!$ 을 곱하여 정리한다.
- ② ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 와 이항계수의 성질을 이용하여 식을 변형한다.
- ③ $2n+24$ 의 값을 구한다.

풀이 ▶ ① 주어진 등식의 양변에 $11!$ 을 곱하면

$$n = \frac{11!}{9! \cdot 2!} + \frac{11!}{8! \cdot 3!} + \frac{11!}{7! \cdot 4!} + \frac{11!}{6! \cdot 5!} \\ = {}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_5$$

② 이때

$${}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_5 \\ = {}_{11}C_9 + {}_{11}C_8 + {}_{11}C_7 + {}_{11}C_6$$

이므로

$$2n = {}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 + \cdots + {}_{11}C_9$$

또 ${}_{11}C_0 = {}_{11}C_{11} = 1, {}_{11}C_1 = {}_{11}C_{10} = 11$ 이므로

$${}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 + \cdots + {}_{11}C_{11} \\ = 1 + 11 + 2n + 11 + 1$$

$$\therefore 2n + 24 = 2^{11} = 2048 \quad \text{답 ②}$$

II 확률

II -1. 확률의 뜻과 활용

개념 & 핵심 기출

본책 28~31쪽

01 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 표본공간 S 는

$$S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

$$\therefore n(S) = 6 \cdot 6 = 36$$

첫 번째에 나오는 눈의 수가 두 번째에 나오는 눈의 수의 배수가 되는 사건 A 는

$$A = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$$

$$\therefore n(A) = 14$$

$$\therefore n(S) - n(A) = 22$$

답 ②

02 $\neg$. $n(S) = {}_5C_2 = 10$ 이므로 근원사건의 개수는 10이다.

ㄴ. 꺼낸 공에 적힌 두 수를 순서쌍으로 나타내면 차가 홀수인 사건 A 는

$$A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (1, 4), (2, 5)\}$$

$$\therefore n(A) = 6$$

ㄷ. 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합의 최댓값은 9이므로

$$B = \emptyset$$

이상에서 $\neg$, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

$$\begin{aligned} \mathbf{03} \quad S &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \\ A &= \{2, 3, 5, 7\}, B = \{1, 3, 5, 7\} \end{aligned}$$

$$\therefore A \cap B = \{3, 5, 7\}$$

$A \cap B$ 와 서로 배반인 사건은

$$(A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 6, 8\}$$

의 부분집합이다.

따라서 구하는 사건의 개수는 $2^5 = 32$

답 32

$$\begin{aligned} \mathbf{04} \quad S &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ A &= \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{5\} \end{aligned}$$

$$\neg. A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\} = C^c$$

ㄴ. $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$ 이므로 A 와 B 는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $A \cap C = \emptyset$ 이므로 A 와 C 는 서로 배반사건이다.

이상에서 옳은 것은 $\neg$, ㄷ이다.

답 ④

05 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$$

모든 수는 자기 자신의 배수이다.

꺼낸 공에 적힌 두 수 a, b ($a < b$)를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

두 수의 차가 1 또는 3

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$$

1, 3을 뽑을 때

17, 19를 뽑을 때

n 개 중에서 같은 것이 각각 p 개, q 개, ..., r 개씩 있을 때, n 개를 일렬로 나열하는 순열의 수

$$\Rightarrow \frac{n!}{p!q!\cdots r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

1, 1과 2, 2와 3, 3을 각각 한 개의 숫자로 생각하여 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

답 $\frac{1}{15}$

06 $|x-1| \leq 3$ 에서

$$-3 \leq x-1 \leq 3, \quad -2 \leq x \leq 4$$

$$\therefore A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$(x^2-1)(x^2-4)=0$ 에서

$$x = \pm 1 \text{ 또는 } x = \pm 2$$

$$\therefore B = \{-2, -1, 1, 2\}$$

$a \in A, b \in B$ 인 a, b 에 대하여 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$7 \cdot 4 = 28$$

이고 $ab \geq 0$ 인 경우는 다음 세 가지 경우이다.

(i) $a > 0, b > 0$ 일 때,

$a > 0$ 인 경우의 수는 4이고, $b > 0$ 인 경우의 수는 2이

므로 $a > 0, b > 0$ 인 경우의 수는

$$4 \cdot 2 = 8$$

(ii) $a < 0, b < 0$ 일 때,

$a < 0$ 인 경우의 수는 2이고, $b < 0$ 인 경우의 수는 2이

므로 $a < 0, b < 0$ 인 경우의 수는

$$2 \cdot 2 = 4$$

(iii) $a = 0$ 일 때,

$a = 0$ 일 때 b 는 $b \in B$ 인 모든 수이므로 그 경우의 수는

$$4$$

이상에서 $ab \geq 0$ 인 경우의 수는

$$8 + 4 + 4 = 16$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

답 ③

07 10장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

20 미만의 홀수 중 두 수의 평균의 최솟값은 2, 최댓값은 18이므로 평균이 5의 배수가 되는 경우는 5, 10, 15일 때이다.

따라서 카드에 적힌 두 수의 평균이 5의 배수가 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(i) 평균이 5인 경우

$$(1, 9), (3, 7) \text{의 2가지}$$

(ii) 평균이 10인 경우

$$(1, 19), (3, 17), (5, 15), (7, 13), (9, 11)$$

의 5가지

(iii) 평균이 15인 경우

$$(11, 19), (13, 17) \text{의 2가지}$$

이상에서 카드에 적힌 두 수의 평균이 5의 배수가 되는 경우의 수는

$$2 + 5 + 2 = 9$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{45} = \frac{1}{5}$

답 ②

08 이 공장에서 생산된 제품이 심사를 통과할 확률은

$$\frac{3250}{4000} = \frac{13}{16}$$

n 개의 제품을 심사받다고 하면

$$n \cdot \frac{13}{16} \geq 1000 \quad \therefore n \geq 1230. \dots$$

따라서 최소한 1231개의 제품을 심사받아야 한다. **답 ③**

09 20살인 여자가 80살까지 생존할 확률은

$$0.45$$

20살인 여자 500명 중 80살까지 생존할 것으로 기대되는 사람을 x 명이라 하면

$$\frac{x}{500} = 0.45$$

$$\therefore x = 225$$

따라서 구하는 사람 수는 225이다. **답 225**

10 12시간 동안 생존한 쥐는 72마리이고, 앞으로 6시간, 즉 18시간 동안 생존한 쥐는 28마리이므로 6시간 이내에 사망한 쥐의 개체 수는

$$72 - 28 = 44$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{44}{72} = \frac{11}{18}$$

답 11/18

11 점 P가 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때, $\triangle ABP$ 는 직각삼각형이 되므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 $\triangle ABP$ 는 예각삼각형이 된다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square ABCD \text{의 넓이})} = \frac{2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2}{2 \cdot 2} = 1 - \frac{\pi}{8}$$

답 ③

12 이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$$D = a^2 - 4 < 0$$

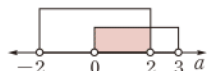
$$\therefore -2 < a < 2$$

이때 $0 < a < 3$ 이므로 주어진 방정식이 허근을 갖도록 하는 a 의 값의 범위는

$$0 < a < 2$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는

$$\text{확률은 } \frac{2}{3}$$



답 2/3

13 원점을 지나는 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$0^\circ \leq \theta < 180^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\tan(\angle BOE) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로 } \angle BOE = 30^\circ$$

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

원점과 점 $C(1, \sqrt{3})$ 을 지나는 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60° 이고, 점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 E라 하면 $\angle BOE = 30^\circ$ 이므로 원

점과 점 $B(-3, \sqrt{3})$ 을 지나는 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 150° 이다.

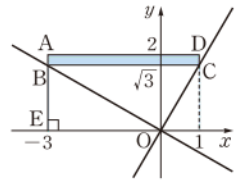
따라서 직선이 $\square ABCD$ 와 만나려면

$$60^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{90^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{2}$$

답 ③



1등급 비밀노트 >>>

기하적 확률에서는 특정한 값을 가질 확률, 즉 $\theta = 60^\circ$, $\theta = 150^\circ$ 일 확률이 0이므로

$$60^\circ \leq \theta \leq 150^\circ, 60^\circ \leq \theta < 150^\circ, 60^\circ < \theta \leq 150^\circ,$$

$60^\circ < \theta < 150^\circ$ 는 모두 같은 경우로 생각한다.

14 3, 6, 9는 모두 3의 배수이므로 두 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 합도 항상 3의 배수이다.

따라서 구하는 확률은 1이다. **답 ⑤**

15 여학생끼리 서로 이웃하지 않도록 세우려면 남학생 5명을 일렬로 세우고 남학생 사이사이 및 양 끝의 6개의 자리에 여학생 n 명을 세우면 된다.

이때 여학생이 7명 이상이면 여학생끼리 이웃하는 경우가 반드시 생기므로 여학생끼리 서로 이웃하지 않도록 세울 확률은 0이다.

따라서 $n \geq 7$ 이므로 n 의 최솟값은 7 **답 7**

16 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \cdot 6 = 36$$

두 눈의 수의 곱이 소수인 경우를 순서쌍으로 나타내면

$$(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 1), (5, 1)$$

의 6가지이므로

$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

두 눈의 수의 합의 최댓값은 12이므로

$$q = 0$$

또 두 눈의 수의 차는 항상 5 이하이므로

$$r = 1$$

$$\therefore q < p < r$$

답 ③

17 카드에 적힌 수가 4의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5},$$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$$

$$(a+2)(a-2) < 0 \quad \therefore -2 < a < 2$$

$\frac{200}{4} = 50$ 이므로 1부터 200까지의 자연수 중에서 4의 배수는 50개이고, $\frac{200}{5} = 40$ 이므로 5의 배수는 40개이다.

4와 5의 공배수, 즉 20의 배수가 적힌 카드가 나올 확률

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

18 남학생 3명, 여학생 2명을 일렬로 세울 때, 남학생끼리 이웃하는 사건을 A , 여학생끼리 이웃하는 사건을 B 라 하면

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3! \cdot 2!}{5!} = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{4! \cdot 1!}{5!} = \frac{2}{5}, \\ P(A \cap B) &= \frac{2! \cdot 3! \cdot 1!}{5!} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

19 뽑힌 2명의 학생이 모두 A형인 사건을 A , 모두 O형인 사건을 O 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_4C_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{14}, P(O) = \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{28}$$

A, O 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup O) &= P(A) + P(O) \\ &= \frac{3}{14} + \frac{3}{28} = \frac{9}{28} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

20 6개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$

세 수의 합이 0 이상 7 이하인 사건을 A 라 하면 A^c 는 세 수의 합이 0 미만이거나 7 초과인 사건이므로 세 수 a, b, c ($a < b < c$)를 순서쌍 (a, b, c) 로 나타내면

$$A^c = \{(-2, -1, 1), (-2, -1, 2), (1, 3, 4), (2, 3, 4)\}$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{답 ④}$$

21 적어도 2개가 빨간 공인 사건을 A 라 하면 A^c 는 빨간 공이 없거나 1개인 사건이므로

$$\begin{aligned} P(A^c) &= \frac{{}_6C_4}{{}_{10}C_4} + \frac{{}_6C_3 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_4} \\ &= \frac{1}{14} + \frac{8}{21} = \frac{19}{42} \end{aligned}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{19}{42} = \frac{23}{42} \quad \text{답 ④}$$

22 세 수의 곱이 짝수인 사건을 A 라 하면 A^c 는 세 수의 곱이 홀수인 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_5C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{12}$$

남학생 3명과 여학생 2명이 각각 이웃할 확률

B형인 학생은 1명이므로 2명 모두 B형일 확률은 0이다.

원소가 2개인 부분집합의 개수는 ${}_4C_2$
원소가 3개인 부분집합의 개수는 ${}_4C_3$
원소가 4개인 부분집합의 개수는 ${}_4C_4$

$a=1, b=10$ 이면 두 직선이 일치하므로 $b \neq 10$ 이어야 한다.

세 수의 곱이 홀수가 되려면 세 수 모두 홀수이어야 하므로 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 뽑는다.

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\text{답 } \frac{11}{12}$$

1등급 비밀노트 >>>

세 수의 곱이 짝수인 경우는

$$(\text{짝수}) \times (\text{짝수}) \times (\text{짝수}),$$

$$(\text{짝수}) \times (\text{짝수}) \times (\text{홀수}),$$

$$(\text{짝수}) \times (\text{홀수}) \times (\text{홀수})$$

의 3가지이고 세 수의 곱이 홀수인 경우는

$$(\text{홀수}) \times (\text{홀수}) \times (\text{홀수})$$

의 1가지이다. 따라서 세 수의 곱이 짝수인 경우의 수를 직접 구하는 것보다 여사건을 이용하는 것이 편리하다.

1등급을 위한 고난도 문제

본책 32~35쪽

01 같은 색의 공이 나오는 경우의 수가 99이므로

$${}_nC_2 + {}_mC_2 = 99$$

흰 공과 검은 공을 합하여 20개가 들어 있으므로

$$n + m = 20, \text{ 즉 } m = 20 - n \text{에서}$$

$${}_nC_2 + {}_{20-n}C_2 = 99$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(20-n)(19-n)}{2} = 99$$

$$n^2 - 20n + 91 = 0, \quad (n-7)(n-13) = 0$$

$$\therefore n = 7 \text{ 또는 } n = 13$$

이때 $n > m$ 이므로

$$n = 13, m = 7$$

$$\therefore 2n - m = 2 \cdot 13 - 7 = 19$$

$$\text{답 19}$$

02 사건 A 와 배반인 사건은 A^c 의 부분집합이고, 사건 B 와 배반인 사건은 B^c 의 부분집합이므로 두 사건 A, B 와 모두 배반인 사건은 $A^c \cap B^c$, 즉 $(A \cup B)^c$ 의 부분집합이다.

이때 $A \cup B = \{1, 2, 4, 8, 9\}$ 이므로

$$(A \cup B)^c = \{3, 5, 6, 7\}$$

따라서 구하는 사건의 개수는 $(A \cup B)^c$ 의 부분집합 중 원소가 2개 이상인 것의 개수이므로

$$\begin{aligned} {}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4 &= 6 + 4 + 1 \\ &= 11 \end{aligned} \quad \text{답 11}$$

03 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \cdot 6 = 36$$

두 직선이 평행하려면

$$a = 1, b \neq 1$$

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$$

의 5가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{5}{36}$$

$$\text{답 ③}$$

1 등급 비밀노트 >>>

직선의 위치 관계

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ 이

- ① 일치 $\rightarrow m=m', n=n'$
- ② 평행 $\rightarrow m=m', n \neq n'$
- ③ 수직 $\rightarrow mm'=-1$

04 6장의 카드를 3장씩 2줄로 나열하는 경우의 수는

$$6! = 720$$

이때 두 수의 합이 7이 되는 경우는

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4)$$

의 3가지이므로 이 순서쌍을 세 열에 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3! \cdot 2! \cdot 2! = 48$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{48}{720} = \frac{1}{15}$$

답 $\frac{1}{15}$

05 $3000=2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$ 이므로

$$n(A) = (3+1) \cdot (1+1) \cdot (3+1) = 32$$

이때 집합 A의 원소 중에서 5의 배수인 것의 개수는 $2^3 \cdot 3$ 의 양의 약수에 5, 5^2 , 5^3 을 각각 곱한 것의 개수와 같으므로

$$(3+1) \cdot (1+1) \cdot 3 = 24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

답 ④

06 6명 중에서 4명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수는

$${}_6P_4 = 360$$

A, B가 뽑혀 이웃하게 서려면 A, B를 제외한 나머지 4명 중 2명을 뽑은 후 A, B가 이웃하도록 A, B를 포함한 4명을 일렬로 세우면 되므로

$${}_4C_2 \cdot 3! \cdot 2! = 72$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{72}{360} = \frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

채점 기준	비율
① 6명 중에서 4명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
② A, B가 뽑혀 이웃하게 서는 경우의 수를 구할 수 있다.	50%
③ A, B가 뽑혀 이웃하게 설 확률을 구할 수 있다.	20%

원과 직선이 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d , 반지름의 길이를 r 라 할 때,
 $d \leq r$ 이어야 한다.

자연수 N 이
 $N=p^l q^m r^n$
(p, q, r 는 서로 다른 소수, l, m, n 은 자연수)
꼴로 소인수분해될 때,
 N 의 양의 약수의 개수는
 $(l+1)(m+1)(n+1)$

A, B를 제외한 4명 중 2명을 뽑는 경우의 수는
 ${}_4C_2$
A, B를 한 명으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$
A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

07 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는
 $6 \cdot 6 = 36$

원 $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ 의 중심 $(a, 0)$ 과 직선 $y = \frac{a}{2}x + 2$,

즉 $ax - 2y + 4 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a^2 + 4|}{\sqrt{a^2 + (-2)^2}} = \sqrt{a^2 + 4}$$

원의 반지름의 길이가 b 이므로 원과 직선이 만나려면

$$\sqrt{a^2 + 4} \leq b \quad \therefore a^2 + 4 \leq b^2$$

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$$(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$$

의 14가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

답 ②

08 10개의 공 중에서 2개의 공을 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

2개의 공이 접하는 경우는

$$(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 7), (4, 8), (5, 6), (5, 8), (5, 9), (6, 9), (6, 10), (7, 8), (8, 9), (9, 10)$$

의 18가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

답 ③

09 집합 X의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

$$2^4 - 1 = 15$$

이므로 두 집합을 택하는 경우의 수는

$${}_{15}C_2 = 105$$

두 부분집합이 서로소인 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 두 부분집합의 원소가 모두 1개인 경우

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot \frac{1}{2!} = 6$$

(ii) 두 부분집합의 원소가 1개, 2개인 경우

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_2 = 12$$

(iii) 두 부분집합의 원소가 1개, 3개인 경우

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_3 = 4$$

(iv) 두 부분집합의 원소가 모두 2개인 경우

$${}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} = 3$$

이상에서 두 부분집합이 서로소인 경우의 수는

$$6 + 12 + 4 + 3 = 25$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{25}{105} = \frac{5}{21}$$

답 $\frac{5}{21}$

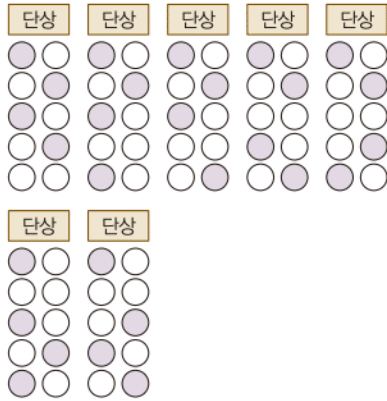
10 10명의 학생이 2명씩 5줄로 서는 경우의 수는

$$10!$$

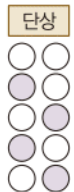
답 ①

여학생의 앞, 뒤, 좌, 우 모두에 여학생이 서지 않도록 여학생이 설 자리를 정하는 경우는 다음과 같다.

- (i) 첫 번째 줄 왼쪽에 여학생이 서는 경우
다음과 같이 7가지가 있다.



- (ii) 첫 번째 줄 오른쪽에 여학생이 서는 경우
(i)과 같은 방법으로 하면 경우의 수는 7이다.
(iii) 두 번째 줄 왼쪽에 여학생이 서는 경우
다음과 같이 1가지가 있다.



- (iv) 두 번째 줄 오른쪽에 여학생이 서는 경우
(iii)과 같은 방법으로 하면 경우의 수는 1이다.
이상에서 10명의 학생이 주어진 조건을 만족시키면서 서
는 경우의 수는

$$(7+7+1+1) \cdot 4! \cdot 6! = 16 \cdot 4! \cdot 6! \quad \cdots ②$$

이므로 그 확률은

$$\frac{16 \cdot 4! \cdot 6!}{10!} = \frac{8}{105} \quad \cdots ③$$

따라서 $p=105$, $q=8$ 이므로

$$p+q=113 \quad \cdots ④$$

답 113

채점 기준	비율
① 10명의 학생이 서는 경우의 수를 구할 수 있다.	20%
② 여학생의 앞, 뒤, 좌, 우 모두에 여학생이 서지 않도록 자리를 정하는 경우의 수를 구할 수 있다.	50%
③ 여학생의 앞, 뒤, 좌, 우 모두에 여학생이 서지 않을 확률을 구할 수 있다.	20%
④ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	10%

- 11 세 꼭짓점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는
 ${}_8C_3=56$

- (i) 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형의 개수는

$$4 \cdot 6 = 24$$

- (ii) 두 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 이등변삼각형의 개수는

$$8$$

- (i), (ii)에서 이등변삼각형의 개수는

$$24+8=32$$

4개의 자리에 여학생을 세우는 경우의 수

6개의 자리에 남학생을 세우는 경우의 수

각 면에서 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형을 4개씩 만들 수 있다.

세 변의 길이가 모두 $\sqrt{2}$ 인 정삼각형

따라서 구하는 확률은

$$\frac{32}{56} = \frac{4}{7}$$

답 ③

- 12 갑과 을이 동전을 각각 3번, 4번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

①

이때 을이 이기는 경우는 다음과 같다.

- (i) 갑은 모두 뒷면이 나오고, 을은 앞면이 1번 이상 나오는 경우의 수는

$${}_3C_0 \cdot ({}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4) = 15$$

- (ii) 갑은 앞면이 1번 나오고, 을은 앞면이 2번 이상 나오는 경우의 수는

$${}_3C_1 \cdot ({}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4) = 33$$

- (iii) 갑은 앞면이 2번 나오고, 을은 앞면이 3번 이상 나오는 경우의 수는

$${}_3C_2 \cdot ({}_4C_3 + {}_4C_4) = 15$$

- (iv) 갑은 앞면이 3번 나오고, 을은 앞면이 4번 나오는 경우의 수는

$${}_3C_3 \cdot {}_4C_4 = 1$$

이상에서 을이 이기는 경우의 수는

$$15+33+15+1=64$$

②

따라서 구하는 확률은

$$\frac{64}{2^7} = \frac{2^6}{2^7} = \frac{1}{2}$$

③

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① 갑과 을이 동전을 각각 3번, 4번 던지는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
② 을이 이기는 경우의 수를 구할 수 있다.	50%
③ 을이 이길 확률을 구할 수 있다.	20%

- 13 확률의 총합은 1이므로

$$a = 1 - (0.08 + 0.44 + 0.11) = 0.37$$

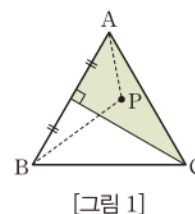
따라서 $\frac{185}{n} = 0.37$ 이므로

$$n = \frac{185}{0.37} = 500$$

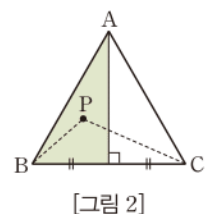
$$\therefore 100a + n = 37 + 500 = 537$$

답 537

- 14 $\overline{AP} \leq \overline{BP}$ 를 만족시키는 점 P가 존재하는 영역은 [그림 1]의 색칠한 부분과 같고, $\overline{BP} \leq \overline{CP}$ 를 만족시키는 점 P가 존재하는 영역은 [그림 2]의 색칠한 부분과 같다.



[그림 1]

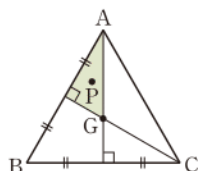


[그림 2]

따라서 $\overline{AP} \leq \overline{BP} \leq \overline{CP}$ 를 만족시키는 점 P가 존재하는 영역은 [그림 3]의 색칠한 부분과 같다. 이때 점 G는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{6}$$

답 ④



[그림 3]

삼각형의 세 중선의 교점
→ 삼각형의 무게중심

15 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 지름 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CH} \\ \therefore \overline{AC} \cdot \overline{BC} &= 2r \cdot \overline{CH}\end{aligned}$$

이때 $\overline{AC} \cdot \overline{BC} > r^2$ 이려면

$$2r \cdot \overline{CH} > r^2 \quad \therefore \overline{CH} > \frac{r}{2}$$

→ ①

한편 지름 AB와 평행하고 반원의 중심 O에서의 거리가 $\frac{r}{2}$ 인 직선과 반원의 교점을 각각 A', B'이라 하면

$$\begin{aligned}\angle AOA' &= \angle BOB' = 30^\circ \\ \therefore \angle A'OB' &= 120^\circ\end{aligned}$$

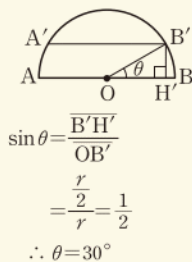
→ ②

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} = \frac{\frac{120}{180} \cdot \pi r}{\pi r} = \frac{2}{3}$$

→ ③

답 $\frac{2}{3}$



$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\overline{B'H'}}{\overline{OB'}} \\ \frac{r}{2} &= \frac{r}{r} \cdot \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 30^\circ\end{aligned}$$

채점 기준	비율
① $\overline{AC} \cdot \overline{BC} > r^2$ 일 때 CH의 길이의 범위를 구할 수 있다.	50%
② $\angle A'OB'$ 의 크기를 구할 수 있다.	30%
③ $\overline{AC} \cdot \overline{BC} > r^2$ 이 성립할 확률을 구할 수 있다.	20%

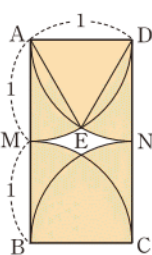
16 □ABCD의 가장 가까운 꼭짓점까지의 거리가 1 이하인 점 P가 존재하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ 의 중점을 각각 M, N이라 하고, 부채꼴 DAM과 부채꼴 ADN의 교점을 E라 하면 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}& 2\{(\text{부채꼴 EAM의 넓이}) + (\text{부채꼴 EDN의 넓이}) + \triangle AED\} \\ &= 2\left(\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{30}{360} + \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{30}{360} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2\right) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square ABCD \text{의 넓이})} &= \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

답 ②



한 변의 길이가 1인 정삼각형

$$\begin{aligned}\angle EAD &= 60^\circ \text{이므로} \\ \angle EAM &= 90^\circ - 60^\circ \\ &= 30^\circ\end{aligned}$$

17 세 사람이 각각 주사위를 던질 때, 모든 경우의 수는 $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

A, B, C 세 사람이 주사위를 던져서 나오는 세 수를 각각 a, b, c라 하자.

$b+c=n$ (n은 자연수)을 만족시키는 순서쌍 (b, c)는 (1, n-1), (2, n-2), ..., (n-1, 1)

의 (n-1)개이므로 A가 이기는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) a=3인 경우

$$b+c=2 \text{이므로} \quad 1$$

(ii) a=4인 경우

$$b+c=2, 3 \text{이므로} \quad 1+2=3$$

(iii) a=5인 경우

$$b+c=2, 3, 4 \text{이므로} \quad 1+2+3=6$$

(iv) a=6인 경우

$$b+c=2, 3, 4, 5 \text{이므로} \quad 1+2+3+4=10$$

이상에서 A가 이기는 경우의 수는

$$1+3+6+10=20$$

같은 방법으로 하면 B, C가 이기는 경우의 수도 각각 20이므로 A, B, C 세 사람이 각각 이기는 사건을 A, B, C라 하면

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$

이고, A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= \frac{5}{54} + \frac{5}{54} + \frac{5}{54} = \frac{5}{18}\end{aligned}$$

답 ②

18 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \cdot 6 = 36$$

두 눈의 수 중에서 크지 않은 값이 3인 사건을 A, 작지 않은 값이 4인 사건을 B라 하고 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$$A = \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$$

$$B = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$A \cap B = \{(3, 4), (4, 3)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{7}{36}, P(B) = \frac{7}{36},$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{7}{36} + \frac{7}{36} - \frac{1}{18} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

19 U의 부분집합의 개수는

$$2^5 = 32$$

$n(A)=a$ 라 하면 U의 부분집합 중 집합 A를 포함하는 것의 개수는 2^{5-a}

집합 A 를 포함하는 부분집합을 택하는 사건을 A 라 하면

$$P(A) = \frac{2^{5-a}}{2^5} = \frac{1}{4} \quad \therefore a=2$$

같은 방법으로 $n(B)=b$ 라 하고 U 의 부분집합 중 집합 B 를 포함하는 것을 택하는 사건을 B 라 하면

$$P(B) = \frac{2^{5-b}}{2^5} = \frac{1}{8} \quad \therefore b=3$$

즉 집합 X, Y 는 U 의 부분집합 중 원소의 개수가 각각 2, 3인 것을 원소로 가지므로

$$n(X) = {}_5C_2 = 10, n(Y) = {}_5C_3 = 10$$

따라서 집합 X, Y 의 원소를 택하는 사건을 각각 C, D 라 하면

$$P(C) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}, P(D) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

이고, C, D 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(C \cup D) &= P(C) + P(D) \\ &= \frac{5}{16} + \frac{5}{16} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

20 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6 \cdot 6 = 36$

$f(x)=0$ 에서

$$||x-3|-2|-1=0, \quad ||x-3|-2|=1$$

$$|x-3|=1 \text{ 또는 } |x-3|=3$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=4 \text{ 또는 } x=6$$

$f(a)f(b)=0$ 인 사건을 A 라 하면 A^c 는 $f(a)f(b) \neq 0$, 즉 $f(a) \neq 0$ 이고 $f(b) \neq 0$ 인 사건이다.

이때 $f(a) \neq 0$ 이고 $f(b) \neq 0$ 이라면 a, b 의 값은 각각 1, 3, 5 중 하나이어야 하므로

$$\begin{aligned} P(A^c) &= \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{4} \\ \therefore P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

다른 풀이 $f(a)=0$ 인 사건을 A , $f(b)=0$ 인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{3 \cdot 6}{36} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{6 \cdot 3}{36} = \frac{1}{2}$$

$f(a)=0$ 이고 $f(b)=0$ 이라면 a, b 의 값은 각각 2, 4, 6 중 하나이어야 하므로

$$P(A \cap B) = \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

21 집합 A 에서 임의로 서로 다른 두 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

a 가 짝수이거나 소수인 사건을 A 라 하면 A^c 는 a 가 소수가 아닌 홀수인 사건이다.

$$1 \leq a \leq 17$$

이때 a 가 소수가 아닌 홀수이라면 1 또는 9 또는 15이어야 하므로 택한 두 원소를 순서쌍으로 나타내면

$$A^c = \{(0, 1), (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (6, 9), (7, 8)\}$$

$$\text{이므로 } P(A^c) = \frac{8}{45}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{8}{45} = \frac{37}{45}$$

③

22 흰 공이 적어도 1개 나오는 사건을 A 라 하면 A^c 는 검은 공만 2개 나오는 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_3C_2}{{}_{n+3}C_2} = \frac{6}{(n+3)(n+2)}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{6}{(n+3)(n+2)}$$

①

$$P(A) \geq \frac{14}{15} \text{에서}$$

$$1 - \frac{6}{(n+3)(n+2)} \geq \frac{14}{15}$$

$$\frac{6}{(n+3)(n+2)} \leq \frac{1}{15}$$

$$(n+3)(n+2) \geq 90, \quad n^2 + 5n - 84 \geq 0$$

$$(n+12)(n-7) \geq 0$$

이때 $n+12 > 0$ 이므로

$$n-7 \geq 0 \quad \therefore n \geq 7$$

따라서 n 의 최솟값은 7이다.

②

⑦

채점 기준	비율
① 흰 공이 적어도 1개 나올 확률을 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
② n 의 최솟값을 구할 수 있다.	50%

23 10장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

$f(a) \neq f(b)$ 인 사건을 A 라 하면 A^c 는 $f(a)=f(b)$ 인 사건이다.

이때

$$f(1)=f(5)=f(9)=7,$$

$$f(2)=f(6)=f(10)=9,$$

$$f(3)=f(7)=3,$$

$$f(4)=f(8)=1$$

이므로 $f(a)=f(b)$ 인 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i) $f(a)=f(b)=7$ 인 경우

1, 5, 9의 3개의 자연수 중에서 2개를 택하면 되므로 ${}_3C_2 = 3$

(ii) $f(a)=f(b)=9$ 인 경우

2, 6, 10의 3개의 자연수 중에서 2개를 택하면 되므로 ${}_3C_2 = 3$

7의 거듭제곱의 일의 자리
의 수는 7, 9, 3, 10이 이
순서대로 반복된다.

a 는 짝수도 아니고 소수도
아니다.

(iii) $f(a)=f(b)=3$ 인 경우

3, 7의 2개의 자연수 중에서 2개를 택하면 되므로

$${}_2C_2=1$$

(iv) $f(a)=f(b)=1$ 인 경우

4, 8의 2개의 자연수 중에서 2개를 택하면 되므로

$${}_2C_2=1$$

이상에서 $f(a)=f(b)$ 인 경우의 수는

$$3+3+1+1=8$$

→ ①

$$\text{이므로 } P(A^c) = \frac{8}{45}$$

→ ②

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{8}{45} = \frac{37}{45}$$

→ ③

$$\text{답 } \frac{37}{45}$$

채점 기준	비율
① $f(a)=f(b)$ 인 경우의 수를 구할 수 있다.	60%
② $f(a)=f(b)$ 일 확률을 구할 수 있다.	20%
③ $f(a) \neq f(b)$ 일 확률을 구할 수 있다.	20%

24 $X=\{a, b, c\}$ 에서 $Y=\{-2, -1, 0, 1\}$ 로의 함수의 개수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

집합 F 에서 임의로 선택한 함수 f 가 $f(a)f(b)f(c) \geq 0$ 을 만족시키는 함수인 사건을 A 라 하면 A^c 는 함수 f 가 $f(a)f(b)f(c) < 0$ 을 만족시키는 함수인 사건이다.

이때 $f(a)f(b)f(c) < 0$ 이라면 $f(a), f(b), f(c)$ 중 음수가 3개이거나 음수가 1개, 양수가 2개이어야 하므로 $f(a)f(b)f(c) < 0$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는 다음과 같다.

(i) $f(a), f(b), f(c)$ 가 모두 음수일 때,

$f(a), f(b), f(c)$ 는 각각 -2 또는 -1 이므로

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

(ii) $f(a), f(b), f(c)$ 중 음수가 1개, 양수가 2개일 때,

$f(a), f(b), f(c)$ 중 1개는 -2 또는 -1 이고 2개는 1이므로

$${}_3C_1 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

이상에서 $f(a)f(b)f(c) < 0$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$8+6=14$$

$$\text{이므로 } P(A^c) = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{7}{32} = \frac{25}{32}$$

→ ①

1등급 비밀노트 >>>

두 집합 X, Y 의 원소의 개수가 각각 $m, n (m \leq n)$ 일 때

① 함수 f 의 개수 ${}_n\Pi_m$

② 일대일함수의 개수 ${}_nP_m$

③ 일대일대응의 개수 ${}_mP_m = m!$ (단, $n=m$)

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 36쪽

01 한 개의 구슬을 꺼내는 시행에서 표본공간을 S 라 하면
 $S=\{1, 2, 3, \dots, 25\}$,

$$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\},$$

$$B=\{6, 12, 18, 24\}$$

(i) n 이 짝수일 때,

$$\{2, 6, 12, 18, 24\} \subset A \cup B \text{이므로}$$

$(A \cup B) \cap C_n = \emptyset$ 을 만족시키는 n 의 값은 8, 14, 20이다.

(ii) n 이 홀수일 때,

$$\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\} \subset A \cup B \text{이므로}$$

$(A \cup B) \cap C_n = \emptyset$ 을 만족시키는 n 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 두 사건 $A \cup B$ 와 C_n 이 서로 배반사건이 되도록 하는 n 의 값은 8, 14, 20이므로 구하는 합은

$$8+14+20=42$$

→ 42

02 원소가 3개인 부분집합의 개수는

$${}_{10}C_3=120$$

원소가 3개인 부분집합의 원소를 각각 a_1, a_2, a_3

$(a_1 < a_2 < a_3)$ 이라 하고 이웃한 두 수끼리의 차가 일정한 a_1, a_2, a_3 을 순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 으로 나타내면 그 개수는 다음과 같다.

(i) 이웃한 두 수끼리의 차가 1인 경우

$$(1, 2, 3), (2, 3, 4), \dots, (8, 9, 10) \text{의 } 8$$

(ii) 이웃한 두 수끼리의 차가 2인 경우

$$(1, 3, 5), (2, 4, 6), \dots, (6, 8, 10) \text{의 } 6$$

(iii) 이웃한 두 수끼리의 차가 3인 경우

$$(1, 4, 7), (2, 5, 8), \dots, (4, 7, 10) \text{의 } 4$$

(iv) 이웃한 두 수끼리의 차가 4인 경우

$$(1, 5, 9), (2, 6, 10) \text{의 } 2$$

이상에서 조건을 만족시키는 부분집합의 개수는

$$8+6+4+2=20$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

→ ③

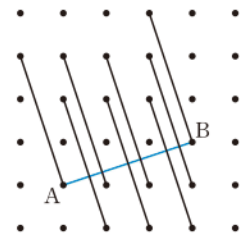
03 36개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{36}C_2=630$$

$\overline{AB}$ 와 수직으로 만나는 선분은 오른쪽 그림과 같이 8개이므로 구하는 확률은

$$\frac{8}{630} = \frac{4}{315}$$

→ ④



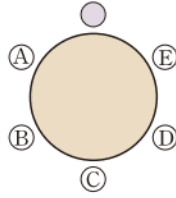
1등급 비밀노트 >>>

선분 AB 의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이므로 기울기가 -3 인 선분을 모두 그린 후 그중에서 선분 AB 와 만나는 것을 찾는다.

04 빈 의자 1개에 5명을 제외한 다른 학생이 앉는다고 생각하면 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

오른쪽 그림과 같이 빈 의자를 고정시키고 나머지 5개의 의자를 각각 A, B, C, D, E라 하면 남학생 2명이 A, E에 앉는 경우의 수는



$${}_3P_2 = 6$$

남은 남학생 1명과 여학생 2명이 B, C, D에 앉는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 여학생의 양옆에 빈 의자가 놓이지 않도록 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$6 \cdot 6 = 36$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

답 ③

05 두 자리 자연수는 90개, 짝수인 한 자리 자연수는 4개이므로 모든 경우의 수는

$$90 \cdot 4 = 360$$

두 자리 자연수와 짝수인 한 자리 자연수를 곱하여 세 자리 자연수가 나오는 사건을 A라 하면 A^c 는 두 자리 자연수와 짝수인 한 자리 자연수를 곱하여 두 자리 자연수가 나오는 사건이다. 이때 두 자리 자연수가 나오는 경우는 다음과 같다.

(i) 한 자리 자연수가 2인 경우

10, 11, ..., 49의 40개

(ii) 한 자리 자연수가 4인 경우

10, 11, ..., 24의 15개

(iii) 한 자리 자연수가 6인 경우

10, 11, ..., 16의 7개

(iv) 한 자리 자연수가 8인 경우

10, 11, 12의 3개

이상에서 두 자리 자연수가 나오는 경우의 수는

$$40 + 15 + 7 + 3 = 65$$

$$\text{이므로 } P(A^c) = \frac{65}{360} = \frac{13}{72}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{13}{72} = \frac{59}{72}$$

따라서 $p=72$, $q=59$ 이므로

$$p+q=131$$

답 131

06 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \cdot 6 = 36$$

두 개의 주사위의 눈의 수의 합이 짝수이려면 눈의 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 하므로

$$P(A) = \frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{2}$$

사건 B의 여사건 B^c 는 두 개의 주사위의 눈의 수가 모두 4가 아닌 사건이므로

$$P(B^c) = \frac{5 \cdot 5}{36} = \frac{25}{36}$$

$$\therefore P(B) = 1 - P(B^c)$$

$$= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

이때

$$A \cap B = \{(2, 4), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 4)\}$$

이므로

$$P(A \cap B) = \frac{5}{36}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{11}{36} - \frac{5}{36} = \frac{2}{3}$$

답 ③

2, 4, 6, 8

두 자리 자연수와 짝수인 한 자리 자연수의 곱의 최솟값은

$$10 \cdot 2 = 20$$

최댓값은

$$99 \cdot 8 = 792$$

이므로 두 자리 자연수와 짝수인 한 자리 자연수를 곱하면 두 자리 또는 세 자리 자연수가 나온다.

II -2. 조건부확률

개념 & 핵심 기출

본책 38~39쪽

01 안경을 안 쓴 학생을 택하는 사건을 A , 여학생을 택하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{19}{30}, P(A \cap B) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{9}{30}}{\frac{19}{30}} = \frac{9}{19} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{9}{19}$$

02 두 개의 주사위 A, B 를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \cdot 6 = 36$$

두 수 a, b 가 $a \geq b$ 를 만족시키는 사건을 A , $b^2 \geq a$ 를 만족시키는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_6H_2}{{}_6H_2} = \frac{{}_7C_2}{{}_6H_2} = \frac{7}{12}$$

또 $b \leq a \leq b^2$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 3),$
 $(5, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (5, 5),$
 $(6, 5), (6, 6)$

의 14개이므로 $P(A \cap B) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{7}{18}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{2}{3}$$

03 $P(B|A) = \frac{1}{4}$ 에서

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{4} P(A) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$P(A|B) = \frac{1}{3}$ 에서

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{3} P(B) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $\frac{1}{4} P(A) = \frac{1}{3} P(B)$ 이므로

$$P(B) = \frac{3}{4} P(A)$$

이때 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$1 = P(A) + \frac{3}{4} P(A) - \frac{1}{4} P(A)$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{3} \quad \text{답 } \frac{2}{3}$$

3, 6, 9, 12, 15, 18

04 1부터 20까지의 자연수 중에서 3의 배수는 6개이므로 첫 번째에 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A , 두 번째에 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 E 라 하면

$$\begin{aligned} P(A \cap E) &= P(A)P(E|A) \\ &= \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{38} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap E) &= P(A^c)P(E|A^c) \\ &= \frac{14}{20} \cdot \frac{6}{19} = \frac{21}{95} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(E) &= P(A \cap E) + P(A^c \cap E) \\ &= \frac{3}{38} + \frac{21}{95} = \frac{3}{10} \end{aligned} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

05 A 가 B 에게 준 구슬이 흰 구슬인 사건을 A , 파란 구슬인 사건을 B , B 가 흰 구슬을 택하는 사건을 E 라 하면

$$\begin{aligned} P(A \cap E) &= P(A)P(E|A) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B \cap E) &= P(B)P(E|B) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{2}{15} = \frac{13}{30} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{13}{30}$$

06 S 코스로 게임을 하는 사건을 A , Z 코스로 게임을 하는 사건을 B , 승리하는 사건을 E 라 하면

$$\begin{aligned} P(A \cap E) &= P(A)P(E|A) \\ &= \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{21}{50} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B \cap E) &= P(B)P(E|B) \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{3}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= \frac{21}{50} + \frac{3}{25} = \frac{27}{50} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(B|E) &= \frac{P(B \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{\frac{3}{25}}{\frac{27}{50}} = \frac{2}{9} \end{aligned} \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

07 $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $B_n = \{n, n+1, \dots, 6\}$ 이므로

$$P(A) = \frac{2}{3},$$

$$P(B_n) = \frac{7-n}{6} \quad (n=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

이때 $A \cap B_1 = \{1, 2, 5, 6\}$, $A \cap B_2 = \{2, 5, 6\}$,

$A \cap B_3 = A \cap B_4 = A \cap B_5 = \{5, 6\}$, $A \cap B_6 = \{6\}$ 에서

$$P(A \cap B_1) = \frac{2}{3}, P(A \cap B_2) = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B_3) = P(A \cap B_4) = P(A \cap B_5) = \frac{1}{3},$$

$$P(A \cap B_6) = \frac{1}{6}$$

이므로

첫 번째에 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수가 아닌 사건

$b=1, 2, \dots, 6$ 일 때를 기준으로 a 의 값을 구한다.

S 코스와 Z 코스의 두 코스가 있으므로 두 사건 $A \cap E$ 와 $B \cap E$ 는 서로 배반사건이다.

$$P(A \cap B_1) = P(A)P(B_1) = \frac{2}{3},$$

$$P(A \cap B_4) = P(A)P(B_4) = \frac{1}{3}$$

따라서 A 와 B_1 , A 와 B_4 는 각각 서로 독립이므로 구하는 n 의 값의 합은

$$1+4=5$$

답 5

08 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2}$$

또 $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{12}$ 에서

$$P((A \cup B)^c) = \frac{1}{12}$$

$$1 - P(A \cup B) = \frac{1}{12}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{11}{12}$$

따라서 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$\frac{11}{12} = P(A) + P(B) - \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A) + P(B) = \frac{17}{12}$$

답 ③

09 4명의 환자 중 3명의 환자가 완치될 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

4명의 환자가 모두 완치될 확률은

$${}_4C_4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{81}{256}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{27}{64} + \frac{81}{256} = \frac{189}{256}$$

답 ⑤

10 A가 5번째 게임을 마친 후 상금을 가져가려면 4번째 게임까지 2번을 이기고 5번째 게임을 이기면 된다.

따라서 구하는 확률은

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$$

답 ②

B가 이기거나 비길 확률

11 가위바위보를 한 번 하여 준수가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$, 지거나 비길 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.

10번의 가위바위보에서 준수가 이긴 횟수를 n 이라 하면 가위바위보를 10번 한 후 상자에 20개의 공이 남아 있으므로

$$30 - 3n + 2(10 - n) = 20$$

$$5n = 30 \quad \therefore n = 6$$

따라서 상자 안에 20개의 공이 남아 있을 확률은

$${}_{10}C_6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = {}_{10}C_4 \frac{2^4}{3^{10}} = 210 \cdot \frac{2^4}{3^{10}} = \frac{1120}{3^9}$$

$$\therefore k = 1120$$

답 1120

준수가 이겨서 상자 안에서 꺼낸 공의 개수

준수가 지거나 비겨서 상자 밖에서 넣은 공의 개수

준수가 6번 이길 확률

1등급을 위한 고난도 문제

본책 40~42쪽

$$01 P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(B|A) = 1 - P(B^c|A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \text{ 이므로}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{5}{6} P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{3}$$

따라서 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$\frac{5}{6} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(B) = \frac{23}{30}$$

답 ④

02 서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 A , 소수인 사건을 B 라 하자.

나오는 눈의 수의 곱이 홀수이려면 각각의 눈의 수가 홀수이어야 하므로

$$P(A) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{216} = \frac{1}{8}$$

또 3개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c 라 할 때, 나오는 눈의 수의 곱이 홀수이면서 소수인 순서쌍 (a, b, c) 는

$$(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1),$$

$$(1, 1, 5), (1, 5, 1), (5, 1, 1)$$

$$\text{의 6개이므로 } P(A \cap B) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{8}} = \frac{2}{9}$$

답 ④

03 6장의 카드를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$$

같은 문자가 적힌 카드끼리 이웃하지 않도록 일렬로 나열하는 사건을 X , B가 적힌 두 카드 사이에 1장의 카드가 놓이는 사건을 E 라 하자.

같은 문자가 적힌 카드끼리 이웃하지 않는 경우는

ABABAC, ABACAB, ACABAB, ABABCA, ABACBA, ABCABA, ACBABA, BABACA, BACABA, CABABA

$$\text{의 10가지이므로 } P(X) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

→ ①

이때 같은 문자가 적힌 카드끼리 이웃하지 않으면서 B가 적힌 두 카드 사이에 1장의 카드가 놓이는 경우는

ABABAC, ACABAB, ABABCA, ACBABA,
BABACA, CABABA

의 6가지이므로 $P(X \cap E) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ → ②

따라서 구하는 확률은

$$P(E|X) = \frac{P(X \cap E)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{5} \quad \rightarrow ③$$

답 $\frac{3}{5}$

채점 기준	비율
① P(X)를 구할 수 있다.	40%
② P(X ∩ E)를 구할 수 있다.	40%
③ P(E X)를 구할 수 있다.	20%

04 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 3의 배수인 사건을 A, 주머니에서 흰 공을 꺼내는 사건을 E라 하면

$$\begin{aligned} P(A \cap E) &= P(A)P(E|A) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \\ P(A^c \cap E) &= P(A^c)P(E|A^c) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3} \\ \therefore P(E) &= P(A \cap E) + P(A^c \cap E) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

05 A가 6의 배수가 아닌 짝수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 X, 6의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 Y라 하고, B가 3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 E라 하면

$$\begin{aligned} P(X \cap E) &= P(X)P(E|X) \\ &= \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{4}{33} \\ P(Y \cap E) &= P(Y)P(E|Y) \\ &= \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{22} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X \cap E) + P(Y \cap E) = \frac{4}{33} + \frac{1}{22} = \frac{1}{6} \quad \text{답 ②}$$

06 갑이 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 검은 공을 꺼내는 사건을 B, 자신이 꺼낸 공을 검은 공이라 말하는 사건을 E라 하면

$$\begin{aligned} P(A \cap E) &= P(A)P(E|A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{10} \\ P(B \cap E) &= P(B)P(E|B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \\ \therefore P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{13}{30} \\ \therefore P(A|E) &= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{30}} = \frac{3}{13} \end{aligned}$$

을이 자신이 꺼낸 공을 검은 공이라 말했을 때 실제로는 흰 공을 꺼냈을 확률

갑, 을 모두 거짓말을 하지 않는 경우

갑은 거짓말을 하지 않고, 을은 거짓말을 하는 경우

3의 배수가 아닌 2의 배수

3의 배수이면서 2의 배수

갑은 거짓말을 하고, 을은 거짓말을 하지 않는 경우

갑, 을 모두 거짓말을 하는 경우

갑이 자신이 꺼낸 공을 검은 공이라 말했을 때 실제로는 흰 공을 꺼냈을 확률

을이 흰 공을 꺼내는 사건을 C, 검은 공을 꺼내는 사건을 D, 자신이 꺼낸 공을 검은 공이라 말하는 사건을 F라 하면

$$\begin{aligned} P(C \cap F) &= P(C)P(F|C) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \\ P(D \cap F) &= P(D)P(F|D) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \\ \therefore P(F) &= P(C \cap F) + P(D \cap F) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{8}{15} = \frac{3}{5} \\ \therefore P(C|F) &= \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

따라서 갑과 을이 자신이 꺼낸 공을 검은 공이라 말했을 때 실제로는 모두 흰 공일 확률은

$$\frac{3}{13} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{39}$$

$\therefore n=39$

답 39

다른 풀이 갑과 을이 각각 자신이 꺼낸 공을 보고 검은 공이라 말하는 사건을 E, 갑과 을이 모두 흰 공을 꺼내는 사건을 A라 하자.

갑과 을이 각각 자신이 꺼낸 공을 보고 검은 공이라 말하는 경우의 확률은 다음과 같다.

- (i) 갑, 을 모두 검은 공을 꺼내는 경우
 $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$
- (ii) 갑은 검은 공을, 을은 흰 공을 꺼내는 경우
 $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$
- (iii) 갑은 흰 공을, 을은 검은 공을 꺼내는 경우
 $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{75}$
- (iv) 갑, 을 모두 흰 공을 꺼내는 경우
 $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{150}$

이상에서

$$P(E) = \frac{8}{45} + \frac{1}{45} + \frac{4}{75} + \frac{1}{150} = \frac{13}{50},$$

$$P(A \cap E) = \frac{1}{150}$$

이므로

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{150}}{\frac{13}{50}} = \frac{1}{39}$$

$\therefore n=39$

07 두 번의 경기에서 A가 B를 두 번 모두 이기는 사건을 X, A, B가 한 번씩 이기는 사건을 Y, B가 A를 두 번 모두 이기는 사건을 Z라 하면

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \\ P(Y) &= \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \\ P(Z) &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

→ ①

C가 두 번 우승하는 사건을 E 라 하면

$$P(X \cap E) = P(X)P(E|X) \\ = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{81}$$

$$P(Y \cap E) = P(Y)P(E|Y) \\ = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{27}$$

$$P(Z \cap E) = P(Z)P(E|Z) \\ = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{72}$$

$$\therefore P(E) = P(X \cap E) + P(Y \cap E) + P(Z \cap E) \\ = \frac{2}{81} + \frac{2}{27} + \frac{1}{72} = \frac{73}{648}$$

답 $\frac{73}{648}$

C가 A를 두 번째 상대할 때 이길 확률은 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

C가 B를 두 번째 상대할 때 이길 확률은 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

채점 기준	비율
① $P(X)$, $P(Y)$, $P(Z)$ 를 구할 수 있다.	30%
② $P(X \cap E)$, $P(Y \cap E)$, $P(Z \cap E)$ 를 구할 수 있다.	50%
③ $P(E)$ 를 구할 수 있다.	20%

1등급 비밀노트 >>>

C는 두 번의 대회에서 모두 부전승으로 올라가므로 C가 두 번 모두 우승할 확률은 A, B가 두 번 경기할 때 일어날 수 있는 결과에 따라 달라진다. 따라서 A, B가 두 번 경기할 때, 일어나는 모든 경우에 따른 확률을 먼저 구한다.

08 $\neg$. $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ 인 두 사건 A, B에 대하여 A, B가 서로 독립이면

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

이때 $P(A) \neq 0$ 이므로

$$P(A \cap B) \neq 0$$

따라서 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

$\therefore$ A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ \therefore P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \\ = P(A) - P(A)P(B) \\ = P(A)\{1 - P(B)\} \\ = P(A)P(B^c)$$

따라서 A, B^c 도 서로 독립이다.

c. [반례] 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

이지만 B는 A의 여사건이 아니다.

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다. 답 ②

다른 풀이 $\neg$. [반례] 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

따라서 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로 A, B는 서로 독립이지만 $P(A \cap B) \neq 0$ 이므로 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

주사위를 한 번 던져서 5 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{5}{6}$
4 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}$

09 $A = \{2, 3, 5\}$ 이므로

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2}P(B)$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{3}$$

따라서 사건 B의 원소의 개수는 2이고, $A \cap B$ 의 원소의 개수는 1이다.

즉 사건 B는 A의 원소 2, 3, 5 중에서 1개, A^c 의 원소 1, 4, 6 중에서 1개를 원소로 가지면 되므로 구하는 사건 B의 개수는

$${}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 9$$

답 9

$$10 P(A) = \frac{n+4}{36}, P(B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9},$$

$$P(A \cap B) = \frac{n}{36}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{n}{36} = \frac{n+4}{36} \cdot \frac{5}{9}$$

$$9n = 5n + 20$$

$$\therefore n = 5$$

답 ②

11 $F(3) = 5$ 이라면 한 개의 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수의 최댓값이 5이어야 하므로 이 확률은 3번 모두 5 이하의 눈이 나올 확률에서 3번 모두 4 이하의 눈이 나올 확률을 빼면 된다.

$$\therefore p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{61}{216}$$

$\therefore$ ①

또 $f(3) = 5$ 이라면 한 개의 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수의 최솟값이 5이어야 하므로 이 확률은 3번 모두 5 또는 6의 눈이 나올 확률에서 3번 모두 6의 눈이 나올 확률을 빼면 된다.

$$\therefore q = \left(\frac{2}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{7}{216}$$

$\therefore$ ②

$$\therefore p - q = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ ③

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
① p 의 값을 구할 수 있다.	40%
② q 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $p - q$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

1등급 비밀노트 >>>

$F(n) = m$ 이라면 한 개의 주사위를 n 번 던져서 나온 눈의 수의 최댓값이 m 이어야 하므로 그 확률은

$$\left(\frac{m}{6}\right)^n - \left(\frac{m-1}{6}\right)^n \quad (\text{단, } 1 \leq m \leq 6)$$

12 5개의 대회에서 모두 완주하지 못할 확률은

$${}_5C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$$

1개의 대회에서만 완주할 확률은

$${}_5C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{405}{1024}$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - \left(\frac{243}{1024} + \frac{405}{1024}\right) = \frac{47}{128}$$

답 ②

13 구하는 확률은 공을 막은 횟수가 1회, 3회, 5회, 7회, 9회일 확률을 모두 더한 것이므로

$$\begin{aligned} & {}_{10}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 + {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ & + {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ & = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} ({}_{10}C_1 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_5 + {}_{10}C_7 + {}_{10}C_9) \\ & = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 2^9 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ③

◀참고 이항계수의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} & {}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_3 + \cdots + {}_{10}C_9 + {}_{10}C_{10} = 2^{10} \\ - &) {}_{10}C_0 - {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 - {}_{10}C_3 + \cdots - {}_{10}C_9 + {}_{10}C_{10} = 0 \\ \hline & 2({}_{10}C_1 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_5 + {}_{10}C_7 + {}_{10}C_9) = 2^{10} \\ \therefore & {}_{10}C_1 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_5 + {}_{10}C_7 + {}_{10}C_9 = 2^9 \end{aligned}$$

14 5번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 4번째 경기까지 3번을 이긴 팀이 5번째 경기에서도 이겨야 한다.

(i) A 팀이 우승할 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{243}$$

→ ①

(ii) B 팀이 우승할 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{243}$$

→ ②

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{64}{243} + \frac{8}{243} = \frac{8}{27}$$

→ ③

답 $\frac{8}{27}$

채점 기준	비율
① 5번째 경기에서 A 팀이 우승할 확률을 구할 수 있다.	40%
② 5번째 경기에서 B 팀이 우승할 확률을 구할 수 있다.	40%
③ 5번째 경기에서 우승팀이 결정될 확률을 구할 수 있다.	20%

15 참가자가 20점짜리, 30점짜리 문제를 맞힐 확률은 각각

$$\frac{40-20}{40} = \frac{1}{2}, \quad \frac{40-30}{40} = \frac{1}{4}$$

참가자의 점수가 500점이 되려면 80점을 더 얻어야 하므로 20점짜리 문제 1개와 30점짜리 문제 2개를 맞혀야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{2} \cdot {}_3C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{128}$$

답 $\frac{9}{128}$

완주할 확률이 $0.25 = \frac{1}{4}$ 이므로 완주하지 못할 확률은

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

공을 막은 횟수가 1회, 3회, 5회, 7회, 9회인 사건은 서로 배반사건이다.

16 점 A에서 출발하여 점 A에서 멈추려면 움직인 거리가 4의 배수이어야 하고, 동전을 4번 던져서 움직일 수 있는 거리 중에서 움직인 거리가 4의 배수인 경우는

$$1+1+1+1=4, \quad 2+2+2+2=8$$

의 2가지이다.

→ ①

(i) 동전을 4번 던져서 모두 뒷면이 나올 확률은

$${}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

→ ②

(ii) 동전을 4번 던져서 모두 앞면이 나올 확률은

$${}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

→ ③

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

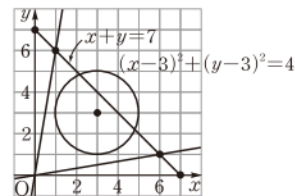
→ ④

답 $\frac{1}{8}$

채점 기준	비율
① 점 A에서 출발하여 점 A에서 멈추는 경우를 구할 수 있다.	20%
② 동전을 4번 던져서 모두 뒷면이 나올 확률을 구할 수 있다.	30%
③ 동전을 4번 던져서 모두 앞면이 나올 확률을 구할 수 있다.	30%
④ 점 A에서 출발하여 점 A에서 멈출 확률을 구할 수 있다.	20%

17 한 개의 동전을 7번 던질 때 앞면이 나온 횟수를 a , 뒷면이 나온 횟수를 b 라 하면

$$a+b=7$$



즉 점 Q는 직선 $x+y=7$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 위에 있고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수이므로 위의 그림에서 직선 OQ가 원 $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ 와 만나지 않으려면 점 Q의 좌표는 (0, 7) 또는 (1, 6) 또는 (6, 1) 또는 (7, 0)이어야 한다.

(i) 점 Q의 좌표가 (0, 7)일 확률은

$${}_7C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

(ii) 점 Q의 좌표가 (1, 6)일 확률은

$${}_7C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{128}$$

(iii) 점 Q의 좌표가 (6, 1)일 확률은

$${}_7C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{7}{128}$$

(iv) 점 Q의 좌표가 (7, 0)일 확률은

$${}_7C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{128}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{128} + \frac{7}{128} + \frac{7}{128} + \frac{1}{128} = \frac{1}{8}$$

답 ①

30점짜리 문제 3개 중 2개는 맞히고 1개는 틀릴 확률

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 43~44쪽

01 2학기 보충수업을 신청한 학생이 1학기에도 보충수업을 신청한 학생일 확률이 1이므로 2학기 보충수업을 신청한 학생 18명은 모두 1학기 보충수업을 신청한 학생이다. 따라서 1학기 보충수업을 신청한 학생 중 2학기 보충수업을 신청하지 않은 학생 수는

$$26 - 18 = 8$$

2학기 보충수업을 신청하지 않은 학생을 택하는 사건을 A , 1학기 보충수업을 신청한 학생을 택하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}, P(A \cap B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{4}{7}$$

따라서 $p = \frac{4}{7}$ 이므로 $70p = 40$ [답] 40

02 한 개의 주사위를 2번 던질 때, 모든 경우의 수는 $6 \cdot 6 = 36$

세 점 A, P, Q 를 선분으로 연결한 도형이 삼각형인 사건을 X , 직각삼각형인 사건을 E 라 하자.

세 점 A, P, Q 를 선분으로 연결한 도형이 삼각형이려면 세 점이 모두 다른 위치에 있어야 하므로

$$P(X) = \frac{5 \cdot 4}{36} = \frac{5}{9}$$

이때 $\triangle APQ$ 가 직각삼각형인 경우는 다음과 같다.

(i) 점 P 가 점 D 에 위치한 경우

$\overline{AP}$ 가 직각삼각형 APQ 의 빗변이므로 점 Q 는 점 B 또는 점 C 또는 점 E 또는 점 F 에 위치할 수 있다.

따라서 가능한 순서쌍 (a, b) 는

$$(3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5)$$

의 4개이다.

(ii) 점 Q 가 점 D 에 위치한 경우

$\overline{AQ}$ 가 직각삼각형 APQ 의 빗변이므로 점 P 는 점 B 또는 점 C 또는 점 E 또는 점 F 에 위치할 수 있다.

따라서 가능한 순서쌍 (a, b) 는

$$(1, 2), (2, 1), (4, 5), (5, 4)$$

의 4개이다.

(iii) 두 점 P, Q 가 모두 점 D 에 위치하지 않은 경우

$\overline{PQ}$ 가 직각삼각형 APQ 의 빗변이므로 두 점 P, Q 는 각각 두 점 B, E 또는 C, F 또는 E, B 또는 F, C 에 위치할 수 있다.

따라서 가능한 순서쌍 (a, b) 는

$$(1, 3), (2, 3), (4, 3), (5, 3)$$

의 4개이다.

이상에서 $\triangle APQ$ 가 직각삼각형인 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $4 + 4 + 4 = 12$

$$\text{이므로 } P(X \cap E) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

a 는 6을 제외한 5가지, b 는 $6-a$ 와 6을 제외한 4가지가 가능하다.

세 사건 A, B, C 가 서로 배반사건이면
 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

따라서 구하는 확률은

$$P(E|X) = \frac{P(X \cap E)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$$

[답] ④

03 조건 (가)에서 수시 전형으로 합격한 학생 수는

$$200 \times 0.6 = 120$$

정시 전형으로 합격한 학생 수는

$$200 \times 0.4 = 80$$

조건 (나)에서 수시 전형으로 합격한 여학생 수를 $2a$ 라 하면

정시 전형으로 합격한 여학생 수는 a 이고, 조건 (다)에서 정시 전형으로 합격한 남학생 수는 50이므로

$$a + 50 = 80 \quad \therefore a = 30$$

따라서 수시 전형으로 합격한 여학생 수는 60이므로 수시 전형으로 합격한 남학생 수는

$$120 - 60 = 60$$

이때 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
수시 전형 합격	60	60	120
정시 전형 합격	50	30	80
합계	110	90	200

대학에 합격한 학생 중에서 남학생을 택하는 사건을 A , 수시 전형으로 합격한 학생을 택하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{110}{200} = \frac{11}{20}, P(A \cap B) = \frac{60}{200} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{11}{20}} = \frac{6}{11}$$

따라서 $p = \frac{6}{11}$ 이므로 $99p = 54$ [답] 54

04 3명이 모두 요가, 다이어트 복싱, 플로어 볼 중목을 신청하는 사건을 각각 A, B, C 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_4C_3}{{}_{15}C_3} = \frac{4}{455},$$

$$P(B) = \frac{{}_5C_3}{{}_{15}C_3} = \frac{2}{91},$$

$$P(C) = \frac{{}_6C_3}{{}_{15}C_3} = \frac{4}{91}$$

또 3명이 신청한 중목이 모두 같은 사건을 E 라 하면 세 사건 A, B, C 는 서로 배반사건이므로

$$P(E) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{4}{455} + \frac{2}{91} + \frac{4}{91} = \frac{34}{455}$$

$$\therefore \frac{P(A) + P(C)}{P(E)} = \frac{\frac{4}{455} + \frac{4}{91}}{\frac{34}{455}} = \frac{12}{17}$$

따라서 $p = 17, q = 12$ 이므로 $p + q = 29$ [답] 29

05 (i) 1회에서 시행을 멈출 확률
1회에 나오는 공에 적힌 숫자가 3인 경우이므로
 $\frac{1}{6}$

(ii) 2회에서 시행을 멈출 확률
(1회, 2회)에 나오는 공에 적힌 숫자가
(1, 2), (2, 1)

인 경우이므로
 $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

(iii) 3회에서 시행을 멈출 확률
(1회, 2회, 3회)에 나오는 공에 적힌 숫자가
(1, 1, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1)

인 경우이므로
 $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$

이상에서 $p = \frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{3}{20} = \frac{43}{60}$ 이므로
 $120p = 86$

답 86

06 A가 3점 슛을 성공하는 사건을 A, B가 3점 슛을 성공하는 사건을 B라 하면 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A)P(B^c) \\ &= 0.5 \times (1 - 0.6) \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B) \\ &= (1 - 0.5) \times 0.6 \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} \frac{P(A \cap B^c)}{P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)} &= \frac{0.2}{0.2 + 0.3} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

답 ④

07 주머니에서 꺼낸 첫 번째 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째 공이 흰 공인 사건을 B라 하면 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A^c)P(B^c) \\ &= 1 - \left(\frac{n+4}{2n+4}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A)P(B) \\ &= 1 - \left(\frac{n}{2n+4}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore p_2 - p_1 &= 1 - \left(\frac{n}{2n+4}\right)^2 - \left[1 - \left(\frac{n+4}{2n+4}\right)^2\right] \\ &= \frac{8n+16}{(2n+4)^2} = \frac{2}{n+2} \end{aligned}$$

이때 $\frac{2}{n+2} < \frac{1}{10}$ 에서 $20 < n+2$
 $\therefore n > 18$

따라서 자연수 n의 최솟값은 19이다.

답 ①

08 1부터 2n까지의 자연수 중에서 홀수는 n개이므로

$$P(A) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이려면

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이어야 하므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2}P(B), \text{ 즉 } P(B) = 2P(A \cap B)$$

n=3, 4일 때, $n(B)=1$, $n(A \cap B)=1$ 이므로

$$P(B) \neq 2P(A \cap B)$$

n=5, 6, 7일 때, $n(B)=2$, $n(A \cap B)=1$ 이므로

$$P(B) = 2P(A \cap B)$$

n=8, 9일 때, $n(B)=3$, $n(A \cap B)=2$ 이므로

$$P(B) \neq 2P(A \cap B)$$

⋮

n=48, 49일 때, $n(B)=19$, $n(A \cap B)=10$ 이므로

$$P(B) \neq 2P(A \cap B)$$

n=50일 때, $n(B)=20$, $n(A \cap B)=10$ 이므로

$$P(B) = 2P(A \cap B)$$

따라서 두 사건 A, B가 서로 독립이 되도록 하는 n의 최솟값은 5, 최댓값은 50이므로 구하는 합은

$$5 + 50 = 55$$

답 55

09 정사면체를 4번 던질 때, 점 P가 원점을 출발하여 점 (1, -1)에 위치하는 경우는 다음과 같다.

(i) 이동 방향이 $\rightarrow, \rightarrow, \leftarrow, \downarrow$ 인 경우

1이 2번, 2, 4가 각각 1번씩 나와야 하므로 그 확률은

$$\frac{4!}{2!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{64}$$

(ii) 이동 방향이 $\rightarrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow$ 인 경우

4가 2번, 1, 3이 각각 1번씩 나와야 하므로 그 확률은

$$\frac{4!}{2!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{64}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{3}{32}$$

답 ③

10 (i) 5개의 숫자를 모두 정상적으로 수신할 확률은

$${}_5C_5 \left(\frac{9}{10}\right)^5 \left(\frac{1}{10}\right)^0 = \frac{9^5}{10^5}$$

(ii) 1개의 숫자를 잘못 수신할 확률은

$${}_5C_4 \left(\frac{9}{10}\right)^4 \left(\frac{1}{10}\right)^1 = \frac{5 \cdot 9^4}{10^5}$$

(i), (ii)에서 정보를 송신할 확률은

$$\frac{9^5}{10^5} + \frac{5 \cdot 9^4}{10^5} = \frac{14 \cdot 9^4}{10^5}$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{\frac{9^5}{10^5}}{\frac{14 \cdot 9^4}{10^5}} = \frac{9}{14}$$

답 ②

① 만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

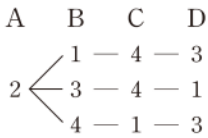
본책 45~49쪽

01 전략 네 사람 모두 자신이 준비한 선물을 받지 않는 경우의 수를 구하고 수학적 확률을 이용한다.

풀이 A, B, C, D 네 사람이 4개의 선물을 나눠 갖는 경우의 수는

$$4! = 24$$

A가 2가 적힌 카드를 뽑았을 때, 네 사람 모두 자신이 준비한 선물을 받지 않는 경우는 오른쪽과 같이 3가지가 있다.



같은 방법으로 A가 3, 4가 적힌 카드를 뽑았을 때, 네 사람 모두 자신이 준비한 선물을 받지 않는 경우도 각각 3가지씩 있으므로 네 사람 모두 자신이 준비한 선물을 받지 않는 경우의 수는

$$3 \cdot 3 = 9$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

답 ③

02 전략 함수 $y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프의 y 절편을 이용하여 a, b 에 대한 부등식을 세운다.

풀이 두 개의 주사위를 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \cdot 6 = 36$$

$y = (g \circ f)(x)$ 에서

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(ax+b) \\ &= -b(ax+b) + a = -abx + a - b^2 \end{aligned}$$

직선 $y = -abx + a - b^2$ 의 기울기 $-ab$ 가 음수이므로 이 직선이 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 모두 지나려면 y 절편 $a - b^2$ 이 양수이어야 한다. 즉

$$a - b^2 > 0 \quad \therefore a > b^2$$

이를 만족시키는 a, b 의 값은

(i) $b=1$ 일 때, $a=2, 3, 4, 5, 6$

(ii) $b=2$ 일 때, $a=5, 6$

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $5+2=7$

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{36}$

답 ②

03 전략 앞면이 보이는 동전은 m 개 뒤집으면 뒷면이 보이는 동전은 $(4-m)$ 개 뒤집어야 함을 이용한다.

풀이 9개의 동전 중에서 뒤집을 동전 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_4 = 126$$

앞면이 보이는 동전 4개 중에서 m 개, 뒷면이 보이는 동전 5개 중에서 $(4-m)$ 개를 택하여 뒤집으면 뒷면이 보이는 동전의 개수는

$$m + \{5 - (4-m)\} = 2m + 1$$

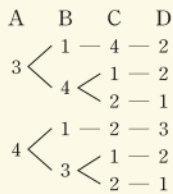
즉 $2m+1=7$ 에서 $m=3$

이때 앞면이 보이는 동전 4개 중에서 3개, 뒷면이 보이는 동전 5개 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

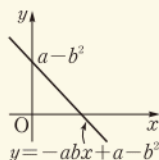
$${}_4C_3 \cdot {}_5C_1 = 20$$

4, 4, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수

4, 5, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수



4, 6, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수



$$4 - 3 = 1$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{126} = \frac{10}{63}$

답 ④

04 전략 세 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 최솟값이 4이고 최댓값이 6인 경우의 수를 구하고 수학적 확률을 이용한다.

풀이 세 개의 주사위를 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

사건 $A \cap B$ 는 세 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 최솟값이 4이고 최댓값이 6인 사건이다.

(i) 4, 4, 6이 나오는 경우의 수

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(ii) 4, 5, 6이 나오는 경우의 수

$$3! = 6$$

(iii) 4, 6, 6이 나오는 경우의 수

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

이상에서 눈의 수의 최솟값이 4이고 최댓값이 6인 경우의 수는

$$3 + 6 + 3 = 12$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$$

답 ③

05 전략 두 사건 X, Y 가 서로 배반사건이면 $P(X \cap Y) = 0$ 임을 이용한다.

풀이 사건 A 는 두 사건 B, C 와 모두 배반사건이므로

$$P(A \cap B) = 0, P(A \cap C) = 0$$

따라서 $P(A \cap (B \cup C)) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B \cup C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ &= \{P(A) - P(B \cap C)\} + \{P(B) + P(C)\} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{5}{6} = \frac{11}{12} \end{aligned}$$

답 ④

06 전략 두 점 사이의 거리가 2보다 클 확률을 구하고 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 서로 다른 두 점을 택할 때, 모든 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

두 점 사이의 거리가 2 이하인 사건을 A 라 하면 A^c 는 두 점 사이의 거리가 2보다 큰 사건이다.

(i) 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 인 경우

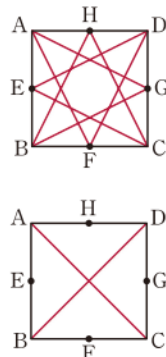
오른쪽 그림과 같이 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 인 것은 각 꼭짓점에 대하여 2개씩 있으므로 그 경우의 수는

$$4 \cdot 2 = 8$$

(ii) 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 인 경우

오른쪽 그림과 같이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 인 것은 정사각형의 두 대각선이므로 그 경우의 수는

$$2$$



(i), (ii)에서 두 점 사이의 거리가 2보다 큰 경우의 수는

$$8+2=10$$

$$\text{이므로 } P(A^c) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14} \quad \text{답 ④}$$

다른 풀이 (i) 두 점 사이의 거리가 1인 경우의 수는 8

(ii) 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 인 경우의 수는 4

(iii) 두 점 사이의 거리가 2인 경우의 수는 6

이상에서 두 점 사이의 거리가 2 이하인 경우의 수는

$$8+4+6=18$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

$$07 \text{ 전략 } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 임을 이용한다.

풀이 $P(A|B) = P(B|A) = \frac{1}{2}$ 에서

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$$

따라서 $P(A) = P(B)$, $P(A \cap B) = \frac{1}{2}P(A)$ 이므로

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(A) - \frac{1}{2}P(A) = \frac{3}{2}P(A) \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{3}{2}P(A) = \frac{3}{5} \text{이므로 } P(A) = \frac{2}{5}$$

이때 $P(A \cap B) = \frac{1}{2}P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ 이므로

$$P(A \cap B)P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{25} \quad \text{답 ①}$$

08 전략 올해 5 km 종목에 참가한 학생 중 작년에도 5 km 종목에 참가한 학생 수를 먼저 구한다.

풀이 올해 5 km 종목에 참가한 학생이 작년에도 5 km 종목에 참가했을 확률이 $\frac{7}{10}$ 이므로 올해 5 km 종목에 참가한 학생 중 작년에도 5 km 종목에 참가한 학생 수는

$$220 \cdot \frac{7}{10} = 154$$

이때 작년에 10 km 종목에 참가한 학생 중 올해 5 km 종목에 참가한 학생 수는

$$220 - 154 = 66$$

이므로 작년에 10 km 종목에 참가한 학생 중 올해 10 km 종목에 참가한 학생 수는

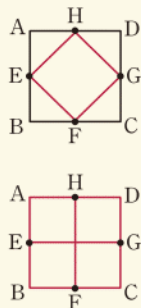
$$150 - 66 = 84$$

작년에 10 km 종목에 참가한 학생을 택하는 사건을 A, 올해 10 km 종목에 참가한 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{150}{400} = \frac{3}{8}, P(A \cap B) = \frac{84}{400} = \frac{21}{100}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{21}{100}}{\frac{3}{8}} = \frac{14}{25} \quad \text{답 ④}$$



$$\begin{aligned} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{이므로} \\ P(A) &= P(B) \end{aligned}$$

파란 구슬 중 3이 적힌 구슬은 2개이므로 (3, 4)를 꺼내는 경우는 2가지이다.

첫 번째 자유투는 성공하고 두 번째 자유투는 실패할 확률

첫 번째 자유투는 실패하고 두 번째 자유투는 성공할 확률

09 전략 양 끝에 있는 학생이 같은 학년일 확률과 양 끝에 있는 학생이 같은 학년 남학생일 확률을 각각 구한다.

풀이 9명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$9!$$

양 끝에 같은 학년 학생을 세우는 경우의 수는

$$({}_5P_2 + {}_4P_2) \cdot 7!$$

양 끝에 같은 학년 남학생을 세우는 경우의 수는

$$({}_2P_2 + {}_3P_2) \cdot 7!$$

양 끝에 있는 학생이 같은 학년인 사건을 A, 양 끝에 있는 학생이 모두 남학생인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{({}_5P_2 + {}_4P_2) \cdot 7!}{9!} = \frac{4}{9}$$

$$P(A \cap B) = \frac{({}_2P_2 + {}_3P_2) \cdot 7!}{9!} = \frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4} \quad \text{답 ④} \end{aligned}$$

10 전략 구슬에 적힌 두 수의 합이 7일 확률과 구슬의 색이 서로 다르고 적힌 두 수의 합이 7일 확률을 각각 구한다.

풀이 두 개의 빨간 구슬에 적힌 두 수의 합이 7인 경우는

(2, 5), (3, 4)의 2가지

두 개의 파란 구슬에 적힌 두 수의 합이 7인 경우는

(2, 5), (3, 4), (3, 4)의 3가지

빨간 구슬 1개, 파란 구슬 1개에 적힌 두 수의 합이 7인 경우는

(2, 5), (3, 4), (4, 3), (4, 3), (5, 2)의 5가지

주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 두 수의 합이 7인 사건을 A, 꺼낸 구슬의 색이 서로 다른 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{2+3+5}{{}_{12}C_2} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{{}_{12}C_2} = \frac{5}{66}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{66}}{\frac{5}{33}} = \frac{1}{2} \quad \text{답 ④}$$

11 전략 첫 번째 자유투만 성공할 확률과 두 번째 자유투만 성공할 확률을 각각 구한다.

풀이 A가 첫 번째 자유투를 성공하는 사건을 A, 두 번째 자유투를 성공하는 사건을 B라 하고, 자유투를 두 번 하여 한 번 성공하는 사건을 E라 하면

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.75$$

$$P(A \cap E) = 0.6 \times 0.25 = 0.15$$

$$P(B \cap E) = 0.4 \times 0.75 = 0.3$$

$$\begin{aligned} \therefore P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= 0.15 + 0.3 = 0.45 \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0.15}{0.45} = \frac{1}{3} \quad \text{답 ②}$$

12 전략 동전을 던져서 나오는 결과에 따른 주사위의 눈의 수의 곱이 홀수일 확률을 각각 구한다.

풀이 동전을 던져서 앞면이 나오는 사건을 A , 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 E 라 하면

$$\begin{aligned} P(A \cap E) &= P(A)P(E|A) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \\ P(A^c \cap E) &= P(A^c)P(E|A^c) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16} \\ \therefore P(E) &= P(A \cap E) + P(A^c \cap E) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

13 전략 구입한 불량품이 기계 A에서 만들어졌을 확률과 기계 B에서 만들어졌을 확률을 각각 구한다.

풀이 두 기계 A, B에서 생산한 볼트를 구입하는 사건을 각각 A , B 라 하고, 불량품을 구입하는 사건을 E 라 하면

$$\begin{aligned} P(A \cap E) &= P(A)P(E|A) = 0.4 \times 0.03 = 0.012 \\ P(B \cap E) &= P(B)P(E|B) = 0.6 \times 0.04 = 0.024 \\ \therefore P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= 0.012 + 0.024 = 0.036 \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0.012}{0.036} = \frac{1}{3} \quad \text{답 ①}$$

14 전략 두 사건 X , Y 에 대하여

$P(X \cap Y) = P(X)P(Y|X)$ 임을 이용한다.

풀이 우리나라 사람 중 한 명을 택할 때, 여성인 사건을 A , 경제 활동을 하는 사람인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = 0.5, P(B) = 0.8, P(A|B) = 0.4$$

이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B)P(A|B) = 0.8 \times 0.4 = 0.32 \\ \therefore P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= 0.5 - 0.32 = 0.18 \end{aligned}$$

따라서 우리나라 인구 중 경제 활동을 하지 않는 여성 인구의 비율은 18%이다. 답 ④

1등급 비밀노트 >>>

구하는 비율이 우리나라 인구 중 경제 활동을 하지 않는 여성 인구의 비율이므로 $P(A \cap B^c)$ 를 구해야 한다. 이때 $P(A|B^c)$ 를 구하지 않도록 유의한다.

15 전략 두 사건 X , Y 가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$ 임을 이용한다.

풀이 주사위를 두 번 던져서 첫 번째에 나온 눈의 수를 a , 두 번째에 나온 눈의 수를 b 라 하고 순서쌍 (a, b) 로 나타내면

주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수가 모두 홀수일 확률

주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수가 모두 홀수일 확률

모든 경우의 수는

$$6 \cdot 6 = 36$$

이므로

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

경제 활동을 하는 인구의 60%가 남성이므로 경제 활동을 하는 인구의 40%는 여성이다.

$$\therefore P(A|B) = 0.4$$

우리나라 사람 중 한 명을 택할 때, 경제 활동을 하지 않는 여성일 확률

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$$

$$B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5)\}$$

$$C = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$$

$$A \cap B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$B \cap C = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$$

$$A \cap C = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$$

$$\neg, P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 A 와 B 는 서로 독립이다.

$$\neg, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}, P(B \cap C) = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

따라서 B 와 C 는 서로 독립이다.

$$\neg, P(A) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}, P(A \cap C) = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

따라서 A 와 C 는 서로 독립이다.

이상에서 $\neg, \neg, \neg$ 모두 서로 독립인 사건이다. 답 ⑤

16 전략 스위치 A, D 또는 B, C가 닫혀 있을 때 전류가 흐를 이용한다.

풀이 X에서 Y로 전류가 흐르려면 스위치 A, D가 모두 닫히거나 스위치 B, C가 모두 닫혀야 한다.

스위치 A, D가 모두 닫히는 사건을 E , 스위치 B, C가 모두 닫히는 사건을 F 라 하면

$$P(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, P(F) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{81} = \frac{17}{81} \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

17 전략 갑의 번호가 당첨 번호와 2개가 일치할 확률과 을의 번호가 당첨 번호와 1개가 일치할 확률을 각각 구한다.

풀이 갑과 을이 3개의 숫자를 택하는 경우의 수는 각각

$${}_9C_3 = 84$$

갑의 번호가 당첨 번호와 2개가 일치하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \cdot {}_6C_1 = 18$$

$$\text{이므로 그 확률은 } \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$$

을의 번호가 당첨 번호와 1개가 일치하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \cdot {}_6C_2 = 45$$

이므로 그 확률은 $\frac{45}{84} = \frac{15}{28}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{14} \cdot \frac{15}{28} = \frac{45}{392}$ **답 ③**

18 전략 흰 공, 검은 공, 검은 공과 검은 공, 흰 공, 검은 공의 순서대로 꺼내는 확률을 각각 구한다.

풀이 3회 시행 후 주머니에 있는 공이 모두 흰 공인 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) 흰 공, 검은 공, 검은 공의 순서대로 꺼내는 경우

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

(ii) 검은 공, 흰 공, 검은 공의 순서대로 꺼내는 경우

$$\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{27} + \frac{1}{9} = \frac{7}{27}$$
 답 ③

19 전략 던지는 횟수가 6 이상인 확률을 구하여 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 던지는 횟수가 5 이하인 사건을 A 라 하면 A^c 는 던지는 횟수가 6 이상인 사건이다. 이때 던지는 횟수가 6 이상이라면 5회까지 1 또는 2의 눈이 나오지 않아야 하므로

$$P(A^c) = {}_5C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{211}{243}$$
 답 ④

다른 풀이 던지는 횟수가 1일 확률은 $\frac{1}{3}$

던지는 횟수가 2일 확률은 $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$

던지는 횟수가 3일 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$

던지는 횟수가 4일 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$

던지는 횟수가 5일 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{211}{243}$$

20 전략 10원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 1개를 꺼내는 확률을 이용한다.

풀이 꺼낸 2개의 동전의 금액의 합이 60원이라면 10원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 1개를 꺼내야 한다.

10원짜리 동전의 개수를 x ($x > 5$)라 하면

$$\frac{x \cdot {}_{10-x}C_1}{10C_2} = \frac{7}{15}, \quad \frac{x(10-x)}{45} = \frac{7}{15}$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0, \quad (x-3)(x-7) = 0$$

$$\therefore x = 7 \quad (\because x > 5)$$
 답 7

갑의 번호가 당첨 번호와 2개가 일치하는 사건과 을의 번호가 당첨 번호와 1개가 일치하는 사건은 서로 독립이다.

마지막 시행에서는 검은 공을 꺼내야 한다.

$$f(a) \neq a \text{ 이어야 한다.}$$

첫 번째 시행에서 검은 공이 나오면 흰 공을 1개 넣으므로 주머니에 모두 흰 공만 들어 있게 된다. 따라서 두 번째 시행에서 흰 공이 나올 확률은 1이다.

21 전략 10개의 원소 중 $f(a) = a$ 를 만족시키는 6개의 원소를 택하고 나머지 4개의 원소를 대응시키는 경우의 수를 구한다.

풀이 집합 A 에서 A 로의 일대일대응인 함수의 개수는

$$10! \quad \cdots \textcircled{1}$$

10개의 원소 중 $f(a) = a$ 를 만족시키는 6개의 원소를 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_6$

$f(a) = a$ 를 만족시키는 6개의 원소를 각각

1, 2, 3, 4, 5, 6이라 할 때, 나머지 4개의

원소를 대응시키는 경우는 오른쪽과 같이 9

가지이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수

의 개수는

$${}_{10}C_6 \cdot 9 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{{}_{10}C_6 \cdot 9}{10!} = \frac{1}{1920} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{답 } \frac{1}{1920}$$

a	7	8	9	10
$f(a)$	8	7 — 10 — 9		
		9 — 10 — 7		
		10 — 7 — 9		
9	7	7 — 10 — 8		
		10 — 7 — 8		
10	7	7 — 8 — 9		
		9 — 7 — 8		
		8 — 7 — 9		

채점 기준	비율
① 집합 A 에서 A 로의 일대일대응인 함수의 개수를 구할 수 있다.	20%
② 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.	60%
③ 답을 구할 수 있다.	20%

22 전략 갑이 진실을 말할 때 진실로 판단할 확률과 거짓을 말할 때 진실로 판단할 확률을 각각 구한다.

풀이 갑이 진실을 말하는 사건을 A , 거짓말 탐지기가 진실로 판단하는 사건을 B 라 하면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{11} = \frac{4}{11}$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c)$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{50} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$= \frac{4}{11} + \frac{3}{50} = \frac{233}{550} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{답 } \frac{233}{550}$$

채점 기준	비율
① $P(A \cap B)$ 와 $P(A^c \cap B)$ 를 각각 구할 수 있다.	50%
② 갑의 진술을 거짓말 탐지기가 진실로 판단할 확률을 구할 수 있다.	50%

23 전략 첫 경기에서 a 와 c , b 와 d 가 만나 시합을 하는 경우와 a 와 d , b 와 c 가 만나 시합을 하는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 첫 경기에서 a 와 c , b 와 d 가 만나 시합을 하는 경우

① 결승에서 a 와 b 가 만나 b 가 우승할 확률은

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$$

② 결승에서 c 와 b 가 만나 b 가 우승할 확률은

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

(ii) 첫 경기에서 a 와 d , b 와 c 가 만나 시합을 하는 경우

① 결승에서 a 와 b 가 만나 b 가 우승할 확률은

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$$

② 결승에서 d 와 b 가 만나 b 가 우승할 확률은

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{5}{18}$$

첫 경기에서 a 와 c , b 와 d 가 만날 확률이 $\frac{1}{2}$
 a 가 c 를 이길 확률이 $\frac{1}{3}$
 b 가 d 를 이길 확률이 $\frac{1}{2}$
 b 가 a 를 이길 확률이 $\frac{2}{3}$
 $P(A) + P(A^c) = 1$

두 사건 A , B 가 독립이므로 A^c , B 도 독립이다.

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) \text{에서}$$

$$P(A^c)P(B^c) = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①+②을 하면

$$P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B^c) = \frac{3}{4}$$

$$\{P(A) + P(A^c)\}P(B^c) = \frac{3}{4}$$

$$P(B^c) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore P(B) = 1 - P(B^c) = \frac{1}{4}$$

$$P(B^c) = \frac{3}{4} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$P(A^c) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 60P(A^c \cap B) = 60P(A^c)P(B)$$

$$= 60 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = 5$$

답 5

채점 기준

비율

① 첫 경기에서 a 와 c , b 와 d 가 만나 시합을 하여 b 가 우승할 확률을 구할 수 있다.	40%
② 첫 경기에서 a 와 d , b 와 c 가 만나 시합을 하여 b 가 우승할 확률을 구할 수 있다.	40%
③ b 가 우승할 확률을 구할 수 있다.	20%

24 전략 (승, 승, 패), (승, 패, 승), (패, 승, 승)인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 축구팀이 2승 1패를 하는 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) (승, 승, 패)인 경우

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{32}$$

(ii) (승, 패, 승)인 경우

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

(iii) (패, 승, 승)인 경우

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{32} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{11}{32}$$

답 11/32

1등급 비밀노트 >>>

연승할 확률이 $\frac{3}{4}$ 이므로 승리한 다음 경기에서 패할 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다.
 또 연패할 확률이 $\frac{1}{2}$ 이므로 패한 다음 경기에서 승리할 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

25 전략 두 사건 A , B 가 서로 독립이면 A^c 와 B , A 와 B^c , A^c 와 B^c 도 각각 서로 독립임을 이용한다.

풀이 두 사건 A , B 가 서로 독립이므로 A , B^c 도 서로 독립이고 A^c , B^c 도 서로 독립이다.

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) \text{에서}$$

$$P(A)P(B^c) = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주사위를 2번 던진 후 점이 -2의 위치로 옮겨진다.

주사위를 4번 던진 후 점이 -2의 위치로 옮겨진다.

주사위를 3번 던진 후 점이 -2의 위치로 옮겨지는 경우는 없다.

2개의 ○와 3개의 ×를 일렬로 나열하는 경우의 수

26 전략 주사위를 5번 던질 때까지 점이 -1의 위치로 이동한 후 6번째 던질 때 음의 방향으로 1만큼 이동하면 된다.

풀이 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

→ ①

주사위를 6번 던져서 수지가 이기려면 주사위를 5번 던질 때까지 점이 -1의 위치로 이동하고 주사위를 6번째 던질 때 점이 음의 방향으로 1만큼 이동해야 한다.

주사위를 5번 던지는 동안 6의 약수의 눈이 x 번 나온다고 하면

$$x - (5 - x) = -1, \quad 2x = 4$$

$$\therefore x = 2$$

따라서 주사위를 5번 던질 때까지 6의 약수의 눈은 2번, 그 외의 눈은 3번 나와야 한다. → ②

이때 6의 약수의 눈이 나오는 경우를 ○, 그 외의 눈이 나오는 경우를 ×라 하고 2개의 ○와 3개의 ×를 배열할 때 주사위를 5번 던지기 전에 게임이 끝나는 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i) 주사위를 2번 던졌을 때 게임이 끝나는 경우

$$\times \times \times \bigcirc \bigcirc, \times \times \bigcirc \times \bigcirc, \times \times \bigcirc \bigcirc \times \text{의 } 3\text{가지}$$

(ii) 주사위를 4번 던졌을 때 게임이 끝나는 경우

$$\times \bigcirc \times \times \bigcirc, \bigcirc \times \times \times \bigcirc \text{의 } 2\text{가지}$$

(i), (ii)에서 주사위를 5번 던지기 전에 게임이 끝나는 경우의 수는

$$3 + 2 = 5$$

이므로 주사위를 5번 던지기 전에 게임이 끝나지 않고 점이 -1의 위치로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} - 5 = 10 - 5 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

따라서 주사위를 6번 던져서 수지가 이길 확률은

$$5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{3^6}$$

→ ④

$$\therefore n = 20$$

→ ⑤

답 20

채점 기준	비율
① 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률을 구할 수 있다.	10%
② 주사위를 5번 던질 때까지 6의 약수의 눈은 2번, 그 외의 눈은 3번 나와야 함을 알 수 있다.	30%
③ 주사위를 5번 던지기 전에 게임이 끝나지 않고 점이 -1의 위치로 이동하는 경우의 수를 구할 수 있다.	30%
④ 주사위를 6번 던져서 수자가 이길 확률을 구할 수 있다.	20%
⑤ n 의 값을 구할 수 있다.	10%

◀참고▶ 주사위를 5번 던지기 전에 게임이 끝나지 않고 점이 -1의 위치로 이동하는 경우
 $○○×××$, $○×○××$, $○××○×$, $×○○××$,
 $×○×○×$ 의 5가지

27 전략 점 P의 좌표가 (2, 0), (1, 1), (0, 2)인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 점 P가 x 축의 방향으로 1만큼 이동하는 사건을 A, y 축의 방향으로 1만큼 이동하는 사건을 B, 이동하지 않는 사건을 C라 하면

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{2}$$

주사위를 4번 던졌을 때, 점 P의 x 좌표와 y 좌표의 합이 2가 되는 경우의 점 P의 좌표는

(2, 0), (1, 1), (0, 2)

이고, 그 확률은 다음과 같다.

(i) 점 P의 좌표가 (2, 0)인 경우

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{24}$$

(ii) 점 P의 좌표가 (1, 1)인 경우

$$\frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

(iii) 점 P의 좌표가 (0, 2)인 경우

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

이상에서 점 P의 x 좌표와 y 좌표의 합이 2가 될 확률은

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=3$ 이므로

$$p+q=11$$

답 11

28 전략 주사위를 던져서 나오는 눈의 수에 따른 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률을 각각 구한다.

풀이 주사위를 던져서 나오는 눈의 수 중에서 양의 약수의 개수가 홀수인 것은 1, 4이고, 짝수인 것은 2, 3, 5, 6이다.

따라서 동전을 던져서 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 양의 약수의 개수가 홀수인 경우

$$\frac{1}{3} \cdot {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{6}$$

(ii) 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 양의 약수의 개수가 짝수인 경우

$$\frac{2}{3} \cdot {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

답 $\frac{5}{12}$

최상위로는 최고 수준 문제

본책 50쪽

01

해결 단계

- ① 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 모든 경우의 수를 구한다.
- ② a 의 값에 따른 $\frac{bc}{a}$ 가 자연수가 되는 경우의 수를 구한다.
- ③ $\frac{bc}{a}$ 가 자연수일 확률을 구한다.

풀이 ① 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

② $\frac{bc}{a}$ 가 자연수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $a=1$ 인 경우

bc 는 항상 자연수이므로 경우의 수는

$$6 \cdot 6 = 36$$

(ii) $a=2$ 인 경우

b, c 중 적어도 1개는 2의 배수이어야 하므로 그 경우의 수는

$$6 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 27$$

b, c 가 모두 2의 배수가 아닌 경우의 수

(iii) $a=3$ 인 경우

b, c 중 적어도 1개는 3의 배수이어야 하므로 그 경우의 수는

$$6 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = 20$$

b, c 가 모두 3의 배수가 아닌 경우의 수

(iv) $a=4$ 인 경우

b, c 가 모두 2의 배수이거나 b, c 중 하나는 4이고 다른 하나는 홀수이어야 하므로 그 경우의 수는

$$3 \cdot 3 + (3+3) = 15$$

(v) $a=5$ 인 경우

b, c 중 적어도 1개는 5이어야 하므로 그 경우의 수는

$$6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = 11$$

b, c 가 모두 5가 아닌 경우의 수

(vi) $a=6$ 인 경우

b, c 중 하나는 2 또는 4이고 다른 하나는 3이거나 b, c 중 적어도 1개는 6이어야 하므로 그 경우의 수는

$$(2+2) + (6 \cdot 6 - 5 \cdot 5) = 15$$

이상에서 $\frac{bc}{a}$ 가 자연수가 되는 경우의 수는

$$36 + 27 + 20 + 15 + 11 + 15 = 124$$

③ 따라서 구하는 확률은

$$\frac{124}{216} = \frac{31}{54}$$

답 ③

02

해결 단계

- ① 집합 P 에서 서로 다른 두 원소 A, B 를 택하는 모든 경우의 수를 구한다.
- ② $n(A)$ 를 구한다.
- ③ 조건을 모두 만족시키는 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구한다.
- ④ 조건을 모두 만족시킬 확률을 구한다.

풀이 ① 집합 P 의 원소의 개수는 $2^5=32$ 이므로 집합 P 에서 서로 다른 두 원소 A, B 를 택하는 모든 경우의 수는 ${}_{32}P_2=992$

② 집합 U 에서 임의로 택한 1개의 원소가 집합 A 에 속하는 사건을 A , 집합 B 에 속하는 사건을 B 라 하면 조건 (나)에서 $P(B^c|A)=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} P(B^c|A) &= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{n(A \cap B^c)}{n(U)}}{\frac{n(A)}{n(U)}} \\ &= \frac{n(A \cap B^c)}{n(A)} \\ &= \frac{n(A) - n(A \cap B)}{n(A)} \\ &= \frac{n(A) - 2}{n(A)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$2n(A) - 4 = n(A) \quad \therefore n(A) = 4$$

③ 따라서 집합 A 의 개수는 집합 U 의 원소 중 1, 2를 제외한 3개에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3C_2 = 3$$

$a \notin A$ 인 U 의 원소 a 에 대하여 집합 B 는 $\{1, 2\}$ 또는 $\{1, 2, a\}$ 이므로 조건을 만족시키는 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$$3 \cdot 2 = 6$$

④ 따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{992} = \frac{3}{496}$$

답 ②

집합 P 의 서로 다른 두 원소 X, Y 에 대하여 $A=X, B=Y$ 와 $A=Y, B=X$ 는 서로 다른 경우이므로 순열의 수를 이용한다.

천의 자리의 숫자가 0인 경우의 수

$$A \cap B^c = A - B$$

조건 (나)에서 $A \cap B = \{1, 2\}$ 이므로 $n(A \cap B) = 2$

각 자리의 숫자의 합이 짝수인 경우는 다음과 같다.

(i) 각 자리의 숫자가 모두 0 또는 짝수인 경우

4개의 숫자 0, 2, 4, 6을 이용하여 네 자리 자연수를 만들면 되므로 자연수의 개수는

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$$

(ii) 두 자리의 숫자는 0 또는 짝수이고 다른 두 자리의 숫자는 홀수인 경우

4개의 숫자 0, 2, 4, 6 중에서 2개를 택하고, 4개의 숫자 1, 3, 5, 7 중에서 2개를 택하여 네 자리 자연수를 만들면 되므로 자연수의 개수는

$${}_4C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot 4! - {}_3C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot 3! = 756$$

(iii) 각 자리의 숫자가 모두 홀수인 경우

4개의 숫자 1, 3, 5, 7을 이용하여 네 자리 자연수를 만들면 되므로 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

이상에서 각 자리의 숫자의 합이 짝수인 자연수의 개수는

$$18 + 756 + 24 = 798$$

$$\text{이므로 } P(A) = \frac{798}{1470} = \frac{19}{35}$$

이때 각 자리의 숫자의 합이 짝수이면서 백의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 홀수인 경우는 각 자리의 숫자가 순서대로

짝수, (0 또는 짝수), 홀수, 홀수 또는
짝수, 홀수, (0 또는 짝수), 홀수 또는
홀수, (0 또는 짝수), 홀수, (0 또는 짝수) 또는
홀수, 홀수, (0 또는 짝수), (0 또는 짝수)

인 경우이므로 자연수의 개수는

$$3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 504$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{504}{1470} = \frac{12}{35}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \therefore P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{12}{35}}{\frac{19}{35}} = \frac{12}{19} \end{aligned}$$

따라서 $p=19, q=12$ 이므로

$$p+q=31$$

답 31

03

해결 단계

- ① 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수를 구한다.
- ② 각 자리의 숫자의 합이 짝수일 확률과 각 자리의 숫자의 합이 짝수이면서 백의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 홀수일 확률을 각각 구한다.
- ③ 각 자리의 숫자의 합이 짝수일 때, 백의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 홀수일 확률을 이용하여 $p+q$ 의 값을 구한다.

풀이 ① 0부터 7까지의 8개의 숫자 중에서 서로 다른 4개를 이용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1470$$

② 각 자리의 숫자의 합이 짝수인 사건을 A , 백의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 홀수인 사건을 B 라 하자.

04

해결 단계

- ① 점 P 가 음의 방향으로 1만큼 이동할 확률, 이동하지 않을 확률, 양의 방향으로 2만큼 이동할 확률을 각각 구한다.
- ② 주사위를 4번 던졌을 때 점 P 가 0 또는 -1에 위치하는 경우로 나누어 주사위를 5번 던져서 게임이 끝날 확률을 각각 구한다.
- ③ 주사위를 5번 던져서 게임이 끝날 확률을 이용하여 $18p$ 의 값을 구한다.

풀이 ① 점 P 가 음의 방향으로 1만큼 이동하는 사건을 A , 이동하지 않는 사건을 B , 양의 방향으로 2만큼 이동하는 사건을 C 라 하면

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{6}$$

② 사건 A가 일어나는 경우를 -, 사건 B가 일어나는 경우를 ○, 사건 C가 일어나는 경우를 +라 할 때, 주사위를 5번 던져서 게임이 끝나는 경우는 다음과 같다.

(i) 주사위를 4번 던졌을 때, 점 P가 0에 위치한 경우

○○○○+인 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$$

○- -++ , -○-++ , --○++ ,

--+○+인 경우의 확률은 각각

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

따라서 그 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) 주사위를 4번 던졌을 때, 점 P가 -1에 위치한 경우

○○○-+ , ○○-○+ , ○-○○+ ,

-○○○+인 경우의 확률은 각각

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$$

---++ , --+-+인 경우의 확률은 각각

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

따라서 그 확률은

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

③ (i), (ii)에서 주사위를 5번 던져서 게임이 끝날 확률 p는

⑦+⑧이므로

18p

$$= 18 \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \right\}$$

$$= \frac{1}{27} + \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} = \frac{119}{216}$$

답 ⑤

주사위를 5번 던져서 게임이 끝나려면 주사위를 4번 던졌을 때 점 P가 수직선의 0 또는 -1에 위치하고, 이전까지는 수직선의 원점의 오른쪽에 위치하지 않아야 한다.

확률질량함수의 성질
이산확률변수 X의 확률
질량함수

$$P(X=x_i)=p_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

에 대하여

$$\textcircled{1} 0 \leq p_i \leq 1$$

$$\textcircled{2} p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

확률변수 X가 a 이상 b 이하의 값을 가질 확률은
 $P(a \leq X \leq b)$

$0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ 에서

$$f(x) = -3x + 2$$

이므로

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \frac{1}{3} + 2 = 1$$

III 통계

III -1. 확률변수와 확률분포

개념 & 핵심 기술

본책 52~54쪽

01 확률의 총합은 1이므로

$$a + a^2 + 2a + 3a^2 = 1, \quad 4a^2 + 3a - 1 = 0$$

$$(a+1)(4a-1)=0 \quad \therefore a = \frac{1}{4} \quad (\because a \geq 0)$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} \quad \text{답 } \frac{5}{16}$$

02 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=10) = 1$$

$$P(X=1) + 2P(X=1) + \dots + 10P(X=1) = 1$$

$$(1+2+3+\dots+10)P(X=1) = 1$$

$$55P(X=1) = 1 \quad \therefore P(X=1) = \frac{1}{55}$$

$$\therefore P(X=k) = k \cdot \frac{1}{55} = \frac{k}{55} \quad (k=1, 2, 3, \dots, 10)$$

따라서 구하는 확률은

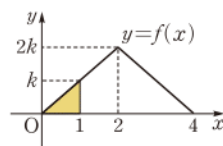
$$P(3 \leq X \leq 6)$$

$$= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$= \frac{3}{55} + \frac{4}{55} + \frac{5}{55} + \frac{6}{55}$$

$$= \frac{18}{55} \quad \text{답 } \frac{18}{55}$$

03 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$

$P(0 \leq X \leq 1)$ 은 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \quad \text{답 } \frac{1}{8}$$

04 $P(a \leq X \leq 0) = \frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot (-a) \cdot 2 = \frac{1}{3} \quad \therefore a = -\frac{1}{3}$$

$P(0 \leq X \leq b) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot 2 = \frac{2}{3} \quad \therefore b = \frac{2}{3}$$

따라서 $a+b = \frac{1}{3}$ 이고, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ 이므로

$$P(a+b \leq X \leq b) = P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) \\ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot 1 \\ = \frac{1}{6}$$

답 ②

05 확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{12} + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{11}{12} \quad \dots\dots ㉑$$

$$E(X) = \frac{16}{3} \text{이므로} \quad 2 \cdot a + 4 \cdot \frac{1}{12} + 6 \cdot b = \frac{16}{3} \\ \therefore 2a + 6b = 5 \quad \dots\dots ㉒$$

$$㉑, ㉒을 연립하여 풀면 \quad a = \frac{1}{8}, b = \frac{19}{24}$$

$$\therefore b - a = \frac{2}{3} \quad \text{답 ⑤}$$

06 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수와 7의 곱을 4로 나눈 나머지를 표로 나타내면 다음과 같다.

눈의 수	(눈의 수) × 7	4로 나눈 나머지
1	7	3
2	14	2
3	21	1
4	28	0
5	35	3
6	42	2

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0) = \frac{1}{6}, P(X=1) = \frac{1}{6},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3}, P(X=3) = \frac{1}{3}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

답 ⑤

07 한 번의 시행에서 받을 수 있는 금액을 X 원이라 하면 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2800, 2100, 1400이고, 그 확률은 각각

$$P(X=2800) = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_5C_0}{{}_8C_2} = \frac{3}{28},$$

$$P(X=2100) = \frac{{}_3C_0 \cdot {}_5C_2}{{}_8C_2} = \frac{5}{14},$$

$$P(X=1400) = \frac{{}_3C_1 \cdot {}_5C_1}{{}_8C_2} = \frac{15}{28}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2800	2100	1400	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	1

$V(X)$ 의 정의를 이용하여 다음과 같이 계산할 수도 있다.

$$V(X) \\ = (1-5)^2 \cdot \frac{1}{4} \\ + (2-5)^2 \cdot \frac{1}{8} \\ + (6-5)^2 \cdot \frac{1}{4} \\ + (8-5)^2 \cdot \frac{3}{8} \\ = \frac{35}{4}$$

• 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률

• 꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률

• 꺼낸 공이 흰 공 1개, 검은 공 1개일 확률

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 2800 \cdot \frac{3}{28} + 2100 \cdot \frac{5}{14} + 1400 \cdot \frac{15}{28} \\ = 1800$$

답 1800원

08 $E(X) = 5$ 이므로

$$1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + a \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{3}{8} = 5$$

$$\frac{a}{4} + \frac{7}{2} = 5 \quad \therefore a = 6$$

$$\therefore V(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 6^2 \cdot \frac{1}{4} + 8^2 \cdot \frac{3}{8} - 5^2 \\ = \frac{35}{4}$$

답 ③

09 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0) = \frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_0}{{}_7C_2} = \frac{2}{7},$$

$$P(X=1) = \frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_7C_2} = \frac{4}{7},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_4C_0 \cdot {}_3C_2}{{}_7C_2} = \frac{1}{7}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{4}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{7},$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{2}{7} + 1^2 \cdot \frac{4}{7} + 2^2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{8}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{20}{49}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{\frac{20}{49}} = \frac{2\sqrt{5}}{7}$$

답 ③

10 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 이므로

$$V(X) = 3k + 1 - k^2 = -\left(k - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

따라서 $V(X)$ 는 $k = \frac{3}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{13}{4}$ 을 갖는다.

답 $\frac{13}{4}$

11 $E(X) = m(m > 0)$ 이라 하면

$$E(3X+a) = 12 \text{에서} \quad 3E(X) + a = 12$$

$$3m + a = 12 \quad \therefore a = 12 - 3m \quad \dots\dots ㉑$$

$$E(3-aX) = 39 \text{에서} \quad 3 - aE(X) = 39$$

$$3 - am = 39 \quad \therefore am = -36 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$(12-3m) \cdot m = -36, \quad m^2 - 4m - 12 = 0$$

$$(m+2)(m-6) = 0 \quad \therefore m = 6 (\because m > 0)$$

$$m = 6 \text{을 } ㉑ \text{에 대입하면} \quad a = 12 - 3 \cdot 6 = -6$$

$$\therefore E(X-a) = E(X) - a = m - a = 12$$

답 ②

12 확률의 총합은 1이므로

$$a+b+2b+2b=1 \quad \therefore a+5b=1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$E(6X+4)=6E(X)+4=15 \text{이므로} \quad E(X)=\frac{11}{6}$$

$$\text{즉 } 0 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot 2b + 3 \cdot 2b = \frac{11}{6} \text{이므로}$$

$$11b = \frac{11}{6} \quad \therefore b = \frac{1}{6}$$

$$b = \frac{1}{6} \text{을 } ㉠ \text{에 대입하면} \quad a + 5 \cdot \frac{1}{6} = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a+b = \frac{1}{3} \quad \text{답 ㉡}$$

13 O형인 학생이 2명이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0) = \frac{{}_2C_0 \cdot {}_8C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{15},$$

$$P(X=1) = \frac{{}_2C_1 \cdot {}_8C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{15},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2 \cdot {}_8C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{15}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \cdot \frac{7}{15} + 1 \cdot \frac{7}{15} + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$$

이므로

$$\begin{aligned} E(5X+3) &= 5E(X) + 3 \\ &= 5 \cdot \frac{3}{5} + 3 = 6 \end{aligned} \quad \text{답 6}$$

14 $E(X)=5$ 이므로

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= aE(X) + b = 5a+b \\ \therefore 5a+b &= 21 \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$$V(X) = (\sqrt{5})^2 = 5 \text{이므로}$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X) = 5a^2$$

$$\text{즉 } 5a^2 = 45 \text{이므로} \quad a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

$$a = 3 \text{을 } ㉠ \text{에 대입하면} \quad 15 + b = 21 \quad \therefore b = 6$$

$$\therefore a+b = 9 \quad \text{답 ㉡}$$

15 $E(X)=10$ 이므로

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\frac{X+b}{a}\right) = \frac{1}{a} E(X) + \frac{b}{a} \\ &= \frac{10}{a} + \frac{b}{a} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore b = -10$$

또 $\sigma(X)=3$ 이므로

$$\sigma(Y) = \sigma\left(\frac{X+b}{a}\right) = \frac{1}{a} \sigma(X) = \frac{3}{a} = 1$$

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore a-b = 13 \quad \text{답 ㉡}$$

확률변수 X 와 두 상수 $a, b(a \neq 0)$ 에 대하여
 ① $E(aX+b) = aE(X)+b$
 ② $V(aX+b) = a^2 V(X)$
 ③ $\sigma(aX+b) = |a| \sigma(X)$

부분분수로의 변형

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$$
 (단, $A \neq B$)

$a > 0$ 이므로
 $\left| \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{a}$

$$16 E(Y)=11 \text{에서} \quad E\left(\frac{1}{2}X+5\right)=11$$

$$\frac{1}{2}E(X)+5=11 \quad \therefore E(X)=12$$

$$\text{또 } E(Y^2)=124 \text{이므로 } V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2 \text{에서}$$

$$V(Y)=124-11^2=3$$

$$\text{즉 } V(Y)=3 \text{이므로} \quad V\left(\frac{1}{2}X+5\right)=3$$

$$\frac{1}{2^2} V(X)=3 \quad \therefore V(X)=12$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \text{에서}$$

$$12=E(X^2)-12^2 \quad \therefore E(X^2)=156 \quad \text{답 ㉡}$$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 55~57쪽

01 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{8} + a + b + c = 1 \quad \therefore a + b + c = \frac{7}{8} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{조건 (가)에서} \quad \frac{1}{8} + c = a + b \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{8} + c + c = \frac{7}{8}, \quad 2c = \frac{3}{4} \quad \therefore c = \frac{3}{8}$$

$$\text{조건 (나)에서} \quad a + c = 2b \quad \dots\dots ㉢$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$2b + b = \frac{7}{8}, \quad 3b = \frac{7}{8} \quad \therefore b = \frac{7}{24}$$

$$b = \frac{7}{24}, c = \frac{3}{8} \text{을 } ㉠ \text{에 대입하면}$$

$$a + \frac{7}{24} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} \quad \therefore a = \frac{5}{24}$$

$$\therefore a + 2b + 3c = \frac{5}{24} + 2 \cdot \frac{7}{24} + 3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{23}{12} \quad \text{답 ㉡}$$

02 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=5) + P(X=6) = 1$$

$$\frac{a}{1 \cdot 2} + \frac{a}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{a}{5 \cdot 6} + b = 1$$

$$a \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \right] + b = 1$$

$$\therefore \frac{5}{6}a + b = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$P(X \leq 3) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{1 \cdot 2} + \frac{a}{2 \cdot 3} + \frac{a}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

$$a \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \right] = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

$a = \frac{2}{3}$ 를 ㉠에 대입하면

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} + b = 1 \quad \therefore b = \frac{4}{9}$$

$$\therefore a + b = \frac{10}{9}$$

답 ③

03 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{15} + a + b + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = 1$$

$$\therefore a + b = \frac{11}{15} \quad \dots\dots ㉠$$

$1 \leq X \leq 3$ 인 사건을 A , $3 \leq X \leq 4$ 인 사건을 B 라 하면

$$\begin{aligned} P(A) &= P(1 \leq X \leq 3) \\ &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= \frac{1}{15} + a + b \\ &= \frac{1}{15} + \frac{11}{15} = \frac{4}{5} \quad (\because ㉠) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(3 \leq X \leq 4) \\ &= P(X=3) + P(X=4) \\ &= b + \frac{2}{15} \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = P(X=3) = b$$

이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ b &= \frac{4}{5} \cdot \left(b + \frac{2}{15}\right), \quad 5b = 4b + \frac{8}{15} \\ \therefore b &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$b = \frac{8}{15}$ 을 ㉠에 대입하면

$$a + \frac{8}{15} = \frac{11}{15} \quad \therefore a = \frac{1}{5}$$

$$\therefore b - a = \frac{1}{3}$$

답 ⑤

04 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = P(X \leq 1) = P(-2 \leq X \leq 1)$$

$$= 1 - P(1 \leq X \leq 2)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{8},$$

$$P(A \cap B) = P(0 \leq X \leq 1)$$

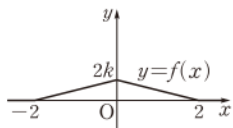
$$= P(0 \leq X \leq 2) - P(1 \leq X \leq 2)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

이므로

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}$$

답 ③



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이다.

$-2 \leq x \leq 2$ 에서

$$f(x) = \frac{1}{4}(2 - |x|)$$

이므로

$$f(1) = \frac{1}{4}$$

05 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 3a = 1$$

$$10a^2 = 1$$

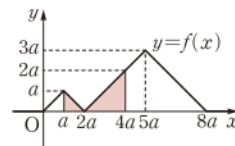
$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad (\because a > 0)$$

$P(a \leq X \leq 4a)$ 는 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$P(a \leq X \leq 4a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a$$

$$= \frac{5}{2}a^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$



06 1부터 6까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5의 3개이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_0 \cdot {}_3C_3}{{}_6C_3} = \frac{1}{20},$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_6C_3} = \frac{9}{20},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_6C_3} = \frac{9}{20},$$

$$P(X=3) = \frac{{}_3C_3 \cdot {}_3C_0}{{}_6C_3} = \frac{1}{20}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

→ ①

즉 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{20} + 1 \cdot \frac{9}{20} + 2 \cdot \frac{9}{20} + 3 \cdot \frac{1}{20}$$

$$= \frac{3}{2}$$

→ ②

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
① X 의 확률분포를 구할 수 있다.	50%
② $E(X)$ 를 구할 수 있다.	50%

07 한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X 원이라 할 때, 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-500	1000	합계
$P(X=x)$	$\frac{x}{8+x}$	$\frac{8}{8+x}$	1

이 게임을 한 번 해서 받을 수 있는 금액의 기댓값이 300 원이므로

$$-500 \cdot \frac{x}{8+x} + 1000 \cdot \frac{8}{8+x} = 300$$

$$\frac{-5x+80}{8+x} = 3$$

$$-5x+80=24+3x$$

$$8x=56 \quad \therefore x=7$$

답 ④

08 빨간 공과 흰 공에 적힌 두 수의 합은 2, 3, 4, 5이고 흰 공에 적힌 두 수의 곱은 2이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=2)=\frac{1}{{}_5C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=3)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=4)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5},$$

$$P(X=5)=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

즉 확률변수 X 에 대하여

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{23}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{5} + 3^2 \cdot \frac{1}{5} + 4^2 \cdot \frac{1}{5} + 5^2 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{83}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{83}{10} - \left(\frac{23}{10}\right)^2 = \frac{301}{100} \end{aligned}$$

답 ④

09 1, 3, 5를 각각 한 번씩 이용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 $3!=6$ 이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{1}{6},$$

$$P(X=2)=\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=3)=\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6},$$

$\vdots$

$$\therefore P(X=x)=\frac{1}{6} \quad (x=1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad \rightarrow ①$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} (1+2+\cdots+6) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 21 = \frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} (1^2+2^2+\cdots+6^2) = \frac{91}{6} \end{aligned}$$

이므로

10이 적힌 빨간 공 1개와 1이 적힌 흰 공 1개를 꺼내는 경우의 수

흰 공 2개를 꺼내는 경우의 수

1, 2가 적힌 카드 중에서 1장을 뽑고, 4, 5, 6이 적힌 카드 중에서 1장을 뽑는 경우의 수

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} \quad \rightarrow ②$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6} \quad \rightarrow ③$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{105}}{6}$$

채점 기준	비율
① X 의 확률질량함수를 구할 수 있다.	40%
② $V(X)$ 를 구할 수 있다.	40%
③ $\sigma(X)$ 를 구할 수 있다.	20%

$$\mathbf{10} \quad P(X=1)=k \cdot \frac{{}_3C_1}{{}_6C_1} = \frac{1}{2}k,$$

$$P(X=2)=k \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{5}k,$$

$$P(X=3)=k \cdot \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} = \frac{1}{20}k$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{5}k$	$\frac{1}{20}k$	1

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{5}k + \frac{1}{20}k = 1, \quad \frac{3}{4}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{4}{3}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot \frac{1}{2}k + 2 \cdot \frac{1}{5}k + 3 \cdot \frac{1}{20}k = \frac{21}{20}k \\ &= \frac{21}{20} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

이때 $E(aX) = aE(X) = k$ 에서

$$\frac{7}{5}a = \frac{4}{3} \quad \therefore a = \frac{20}{21}$$

$$\therefore k - a = \frac{8}{21} \quad \text{답 } ①$$

11 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$P(X=2)=\frac{{}_1C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_6C_3} = \frac{1}{5},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_2C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_6C_3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=4)=\frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_6C_3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=5)=\frac{{}_4C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_6C_3} = \frac{1}{5}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{2} \quad \rightarrow ②$$

이므로

$$\begin{aligned} E(10X-5) &= 10E(X) - 5 \\ &= 10 \cdot \frac{7}{2} - 5 = 30 \end{aligned}$$

→ ③

답 30

채점 기준	비율
① X 의 확률분포를 구할 수 있다.	40%
② $E(X)$ 를 구할 수 있다.	30%
③ $E(10X-5)$ 를 구할 수 있다.	30%

12 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4} + a + b = 1 \quad \therefore b = \frac{3}{4} - a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$V(8X) = 47$ 에서

$$8^2 V(X) = 47 \quad \therefore V(X) = \frac{47}{64}$$

이때 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot a + 2 \cdot b = a + 2b$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot a + 2^2 \cdot b = a + 4b$$

이므로

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = a + 4b - (a + 2b)^2 \\ \therefore a + 4b - (a + 2b)^2 &= \frac{47}{64} \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

위의 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} a + 4\left(\frac{3}{4} - a\right) - \left[a + 2\left(\frac{3}{4} - a\right)\right]^2 &= \frac{47}{64} \\ -a^2 + \frac{3}{4} &= \frac{47}{64}, \quad a^2 = \frac{1}{64} \\ \therefore a &= \frac{1}{8} \quad (\because a \geq 0) \end{aligned}$$

$$a = \frac{1}{8} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \quad b = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $E(X) = a + 2b = \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$ 이므로

$$E\left(\frac{X}{a}\right) = \frac{1}{a} E(X) = 8 \cdot \frac{11}{8} = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 11

채점 기준	비율
① a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40%
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $E\left(\frac{X}{a}\right)$ 를 구할 수 있다.	30%

13 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{1}{4C_2} = \frac{1}{6}, \\ P(X=3) &= \frac{{}_2C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_4C_2} = \frac{1}{3}, \\ P(X=4) &= \frac{{}_2C_1 \cdot {}_1C_1}{{}_4C_2} = \frac{1}{3}, \\ P(X=5) &= \frac{1}{4C_2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

확률이므로 0보다 크거나 같다.

10이 적힌 공 1개와 2가 적힌 공 1개를 꺼내는 경우의 수

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2},$$

$$E(X^2) = 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} + 4^2 \cdot \frac{1}{3} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{79}{6}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{79}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{11}{12}$$

$$\text{즉 } \sigma(X) = \sqrt{\frac{11}{12}} = \frac{\sqrt{33}}{6} \text{이므로}$$

$$\sigma(6X+2) = 6 \cdot \frac{\sqrt{33}}{6} = \sqrt{33} \quad \text{답 ②}$$

14 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, ..., 9이고, 확률변수 Y, Z 가 가질 수 있는 값은 각각 0, 2, 4, 6, ..., 18이다.

X, Y, Z 가 각각의 값을 가질 확률은 모두 $\frac{1}{10}$ 이므로

$$\begin{aligned} Y &= Z = 2X \\ \therefore V(Y) &= V(Z) = V(2X) = 2^2 V(X) \\ &= 4V(X) \end{aligned}$$

이때 $V(X) > 0$ 이므로 $V(X) < V(Y) = V(Z)$

$$\therefore a < b = c \quad \text{답 ③}$$

◎ 사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 58쪽

01 $f(k)$ 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

k	1	2	3	4	5
$f(k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	1

$$\neg. k=1, 4 \text{일 때, } f(1) + f(4) = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$$

$$k=2, 3 \text{일 때, } f(2) + f(3) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\neg. E(X) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{9} + 5 \cdot \frac{1}{9} = 3,$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{8}{9} + 1 = 3$$

이므로

$$E(X) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$$

$$\begin{aligned} \neg. E(X^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{9} + 2^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} + 4^2 \cdot \frac{2}{9} + 5^2 \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{31}{3}, \end{aligned}$$

$$f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) + 5f(5)$$

$$= \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{8}{9} + 5 \cdot 1 = \frac{34}{3}$$

이므로

$$E(X^2) \neq f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) + 5f(5)$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ③

02 (i) A 농가

$$E(X) = 20 \times 0.2 + 15 \times 0.6 + 10 \times 0.2 = 15,$$

$$E(X^2) = 20^2 \times 0.2 + 15^2 \times 0.6 + 10^2 \times 0.2 = 235$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 235 - 15^2 = 10$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{10}$$

(ii) B 농가

$$E(X) = 20 \times 0.25 + 15 \times 0.5 + 10 \times 0.25 = 15,$$

$$E(X^2) = 20^2 \times 0.25 + 15^2 \times 0.5 + 10^2 \times 0.25$$

$$= 237.5$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 237.5 - 15^2 = 12.5$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{12.5}$$

(iii) C 농가

$$E(X) = 20 \times 0.35 + 15 \times 0.3 + 10 \times 0.35 = 15,$$

$$E(X^2) = 20^2 \times 0.35 + 15^2 \times 0.3 + 10^2 \times 0.35$$

$$= 242.5$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 242.5 - 15^2 = 17.5$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{17.5}$$

이상에서 표준편차가 작은 농가부터 순서대로 나열하면

A, B, C

④ ①

03 A, B, C, D가 받은 카드에 적힌 숫자를 각각 a, b, c, d 라 하자.

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각 다음과 같다.

(i) $X=0$ 인 경우

$a > b$ 이어야 하므로

$$P(X=0) = \frac{{}_4C_2 \cdot 2!}{4!} = \frac{1}{2}$$

(ii) $X=1$ 인 경우

$a < b < c$ 이어야 하므로

$$P(X=1) = \frac{{}_4C_3 \cdot 1}{4!} = \frac{1}{6}$$

(iii) $X=2$ 인 경우

$a < b, b > c, b < d$ 이어야 하므로

$$b=3, d=4$$

$$\therefore P(X=2) = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{12}$$

(iv) $X=3$ 인 경우

$b=4$ 이어야 하므로

$$P(X=3) = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$$

이상에서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$$

이므로

$$E(3X-1) = 3E(X) - 1 = 3 \cdot \frac{13}{12} - 1 = \frac{9}{4} \quad \text{④ ④}$$

◦참고 X 의 값에 따른 각 경우를 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 로 나타내면 다음과 같다.

(i) $X=0$ 인 경우

$(2, 1, 3, 4), (2, 1, 4, 3), (3, 1, 2, 4),$
 $(3, 1, 4, 2), (4, 1, 2, 3), (4, 1, 3, 2),$
 $(3, 2, 1, 4), (3, 2, 4, 1), (4, 2, 1, 3),$
 $(4, 2, 3, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1)$

(ii) $X=1$ 인 경우

$(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 4, 2),$
 $(2, 3, 4, 1)$

(iii) $X=2$ 인 경우

$(1, 3, 2, 4), (2, 3, 1, 4)$

(iv) $X=3$ 인 경우

$(1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2), (2, 4, 1, 3),$
 $(2, 4, 3, 1), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1)$

04 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$P(X=2) = \frac{1}{6},$$

$$P(X=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(X=4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

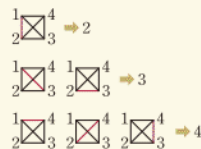
$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{3},$$

$$E(X^2) = 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} + 4^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{3}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{35}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\therefore V(3X+2) = 3^2 V(X) = 9 \cdot \frac{5}{9} = 5 \quad \text{⑤ 5}$$



c, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수

a, b, c, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수

III -2. 이항분포와 정규분포

개념 & 핵심 기술

본책 60~62쪽

01 $P(X=n-1)=12P(X=n)$ 에서

$${}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)=12 \cdot {}_nC_n p^n$$

$$np^{n-1}(1-p)=12p^n$$

$p \neq 0$ 이므로 위의 식의 양변을 p^{n-1} 으로 나누면

$$n(1-p)=12p \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$np=6 \text{에서} \quad n=\frac{6}{p} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면 $\frac{6}{p}(1-p)=12p$

$$1-p=2p^2, \quad 2p^2+p-1=0$$

$$(p+1)(2p-1)=0 \quad \therefore p=\frac{1}{2} \quad (\because 0 < p \leq 1)$$

$p=\frac{1}{2}$ 을 ②에 대입하면 $n=12$

$$\therefore n+6p=15 \quad \text{답 15}$$

02 확률변수 X 는 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르므로

$E(X)=16, V(X)=12$ 에서

$$np=16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$np(1-p)=12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$16(1-p)=12, \quad 1-p=\frac{3}{4} \quad \therefore p=\frac{1}{4}$$

$p=\frac{1}{4}$ 을 ①에 대입하면 $n=64$

$$\therefore \frac{n}{p}=256 \quad \text{답 ④}$$

03 원판에 적힌 수 중에서 약수의 개수가 3 또는 4인 수는 4, 6, 8이다.

즉 약수의 개수가 3 또는 4인 수가 적힌 영역에 화살을 맞힐 확률은 $\frac{3}{8}$ 이다.

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B(320, \frac{3}{8})$ 을 따르므로

$$E(X)=320 \cdot \frac{3}{8}=120 \quad \text{답 120}$$

04 $P(2-3\sigma \leq X \leq 2+3\sigma)=a$ 에서

$$2P(2 \leq X \leq 2+3\sigma)=a$$

$$\therefore P(2 \leq X \leq 2+3\sigma)=\frac{a}{2}$$

$P(2+2\sigma \leq X \leq 2+3\sigma)=b$ 에서

$$P(2 \leq X \leq 2+3\sigma)-P(2 \leq X \leq 2+2\sigma)=b$$

$$\frac{a}{2}-P(2 \leq X \leq 2+2\sigma)=b$$

$$\therefore P(2 \leq X \leq 2+2\sigma)=\frac{a}{2}-b$$

$$\therefore P(2-2\sigma \leq X \leq 2+2\sigma)=2P(2 \leq X \leq 2+2\sigma)$$

$$=2\left(\frac{a}{2}-b\right)=a-2b$$

$$\text{답 } a-2b$$

$${}_nC_{n-1}={}_nC_1=n$$

Z_Y 의 정규분포 곡선은 직선 $z=0$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(-a \leq Z_Y \leq b) = P(-b \leq Z_Y \leq a)$$

확률변수 X 의 확률질량 함수가

$$P(X=x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, n)$$

→ X 는 이항분포 $B(n, p)$ 를 따른다.

	약수
4	1, 2, 4
6	1, 2, 3, 6
8	1, 2, 4, 8

$N(2, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

05 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $P(a-2 \leq X \leq a+6)$ 이 최대가 되려면

$$\frac{(a-2)+(a+6)}{2}=m, \quad a+2=m$$

$$\therefore m-a=2$$

$$\text{답 ②}$$

06 두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(8, 3^2), N(24, 4^2)$ 을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-8}{3}, \quad Z_Y=\frac{Y-24}{4}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 즉

$$P(5 \leq X \leq a) = P\left(\frac{5-8}{3} \leq Z_X \leq \frac{a-8}{3}\right)$$

$$=P\left(-1 \leq Z_X \leq \frac{a-8}{3}\right),$$

$$P(10 \leq Y \leq 28) = P\left(\frac{10-24}{4} \leq Z_Y \leq \frac{28-24}{4}\right)$$

$$=P\left(-\frac{7}{2} \leq Z_Y \leq 1\right)$$

$$=P\left(-1 \leq Z_Y \leq \frac{7}{2}\right)$$

이므로 $P(5 \leq X \leq a) = P(10 \leq Y \leq 28)$ 에서

$$P\left(-1 \leq Z_X \leq \frac{a-8}{3}\right) = P\left(-1 \leq Z_Y \leq \frac{7}{2}\right)$$

따라서 $\frac{a-8}{3} = \frac{7}{2}$ 이므로

$$a-8=\frac{21}{2} \quad \therefore a=\frac{37}{2} \quad \text{답 } \frac{37}{2}$$

07 두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(1, 2^2), N(2, 1^2)$ 을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-1}{2}, \quad Z_Y=\frac{Y-2}{1}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 즉

$$a=P(1 \leq X \leq 5) = P\left(\frac{1-1}{2} \leq Z_X \leq \frac{5-1}{2}\right)$$

$$=P(0 \leq Z_X \leq 2),$$

$$b=P(-1 \leq Y \leq 1) = P\left(\frac{-1-2}{1} \leq Z_Y \leq \frac{1-2}{1}\right)$$

$$=P(-3 \leq Z_Y \leq -1) = P(1 \leq Z_Y \leq 3),$$

$$c=P(1 \leq Y \leq 3) = P\left(\frac{1-2}{1} \leq Z_Y \leq \frac{3-2}{1}\right)$$

$$=P(-1 \leq Z_Y \leq 1)$$

에서 $P(1 \leq Z_Y \leq 3) < P(0 \leq Z_X \leq 2) < P(-1 \leq Z_Y \leq 1)$

이므로 $b < a < c$

$$\text{답 ③}$$

1등급 비밀노트 >>>

① 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y 에 대한 확률을 비교할 때에는 각각을 표준화한 다음 확률을 비교한다.

② $P(a \leq Z \leq \beta), P(a' \leq Z \leq \beta')$ 에 대하여

$$\beta-a=\beta'-a' \text{ 일 때, } \left|\frac{a+\beta}{2}\right| > \left|\frac{a'+\beta'}{2}\right| \text{ 이면}$$

$$P(a \leq Z \leq \beta) < P(a' \leq Z \leq \beta')$$

08 두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m, 4^2)$, $N(2m, 3^2)$ 을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-m}{4}, Z_Y = \frac{Y-2m}{3}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 즉

$$P(X \leq 2m+5) = P\left(Z_X \leq \frac{2m+5-m}{4}\right)$$

$$= P\left(Z_X \leq \frac{m+5}{4}\right),$$

$$P(Y \geq 4m-23) = P\left(Z_Y \geq \frac{4m-23-2m}{3}\right)$$

$$= P\left(Z_Y \geq \frac{2m-23}{3}\right)$$

이므로 $P(X \leq 2m+5) = P(Y \geq 4m-23)$ 에서

$$P\left(Z_X \leq \frac{m+5}{4}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{2m-23}{3}\right)$$

따라서 $\frac{m+5}{4} = -\frac{2m-23}{3}$ 이므로

$$3m+15 = -8m+92 \quad \therefore m=7$$

답 7

09 확률변수 X 가 정규분포 $N(12, 3^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-12}{3}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(X \geq a) = 0.6915$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{a-12}{3}\right) = 0.6915$$

$$P\left(Z \leq \frac{12-a}{3}\right) = 0.6915$$

$$P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{12-a}{3}\right) = 0.6915$$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{12-a}{3}\right) = 0.6915$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{12-a}{3}\right) = 0.1915$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915$ 이므로

$$\frac{12-a}{3} = 0.5 \quad \therefore a = 10.5$$

$P(X \leq b) = 0.9772$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{b-12}{3}\right) = 0.9772$$

$$P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-12}{3}\right) = 0.9772$$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-12}{3}\right) = 0.9772$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-12}{3}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{b-12}{3} = 2 \quad \therefore b = 18$$

$$\therefore a+b = 28.5$$

답 28.5

10 $P(-0.5 \leq X \leq 0.5) - P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$

$$= 2\{P(0 \leq X \leq 0.5) - P(0 \leq Z \leq 0.5)\}$$

$$= 2\{P(0 \leq X \leq 0.5) - 0.1915\}$$

확률이 0.5보다 크므로
 $\frac{a-12}{3} < 0$

(80점 이상일 확률)
 $\times$ (2학년 학생 수)

두 곡선 $y=f(x)$,
 $y=g(x)$ 는 모두 직선
 $x=0$ 에 대하여 대칭이다.

이므로 $2\{P(0 \leq X \leq 0.5) - 0.1915\} = 0.2996$ 에서

$$P(0 \leq X \leq 0.5) = 0.3413$$

확률변수 X 가 정규분포 $N(0, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X}{\sigma}$

로 놓으면 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 즉

$$P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{0.5}{\sigma}\right) = 0.3413$$

이고, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{0.5}{\sigma} = 1$$

$$\therefore \sigma = 0.5$$

답 ③

11 사과 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(310, 20^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-310}{20}$ 으로 놓으면

Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(X \geq 340) = P\left(Z \geq \frac{340-310}{20}\right) = P(Z \geq 1.5)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

답 ③

12 학생들의 수학 성적을 X 점이라 하면 확률변수 X 는

정규분포 $N(62, 12^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-62}{12}$ 로 놓으면

Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(X \geq 80) = P\left(Z \geq \frac{80-62}{12}\right) = P(Z \geq 1.5)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.43 = 0.07$$

따라서 수학 성적이 80점 이상인 학생 수는

$$0.07 \times 300 = 21$$

답 21

13 일주일 동안 자율학습실에서 공부한 시간을 X 시간이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(14, 4^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-14}{4}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

지정석을 받기 위한 최소 시간을 a 시간이라 하면

$$P(X \geq a) = \frac{67}{1000} = 0.067$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-14}{4}\right) = 0.067$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-14}{4}\right) = 0.067$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-14}{4}\right) = 0.067$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-14}{4}\right) = 0.433$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.433$ 이므로

$$\frac{a-14}{4} = 1.5 \quad \therefore a = 20$$

따라서 지정석을 받기 위한 최소 시간은 20시간이다.

답 20시간

14 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 72 \cdot \frac{2}{3} = 48, V(X) = 72 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 16$$

따라서 X 는 근사적으로 정규분포 $N(48, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-48}{4}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(44 \leq X \leq 56) &= P\left(\frac{44-48}{4} \leq Z \leq \frac{56-48}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$

답 ③

15 주머니에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때, 검은 공의 개수가 2일 확률은 $\frac{{}_4C_1 \cdot {}_2C_2}{{}_6C_3} = \frac{1}{5}$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B(400, \frac{1}{5})$ 을 따르므로

$$E(X) = 400 \cdot \frac{1}{5} = 80, V(X) = 400 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 64$$

즉 X 는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-80}{8}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 68) &= P\left(Z \geq \frac{68-80}{8}\right) \\ &= P(Z \geq -1.5) = P(Z \leq 1.5) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 + 0.4332 \\ &= 0.9332 \end{aligned}$$

답 0.9332

16 정사면체 모양의 주사위 2개를 동시에 던질 때, 바닥에 놓인 면에 적힌 두 수의 합이 6 이상인 경우를 순서쌍으로 나타내면

$$(2, 4), (3, 3), (4, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4)$$

의 6가지이므로 사건 A 가 일어날 확률은 $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

따라서 960회의 시행 중 사건 A 가 일어나는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(960, \frac{3}{8})$ 을 따르므로

$$E(X) = 960 \cdot \frac{3}{8} = 360, V(X) = 960 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = 225$$

즉 X 는 근사적으로 정규분포 $N(360, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-360}{15}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 330) &= P\left(Z \leq \frac{330-360}{15}\right) \\ &= P(Z \leq -2) = P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

답 ②

확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따를 때, n 이 충분히 크면 X 는 근사적으로 정규분포 $N(np, npq)$ 를 따른다.
(단, $q=1-p$)

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$4 \cdot 4 = 16$$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 63~66쪽

01 확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{90}C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{90-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 90)$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{P(X=k)}{P(X=k+1)} &= \frac{{}_{90}C_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{90-k}}{{}_{90}C_{k+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{89-k}} \\ &= \frac{90!}{k!(90-k)!} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(k+1)!(89-k)!} \cdot \frac{1}{4} \\ &= 3 \cdot \frac{k+1}{90-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉 } \frac{3(k+1)}{90-k} &= \frac{9}{10} \text{ 이므로 } 10k+10=270-3k \\ 13k &= 260 \quad \therefore k=20 \end{aligned}$$

답 ③

02 확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{50}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{50-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 50)$$

이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B(50, \frac{1}{2})$ 을 따른다.

→ ①

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25, V(X) = 50 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$$

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{25}{2} + 25^2 = \frac{1275}{2} \end{aligned}$$

→ ②

$$\begin{aligned} \therefore E\left(\frac{X^2}{25}\right) &= \frac{1}{25} E(X^2) = \frac{1}{25} \cdot \frac{1275}{2} \\ &= \frac{51}{2} \end{aligned}$$

→ ③

답 $\frac{51}{2}$

채점 기준	비율
① X 가 따르는 이항분포를 구할 수 있다.	40%
② $E(X^2)$ 을 구할 수 있다.	40%
③ $E\left(\frac{X^2}{25}\right)$ 을 구할 수 있다.	20%

03 $E(X) = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120$ 이므로

$$E(2X) = 2E(X) = 2 \cdot 120 = 240$$

$$V(X) = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 100 \text{ 이므로}$$

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 = 100 + 120^2 = 14500 \\ \therefore f(x) &= 14500 - 240x + x^2 = (x-120)^2 + 100 \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=120$ 일 때 최솟값 100을 가지므로
 $a=120, b=100 \quad \therefore a+b=220$ [답] 220

04 의약품 K를 투여하였을 때 발진을 일으킬 확률이 0.2이고, 이 중 1시간 내에 정상으로 회복하지 못할 확률이 0.2이므로 의약품 K를 투여하였을 때 발진을 일으킨 후 1시간 내에 정상으로 회복하지 못할 확률은

$$0.2 \times 0.2 = 0.04$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B(60000, 0.04)$ 를 따르므로

$$E(X) = 60000 \times 0.04 = 2400$$

$$\sigma(X) = \sqrt{60000 \times 0.04 \times 0.96} = 48$$
 [답] ④

05 $\neg$. $f(10) = P(10 \leq X \leq 14)$ 이고, 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 직선 $x=16$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(10 \leq X \leq 14) = P(18 \leq X \leq 22)$$

$$\therefore f(10) = f(18)$$

ㄴ. $P(k \leq X \leq k+4)$ 의 최댓값은 $P(14 \leq X \leq 18)$ 이므로 함수 $f(k)$ 는 $k=14$ 일 때 최댓값을 갖는다.

ㄷ. $f(a) = P(a \leq X \leq a+4)$,

$$f(28-a) = P(28-a \leq X \leq 32-a) \text{ 이고}$$

$$\frac{a + (32-a)}{2} = 16, \quad \frac{(a+4) + (28-a)}{2} = 16$$

이므로

$$P(a \leq X \leq a+4) = P(28-a \leq X \leq 32-a)$$

$$\therefore f(a) = f(28-a)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. [답] ③

1등급 비밀노트 >>>

ㄷ. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 직선 $x=k$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(2k-x, y) = 0$ 이다.

따라서 직선 $x=a+4$ 를 직선 $x=16$ 에 대하여 대칭이동하면

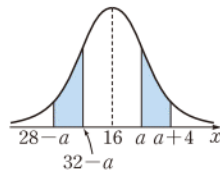
$$x = 2 \cdot 16 - (a+4) = 28-a$$

이므로 오른쪽 그림과 같이 직선

$x=28-a$ 와 직선 $x=a+4$ 는

직선 $x=16$ 에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

따라서 $f(a) = f(28-a)$ 이다.



06 평균이 100인 정규분포를 따르는 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 직선 $x=100$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(X \geq 100) = 0.5$$

$$P(100 \leq X \leq 108) = 0.48 \text{ 이므로}$$

$$P(X \geq 108) = P(X \geq 100) - P(100 \leq X \leq 108) \\ = 0.5 - 0.48 = 0.02$$

한편 $P(100 \leq X \leq 108) = P(92 \leq X \leq 100) = 0.48$ 이고

$$P(92 \leq X \leq 96) = 0.14 \text{ 이므로}$$

$$P(96 \leq X \leq 100)$$

$$= P(92 \leq X \leq 100) - P(92 \leq X \leq 96)$$

$$= 0.48 - 0.14 = 0.34$$

$$\therefore P(X \leq 96) = P(X \leq 100) - P(96 \leq X \leq 100)$$

$$= 0.5 - 0.34 = 0.16$$

정규분포 곡선의 성질

① σ 의 값이 일정할 때, m 의 값이 달라지면 대칭축의 위치는 바뀌지만 모양은 변하지 않는다.

② m 의 값이 일정할 때, σ 의 값이 클수록 가운데 부분의 높이는 낮아지고 옆으로 퍼진 모양이 된다.

$$\frac{10+22}{2} = 16,$$

$$\frac{14+18}{2} = 16$$

$$\frac{k+(k+4)}{2} = 16 \text{ 일 때,}$$

즉 $k=14$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$\therefore P(X \leq 96) + P(X \geq 108)$$

$$= 0.16 + 0.02$$

$$= 0.18$$

[답] ②

07 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 모두 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=k(x)$ 는 직선 $x=2m$ 에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=h(x)$ 는 직선 $x=m+10$ 에 대하여 대칭이다. [답] ①

이때 주어진 그래프에서

$$m < 2m < m+10, \text{ 즉 } 0 < m < 10$$

이므로 자연수 m 은 1, 2, 3, ..., 9의 9개이다. [답] ②

또 곡선 $y=f(x)$ 가 곡선 $y=g(x)$ 보다 가운데 부분의 높이가 높고 옆으로 좁으므로

$$\sigma < 5$$

즉 자연수 σ 는 1, 2, 3, 4의 4개이다. [답] ③

따라서 구하는 순서쌍 (m, σ) 의 개수는

$$9 \cdot 4 = 36$$

[답] ④

[답] 36

채점 기준	비율
① 두 곡선 $y=k(x), y=h(x)$ 의 대칭축을 구할 수 있다.	20%
② m 의 개수를 구할 수 있다.	30%
③ σ 의 개수를 구할 수 있다.	30%
④ 순서쌍 (m, σ) 의 개수를 구할 수 있다.	20%

08 두 확률변수 X, Y 의 표준편차가 서로 같으므로 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 모양은 서로 같고, $E(X)=0, E(Y)=3$ 이므로 $y=g(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같다.

$$\text{즉 } g(x) = f(x-3) \text{ 이므로}$$

$$g(x-2) = f(x-5)$$

$$\text{따라서 } h(x) = \frac{1}{3}f(x-5) + \frac{2}{3}g(x-2) \text{ 에서}$$

$$h(x) = \frac{1}{3}f(x-5) + \frac{2}{3}f(x-5)$$

$$= f(x-5)$$

이므로 $y=h(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것과 같다.

즉 확률변수 T 는 정규분포 $N(5, 2)$ 를 따르므로

$$P(T \geq 5) = 0.5$$

[답] 0.5

곡선 $y=h(x)$ 는 직선 $x=5$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(T \geq 5) = 0.5$$

$$\textbf{09 } Z^2 - (a+b)Z + ab \geq 0 \text{ 에서}$$

$$(Z-a)(Z-b) \geq 0$$

$$\therefore Z \leq a \text{ 또는 } Z \geq b \text{ (} \because a < b \text{)}$$

이때

$$P(Z \leq a) = P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq a)$$

$$= 0.5 + 0.1$$

$$= 0.6,$$

$$\begin{aligned} P(Z \geq b) &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq b) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq b) \\ &= 0.5 - \{P(0 \leq Z \leq a) + P(a \leq Z \leq b)\} \\ &= 0.5 - (0.1 + 0.3) \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &P(Z^2 - (a+b)Z + ab \geq 0) \\ &= P(Z \leq a) + P(Z \geq b) \\ &= 0.6 + 0.1 = 0.7 \end{aligned}$$

답 ③

10 두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(k, \frac{1}{k^2})$, $N(3k, \frac{16}{k^2})$ 을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-k}{\frac{1}{k}}, Z_Y = \frac{Y-3k}{\frac{4}{k}}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 즉

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= P\left(Z_X \geq \frac{a-k}{\frac{1}{k}}\right) = P(Z_X \geq ak - k^2), \\ P(Y \leq b) &= P\left(Z_Y \leq \frac{b-3k}{\frac{4}{k}}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{bk-3k^2}{4}\right) \end{aligned}$$

이므로 $P(X \geq a) = P(Y \leq b)$ 에서

$$\begin{aligned} P(Z_X \geq ak - k^2) &= P\left(Z_Y \leq \frac{bk-3k^2}{4}\right) \\ \therefore ak - k^2 &= -\frac{bk-3k^2}{4} \end{aligned}$$

그런데 $k > 0$ 이므로 위의 식의 양변을 k 로 나누면

$$\begin{aligned} a - k &= -\frac{b-3k}{4}, \quad 4a-4k = -b+3k \\ 7k &= 4a+b \quad \therefore k = \frac{4a+b}{7} \end{aligned}$$

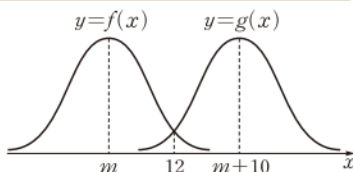
이때 $b = -a^2$ 이므로

$$k = \frac{4a-a^2}{7} = \frac{-(a-2)^2+4}{7}$$

따라서 k 는 $a=2$ 일 때 최댓값 $\frac{4}{7}$ 를 갖는다.

답 ④

11 다음 그림과 같이 곡선 $y=g(x)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 10만큼 평행이동한 것과 같다.



이때 $f(12) = g(12)$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{m+(m+10)}{2} &= 12, \quad 2m+10=24 \\ \therefore m &= 7 \end{aligned}$$

따라서 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(7, 2^2)$, $N(17, 2^2)$ 을 따르므로

$\sigma(X) < \sigma(Y)$ 이므로
 $f(50) > g(50)$

$\frac{a+56}{2} = 50$ 에서
 $a = 44$

확률변수 X, Y 의 표준편차가 서로 같으므로 두 정규분포 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 모양은 같다.

$$Z_X = \frac{X-7}{2}, Z_Y = \frac{Y-17}{2}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 즉

$$\begin{aligned} P(X \leq 6) &= P\left(Z_X \leq \frac{6-7}{2}\right) \\ &= P(Z_X \leq -0.5) = P(Z_X \geq 0.5) \\ &= P(Z_X \geq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 0.5) \\ &= 0.5 - 0.1915 = 0.3085, \end{aligned}$$

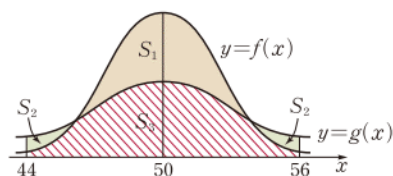
$$\begin{aligned} P(Y \geq 20) &= P\left(Z_Y \geq \frac{20-17}{2}\right) = P(Z_Y \geq 1.5) \\ &= P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

$$\therefore P(X \leq 6) + P(Y \geq 20)$$

$$= 0.3085 + 0.0668 = 0.3753$$

답 0.3753

12 두 확률변수 X, Y 의 정규분포 곡선은 모두 직선 $x=50$ 에 대하여 대칭이고, $\sigma(X) < \sigma(Y)$ 이므로 X, Y 의 정규분포 곡선을 각각 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 라 하면 다음 그림과 같다.



두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(50, 3^2)$, $N(50, 4^2)$ 을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-50}{3}, Z_Y = \frac{Y-50}{4}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

한편 위의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이를 S_3 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 - 2S_2 &= (S_1 + S_3) - (2S_2 + S_3) \\ &= P(44 \leq X \leq 56) - P(44 \leq Y \leq 56) \\ &= P\left(\frac{44-50}{3} \leq Z_X \leq \frac{56-50}{3}\right) \\ &\quad - P\left(\frac{44-50}{4} \leq Z_Y \leq \frac{56-50}{4}\right) \\ &= P(-2 \leq Z_X \leq 2) - P(-1.5 \leq Z_Y \leq 1.5) \\ &= 2P(0 \leq Z_X \leq 2) - 2P(0 \leq Z_Y \leq 1.5) \\ &= 2 \times (0.4772 - 0.4332) = 0.088 \end{aligned}$$

$$\therefore 1000(S_1 - 2S_2) = 88$$

답 ⑤

13 2학년 전체 학생의 기말고사의 국어, 수학, 영어 점수를 각각 X 점, Y 점, W 점이라 하면 확률변수 X, Y, W 는 각각 정규분포 $N(62, 10^2)$, $N(65, 12^2)$, $N(78, 8^2)$ 을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-62}{10}, Z_Y = \frac{Y-65}{12}, Z_W = \frac{W-78}{8}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y, Z_W 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 즉

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 78) &= P\left(Z_X \geq \frac{78-62}{10}\right) = P(Z_X \geq 1.6) \\
 &= P(Z_X \geq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 1.6) \\
 &= 0.5 - 0.4452 \\
 &= 0.0548 > 0.04, \\
 P(Y \geq 83) &= P\left(Z_Y \geq \frac{83-65}{12}\right) \\
 &= P(Z_Y \geq 1.5) > P(Z_Y \geq 1.6) > 0.04, \\
 P(W \geq 94) &= P\left(Z_W \geq \frac{94-78}{8}\right) = P(Z_W \geq 2) \\
 &= P(Z_W \geq 0) - P(0 \leq Z_W \leq 2) \\
 &= 0.5 - 0.4772 \\
 &= 0.0228 < 0.04
 \end{aligned}$$

이므로 영화가 1등급을 받은 과목은 영어뿐이다. **답 ②**

14 감귤의 무게를 X g이라 하고,

$$E(X) = m, \sigma(X) = \sigma$$

라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. **→ ①**

$P(X \leq 200) = 0.0228$ 에서

$$\begin{aligned}
 P\left(Z \leq \frac{200-m}{\sigma}\right) &= 0.0228 \\
 P\left(Z \geq \frac{m-200}{\sigma}\right) &= 0.0228 \\
 P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-200}{\sigma}\right) &= 0.0228 \\
 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-200}{\sigma}\right) &= 0.0228 \\
 \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-200}{\sigma}\right) &= 0.4772
 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{m-200}{\sigma} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$P(X \geq 260) = 0.1587$ 에서

$$\begin{aligned}
 P\left(Z \geq \frac{260-m}{\sigma}\right) &= 0.1587 \\
 P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{260-m}{\sigma}\right) &= 0.1587 \\
 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{260-m}{\sigma}\right) &= 0.1587 \\
 \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{260-m}{\sigma}\right) &= 0.3413
 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{260-m}{\sigma} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } \frac{m-200}{260-m} = 2$$

$$\begin{aligned}
 m-200 &= 520-2m, \quad 3m=720 \\
 \therefore m &= 240
 \end{aligned}$$

따라서 이 과수원에서 생산되는 감귤의 평균 무게는 240 g이다. **→ ③**

답 240 g

무게가 200 g 이하일 확률

무게가 260 g 이상일 확률

$$75 \times 2 = 150$$

채점 기준	비율
① 확률변수 X 를 정하고 표준화할 수 있다.	20%
② m, σ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	60%
③ 감귤의 평균 무게를 구할 수 있다.	20%

15 응시자들의 시험 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{10}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \geq a) = \frac{170}{10000} = 0.017 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 P\left(Z \geq \frac{a-m}{10}\right) &= 0.017 \\
 P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{10}\right) &= 0.017 \\
 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{10}\right) &= 0.017 \\
 \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{10}\right) &= 0.483
 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2.12) = 0.4830$ 이므로

$$\frac{a-m}{10} = 2.12 \quad \therefore a-m = 21.2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 합격자 중 상위 30 %는 $170 \times 0.3 = 51$ (명)이므로

$$\begin{aligned}
 P(X \geq b) &= \frac{51}{10000} = 0.0051 \text{에서} \\
 P\left(Z \geq \frac{b-m}{10}\right) &= 0.0051 \\
 P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-m}{10}\right) &= 0.0051 \\
 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-m}{10}\right) &= 0.0051 \\
 \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-m}{10}\right) &= 0.4949
 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2.57) = 0.4949$ 이므로

$$\frac{b-m}{10} = 2.57 \quad \therefore b-m = 25.7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{을 하면 } b-a = 4.5 \quad \textbf{답 ⑤}$$

16 두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(165.6, 10^2)$, $N(169.8, 5^2)$ 을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-165.6}{10}, Z_Y = \frac{Y-169.8}{5}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 즉

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 180) &= P\left(Z_X \geq \frac{180-165.6}{10}\right) \\
 &= P(Z_X \geq 1.44) \\
 &= P(Z_X \geq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 1.44) \\
 &= 0.5 - 0.425 = 0.075
 \end{aligned}$$

따라서 A 고등학교에서 키가 180 cm 이상인 학생 수는

$$0.075 \times 1000 = 75$$

B 고등학교에서 키가 a cm 이상인 학생 수는 150이므로

$$P(Y \geq a) = \frac{150}{1000} = 0.15 \text{에서}$$

$$P\left(Z_Y \geq \frac{a-169.8}{5}\right) = 0.15$$

$$P(Z_Y \geq 0) - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{a-169.8}{5}\right) = 0.15$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{a-169.8}{5}\right) = 0.15$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{a-169.8}{5}\right) = 0.35$$

이때 $P(0 \leq Z_Y \leq 1.04) = 0.35$ 이므로

$$\frac{a-169.8}{5} = 1.04 \quad \therefore a = 175 \quad \text{답 ②}$$

17 주사위를 한 번 던질 때 소수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

따라서 주사위를 100번 던질 때 소수의 눈이 나오는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50, \quad V(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$$

즉 X 는 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-50}{5}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

한편 점 P 의 좌표가 35 이상 80 이하이어야 하므로

$$35 \leq 2X - (100 - X) \leq 80, \quad 35 \leq 3X - 100 \leq 80$$

$$135 \leq 3X \leq 180 \quad \therefore 45 \leq X \leq 60$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(45 \leq X \leq 60) &= P\left(\frac{45-50}{5} \leq Z \leq \frac{60-50}{5}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 \\ &= 0.8185 \quad \text{답 ②} \end{aligned}$$

18 학생들의 통학 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(20, 5^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-20}{5}$ 으로 놓으면 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore p_1 &= P(X \geq 30) \\ &= P\left(Z_X \geq \frac{30-20}{5}\right) \\ &= P(Z_X \geq 2) \\ &= P(Z_X \geq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.48 \\ &= 0.02 \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

한편 10000명의 학생 중 통학 시간이 30분 이상인 학생 수를 Y 라 하면 확률변수 Y 는 이항분포 $B(10000, 0.02)$ 를 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore E(Y) &= 10000 \times 0.02 = 200, \\ V(Y) &= 10000 \times 0.02 \times 0.98 = 196 \end{aligned}$$

즉 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(200, 14^2)$ 을 따르므로 $Z_Y = \frac{Y-200}{14}$ 으로 놓으면 Z_Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. --- ②

$$\therefore p_2 = P(Y \geq n) = P\left(Z_Y \geq \frac{n-200}{14}\right)$$

$$p_1 = p_2 \text{이므로} \quad \frac{n-200}{14} = 2$$

$$\therefore n = 228 \quad \text{--- ③}$$

답 228

채점 기준	비율
① p_1 을 구할 수 있다.	40%
② 확률변수 Y 를 정하고 Y 가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30%
③ n 의 값을 구할 수 있다.	30%

19 제품 A의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(80, 4^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-80}{4}$ 으로 놓으면 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

제품 A 한 개가 불량품으로 판정받을 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 72 \text{ 또는 } X \geq 88) \\ &= 1 - P(72 \leq X \leq 88) \\ &= 1 - P\left(\frac{72-80}{4} \leq Z_X \leq \frac{88-80}{4}\right) \\ &= 1 - P(-2 \leq Z_X \leq 2) \\ &= 1 - 2P(0 \leq Z_X \leq 2) \\ &= 1 - 2 \times 0.48 \\ &= 0.04 \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

따라서 15000개의 제품 A 중 불량품으로 판정받는 것의 개수를 Y 라 하면 확률변수 Y 는 이항분포 $B(15000, 0.04)$ 를 따른다.

$$\therefore E(Y) = 15000 \times 0.04 = 600,$$

$$V(Y) = 15000 \times 0.04 \times 0.96 = 576$$

즉 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(600, 24^2)$ 을 따르므로

$Z_Y = \frac{Y-600}{24}$ 으로 놓으면 Z_Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. --- ②

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(Y \geq 624) &= P\left(Z_Y \geq \frac{624-600}{24}\right) \\ &= P(Z_Y \geq 1) \\ &= P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.34 \\ &= 0.16 \quad \text{--- ③} \end{aligned}$$

답 0.16

채점 기준	비율
① 제품 A가 불량품으로 판정받을 확률을 구할 수 있다.	40%
② 확률변수 Y 를 정하고 Y 가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	30%
③ 답을 구할 수 있다.	30%

사건 S 에 대하여
 $P(S) = 1 - P(S^c)$

소수가 아닌 눈이 나오는
횟수는 $100 - X$ 이다.

◎ 사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 67쪽

01 확률변수 X 가 정규분포 $N(m+1, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m-1}{2}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore f(m) &= P(X \geq 1) = P\left(Z \geq \frac{1-m-1}{2}\right) \\ &= P\left(Z \geq -\frac{m}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{m}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\neg. f(0) = P(Z \leq 0) = 0.5$$

$$\begin{aligned}\neg. f(2) + f(-2) &= P(Z \leq 1) + P(Z \leq -1) \\ &= P(Z \leq 1) + P(Z \geq 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

ㄷ. $m_1 < m_2$ 이면

$$\begin{aligned}P\left(Z \leq \frac{m_1}{2}\right) &< P\left(Z \leq \frac{m_2}{2}\right) \\ \therefore f(m_1) &< f(m_2)\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

02 두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2)$, $N(m, 4\sigma^2)$ 을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-m}{\sigma}, Z_Y = \frac{Y-m}{2\sigma}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore F(t) &= P(X \geq m - \sigma t) \\ &= P\left(Z_X \geq \frac{m - \sigma t - m}{\sigma}\right) \\ &= P(Z_X \geq -t) = P(Z_X \leq t), \\ G(t) &= P(Y \leq m + \sigma t) \\ &= P\left(Z_Y \leq \frac{m + \sigma t - m}{2\sigma}\right) \\ &= P\left(Z_Y \leq \frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\neg. F(1) = P(Z_X \leq 1), G(2) = P(Z_Y \leq 1) \text{이므로} \\ F(1) = G(2)$$

ㄴ. $t > 0$ 이면

$$\begin{aligned}P(Z_X \leq t) &> P\left(Z_Y \leq \frac{t}{2}\right) \\ \therefore F(t) &> G(t)\end{aligned}$$

ㄷ. $t > 0$ 이면

$$\begin{aligned}2G(t) - F(t) &= 0.5 \\ &= 2P\left(Z_Y \leq \frac{t}{2}\right) - P(Z_X \leq t) - 0.5 \\ &= 2\left\{0.5 + P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{t}{2}\right)\right\} \\ &\quad - \{0.5 + P(0 \leq Z_X \leq t)\} - 0.5 \\ &= 2P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{t}{2}\right) - P(0 \leq Z_X \leq t) > 0 \\ \therefore 2G(t) &> F(t) + 0.5\end{aligned}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

$a < b$ 일 때,
 $P(Z \leq a) < P(Z \leq b)$

$t > 0$ 이면 $\frac{t}{2} < t$ 이므로
 $P(Z_X \leq t)$
 $> P\left(Z_Y \leq \frac{t}{2}\right)$

1등급 비밀노트 >>>

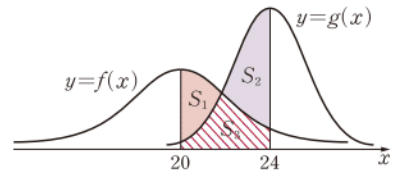
$$\begin{aligned}\neg. 2P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{t}{2}\right) - P(0 \leq Z_X \leq t) \\ &= P\left(-\frac{t}{2} \leq Z_Y \leq \frac{t}{2}\right) - P(0 \leq Z_X \leq t) \\ &= P\left(-\frac{t}{2} \leq Z_Y \leq 0\right) - P\left(\frac{t}{2} \leq Z_X \leq t\right) \\ &= P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{t}{2}\right) - P\left(\frac{t}{2} \leq Z_X \leq t\right) > 0\end{aligned}$$

03 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(20, 4^2)$, $N(24, 2^2)$ 을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-20}{4}, Z_Y = \frac{Y-24}{2}$$

로 놓으면 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

한편 다음 그림에서 빗금 친 부분의 넓이를 S_3 이라 하면



$$S_1 + S_3 = P(20 \leq X \leq 24),$$

$$S_2 + S_3 = P(20 \leq Y \leq 24)$$

$$\therefore S_2 - S_1 = (S_2 + S_3) - (S_1 + S_3)$$

$$= P(20 \leq Y \leq 24) - P(20 \leq X \leq 24)$$

$$= P\left(\frac{20-24}{2} \leq Z_Y \leq \frac{24-24}{2}\right)$$

$$- P\left(\frac{20-20}{4} \leq Z_X \leq \frac{24-20}{4}\right)$$

$$= P(-2 \leq Z_Y \leq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 1)$$

$$= P(0 \leq Z_Y \leq 2) - P(0 \leq Z_X \leq 1)$$

$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

답 ③

04 고객 한 명이 C 사의 휴대폰을 구입할 확률은

$$\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

이므로 600명 중 C 사의 휴대폰을 구입하는 고객의 수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(600, \frac{3}{5}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 600 \cdot \frac{3}{5} = 360,$$

$$V(X) = 600 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = 144$$

즉 X 는 근사적으로 정규분포 $N(360, 12^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-360}{12}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X \geq 336) &= P\left(Z \geq \frac{336-360}{12}\right) \\ &= P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 = 0.9772\end{aligned}$$

답 ④

III -3. 통계적 추정

개념 & 핵심 기출

본책 68~69쪽

01 $\bar{X}=3$ 인 경우는 표본이

$(2, 4), (4, 2)$

이므로

$$P(\bar{X}=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$\bar{X}=4$ 인 경우는 표본이

$(2, 6), (4, 4), (6, 2)$

이므로

$$P(\bar{X}=4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(\bar{X}=3) + P(\bar{X}=4) = \frac{13}{36} \quad \text{답 ②}$$

참고 표본평균 $\bar{X}$ 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\bar{X}$	2	3	4	5	6	7	8	합계
$P(\bar{X}=\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	1

02 확률의 총합은 1이므로

$$a+b+a=1 \quad \therefore b=1-2a \quad \dots\dots ㉠$$

$\bar{X}=5$ 인 경우는 표본이

$(4, 6), (6, 4)$

이므로

$$P(\bar{X}=5) = ba + ab = 2ab$$

즉 $2ab = \frac{2}{9}$ 이므로

$$ab = \frac{1}{9} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a(1-2a) = \frac{1}{9}, \quad 18a^2 - 9a + 1 = 0$$

$$(3a-1)(6a-1) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} \text{ 또는 } a = \frac{1}{6}$$

(i) $a = \frac{1}{3}$ 이면 ㉠에서 $b = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

그런데 $a \neq b$ 이어야 하므로 성립하지 않는다.

(ii) $a = \frac{1}{6}$ 이면 ㉠에서 $b = 1 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}$ 이므로

$$a+b = \frac{5}{6} \quad \text{답 5}$$

03 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하면

$$P(X=x) = \frac{1}{5} \quad (x=0, 2, 4, 6, 8)$$

$$\therefore E(X) = 0 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot \frac{1}{5} = 4$$

평균이 m , 표준편차가 σ 인 모집단에서 임의추출한 크기가 n 인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 에 대하여

① $E(\bar{X}) = m$

② $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

③ $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$V(X) = 0^2 \cdot \frac{1}{5} + 2^2 \cdot \frac{1}{5} + 4^2 \cdot \frac{1}{5} + 6^2 \cdot \frac{1}{5}$$

$$+ 8^2 \cdot \frac{1}{5} - 4^2$$

$$= 24 - 16 = 8$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{답 ④}$$

04 $E(\bar{X}) = m, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{9}$ 이므로

$$E(2\bar{X}+3) = 23 \text{에서}$$

$$2E(\bar{X}) + 3 = 23, \quad 2m + 3 = 23$$

$$\therefore m = 10$$

$$V(6\bar{X}-1) = 64 \text{에서}$$

$$6^2 V(\bar{X}) = 64, \quad 36 \cdot \frac{\sigma^2}{9} = 64$$

$$\sigma^2 = 16 \quad \therefore \sigma = 4 \quad (\because \sigma > 0)$$

$$\therefore m + \sigma = 14 \quad \text{답 ③}$$

05 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$V(X) = 0^2 \cdot \frac{3}{8} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$= 3 - \frac{25}{16} = \frac{23}{16}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{23}{16} = \frac{23}{64}$$

$$\therefore V(8\bar{X}) = 8^2 V(\bar{X}) = 64 \cdot \frac{23}{64} = 23 \quad \text{답 23}$$

06 모집단이 정규분포 $N(60, 4^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(60, \frac{4^2}{36}\right)$, 즉

$N\left(60, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$Z_X = \frac{X-60}{4}, \quad Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-60}{\frac{2}{3}} \text{으로 놓으면 } Z_X, Z_{\bar{X}} \text{는}$$

모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \leq 72) = P\left(Z_X \leq \frac{72-60}{4}\right) = P(Z_X \leq 3)$$

$$P(\bar{X} \geq a) = P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{a-60}{\frac{2}{3}}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{3}{2}a - 90\right)$$

즉 $P(X \leq 72) = P(\bar{X} \geq a)$ 에서

$$P(Z_X \leq 3) = P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{3}{2}a - 90\right)$$

$$\text{따라서 } 3 = -\left(\frac{3}{2}a - 90\right) \text{이므로 } \frac{3}{2}a = 87$$

$$\therefore a = 58 \quad \text{답 ⑤}$$

07 모집단이 정규분포 $N(54, 18^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(54, \frac{18^2}{9}\right)$, 즉 $N(54, 6^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X} - 54}{6}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} & P(45 \leq \bar{X} \leq 66) \\ &= P\left(\frac{45-54}{6} \leq Z \leq \frac{66-54}{6}\right) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.4332 + 0.4772 \\ &= 0.9104 \end{aligned}$$

답 ⑤

1등급 비밀노트 >>>

외래 환자들의 진료 대기 시간을 X 라 하면 임의추출한 9명의 진료 대기 시간의 평균은 $\bar{X}$ 이다.
따라서 구하는 값은 $P(45 \leq X \leq 66)$ 이 아니라 $P(45 \leq \bar{X} \leq 66)$ 임에 유의한다.

08 모집단이 정규분포 $N(60, 4^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(60, \frac{4^2}{16})$, 즉 $N(60, 1)$ 을 따른다.

$Z = \bar{X} - 60$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \geq a) = 0.02$ 에서

$$\begin{aligned} & P(Z \geq a - 60) = 0.02 \\ & P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq a - 60) = 0.02 \\ & 0.5 - P(0 \leq Z \leq a - 60) = 0.02 \\ & \therefore P(0 \leq Z \leq a - 60) = 0.48 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.48$ 이므로

$$a - 60 = 2 \quad \therefore a = 62$$

답 62

09 표본평균의 값을 $\bar{x}$ 라 하면 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 25일 때, 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{25}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{25}}$$

이때 $64 \leq m \leq 72$ 이므로

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 64, \quad \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 72$$

위의 두 식을 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} & 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 8 \\ & \therefore 1.96 \times \sigma = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

또 표본평균이 70, 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 256일 때, 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간은

$$70 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{256}} \leq m \leq 70 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{256}}$$

위의 식에 ①을 대입하면 구하는 신뢰구간은

$$\begin{aligned} & 70 - \frac{20}{16} \leq m \leq 70 + \frac{20}{16} \\ & \therefore 68.75 \leq m \leq 71.25 \quad \text{답 } 68.75 \leq m \leq 71.25 \end{aligned}$$

신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 2k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ & \left(\text{단, } P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100} \right) \end{aligned}$$

10 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z 에 대하여

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 모표준편차가 2, 표본의 크기가 16일 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간의 길이는 $b - a = 3$ 에서

$$2 \cdot k \cdot \frac{2}{\sqrt{16}} = 3 \quad \therefore k = 3$$

또 표본의 크기가 n 일 때, 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간의 길이는 $d - c = 1$ 에서

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 1, \quad \sqrt{n} = 12 \\ & \therefore n = 144 \end{aligned}$$

답 ①

1등급을 위한 고난도 문제

본책 70~71쪽

01 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

$\bar{X}$ 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로

$$\begin{aligned} & P(\bar{X} \geq 4) = 1 - P(\bar{X} < 4) \\ &= 1 - \{P(\bar{X} = 2) + P(\bar{X} = 3)\} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\bar{X} = 2$ 인 경우는 표본이 (2, 2)이므로

$$P(\bar{X} = 2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\bar{X} = 3$ 인 경우는 표본이 (2, 4), (4, 2)이므로

$$P(\bar{X} = 3) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{25} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\therefore P(\bar{X} \geq 4) = 1 - \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{25} \right) = \frac{19}{20} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 $\frac{19}{20}$

채점 기준	비율
① $P(\bar{X} \geq 4) = 1 - \{P(\bar{X} = 2) + P(\bar{X} = 3)\}$ 임을 알 수 있다.	20%
② $P(\bar{X} = 2)$ 를 구할 수 있다.	30%
③ $P(\bar{X} = 3)$ 을 구할 수 있다.	30%
④ $P(\bar{X} \geq 4)$ 를 구할 수 있다.	20%

02 $\bar{X} = 2$ 인 경우는 표본이

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1),
(3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 2)

이므로

$$\begin{aligned} & P(\bar{X} = 2) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{11}{54} \end{aligned}$$

답 ①

03 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2} + a + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

1, 2, 3을 표본으로 추출하는 경우의 수는 $3! = 6$

$\bar{X}=2$ 인 경우는 표본이

(1, 3), (3, 1)

이므로

$$P(\bar{X}=2) = \frac{1}{2} \cdot a + a \cdot \frac{1}{2} = a \quad \therefore a = \frac{2}{5}$$

$a = \frac{2}{5}$ 를 ㉠에 대입하면

$$\frac{2}{5} + b = \frac{1}{2} \quad \therefore b = \frac{1}{10}$$

$\bar{X}=3$ 인 경우는 표본이

(1, 5), (3, 3), (5, 1)

이므로

$$P(\bar{X}=3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{50}$$

$$\therefore c = \frac{13}{50}$$

$\bar{X}=4$ 인 경우는 표본이

(3, 5), (5, 3)

이므로

$$P(\bar{X}=4) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$$

$$\therefore d = \frac{2}{25}$$

$\bar{X}=5$ 인 경우는 표본이 (5, 5)이므로

$$P(\bar{X}=5) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \quad \therefore e = \frac{1}{100}$$

$$\therefore \frac{c+e}{d} = \left(\frac{13}{50} + \frac{1}{100} \right) \cdot \frac{25}{2} = \frac{27}{8} \quad \text{답 } \frac{27}{8}$$

04 표본의 크기가 39이고, $E(\bar{X})=12$, $V(\bar{X})=4$ 이므로

$$E(X)=12, V(X)=39 \cdot 4=156 \quad \cdots \text{①}$$

$E(X)=12$ 에서

$$0 \cdot \frac{2}{5} + a \cdot \frac{3}{10} + b \cdot \frac{3}{10} = 12$$

$$\therefore a+b=40 \quad \cdots \text{②}$$

$V(X)=156$ 에서

$$0^2 \cdot \frac{2}{5} + a^2 \cdot \frac{3}{10} + b^2 \cdot \frac{3}{10} - 12^2 = 156$$

$$\therefore a^2+b^2=1000 \quad \cdots \text{③}$$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서

$$1000=40^2-2ab, \quad 2ab=600$$

$$\therefore ab=300 \quad \cdots \text{④}$$

답 300

채점 기준	비율
① $E(X)$, $V(X)$ 를 구할 수 있다.	20%
② $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ a^2+b^2 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ ab 의 값을 구할 수 있다.	20%

05 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{10} + a + b = 1 \quad \therefore a+b = \frac{9}{10} \quad \cdots \text{㉠}$$

$$E(X) = E(\bar{X}) = 4 \text{이므로}$$

$$1 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot a + 5 \cdot b = 4$$

$$\therefore 3a+5b = \frac{39}{10} \quad \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면} \quad a = \frac{3}{10}, b = \frac{3}{5}$$

$$\therefore V(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{10} + 3^2 \cdot \frac{3}{10} + 5^2 \cdot \frac{3}{5} - 4^2 = \frac{9}{5}$$

이때 표본의 크기가 n 이므로 $V(\bar{X}) = \frac{9}{5n}$ 에서

$$\frac{9}{5n} \leq \frac{1}{10} \quad \therefore n \geq 18$$

따라서 n 의 최솟값은 18이다.

답 18

06 ㄱ. 표본의 크기에 관계없이

$$E(\bar{X}) = E(\bar{Y}) = m$$

$$\therefore V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n_1}, V(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n_2} \text{이므로 } n_1 < n_2 \text{이면}$$

$$V(\bar{X}) > V(\bar{Y})$$

표본의 크기가 클수록 분산은 작아진다.

$$\therefore \sigma(\bar{X}) = \sigma(\bar{Y}) \text{이면 } \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} \text{ 이므로}$$

$$n_1 = n_2$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

07 등교하는 데 걸리는 시간을 X 분이라 하면 확률변수

X 는 정규분포 $N(15, 5^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-15}{5}$ 로

놓으면 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq k) = 0.9772 \text{이므로}$$

$$P\left(Z_X \leq \frac{k-15}{5}\right) = 0.9772$$

$$P(Z_X \leq 0) + P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{k-15}{5}\right) = 0.9772$$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{k-15}{5}\right) = 0.9772$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{k-15}{5}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{k-15}{5} = 2 \quad \therefore k = 25$$

한편 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포

$N\left(15, \frac{5^2}{16}\right)$, 즉 $N\left(15, \left(\frac{5}{4}\right)^2\right)$ 을 따르므로

$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-15}{\frac{5}{4}}$ 로 놓으면 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(\bar{X} \geq k-8) = P(\bar{X} \geq 17)$$

$$= P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{17-15}{\frac{5}{4}}\right)$$

$$= P(Z_{\bar{X}} \geq 1.6)$$

$$= P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1.6)$$

$$= 0.5 - 0.4452$$

$$= 0.0548$$

답 0.0548

08 모집단이 정규분포 $N(2880, 100^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(2880, \frac{100^2}{n})$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 2880}{\frac{100}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(\bar{X} \geq 2900 + \frac{20}{\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{10}$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{2900 + \frac{20}{\sqrt{n}} - 2880}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right) \leq \frac{1}{10}$$

$$P\left(Z \geq \frac{20\sqrt{n} + 20}{100}\right) \leq \frac{1}{10}$$

$$P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n} + 1}{5}\right) \leq 0.1$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n} + 1}{5}\right) \leq 0.1$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n} + 1}{5}\right) \leq 0.1$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n} + 1}{5}\right) \geq 0.4$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.28) = 0.40$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n} + 1}{5} \geq 1.28, \quad \sqrt{n} \geq 5.4$$

$$\therefore n \geq 29.16$$

즉 n 의 최솟값은 30이다.

→ ①

→ ②

→ ③

답 30

09 모집단이 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 $P\left(\left|\frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq \frac{1}{4}\right) \geq 0.91$ 에서

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \geq 0.91$$

$$P(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}}{4}) \geq 0.91$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \geq 0.91$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \geq 0.455$$

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때의 모평균 m 과 표본평균 $\bar{x}$ 의 차
 $\Rightarrow |m - \bar{x}| \leq k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
 (단, $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$)

$$P(|Z| \leq 1.96) = 2 \times 0.475 = 0.95$$

$$\left|\frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq \frac{1}{4} \text{의 양변을 } \frac{1}{\sqrt{n}} \text{로 나눈다.}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.70) = 0.455$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \geq 1.70, \quad \sqrt{n} \geq 6.8$$

$$\therefore n \geq 46.24$$

따라서 n 의 최솟값은 47이다.

답 ②

10 표본평균의 값을 $\bar{x}$, 모표준편차가 0.4일 때 표본의 크기를 n 이라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{0.4}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{0.4}{\sqrt{n}}$$

$$- \frac{0.784}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq \frac{0.784}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq \frac{0.784}{\sqrt{n}}$$

모평균과 표본평균의 차이가 0.05 이하이어야 하므로

$$\frac{0.784}{\sqrt{n}} \leq 0.05, \quad \sqrt{n} \geq 15.68$$

$$\therefore n \geq 245.8624$$

따라서 표본의 크기는 246명 이상이어야 한다.

답 ③

11 표본평균의 값을 $\bar{x}$ 라 하면 모표준편차가 10, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{64}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore \bar{x} - 2.45 \leq m \leq \bar{x} + 2.45$$

즉 $a = \bar{x} - 2.45$, $b = \bar{x} + 2.45$ 이므로 $a + b = 840$ 에서

$$(\bar{x} - 2.45) + (\bar{x} + 2.45) = 840$$

$$2\bar{x} = 840 \quad \therefore \bar{x} = 420$$

$$\therefore a = \bar{x} - 2.45 = 417.55$$

답 ④

12 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 n 이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$d - c = 2 \times k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$(b - a) : (d - c) = 4 : 3 \text{에서}$$

$$d - c = \frac{3}{4}(b - a)$$

$$2 \times k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{4} \times 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore k = 1.47$$

이때 $P(|Z| \leq 1.47) = 2 \times 0.429 = 0.858$ 이므로

$$\frac{\alpha}{100} = 0.858$$

$$\therefore 10\alpha = 858$$

답 858

채점 기준	비율
① 표본평균 $\bar{X}$ 가 따르는 정규분포를 구하고 표준화할 수 있다.	30%
② n 의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%
③ n 의 최솟값을 구할 수 있다.	10%

◎ 사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 72쪽

01 모표준편차를 σ 라 하면 모집단이 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로 표본의 크기가 n 인 표본평균 $\bar{X}_n$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore f(n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$(i) A = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{20}}} = \sqrt{2}$$

(ii) $Z = \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(X \geq m + f(n)) &= P\left(Z \geq \frac{m + f(n) - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{f(n)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore B = \frac{P\left(Z \geq \frac{1}{\sqrt{10}}\right)}{P\left(Z \geq \frac{1}{\sqrt{20}}\right)} < 1$$

(iii) $Z_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 Z_n 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(|\bar{X}_n - m| \leq f(n)) = P\left(\left|\frac{\bar{X}_n - m}{f(n)}\right| \leq 1\right) = P(|Z_n| \leq 1)$$

$$\therefore C = \frac{P(|Z_{10}| \leq 1)}{P(|Z_{20}| \leq 1)} = 1$$

이상에서 $B < C < A$

답 ④

1등급 비밀노트 >>>

확률변수 $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ 이 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르면

$$P(|Z_1| \leq a) = P(|Z_2| \leq a) = P(|Z_3| \leq a) = \dots = P(|Z_n| \leq a)$$

02 확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 10^2)$ 을 따르고 모든 실수 x 에 대하여

$$P(60 - x \leq X \leq m) = P(m \leq X \leq 20 + x)$$

를 만족시키므로

$$\frac{(60 - x) + (20 + x)}{2} = m \quad \therefore m = 40$$

따라서 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(40, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(40, 2^2)$

을 따르므로 $Z = \frac{\bar{X} - 40}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준

정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(36 \leq \bar{X} \leq 36 + k) = 0.971$ 에서

$$P\left(\frac{36 - 40}{2} \leq Z \leq \frac{36 + k - 40}{2}\right) = 0.971$$

c 가 양수일 때,
 $P(|Z| \geq c)$
 $= P(Z \leq -c) + P(Z \geq c)$
 $= P(Z \geq c) + P(Z \geq c)$
 $= 2P(Z \geq c)$
 $\therefore P(Z \geq c)$
 $= \frac{1}{2}P(|Z| \geq c)$

$0 < a < b$ 일 때,
 $P(Z \geq a) > P(Z \geq b)$
 이므로
 $\frac{P(Z \geq b)}{P(Z \geq a)} < 1$

모평균이 60, 모표준편차가 4, 표본의 크기가 64이므로
 $E(\bar{X}) = 60,$
 $V(\bar{X}) = \frac{4^2}{64}$

$$P\left(-2 \leq Z \leq \frac{k-4}{2}\right) = 0.971$$

$$P(-2 \leq Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-4}{2}\right) = 0.971$$

$$P(0 \leq Z \leq 2) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-4}{2}\right) = 0.971$$

$$0.4772 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-4}{2}\right) = 0.971$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-4}{2}\right) = 0.4938$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.4938$ 이므로

$$\frac{k-4}{2} = 2.5 \quad \therefore k = 9$$

답 9

03 $P(|Z| < c) = 0.76$ 에서

$$P(|Z| \geq c) = 1 - 0.76 = 0.24$$

$$\therefore P(Z \geq c) = \frac{0.24}{2} = 0.12$$

$P(|Z| < 2c) = 0.98$ 에서

$$P(|Z| \geq 2c) = 1 - 0.98 = 0.02$$

$$\therefore P(Z \geq 2c) = \frac{0.02}{2} = 0.01$$

$\neg, P(|Z| \geq a) = 0.05$ 에서

$$P(Z \geq a) = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

따라서 $P(Z \geq 2c) < P(Z \geq a) < P(Z \geq c)$ 이므로

$$c < a < 2c$$

$\therefore$ 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(60, \frac{4^2}{64}\right)$, 즉

$N\left(60, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따르므로 $Z = \frac{\bar{X} - 60}{\frac{1}{2}}$ 으로 놓으면

Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(\bar{X} \geq c + 60) &= P\left(Z \geq \frac{c + 60 - 60}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= P(Z \geq 2c) = 0.01 \end{aligned}$$

$\therefore P(\bar{X} < b) = 0.80$ 에서

$$P(\bar{X} \geq b) = 1 - 0.80 = 0.20$$

이므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq b) &= P\left(Z \geq \frac{b - 60}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= P(Z \geq 2b - 120) = 0.20 \end{aligned}$$

이때 $P(Z \geq c) = 0.12$ 이므로

$$2b - 120 < c \quad \therefore 2b - c < 120$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \supset$ 이다.

답 ③

04 49명의 학생의 1일 휴대폰 사용 시간의 평균은

$$\frac{14 \cdot 70 + 35 \cdot 84}{49} = 80$$

이때 모표준편차가 14, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$80 - 1.96 \times \frac{14}{\sqrt{49}} \leq m \leq 80 + 1.96 \times \frac{14}{\sqrt{49}}$$

$$\therefore 76.08 \leq m \leq 83.92$$

따라서 구하는 정수의 최댓값은 83이다.

답 83

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 73~77쪽

01 **전략** $P(0 \leq X \leq i) = p_0 + p_1 + \dots + p_i$,
 $P(X > i) = p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_{10}$ 임을 이용한다.
 (단, $i=0, 1, 2, \dots, 10$)

풀이 $\neg$. $G(3) = P(X > 3) = p_4 + p_5 + \dots + p_{10}$
 $= 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3)$
 $= 1 - P(0 \leq X \leq 3)$
 $= 1 - F(3)$
 $\therefore P(3 \leq X \leq 8) = p_3 + p_4 + \dots + p_8$
 $= (p_0 + p_1 + \dots + p_8) - (p_0 + p_1 + p_2)$
 $= P(0 \leq X \leq 8) - P(0 \leq X \leq 2)$
 $= F(8) - F(2)$
 $\therefore P(3 \leq X \leq 8) = p_3 + p_4 + \dots + p_8$
 $= (p_3 + p_4 + \dots + p_{10}) - (p_9 + p_{10})$
 $= P(X > 2) - P(X > 8)$
 $= G(2) - G(8)$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\therefore$ 이다. **답 ④**

1등급 비밀노트 >>>

ㄴ에서 확률변수 X 가 연속확률변수이면 $P(X=3)=0$ 이므로
 $P(3 \leq X \leq 8) = P(0 \leq X \leq 8) - P(0 \leq X < 3)$
 $= F(8) - F(3)$
 그러나 X 가 이산확률변수이므로 $P(X=3) \neq 0$ 이다. 즉
 $P(3 \leq X \leq 8) \neq F(8) - F(3)$
 임에 유의한다.

02 **전략** $P(a \leq X \leq b)$ 는 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같음을 이용한다.

풀이 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=2b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$4 \cdot 2b - \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot (4-2) = 1, \quad 6b = 1$$

$$\therefore b = \frac{1}{6}$$

$a \leq x \leq 2b$, 즉 $a \leq x \leq \frac{1}{3}$ 에서 $y=f(x)$ 는 두 점 $(a, 2)$,
 $(\frac{1}{3}, 4)$ 를 지나는 직선이므로 이 직선의 방정식은

$$y-4 = \frac{2}{\frac{1}{3}-a} \left(x - \frac{1}{3}\right), \text{ 즉 } y = \frac{6}{1-3a} \left(x - \frac{1}{3}\right) + 4$$

따라서 $f(x) = \frac{6}{1-3a} \left(x - \frac{1}{3}\right) + 4 \left(a \leq x \leq \frac{1}{3}\right)$ 이므로

$$f(b) = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{6}{1-3a} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + 4 = \frac{12a-3}{3a-1}$$

이때 $P(a \leq X \leq b)$, 즉

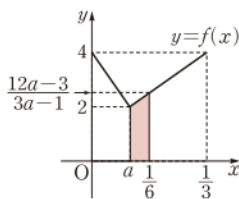
$P\left(a \leq X \leq \frac{1}{6}\right)$ 은 오른쪽 그림

의 색칠한 부분의 넓이와 같으

므로

$$\frac{1}{2} \left(2 + \frac{12a-3}{3a-1}\right) \left(\frac{1}{6} - a\right)$$

$$= \frac{1}{8}$$



㉠에서 $b=1-3a \geq 0$ 이
 므로 $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

$$P(X \geq 2)$$

$$= P(X=2) + P(X=3)$$

$$+ P(X=4)$$

$$P(2 \leq X \leq 3)$$

$$= P(X=2) + P(X=3)$$

$$\frac{18a-5}{3a-1} \cdot \frac{1-6a}{6} = \frac{1}{4}$$

$$2(18a-5)(1-6a) = 3(3a-1)$$

$$216a^2 - 87a + 7 = 0, \quad (9a-1)(24a-7) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{9} \left(\because 0 < a < \frac{1}{6} \right)$$

$$\therefore a+b = \frac{5}{18}$$

답 ③

03 **전략** 확률의 총합이 1임을 이용하여 b 를 a 로 나타낸다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$a+2a+b=1 \quad \therefore b=1-3a \quad \dots\dots ㉠$$

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \cdot a + 1 \cdot 2a + 2 \cdot b = 2a + 2b,$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot a + 1^2 \cdot 2a + 2^2 \cdot b = 2a + 4b$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 2a + 4b - (2a + 2b)^2$$

$$= 2a + 4b - 4(a+b)^2$$

$$= 2a + 4(1-3a) - 4(a+1-3a)^2 \quad (\because ㉠)$$

$$= -16a^2 + 6a = -16\left(a - \frac{3}{16}\right)^2 + \frac{9}{16}$$

즉 $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$ 에서 $V(X)$ 는 $a = \frac{3}{16}$ 일 때 최댓값 $\frac{9}{16}$ 를
 갖는다.

이때 ㉠에서 $b=1-3 \cdot \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$ 이므로

$$p = \frac{3}{16}, q = \frac{7}{16}, r = \frac{9}{16}$$

$$\therefore p+q+r = \frac{19}{16}$$

답 ①

04 **전략** 조건부확률을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한
 다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$$

$$2a+2b=1 \quad \therefore a+b=\frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

한편

$$P(A) = P(X \geq 2) = a+b+b = a+2b,$$

$$P(A \cap B) = P(2 \leq X \leq 3) = a+b$$

$$\text{이므로 } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{4}{7} \text{에서}$$

$$\frac{a+b}{a+2b} = \frac{4}{7}, \quad 7a+7b=4a+8b$$

$$\therefore b=3a \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{8}, b = \frac{3}{8}$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} = 3$$

$$\therefore E(2X+5) = 2E(X) + 5$$

$$= 2 \cdot 3 + 5$$

$$= 11$$

답 ③

05 전략 확률의 총합이 1임을 이용하여 상수 k 의 값을 먼저 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$\begin{aligned} & P(X=-2) + P(X=-1) + P(X=0) \\ & + P(X=1) + P(X=2) = 1 \\ & \frac{k}{|-2|+2} + \frac{k}{|-1|+2} + \frac{k}{0+2} + \frac{k}{1+2} + \frac{k}{2+2} \\ & = 1 \\ & \frac{5}{3}k = 1 \quad \therefore k = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \cdot \frac{3}{20} + (-1) \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{1}{5} \\ & \quad + 2 \cdot \frac{3}{20} \\ & = 0, \\ E(X^2) &= (-2)^2 \cdot \frac{3}{20} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{5} + 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{1}{5} \\ & \quad + 2^2 \cdot \frac{3}{20} \\ & = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{8}{5} - 0^2 = \frac{8}{5} \\ \therefore V(5X) &= 5^2 V(X) = 25 \cdot \frac{8}{5} = 40 \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

06 전략 확률변수 X 가 이항분포를 따름을 이용한다.

풀이 확률변수 X 는 이항분포 $B(n, \frac{2}{a+2})$ 를 따르므로

$$\begin{aligned} E(X) &= n \cdot \frac{2}{a+2} = 5 \quad \dots\dots \text{㉠} \\ V(X) &= n \cdot \frac{2}{a+2} \cdot \frac{a}{a+2} = \frac{25}{6} \quad \dots\dots \text{㉡} \end{aligned}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{5a}{a+2} = \frac{25}{6}, \quad 6a = 5a + 10 \quad \therefore a = 10$$

$a=10$ 을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{2}{12} &= 5 \quad \therefore n = 30 \\ \therefore na &= 300 \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

07 전략 확률변수 X 가 이항분포를 따름을 이용한다.

풀이 1, 2가 적힌 동전 2개와 3, 4가 적힌 동전 2개를 동시에 던질 때, 나온 네 수의 합이 10 미만인 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(i) 합이 9인 경우

(1, 1, 3, 4), (1, 1, 4, 3), (1, 2, 3, 3),
(2, 1, 3, 3)의 4가지

(ii) 합이 8인 경우

(1, 1, 3, 3)의 1가지

(i), (ii)에서 네 수의 합이 10 미만인 될 확률은

$$5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B(240, \frac{5}{16})$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 240 \cdot \frac{5}{16} = 75$$

$E(kX) = kE(X) = 75k$ 이므로

$$75k = 975 \quad \therefore k = 13 \quad \text{답 ②}$$

다른 풀이 1, 2가 적힌 동전을 A, 3, 4가 적힌 동전을 B라 하자.

동전 A를 2개 던져서 나온 수의 합을 a 라 하면 a 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ 이다.

또 동전 B를 2개 던져서 나온 수의 합을 b 라 하면 b 가 가질 수 있는 값은 6, 7, 8이고, 그 확률은 각각 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ 이다.

4개의 수의 합이 10 미만인 경우는 a, b 의 값이 각각

2와 6, 2와 7, 3과 6

일 때이므로 그 확률은

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B(240, \frac{5}{16})$ 를 따른다.

08 전략 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 정규분포 곡선 $y=f(x)$ 가 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로 조건 ㉠에서

$$\frac{(10-x) + (10+x)}{2} = m \quad \therefore m = 10$$

즉 $Z = \frac{X-10}{\sigma}$ 으로 놓으면 조건 ㉡에서

$$\begin{aligned} & P(m \leq X \leq 2m + \sigma) \\ &= P(10 \leq X \leq 20 + \sigma) \\ &= P\left(\frac{10-10}{\sigma} \leq Z \leq \frac{20+\sigma-10}{\sigma}\right) \\ &= P\left(0 \leq Z \leq \frac{10+\sigma}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

따라서 $P\left(0 \leq Z \leq \frac{10+\sigma}{\sigma}\right) = P(0 \leq Z \leq 3)$ 이므로

$$\frac{10+\sigma}{\sigma} = 3, \quad 10 + \sigma = 3\sigma \quad \therefore \sigma = 5$$

한편 $g(x) = f(x-5)$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것과 같으므로 확률변수 Y 는 정규분포 $N(15, 5^2)$ 을 따른다.

$$\therefore E(2Y-1) = 2E(Y) - 1 = 2 \cdot 15 - 1 = 29,$$

$$V(2Y-1) = 2^2 V(Y) = 2^2 \cdot 25 = 100$$

$$\therefore E(2Y-1) + V(2Y-1) = 129 \quad \text{답 ⑤}$$

$y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=15$ 에 대하여 대칭이다.

09 전략 $V(aX+b)=a^2V(X)$ 임을 이용하여 σ 를 구한다.

풀이 $V(Y)=V(1-3X)=9$ 이므로

$$(-3)^2V(X)=9, \quad V(X)=1$$

$$\sigma^2=1 \quad \therefore \sigma=1 (\because \sigma>0)$$

즉 $Z=X-m$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \geq 10)=0.1587$ 에서

$$P(Z \geq 10-m)=0.1587$$

$$P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 10-m)=0.1587$$

$$0.5 - P(0 \leq Z \leq 10-m)=0.1587$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq 10-m)=0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1)=0.3413$ 이므로

$$10-m=1 \quad \therefore m=9$$

$$\therefore m-\sigma=8$$

답 ③

10 전략 확률변수 X 를 정하고 표준화하여 m 의 값을 구한다.

풀이 축구공의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 12^2)$ 을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{12}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(X \geq 380)=0.98$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{380-m}{12}\right)=0.98$$

$$P\left(Z \leq \frac{m-380}{12}\right)=0.98$$

$$P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-380}{12}\right)=0.98$$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-380}{12}\right)=0.98$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-380}{12}\right)=0.48$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2)=0.48$ 이므로

$$\frac{m-380}{12}=2 \quad \therefore m=404$$

답 ②

11 전략 n 이 충분히 클 때, 이항분포를 따르는 확률변수는 근사적으로 정규분포를 따름을 이용한다.

풀이 주사위를 1번 던져서 4의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다. 이때 1개의 주사위를 100번, 400번, 1000번 던져서 4의 약수의 눈이 나오는 횟수를 각각 X_1, X_2, X_3 이라 하자.

(i) 확률변수 X_1 은 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X_1)=100 \cdot \frac{1}{2}=50$$

$$V(X_1)=100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}=25$$

따라서 X_1 은 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$ 을 따른다.

$Z_1=\frac{X_1-50}{5}$ 으로 놓으면 Z_1 은 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$p_1=P(X_1 \leq 60)=P\left(Z_1 \leq \frac{60-50}{5}\right)$$

$$=P(Z_1 \leq 2)$$

$$P(Z \leq 0)=P(Z \geq 0)=0.5$$

$$2 < 3 < \sqrt{100} \text{이므로} \\ p_1 < p_2 < p_3$$

$$\begin{aligned} & 4\text{의 약수의 눈은} \\ & 1, 2, 4 \\ & \text{이므로 4의 약수의 눈이} \\ & \text{나올 확률은} \\ & \frac{3}{6}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P(-a \leq Z \leq a) \\ & =2P(0 \leq Z \leq a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{양수 } k \text{에 대하여} \\ & P(0 \leq Z \leq 2k) \\ & < 2P(0 \leq Z \leq k) \end{aligned}$$

(ii) 확률변수 X_2 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X_2)=400 \cdot \frac{1}{2}=200$$

$$V(X_2)=400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}=100$$

따라서 X_2 는 근사적으로 정규분포 $N(200, 10^2)$ 을 따른다.

$Z_2=\frac{X_2-200}{10}$ 으로 놓으면 Z_2 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$p_2=P(X_2 \leq 230)=P\left(Z_2 \leq \frac{230-200}{10}\right)$$

$$=P(Z_2 \leq 3)$$

(iii) 확률변수 X_3 은 이항분포 $B\left(1000, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X_3)=1000 \cdot \frac{1}{2}=500$$

$$V(X_3)=1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}=250$$

따라서 X_3 은 근사적으로 정규분포 $N(500, (5\sqrt{10})^2)$ 을 따른다.

$Z_3=\frac{X_3-500}{5\sqrt{10}}$ 으로 놓으면 Z_3 은 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$p_3=P(X_3 \leq 550)=P\left(Z_3 \leq \frac{550-500}{5\sqrt{10}}\right)$$

$$=P(Z_3 \leq \sqrt{10})$$

이상에서 $p_1 < p_2 < p_3$

답 ②

12 전략 표본평균 $\bar{X}$ 가 따르는 정규분포를 구하고, $\bar{X}$ 를 표준화하여 $f(n)$ 을 구한다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(50, 10^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(50, \frac{10^2}{n}\right)$ 을 따른다.

$Z=\frac{\bar{X}-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$f(n)=P(48 \leq \bar{X} \leq 52)$$

$$=P\left(\frac{48-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{52-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right)=2P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$

$$\therefore f(25)=2P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{25}}{5}\right)=2P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$=2 \times 0.3413=0.6826$$

$$\therefore f(4n)=2P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{4n}}{5}\right)=2P\left(0 \leq Z \leq \frac{2}{5}\sqrt{n}\right)$$

$$2f(n)=4P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$

$$\text{이때 } P\left(0 \leq Z \leq \frac{2}{5}\sqrt{n}\right) \neq 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) \text{이므로}$$

$$f(4n) \neq 2f(n)$$

$$\therefore n_1 < n_2 \text{ 이면 } P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n_1}}{5}\right) < P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n_2}}{5}\right)$$

$$\therefore f(n_1) < f(n_2)$$

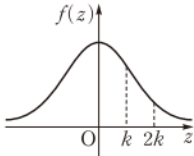
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

1등급 비밀노트 >>>

표준정규분포를 따르는 확률변수 Z 의 정규분포 곡선은 오른쪽 그림과 같으므로 양수 k 에 대하여

$$\begin{aligned} P(k \leq Z \leq 2k) &< P(0 \leq Z \leq k) \\ \therefore P(0 \leq Z \leq 2k) &= P(0 \leq Z \leq k) + P(k \leq Z \leq 2k) \\ &< 2P(0 \leq Z \leq k) \end{aligned}$$



13 전략 표본평균 $\bar{X}$ 가 따르는 정규분포를 구하고, $\bar{X}$ 를 표준화한다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(50, 3^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(50, \frac{3^2}{n}\right)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{X} - 50}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \text{으로 놓으면 } Z \text{는 표준정규분포 } N(0, 1) \text{을}$$

$$\text{따르므로 } P(47 \leq \bar{X} \leq 53) = 0.96 \text{에서}$$

$$P\left(\frac{47-50}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{53-50}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right) = 0.96$$

$$P(-\sqrt{n} \leq Z \leq \sqrt{n}) = 0.96$$

$$2P(0 \leq Z \leq \sqrt{n}) = 0.96$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq \sqrt{n}) = 0.48$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 2) = 0.48 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} = 2 \quad \therefore n = 4$$

답 ①

14 전략 먼저 한 상자에 들어 있는 달걀 16개의 무게의 평균이 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 이 양계장에서 하루에 얻은 달걀 1개의 무게를 X g 이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(80, 10^2)$ 을 따른다. 이때 임의로 선택한 16개의 달걀의 무게의 평균을 $\bar{X}$ 라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(80, \frac{10^2}{16}\right)$, 즉

$$N\left(80, \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) \text{을 따르므로 } Z = \frac{\bar{X} - 80}{\frac{5}{2}} \text{으로 놓으면 } Z \text{는}$$

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

상자 한 개를 납품할 확률은

$$\begin{aligned} P(16\bar{X} \geq 1200) &= P(\bar{X} \geq 75) \\ &= P\left(Z \geq \frac{75-80}{\frac{5}{2}}\right) \\ &= P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.48 \\ &= 0.98 \end{aligned}$$

$|\bar{X} - m| \leq 2$ 의 양변을 $\frac{4}{\sqrt{n}}$ 로 나눈다.

이때 3200개의 달걀을 16개씩 포장한 상자는 200개이므로 하루 평균 납품할 수 있는 상자의 개수는

$$200 \times 0.98 = 196$$

답 ⑤

15 전략 표본평균 $\bar{X}$ 가 따르는 정규분포를 구하고, $\bar{X}$ 를 표준화한다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(m, 4^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{4^2}{n}\right)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{4}{\sqrt{n}}} \text{으로 놓으면 } Z \text{는 표준정규분포 } N(0, 1) \text{을}$$

$$\text{따르므로 } P(|\bar{X} - m| \leq 2) \geq 0.95 \text{에서}$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0.95$$

$$P(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}) \geq 0.95$$

$$2P(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{2}) \geq 0.95$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{2}) \geq 0.475$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.4750 \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \geq 1.96, \quad \sqrt{n} \geq 3.92$$

$$\therefore n \geq 15.3664$$

따라서 n 의 최솟값은 16이다.

답 ②

16 전략 표본평균의 값이 $\bar{x}$, 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 n 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은 $\bar{x} - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다. (단, $P(|Z| \leq c) = \frac{\alpha}{100}$)

풀이 표본평균의 값이 $\bar{x}$, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - c \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x} + c \cdot \frac{2}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore \bar{x} - \frac{c}{5} \leq m \leq \bar{x} + \frac{c}{5}$$

$$\text{이때 } 49.68 \leq m \leq 50.32 \text{이므로}$$

$$\bar{x} - \frac{c}{5} = 49.68, \quad \bar{x} + \frac{c}{5} = 50.32$$

$$\text{위의 두 식을 연립하여 풀면 } \bar{x} = 50, c = 1.6$$

$$\therefore \bar{x} + c = 51.6$$

답 ④

17 전략 모평균 m 에 대한 신뢰구간을 구하여 c 를 모표준편차를 이용하여 나타낸다.

풀이 이 고등학교 3학년 학생의 1일 수면 시간을 X 시간이라 할 때 수면 시간의 표준편차가 σ 시간이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다.

표본평균의 값이 $\bar{x}$, 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 36이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{36}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{36}}$$

두 식을 번끼리 더하면

$$2\bar{x} = 100$$

$$\therefore \bar{x} = 50$$

$$50 + \frac{c}{5} = 50.32 \text{에서}$$

$$\frac{c}{5} = 0.32$$

$$\therefore c = 1.6$$

상자의 무게가 1200 g 이 상일 확률

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq 2.58) \\ = 2 \times 0.495 = 0.99 \end{aligned}$$

$$\therefore c = 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{36}} = 0.43\sigma$$

이때 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq m - 2c) &= P\left(Z \geq \frac{m - 2c - m}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{-2c}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{-2 \times 0.43\sigma}{\sigma}\right) \\ &= P(Z \geq -0.86) = P(Z \leq 0.86) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.86) \\ &= 0.5 + 0.305 \\ &= 0.805 \end{aligned}$$

답 ②

18 전략 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출할 때, 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 이면 $b - a = 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.

$$\left(\text{단, } P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}\right)$$

풀이 크기가 n_1, n_2 인 표본의 표본평균의 값을 각각 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ 라 하고 $P(|Z| \leq k_1) = \frac{\alpha}{100}, P(|Z| \leq k_2) = \frac{\beta}{100}$ 라 하면

$$a = \bar{x}_1 - k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}, b = \bar{x}_1 + k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}},$$

$$c = \bar{x}_2 - k_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}, d = \bar{x}_2 + k_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$$

ㄱ. [반례] $\bar{x}_1 = 10, \bar{x}_2 = 12$ 이고 $n_1 = n_2$ 일 때,

$$k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} = 2, k_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} = 4 \text{라 하면}$$

$$a = 10 - 2 = 8, c = 12 - 4 = 8$$

즉 $a = c$ 이지만 $k_2 = 2k_1$ 이므로

$$a \neq \beta$$

ㄴ. $a < c < d < b$ 이면 $b - a > d - c$ 이므로

$$b - a = 2k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}, d - c = 2k_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} \text{에서}$$

$$2k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} > 2k_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$$

이때 $n_1 = n_2$ 이면 $k_1 > k_2$ 이므로

$$a > \beta$$

ㄷ. $n_1 = 4n_2$ 이면

$$b - a = 2k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{4n_2}} = k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$$

이때 $a < \beta$ 이면 $k_1 < k_2$ 이므로

$$b - a = k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} < k_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} < 2k_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} = d - c$$

$$\therefore b - a \neq d - c$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

19 전략 $P(0 \leq X \leq 2a) = 1$ 임을 이용하여 a 의 값을 먼저 구한다.

$$\text{풀이 } P(0 \leq X \leq 2a) = 1 \text{이므로 } \frac{1}{6} \cdot 2a - \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{1}{3}a = \frac{4}{3} \quad \therefore a = 4$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x) = kx$ 라 하면

$$P(0 \leq X \leq 4) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4k = 8k$$

이고, $P(0 \leq X \leq 4) = \frac{1}{6} \cdot 4 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ 이므로

$$8k = \frac{1}{3} \quad \therefore k = \frac{1}{24}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}x & (0 \leq x \leq 4) \\ \frac{1}{6} & (4 \leq x \leq 8) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{2}a\right) + f\left(\frac{3}{2}a\right) = f(2) + f(6)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

답 ①

20 전략 독립시행의 확률을 이용하여 확률변수 X 의 확률분포를 구한다.

풀이 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0) = {}_3C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$P(X=1) = {}_3C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$P(X=2) = {}_3C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{4}{9}$$

$$P(X=3) = {}_3C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{8}{27} = 2$$

$$\therefore V(X) = 0^2 \cdot \frac{1}{27} + 1^2 \cdot \frac{2}{9} + 2^2 \cdot \frac{4}{9} + 3^2 \cdot \frac{8}{27} - 2^2$$

$$= \frac{2}{3}$$

답 ③

1등급 비밀노트 >>>

주사위를 3번 던져서 점 P 가 옮겨진 점의 x 좌표와 y 좌표의 합은 주사위를 3번 던질 때 1 또는 2 또는 3 또는 4의 눈이 나오는 횟수와 같다. 따라서 주어진 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(3, \frac{2}{3}\right)$ 를 따르므로

$$V(X) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

와 같이 계산할 수도 있다.

21 전략 확률의 총합이 1임을 이용하여 r 의 값을 먼저 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$r + \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}r = 1, \quad \frac{7}{4}r = 1$$

$$\therefore r = \frac{4}{7}$$

→ ①

$$E(X) = \frac{18}{7} \text{이므로}$$

$$a \cdot \frac{4}{7} + (a+1) \cdot \frac{2}{7} + (a+2) \cdot \frac{1}{7} = \frac{18}{7}$$

$$7a = 14 \quad \therefore a = 2$$

→ ②

즉 확률변수 X 에 대하여

$$\begin{aligned} V(X) &= 2^2 \cdot \frac{4}{7} + 3^2 \cdot \frac{2}{7} + 4^2 \cdot \frac{1}{7} - \left(\frac{18}{7}\right)^2 \\ &= \frac{50}{7} - \frac{324}{49} = \frac{26}{49} \quad \cdots ③ \\ \therefore V\left(\frac{a}{r}X\right) &= V\left(\frac{7}{2}X\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot V(X) \\ &= \frac{49}{4} \cdot \frac{26}{49} = \frac{13}{2} \quad \cdots ④ \\ \text{답 } &\frac{13}{2} \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① r 의 값을 구할 수 있다.	20%
② a 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $V(X)$ 를 구할 수 있다.	30%
④ $V\left(\frac{a}{r}X\right)$ 를 구할 수 있다.	20%

22 전략 $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$ 임을 이용하여 표준편차를 구한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$$\begin{aligned} P(X=-1) + P(X=0) + P(X=2) &= 1 \\ a + a^2 + a^2 &= 1, \quad 2a^2 + a - 1 = 0 \\ (a+1)(2a-1) &= 0 \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \quad (\because 0 \leq a \leq 1) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 0 \\ V(X) &= (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} - 0^2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sigma(-4X+3) &= |-4|\sigma(X) \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6} \quad \cdots ② \\ \text{답 } &2\sqrt{6} \end{aligned}$$

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40%
② $\sigma(-4X+3)$ 을 구할 수 있다.	60%

23 전략 부품이 불량품일 확률을 구하고, 이항분포와 정규분포의 관계를 이용한다.

풀이 부품 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(96, 4^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-96}{4}$ 으로 놓으면 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
부품 한 개가 불량품으로 판정받을 확률은

$$\begin{aligned} P(X < 89) &= P\left(Z_X < \frac{89-96}{4}\right) \\ &= P(Z_X < -1.75) \\ &= P(Z_X > 1.75) \\ &= P(Z_X \geq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 1.75) \\ &= 0.5 - 0.46 = 0.04 \end{aligned}$$

확률질량함수의 성질에 의하여
 $P(X=-1)=a$
 $\therefore 0 \leq a \leq 1$

확률변수 X 와 두 상수 a
($a \neq 0$), b 에 대하여
① $E(aX+b) = aE(X)+b$
② $V(aX+b) = a^2V(X)$
③ $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

$P(Z < -a)$
 $= P(Z > a)$

6만 개의 부품 중 불량품의 개수를 Y 라 하면 확률변수 Y 는 이항분포 $B(60000, 0.04)$ 를 따르므로

$$\begin{aligned} E(Y) &= 60000 \times 0.04 = 2400 \\ V(Y) &= 60000 \times 0.04 \times 0.96 = 2304 \end{aligned}$$

즉 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(2400, 48^2)$ 을 따르므로

$Z_Y = \frac{Y-2400}{48}$ 으로 놓으면 Z_Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2328) &= P\left(Z_Y < \frac{2328-2400}{48}\right) \\ &= P(Z_Y \leq -1.5) \\ &= P(Z_Y \geq 1.5) \\ &= P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.43 \\ &= 0.07 \quad \text{답 } 0.07 \end{aligned}$$

24 전략 먼저 $\left|\frac{X-m}{\sigma}\right| = |Z|$ 임을 이용하여 σ 의 값을 구한다.

풀이 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(|X-m| \leq 6) = 0.8664$ 에서

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right| \leq \frac{6}{\sigma}\right) &= 0.8664 \\ P\left(|Z| \leq \frac{6}{\sigma}\right) &= 0.8664 \\ 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{6}{\sigma}\right) &= 0.8664 \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{6}{\sigma}\right) &= 0.4332 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{6}{\sigma} = 1.5 \quad \therefore \sigma = 4 \quad \cdots ①$$

또 $P(X \leq 40) = 0.9772$ 에서

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq \frac{40-m}{4}\right) &= 0.9772 \\ P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{40-m}{4}\right) &= 0.9772 \\ 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{40-m}{4}\right) &= 0.9772 \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{40-m}{4}\right) &= 0.4772 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{40-m}{4} &= 2 \\ \therefore m &= 32 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

따라서 모집단이 정규분포 $N(32, 4^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(32, \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $N(32, 2^2)$ 을 따른다. $\cdots ③$

$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-32}{2}$ 로 놓으면 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 30) &= P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{30-32}{2}\right) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \geq -1) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \leq 1) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \leq 0) + P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1) \\ &= 0.5 + 0.3413 = 0.8413 \end{aligned}$$

답 0.8413

채점 기준	비율
① σ 의 값을 구할 수 있다.	30%
② m 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ 표본평균 $\bar{X}$ 가 따르는 정규분포를 구할 수 있다.	20%
④ $P(\bar{X} \geq 30)$ 을 구할 수 있다.	20%

25 전략 $P(-c \leq Z \leq c) = \frac{p\alpha + q\beta}{100}$ 로 놓고, c 와 k 사이의 관계식을 구한다.

풀이 모표준편차가 2, 표본의 크기가 64이므로

$P(-c \leq Z \leq c) = \frac{p\alpha + q\beta}{100}$ 라 할 때, 모평균 m 에 대한

신뢰도 $(p\alpha + q\beta)\%$ 의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} \bar{x} - c \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} &\leq m \leq \bar{x} + c \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} \\ \therefore \bar{x} - \frac{1}{4}c &\leq m \leq \bar{x} + \frac{1}{4}c \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{4}c = \frac{k}{2} \text{ 이므로 } c = 2k$$

$$\begin{aligned} \therefore P(-c \leq Z \leq c) &= P(-2k \leq Z \leq 2k) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 2k) \\ &= 2\{P(-k \leq Z \leq 2k) - P(-k \leq Z \leq 0)\} \\ &= 2\{P(-k \leq Z \leq 2k) - P(0 \leq Z \leq k)\} \\ &= 2(\beta - \alpha) \\ &= -2\alpha + 2\beta \end{aligned}$$

따라서 $\frac{p\alpha + q\beta}{100} = -2\alpha + 2\beta$ 이므로

$$\begin{aligned} p\alpha + q\beta &= -200\alpha + 200\beta \\ \therefore p &= -200, q = 200 \\ \therefore q - p &= 400 \end{aligned}$$

답 400

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 78쪽

01

해결 단계

- ① 함수 $f(x)$ 를 구한다.
- ② $y=f(x)$ 의 그래프를 그린다.
- ③ r 의 값을 구한다.

풀이 ① 점 P가 매초 1의 속력으로 움직이므로 x 초 동안 점 P가 움직인 거리는 x 이다.

$0 \leq x \leq r$ 일 때, 점 P는 선분 OA 위에 놓이므로

$$\overline{OP} = x$$

$$\begin{aligned} \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO} &= r + 2r + r \\ &= 4r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{BP} &= x - 3r \text{ 이므로} \\ \overline{OP} &= \overline{OB} - \overline{BP} \\ &= r - (x - 3r) \\ &= 4r - x \end{aligned}$$

$r \leq x \leq 3r$ 일 때, 점 P는 호 AB 위에 놓이므로

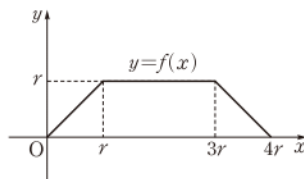
$$\overline{OP} = r$$

$3r \leq x \leq 4r$ 일 때, 점 P는 선분 BO 위에 놓이므로

$$\overline{OP} = 4r - x$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq r) \\ r & (r \leq x \leq 3r) \\ 4r - x & (3r \leq x \leq 4r) \end{cases}$$

② 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



③ $0 \leq x \leq 4r$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}(2r + 4r) \cdot r = 1, \quad 3r^2 = 1$$

$$r^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because r > 0)$$

답 ③

02

해결 단계

- ① $P(X=1), P(X=3), P(X=5)$ 를 구한다.
- ② p, q, r 의 값을 구한다.
- ③ $E\left(\frac{qX+r}{p}\right)$ 를 구한다.

풀이 ① $P(X=1)=a, P(X=3)=b, P(X=5)=c$ 라 하면 확률의 총합은 1이므로

$$a + b + c = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$\bar{X}=1$ 인 경우는 표본이

$$(1, 1)$$

이므로

$$P(\bar{X}=1) = a^2$$

$$\text{즉 } a^2 = \frac{1}{36} \text{ 이므로 } a = \frac{1}{6} \quad (\because a > 0)$$

$a = \frac{1}{6}$ 을 ㉠에 대입하면

$$b + c = \frac{5}{6}$$

$$\therefore c = \frac{5}{6} - b \quad \dots\dots ㉡$$

$\bar{X}=3$ 인 경우는 표본이

$$(1, 5), (3, 3), (5, 1)$$

이므로

$$P(\bar{X}=3) = ac + b^2 + ca = b^2 + \frac{1}{3}c$$

즉 $b^2 + \frac{1}{3}c = \frac{5}{18}$ 이므로 ㉡을 대입하면

$$b^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6} - b\right) = \frac{5}{18}$$

$$b^2 - \frac{1}{3}b = 0, \quad b\left(b - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\therefore b = \frac{1}{3} \quad (\because b > 0)$$

$b = \frac{1}{3}$ 을 ㉠에 대입하면 $c = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

② $\therefore p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$,

$q = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$,

$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

③ 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{3}$$

이므로

$$E\left(\frac{qX+r}{p}\right) = \frac{q}{p}E(X) + \frac{r}{p}$$

$$= 3E(X) + \frac{9}{4}$$

$$= 3 \cdot \frac{11}{3} + \frac{9}{4} = \frac{53}{4}$$

답 53/4

03

해결 단계

- ① 표본평균 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ 가 따르는 정규분포를 각각 구하고 표준화한다.
- ② m , σ 의 값을 각각 구한다.
- ③ $P(X \leq 67)$ 을 구한다.

풀이 ① A, B 두 공장에서 생산하는 제품의 길이를 각각 X , Y 라 하면 확률변수 X , Y 는 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2)$, $N(m-1, (2\sigma)^2)$ 을 따른다.

표본의 크기가 36이므로 A 공장에서 임의추출한 제품의 길이의 평균을 $\bar{X}$ 라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포

$N\left(m, \frac{\sigma^2}{36}\right)$, 즉 $N\left(m, \left(\frac{\sigma}{6}\right)^2\right)$ 을 따르고, B 공장에서 임의

추출한 제품의 길이의 평균을 $\bar{Y}$ 라 하면 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(m-1, \frac{4\sigma^2}{36}\right)$, 즉 $N\left(m-1, \left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{6}}$, $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y}-m+1}{\frac{\sigma}{3}}$ 로 놓으면 $Z_{\bar{X}}$, $Z_{\bar{Y}}$ 는 모

두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

② 이때 $P(\bar{X} \geq 55) = 0.0013$ 이므로

$$P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{55-m}{\frac{\sigma}{6}}\right) = 0.0013$$

$$P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{330-6m}{\sigma}\right) = 0.0013$$

$$P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{330-6m}{\sigma}\right) = 0.0013$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{330-6m}{\sigma}\right) = 0.0013$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{330-6m}{\sigma}\right) = 0.4987$$

이때 $P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 3.0) = 0.4987$ 이므로

$$\begin{aligned} \bar{x} - k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{144}} &\leq m \\ &\leq \bar{x} + k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{144}} \end{aligned}$$

이므로

$$\bar{x} - k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{144}} = 70 - c$$

$$\bar{x} + k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{144}} = 70 + c$$

$$\therefore \bar{x} = 70,$$

$$c = k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{144}}$$

$$\frac{330-6m}{\sigma} = 3, \quad 110-2m = \sigma$$

$$\therefore 2m + \sigma = 110 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $P(\bar{Y} \geq 55) = 0.0228$ 이므로

$$P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{55-m+1}{\frac{\sigma}{3}}\right) = 0.0228$$

$$P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{168-3m}{\sigma}\right) = 0.0228$$

$$P(Z_{\bar{Y}} \geq 0) - P\left(0 \leq Z_{\bar{Y}} \leq \frac{168-3m}{\sigma}\right) = 0.0228$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_{\bar{Y}} \leq \frac{168-3m}{\sigma}\right) = 0.0228$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_{\bar{Y}} \leq \frac{168-3m}{\sigma}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z_{\bar{Y}} \leq 2.0) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{168-3m}{\sigma} = 2, \quad 168-3m = 2\sigma$$

$$\therefore 3m + 2\sigma = 168 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$m = 52, \sigma = 6$$

③ 따라서 확률변수 X 는 정규분포 $N(52, 6^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-52}{6}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

즉 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 67) &= P\left(Z \leq \frac{67-52}{6}\right) \\ &= P(Z \leq 2.5) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 + 0.4938 = 0.9938 \end{aligned}$$

답 ④

04

해결 단계

- ① c 를 k , σ 로 나타낸다.
- ② $f(n)$ 을 k , σ 로 나타낸다.
- ③ n 의 값을 구한다.

풀이 ① $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하고, 모표준편차를 σ , 크기가 144, n 인 표본의 표본평균의 값을 각각 $\bar{x}$, $\bar{x}_1$ 라 하자.

크기가 144일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $70-c \leq m \leq 70+c$ 이므로

$$\bar{x} = 70, c = k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{144}} = \frac{k\sigma}{12}$$

② 또 크기가 n 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $68-f(n) \leq m \leq 68+f(n)$ 이므로

$$\bar{x}_1 = 68, f(n) = k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$$

③ 이때 $f(n) = \frac{2}{5}c$ 이므로

$$\frac{k\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{k\sigma}{12}, \quad \sqrt{n} = 30$$

$$\therefore n = 900$$

답 900