빠른 정답

어려운 3점 쉬운 4점 **핵 / 심 / 문 / 제**

Ⅰ. 수열의 극한

SET							
SET 01	001 ①	002 ②	003 ④	004 9	005 4	006 ③	007 ⑤
	008 ⑤	009 2	010 64				
SET 02	011 18	012 ②	013 ④	014 ⑤	015 ②	016 3	017 ②
	018 ②	019 ④	020 ②				
SET 03	021 ③	022 ③	023 ⑤	024 10	025 12	026 3	027 ⑤
	028 10	029 ④	030 ③				
SET 04	031 ③	032 ③	033 6	034 ③	035 9	036 ①	037 ①
	038 ②	039 10	040 ⑤				
SET 05	041 ④	042 ④	043 ②	044 4	045 ③	046 ②	047 6
	048 10	049 3	050 ①				
SET 06	051 ③	052 2	053 ②	054 ④	055 10	056 ①	057 20
	058 18	059 ⑤	060 ②				
SET 07	061 ②	062 ④	063 4	064 ③	065 6	066 6	067 16
	068 ②	069 ⑤	070 ③				
SET 08	071 3	072 24	073 30	074 11	075 ②	076 ②	077 5
	078 ③	079 8	080 ①				

Ⅱ. 미분법

SET							
SET 09	081 ②	082 ④	083 ③	084 ④	085 ⑤	086 ④	087 ③
	088 ②	089 ④	090 ①				
SET 10	091 ②	092 ①	093 8	094 ①	095 4	096 ②	097 2
	098 ③	099 ④	100 ②				
SET 11	101 ④	102 ④	103 ④	104 ②	105 ①	106 8	107 ③
	108 ③	109 ④	110 36				
SET 12	111 ②	112 ②	113 ③	114 ②	115 ③	116 ③	117 20
	118 ②	119 ③	120 ①				
SET 13	121 ⑤	122 ③	123 2	124 27	125 ⑤	126 2	127 ④
	128 25	129 ①	130 15				
SET 14	131 ③	132 ③	133 ⑤	134 ③	135 ③	136 ⑤	137 ⑤
	138 ①	139 ④	140 ④				
SET 15	141 ④	142 10	143 ⑤	144 2	145 ②	146 13	147 5
	148 ②	149 9	150 ④				
SET 16	151 ⑤	152 10	153 ②	154 18	155 ④	156 ④	157 15
	158 13	159 3	160 5				

Ⅲ. 적분법

SET							
SET 17	161 ③	162 ③	163 ③	164 ④	165 225	166 ③	167 ①
	168 ①	169 10	170 ②				
SET 18	171 ④	172 ②	173 ②	174 ②	175 8	176 ③	177 ⑤
	178 ③	179 ⑤	180 7				
SET 19	181 ④	182 ②	183 ①	184 8	185 15	186 ①	187 ②
	188 ④	189 1	190 ③				
SET 20	191 ⑤	192 ②	193 ④	194 ②	195 ③	196 ④	197 ⑤
	198 4	199 3	200 20				
SET 21	201 ⑤	202 ③	203 ②	204 ①	205 ①	206 ⑤	207 31
	208 ④	209 ④	210 20				
SET 22	211 ⑤	212 ⑤	213 ①	214 25	215 ②	216 ③	217 4
	218 ②	219 40	220 ③				
SET 23	221 ②	222 4	223 40	224 31	225 ②	226 ②	227 ①
	228 96	229 ③	230 6				
SET 24	231 ①	232 ②	233 ③	234 ③	235 6	236 ④	237 ③
	238 14	239 5	240 ②				

빠른 정답

부록 핵심 문제 **짝기출**

Ⅰ. 수열의 극한

SET 01	001 ①	002 ④	003 ⑤	004 ②	005 16	006 ③	
SET 02	007 35	008 15	009 ③	010 ④	011 ③	012 ③	013 ③
SET 03	014 ②	015 ③	016 ⑤	017 ②	018 ②	019 ③	
SET 04	020 ③	021 ⑤	022 ③	023 ①	024 ⑤	025 ②	
SET 05	026 9	027 ⑤	028 ②	029 ①	030 ②	031 ④	032 ⑤
SET 06	033 19	034 ③	035 ④	036 ②	037 16	038 ④	
SET 07	039 ③	040 110	041 ⑤	042 ①	043 18	044 ③	
SET 08	045 ②	046 ②	047 ③	048 ②	049 ①		

Ⅱ. 미분법

SET 09	050 ⑤	051 ③	052 ②	053 10	054 ③	055 ④	
SET 10	056 ②	057 ⑤	058 ⑤	059 ②	060 60		
SET 11	061 ④	062 ①	063 ④	064 10	065 ③	066 ④	067 ①
SET 12	068 96	069 4	070 ①	071 ②	072 ④	073 ④	
SET 13	074 ⑤	075 ③	076 ④	077 ④	078 ②	079 5	
SET 14	080 ②	081 ④	082 ④	083 ④	084 ①	085 34	
SET 15	086 ③	087 17	088 ⑤	089 ③	090 15		
SET 16	091 12	092 ①	093 ②	094 ①	095 72	096 ②	

Ⅲ. 적분법

SET 17	097 ①	098 ①	099 ③	100 ⑤	101 12	
SET 18	102 ①	103 78	104 ④	105 ⑤	106 ①	
SET 19	107 ②	108 ②	109 9	110 27	111 ③	
SET 20	112 3	113 2	114 ②	115 ③	116 ②	
SET 21	117 ①	118 ②	119 ⑤	120 ①	121 ⑤	
SET 22	122 ③	123 ②	124 ②	125 ②	126 ④	127 ①
SET 23	128 ①	129 ①	130 ①	131 ①	132 ③	
SET 24	133 ②	134 96	135 ③	136 ①	137 ④	138 ④

이투스북

어삼쉬사 Plus+

정답과 풀이

미적분

240제

어삼쉬사를 넘어야 1등급 도전이 시작된다.

이투스북

학습진단표

약점 유형 확인

Ⅰ. 수열의 극한

중단원명	유형명	문항번호	틀린갯수
① 수열의 극한	유형 01 수렴하는 수열의 극한의 성질과 $\frac{\infty}{\infty}$꼴 수열의 극한값 계산	005, 011, 022, 031, 043, 047, 052	/ 7개
	유형 02 $\frac{\infty}{\infty}$꼴 수열의 극한 활용	009, 017, 026, 038, 049, 056, 059, 072, 078	/ 9개
	유형 03 $\infty-\infty$꼴 수열의 극한값 계산	007, 013, 037, 042, 063	/ 5개
	유형 04 등비수열의 극한값 계산	003, 010, 014, 021,a 055, 062, 067	/ 7개
	유형 05 등비수열의 극한 활용	008, 016, 019, 028, 035, 039, 057, 066, 069, 074, 079	/ 11개
	유형 06 수열의 극한의 대소 관계	002, 012, 024, 032, 044, 053, 065, 073	/ 8개
② 급수	유형 07 급수의 수렴과 성질	023, 041, 071	/ 3개
	유형 08 분수꼴로 표현된 수열의 급수	001, 015, 034, 036, 046, 054, 068	/ 7개
	유형 09 등비급수의 수렴 조건과 등비급수의 합	004, 018, 025, 027, 029, 033, 045, 048, 051, 058, 061, 064, 075, 076, 077	/ 15개
	유형 10 등비급수와 도형(1) – 닮음	006, 020, 030, 050, 070, 080	/ 6개
	유형 11 등비급수와 도형(2) – 개수 변화	040, 060	/ 2개

Ⅱ. 미분법

중단원명	유형명	문항번호	틀린갯수
① 여러 가지 함수의 미분	유형 01 지수·로그함수의 극한과 e의 정의	085, 091, 102, 124, 133	/ 5개
	유형 02 지수·로그함수의 미분	115, 131, 153	/ 3개
	유형 03 삼각함수 사이의 관계와 덧셈정리	081, 112	/ 2개
	유형 04 덧셈정리의 활용 (방정식, 최대·최소)	101, 118	/ 2개
	유형 05 덧셈정리와 도형	098, 120, 158	/ 3개
	유형 06 삼각함수의 극한	084, 100, 142, 160	/ 4개
	유형 07 삼각함수의 극한과 도형	089, 096, 107, 129, 139, 148	/ 6개
	유형 08 삼각함수의 미분	155	/ 1개
② 여러 가지 미분법	유형 09 몫의 미분법	104, 121, 141	/ 3개
	유형 10 합성함수의 미분법	086, 095, 109, 114, 125, 134, 151	/ 7개
	유형 11 매개변수로 나타낸 함수 또는 음함수의 미분법	083, 092, 113, 126, 145, 152	/ 6개
	유형 12 역함수의 미분법	082, 099, 105, 128, 135, 146, 157	/ 7개
③ 도함수의 활용	유형 13 접선의 방정식	088, 093, 106, 116, 138, 143, 150, 154	/ 8개
	유형 14 도함수, 이계도함수와 함수의 그래프의 활용	097, 110, 117, 130, 132, 140, 149, 156, 159	/ 9개
	유형 15 변곡점과 함수의 그래프	094, 103, 111, 123	/ 4개
	유형 16 방정식과 부등식에의 활용	090, 119, 127, 137, 147	/ 5개
	유형 17 속도와 가속도	087, 108, 122, 136, 144	/ 5개

Ⅲ. 적분법

중단원명	유형명	문항번호	틀린갯수
① 여러 가지 적분법	유형 01 여러 가지 함수의 적분	163, 180, 185, 220, 230, 239	/ 6개
	유형 02 치환적분법	161, 170, 179, 181, 190, 191, 199, 202, 219, 222, 226, 229, 236, 240	/ 14개
	유형 03 부분적분법	166, 176, 178, 188, 192, 201, 209, 211, 228, 233	/ 10개
	유형 04 정적분으로 정의된 함수(1) – 식 정리	164, 167, 173, 177, 183, 195, 198, 203, 204, 214, 218, 225, 237	/ 13개
	유형 05 정적분으로 정의된 함수(2) – 활용	169, 189, 200, 208, 234	/ 5개
② 정적분의 활용	유형 06 급수의 합과 정적분의 관계	162, 175, 187, 197, 207, 213, 217, 221, 231	/ 9개
	유형 07 정적분과 넓이	165, 171, 186, 193, 206, 216, 224, 235, 238	/ 9개
	유형 08 정적분과 부피	168, 174, 182, 194, 205, 215, 227, 232	/ 8개
	유형 09 속도와 거리	172, 184, 196, 210, 212, 223	/ 6개

풀이 시간 확인

Ⅰ. 수열의 극한

SET	SET 01	SET 02	SET 03	SET 04	SET 05	SET 06	SET 07	SET 08
Time								

Ⅱ. 미분법

SET	SET 09	SET 10	SET 11	SET 12	SET 13	SET 14	SET 15	SET 16
Time								

Ⅲ. 적분법

SET	SET 17	SET 18	SET 19	SET 20	SET 21	SET 22	SET 23	SET 24
Time								

I 수열의 극한

001

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_7-a_4=9$에서

$3d=9$이므로 $d=3$

이때 $a_2=12$이므로

$a_1+3=12$에서 $a_1=9$

$$\therefore\ a_n=9+(n-1)\times 3 = 3n+6$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(k+1)a_k}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(k+1)(3k+6)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+1)a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

답 ①

002

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=2$이고

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+3}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{\sqrt{n^2+4n+3}+n}=2$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$이다.

답 ②

003

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2^n a_n}{2^n+3^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times ar^{n-1}}{2^n+3^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}a\times\left(\frac{2r}{3}\right)^{n-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}\end{aligned}$$

위의 극한이 수렴하려면 수열 $\left\{\left(\frac{2r}{3}\right)^{n-1}\right\}$이 수렴해야

하므로

$-1<\frac{2r}{3}\le 1$

$\therefore\ -\frac{3}{2}<r\le\frac{3}{2}$

(i) $-\frac{3}{2}<r<\frac{3}{2}$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}a\times\left(\frac{2r}{3}\right)^{n-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=0\neq 2$$

(ii) $r=\frac{3}{2}$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}a\times\left(\frac{2r}{3}\right)^{n-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{2}{3}a=2$$

$\therefore\ a=3$

(i), (ii)에서 $a=3$, $r=\frac{3}{2}$이므로

$$a_3=3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$$

답 ④

004

수열 $\left\{\left(\frac{x}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하려면 $-1<\frac{x}{4}\le 1$

$\therefore\ -4<x\le 4$ ……㉠

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\log_3 x)^n$이 수렴하려면

(i) (첫째항)$=0$인 경우

$1-\log_3 x=0$에서 $x=3$

(ii) $-1<$(공비)<1인 경우

$-1<1-\log_3 x<1$, $-2<-\log_3 x<0$

$0<\log_3 x<2$ $\therefore 1<x<9$

(i), (ii)에서 $1<x<9$ ……㉡

㉠, ㉡에서 x의 값의 범위는 $1<x\le 4$이므로 구하는 정수 x의 값의 합은

$2+3+4=9$

답 9

005

$a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_kb_k$

$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}=-\frac{1}{n(n-1)}$ $(n\ge 2)$

$\lim_{n\to\infty}n^2a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n(n-1)}=-1$이고

조건 (나)에서 $\lim_{n\to\infty}nb_n=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_nb_n}{nb_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}n^2a_nb_n}{\lim_{n\to\infty}nb_n}=-\frac{1}{3}$

따라서 $k=-\frac{1}{3}$이므로 $36k^2=36\times\frac{1}{9}=4$

답 4

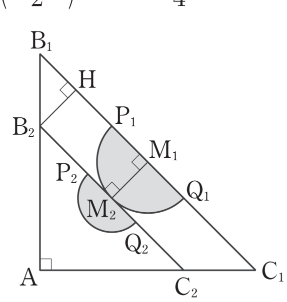
006

직각삼각형 AB_1C_1에서 $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=3$이므로

$\overline{B_1C_1}=\sqrt{2}\times\overline{AB_1}=3\sqrt{2}$

$\overline{P_1Q_1}=\frac{1}{3}\times\overline{B_1C_1}=\sqrt{2}$

$\therefore S_1=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\pi=\frac{\pi}{4}$



두 선분 P_1Q_1, P_2Q_2의 중점을 각각 M_1, M_2라 하고 점 B_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{B_2H}=\overline{M_1M_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 B_1B_2H에서

$\overline{B_1B_2}=\sqrt{2}\times\overline{B_2H}=1$

$\overline{AB_2}=\overline{AB_1}-\overline{B_1B_2}=2$

두 삼각형 AB_1C_1, AB_2C_2는 서로 닮음이고 닮음비가

$\overline{AB_1}:\overline{AB_2}=3:2$, 즉 $1:\frac{2}{3}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{4}{9}$이다.

같은 과정을 반복하므로 두 그림 R_n, R_{n+1}에 새로 색칠된 도형의 넓이의 비도 $1:\frac{4}{9}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{\pi}{4}$이고 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{20}\pi$

답 ③

007

$A_n(n, \sqrt{n+2})$, $B_n(n, \sqrt{n})$이므로

$a_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})(\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{2(\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1}}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}+\sqrt{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ⑤

008

(i) $0<x<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+1}{x^n+x}=\frac{0+1}{0+x}=\frac{1}{x}$

(ii) $x=1$일 때

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 1\text{이므로}$$

$$f(1)= \lim_{n\to\infty} \frac{1^{n+1}+1}{1^n+1} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

(iii) $x>1$일 때

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty,\ \text{즉 } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0\text{이므로}$$

$$f(x)= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}+1}{x^n+x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x+\dfrac{1}{x^n}}{1+\dfrac{x}{x^n}} = \frac{x+0}{1+0} = x$$

(i)~(iii)에서 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \\ x & (x>1) \end{cases}$ 이다.

$f(f(k))=2$에서 $f(k)=\alpha$라 하면

$f(\alpha)=2 \qquad \therefore\ \alpha=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\alpha=2$

즉, $f(k)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $f(k)=2$를 만족시키는 k의 값을 구하면 된다.

이때 $f(k)=\dfrac{1}{2}$를 만족시키는 k의 값은 존재하지 않고

$f(k)=2$에서 $k=\dfrac{1}{2}$ 또는 $k=2$이므로

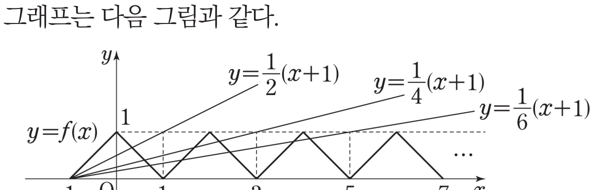
구하는 실수 k의 값의 합은

$\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$

답 ⑤

009

조건 (가)에서 $-1 \le x \le 1$일 때 $f(x)=-|x|+1$이고 조건 (나)에서 $f(x+2)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



직선 $y=\dfrac{1}{2n}(x+1)$은 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 $(-1,\ 0)$에서 만난다.

또한 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면

$n=1$일 때 $y=\dfrac{1}{2}(x+1)$

$n=2$일 때 $y=\dfrac{1}{4}(x+1)$

$n=3$일 때 $y=\dfrac{1}{6}(x+1)$

$\vdots$

위의 그림에서 $a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=6,\ \cdots$이므로

$a_n=2n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2$$

답 2

010

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 $r\ (r<0)$라 하면 조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{4}(|a_n|+a_n)=2(a_1+a_3)=2a(1+r^2)=10 \cdots\cdots ㉠$$

또한 조건 (나)에서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+a_{n+1}}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{ar^{n-1}+ar^n}{\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-r)(r^{n-1}+r^n)}{1-r^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n-1}-r^{n+1}}{1-r^n}$$

(i) $r<-1$일 때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} = 0\text{이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n-1}-r^{n+1}}{1-r^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{r}-r}{\dfrac{1}{r^n}-1} = r-\frac{1}{r} = -\frac{3}{2}$$

$$r^2+\frac{3}{2}r-1=0,\ 2r^2+3r-2=0$$

$$(r+2)(2r-1)=0$$

$$\therefore\ r=-2\ (\because\ r<-1)$$

(ii) $-1<r<0$일 때

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0\text{이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n-1}-r^{n+1}}{1-r^n} = 0 \ne -\frac{3}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $r=-2$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$2a(1+4)=10 \qquad \therefore\ a=1$

$\therefore\ a_7=ar^6=(-2)^6=64$

답 64

011

$\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n=5,$

$\lim_{n\to\infty}(2n+3)^2b_n=8$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(15n+1)b_n}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(15n+1)(3n-1)}{(2n+3)^2}\times\frac{(2n+3)^2b_n}{(3n-1)a_n}\right\}$$

$$=\frac{45}{4}\times\frac{8}{5}=18$$

답 18

012

모든 자연수 n에 대하여

$3n^2+3n\le a_n\le 3n^2+4n$이므로

$$3+\frac{3}{n}\le\frac{a_n}{n^2}\le 3+\frac{4}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)=3,\ \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n}\right)=3$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=3$$

또한 $\lim_{n\to\infty}(2n^2+5n)b_n=10$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{n^2}\times(2n^2+5n)b_n\times\frac{n}{2n+5}\right\}$$

$$=3\times10\times\frac{1}{2}=15$$

답 ②

013

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=5$ ……㉠

$a_4=a+3d=13$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ d=4$

$\therefore\ a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{2n}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n}\left(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}\{(\sqrt{4n+1})^2-(\sqrt{4n-3})^2\}}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{2n}}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+\sqrt{4-\frac{3}{n}}}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$$

답 ④

014

$\frac{(6^n-1)a_n}{5^n}=b_n$이라 하면

$a_n=b_n\times\frac{5^n}{6^n-1}$에서

$a_{n+1}=b_{n+1}\times\frac{5^{n+1}}{6^{n+1}-1}$이고

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=4$이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\times\frac{5^n}{5^{n+1}}\times\frac{6^{n+1}-1}{6^n-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{b_n}{b_{n+1}}\times\frac{1}{5}\times\frac{6-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}\right\}$$

$$=1\times\frac{1}{5}\times6=\frac{6}{5}$$

답 ⑤

015

점 $\mathrm{A}(2n,\ 2)$와 직선 $x+y-n=0$ 사이의 거리가

a_n이므로

$$a_n=\frac{|2n+2-n|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{n+2}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{k+2}\times\frac{\sqrt{2}}{k+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+2)(k+3)}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{2}{3}$$

답 ②

016

$f(x)=x^n+x$라 하고 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)Q(x)+a_n$이므로

$a_n=f(2)=2^n+2$

$$\frac{a_n}{p^n}=\frac{2^n+2}{p^n}=\left(\frac{2}{p}\right)^n+2\left(\frac{1}{p}\right)^n$$

(i) $0<p<2$일 때

$\frac{2}{p}>1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{p^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{p}\right)^n+2\left(\frac{1}{p}\right)^n\right\}=\infty$$

(ii) $p=2$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{p^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{1^n+2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1$$

(iii) $p>2$일 때

$0<\frac{2}{p}<1$, $0<\frac{1}{p}<\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{p^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{p}\right)^n+2\left(\frac{1}{p}\right)^n\right\}=0$$

(i)~(iii)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{p^n}$이 양수로 수렴하는 경우는

$p=2$, $q=1$이다.

$\therefore\ p+q=2+1=3$

답 3

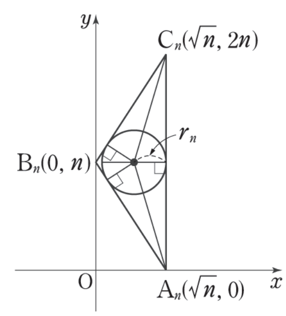
017

자연수 n에 대하여

$A_n(\sqrt{n},\ 0)$, $B_n(0,\ n)$, $C_n(\sqrt{n},\ 2n)$에서

$\overline{A_nB_n}=\overline{B_nC_n}=\sqrt{n^2+n}$,

$\overline{A_nC_n}=2n$



삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2n\times\sqrt{n}$이고,

또한 이 삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이가 r_n이므로

삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times r_n\times(2n+2\sqrt{n^2+n})$이다.

$\frac{1}{2}\times 2n\times\sqrt{n}=\frac{1}{2}\times r_n\times(2n+2\sqrt{n^2+n})$에서

$$\frac{r_n}{\sqrt{n}}=\frac{n}{n+\sqrt{n^2+n}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

답 ②

018

조건 (가)에서 $a_1=2$이고

조건 (나)에서 $a_{n+1}=\frac{2^{2n}}{a_n}$이므로

$n=1$일 때 $a_2=\frac{2^2}{2}=2$

$n=2$일 때 $a_3=\frac{2^4}{2}=2^3$

$n=3$일 때 $a_4=\dfrac{2^6}{2^3}=2^3$

$n=4$일 때 $a_5=\dfrac{2^8}{2^3}=2^5$

$n=5$일 때 $a_6=\dfrac{2^{10}}{2^5}=2^5$

$\vdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n-1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

다른풀이

조건 (가)에서 $a_1=2$이므로 $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$

조건 (나)에서 자연수 k에 대하여 $n=2k-1$일 때

$a_{2k-1}a_{2k}=4^{2k-1}$ $\cdots\cdots$㉠

$n=2k$일 때

$a_{2k}a_{2k+1}=4^{2k}$ $\cdots\cdots$㉡

㉡÷㉠에서 $\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}=4$이므로

수열 $\{a_{2k-1}\}$은 공비가 4인 등비수열이다.

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_{2k-1}}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n-1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

답 ②

019

$P_n(n,\ 2^n)$, $Q_n(n,\ a^n)$,

$P_{n+1}(n+1,\ 2^{n+1})$, $Q_{n+1}(n+1,\ a^{n+1})$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times(\overline{P_nQ_n}+\overline{P_{n+1}Q_{n+1}})\times 1$$

$$=\frac{1}{2}\times\{(a^n-2^n)+(a^{n+1}-2^{n+1})\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\{(a+1)a^n-3\times 2^n\}$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(a+1)a^k-\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{a(a+1)(a^n-1)}{a-1}-\frac{6\times(2^n-1)}{2-1}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{a^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{a(a+1)(a^n-1)}{(a-1)a^n}-\frac{6\times(2^n-1)}{a^n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{a(a+1)\left(1-\frac{1}{a^n}\right)}{a-1}-6\times\left\{\left(\frac{2}{a}\right)^n-\frac{1}{a^n}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{a(a+1)}{a-1}=\frac{10}{3}$$

이므로 $3a(a+1)=20(a-1)$에서

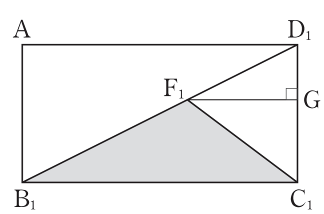
$3a^2-17a+20=0$, $(3a-5)(a-4)=0$

$\therefore\ a=4$ ($\because\ a>2$)

답 ④

020

그림과 같이 점 F_1에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 G라 하고, $\overline{F_1G}=a$라 하자.



두 직각삼각형 $B_1C_1D_1$, F_1GD_1은 서로 닮음이고

$\overline{F_1G}=a$이므로 $\overline{D_1G}=\dfrac{a}{2}$이다.

따라서 $\overline{C_1G}=1-\dfrac{a}{2}$이므로 직각삼각형 C_1F_1G에서

피타고라스 정리에 의하여

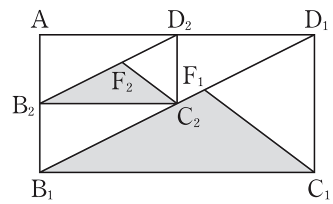
$1^2=a^2+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)^2$, $\dfrac{5}{4}a^2-a=0$

$\dfrac{5}{4}a\left(a-\dfrac{4}{5}\right)=0$

$\therefore\ a=\dfrac{4}{5}$ ($\because\ a>0$)

따라서 삼각형 $B_1C_1F_1$의 넓이는

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{B_1C_1}\times\overline{C_1G}=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$



한편, 그림 R_2에서 $\overline{AB_2}=x$라 하면

$\overline{B_2C_2}=2x$, $\overline{B_1B_2}=1-x$이고

두 직각삼각형 $B_2B_1C_2$, AB_1D_1은 서로 닮음이므로

$2x:(1-x)=2:1$, $2-2x=2x$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$

따라서 두 직사각형 $AB_1C_1D_1$, $AB_2C_2D_2$의 닮음비는

$1:\dfrac{1}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\dfrac{1}{4}$이다.

이와 같은 과정을 계속하므로 모든 자연수 n에 대하여

두 직사각형 $AB_nC_nD_n$, $AB_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는

$1:\dfrac{1}{2}$이고 넓이의 비는 $1:\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\dfrac{3}{5}$이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열의

첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$$

답 ②

021

등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공비가 3이므로

$a_n=4\times3^{n-1}$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{4(3^n-1)}{3-1}=2(3^n-1)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(3^n-1)}{4\times3^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}$$

답 ③

022

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{b_n}=2$에서 $\dfrac{\alpha+1}{\beta}=2$

$\alpha+1=2\beta$ ……㉠

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n+4}{a_n}=2$에서 $\dfrac{\beta+4}{\alpha}=2$

$\beta+4=2\alpha$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=3$, $\beta=2$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta=5$

답 ③

023

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)$이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-3b_n)=0$

이때 $a_n-3b_n=c_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$, $b_n=\dfrac{a_n-c_n}{3}$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$에서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3b_n+1}{2a_n-3b_n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+(a_n-c_n)+1}{2a_n-(a_n-c_n)+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-c_n+1}{a_n+c_n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{c_n}{a_n}+\frac{1}{a_n}}{1+\frac{c_n}{a_n}+\frac{2}{a_n}}=3$$

답 ⑤

024

모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{6}{n+3}<a_n<\dfrac{6}{n+1}$,

$5n^2+n<b_n<5n^2+3n$이므로

$$\frac{6(5n^2+n)}{n+3} < a_nb_n < \frac{6(5n^2+3n)}{n+1}$$ 에서

$$\frac{6(5n^2+n)}{(n+3)(3n+2)} < \frac{a_nb_n}{3n+2} < \frac{6(5n^2+3n)}{(n+1)(3n+2)}$$ 이다.

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6(5n^2+n)}{(n+3)(3n+2)}=10$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6(5n^2+3n)}{(n+1)(3n+2)}=10$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{3n+2}=10$이다.

답 10

025

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=6$에서

$\frac{a}{1-r}=6$ ……㉠

$a_{2n}=ar\times(r^2)^{n-1}=ar^{2n-1}$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2$에서

$\frac{ar}{1-r^2}$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{r}{1+r}=\frac{1}{3}$, $3r=1+r$

$\therefore\ r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{a}{1-\frac{1}{2}}=6$$

$\therefore\ a=3$

$\therefore\ (a_n)^2=(ar^{n-1})^2=9\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$

수열 $\{(a_n)^2\}$은 첫째항이 9이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{9}{1-\frac{1}{4}}=12$$

답 12

026

곡선 $y=ax^2-nx$와 x축의 교점의 x좌표는

$ax^2-nx=x(ax-n)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{n}{a}$이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{n}{a},\ 0\right)$이고, $\mathrm{Q}(n,\ an^2-n^2)$이다.

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\times\frac{n}{a}\times n^2(a-1)\\&=\frac{(a-1)n^3}{2a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{2n^3-3n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(a-1)n^3}{2a}}{2n^3-3n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)n^3}{2a(2n^3-3n)}\\&=\frac{a-1}{4a}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\therefore\ a=3$

답 3

027

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\ (-1<r<1)$라 하면 수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 a^2이고 공비가 r^2인 등비수열이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=6$에서 $\frac{a}{1-r}=6$ ……㉠

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=18$에서 $\frac{a^2}{1-r^2}=18$ ……㉡

㉡에서 $\frac{a^2}{(1-r)(1+r)}=18$, $\frac{6a}{1+r}=18$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a=3(1+r)$ ……㉢

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{3(1+r)}{1-r}=6$, $1+r=2-2r$

$\therefore\ r=\frac{1}{3}$

이를 ㉢에 대입하면 $a=4$

따라서 두 수열 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 각각 4, $\frac{4}{3}$이고 공비가 모두 $\frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=\frac{4}{1-\frac{1}{9}}-\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=4\times\frac{9}{8}-\frac{4}{3}\times\frac{9}{8}=3$$

답 ⑤

028

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+1}+x}{2\times\left(\frac{x^2}{4}\right)^{n}+1}\text{에서}$$

(ⅰ) $0 \le \frac{x^2}{4} < 1$, 즉 $-2 < x < 2$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n=0$이므로

$f(x)=\frac{0+x}{0+1}=x$

이때 부등식 $f(k) \le k$에서 $k \le k$이므로

$-2 < k < 2$인 모든 정수 k의 값은 주어진 부등식을 만족시킨다.

$\therefore\ k=-1,\ 0,\ 1$

(ⅱ) $\frac{x^2}{4}=1$, 즉 $x=-2$ 또는 $x=2$일 때

$f(2)=\frac{1+2}{2+1}=1 \le 2$이고,

$f(-2)=\frac{1+(-2)}{2+1}=-\frac{1}{3}>-2$이므로

부등식 $f(k) \le k$를 만족시키는 k의 값은 $k=2$이다.

(ⅲ) $\frac{x^2}{4}>1$, 즉 $x<-2$ 또는 $x>2$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{x^2}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^2}{4}+x\times\left(\frac{4}{x^2}\right)^n}{2+\left(\frac{4}{x^2}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{x^2}{4}+0}{2+0}=\frac{x^2}{8}$$

이때 부등식 $f(k) \le k$에서 $\frac{k^2}{8} \le k$이므로 이를 만족시키는 k의 값은

$k^2-8k \le 0,\ k(k-8) \le 0$

$\therefore\ 0 \le k \le 8$

그런데 $k<-2$ 또는 $k>2$인 정수이므로

$k=3,\ 4,\ \cdots,\ 8$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 정수 k는

$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$이므로 그 개수는 10이다.

답 10

029

조건 (나)에서 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$(a_{n+1})^2=a_n a_{n+2}$를 만족시키고

조건 (가)에서 $a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2}$이므로

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$\therefore\ a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

한편 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면

정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로

$a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}a$에서 $a=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,a_n$이다.

이때 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로

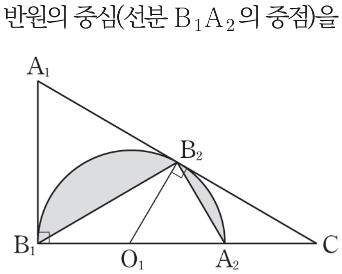
$$S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\,a_n\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

답 ④

030

그림 R_1에서 반원의 중심(선분 B_1A_2의 중점)을 O_1이라 하자.



$\overline{A_1B_1}=3,\ \overline{B_1C}=3\sqrt{3},\ \angle B_1=90°$이므로

$\angle C=30°$

$\angle \mathrm{CB_2O_1} = 90°$이므로 $\angle \mathrm{B_2O_1C} = 60°$

직각삼각형 $\mathrm{O_1B_2C}$에서 $\overline{\mathrm{O_1C}} = 2\overline{\mathrm{O_1B_2}}$이므로

$\overline{\mathrm{B_1C}} = 3\overline{\mathrm{B_1O_1}} = 3\sqrt{3}$에서

$\overline{\mathrm{B_1O_1}} = \sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{O_1B_2}} = \overline{\mathrm{O_1A_2}}$, $\angle \mathrm{B_2O_1A_2} = 60°$에서

삼각형 $\mathrm{O_1A_2B_2}$는 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{A_2B_2}} = \overline{\mathrm{B_1O_1}} = \sqrt{3}$

또한 $\angle \mathrm{O_1A_2B_2} = 60°$이고 $\angle \mathrm{B_1B_2A_2} = 90°$이므로

직각삼각형 $\mathrm{A_2B_2B_1}$에서

$\overline{\mathrm{B_1B_2}} = \sqrt{3} \times \overline{\mathrm{A_2B_2}} = 3$

$$\therefore\ S_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times (\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3$$

$$= \frac{3}{2}(\pi - \sqrt{3})$$

한편 두 그림 R_1, R_2에서 새로 색칠된 부분의 닮음비는

두 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C}$, $\mathrm{A_2B_2B_1}$의 닮음비

$\overline{\mathrm{A_1B_1}} : \overline{\mathrm{A_2B_2}} = 3 : \sqrt{3} = 1 : \dfrac{\sqrt{3}}{3}$과 같다.

이와 같은 과정을 계속하므로

모든 자연수 n에 대하여

두 그림 R_n, R_{n+1}에서 새로 색칠된 부분의

닮음비도 $1 : \dfrac{\sqrt{3}}{3}$이고

넓이의 비는 $1^2 : \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 : \dfrac{1}{3}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\dfrac{3}{2}(\pi - \sqrt{3})$이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$인

등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{3}{2}(\pi - \sqrt{3})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{4}(\pi - \sqrt{3})$$

답 ③

031

$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(2na_n - b_n) = 6$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2na_n - b_n}{na_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \dfrac{b_n}{na_n}\right) = 0$에서

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{na_n} = 2$이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{na_n - 2b_n}{3na_n + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2 \times \frac{b_n}{na_n}}{3 + \frac{b_n}{na_n}}$$

$$= \frac{1 - 2 \times 2}{3 + 2} = -\frac{3}{5}$$

답 ③

032

$n(n+2) < a_n < (n+2)^2$에 n 대신 $2n$을 대입하면

$2n(2n+2) < a_{2n} < (2n+2)^2$

$4n(n+1) < a_{2n} < 4(n+1)^2$

또한 $\dfrac{1}{(n+2)^2} < \dfrac{1}{a_n} < \dfrac{1}{n(n+2)}$이므로

$\dfrac{4n(n+1)}{(n+2)^2} < \dfrac{a_{2n}}{a_n} < \dfrac{4(n+1)^2}{n(n+2)}$

이때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n(n+1)}{(n+2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 4n}{n^2 + 4n + 4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} = 4$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^2}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 8n + 4}{n^2 + 2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} = 4$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = 4$$

답 ③

033

등비수열 $\left\{\left(\dfrac{2-x}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$-1 < \dfrac{2-x}{4} \le 1$,

$-4 \le x - 2 < 4$

$\therefore\ -2 \le x < 6$ ……㉠

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)\left(1-\frac{x}{4}\right)^{n-1}$이 수렴하려면

(i) (첫째항)$=0$인 경우

$x+1=0$에서 $x=-1$

(ii) $-1<$(공비)<1인 경우

$-1<1-\frac{x}{4}<1,\ -2<-\frac{x}{4}<0$

$\therefore\ 0<x<8$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $0<x<8$ ······ㄴ

ㄱ, ㄴ에서 구하는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $0<x<6$이므로

구하는 정수 x는 $-1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$로 6개이다.

답 6

034

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1d}=\frac{1}{d}=\frac{1}{3}\ (\because\ a_1=1)$$

$\therefore\ d=3$

따라서 $a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+4}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{n}-\frac{3n+4}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}+\frac{2}{n+2}\right)$$

$$=-2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=-2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=-2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=-2\times\frac{3}{2}=-3$$

답 ③

035

$9^n=3^{2n}$의 양의 약수는

$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ \cdots,\ 3^{2n-1},\ 3^{2n}$이므로

집합 A_n의 원소의 개수는 $2n+1$이다.

따라서 집합 A_n의 부분집합의 개수는

$a_n=2^{2n+1}=2\times4^n$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^{n-1}}{a_n-3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^{n-1}}{2\times4^n-3^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{4}}{2-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{1}{8}$$

$\therefore\ p+q=8+1=9$

답 9

036

실수 x의 값에 관계없이

부등식 $x^2-4px+3p^2+n^2\geq0$이 성립하려면

x에 대한 이차방정식 $x^2-4px+3p^2+n^2=0$의

판별식을 D라 할 때, $D\leq0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=(2p)^2-(3p^2+n^2)=p^2-n^2\leq0$$

에서 $-n\leq p\leq n$이므로 구하는 정수 p의 개수 a_n은

$a_n=2n+1$이다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

답 ①

037

곡선 $y=\frac{n}{x}$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는

$\frac{n}{x}=x$에서 $x^2=n$

$\therefore\ x=-\sqrt{n}$ 또는 $x=\sqrt{n}$

따라서 두 점 $(-\sqrt{n},\ -\sqrt{n})$과 $(\sqrt{n},\ \sqrt{n})$ 사이의 거리는 $a_n=2\sqrt{2n}$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(a_{n+1}-a_n)=2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

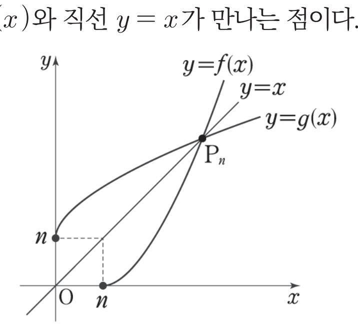
$$=2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\sqrt{2}$$

답 ①

038

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점 P_n은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점이다.



방정식 $f(x)=x$에서

$(x-n)^2=x,\ x^2-(2n+1)x+n^2=0$

$x=\frac{2n+1+\sqrt{4n+1}}{2}\ (\because\ x\geq n)$

$\mathrm{P}_n\left(\frac{2n+1+\sqrt{4n+1}}{2},\ \frac{2n+1+\sqrt{4n+1}}{2}\right)$이므로

$$a_n=\overline{\mathrm{OP}_n}$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{2n+1+\sqrt{4n+1}}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\times\frac{2+\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{2+0+0}{2}$$

$$=\sqrt{2}$$

답 ②

039

$a_n=3\times5^{n-1}$이고,

$S_n=\frac{3(5^n-1)}{5-1}=\frac{3(5^n-1)}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-k^n}{a_n+k^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}\times5^n-\frac{3}{4}-k^n}{3\times5^{n-1}+k^n}$$

(i) $k>5$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}\times5^n-\frac{3}{4}-k^n}{3\times5^{n-1}+k^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}-\frac{3}{4\times5^n}-\left(\frac{k}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}+\left(\frac{k}{5}\right)^n}=-1$$

(ii) $k=5$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}\times5^n-\frac{3}{4}-k^n}{3\times5^{n-1}+k^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}\times5^n-\frac{3}{4}-5^n}{3\times5^{n-1}+5^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{5^n}-1}{\frac{3}{5}+1}$$

$$=-\frac{5}{32}$$

(iii) $0<k<5$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}\times5^n-\frac{3}{4}-k^n}{3\times5^{n-1}+k^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}-\frac{3}{4\times5^n}-\left(\frac{k}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}+\left(\frac{k}{5}\right)^n}=\frac{5}{4}$$

(i)~(iii)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-k^n}{a_n+k^n}>0$이 되도록 하는 양수 k의 범위는 $0<k<5$이므로 모든 자연수 k의 값의 합은

$1+2+3+4=10$

답 10

040

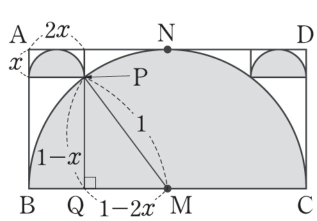
그림 R_1에서 반원의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{MN}}=1$이다.

$\therefore\ S_1=\frac{1}{2}\times\pi\times1^2=\frac{\pi}{2}$

한편 두 그림 R_1, R_2에서 새로 그린 반원의 닮음비는 새로 그린 직사각형의 닮음비와 같다.

그림 R_2에 새로 생긴 2개의 직사각형에서 짧은 변의 길이를 $x(0<x<1)$라 하면 긴 변의 길이는 $2x$이다.

그림과 같이 직사각형의 한 꼭짓점인 호 BN 위의 점을 P라 하고, 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하자.



직각삼각형 PQM에서 피타고라스 정리에 의하여

$(1-x)^2+(1-2x)^2=1^2$

$5x^2-6x+1=0,\ (x-1)(5x-1)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{5}\ (\because\ 0<x<1)$

직사각형 ABCD와 그림 R_2에서

새로 그려진 직사각형의 닮음비는 $1:\frac{1}{5}$이다.

이와 같은 과정을 계속하므로 모든 자연수 n에 대하여

두 그림 R_n, R_{n+1}에서 새로 그려진 직사각형의 닮음비도

$1:\frac{1}{5}$이고 넓이의 비는 $1:\left(\frac{1}{5}\right)^2=1:\frac{1}{25}$이며 개수는 2배이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{25}\times2=\frac{2}{25}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{2}{25}}=\frac{25}{46}\pi$$

답 ⑤

041

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=3$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$이고

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2n}{2nb_n+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}+2}{2b_n+1+\frac{1}{n}}=2$$

답 ④

042

$(n+2)^2=n^2+4n+4<n^2+5n+7$

$(n+3)^2=n^2+6n+9>n^2+5n+7$이므로

$n+2<\sqrt{n^2+5n+7}<n+3$

따라서 $a_n=n+2$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n+7}-a_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+5n+7}-(n+2)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+7-(n+2)^2}{\sqrt{n^2+5n+7}+n+2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+7-(n^2+4n+4)}{\sqrt{n^2+5n+7}+n+2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{\sqrt{n^2+5n+7}+n+2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}+1+\frac{2}{n}}\\&=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ④

043

$\dfrac{a_n-3}{2}=c_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-3}{2}=1$

이때 $a_n=2c_n+3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2c_n+3)=2\times1+3=5$

또한 $\dfrac{3}{b_n+2}=d_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{b_n+2}=\dfrac{1}{2}$

이때 $b_n=\dfrac{3}{d_n}-2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{d_n}-2\right)=3\times2-2=4$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2na_n+b_n}{nb_n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n+\dfrac{b_n}{n}}{b_n+1}=\dfrac{2\times5+0}{4+1}=2$

답 ②

044

모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{n}{2}<a_n<\dfrac{n+1}{2}$이므로

$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2}<\sum\limits_{k=1}^{n}a_k<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{2}$이다.

$\dfrac{n(n+1)}{4}<\sum\limits_{k=1}^{n}a_k<\dfrac{n(n+3)}{4}$이므로

$\dfrac{4(n^2-n)}{n(n+3)}<\dfrac{n^2-n}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}<\dfrac{4(n^2-n)}{n(n+1)}$,

$\dfrac{4(n-1)}{n+3}<\dfrac{n^2-n}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}<\dfrac{4(n-1)}{n+1}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4(n-1)}{n+3}=4$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4(n-1)}{n+1}=4$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}=4$이다.

답 4

045

수열 $\{\log a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\log a_k\\&=\log(2^n)-\frac{1}{2}\log(3^{n^2-n})\\&=n\log2-\frac{n(n-1)}{2}\log3\end{aligned}$$

이므로

$n=1$일 때, $\log a_1=S_1=\log2$이고

$n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}\log a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\left\{n\log2-\frac{n(n-1)}{2}\log3\right\}\\&\quad-\left\{(n-1)\log2-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\log3\right\}\\&=\log2-(n-1)\log3=\log\left\{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

이므로 $a_n=2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ $(n\geq1)$이다.

이때 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{3}}=3$

답 ③

046

원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $y=\sqrt{n}$의 교점의 x좌표는

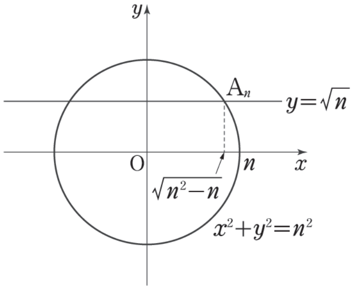
x에 대한 방정식 $x^2+(\sqrt{n})^2=n^2$에서

$x^2=n^2-n$이므로

$x=-\sqrt{n^2-n}$ 또는 $x=\sqrt{n^2-n}$

이때 점 A_n은 제1사분면 위의 점이므로

$a_n=\sqrt{n^2-n}$ $(n\geq2)$



$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(a_k)^2}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n}$$

$$\therefore\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(a_n)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(a_k)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

답 ②

047

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

$$=1-\frac{1}{a_{n+1}}\ (\because\ a_1=1)$$

$$=\frac{3n+1}{3n+2}$$

에서 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{3n+2}$이므로

$a_{n+1}=3n+2$

즉, $a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 3n-1 & (n\geq 2)\end{cases}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=1+\sum_{k=2}^{n}(3k-1)=1+\sum_{k=1}^{n}(3k-1)-2$$

$$=3\times\frac{n(n+1)}{2}-n-1=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^2}{\sum_{k=1}^{n}a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)^2}{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3-\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{9}{\frac{3}{2}}=6$$

답 6

048

등비수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수이므로

첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 $r\ (r>0)$라 하면

$a_n=a\times r^{n-1}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n a_n+2^{2n+1}}{3\times4^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\times a\times r^{n-1}+2\times2^{2n}}{3\times4^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\times(3r)^n+2\times4^n}{3\times4^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\left(\frac{3r}{4}\right)^n+2}{3+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

(i) $0<\frac{3r}{4}<1$, 즉 $0<r<\frac{4}{3}$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3r}{4}\right)^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\left(\frac{3r}{4}\right)^n+2}{3+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{2}{3}$이다.

(ii) $\frac{3r}{4}=1$, 즉 $r=\frac{4}{3}$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3r}{4}\right)^n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\left(\frac{3r}{4}\right)^n+2}{3+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{\frac{3a}{4}+2}{3}=\frac{a}{4}+\frac{2}{3}$이다.

(iii) $\frac{3r}{4}>1$, 즉 $r>\frac{4}{3}$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3r}{4}\right)^n=\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\left(\frac{3r}{4}\right)^n+2}{3+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\infty$이다.

(i)~(iii)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n a_n+2^{2n+1}}{3\times4^n+1}=\frac{5}{3}$를 만족시키는

경우는 $r=\frac{4}{3}$일 때이므로 $\frac{a}{4}+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$에서 $a=4$이다.

따라서 $a_n=4\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$이므로 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}=10\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=10\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}}=10$$

답 10

049

점 $A_n(n,\ 0)$을 지나고 기울기가 $2n$인 직선 l의 방정식은

$y=2n(x-n)$

$\therefore\ y=2nx-2n^2$

위의 식에 $x=2n$을 대입하면

$y=4n^2-2n^2=2n^2$

따라서 직선 l이 직선 $x=2n$과 만나는 점의 좌표는

$B_n(2n,\ 2n^2)$

이때 직선 l과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2n}$이고, 이 직선이

점 B_n을 지나므로

$y-2n^2=-\dfrac{1}{2n}(x-2n)$

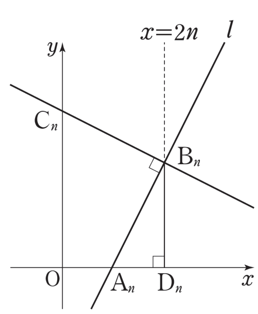
$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2n}x+2n^2+1$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$y=2n^2+1$

따라서 이 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는

$C_n(0,\ 2n^2+1)$



위의 그림과 같이 점 B_n에서 x축에 내린 수선의 발을

D_n이라 하면

$D_n(2n,\ 0)$

$S_n=$(사각형 $OA_nB_nC_n$의 넓이)

$=$(사각형 $OD_nB_nC_n$의 넓이)

$-$(삼각형 $A_nB_nD_n$의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{OD_n}\times(\overline{OC_n}+\overline{B_nD_n})-\frac{1}{2}\times\overline{A_nD_n}\times\overline{B_nD_n}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2n\times(2n^2+1+2n^2)-\frac{1}{2}\times n\times 2n^2$$
$$=4n^3+n-n^3=3n^3+n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n}{n^3}=3$$

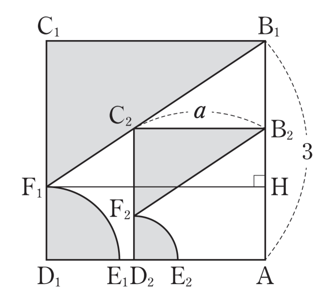
답 3

050

$\overline{AD_1}=3$이고 $\overline{AE_1}:\overline{D_1E_1}=2:1$이므로

$\overline{D_1E_1}=\overline{D_1F_1}=1,\ \overline{C_1F_1}=2$

$\therefore\ S_1=1^2\times\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\times2\times3=3+\dfrac{\pi}{4}$



그림과 같이 점 F_1에서 선분 AB_1에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 B_1F_1H와 삼각형 $B_1B_2C_2$는 서로 닮음이고

$\overline{B_2C_2}=a$라 하면 $\overline{B_1B_2}=3-a$이므로

$\overline{B_2C_2}:\overline{B_1B_2}=\overline{F_1H}:\overline{B_1H}$에서

$a:3-a=3:2,\ 9-3a=2a$

$5a=9$

$\therefore\ a=\dfrac{9}{5}$

따라서 두 그림 $R_1,\ R_2$에 새로 색칠된 부분의 닮음비는

두 정사각형 $AB_1C_1D_1,\ AB_2C_2D_2$의 닮음비

$\overline{AB_1}:\overline{AB_2}=3:\dfrac{9}{5}=1:\dfrac{3}{5}$과 같다.

이와 같은 과정을 계속하므로 모든 자연수 n에 대하여

두 그림 $R_n,\ R_{n+1}$에서 새로 그려진 부분의 닮음비도

$1:\dfrac{3}{5}$이고 넓이의 비는 $1:\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=1:\dfrac{9}{25}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $3+\dfrac{\pi}{4}$, 공비가 $\dfrac{9}{25}$인 등비수열의

첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3+\frac{\pi}{4}}{1-\frac{9}{25}} = \frac{25}{16}\left(3+\frac{\pi}{4}\right)$$

답 ①

051

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_2 = 2,\ a_4 = \frac{4}{5}$에서

$r^2 = \frac{a_4}{a_2} = \frac{\frac{4}{5}}{2} = \frac{2}{5}$이다.

한편 $n \geq 2$일 때 $a_{n-1},\ a_{n+1}$의 등비중항은 a_n이므로

$a_{n-1}a_{n+1} = (a_n)^2$이고

수열 $\{(a_n)^2\}$의 공비는 r^2이다.

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}a_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{(a_2)^2}{1-r^2}$$

$$= \frac{4}{1-\frac{2}{5}} = \frac{20}{3}$$

답 ③

052

두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (단, α는 실수)

$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ (단, β는 실수)라 하자.

$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{7}{2}$에서

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}b_n + \frac{7}{2}\right)$이므로

$\alpha = \frac{1}{2}\beta + \frac{7}{2}$ ……㉠

$b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$에서

$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\right)$이므로

$\beta = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha = 3,\ \beta = -1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 3 + (-1) = 2$

답 2

053

모든 자연수 n에 대하여

$\left| na_n - \frac{2n^2+1}{3n} \right| < \frac{n}{2^n}$이므로

$-\frac{n}{2^n} < na_n - \frac{2n^2+1}{3n} < \frac{n}{2^n}$

$-\frac{1}{2^n} + \frac{2n^2+1}{3n^2} < a_n < \frac{1}{2^n} + \frac{2n^2+1}{3n^2}$

이때

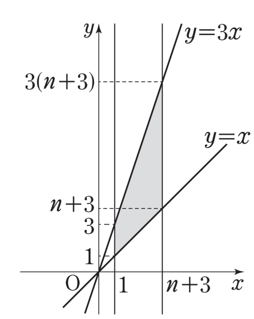
$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^n} + \frac{2n^2+1}{3n^2}\right) = \frac{2}{3}$,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{2n^2+1}{3n^2}\right) = \frac{2}{3}$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$이다.

답 ②

054



$S_n = \frac{1}{2} \times \{2 + 2(n+3)\} \times (n+2)$

$= (n+2)(n+4)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+4)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{24}$$

답 ④

055

조건 (가)에서 $S_n = 3^n + k \times 5^n$이므로

$n \geq 2$일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= (3^n + k\times 5^n) - (3^{n-1} + k \times 5^{n-1})$$
$$= 2\times 3^{n-1} + 4k \times 5^{n-1}$$

이므로 조건 (나)에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n - 5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^{n-1}+4k\times 5^{n-1}}{3^n + k\times 5^n - 5^{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+4k}{3\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+5k-25}$$
$$= \frac{4k}{5k-25} = \frac{8}{5}$$

$\therefore\ k = 10$

답 10

056

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n-1$이고

$a_{3n-1} = 3(3n-1) - 1 = 9n-4$이다.

한편 수열 $\{b_k\}$는 다음과 같다.

k	$a_n \leq k$를 만족시키는 a_n	b_k
1		0
2	2	1
3	2	1
4	2	1
5	2, 5	2
6	2, 5	2
7	2, 5	2
8	2, 5, 8	3
9	2, 5, 8	3
10	2, 5, 8	3
11	2, 5, 8, 11	4
⋮	⋮	⋮

따라서 자연수 m에 대하여

$$b_k = \begin{cases} m-1 & (k = 3m-2) \\ m & (k = 3m-1 \text{ 또는 } k = 3m) \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-1}}{b_{3n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{9n-4}{n} = 9$$

답 ①

057

$x > -1$에서 $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{ax^n + bx}{x^{n+1}+3}$이므로

(i) $-1 < x < 1$일 때

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{ax^n+bx}{x^{n+1}+3} = \frac{bx}{3}$$

(ii) $x = 1$일 때

$$f(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{a\times 1^n + b}{1^{n+1}+3} = \frac{a+b}{4}$$

(iii) $x > 1$일 때

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{a + b\times\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}}{x + 3\times\left(\frac{1}{x}\right)^n} = \frac{a}{x}$$

(i)~(iii)에서 $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x \leq -1) \\ \frac{bx}{3} & (-1 < x < 1) \\ \frac{a+b}{4} & (x = 1) \\ \frac{a}{x} & (x > 1) \end{cases}$ 이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1)$에서

$\lim_{x\to 1-}\frac{bx}{3} = \lim_{x\to 1+}\frac{a}{x} = \frac{a+b}{4}$이어야 한다.

즉, $\frac{b}{3} = a,\ a = \frac{a+b}{4}$에서 $b = 3a$ ……㉠

또한 함수 $f(x)$는 $x = -1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1+} f(x) = f(-1)$에서

$\lim_{x\to -1-}(2x-3) = \lim_{x\to -1+}\frac{bx}{3} = -5$이어야 한다.

즉, $-\dfrac{b}{3}=-5$이므로 $b=15$, $a=5$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a+b=5+15=20$

답 20

058

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{9}{4},\qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{b_1}{1-r}=-\frac{3}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n&=\frac{a_1}{1-r}+\frac{b_1}{1-r}\\&=\frac{a_1+b_1}{1-r}=\frac{2}{1-r}\ (\because\ \text{조건 (가)})\\&=\frac{9}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}\ (\because\ \text{조건 (나)})\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{2}{1-r}=\dfrac{3}{2}$에서 $r=-\dfrac{1}{3}$이다.

이때 ㉠에서 $\dfrac{a_1}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{9}{4}$이므로

$a_1=3$, $b_1=-1$ ($\because$ 조건 (가))

따라서

$a_n=3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$, $b_n=(-1)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$에서

$$\begin{aligned}(a_n-b_n)^2&=\left\{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}-(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}^2\\&=\left[\{3-(-1)\}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]^2\\&=16\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

이므로 수열 $\{(a_n-b_n)^2\}$은 첫째항이 16이고 공비가 $\dfrac{1}{9}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2=\frac{16}{1-\dfrac{1}{9}}=18$$

답 18

059

원점 O를 지나고 원 $(x-2n)^2+y^2=n^2+n$에 접하는 기울기가 a_n인 접선의 방정식은 $y=a_nx$이고,

점 $(2n,\ 0)$과 직선 $a_nx-y=0$ 사이의 거리는

원의 반지름의 길이인 $\sqrt{n^2+n}$과 같다.

즉, $\dfrac{|2na_n|}{\sqrt{(a_n)^2+1}}=\sqrt{n^2+n}$에서

$4n^2(a_n)^2=(n^2+n)\{(a_n)^2+1\}$,

$(a_n)^2=\dfrac{n+1}{3n-1}$, $|a_n|=\sqrt{\dfrac{n+1}{3n-1}}$

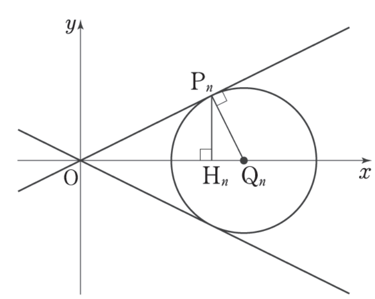
$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{n\to\infty}|a_n|&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{3n-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}}\\&=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

다른풀이

원 $(x-2n)^2+y^2=n^2+n$의 중심을 Q_n이라 하고,

원점 O를 지나고 이 원에 접하는 직선의 한 접점을 P_n,

점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.



삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{O}\mathrm{Q}_n$은 직각삼각형이고

$\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{(2n)^2-(\sqrt{n^2+n})^2}=\sqrt{3n^2-n}$

이므로

$$|a_n|=\frac{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}}{\overline{\mathrm{OH}_n}}=\frac{\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n}}{\overline{\mathrm{OP}_n}}=\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{3n^2-n}}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{n\to\infty}|a_n|&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{3n^2-n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{3-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

답 ⑤

060

직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = 3\sqrt{2}$

정사각형 DEFG의 한 변의 길이를 r라 하자.

두 삼각형 BDG, CEF는 각각

$\angle BDG = \frac{\pi}{2}$, $\angle CEF = \frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BD} = \overline{CE} = r$

따라서 $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{CE} = 3r$이므로

$3r = 3\sqrt{2} \qquad \therefore\ r = \sqrt{2}$

$\therefore\ S_1 = (\sqrt{2})^2 = 2$

두 직각삼각형 ABC, HBD는 서로 닮음이고 닮음비는

$\overline{BC} : \overline{BD} = 3 : 1$, 즉 $1 : \frac{1}{3}$이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{9}$이다.

이때 새로 그려지는 사각형의 개수가 2배씩 늘어나므로 두

그림 R_1, R_2에 새로 색칠된 부분의 넓이의 비는 $1 : \frac{2}{9}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{2}{9}$인 등비수열의

첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{1-\frac{2}{9}} = \frac{18}{7}$$

답 ②

061

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n = a \times r^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{a_n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{a \times r^{n-1} + 3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 2$$

이때 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{4}\right)^n = 2$에서

$r = 4,\ a = 8$

따라서 $a_n = 8 \times 4^{n-1} = 2 \times 4^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \times 4^{2n-1}} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{2}{15}$$

답 ②

062

공비가 $x^2 - x - 1$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1 < x^2 - x - 1 \le 1$을 만족시켜야 한다.

(i) $-1 < x^2 - x - 1$일 때

$x^2 - x > 0,\ x(x-1) > 0$

$\therefore\ x < 0$ 또는 $x > 1$

(ii) $x^2 - x - 1 \le 1$일 때

$x^2 - x - 2 \le 0,\ (x+1)(x-2) \le 0$

$\therefore\ -1 \le x \le 2$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 x의 값의 범위는

$-1 \le x < 0$ 또는 $1 < x \le 2$

따라서 구하는 정수 x의 합은

$-1 + 2 = 1$

답 ④

063

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+6n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{an^2+6n}\right)^2 - n^2}{\sqrt{an^2+6n} + n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(a-1)n^2 + 6n}{\sqrt{an^2+6n} + n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(a-1)n + 6}{\sqrt{a + \frac{6}{n}} + 1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 극한값이 존재해야 하므로

$a - 1 = 0 \qquad \therefore\ a = 1$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a-1)n + 6}{\sqrt{a + \frac{6}{n}} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{6}{n}} + 1}$$

$$= \frac{6}{1+1} = 3 = b$$

$\therefore\ a + b = 1 + 3 = 4$

답 4

064

함수 $\sin \frac{(x-1)\pi}{3}$의 주기는 6이므로

$\sin 0 = \sin \pi = \cdots = 0$,

$\sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} = \cdots = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\frac{5\pi}{3}=\cdots=-\frac{\sqrt{3}}{2}$에서

수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	0	$\frac{\sqrt{3}}{2^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2^5}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2^6}$

7	8	9	10	11	12	$\cdots$
0	$\frac{\sqrt{3}}{2^8}$	$\frac{\sqrt{3}}{2^9}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2^{11}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2^{12}}$	$\cdots$

이때 구하는 값 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은

첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{2^2}$이고 공비가 $-\frac{1}{8}$인 등비급수와

첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{2^3}$이고 공비가 $-\frac{1}{8}$인 등비급수의 합과 같다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2^2}}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2^3}}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

065

조건 (가)에서

$$\frac{9^{n+1}-3}{8}<a_n+b_n<1+3^2+3^4+\cdots+3^{2n}\quad\cdots\cdots㉠$$

조건 (나)에서

$$-\frac{3\times9^n+1}{8}<b_n-a_n<-(3+3^3+3^5+\cdots+3^{2n-1})$$

$$\cdots\cdots㉡$$

㉠+㉡에서

$$\frac{3\times9^n-2}{4}<2b_n<\frac{1-(-3)^{2n+1}}{1-(-3)},$$

$$\frac{3\times9^n-2}{8}<b_n<\frac{1+3^{2n+1}}{8}$$이므로

$$\frac{2(3\times9^n-2)}{3^n+9^n}<\frac{16b_n}{3^n+9^n}<\frac{2(1+3\times9^n)}{3^n+9^n}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(3\times9^n-2)}{3^n+9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(3-\frac{2}{9^n}\right)}{\frac{1}{3^n}+1}=6,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+3\times9^n)}{3^n+9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{1}{9^n}+3\right)}{\frac{1}{3^n}+1}=6$$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{16b_n}{3^n+9^n}=6$이다.

답 6

066

직선 $y=n$이 곡선 $y=\log_3 x$와 만나는 점의 x좌표는

$\log_3 x=n$에서 $x=3^n$이다.

$\therefore\ \mathrm{P}_n(3^n,\ n),\ \mathrm{P}_{n+1}(3^{n+1},\ n+1)$

또한 $\mathrm{Q}_n(0,\ n),\ \mathrm{Q}_{n+1}(0,\ n+1)$이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=3^n,\ \overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}=3^{n+1},\ \overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}}=1,$

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\sqrt{(3^{n+1}-3^n)^2+\{(n+1)-n\}^2}$$
$$=\sqrt{(2\times3^n)^2+1}=\sqrt{4\times9^n+1}$$

이다. 따라서

$$L_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}+\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}+\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$
$$=3^n+3^{n+1}+1+\sqrt{4\times9^n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}+1+\sqrt{4\times9^n+1}}{3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+3+\frac{1}{3^n}+\sqrt{4+\frac{1}{9^n}}\right)$$
$$=1+3+0+\sqrt{4+0}=6$$

답 6

067

(i) $0<k<4$일 때

$0<\frac{k}{4}<1$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{k^{n+1}+3^n}{3\times k^n+4^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{k\times\left(\frac{k}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3\times\left(\frac{k}{4}\right)^n+1}=0$$

(ii) $k=4$일 때

$$a_4=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+3^n}{3\times4^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3+1}=1$$

(iii) $k>4$일 때

$0<\dfrac{4}{k}<1$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{k^{n+1}+3^n}{3\times k^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{k+\left(\frac{3}{k}\right)^n}{3+\left(\frac{4}{k}\right)^n}=\frac{k}{3}$$

(ⅰ)~(iii)에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{3}a_k+a_4+\sum_{k=5}^{10}a_k$$
$$=0+1+\sum_{k=5}^{10}\frac{k}{3}$$
$$=1+\frac{1}{3}\times\frac{6\times(5+10)}{2}=16$$

답 16

068

$\dfrac{2-x}{2x}=n$에서

$-x+2=2nx,\ x=\dfrac{2}{2n+1}$

따라서 곡선 $y=\dfrac{2-x}{2x}$와 직선 $y=n$이 만나는 점의 좌표는

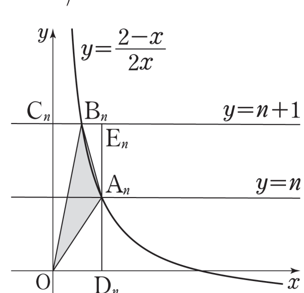
$\mathrm{A}_n\left(\dfrac{2}{2n+1},\ n\right)$

$\dfrac{2-x}{2x}=n+1$에서

$-x+2=2nx+2x,\ x=\dfrac{2}{2n+3}$

따라서 곡선 $y=\dfrac{2-x}{2x}$와 직선 $y=n+1$이 만나는 점의 좌표는

$\mathrm{B}_n\left(\dfrac{2}{2n+3},\ n+1\right)$



그림과 같이 직선 $y=n+1$이 y축과 만나는 점을 C_n, 점 A_n을 지나고 y축과 평행한 직선이 x축 및 직선 $y=n+1$과 만나는 점을 각각 D_n, E_n이라 하면

삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이는

$S_n=$(직사각형 $\mathrm{OC}_n\mathrm{E}_n\mathrm{D}_n$의 넓이)

$-$(삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{D}_n$의 넓이$+$삼각형 $\mathrm{OB}_n\mathrm{C}_n$의 넓이

$+$삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{E}_n\mathrm{B}_n$의 넓이)

$$=\frac{2(n+1)}{2n+1}-\frac{1}{2}\left\{\frac{2n}{2n+1}+\frac{2(n+1)}{2n+3}+\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n+3}\right)\times1\right\}$$
$$=\frac{n+1}{2n+1}-\frac{n}{2n+3}$$
$$=\frac{(n+1)(2n+3)-n(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{4n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4n+3}\times\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+3)}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{6}$$

답 ②

069

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 모든 항이 자연수이므로 a, r는 모두 자연수이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{ar^{n-1}}{\frac{a(r^n-1)}{r-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r^{n-1}}{r^n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r^n-1}=1-\frac{1}{r}$$

문제의 조건에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}>\frac{7}{8}$이므로

$1-\frac{1}{r}>\frac{7}{8}$에서 $\frac{1}{r}<\frac{1}{8}$

$\therefore\ r>8$ ……㉠

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+3^{2n+1}}{4a_n+9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{ar^n+3\times 9^n}{4ar^{n-1}+9^n}$에서

(ⅰ) $r<9$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ar^n+3\times 9^n}{4ar^{n-1}+9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\frac{r}{9}\right)^n+3}{4a\left(\frac{r}{9}\right)^n\times\frac{1}{r}+1}$$

$$=\frac{0+3}{0+1}=3$$

(ⅱ) $r=9$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ar^n+3\times 9^n}{4ar^{n-1}+9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 9^n+3\times 9^n}{4a\times 9^{n-1}+9^n}$$

$$=\frac{a+3}{\frac{4}{9}a+1}$$

$$=\frac{9a+27}{4a+9}$$

$\frac{9a+27}{4a+9}=3$에서 $9a+27=12a+27$, 즉 $a=0$

이때 a는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $r>9$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ar^n+3\times 9^n}{4ar^{n-1}+9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+3\times\left(\frac{9}{r}\right)^n}{\frac{4a}{r}+\left(\frac{9}{r}\right)^n}$$

$$=\frac{a}{\frac{4a}{r}}=\frac{r}{4}$$

$\frac{r}{4}=3$에서 $r=12$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 조건을 만족시키는 등비수열 $\{a_n\}$의 공비 r는

$r=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$ ……㉡

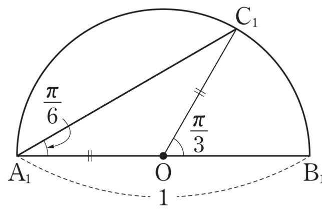
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 r의 값은 $r=12$

$$\therefore\ \frac{S_2}{a_2}=\frac{\frac{a(r^2-1)}{r-1}}{ar}=1+\frac{1}{r}$$

$$=1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}$$

답 ⑤

070



선분 A_1B_1의 중점을 O라 하면

$\angle C_1OB_1=2\angle C_1A_1B_1=\frac{\pi}{3}$,

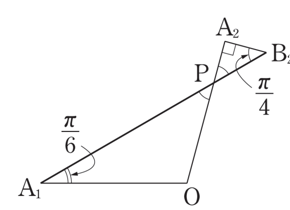
$\angle C_1OA_1=\frac{2}{3}\pi$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sin\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{\pi}{24}=\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{48}$$

한편 선분 OA_2와 선분 A_1B_2가 만나는 점을 P라 하면

$\angle A_1PO=\frac{\pi}{4}$ ($\because$ 맞꼭지각)



이때 삼각형 A_1OP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$$에서

$$\overline{OP}=\frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

이고 $\overline{A_1B_1}=1$이므로

$$\overline{A_2B_2}=\overline{A_2P}=\frac{1}{2}-\overline{OP}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

따라서 두 그림 R_1, R_2에서 새로 색칠된 부분의 닮음비는

두 반원의 지름 A_1B_1, A_2B_2의 길이의 비 $1:\frac{2-\sqrt{2}}{4}$와

같다.

이와 같은 과정을 계속하므로 두 그림 R_n, R_{n+1}에서 새로

색칠된 부분의 닮음비도 $1:\frac{2-\sqrt{2}}{4}$이고 넓이의 비는

$1 : \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 : \dfrac{3-2\sqrt{2}}{8}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{48}$, 공비가 $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{8}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{48}}{1-\dfrac{3-2\sqrt{2}}{8}} = \dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{48-6(3-2\sqrt{2})}$$
$$= \dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{30+12\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{6(5+2\sqrt{2})}$$
$$= \dfrac{(3\sqrt{3}+2\pi)(5-2\sqrt{2})}{102}$$

답 ③

071

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{na_n-3}{n}$이 수렴하므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{na_n-3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a_n - \dfrac{3}{n}\right) = 0$에서

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n - \dfrac{3n^3-1}{n^3+2n^2}\right)$이 수렴하므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(b_n - \dfrac{3n^3-1}{n^3+2n^2}\right) = 0$에서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 3$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 0+3 = 3$

답 3

072

$S_n = 6n^2 - 8n$이므로

$n=1$일 때 $a_1 = S_1 = -2$ ······㉠

$n \geq 2$일 때

$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= (6n^2-8n) - \{6(n-1)^2 - 8(n-1)\}$
$= 12n - 14$ ······㉡

㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값이 ㉠과 같다.

$\therefore a_n = 12n - 14$ (단, $n \geq 1$인 자연수)

$T_n = \dfrac{1}{4}n^2 + 2n$이므로

$n=1$일 때 $b_1 = T_1 = \dfrac{9}{4}$ ······㉢

$n \geq 2$일 때

$b_n = T_n - T_{n-1}$
$= \left(\dfrac{1}{4}n^2+2n\right) - \left\{\dfrac{1}{4}(n-1)^2 + 2(n-1)\right\}$
$= \dfrac{1}{2}n + \dfrac{7}{4}$ ······㉣

㉣에 $n=1$을 대입하여 얻은 값이 ㉢과 같다.

$\therefore b_n = \dfrac{1}{2}n + \dfrac{7}{4}$ (단, $n \geq 1$인 자연수)

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{12n-14}{\dfrac{1}{2}n+\dfrac{7}{4}} = \dfrac{12}{\dfrac{1}{2}} = 24$

답 24

참고

첫째항이 a, 공차가 $d(d \neq 0)$인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \dfrac{d}{2}n^2 + \dfrac{2a-d}{2}n$

이므로 S_n은 최고차항의 계수가 (공차)$\times\dfrac{1}{2}$인 n에 대한 이차식이다.

역으로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 n에 관한 이차식 $S_n = pn^2 + qn$ (단, p, q는 상수)

인 경우 일반항 $a_n = S_n - S_{n-1}$은 n에 관한 일차식이고,

이때 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $2p$인 등차수열이다.

따라서 문제의

$S_n = 6n^2 - 8n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $6\times2=12$인 등차수열이고,

$T_n = \dfrac{1}{4}n^2 + 2n$에서 수열 $\{b_n\}$은 공차가 $\dfrac{1}{4}\times2 = \dfrac{1}{2}$인

등차수열임을 알 수도 있다.

073

조건 (가)에서 $5n^2+2 > 0$이므로

조건 (나)의 부등식 $4n^2+2 \leq a_n + n^2b_n \leq 4n^2+5$에서

$$\dfrac{4n^2+2}{5n^2+2} \leq \dfrac{a_n+n^2b_n}{5n^2+2} \leq \dfrac{4n^2+5}{5n^2+2}$$

이때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+2}{5n^2+2} = \dfrac{4}{5}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+5}{5n^2+2} = \dfrac{4}{5}$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n+n^2b_n}{5n^2+2} = \dfrac{4}{5}$$

조건 (가)에서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{5n^2+2} = 2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2b_n}{5n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+n^2b_n}{5n^2+2}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{5n^2+2}$$
$$=\frac{4}{5}-2=-\frac{6}{5}$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2b_n}{5n^2+2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+2}{n^2}$$
$$=-\frac{6}{5}\times5=-6$$
$$\therefore\ -5\times\lim_{n\to\infty}b_n=-5\times(-6)=30$$

답 30

074

$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=4,\ a_4=1,\ a_5=0,\ a_6=1,$

$a_7=4,\ a_8=4,\ a_9=1,\ a_{10}=0,\ a_{11}=1,\ \cdots$

$\therefore\ a_{5n-4}=1,\ a_{5n-3}=4,\ a_{5n-2}=4,$

$a_{5n-1}=1,\ a_{5n}=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$f(5n)=\sum_{k=1}^{5n}a_k=10n$이므로

$f(5^n)=f(5\times5^{n-1})=10\times5^{n-1}$

$f(5^{n+1})=f(5\times5^n)=10\times5^n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(5^{n+1})-f(5^n)}{f(5^n)+5^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10\times5^n-10\times5^{n-1}}{10\times5^{n-1}+5^n}$$
$$=\frac{10-2}{2+1}=\frac{8}{3}$$

$\therefore\ p+q=3+8=11$

답 11

075

$a_na_{n+1}=\frac{4}{3}$에서

$n=1$일 때 $a_2=\frac{4}{3}\times\frac{1}{a_1}=\frac{2}{3}$

$n=2$일 때 $a_3=\frac{4}{3}\times\frac{1}{a_2}=2$

$n=3$일 때 $a_4=\frac{4}{3}\times\frac{1}{a_3}=\frac{2}{3}$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 자연수 m에 대하여

$$a_n=\begin{cases}2 & (n=2m-1)\\ \frac{2}{3} & (n=2m)\end{cases}$$ 이다.

$a_n+a_{n+1}=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$이므로 $(a_n+a_{n+1})^2=\frac{64}{9}$

n이 홀수일 때 $a_n-a_{n+1}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$이고,

n이 짝수일 때 $a_n-a_{n+1}=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$이므로

$(a_n-a_{n+1})^2=\frac{16}{9}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}\right)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(a_n-a_{n+1})^2}{(a_n+a_{n+1})^2}\right\}^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{16}{9}}{\frac{64}{9}}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

답 ②

076

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 r라 하면

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공비가 r^2인 등비수열이고,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$이 0이 아닌 값에 수렴하므로

$0<r^2<1$

$\therefore\ -1<r<0$ 또는 $0<r<1$

그런데 $0<r<1$이면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-3a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2a_n)=-2\times\frac{a}{1-r}\neq0$$

으로 모순이다.

따라서 $-1<r<0$이고,

이때 수열 $\{|a_n|\}$은 공비가 $-r$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-3a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|-3\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$
$$=\frac{a}{1-(-r)}-\frac{3a}{1-r}=0$$

에서 $\frac{a}{1+r}=\frac{3a}{1-r}$

$1-r=3(1+r)\ (\because\ a>0)\qquad\therefore\ r=-\frac{1}{2}$

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a이고 공비가 $r^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}=\frac{a}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}a=\frac{8}{3} \qquad \therefore\ a=2$$

따라서 수열 $\{a_{3n-1}\}$은 첫째항이 $a_2=ar=-1$이고 공비가 $r^3=-\frac{1}{8}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n-1}=\frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}=-\frac{8}{9}$$

답 ②

077

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_{n+1}}{a_2+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+ar^n}{ar+ar^{n-1}}$$

(i) $r>1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a+ar^n}{ar+ar^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r^n}+a}{\frac{a}{r^{n-1}}+\frac{a}{r}}$$

$$=\frac{a}{\frac{a}{r}}=r=\frac{3}{2}$$

(ii) $r=1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a+ar^n}{ar+ar^{n-1}}=\frac{2a}{2a}=1$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $0<r<1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a+ar^n}{ar+ar^{n-1}}=\frac{a}{ar}=\frac{1}{r}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ r=\frac{2}{3}$$

(i)~(iii)에서 가능한 r의 값은 $\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{2}{3}$이다.

한편 수열 $\left\{\frac{1}{(a_n)^2}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a^2}$이고 공비가 $\frac{1}{r^2}$인 등비수열이므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a_n)^2}$이 수렴하려면 $0<\frac{1}{r^2}<1$이어야 한다.

따라서 $r=\frac{3}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a_n)^2}=\frac{1}{a^2\left(1-\frac{1}{r^2}\right)}=\frac{9}{5a^2}$$

문제의 조건에서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a_n)^2}=5$이므로

$$\frac{9}{5a^2}=5\text{에서 } a^2=\frac{9}{25} \qquad \therefore\ a=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a\left(1-\frac{1}{r}\right)}=\frac{5}{3}\times 3=5$$

답 5

078

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{n^2+(2-n)^2}=\sqrt{2n^2-4n+4}$$

점 A는 원 $x^2+y^2=2$와 직선 $x+y=2$의 교점이므로

점 A의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(n-1)^2+(-n+1)^2}$$
$$=\sqrt{2(n-1)^2}$$

따라서 삼각형 OAP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2(n-1)^2}=n-1$$

이때 두 삼각형 OAP, AHP가 서로 닮음이고 닮음비는

$$\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{2n^2-4n+4}\ :\ \sqrt{2n^2-4n+2}$$

따라서 두 삼각형 OAP, AHP의 넓이의 비는

$2n^2-4n+4:2n^2-4n+2$

$$\therefore\ S_n=(n-1)\times\frac{2(n-1)^2}{2n^2-4n+4}=\frac{(n-1)^3}{n^2-2n+2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3}{n(n^2-2n+2)}=1$$

답 ③

079

(i) $n^2f(k)-2\ge 0$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|n^2f(k)-2|-n^2f(k)}{n^2+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2f(k)-2-n^2f(k)}{n^2+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n^2+1}=0\neq 2$$

즉, 주어진 식을 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $n^2f(k)-2<0$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|n^2f(k)-2|-n^2f(k)}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2f(k)+2-n^2f(k)}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2f(k)+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=-2f(k)=2$$

$\therefore\ f(k)=-1$

조건 (가)에서 $f(k)=-1$을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$의 교점의 개수가 1이어야 한다.

즉, 이차함수 $f(x)$는 최솟값 -1을 갖는다.

(i), (ii)에서 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-a)^2-1$ (단, a는 상수)

한편 조건 (나)에서

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x)+1\}^n=\lim_{n\to\infty}(x-a)^{2n}$$

위의 극한값이 존재하기 위한 x의 값의 범위는

$-1\le x-a\le 1 \qquad \therefore\ a-1\le x\le a+1$

이때 이를 만족시키는 실수 x의 최댓값이 3이므로

$a+1=3 \qquad \therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=(x-2)^2-1$이므로

$f(5)=3^2-1=8$

답 8

080

직각삼각형 AB_1C_1에서 $\angle AC_1B_1=\frac{\pi}{3}$이고

직각이등변삼각형 AB_2C_1에서 $\angle AC_1B_2=\frac{\pi}{4}$이므로

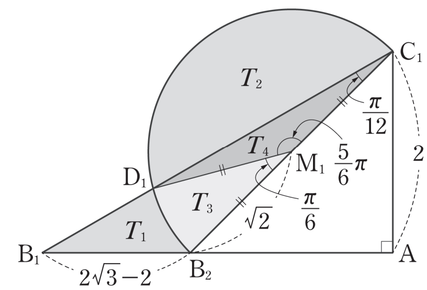
$\angle B_1C_1B_2=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

선분 B_2C_1의 중점을 M_1이라 하면

$\overline{B_2M_1}=\overline{C_1M_1}=\overline{D_1M_1}=\sqrt{2}$

이고 원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여

$\angle B_2M_1D_1=\frac{\pi}{12}\times 2=\frac{\pi}{6}$



두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분의 넓이를 T_1, 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분의 넓이를 T_2라 하고, 부채꼴 $B_2D_1M_1$의 넓이를 T_3, 이등변삼각형 $C_1D_1M_1$의 넓이를 T_4라 하면

$$T_3=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6},$$

$$T_4=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}\text{이므로}$$

$T_1=$(삼각형 $B_1B_2C_1$의 넓이)$-T_3-T_4$

$$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}-2)\times 2-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}-\frac{5}{2}$$

$T_2=$(부채꼴 $C_1D_1M_1$의 넓이)$-T_4$

$$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ S_1=T_1+T_2=2\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi-3$$

한편 두 그림 R_1, R_2에서 새로 색칠된 부분의 닮음비는 두 직각삼각형 AB_1C_1, AB_2C_2의 닮음비

$\overline{AB_1}:\overline{AB_2}=1:\frac{1}{\sqrt{3}}$과 같다.

이와 같은 과정을 계속하므로 모든 자연수 n에 대하여 두 그림 R_n, R_{n+1}에서 새로 색칠된 부분의 닮음비도

$1:\frac{1}{\sqrt{3}}$이고 넓이의 비는 $1:\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=1:\frac{1}{3}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $2\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi-3$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi-3}{1-\frac{1}{3}}=3\sqrt{3}+\pi-\frac{9}{2}$$

답 ①

Ⅱ 미분법

081

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)+\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

$$=\sin\theta=\frac{4}{5}$$

이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{3}{5}\ \left(\because\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{5}{3}$$

답 ②

082

$f(x)=e^x-e^{-x}$에서

$f'(x)=e^x+e^{-x}$이므로

$$f'(\ln 3)=e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$$g'(f(\ln 3))=\frac{1}{f'(\ln 3)}=\frac{3}{10}$$

답 ④

083

$x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t$에서

$$\frac{dx}{dt}=e^t(\sin t+\cos t),\ \frac{dy}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+\cos t)}$$

$$=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$$

이 곡선 위의 점 $(0,\ 1)$은

$x=e^t\sin t=0$에서 $\sin t=0$

$t=0$일 때이므로 $\left(\because\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$

구하는 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos 0-\sin 0}{\sin 0+\cos 0}=\frac{1-0}{0+1}=1\text{이다.}$$

답 ③

084

$x^2\le(e^x-1)f(x)\le x\tan x$에서

$x\ne0$일 때 $\frac{x}{e^x-1}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{\tan x}{e^x-1}$이다.

이때 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1$,

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\times\frac{x}{e^x-1}\right)=1\times1=1$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$이다.

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(2x)}{2x}\times2\right\}$$

$$=1\times2=2$$

답 ④

085

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

즉, $\lim\limits_{x\to0}\frac{ax}{e^x+x+b}=2b$에서 (단, a, b는 0이 아닌 상수)

0이 아닌 극한값이 존재하고

$x\to0$일 때 (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to0}(e^x+x+b)=1+b=0$에서 $b=-1$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{ax}{e^x+x-1}=\lim_{x\to0}\frac{a}{\frac{e^x-1}{x}+1}$$

$$=\frac{a}{1+1}=-2$$

에서 $a=-4$이다.

$$\therefore\ a+b=(-4)+(-1)=-5$$

답 ⑤

086

$f(x)=\sqrt{x^3+2x^2}$ 에서

$$f'(x)=\left\{(x^3+2x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}'$$

$$=\frac{1}{2}(x^3+2x^2)^{-\frac{1}{2}}(x^3+2x^2)'$$

$$=\frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2}}$$

$g(x)=\sin(3x)+2$에서 $g'(x)=3\cos(3x)$

이때 합성함수의 미분법에 의하여

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$$h'(0)=f'(g(0))g'(0)$$

$$=f'(2)g'(0)$$

$$=\frac{12+8}{2\sqrt{8+8}}\times 3=\frac{15}{2}$$

답 ④

087

$x=3e^t-3$에서 $\dfrac{dx}{dt}=3e^t$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=3e^t$이고,

$y=e^{2t}-1$에서 $\dfrac{dy}{dt}=2e^{2t}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=4e^{2t}$이므로

점 P의 시각 t에서의 가속도는 $(3e^t,\ 4e^{2t})$이다.

한편, 점 P가 직선 $y=x$와 만나는 시각을 $k\ (k>0)$라 하면

$e^{2k}-1=3e^k-3$이므로

$e^{2k}-3e^k+2=0$, $(e^k-1)(e^k-2)=0$

$\therefore\ e^k=2\ (\because\ e^k>1)$

따라서 점 P가 직선 $y=x$와 만나는 순간의 가속도는

$(3\times 2,\ 4\times 2^2)$ 즉, $(6,\ 16)$이므로

구하는 가속도의 크기는 $\sqrt{6^2+16^2}=2\sqrt{73}$ 이다.

답 ③

088

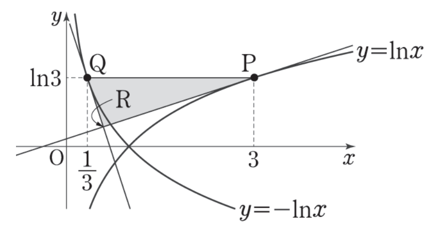
$y=\ln x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$이므로

곡선 $y=\ln x$ 위의 점 P$(3,\ \ln 3)$에서의 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{3}(x-3)+\ln 3$에서 $y=\dfrac{1}{3}x-1+\ln 3$

곡선 $y=-\ln x$ 위의 점 Q$\left(\dfrac{1}{3},\ \ln 3\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=-3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\ln 3$에서 $y=-3x+1+\ln 3$



이때 두 접선의 교점의 x좌표는

$\dfrac{1}{3}x-1+\ln 3=-3x+1+\ln 3$에서 $x=\dfrac{3}{5}$

이므로 점 R의 좌표는 R$\left(\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}+\ln 3\right)$이고

점 R와 직선 PQ 사이의 거리는

$\ln 3-\left(-\dfrac{4}{5}+\ln 3\right)=\dfrac{4}{5}$이다.

$\therefore$ (삼각형 PQR의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\left(3-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{15}$

다른풀이

$y=\ln x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$이므로

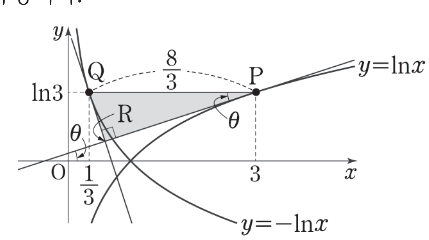
곡선 $y=\ln x$ 위의 점 P$(3,\ \ln 3)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{1}{3}$이고 곡선 $y=-\ln x$ 위의 점 Q$\left(\dfrac{1}{3},\ \ln 3\right)$에서의 접선의

기울기는 -3이므로 두 접선은 서로 수직이다.

즉, 삼각형 PQR는 빗변 PQ의 길이가 $3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$인

직각삼각형이다.



곡선 $y=\ln x$ 위의 점 P에서의 접선이 x축의 양의 방향과

이루는 각의 크기를 $\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$이고

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\times\cos\theta=\dfrac{8}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\times\sin\theta=\dfrac{8}{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{8}{3\sqrt{10}}$

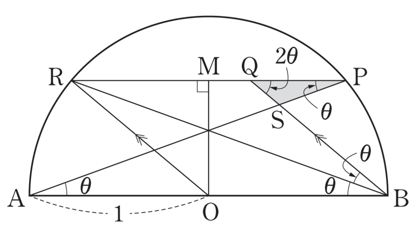
$\therefore$ (삼각형 PQR의 넓이) $= \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{QR}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{8}{\sqrt{10}} \times \frac{8}{3\sqrt{10}}$

$= \frac{16}{15}$

답 ②

089



사각형 OBQR가 마름모이므로 점 R는 호 AB 위에 있고 세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있으므로 두 직선 AB, PR는 서로 평행하다.

$\therefore \angle QPS = \angle PAB = \theta$

$\angle PQS = \angle QBO = 2\angle RBA = 2\angle PAB = 2\theta$

삼각형 PQS에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{PS}}{\sin 2\theta}$, 즉 $\overline{PS} = \overline{PQ} \times \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$

선분 PR의 중점을 M이라 하면 $\angle OMR = \frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{MR} = \cos 2\theta$, $\overline{PQ} = \overline{PR} - \overline{QR} = 2\cos 2\theta - 1$

$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{PS} \times \sin\theta$

$= \frac{(2\cos 2\theta - 1)^2}{2} \times \frac{\sin 2\theta \sin\theta}{\sin 3\theta}$

$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta}$

$= \lim_{\theta \to 0+} \left\{ \frac{(2\cos 2\theta - 1)^2}{3} \times \frac{\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{\sin 3\theta}{3\theta}} \right\}$

$= \frac{(2 \times 1 - 1)^2}{3} \times \frac{1 \times 1}{1} = \frac{1}{3}$

답 ④

090

$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$라 하면

$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2 e^x$

이때 $f'(x) \geq 0$이므로

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고,

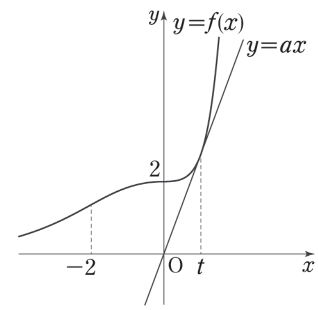
$f''(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$에서

$x = 0$, $x = -2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

곡선 $y = f(x)$의 변곡점은 $(-2,\ 10e^{-2})$, $(0,\ 2)$이다.

또한 $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2x + 2)e^x = 0$이므로

함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



한편, 직선 $y = ax$는 원점을 지나고 기울기가 a이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq ax$가 성립하도록 하는 양수 a의 최댓값은 원점에서 곡선 $y = f(x)$에 그은 접선의 기울기이다.

이때 접점의 x좌표를 $t\ (t > 0)$라 하면

$\frac{f(t) - 0}{t - 0} = f'(t)$이므로

$\frac{(t^2 - 2t + 2)e^t}{t} = t^2 e^t$,

$t^3 - t^2 + 2t - 2 = 0$, $(t-1)(t^2+2) = 0$

따라서 $t = 1$이므로 상수 a의 최댓값은

$f'(1) = e$이다.

답 ①

091

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$에서 극한값이 존재하고

$x \to 0$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$이다. ……㉠

한편

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + f(2x^2))}{x^2}$

$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\ln(1 + f(2x^2))}{f(2x^2)} \times \frac{f(2x^2)}{x^2} \right\}$에서

$2x^2 = t$라 하면 $x \to 0$일 때, $t \to 0$이고 $f(t) \to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+f(2x^2))}{f(2x^2)}\times\frac{f(2x^2)}{x^2}\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\ln(1+f(t))}{f(t)}\times\frac{2f(t)}{t}\right\}$$

$=1\times 4=4$ ($\because$ ㉠)

답 ②

092

$x=\ln(t+1)$, $y=\frac{1}{2}(t^2+t)$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+1},\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}(2t+1)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}(2t+1)}{\frac{1}{t+1}}$$

$$=\frac{(2t+1)(t+1)}{2}$$

이때 $\frac{(2a+1)(a+1)}{2}=3$이므로

$2a^2+3a+1=6$, $(a-1)(2a+5)=0$

$\therefore\ a=1$ ($\because\ a>0$)

답 ①

093

$x^3+3xy-y^2=-9$를 x에 대하여 미분하면

$3x^2+3y+3xy'-2yy'=0$

$\therefore\ y'=-\frac{3x^2+3y}{3x-2y}$ (단, $3x-2y\neq 0$)

이때 곡선 위의 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{3}{7}$이므로 접선의 방정식은 $y=\frac{3}{7}(x-1)-2$이다.

이 접선이 점 $(a,\ 1)$을 지나므로

$1=\frac{3}{7}(a-1)-2$

$\therefore\ a=8$

답 8

094

$f(x)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^2$이라 하면

$f'(x)=\left(\ln\frac{x}{a}\right)\times\frac{1}{x}$,

$$f''(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1-\ln\frac{x}{a}}{x^2}$$

$f''(x)=0$에서 $\ln\frac{x}{a}=1$, $\frac{x}{a}=e$

즉, $x=ae$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

변곡점은 $\left(ae,\ \frac{1}{2}\right)$이다.

이 변곡점이 직선 $y=\frac{1}{4e}x$ 위에 있으므로

$\frac{1}{2}=\frac{1}{4e}\times ae$

$\therefore\ a=2$

답 ①

095

$\lim_{x\to 1}\frac{4f(x)-\pi}{x-1}=8$에서 극한값이 존재하고

$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

따라서 $4f(1)-\pi=0$, 즉 $f(1)=\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{4f(x)-\pi}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left\{4\times\frac{f(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{4\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$

$$=4\times f'(1)=8$$

$\therefore\ f'(1)=2$

한편, $g(x)=\sin^2 f(x)$이므로

$g(1)=\sin^2 f(1)=\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$이고,

$g'(x)=2\sin f(x)\times\cos f(x)\times f'(x)$에서

$$g'(1)=2\sin f(1)\times\cos f(1)\times f'(1)$$

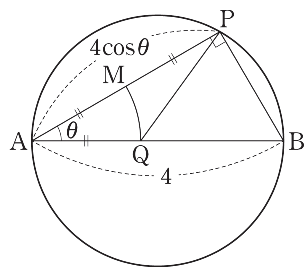
$$=2\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{4}\times 2$$

$$=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=2$$

$\therefore\ \frac{1}{g(1)}+g'(1)=2+2=4$

답 4

096



원의 지름의 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle \mathrm{APB} = \frac{\pi}{2}$

따라서 직각삼각형 APB에서

$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta = 4\cos\theta$

점 M이 선분 AP의 중점이므로

$\overline{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AP}} = 2\cos\theta$

점 Q는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AM}}$인 원 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{AM}} = 2\cos\theta$

$\therefore\ S(\theta) =$(삼각형 APQ의 넓이)$-$(부채꼴 AMQ의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{AQ}} \times \sin\theta - \frac{1}{2} \times (2\cos\theta)^2 \times \theta$$

$$= 4\cos^2\theta\sin\theta - 2\theta\cos^2\theta$$

$$\therefore\ \lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{4\cos^2\theta\sin\theta - 2\theta\cos^2\theta}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left(4\cos^2\theta \times \frac{\sin\theta}{\theta} - 2\cos^2\theta\right)$$

$$= 4 - 2 = 2$$

답 ②

097

$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{k}{x}$에서

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{k}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2 + k(x-2)^2}{x^2(x-2)^2}$$

$f'(x) = 0$에서 $-x^2 + k(x-2)^2 = 0$

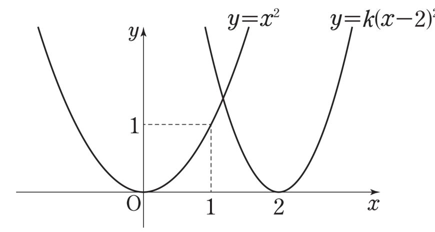
$\therefore\ x^2 = k(x-2)^2$ ······㉠

함수 $f(x)$가 $x > 1$에서 극값을 가지려면 방정식 ㉠이 1보다 큰 실근을 가져야 한다.

즉, 다음 그림과 같이 두 함수 $y = x^2$, $y = k(x-2)^2$의 그래프가 $x > 1$에서 서로 만나야 하므로

$k > 1$

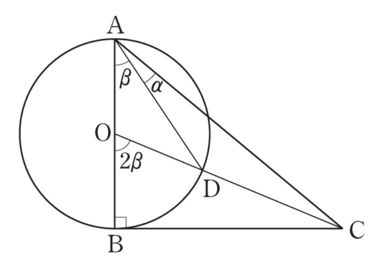
따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.



답 2

098

$\angle \mathrm{DAB} = \beta$라 하면 $\angle \mathrm{DOB} = 2\beta$이다.



직각삼각형 OBC에서

$\tan(2\beta) = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = \frac{12}{5}$이므로

$\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{12}{5}$에서

$6\tan^2\beta + 5\tan\beta - 6 = 0$,

$(2\tan\beta + 3)(3\tan\beta - 2) = 0$

$\therefore\ \tan\beta = \frac{2}{3}$ ($\because\ \tan\beta > 0$)

또한, 직각삼각형 ABC에서

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{6}{5}$이다.

$\therefore\ \tan\alpha = \tan\{(\alpha+\beta) - \beta\}$

$$= \frac{\tan(\alpha+\beta) - \tan\beta}{1 + \tan(\alpha+\beta)\tan\beta}$$

$$= \frac{\frac{6}{5} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{6}{5} \times \frac{2}{3}} = \frac{8}{27}$$

답 ③

099

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하고,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 오직 한 점에서만 만나므로

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 서로 접한다.

$f(x)=\frac{1}{2}\tan x+k$에서 $f'(x)=\frac{1}{2}\sec^2 x$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f'(t)=1$에서 $\frac{1}{2}\sec^2 t=1$

$\sec^2 t=2$, $\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(\because\ 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ t=\frac{\pi}{4}$

즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서

접하므로 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$에서

$\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4}+k=\frac{\pi}{4}\qquad \therefore\ k=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

$\therefore\ g'\left(k+\frac{1}{2}\right)=g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\sec^2\frac{\pi}{4}}=1$

$\therefore\ k\times g'\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

답 ④

100

조건 (가)의 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)}{\cos\frac{x}{2}}=-2$에서 극한값이 존재하고

$x\to\pi$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=0$이므로 이차식 $f(x)$는 $x-\pi$를 인수로

갖는다.

$f(x)=(x-\pi)(ax+b)$ (단, a, b는 상수)라 하자.

이때 $x-\pi=t$라 하면 $x\to\pi$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)}{\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)(ax+b)}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\{a(\pi+t)+b\}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{-2\times\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\times(a\pi+at+b)\right\}$$

$$=(-2)\times 1\times(a\pi+b)$$

$$=-2(a\pi+b)=-2$$

$a\pi+b=1$ $\cdots\cdots$㉠

조건 (나)에서 $f(2\pi)=2\pi$이므로

$f(2\pi)=\pi(2a\pi+b)=2\pi$에서

$2a\pi+b=2$ $\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=\frac{1}{\pi}$, $b=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{\pi}x(x-\pi)$이다.

$\therefore\ f(4\pi)=12\pi$

답 ②

101

$\sin(2x)=\sin(x+x)=2\sin x\cos x$이므로

방정식 $\cos^2 x-\sin^2(2x)=0$에서

$\cos^2 x-(2\sin x\cos x)^2=0$, $\cos^2 x(1-4\sin^2 x)=0$

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$0\le x\le 2\pi$에서

방정식 $\cos x=0$의 해는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

방정식 $\sin x=-\frac{1}{2}$의 해는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 구하는 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi+\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=6\pi$

다른풀이

방정식 $\cos^2 x-\sin^2(2x)=0$에서

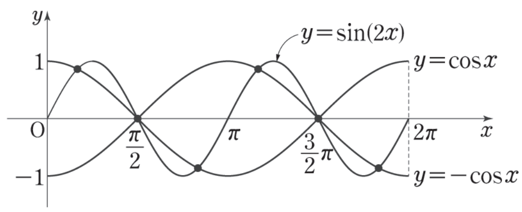
$\{\cos x-\sin(2x)\}\{\cos x+\sin(2x)\}=0$

$\sin(2x)=\cos x$ 또는 $\sin(2x)=-\cos x$

구하는 해는 곡선 $y=\sin(2x)\ (0\le x\le 2\pi)$가

곡선 $y=\cos x$ 또는 곡선 $y=-\cos x$와 만나는 점의

x좌표와 같다.



따라서 삼각함수의 그래프의 대칭성에 의하여 구하는 모든 해의 합은

$\pi\times 6=6\pi$이다.

답 ④

102

$\lim_{x\to 0}\dfrac{2^{x+a}-2\times 4^{a}}{2^{bx}-1}=\dfrac{1}{4}$에서 극한값이 존재하고

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(2^{x+a}-2\times 4^{a})=0$이므로

$2^{a}-2\times 4^{a}=0,\ 2^{a}=2^{2a+1},\ a=2a+1$

$\therefore\ a=-1$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2^{x+a}-2\times 4^{a}}{2^{bx}-1}&=\lim_{x\to 0}\frac{2^{x-1}-2^{-1}}{2^{bx}-1}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2^{x}-1}{2^{bx}-1}\\&=\frac{1}{2b}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{x}-1}{x}}{\frac{2^{bx}-1}{bx}}\\&=\frac{1}{2b}\times\frac{\ln 2}{\ln 2}=\frac{1}{2b}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이므로 $b=2$

$\therefore\ a+b=1$

답 ④

103

$f(x)=x^{2}e^{-x}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=2xe^{-x}-x^{2}e^{-x}\\&=(2x-x^{2})e^{-x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^{2})e^{-x}\\&=(x^{2}-4x+2)e^{-x}\end{aligned}$$

이때 $x=p$와 $x=q$의 좌우에서 $f''(x)$의 값의 부호가 변하기 위해서는

$f''(x)=0$에서 이차방정식 $x^{2}-4x+2=0$의 두 실근이 p와 q이어야 한다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 값은

$p+q=4$

답 ④

104

$g(x)=\dfrac{x^{2}+2}{f(x)}$에서

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{2xf(x)-(x^{2}+2)f'(x)}{\{f(x)\}^{2}}\\&=\frac{2xf(x)+(x^{2}+2)f(x)}{\{f(x)\}^{2}}\ (\because\ \text{조건 (가)})\\&=\frac{x^{2}+2x+2}{f(x)}\end{aligned}$$

이때 $g'(2)=\dfrac{4+4+2}{f(2)}=5$이므로

$f(2)=2$

답 ②

105

$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=2$에서 극한값이 존재하고

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(0)=1$이므로

$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$이다.

이때 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수이므로

$g(1)=0,\ g'(1)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$ ……㉠

또한 $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)-1}{x-2}=\dfrac{1}{3}$에서 극한값이 존재하고

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{g(x)-1\}=0$에서 $g(2)=1$이므로

$\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=\dfrac{1}{3}$이다. ……㉡

이때 $h(x)=(g\circ g)(x)=g(g(x))$에서

$h'(x)=g'(g(x))g'(x)$

$$\begin{aligned}\therefore\ h'(2)&=g'(g(2))g'(2)\\&=g'(1)\times\frac{1}{3}\ (\because\ ㉡)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\ (\because\ ㉠)$$
$$=\frac{1}{6}$$

답 ①

106

$\lim_{x\to2}\frac{3^{f(x)}-1}{x-2}=4\ln3$에서 극한값이 존재하고

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to2}\{3^{f(x)}-1\}=3^{f(2)}-1=0$, 즉 $f(2)=0$

$g(x)=3^{f(x)}$이라 하면

$g'(x)=3^{f(x)}\times\ln3\times f'(x)$이고

$g(2)=3^{f(2)}=1$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{3^{f(x)}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=g'(2)$$
$$=3^{f(2)}\times\ln3\times f'(2)$$
$$=f'(2)\ln3$$
$$=4\ln3$$

$\therefore\ f'(2)=4$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 4이므로

접선의 방정식은 $y=4(x-2)$, 즉 $y=4x-8$이다.

이때 접선 $y=4x-8$은 점 $(4,\ a)$를 지나므로

$a=4\times4-8=8$

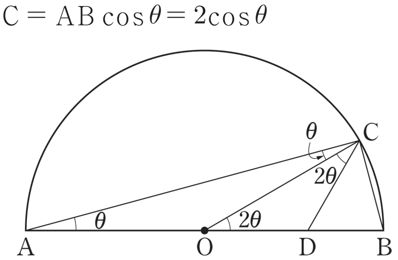
답 8

107

반원에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$

따라서 직각삼각형 ABC에서 선분 AC의 길이 $l(\theta)$는

$l(\theta)=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta=2\cos\theta$



한편, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$이므로 삼각형 OCA는 이등변삼각형이다.

즉, $\angle\mathrm{ACO}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{OCD}=\angle\mathrm{COD}=2\theta$

이등변삼각형 ODC에서

$$\cos2\theta=\frac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OC}}}{\overline{\mathrm{OD}}}=\frac{1}{2\overline{\mathrm{OD}}}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2\cos2\theta}$$

따라서 삼각형 ODC의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times\overline{\mathrm{OC}}\times\sin2\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\cos2\theta}\times1\times\sin2\theta$$
$$=\frac{\sin2\theta}{4\cos2\theta}$$
$$=\frac{\tan2\theta}{4}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{l(\theta)\times S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\cos\theta\times\tan2\theta}{4\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2\cos\theta}{2}\times\frac{\tan2\theta}{2\theta}\right)$$
$$=1\times1=1$$

답 ③

108

$x=te^{-t}$, $y=-3(t+1)e^{-t}$에서

$$\frac{dx}{dt}=e^{-t}-te^{-t}=(-t+1)e^{-t},$$

$$\frac{dy}{dt}=-3e^{-t}+3(t+1)e^{-t}=3te^{-t}$$

이므로 점 P의 속력은

$$\sqrt{(-t+1)^2e^{-2t}+9t^2e^{-2t}}=\sqrt{(10t^2-2t+1)e^{-2t}}$$

이때 $f(t)=(10t^2-2t+1)e^{-2t}\ (t>0)$이라 하면

$$f'(t)=-2(10t^2-2t+1)e^{-2t}+(20t-2)e^{-2t}$$
$$=-4(5t-1)(t-1)e^{-2t}$$

$t=\frac{1}{5}$ 또는 $t=1$일 때 $f'(t)=0$이므로

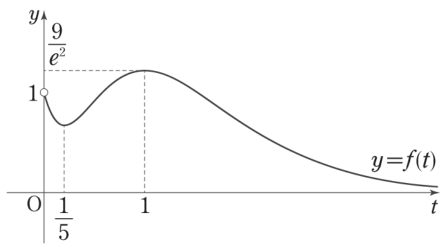
$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	1	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$		↘	극소	↗	극대	↘

$\lim_{t \to 0+} f(t) = 1$, $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$이고

함수 $f(t)$는 $t=1$에서 극댓값 $f(1) = \frac{9}{e^2}$를 가지므로

함수 $y = f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최댓값 $f(1) = \frac{9}{e^2}$를

가지므로

점 P의 속력의 최댓값은 $\sqrt{f(1)} = \sqrt{\frac{9}{e^2}} = \frac{3}{e}$이다.

답 ③

109

조건 (가)에서

$f(x) = f(-x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = -f'(-x)$이므로 $x=0$을 대입하면

$f'(0) = -f'(0)$에서 $f'(0) = 0$

조건 (나)에서

$f(1+x)f(1-x) = e^{x^2}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(1+x)f(1-x) - f(1+x)f'(1-x) = 2xe^{x^2}$

$x=1$을 대입하면

$f'(2)f(0) - f(2)f'(0) = 2e$에서

$f'(2)f(0) = 2e$ ……㉠

한편, 조건 (나)에 $x=1$을 대입하면

$f(2)f(0) = e$ ……㉡

㉠÷㉡에 의하여 $\frac{f'(2)f(0)}{f(2)f(0)} = \frac{2e}{e}$

$\therefore \frac{f'(2)}{f(2)} = 2$

답 ④

110

함수 $g(x) = f(x)\ln x$의 정의역은 $\{x \mid x > 0\}$이고

$g'(x) = f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x}$

$g(x) = 0$, 즉 $f(x)\ln x = 0$에서

$f(x) = 0$ 또는 $x = 1$이므로

조건 (가)에 의하여

$f(x) = a(x-3e)(x-b)$ (단, a, b는 상수)라 하면

$f'(x) = a(2x-3e-b)$

이때 $g(e) = f(e)\ln e = f(e)$이므로

조건 (나)에 의하여

$f(e) = 4$에서 $2ae(b-e) = 4$ ……㉠

$g'(e) = f'(e)\ln e + \frac{f(e)}{e} = f'(e) + \frac{4}{e}$이므로

조건 (나)에 의하여

$f'(e) + \frac{4}{e} = 0$에서 $a(b+e) = \frac{4}{e}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a = \frac{1}{e^2}$, $b = 3e$이므로

$f(x) = \frac{1}{e^2}(x-3e)^2$

$\therefore f(9e) = 36$

답 36

111

$f(x) = e^{2x} - ax^2$에서

$f'(x) = 2e^{2x} - 2ax$,

$f''(x) = 4e^{2x} - 2a$

이때 변곡점의 x좌표가 1이므로

$f''(1) = 4e^2 - 2a = 0$

$\therefore a = 2e^2$

답 ②

112

두 직선 $y = \frac{1}{3}x$, $y = 2x$가 x축의 양의 방향과 이루는

예각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha = \frac{1}{3}$, $\tan\beta = 2$이고

$\theta = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}$에서 $2\theta = \alpha + \beta$

$$\therefore \tan(2\theta) = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + 2}{1 - \frac{1}{3} \times 2} = 7$$

답 ②

113

점 $(1,\ a)$가 곡선 $x^2-2xy+3y^2=6$ 위의 점이므로

$1-2a+3a^2=6,\ 3a^2-2a-5=0$

$(3a-5)(a+1)=0$

$\therefore\ a=-1\ (\because\ a<0)$

$x^2-2xy+3y^2=6$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-2y-2x\times\frac{dy}{dx}+6y\times\frac{dy}{dx}=0$$

위의 식에 $x=1,\ y=-1$을 대입하면

$$2+2-2\times\frac{dy}{dx}-6\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$8\times\frac{dy}{dx}=4\qquad\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$$

따라서 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+2b=-1+1=0$

답 ③

114

$g(x)=\ln f(x)$라 하면 $g(1)=\ln f(1)=1$이고

$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln f(x)-1}{f(x)-e}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}$$

$$=\frac{g'(1)}{f'(1)}=\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{e}$$

답 ②

115

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2e^xf(x)-7}{x^2-1}=3e$에서 극한값이 존재하고

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to1}\{2e^xf(x)-7\}=0$이므로

$2ef(1)-7=0$

$\therefore\ f(1)=\dfrac{7}{2e}$

$g(x)=2e^xf(x)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{2e^xf(x)-7}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$$

$$=g'(1)\times\frac{1}{2}=3e$$

에서 $g'(1)=6e$

$g'(x)=2e^x\{f(x)+f'(x)\}$이므로

$g'(1)=2e\{f(1)+f'(1)\}=6e$

$f(1)+f'(1)=3$

$\therefore\ f'(1)=3-f(1)=3-\dfrac{7}{2e}$

답 ③

116

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의

접선의 방정식이 $y=-2x+3$이므로

$f'(0)=-2,\ f(0)=3$

이때 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{2x}}$라 하면

$$g'(x)=\frac{f'(x)e^{2x}-2f(x)e^{2x}}{e^{4x}}\text{이므로}$$

$x=0$인 점에서의 접선의 기울기는

$g'(0)=f'(0)-2f(0)=-2-2\times3=-8$이고,

$g(0)=3$이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ 3)$에서의 접선의

방정식은 $y=-8x+3$

$\therefore\ a+b=(-8)+3=-5$

답 ③

117

함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}\ (0<x<\pi)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{\cos x\times(2-\cos x)-\sin x\times\sin x}{(2-\cos x)^2}$$

$$=\frac{2\cos x-1}{(2-\cos x)^2}\ (\because\ \sin^2x+\cos^2x=1)$$

$x=\dfrac{\pi}{3}$에서 $f'(x)=0$이므로

$0<x<\pi$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극댓값

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{2-\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$을 갖는다.

$\therefore\ 60a^2=60\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=20$

답 20

118

$$f(x)=\frac{3}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x\cos(2x)+\cos(2x)$$
$$=\frac{3}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x(\cos^2x-\sin^2x)+(\cos^2x-\sin^2x)$$
$$=\frac{3}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x(1-2\sin^2x)+(1-2\sin^2x)$$
$$=\sin^3x-2\sin^2x+\sin x+1$$

$\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$라 하고,

$g(t)=t^3-2t^2+t+1$이라 하면

$g'(t)=3t^2-4t+1=(3t-1)(t-1)$

$t=\frac{1}{3}$일 때 $g'(t)=0$이므로

$-1\le t\le 1$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-3	↗	$\frac{31}{27}$	↘	1

따라서 함수 $g(t)$는

$t=\frac{1}{3}$일 때 최댓값 $M=\frac{31}{27}$을 갖고,

$t=-1$일 때 최솟값 $m=-3$을 갖는다.

$\therefore\ Mm=\frac{31}{27}\times(-3)=-\frac{31}{9}$

답 ②

119

모든 실수 x에서 $tx+2\le e^{x+a}$이 성립하려면

곡선 $y=e^{x+a}$이 직선 $y=tx+2$보다 항상 위쪽에 위치해야 한다.

이때 양수 a가 최소가 되는 때는 곡선 $y=e^{x+a}$이 직선 $y=tx+2$와 접하는 경우이다.

$g(x)=e^{x+a}$, $h(x)=tx+2$라 하고

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=h(x)$가 접하는 점의 x좌표를 k라 하자.

$g'(x)=e^{x+a}$, $h'(x)=t$이고

$g(k)=h(k)$, $g'(k)=h'(k)$이므로

$$\begin{cases} e^{k+a}=tk+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ e^{k+a}=t & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하면

$tk+2=t$, $tk=t-2$

$\therefore\ k=1-\frac{2}{t}$

이때 ㉡에서 $k+a=\ln t$이므로

$a=-k+\ln t=-\left(1-\frac{2}{t}\right)+\ln t$

$\therefore\ f(t)=-1+\frac{2}{t}+\ln t$

따라서 $f'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t}$이므로

$f'(2)=-\frac{2}{4}+\frac{1}{2}=0$

답 ③

120

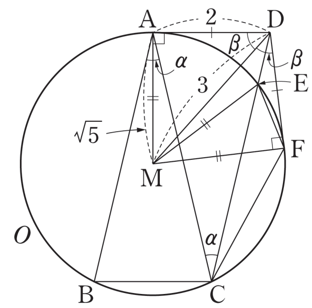
$\angle BAC=\alpha$라 하면 두 삼각형 ABC, CDA는 서로 합동이므로

$\angle DCA=\alpha$

삼각형 ABC의 외접원 O의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin\alpha}=2\sqrt{5}$에서

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cdots\cdots$㉠



한편 원 O의 중심을 M, $\angle \mathrm{MDA} = \angle \mathrm{MDF} = \beta$라 하면

$\angle \mathrm{MAD} = \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{MD}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$

$\therefore \sin\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}, \cos\beta = \dfrac{2}{3}$ ……㉡

$\angle \mathrm{AMF} = 2\angle \mathrm{AMD} = \pi - 2\beta$이고

$\angle \mathrm{AME} = 2\angle \mathrm{ACE} = 2\alpha$이므로

$\angle \mathrm{EMF} = \angle \mathrm{AMF} - \angle \mathrm{AME} = \pi - 2(\alpha + \beta)$

$\therefore \angle \mathrm{ECF} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{EMF} = \dfrac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$

따라서 삼각형 CEF에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{EF}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right)} = 2\sqrt{5}$이므로

$\overline{\mathrm{EF}} = 2\sqrt{5}\cos(\alpha+\beta)$

$= 2\sqrt{5}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$= 2\sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} \times \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$= \dfrac{2}{3}(4 - \sqrt{5})$

답 ①

121

$f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{e^x}$에서

$f'(x) = \dfrac{(2x+2)e^x - (x^2+2x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-x^2+2}{e^x}$

$\therefore \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1-3h)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} + 3 \times \dfrac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\right\}$

$= f'(1) + 3f'(1) = 4f'(1)$

$= 4 \times \dfrac{1}{e} = \dfrac{4}{e}$

답 ⑤

122

$x = t + 5\cos t$에서 $\dfrac{dx}{dt} = 1 - 5\sin t$,

$y = a\sin t$에서 $\dfrac{dy}{dt} = a\cos t$이므로

점 P의 시각 t에서의 속도는 $(1 - 5\sin t, a\cos t)$이다.

시각 $t = \dfrac{\pi}{6}$에서 속도는 $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$이고

속력은 3이므로

$\sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = 3$에서

$\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}a^2 = 9,\ a^2 = 9$

$\therefore a = 3$ ($\because a > 0$)

답 ③

123

$f(x) = \cos 2x + ax^2$이라 하면

$f'(x) = -2\sin 2x + 2ax$

$f''(x) = -4\cos 2x + 2a$

곡선 $y = f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 함수 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 하므로

$-4 + 2a \le -4\cos 2x + 2a \le 4 + 2a$에서

$-4 + 2a \ge 0$ 또는 $4 + 2a \le 0$

$\therefore a \ge 2$ 또는 $a \le -2$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 2이다.

답 2

124

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(1) = 5$에서 $a + b + c = 5$ ……㉠

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{f(x)} - 1}{3x} = 1$에서 극한값이 존재하고

$x \to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{f(x)} - 1) = 0$이므로 $e^{f(0)} - 1 = 0$

$f(0) = 0$이므로 $c = 0$

따라서 $f(x) = ax^2 + bx$이고

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\times\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{3x}$$
$$=1\times\lim_{x\to0}\left(\frac{a}{3}x+\frac{b}{3}\right)=\frac{b}{3}=1$$

에서 $b=3$

이를 ㉠에 대입하면 $a=2$

따라서 $f(x)=2x^2+3x$이므로

$f(3)=18+9=27$

답 27

125

함수 $h(x)=g(f(x))$라 하면

$\lim_{x\to0}\frac{h(x)}{x}=1$에서 극한값이 존재하고

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}h(x)=0$이다.

이때 함수 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$는 $x=0$에서 연속이고

함수 $g(x)$는 $x=f(0)=1$에서 연속이므로

합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 $h(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(0)=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(x)=2\sec^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$에서

$f'(0)=2\sec^2\frac{\pi}{4}=2\times(\sqrt{2})^2=4$이고

$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$에서

$h'(0)=g'(f(0))\times f'(0)=g'(1)\times4$

이므로 ㉠에서 $4g'(1)=1$

$\therefore\ g'(1)=\frac{1}{4}$

답 ⑤

126

$x=f(t)$, $y=f(t^2)$에서

$\frac{dx}{dt}=f'(t)$, $\frac{dy}{dt}=2tf'(t^2)$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2tf'(t^2)}{f'(t)}$$

$t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$\frac{2f'(1)}{f'(1)}=2$

$f(1)=a$라 하면 $t=1$에 대응하는 점의 좌표는

$(a,\ a)$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-a=2(x-a)$

이 직선이 점 $(3,\ 4)$를 지나므로

$4-a=2(3-a)\qquad\therefore\ a=2$

$\therefore\ f(1)=2$

답 2

127

$3\ln x+2=x+k$에서 $3\ln x-x+2=k$

$f(x)=3\ln x-x+2$라 하면

$f'(x)=\frac{3}{x}-1=\frac{3-x}{x}$

로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=0$에서 $x=3$

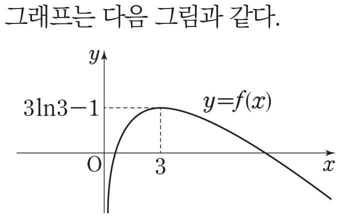
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	$3\ln3-1$	↘

이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 1이려면 함수

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서만 만나야

하므로

$k=3\ln3-1$

답 ④

128

$f^{-1}(x)=g(2x)$, 즉 함수 $g(2x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$f(g(2x))=x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(2x))\times2g'(2x)=1$

위의 식에 $x=1$을 대입하면

$f'(g(2))\times 2g'(2)=1$

$g(2)=1$이고 $f'(1)=2$이므로

$4g'(2)=1$

$\therefore\ g'(2)=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 100g'(2)=100\times\frac{1}{4}=25$

답 25

129

$\overline{OA}=1$에서 $\overline{AB}=\tan\theta$, $\overline{OB}=\frac{1}{\cos\theta}$이고

$\overline{OC}=\overline{AB}$이므로

$\overline{BC}=\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$이다.

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OD}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\times 1\\&=\frac{1-\sin\theta}{2\cos\theta}\end{aligned}$$

이때 $t=\frac{\pi}{2}-\theta$라 하면 $\theta=\frac{\pi}{2}-t$이고

$\theta\to\frac{\pi}{2}-$일 때 $t\to 0+$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{S(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}&=\lim_{t\to 0+}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{2t\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{1-\cos t}{2t\sin t}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin^2 t}{2t\sin t(1+\cos t)}\\&=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{1}{2(1+\cos t)}\times\frac{\sin t}{t}\right)\\&=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ①

130

$f(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하자.

$g(x)=f(x)e^{-|x|}=\begin{cases}f(x)e^{x} & (x<0)\\ f(x)e^{-x} & (x\ge 0)\end{cases}$이고

$i(x)=f(x)e^{x}$, $j(x)=f(x)e^{-x}$이라 하면

$i'(x)=\{f'(x)+f(x)\}e^{x}$,

$j'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$이고

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$i(0)=j(0)$을 만족시키고

$i'(0)=j'(0)$에서

$f'(0)+f(0)=f'(0)-f(0)$이므로 $f(0)=0$

$\therefore\ b=0$

함수 $g(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극값을 가지므로

$x\ge 0$일 때,

$$\begin{aligned}g'(x)&=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax)e^{-x}\\&=\{-x^2-(a-2)x+a\}e^{-x}\end{aligned}$$

에서 $g'(\sqrt{2})=0$이므로

$-2-(a-2)\sqrt{2}+a=0$

$\therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x$이므로 $f(3)=15$이다.

답 15

131

$\frac{1}{n}=t$라 하면 $n\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(2+\frac{1}{n}\right)-f\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{f(2+t)-f(2-t)}{t}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{f(2+t)-f(2)+f(2)-f(2-t)}{t}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{f(2+t)-f(2)}{t}+\lim_{t\to 0+}\frac{f(2-t)-f(2)}{-t}\\&=f'(2)+f'(2)=2f'(2)\end{aligned}$$

이때 $f(x)=2^x-\log_4 x$에서

$f'(x)=2^x\ln 2-\frac{1}{x\ln 4}$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(2+\frac{1}{n}\right)-f\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\}\\&=2f'(2)=2\left(4\ln 2-\frac{1}{2\ln 4}\right)\\&=8\ln 2-\frac{1}{2\ln 2}\end{aligned}$$

답 ③

132

$f(x)=x(\ln x)^2$에서

$f'(x)=(\ln x)^2+x\times 2\ln x\times\dfrac{1}{x}=\ln x(\ln x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore\ x=e^{-2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^{-2}$에서 극댓값 $f(e^{-2})=\dfrac{4}{e^2}$,

$x=1$에서 극솟값 $f(1)=0$을 가지므로

$a+b=\dfrac{4}{e^2}+0=\dfrac{4}{e^2}$

답 ③

133

$\mathrm{P}(t,\ e^t)$이므로

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(0,\ e^t)$이고,

점 R의 좌표는 $\mathrm{R}(0,\ 1)$이다.

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$f(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{1}{2}t(e^t-1)$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{f(3t)}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{3t(e^{3t}-1)}{2t^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{e^{3t}-1}{3t}\times\frac{9}{2}\right)=1\times\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

답 ⑤

134

$\sin f(x)=g(x)$라 하면

$g(1)=\sin f(1)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

$g'(x)=\cos f(x)\times f'(x)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin f(x)-1}{f(x)-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{f(x)-f(1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}$$
$$=\frac{g'(1)}{f'(1)}=\cos f(1)$$
$$=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

답 ③

135

조건 (나)의 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{x-3}=2$에서 극한값이 존재하고

$x\to3$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to3}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(3)=1$이고

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$=f'(3)=2$$

한편 조건 (가)에서 $f(-x)=-f(x)$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(-3)=-f(3)=-1$이므로

$g(-1)=-3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(-x)=f'(x)$이므로

$f'(-3)=f'(3)=2$

$\therefore\ g'(-1)=\dfrac{1}{f'(-3)}=\dfrac{1}{2}$

답 ③

136

$x=\sqrt{2}\ln t,\ y=\dfrac{1}{2}t^2+t+1$에서

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\sqrt{2}}{t},\ \dfrac{dy}{dt}=t+1$

따라서 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{t}\right)^2+(t+1)^2}=\sqrt{\frac{2}{t^2}+t^2+2t+1}$$

$f(t)=\dfrac{2}{t^2}+t^2+2t+1$이라 하면

$$f'(t)=-\frac{4}{t^3}+2t+2$$
$$=\frac{2t^4+2t^3-4}{t^3}$$
$$=\frac{(t-1)(2t^3+4t^2+4t+4)}{t^3}$$

$f'(t)=0$에서 $t=1$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

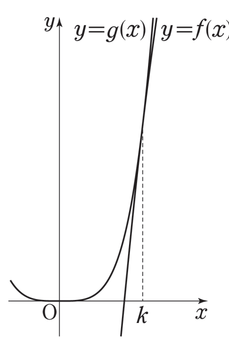
함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이므로 점 P의 속력의 최솟값은

$\sqrt{f(1)}=\sqrt{6}$

답 ⑤

137

양수 a에 대하여 $f(x)=a\ln x$, $g(x)=x^4$이라 하자.
이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 한 점에서만 만나려면 두 곡선이 접해야 한다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 $k\,(k>0)$라 하면

$f(k)=g(k)$에서 $a\ln k=k^4$ ……㉠

$f'(x)=\dfrac{a}{x}$, $g'(x)=4x^3$이므로

$f'(k)=g'(k)$에서 $\dfrac{a}{k}=4k^3$ ……㉡

㉡에서 $k^4=\dfrac{a}{4}$이므로 ㉠에서

$a\ln k=\dfrac{a}{4}$, $\ln k=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ k=e^{\frac{1}{4}}$

$\therefore\ a=4k^4=4e$

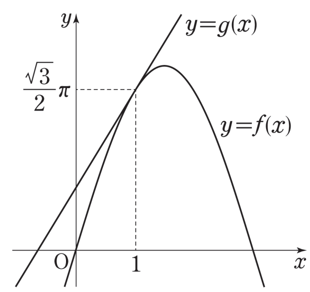
답 ⑤

138

조건 (나)에서 $0\le x\le 3$일 때, 부등식 $f(x)\le g(x)$가 성립하려면

$0\le x\le 3$에서 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위쪽에 위치해야 한다.

이때 조건 (가)에서 $f(1)=g(1)$이므로 그림과 같이 직선 $y=g(x)$는 점 $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접해야 한다.



따라서 $f'(1)=g'(1)$

$f(x)=\pi\sin\dfrac{\pi}{3}x$에서 $f'(x)=\dfrac{\pi^2}{3}\cos\dfrac{\pi}{3}x$이므로

$g'(1)=f'(1)=\dfrac{\pi^2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

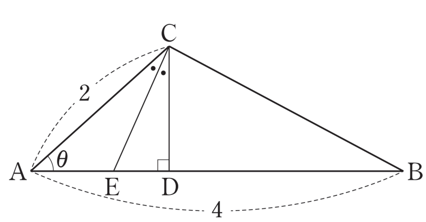
기울기가 $\dfrac{\pi^2}{6}$이고 점 $\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$g(x)=\dfrac{\pi^2}{6}(x-1)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

$\therefore\ g(3)=2\times\dfrac{\pi^2}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi=\dfrac{\pi^2}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

답 ①

139



직각삼각형 ACD에서

$\overline{CD}=2\sin\theta$, $\overline{AD}=2\cos\theta$이므로

$\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=4-2\cos\theta$

$\overline{AE}=a$라 하면 $\overline{DE}=2\cos\theta-a$이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{AE}:\overline{ED}$에서

$2:2\sin\theta=a:2\cos\theta-a$

$2a\sin\theta=4\cos\theta-2a$, $a(1+\sin\theta)=2\cos\theta$

$\therefore\ a=\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$

따라서 두 삼각형 ACE, CBD의 넓이의 합은

$f(\theta)+g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times(\overline{AE}+\overline{BD})\times\overline{CD}$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}+4-2\cos\theta\right)\times 2\sin\theta$

$=\sin\theta\left(\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}+4-2\cos\theta\right)$

$\therefore \lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta}$

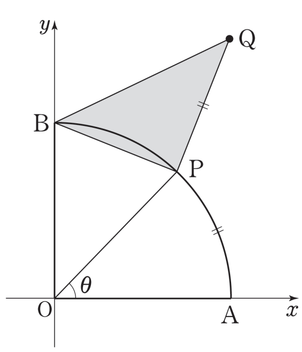
$=\lim\limits_{\theta\to0+}\left\{\dfrac{\sin\theta}{\theta}\left(\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}+4-2\cos\theta\right)\right\}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\lim\limits_{\theta\to0+}\left(\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}+4-2\cos\theta\right)$

$=1\times(2+4-2)=4$

답 ④

140



O$(0,\ 0)$, A$(1,\ 0)$, B$(0,\ 1)$이므로

$\angle POA=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$

$\overline{BP}=\sqrt{\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2}$

$=\sqrt{2-2\sin\theta}$

호 AP의 길이는 θ이므로 $\overline{PQ}=\theta$ ……㉠

이때 삼각형 BPQ의 넓이가 최대가 되려면 우선

$\angle BPQ=\dfrac{\pi}{2}$이어야 하고, 이때의 삼각형 BPQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2-2\sin\theta}\times\theta$

$=\sqrt{\dfrac{1}{2}\theta^2(1-\sin\theta)}$

또한 $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\theta^2(1-\sin\theta)$라 하면

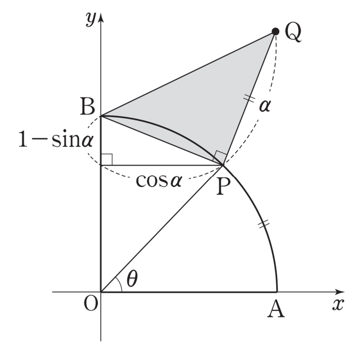
$f'(\theta)=\dfrac{1}{2}\{2\theta\times(1-\sin\theta)+\theta^2\times(-\cos\theta)\}$

$=\dfrac{1}{2}\theta\{2(1-\sin\theta)-\theta\cos\theta\}$

이고, 삼각형 BPQ의 넓이가 최대일 때의 θ의 값을

$\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $f(\theta)$는 $\theta=\alpha$에서 극대이다.

따라서 $f'(\alpha)=0$에서 $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\alpha}{2}$ ……㉡



$\theta=\alpha$일 때, ㉠에서 선분 PQ의 길이는 α,

㉡에서 직선 BP의 기울기는 $-\dfrac{\alpha}{2}$이고 두 직선 BP,

PQ가 서로 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{2}{\alpha}$이다.

따라서 구하는 값은 $\alpha\times\dfrac{2}{\alpha}=2$

답 ④

141

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2+1}$에서

$g'(x)=\dfrac{(x^2+1)f'(x)-2xf(x)}{(x^2+1)^2}$

위의 식에 $x=-1$을 대입하면

$g'(-1)=\dfrac{2f'(-1)+2f(-1)}{4}=2$

이므로 $2\{f'(-1)+f(-1)\}=8$

$\therefore\ f'(-1)+f(-1)=4$

답 ④

142

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)\tan x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

에서 $f(0)=0$, $f'(0)=1$

$f(x)=ax^2+bx$라 하면 $f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(0)=b=1$

$f(1)=3$이므로 $a+b=3$

$b=1$을 위의 식에 대입하면 $a=2$

따라서 $f(x)=2x^2+x$이므로

$f(2)=8+2=10$

답 10

143

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이고,

곡선 $y=g(x)$가 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$g(a)=0$에서 $f(0)=a$

이때 $f(x)=e^{2x}+2x$에서 $f(0)=1$이므로

$a=1$

한편 $f'(x)=2e^{2x}+2$이므로

$$g'(a)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{4}$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{4}(x-1)$$

이 직선이 점 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$을 지나므로

$$b=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ a+b=1+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

답 ⑤

144

$\frac{dx}{dt}=t+1-\frac{4}{t+1}$, $\frac{dy}{dt}=4$이므로

점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(t+1-\frac{4}{t+1}\right)^2+4^2}$$
$$=\sqrt{\left(t+1+\frac{4}{t+1}\right)^2}$$
$$=t+1+\frac{4}{t+1}$$

점 P는 $t+1=\frac{4}{t+1}$일 때, 즉 $t=1$일 때 속력이 최소이다.

한편, $\frac{d^2x}{dt^2}=1+\frac{4}{(t+1)^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=0$이므로 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left\{1+\frac{4}{(t+1)^2}\right\}^2}=1+\frac{4}{(t+1)^2}$$

따라서 속력이 최소일 때, 점 P의 가속도의 크기는

$$1+\frac{4}{2^2}=2$$

답 2

145

$x=\cos^2\theta$, $y=a+\sin^3\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{3}{2}\sin\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 P에 대응하는 θ의 값을 α라 하면 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$x=\cos^2\alpha=\frac{8}{9}$에서

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore\ \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{1}{3}$$

이때 $y=a+\sin^3\alpha=a+\frac{1}{27}=\frac{4}{27}$이므로

$$a=\frac{1}{9}$$

또한 ㉠에서 점 $\mathrm{P}\left(\frac{8}{9},\ \frac{4}{27}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$k=\frac{dy}{dx}$$
$$=-\frac{3}{2}\sin\alpha$$
$$=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a\times k=-\frac{1}{18}$$

답 ②

146

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=\frac{1}{4}$에서 극한값이 존재하고

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to1}\{g(x)+1\}=0$이므로

$g(1)=-1$

이때 함수 $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$f(-1)=1$에서 $-1-a+b=1$ ……㉠

한편

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)=\frac{1}{4}$$

따라서 $f'(-1)=\frac{1}{g'(1)}=4$이므로

$f'(x)=3x^2+a$에서

$3+a=4$

$\therefore\ a=1$

이를 ㉠에 대입하면 $b=3$

따라서 $f(x)=x^3+x+3$이므로

$f(2)=8+2+3=13$

답 13

147

$$f'(x)=e^x(x^2+ax+3)+e^x(2x+a)$$
$$=e^x\{x^2+(a+2)x+(a+3)\}$$

방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수 $g(t)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이려면

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 증가하거나 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이거나 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

이때 $e^x>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2+(a+2)x+a+3\geq0$이어야 한다.

방정식 $x^2+(a+2)x+a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-4(a+3)=a^2-8\leq0$

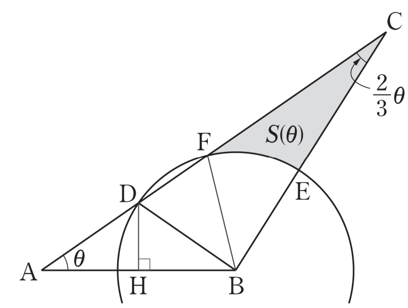
$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})\leq0$

$\therefore\ -2\sqrt{2}\leq a\leq2\sqrt{2}$

따라서 구하는 정수 a는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다.

답 5

148



$\angle DBA=\angle DAB=\theta$이므로 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{BH}=1$

$\therefore\ \overline{AD}=\overline{BD}=\overline{BF}=\frac{1}{\cos\theta}$ ……㉠

또한 $\angle BDF=\angle BFD=2\theta$이므로 삼각형 BCF에서

$\angle CBF=2\theta-\frac{2}{3}\theta=\frac{4}{3}\theta$ ……㉡

한편 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\frac{2}{3}\theta}$$

$\therefore\ \overline{BC}=\frac{2\sin\theta}{\sin\frac{2}{3}\theta}$ ……㉢

$S(\theta)$의 값은 삼각형 BCF의 넓이에서 부채꼴 BEF의 넓이를 뺀 것과 같으므로 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{2\sin\theta}{\sin\frac{2}{3}\theta}\times\sin\frac{4}{3}\theta-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2\times\frac{4}{3}\theta$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\frac{4}{3}\theta}{\sin\frac{2}{3}\theta}\times\sin\theta-\frac{2}{3}\times\frac{\theta}{\cos\theta}\right)$$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\frac{4}{3}\theta}{\sin\frac{2}{3}\theta}\times\frac{\sin\theta}{\theta}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{\cos\theta}\right)$$
$$=1\times\left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}\times1-\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{4}{3}$$

답 ②

149

$h(x)=|f(x)-g(x)|$라 하면

함수 $h(x)$의 최솟값이 3이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x)-g(x)\geq 3$이거나

모든 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)\leq -3$이다.

이때 $\lim_{x\to 0+}\{f(x)-g(x)\}=\infty$,

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}=\infty$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)\geq 3$이다.

따라서 $h(x)=f(x)-g(x)$이다.

$f(x)=x^2+ax+b$에서

$f'(x)=2x+a$

$g(x)=\ln x$에서 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=2x+a-\dfrac{1}{x}$

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값은 3이므로

$h'(1)=f'(1)-g'(1)=0$에서

$2+a-1=0$

$\therefore\ a=-1$

$h(1)=f(1)-g(1)=3$에서

$1+a+b=3$

$\therefore\ b=3$

따라서 $f(x)=x^2-x+3$이므로

$f(3)=9-3+3=9$

답 9

150

$y=\ln x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$이므로

접점의 좌표를 $(a,\ \ln a)$라 하면 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{a}(x-a)+\ln a$, 즉 $y=\dfrac{1}{a}x-1+\ln a$

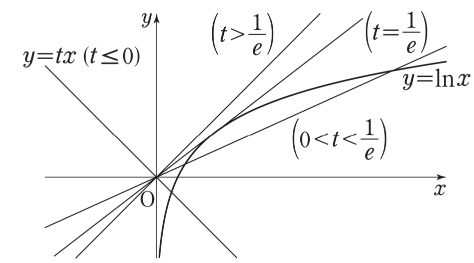
이 직선이 직선 $y=tx$와 같으려면

$\dfrac{1}{a}=t,\ -1+\ln a=0$

$\therefore\ a=e,\ t=\dfrac{1}{e}$

방정식 $\ln x=tx$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=tx$의 교점의 개수와 같으므로

다음 그림과 같이 $t=0$일 때, $t=\dfrac{1}{e}$일 때를 기준으로 나누어 생각해보면



$$f(t)=\begin{cases}1 & (t\leq 0)\\ 2 & \left(0<t<\dfrac{1}{e}\right)\\ 1 & \left(t=\dfrac{1}{e}\right)\\ 0 & \left(t>\dfrac{1}{e}\right)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=0,\ x=\dfrac{1}{e}$일 때 불연속이고 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=\dfrac{1}{e}$에서 연속임을 보이면 된다.

$\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이어야 하므로

$2g(0)=g(0)$에서 $g(0)=0$

$\lim_{x\to\frac{1}{e}+}f(x)g(x)=\lim_{x\to\frac{1}{e}-}f(x)g(x)=f\left(\dfrac{1}{e}\right)g\left(\dfrac{1}{e}\right)$

이어야 하므로

$g\left(\dfrac{1}{e}\right)=2g\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$에서 $g\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$

따라서 $g(x)=x\left(x-\dfrac{1}{e}\right)$이므로

$g(e)=e\left(e-\dfrac{1}{e}\right)=e^2-1$

답 ④

151

$f(2x^2+1)=e^x(x^2+1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(2x^2+1)\times 4x=e^x(x^2+1)+e^x\times 2x$

$f'(2x^2+1)=\dfrac{e^x(x+1)^2}{4x}$

위의 식에 $x=1$을 대입하면

$$f'(3)=\frac{4e}{4}=e$$

답 ⑤

152

$x^3+y^3+axy=b$ ……㉠

주어진 곡선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2+a=b$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2+3y^2\times\frac{dy}{dx}+ay+ax\times\frac{dy}{dx}=0$$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$3+3\times(-2)+a+a\times(-2)=0,\ -3-a=0$

$\therefore\ a=-3$

이를 ㉡에 대입하면

$b=-1$

$\therefore\ a^2+b^2=9+1=10$

답 10

153

조건 (가)에서 $f(0)=0$이므로

$f(x)=xh(x)$ ($h(x)$는 다항함수)라 하면

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x\,h(x)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{2h(x)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}$$

조건 (나)에서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=4$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{2h(x)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}=4$에서

$$\lim_{x\to\infty}2h(x)\times\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=2\lim_{x\to\infty}h(x)\times1=4$$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=2$

$h(x)$는 다항함수이므로 위의 조건을 만족시키려면

$h(x)=2$

따라서 $f(x)=2x$이므로

$g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)$에서

$g'(2)=e^2f(2)+e^2f'(2)=4e^2+2e^2=6e^2$

답 ②

154

$x=2\cos^3t,\ y=3\sin^3t$에서

$$\frac{dx}{dt}=6\cos^2t\times(-\sin t),\ \frac{dy}{dt}=9\sin^2t\cos t$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{9\sin^2t\cos t}{6\cos^2t\times(-\sin t)}=-\frac{3}{2}\tan t$$

이때 $t=\frac{\pi}{4}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$-\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{2}$이고 곡선 위의 점의 좌표는

$x=2\cos^3\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=3\sin^3\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$에서

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$이므로

구하는 접선의 방정식은 $y-\frac{3\sqrt{2}}{4}=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

즉 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$이다.

이 접선의 x절편은 $\sqrt{2}$, y절편은 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$이므로

$$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$$

$\therefore\ 12S=18$

답 18

155

직각삼각형 OBA에서

$\overline{AB}=\overline{OA}\times\sin\theta=\sin\theta$,

$\overline{OB}=\overline{OA}\times\cos\theta=\cos\theta$

정사각형 ABCD의 넓이는 $\overline{AB}^2=\sin^2\theta$,

부채꼴 OAP의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1^2\times\theta=\frac{1}{2}\theta$,

삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\cos\theta$이므로

$S(\theta)=$(정사각형 ABCD의 넓이)
$-\{$(부채꼴 OAP의 넓이)
$-$(삼각형 AOB의 넓이)$\}$

$$=\sin^2\theta-\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$=\sin^2\theta-\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$S'(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$\therefore\ S'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

답 ④

156

$f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x$에서

$f'(x) = (2x-3)e^x + (x^2 - 3x + 3)e^x$

$= (x^2 - x)e^x$

$= x(x-1)e^x$

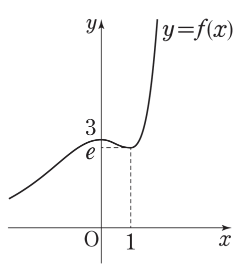
$f'(x) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	e	↗

이때 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$이므로 함수

$y = f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(x) = |f(x) - k|$가 양의 실수 전체의 집합에서

미분가능하려면 모든 양의 실수 x에 대하여

$f(x) - k \geq 0$이어야 하므로

$e - k \geq 0 \qquad \therefore\ k \leq e$

따라서 실수 k의 최댓값은 e이다.

답 ④

157

함수 $f(x) = x^3 + x + a$의 역함수를 $h(x)$라 하면

$f'(x) = 3x^2 + 1$이므로

$g(x) = h(3x^2 + 1)$

이때 $g(2) = h(13) = k$라 하면 $k < 0$이고

$f(k) = k^3 + k + a = 13$ ……㉠

또한 $g'(x) = h'(3x^2+1) \times 6x$에서

$g'(2) = 12h'(13) = 3$이므로

$h'(13) = \frac{1}{4}$

역함수의 미분법에 의하여

$h'(13) = \frac{1}{f'(k)} = \frac{1}{3k^2+1}$ ($\because\ h(13) = k$)

이므로 $\frac{1}{3k^2+1} = \frac{1}{4}$에서

$k = -1$ ($\because\ k < 0$)

이를 ㉠에 대입하면

$-1 - 1 + a = 13$

$\therefore\ a = 15$

답 15

158

$\angle\mathrm{ABO} = \theta$라 하면 $\tan\theta = \frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = 2$이므로

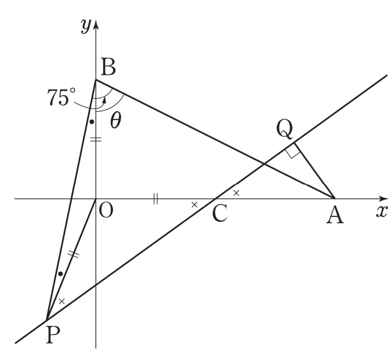
$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$이다. ……㉠

$\angle\mathrm{ABP} = 75°$이므로 $\angle\mathrm{OBP} = 75° - \theta$이고

$\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OB}}$이므로 $\angle\mathrm{OPB} = 75° - \theta$이다.

$\angle\mathrm{COP} = 90° + 2 \times (75° - \theta) = 240° - 2\theta$이고

$\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OC}}$이므로 $\angle\mathrm{OCP} = \theta - 30°$이다.



따라서 $\angle\mathrm{ACQ} = \theta - 30°$이고 $\overline{\mathrm{AC}} = 1$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}} = \sin(\theta - 30°)$

$= \sin\theta\cos30° - \cos\theta\sin30°$

$= \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{2\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{5}}$ ($\because$ ㉠)

$\overline{\mathrm{AQ}}^2 = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{20} = \frac{13}{20} - \frac{1}{5}\sqrt{3}$이므로

$100pq = 100 \times \frac{13}{20} \times \frac{1}{5} = 13$

답 13

159

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$에서 $f'(x)=x^2-x=x(x-1)$

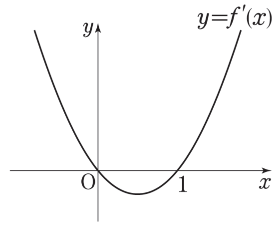
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

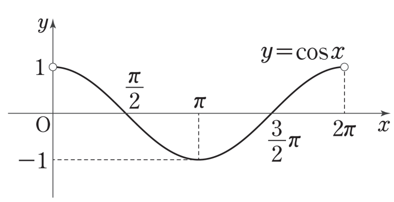
$g(x)=f(2\cos x)$에서

$g'(x)=f'(2\cos x)\times(-2\sin x)$

$g'(x)=0$에서 $f'(2\cos x)=0$ 또는 $\sin x=0$ ······㉠

즉, ㉠을 만족시키면서 $g'(x)$의 값의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 x의 값에서 $g(x)$는 극소이다.





(i) $\sin x=0$인 경우

$\sin x=0$에서 $x=\pi$

$x=\pi$의 좌우에서 $\sin x$의 값의 부호는 양에서 음으로 바뀌고, $x\to\pi$일 때 $f'(2\cos x)$는 양수이므로 $g'(x)$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=\pi$에서 극소이다.

(ii) $f'(2\cos x)=0$인 경우

$f'(2\cos x)=0$에서

$2\cos x=0$ 또는 $2\cos x=1$

$\cos x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi$

$x=\frac{\pi}{3}$의 좌우에서 $f'(2\cos x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고 $x\to\frac{\pi}{3}$일 때 $\sin x$는 양수이므로 $g'(x)$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극소이다.

$x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f'(2\cos x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin x$는 양수이므로 $g'(x)$의 값의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극대이다.

$x=\frac{3}{2}\pi$의 좌우에서 $f'(2\cos x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고 $x\to\frac{3}{2}\pi$일 때 $\sin x$는 음수이므로 $g'(x)$의 값의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극대이다.

$x=\frac{5}{3}\pi$의 좌우에서 $f'(2\cos x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고 $x\to\frac{5}{3}\pi$일 때 $\sin x$는 음수이므로 $g'(x)$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=\frac{5}{3}\pi$에서 극소이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{3},\ x=\pi,\ x=\frac{5}{3}\pi$에서 극소이므로 구하는 x의 개수는 3이다.

답 3

160

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(0<x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ 2-\sin x & \left(\frac{\pi}{2}<x<2\pi\right)\end{cases}$$ 에서

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\sin x=1$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}(2-\sin x)=1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

이므로 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이다.

함수 $f(x)$의 $x=\frac{\pi}{2}$에서의 좌미분계수는

$$\lim_{h\to0-}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{\cos h-1}{h}$$

$= \lim_{h \to 0-} \frac{-\sin^2 h}{h(1+\cos h)}$

$= \lim_{h \to 0-} \left\{ \left(\frac{\sin h}{h} \right)^2 \times \frac{-h}{1+\cos h} \right\}$

$= 1^2 \times 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$에서의 우미분계수는

$\lim_{h \to 0+} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$

$= \lim_{h \to 0+} \frac{2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 1}{h}$

$= \lim_{h \to 0+} \frac{1-\cos h}{h}$

$= \lim_{h \to 0+} \frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}$

$= \lim_{h \to 0+} \left\{ \left(\frac{\sin h}{h} \right)^2 \times \frac{h}{1+\cos h} \right\}$

$= 1^2 \times 0 = 0$

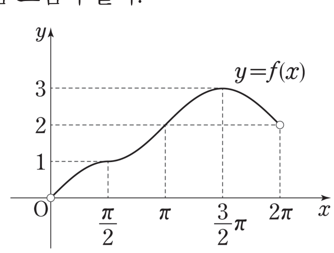
이므로 $f(x)$는 $x = \frac{\pi}{2}$에서 미분가능하다.

즉, 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 2\pi)$에서 미분가능하고

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$이다.

따라서 함수 $f(x) = \begin{cases} \sin x & \left(0 < x \le \frac{\pi}{2}\right) \\ 2 - \sin x & \left(\frac{\pi}{2} < x < 2\pi\right) \end{cases}$의

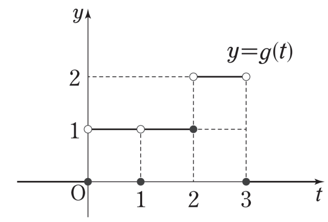
그래프는 다음 그림과 같다.



곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = t$가 만나지 않거나 접하면 함수 $y = |f(x) - t|$가 구간 $(0, 2\pi)$에서 미분가능하므로 t의 값의 범위를 나누어 $g(t)$를 구하면 다음과 같다.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t \le 0) \\ 1 & (0 < t < 1) \\ 0 & (t = 1) \\ 1 & (1 < t \le 2) \\ 2 & (2 < t < 3) \\ 0 & (t \ge 3) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



a가 정수일 때 $\left| \lim_{t \to a+} g(t) - \lim_{t \to a-} g(t) \right|$의 값을 구해 보면

$a < 0$일 때 $\left| \lim_{t \to a+} g(t) - \lim_{t \to a-} g(t) \right| = |0 - 0| = 0$

$a = 0$일 때 $\left| \lim_{t \to a+} g(t) - \lim_{t \to a-} g(t) \right| = |1 - 0| = 1$

$a = 1$일 때 $\left| \lim_{t \to a+} g(t) - \lim_{t \to a-} g(t) \right| = |1 - 1| = 0$

$a = 2$일 때 $\left| \lim_{t \to a+} g(t) - \lim_{t \to a-} g(t) \right| = |2 - 1| = 1$

$a = 3$일 때 $\left| \lim_{t \to a+} g(t) - \lim_{t \to a-} g(t) \right| = |0 - 2| = 2$

$a \ge 4$일 때 $\left| \lim_{t \to a+} g(t) - \lim_{t \to a-} g(t) \right| = |0 - 0| = 0$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합은

$0 + 2 + 3 = 5$

답 5

Ⅲ 적분법

161

$1+\sin x=t$라 하면 $\cos x dx=dt$이므로

$$f(x)=\int(1+\sin x)^2\cos x dx$$
$$=\int t^2 dt=\frac{1}{3}t^3+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$
$$=\frac{(1+\sin x)^3}{3}+C$$

$f(\pi)=0$이므로 $\frac{1}{3}+C=0$

$\therefore\ C=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{(1+\sin x)^3}{3}-\frac{1}{3}$이므로

$f(2\pi)=\frac{(1+0)^3}{3}-\frac{1}{3}=0$

답 ③

162

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{xf(x)}{1+x^2}dx$$
$$=\int_0^1\frac{6x^3+6x}{x^2+1}dx$$
$$=\int_0^1\frac{6x(x^2+1)}{x^2+1}dx$$
$$=\int_0^1 6x dx=\left[3x^2\right]_0^1=3$$

답 ③

163

$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & (x<1)\\ 3\sqrt{x} & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^3+C_1 & (x<1)\\ 2x^{\frac{3}{2}}+C_2 & (x>1)\end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$1+C_1=2+C_2$ ……㉠

$f(4)=17$이므로 $2\times(4)^{\frac{3}{2}}+C_2=17$

$16+C_2=17$

$\therefore\ C_2=1$

이를 ㉠에 대입하면

$C_1=2$

따라서 $x<1$일 때 $f(x)=x^3+2$이므로

$f(-2)=(-2)^3+2=-6$

답 ③

164

$\int_0^x f(t)dt=xf(x)+x^2\sin x$의 양변을 x에 대하여

미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\sin x+x^2\cos x$에서

$f'(x)=-2\sin x-x\cos x$이므로

$$f(x)=2\cos x-\left(x\sin x-\int\sin x dx\right)$$
$$=\cos x-x\sin x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+C=\frac{\pi}{2}$에서 $C=\pi$이므로

$f(x)=\cos x-x\sin x+\pi$

$\therefore\ f(\pi)=\pi-1$

답 ④

165

두 영역 A와 B의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^4\{f(x)-g(x)\}dx=0$이다.

$$\int_0^4\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_0^4\left\{(x+k)-\left(\frac{6}{x+2}-1\right)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+(k+1)x-6\ln(x+2)\right]_0^4$$
$$=8+4(k+1)-6\ln3=0$$

이므로 $k=-3+\frac{3}{2}\ln3$

이투스북

$\therefore\ 20(p^2+q^2)=20\left\{(-3)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}=225$

답 225

166

$$\int_0^2 xf(x)f'(x)dx$$
$$=\Big[x\{f(x)\}^2\Big]_0^2-\int_0^2\{f(x)+xf'(x)\}f(x)dx$$
$$=2\{f(2)\}^2-\int_0^2 xf(x)f'(x)dx-\int_0^2\{f(x)\}^2dx$$
$$\int_0^2 xf(x)f'(x)dx=\{f(2)\}^2-\frac{1}{2}\int_0^2\{f(x)\}^2dx$$
$$4=9-\frac{1}{2}\int_0^2\{f(x)\}^2dx$$
$$\therefore\ \int_0^2\{f(x)\}^2dx=10$$

답 ③

167

$$f(x)=\begin{cases}1-e^x & (x<0)\\ e^x-1 & (x\ge 0)\end{cases}$$

한편,

$$g(x)=\int_{-1}^x (x-t)f(t)dt$$
$$=x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt$$

이므로

$$g'(x)=\int_{-1}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$$
$$\therefore\ g'(1)=\int_{-1}^1 f(t)dt$$
$$=\int_{-1}^0(1-e^x)dx+\int_0^1(e^x-1)dx$$
$$=\Big[x-e^x\Big]_{-1}^0+\Big[e^x-x\Big]_0^1$$
$$=\{(0-e^0)-(-1-e^{-1})\}+\{(e-1)-(e^0-0)\}$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 ①

168

$f(x)=ae^{2x}-5x^2$에서 $f'(x)=2ae^{2x}-10x$이므로

$2f(x)-f'(x)=0$에서 $-10x^2+10x=0$

$-10x(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx$$
$$=\int_0^1(a^2e^{4x}-10ax^2e^{2x}+25x^4)dx$$
$$=\left[\frac{a^2}{4}e^{4x}-5a\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}+5x^5\right]_0^1 \quad \text{참고}$$
$$=\left(\frac{a^2}{4}e^4-\frac{5a}{2}e^2+5\right)-\left(\frac{a^2}{4}-\frac{5a}{2}\right)$$
$$=\frac{e^4-1}{4}a^2-\frac{5(e^2-1)}{2}a+5=5$$

이므로 $\frac{e^4-1}{4}a=\frac{5(e^2-1)}{2}$ $(\because\ a>1)$

$$\therefore\ a=\frac{5(e^2-1)}{2}\times\frac{4}{e^4-1}=\frac{10}{e^2+1}$$

답 ①

참고

$\int 2x^2e^{2x}dx=\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}$임을 확인해 보자.

세 실수 b, c, d에 대하여 함수 $g(x)=2x^2e^{2x}$의 한 부정적분을 $G(x)=(bx^2+cx+d)e^{2x}$이라 하면

$G'(x)=(2bx+c)e^{2x}+(bx^2+cx+d)\times 2e^{2x}$

$\quad=\{2bx^2+2(b+c)x+(c+2d)\}e^{2x}$

$2b=2$, $2(b+c)=0$, $c+2d=0$에서

$b=1$, $c=-1$, $d=\frac{1}{2}$이다.

169

$f(x)=\int_{-1}^x(t-t^2)e^t\,dt$에서

$f'(x)=(x-x^2)e^x=-x(x-1)e^x$

$x=0$ 또는 $x=1$에서 $f'(x)=0$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)$, 극솟값은 $f(0)$이므로

$$f(1)-f(0)=\int_{-1}^{1}(t-t^2)e^t\,dt-\int_{-1}^{0}(t-t^2)e^t\,dt$$
$$=\int_{0}^{1}(t-t^2)e^t\,dt$$
$$=\Big[(t-t^2)e^t\Big]_0^1-\int_0^1(1-2t)e^t\,dt$$
$$=\int_0^1(2t-1)e^t\,dt$$
$$=\Big[(2t-1)e^t\Big]_0^1-\int_0^1 2e^t\,dt$$
$$=(e+1)-(2e-2)$$
$$=3-e$$

$\therefore\ p^2+q^2=3^2+(-1)^2=10$

답 10

170

함수 $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$f(g(x))=x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

$f(x)=x+\ln x$에서 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}$이므로

$$f'(g(x))=1+\frac{1}{g(x)}=\frac{1+g(x)}{g(x)}=\frac{1}{g'(x)}$$

$$\therefore\ \frac{1}{1+g(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

한편, $f(1)=1$에서 $g(1)=1$, $f(e^2)=e^2+2$에서

$g(e^2+2)=e^2$이므로

$$\int_1^{e^2+2}\frac{1}{1+g(x)}dx=\int_1^{e^2+2}\frac{g'(x)}{g(x)}dx$$
$$=\Big[\ln|g(x)|\Big]_1^{e^2+2}$$
$$=\ln|g(e^2+2)|-\ln|g(1)|$$
$$=\ln e^2-\ln 1$$
$$=2-0=2$$

답 ②

171

$0\le x\le 1$일 때 $(x+1)e^{2x}\ge 0$이므로

구하는 넓이는

$$\int_0^1(x+1)e^{2x}dx=\Big[\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}\Big]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}dx$$
$$=\left(e^2-\frac{1}{2}\right)-\Big[\frac{1}{4}e^{2x}\Big]_0^1$$
$$=\left(e^2-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}$$

답 ④

172

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x$에서 $f'(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2x}$이므로

$x=1$에서 $x=4$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\int_1^4\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{2}}\,dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^4\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\Big]_1^4$$
$$=\frac{15}{4}+\frac{1}{2}\ln 4=\frac{15}{4}+\ln 2$$

답 ②

173

$$\int_a^{x+1}f(t)dt=\ln(x^2+a)\qquad\cdots\cdots ㉠$$

의 양변에 $x=a-1$을 대입하면

$0=\ln\{(a-1)^2+a\}$

$0=\ln(a^2-a+1)$

$a^2-a+1=1$에서 $a=0$ 또는 $a=1$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

㉠에서 $F(x+1)-F(1)=\ln(x^2+1)$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x+1)=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\therefore\ f(0)=\frac{2\times(-1)}{1+1}=-1$$

답 ②

174

단면인 정사각형의 한 변의 길이가 $\sin x+\cos x$이므로

단면의 넓이는

$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$

따라서 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(1+\sin 2x)dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}$$

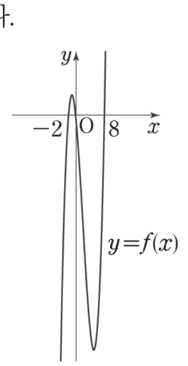
$$=\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}$$

답 ②

175

삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2-16x=x(x+2)(x-8)$의

그래프는 그림과 같다.



이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)=\int_m^{m+1}f(x)dx$이므로

$\int_m^{m+1}f(x)dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은

8이다.

답 8

176

주어진 식에서

$f'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\ln x$이므로

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\ln x\,dx$$

$$=\int\frac{\ln x}{x}dx-\int\frac{\ln x}{x^2}dx$$

$\ln x=t$라 하면 $\frac{1}{x}dx=dt$이므로

$$\int\frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C_1$$

$$=\frac{(\ln x)^2}{2}+C_1\ (\text{단, } C_1\text{은 적분상수})$$

또한

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx$$

$$=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C_2\ \ (\text{단, } C_2\text{는 적분상수})$$

이므로

$$f(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C\ \ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(e)=\frac{1}{2}+\frac{2}{e}+C=\frac{2}{e}-\frac{3}{2}$에서 $C=-2$

$$\therefore\ f(e^2)=\frac{2^2}{2}+\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e^2}-2=\frac{3}{e^2}$$

답 ③

177

$x-t=k$라 하면 $-dt=dk$이고

$t=0$일 때 $k=x$, $t=x$일 때 $k=0$이므로

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$$

$$=-\int_x^0(x-k)f(k)dk$$

$$=\int_0^x(x-k)f(k)dk$$

$$=x\int_0^x f(k)dk-\int_0^x kf(k)dk$$

$$F'(x)=\int_0^x f(k)dk+xf(x)-xf(x)$$

$$=\int_0^x\frac{1}{k+2}dk$$

$$= \Big[\ln(k+2)\Big]_0^x$$

$$= \ln(x+2) - \ln 2 = \ln\frac{x+2}{2}$$

이때 $F'(a) = 2$이므로 $\ln\dfrac{a+2}{2} = 2$에서

$$\frac{a+2}{2} = e^2$$

$\therefore\ a = 2e^2 - 2$

답 ⑤

178

조건 (나)의 좌변은

$$\int_1^2 f'(x)\ln x dx = \Big[f(x)\ln x\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx$$

$$= f(2)\ln 2 - \int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx$$

조건 (나)의 우변은 $\ln x = t$라 하면 $\dfrac{1}{x}dx = dt$이고

$x = e$일 때 $t = 1$, $x = e^2$일 때 $t = 2$이므로

$$\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x\ln x}dx = \int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt$$

즉, $f(2)\ln 2 - \displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx = \int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx$에서

$\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx = \frac{1}{2}f(2)\ln 2$이고

조건 (가)에서 $f(2) = 2$이므로

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx = \ln 2$$

답 ③

179

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(g(x)) = x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x) = 1$

이므로

$$f'(g(x))g(x) = f'(g(x))g'(x) \times \frac{g(x)}{g'(x)}$$

$$\frac{1}{x^2+2} = \frac{g(x)}{g'(x)}$$

$$\therefore\ \frac{g'(x)}{g(x)} = x^2 + 2$$

$\ln|g(x)| = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x + C$ (단, C는 적분상수)

조건 (가)에서 $f(e) = 0$이므로 $g(0) = e > 0$

$$g(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + 2x + C}$$

위의 식에 $x = 0$을 대입하면

$g(0) = e^C = e$

$\therefore\ C = 1$

따라서 $g(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + 2x + 1}$이므로

$$g(1) = e^{\frac{10}{3}}$$

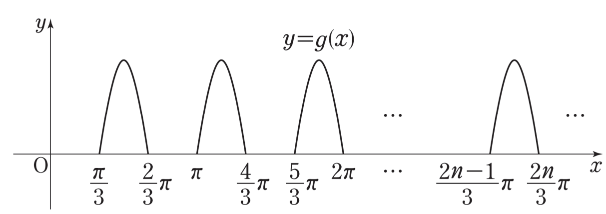
답 ⑤

180

$g(x) = |f(x)| - f(x)$라 하면

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (f(x) \ge 0) \\ -2f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

함수 $y = g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} g(x)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} -2\sin 3x\, dx$$

$$= \Big[\frac{2}{3}\cos 3x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{2}{3} - \Big(-\frac{2}{3}\Big) = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} g(x)dx = 3\int_0^{\frac{2}{3}\pi} g(x)dx = 4$$

$$\int_0^{\frac{7}{3}\pi} g(x)dx = 3\int_0^{\frac{2}{3}\pi} g(x)dx + \int_{2\pi}^{\frac{7}{3}\pi} g(x)dx$$

$$= 4 + 0 = 4$$

$\displaystyle\int_0^k g(x)dx = 4$를 만족시키는 k의 값의 범위는

$$2\pi \le k \le \frac{7}{3}\pi$$

$2\pi = 6.2\cdots$, $\dfrac{7}{3}\pi = 7.3\cdots$이므로

자연수 k의 값은 7이다.

답 7

181

$\int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$에서 $\ln x = t$라 하면 $\frac{1}{x}dx = dt$이고,

$x=1$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=\ln a$이므로

$$\int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \int_0^{\ln a}\sqrt{t}\,dt$$
$$= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\ln a}$$
$$= \frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$$

에서 $(\ln a)^{\frac{3}{2}} = 8$, $\ln a = 4$

$\therefore\ a = e^4$

답 ④

182

단면인 정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{x}+\frac{1}{x}$이므로

단면의 넓이는 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2 = x+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V = \int_1^2\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2+4\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$= 2+4\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+4-1\right)$$
$$= -2+4\sqrt{2}$$

답 ②

183

$t-x=z$로 놓으면 $1=\frac{dz}{dt}$이고

$t=0$일 때 $z=-x$, $t=x$일 때 $z=0$이므로

$$f(x) = \int_0^x t\sin(t-x)dt$$
$$= \int_{-x}^0 (x+z)\sin z dz$$
$$= x\int_{-x}^0 \sin z dz + \int_{-x}^0 z\sin z dz$$
$$= x\Big[-\cos z\Big]_{-x}^0 + \Big[-z\cos z\Big]_{-x}^0 - \int_{-x}^0(-\cos z)dz$$
$$= -x+x\cos(-x)-x\cos(-x)-\Big[-\sin z\Big]_{-x}^0$$
$$= -x+\sin x$$

따라서 $f(a)=1-a$에서 $\sin a = 1$

$\therefore\ a = 2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

즉, 양수 a의 최솟값은 $\frac{\pi}{2}$이다.

답 ①

184

조건 (나)에서

$\{f'(x)\}^2 = \{f(x)\}^2-4f(x)+3$

따라서 $x=0$에서 $x=2$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\int_0^2\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$
$$= \int_0^2\sqrt{\{f(x)\}^2-4f(x)+4}\,dx$$
$$= \int_0^2\sqrt{\{f(x)-2\}^2}\,dx$$
$$= \int_0^2\{f(x)-2\}dx\ (\because\ f(x)\geq 2)$$
$$= \int_0^2 f(x)dx-\Big[2x\Big]_0^2$$
$$= \int_0^2 f(x)dx-4 = 4$$

$\therefore\ \int_0^2 f(x)dx = 8$

답 8

185

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = f(x)+(x-1)f'(x)-x-1$

$(x-1)f'(x) = x+1$

이때 $x>1$이므로

$f'(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1+\frac{2}{x-1}$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx$$

$$=x+2\ln(x-1)+C\ \text{(단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(2)=3$이므로 $C=1$

즉, $f(x)=x+2\ln(x-1)+1$이다.

$f(10)=10+2\ln(10-1)+1=11+4\ln3$

$\therefore\ p+q=11+4=15$

답 15

186

$f(x)=2^x$에서 $f'(x)=2^x\times\ln2$이므로

$f'(1)=2\ln2$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=2\ln2(x-1)+2$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2 2^x\,dx-\frac{1}{2}\times(2-2\ln2+2+2\ln2)\times2$$

$$=\left[\frac{2^x}{\ln2}\right]_0^2-4=\frac{3}{\ln2}-4$$

$a=3$, $b=-4$이므로

$10a+b=10\times3+(-4)=26$

답 ①

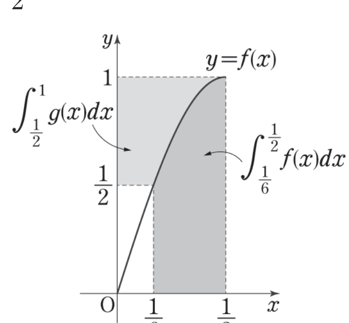
187

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{n+k}{2n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2n}\right)$$

$$=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}g(x)\,dx$$

이때 $f\left(\frac{1}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이고

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$이므로



$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}g(x)\,dx=\frac{1}{2}\times1-\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}-\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}\sin(\pi x)\,dx$$

$$=\frac{5}{12}-\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{5}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{n+k}{2n}\right)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}g(x)\,dx$$

$$=2\left(\frac{5}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)$$

$$=\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

답 ②

188

$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$이므로

조건 (나)에서 $xf'(x)-f(x)=x^3\ln x$의 식을 변형하면

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=x\ln x$$

$$\int\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}dx=\int x\ln x\,dx$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C\ \text{(단, } C\text{는 적분상수)}$$

조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로 위의 식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-\frac{1}{4}+C=1$, $C=\frac{5}{4}$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}x^3\ln x-\frac{1}{4}x^3+\frac{5}{4}x$

$\therefore\ f(4)=\frac{1}{2}\times64\times\ln4-16+5$

$=64\ln2-11$

답 ④

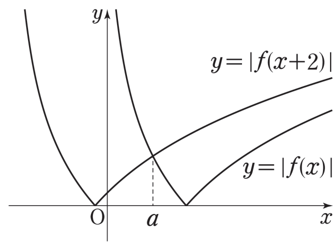
189

$g(x)=\int_x^{x+2}|f(t)|\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=|f(x+2)|-|f(x)|$

$f(x)=2\ln x-\ln3$이므로 두 함수 $y=|f(x+2)|$,

$y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 a라 하면

$x<a$일 때 $|f(x+2)|<|f(x)|$이므로 $g'(x)<0$

$x>a$일 때 $|f(x+2)|>|f(x)|$이므로 $g'(x)>0$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극소이면서 최솟값을 갖는다.

$|f(a+2)|-|f(a)|=0$에서

$|2\ln(a+2)-\ln 3|-|2\ln a-\ln 3|=0$

$2\ln(a+2)-\ln 3+2\ln a-\ln 3=0$

$2\ln\{a(a+2)\}=2\ln 3$

$a^2+2a=3,\ a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$

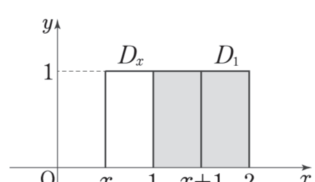
$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

따라서 구하는 k의 값은 1이다.

답 1

190

주어진 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



위의 그림에서

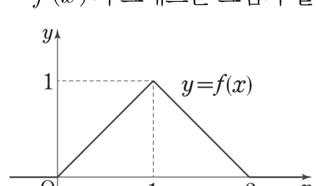
$x<0$일 때, $f(x)=0$

$0\le x<1$일 때, $f(x)=\{(x+1)-1\}\times 1=x$

$1\le x<2$일 때, $f(x)=(2-x)\times 1=2-x$

$x\ge 2$일 때, $f(x)=0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편, $x-t=k$라 하면 $-dt=dk$이고,

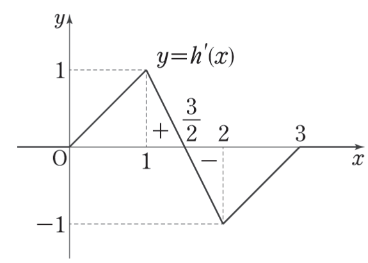
$t=0$일 때 $k=x$, $t=1$일 때 $k=x-1$이므로

$$\int_0^1 f(x-t)\,dt=\int_{x-1}^{x} f(k)\,dk$$ 참고

$h(x)=\int_{x-1}^{x} f(k)dk$라 하면

$h'(x)=f(x)-f(x-1)$

$$=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ x & (0\le x<1) \\ -2x+3 & (1\le x<2) \\ x-3 & (2\le x<3) \\ 0 & (x\ge 3) \end{cases}$$



$x=\frac{3}{2}$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $h(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극대이자 최댓값을 갖는다.

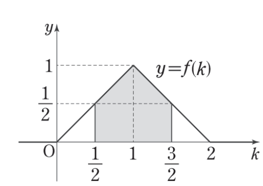
따라서 구하는 최댓값은

$$h\left(\frac{3}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(k)\,dk$$

$$=2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\frac{1}{2}\right\}=\frac{3}{4}$$

답 ③

참고



위의 그림과 같이 함수 $y=f(k)$의 그래프에서

$\int_{x-1}^{x} f(k)dk$의 값은 $x=\frac{3}{2}$일 때

최대임을 알 수 있다.

191

$\cos(2x)=\cos(x+x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$

$=1-2\sin^2 x$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \cos(2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x(1-2\sin^2 x)dx$$

이때 $\sin x = t$라 하면 $\cos x dx = dt$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x(1-2\sin^2 x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t^2)dt$$

$$= \left[t-\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

답 ⑤

192

$$\int_\pi^{2\pi} \frac{\cos x}{x^2}dx$$

$$= \int_\pi^{2\pi}\left(\cos x \times \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \left[\cos x \times \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi}\left\{(-\sin x)\times\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}dx$$

$$= -\frac{3}{2\pi} - \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x+\pi}dx$에서 $x+\pi=t$라 하면

$dx=dt$이고 $x=0$일 때 $t=\pi$, $x=\pi$일 때 $t=2\pi$이므로

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x+\pi}dx = \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin(t-\pi)}{t}dt$$

$$= -\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin t}{t}dt \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡$-$㉠에서

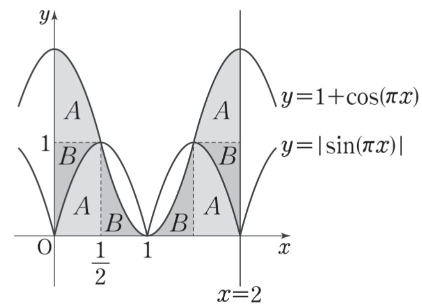
$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x+\pi}dx - \int_\pi^{2\pi}\frac{\cos x}{x^2}dx = \frac{3}{2\pi}$$

답 ②

193

주어진 그래프에서 대칭성에 의하여

넓이가 같은 부분을 A와 B로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 |\sin(\pi x)|dx = 2\int_0^1 \sin(\pi x)dx$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi}$$

다른풀이

두 곡선 $y=|\sin(\pi x)|$, $y=1+\cos(\pi x)$는

모두 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$0 \le x \le 2$에서 두 곡선이 만나는 점의 x좌표는

$\dfrac{1}{2}$, 1, $\dfrac{3}{2}$이다.

이때 구하는 넓이를 S라 하면

$$\frac{1}{2}S = \int_0^{\frac{1}{2}}[\{1+\cos(\pi x)\}-\sin(\pi x)]dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1[\sin(\pi x)-\{1+\cos(\pi x)\}]dx$$

$$= \left[x+\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)+\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)-x-\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{1}{2}+\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore\ S = 2\times\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

답 ④

194

점 P의 x좌표가 t일 때 단면인 정삼각형의 한 변의 길이가

$\sqrt{4t\ln t}$ 이므로 그 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{4t\ln t})^2 = \sqrt{3}\,t\ln t$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^e \sqrt{3}\,t\ln t\,dt$$
$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}t^2\ln t\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t^2\times\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}e^2\ln e-\left[\frac{\sqrt{3}}{4}t^2\right]_1^e$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}e^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(e^2-1)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(e^2+1)$$

답 ②

195

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(x-3t)f'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x}{x-2}\int_2^x f'(t)dt-\lim_{x\to2}\frac{3}{x-2}\int_2^x tf'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to2}x\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f'(t)dt$$
$$-3\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x tf'(t)dt$$
$$=2f'(2)-3\times2f'(2)=-4f'(2)$$

$f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$이므로

$-4f'(2)=-4\times(-1)\times e^{-1}=\frac{4}{e}$

답 ③

196

$x=4t,\ y=t^2-2\ln t$에서

$\frac{dx}{dt}=4,\ \frac{dy}{dt}=2t-\frac{2}{t}$이므로 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{16+\left(2t-\frac{2}{t}\right)^2}$$
$$=\sqrt{4t^2+\frac{4}{t^2}+8}$$
$$=\sqrt{\left(2t+\frac{2}{t}\right)^2}$$
$$=2t+\frac{2}{t}\ (\because\ t>0)$$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2t+\frac{2}{t}\geq2\sqrt{2t\times\frac{2}{t}}=4$$

이고 $2t=\frac{2}{t}$, 즉 $t=1$일 때 점 P의 속력이 최소이므로

$a=1$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^4\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_1^4\left(2t+\frac{2}{t}\right)dt$$
$$=\left[t^2+2\ln|t|\right]_1^4$$
$$=16+2\ln4-1$$
$$=15+4\ln2$$

답 ④

197

$x_k=1+\frac{2k}{n}$이므로

$$S_k=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2k}{n}\right)f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{2}\left(1+\frac{2k}{n}\right)f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{2k}{n}\right)f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\int_1^3 xf(x)dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_1^3\left(6x-\frac{1}{2}x^3\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[3x^2-\frac{1}{8}x^4\right]_1^3=\frac{7}{2}$$

답 ⑤

198

조건 (가)에서 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=4$ ……㉠

조건 (가)에서 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+g(x)=2\cos(2x)$에서

$f'(x)=2\cos(2x)-g(x)$

이를 조건 (나)의 식에 대입하면

$\{2\cos(2x)-g(x)\}g(x)=\cos^2(2x)$

$\{g(x)\}^2-2g(x)\cos(2x)+\cos^2(2x)=0$

$\{g(x)-\cos(2x)\}^2=0$에서

$g(x)=\cos(2x)$이므로

$f'(x)=\cos(2x)$

$f(x)=\int\cos(2x)dx=\frac{1}{2}\sin(2x)+C$

(단, C는 적분상수)

㉠에 의하여 $f(0)=0+C=4$에서 $C=4$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)+4$

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)+g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{9}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=4$

답 4

199

$f(2t)=f(t)-\frac{2}{t}$의 양변을 t로 나누면

$\frac{f(2t)}{t}=\frac{f(t)}{t}-\frac{2}{t^2}$

$g(t)=\frac{f(t)}{t}\ (t>0)$라 하면

$2g(2t)=g(t)-\frac{2}{t^2}$이므로

$2\int_1^x g(2t)dt=\int_1^x g(t)dt-\int_1^x\frac{2}{t^2}dt$ ……㉠

$2t=u$라 하면 $2dt=du$이고

$t=1$일 때, $u=2$, $t=x$일 때, $u=2x$이므로

$$2\int_1^x g(2t)dt=\int_2^{2x}g(u)du=\int_2^{2x}g(t)dt$$
$$=\int_1^{2x}g(t)dt-\int_1^2 g(t)dt$$
$$=\int_1^{2x}g(t)dt-4$$

$\left(\because\ \int_1^2 g(t)dt=\int_1^2\frac{f(t)}{t}dt=4\right)$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$\int_1^{2x}g(t)dt-4=\int_1^x g(t)dt+\left[\frac{2}{t}\right]_1^x$

$\int_1^{2x}g(t)dt+\int_x^1 g(t)dt=\frac{2}{x}+2$

$\int_x^{2x}g(t)dt=\frac{2}{x}+2$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\int_2^4 g(t)dt=\int_2^4\frac{f(t)}{t}dt$$
$$=\int_2^4\frac{f(x)}{x}dx$$
$$=1+2=3$$

답 3

200

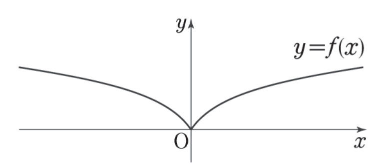
함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고,

방정식 $\frac{1+x}{k}=1$에서 $x=k-1$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$-k+1$ 또는 $k-1$이다.

(i) $k=1$일 때



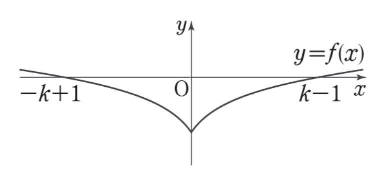
모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이므로

$|f(x)|=f(x)$이다.

따라서 부등식 $\int_a^{a+1}f(x)dx<\int_a^{a+1}|f(x)|dx$를

만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $k\geq 2$일 때



이때 부등식 $\int_a^{a+1}f(x)dx<\int_a^{a+1}|f(x)|dx$를

만족시키려면

구간 $[a, a+1]$에서 $f(x)<0$인 값이 존재해야 한다.

따라서 a의 값의 범위는 $-k<a<k-1$이므로

정수 a의 값은 $-k+1, -k+2, \cdots, k-2$이고,

그 개수는 $(k-2)-(-k+1)+1=2k-2$이다.

따라서 $2k-2=14$에서 $k=8$

(i), (ii)에 의하여 $k=8$이므로

$\int_{1-k}^{k-1}f(x)dx$

$=\int_{-7}^{7}f(x)dx=2\int_0^7\log_2\frac{1+x}{8}dx$

$= 2\int_0^7 \{-3+\log_2(1+x)\}dx$

$= 2\left\{\left[-3x\right]_0^7 + \left(\left[(1+x)\log_2(1+x)\right]_0^7 - \int_0^7 \frac{1}{\ln 2}dx\right)\right\}$

$= 2\left\{-21+\left(8\log_2 8 - \left[\frac{x}{\ln 2}\right]_0^7\right)\right\}$

$= 6-\frac{14}{\ln 2}$

$\therefore\ p+q=6+14=20$

답 20

201

$x^2-4=t$라 하면 $2xdx=dt$이고,

$x=1$일 때 $t=-3$, $x=2$일 때 $t=0$이므로

$$\int_1^2 2x^3e^{x^2-4}dx=\int_{-3}^0 (t+4)e^t dt$$
$$=\left[(t+4)e^t\right]_{-3}^0-\int_{-3}^0 e^t dt$$
$$=(4-e^{-3})-\left[e^t\right]_{-3}^0$$
$$=(4-e^{-3})-(1-e^{-3})=3$$

답 ⑤

202

$\int_e^{e^2}\frac{f(f(x))}{xf(x)}dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$에서

$\ln x=t$라 하면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx=\int_1^2\frac{\ln t}{t}dt$$

$\ln t=s$라 하면 $\frac{1}{t}=\frac{ds}{dt}$이고

$t=1$일 때 $s=0$, $t=2$일 때 $s=\ln 2$이므로

$$\int_1^2\frac{\ln t}{t}dt=\int_0^{\ln 2}s\,ds=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

답 ③

203

$\int_1^x ef(t)dt=\frac{1}{2}e^{2x-1}-ax$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=\frac{e}{2}-a$에서 $a=\frac{e}{2}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$ef(x)=e^{2x-1}-\frac{e}{2}$

$f(x)=e^{2x-2}-\frac{1}{2}$

$\therefore\ f\left(\frac{2a}{e}\right)=f(1)=e^0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

답 ②

204

$\int_1^x f(t)dt=\sin(\pi x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$의

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\pi\cos(\pi x)-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

이때 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+x}\int_{1-x}^{1+x}f(t)dt$

$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x+1}\times\left\{\frac{F(1+x)-F(1)}{x}+\frac{F(1-x)-F(1)}{-x}\right\}\right]$

$=\frac{1}{1}\times\{f(1)+f(1)\}=2f(1)$

$=2\times\left(-\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-3\pi$

답 ①

205

$0\le h\le 2$인 실수 h에 대하여

함수 $y=\frac{1}{(x+1)^2}$의 그래프와 x축 및

두 직선 $x=h$, $x=h+3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를

$S(h)$라 하면

$$S(h)=\int_h^{h+3}\frac{1}{(x+1)^2}dx=\left[-\frac{1}{x+1}\right]_h^{h+3}$$
$$=\frac{1}{h+1}-\frac{1}{h+4}$$

이므로 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^2 S(h)dh$$

$$=\int_0^2\left(\frac{1}{h+1}-\frac{1}{h+4}\right)dh$$

$$=\Big[\ln(h+1)-\ln(h+4)\Big]_0^2=\ln 2$$

답 ①

206

구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y=x\cos x$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는

$x\cos x=x,\ x(\cos x-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2\pi$

$f(x)=x\cos x$라 하면

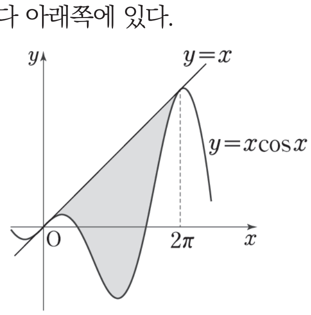
$f'(x)=\cos x-x\sin x$

$f'(0)=f'(2\pi)=1$

또한 모든 실수 x에 대하여 $\cos x\le 1$이므로

$x\ge 0$일 때 $x\cos x\le x$이다.

따라서 그림과 같이 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y=x\cos x$는 직선 $y=x$보다 아래쪽에 있다.



구간 $[0,\ 2\pi]$에서 곡선 $y=x\cos x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{2\pi}(x-x\cos x)dx$$

$$=\int_0^{2\pi}x(1-\cos x)dx$$

$$=\Big[x(x-\sin x)\Big]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}(x-\sin x)dx$$

$$=4\pi^2-\left[\frac{1}{2}x^2+\cos x\right]_0^{2\pi}$$

$$=4\pi^2-2\pi^2=2\pi^2$$

답 ⑤

207

$1\le k\le n$인 모든 자연수 k에 대하여

$x_k=2+\dfrac{3}{n}k$이고

$$\overline{\mathrm{OA}_k}=\sqrt{(x_k)^2+(x_k\sqrt{5-x_k})^2}$$

$$=x_k\sqrt{6-x_k}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{OA}_k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\sqrt{6-x_k}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3}{n}k\right)\sqrt{6-\left(2+\frac{3}{n}k\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\int_2^5 x\sqrt{6-x}\,dx$$

이때 $6-x=t$라 하면 $-dx=dt$이고

$x=2$일 때 $t=4$, $x=5$일 때 $t=1$이므로

$$\frac{1}{3}\int_2^5 x\sqrt{6-x}\,dx=\frac{1}{3}\int_4^1\{-(6-t)\sqrt{t}\}dt$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^4\left(6t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{3}\left[4t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{78}{5}=\frac{26}{5}$$

$\therefore\ p+q=5+26=31$

답 31

208

$$f(x)=\int_a^x(x-t)e^{-t}dt+a$$

$$=x\int_a^x e^{-t}dt-\int_a^x te^{-t}dt+a$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\int_a^x e^{-t}dt+xe^{-x}-xe^{-x}$$

$$=\int_a^x e^{-t}dt=\Big[-e^{-t}\Big]_a^x$$

$$=-e^{-x}+e^{-a}$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=a$

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이면서 최소이다.
이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 2이므로
$f(a)=2$

$f(x)=x\int_a^x e^{-t}dt-\int_a^x te^{-t}dt+a$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$f(a)=a$

$\therefore\ a=2$

따라서 $f'(x)=-e^{-x}+e^{-2}$이므로

$f(x)=e^{-x}+e^{-2}x+C$ (C는 적분상수)

$f(2)=2$에서 $C=2-3e^{-2}$

$\therefore\ f(x)=e^{-x}+e^{-2}x+2-3e^{-2}$

$\therefore\ f(3)=e^{-3}+3e^{-2}+2-3e^{-2}=2+\dfrac{1}{e^3}$

답 ④

209

함수 $f(x)$의 이계도함수가 존재하고
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로
$f'(-x)=f'(x)$이고 $f''(-x)=-f''(x)$이다.
함수 $g(x)=f(f'(x))$에 대하여
$g'(x)=f'(f'(x))f''(x)$에서

$$\begin{aligned} g'(-x)&=f'(f'(-x))f''(-x)\\ &=-f'(f'(x))f''(x)\\ &=-g'(x)\end{aligned}$$

이므로 $h(x)=xg'(x)$라 하면
모든 실수 x에 대하여
$h(-x)=-xg'(-x)=xg'(x)=h(x)$이다.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}xg'(x)dx=2\int_0^2 xg'(x)dx\\ &=2\Big[xg(x)\Big]_0^2-2\int_0^2 g(x)dx\\ &=4g(2)-2\int_0^2 g(x)dx\\ &=4f(f'(2))-2\int_0^2 g(x)dx\\ &=4f(1)-2\int_0^2 g(x)dx\\ &=4\{f(1)-8\}\end{aligned}$$

$\therefore\ \int_0^2 g(x)dx=16$

답 ④

210

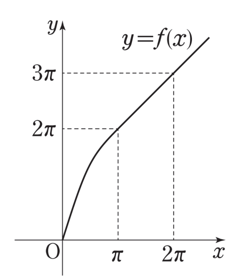
조건 (가)에서 $0\le x\le\pi$일 때, $f(x)=2x+\sin x$이므로
$x=\pi$를 대입하면 $f(\pi)=2\pi+\sin\pi=2\pi$
$f'(x)=2+\cos x\ (0<x<\pi)$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 가지므로
$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned}\therefore\ f'(\pi)&=\lim_{x\to\pi-}f'(x)=\lim_{x\to\pi-}(2+\cos x)\\ &=2+\cos\pi=1\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $f(t+\pi)\ge f(t)+\pi$이므로
$f(t+\pi)-f(t)\ge\pi$

$\dfrac{f(t+\pi)-f(t)}{\pi}\ge 1$

$\int_\pi^{2\pi}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$는 $\pi\le x\le 2\pi$에서
곡선 $y=f(x)$의 길이이므로
곡선의 길이가 최소가 되려면 $0\le t\le\pi$에서
$\dfrac{f(t+\pi)-f(t)}{\pi}=1$, 즉 $\pi\le x\le 2\pi$에서 곡선
$y=f(x)$는 다음 그림과 같은 직선이 되어야 한다.



구하는 곡선의 길이의 최솟값이 $\sqrt{\pi^2+\pi^2}=\sqrt{2}\pi$이므로
$a=\sqrt{2}$
$\therefore\ 10a^2=20$

답 20

211

$x+1=t$라 하면 $dx=dt$이고
$x=1$일 때 $t=2$, $x=3$일 때 $t=4$이다.

$$\therefore \int_1^3 x\ln(x+1)dx$$

$$=\int_2^4 (t-1)\ln t\,dt=\int_2^4 t\ln t dt-\int_2^4 \ln t dt$$

$$=\left(\left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_2^4-\int_2^4\frac{t}{2}dt\right)-\left(\left[t\ln t\right]_2^4-\int_2^4 1dt\right)$$

$$=\left(14\ln 2-\left[\frac{t^2}{4}\right]_2^4\right)-\left(6\ln 2-\left[t\right]_2^4\right)$$

$$=(14\ln 2-3)-(6\ln 2-2)=-1+8\ln 2$$

답 ⑤

212

$x=0$에서 $x=a$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은

$$l=\int_0^a\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

$$=\int_0^a\sqrt{1+(x^2+4x+3)}\,dx$$

$$=\int_0^a\sqrt{(x+2)^2}\,dx=\int_0^a(x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^a=\frac{1}{2}a^2+2a=6$$

이므로

$a^2+4a-12=0,\ (a+6)(a-2)=0$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

답 ⑤

213

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}f\left(\frac{(n+2k)\pi}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}2x\cos x\,dx$$

$$=\left[2x\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}2\sin x\,dx$$

$$=(-3\pi-\pi)-\left[-2\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=-4\pi$$

답 ①

214

$f(x)+\cos^3 x=\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt$의

양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+1=0$이므로 $f(0)=-1$ ……㉠

한편,

$$\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt=x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x tf'(t)\,dt$$

이므로

$$f(x)+\cos^3 x=x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x tf'(t)\,dt$$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-3\cos^2 x\sin x$

$$=\int_0^x f'(t)\,dt+xf'(x)-xf'(x)$$

$$=\int_0^x f'(t)\,dt$$

$$=\left[f(t)\right]_0^x$$

$=f(x)-f(0)$

$=f(x)+1\ (\because$ ㉠$)$

따라서 $f'(x)-f(x)=3\cos^2 x\sin x+1$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+1$$

$$=\frac{17}{8}$$

$\therefore\ p+q=8+17=25$

답 25

215

단면인 정삼각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{\ln x}+\frac{1}{x}$이므로

단면의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{\ln x}+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\ln x+\frac{2\sqrt{\ln x}}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e\left(\ln x+\frac{2\sqrt{\ln x}}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\int_1^e\ln x\,dx+\int_1^e\frac{2\sqrt{\ln x}}{x}dx+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx\right)$$

$$\int_1^e \ln x dx = \Big[x\ln x - x\Big]_1^e = 1$$

$\int_1^e \frac{2\sqrt{\ln x}}{x}dx$에서 $\ln x = t$라 하면 $\frac{1}{x}dx = dt$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e \frac{2\sqrt{\ln x}}{x}dx = \int_0^1 2\sqrt{t}\,dt = \left[\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\int_1^e \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e}+1$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{4}{3}-\frac{1}{e}+1\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{10}{3}-\frac{1}{e}\right)$$

답 ②

216

$\int_0^1 f'(2\sqrt{x})dx$에서 $2\sqrt{x}=t$로 놓으면

$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{dt}{dx}$이고 $x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때

$t=2$이므로

$$\int_0^1 f'(2\sqrt{x})dx = \int_0^2 \frac{t}{2}f'(t)dt$$
$$= \left[\frac{t}{2}f(t)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2}f(t)dt$$
$$= f(2) - \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$$

이때 $f(0)=0$, $f(2)=4$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 조건 (나)에서

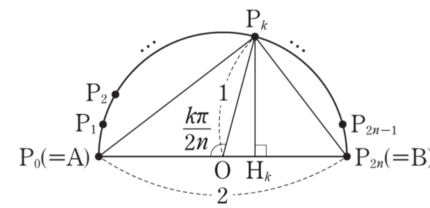
$$\int_0^2 f(x)dx = 5$$

$$\therefore \int_0^1 f'(2\sqrt{x})dx = f(2)-\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$$
$$= 4-\frac{1}{2}\times 5 = \frac{3}{2}$$

답 ③

217

반원의 중심을 O라 하면 $\angle P_0OP_k = \frac{k\pi}{2n}$이다.



이때 점 P_k에서 선분 P_0P_{2n}에 내린 수선의 발을 H_k라 하면

$$\overline{P_kH_k} = \overline{OP_k}\times \sin\frac{k\pi}{2n} = \sin\frac{k\pi}{2n}$$

따라서 삼각형 $P_0P_kP_{2n}$의 넓이는

$$S_k = \frac{1}{2}\times\overline{P_0P_{2n}}\times\overline{P_kH_k}$$
$$= \frac{1}{2}\times 2\times\sin\frac{k\pi}{2n} = \sin\frac{k\pi}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{2n-1}kS_k$$
$$= \frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$= \frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$= \frac{4}{\pi}\lim_{m\to\infty}\frac{\pi}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{k\pi}{m}\sin\frac{k\pi}{m}\quad (\because\ m=2n)$$
$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x dx$$
$$= \frac{4}{\pi}\left\{\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)dx\right\}$$
$$= \frac{4}{\pi}\times\left(\pi-\Big[-\sin x\Big]_0^{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}\times\pi = 4$$

답 4

218

$x-t=s$라 하면 $-dt=ds$이고

$t=0$일 때 $s=x$, $t=x$일 때 $s=0$이므로

$$\int_0^x tf(x-t)dt = -\int_x^0 (x-s)f(s)ds$$
$$= \int_0^x (x-s)f(s)ds$$
$$= x\int_0^x f(s)ds - \int_0^x sf(s)ds$$

$$\therefore x\int_0^x f(s)ds - \int_0^x sf(s)ds$$
$$= (x+1)^2 - e^{kx} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(s)ds + xf(x) - xf(x) = 2(x+1) - ke^{kx}$$

$$\therefore \int_0^x f(s)ds = 2(x+1) - ke^{kx} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0 = 2-k$

$\therefore k = 2$

이를 ㉡에 대입하면

$$\int_0^x f(s)ds = 2(x+1) - 2e^{2x}$$

이므로 위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = 2 - 4e^{2x}$

$\therefore f(2) = 2 - 4e^4$

답 ②

219

$f(x) = ax + b$ (단, $a \neq 0$)라 하면

조건 (가)에서 $-\dfrac{a}{2} + b = 10$, 즉 $2b - a = 20$이다.

조건 (나)에서 $2x = t$라 하면 $2dx = dt$이고,

$x = -\dfrac{\pi}{12}$일 때 $t = -\dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{12}$일 때 $t = \dfrac{\pi}{6}$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} f(x)\cos(2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f\left(\frac{t}{2}\right)\cos t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{a}{2}t + b\right)\cos t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{a}{2}t\cos t\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} b\cos t\,dt$$

이때 함수 $y = x\cos x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

함수 $y = \cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{a}{2}t\cos t\,dt = 0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} b\cos t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} b\cos t\,dt$$

따라서

$$\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} f(x)\cos(2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} b\cos t\,dt$$

$$= \Big[b\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{b}{2}$$

즉, $\dfrac{b}{2} = 8$에서 $b = 16$이고,

$2b - a = 20$에서 $a = 12$이므로

$f(x) = 12x + 16$이다.

$\therefore f(2) = 12 \times 2 + 16 = 40$

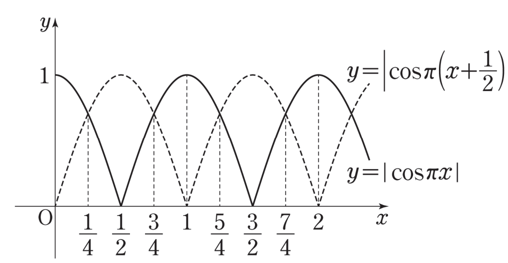
답 40

220

구간 $\left[t, t+\dfrac{1}{2}\right]$에서 함수 $y = |\cos\pi x|$의 최댓값은

극댓값 또는 구간의 양 끝인 $x = t$, $x = t + \dfrac{1}{2}$일 때의

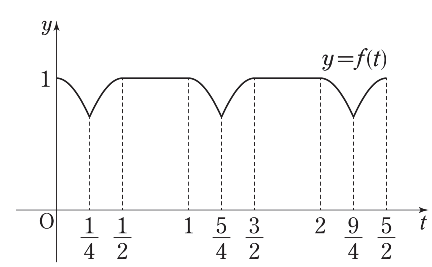
함숫값이다.



따라서 주어진 두 함수 $y = |\cos\pi x|$,

$y = \left|\cos\pi\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right|$의 그래프를 이용하여 함수

$y = f(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



이때

$$\int_0^{\frac{1}{4}} f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \cos\pi t\,dt = \left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}$$

이므로

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt$$

$$= 2\int_0^1 f(t)dt$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{1}{4}} f(t)dt+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt\right)$$

$$=2\left(2\int_0^{\frac{1}{4}} f(t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1dt\right)$$

$$=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}+1$$

답 ③

221

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(-n+k)f\left(-1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{k}{n}\right)f\left(-1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_{-1}^{0} xe^x dx$$

$$=\left[xe^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0} e^x dx$$

$$=\frac{1}{e}-\left[e^x\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}-1$$

답 ②

222

$3x+1=t$라 하면 $3dx=dt$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^1 f(3x+1)dx=\frac{1}{3}\int_1^4 f(t)dt$$

$$=\frac{1}{3}(3\times3+1\times3)=4$$

답 4

223

$x=a\sin^3 t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=3a\sin^2 t\cos t$

$y=a\cos^3 t$에서 $\dfrac{dy}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t$

점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$까지

움직인 거리는

$$\int_0^{\theta}\sqrt{(3a\sin^2 t\cos t)^2+(-3a\cos^2 t\sin t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\theta}|3a\sin t\cos t|dt\ \ (\because\ \sin^2 t+\cos^2 t=1)$$

$$=\int_0^{\theta}3a\sin t\cos t\,dt\ \ (\because\ a>0)$$

$$=\left[\frac{3}{2}a\sin^2 t\right]_0^{\theta}$$

$$=\frac{3}{2}a\sin^2\theta$$

이므로 $\dfrac{3}{2}a\sin^2\theta=\sin^2\theta$에서

$$a=\frac{2}{3}$$

$\therefore\ 60a=40$

답 40

224

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=e^{2x}+ae^x+8x+9$의 양변에 $x=0$을

대입하면

$0=1+a+9$이므로 $a=-10$

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=e^{2x}-10e^x+8x+9$의 양변을 x에 대하여

미분하면

$$f(x)=2e^{2x}-10e^x+8$$

$$=2(e^x-1)(e^x-4)$$

x에 대한 방정식 $f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\ln4$이다.

구간 $[0, \ln4]$에서 $f(x)\le0$이므로

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=-\int_0^{\ln4} f(x)dx$$

$$=-(e^{2\ln4}-10e^{\ln4}+8\ln4+9)$$

$$=-(16-40+8\ln4+9)$$

$$=15-16\ln2$$

$\therefore\ p+q=15+16=31$

답 31

225

$$f(x)=e^{x-1}+\int_1^x\left\{4-\frac{f(t)}{t}\right\}dt \qquad \cdots\cdots㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^{x-1}+4-\dfrac{f(x)}{x}$

$xf'(x)=xe^{x-1}+4x-f(x)$

$xf'(x)+f(x)=xe^{x-1}+4x$

$\{xf(x)\}'=xe^{x-1}+4x$

$xf(x)=\displaystyle\int(xe^{x-1}+4x)dx$

$\qquad=(x-1)e^{x-1}+2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=2+C=1$이므로 $C=-1$

따라서 $f(x)=\dfrac{(x-1)e^{x-1}}{x}+2x-\dfrac{1}{x}$이므로

$f(2)=\dfrac{e}{2}+4-\dfrac{1}{2}=\dfrac{e}{2}+\dfrac{7}{2}$

답 ②

226

$f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x-a}$에서

$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}(e^x-a)-e^{2x}\times e^x}{(e^x-a)^2}=\dfrac{e^{2x}(e^x-2a)}{(e^x-a)^2}$

이때 함수 $f(x)$는 $x=\ln a$를 제외한 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고, $x=\ln 6$에서 극값을 가지므로

$f'(\ln 6)=0$이다.

즉, $e^{\ln 6}-2a=6-2a=0$에서 $a=3$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x-3}$

$\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x-3}dx$에서 $e^x-3=t$라 하면 $e^xdx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=-2$, $x=\ln 2$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x-3}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{t+3}{t}dt=\int_{-2}^{-1}\left(1+\frac{3}{t}\right)dt$$

$$=\Big[t+3\ln|t|\Big]_{-2}^{-1}$$

$$=1-3\ln 2=\ln\frac{e}{8}$$

답 ②

227

입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 정사각형의 한 변의 길이가 $|f(x)|$이므로

단면의 넓이는 $\{f(x)\}^2$이다.

따라서 입체도형의 부피는

$\displaystyle\int_0^t\{f(x)\}^2dx=(t+1)\ln(t+1)-t$

위 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\{f(t)\}^2=\ln(t+1)+(t+1)\times\dfrac{1}{t+1}-1=\ln(t+1)$

$$\therefore\ \int_0^{e-1}f(x)f'(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{e-1}2f(x)f'(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{e-1}[\{f(x)\}^2]'dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\{f(x)\}^2\Big]_0^{e-1}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ln(x+1)\Big]_0^{e-1}=\frac{1}{2}$$

답 ①

228

$$\int_0^{\ln 3}xg''(x)dx=\Big[xg'(x)\Big]_0^{\ln 3}-\int_0^{\ln 3}g'(x)dx$$

$$=\ln 3\times g'(\ln 3)-\{g(\ln 3)-g(0)\} \qquad \cdots\cdots㉠$$

이때 $g(0)=\alpha$라 하면 $f(\alpha)=2\ln(\tan\alpha)=0$에서

$\tan\alpha=1$, 즉 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$이다. ($\because\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$)

$g(\ln 3)=\beta$라 하면 $f(\beta)=2\ln(\tan\beta)=\ln 3$에서

$\tan\beta=\sqrt{3}$, 즉 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$이다. ($\because\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$)

또한 함수 $f(x)=2\ln(\tan x)$에서

$f'(x)=2\times\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}=\dfrac{2}{\sin x\cos x}$

이므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(\ln 3)=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}$ ($\because\ g(\ln 3)=\dfrac{\pi}{3}$)

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

따라서 ㉠에서

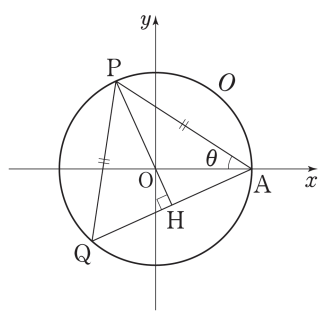
$$\int_0^{\ln 3} xg''(x)dx = \ln 3 \times \frac{\sqrt{3}}{8} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\sqrt{3}\ln 3 - \frac{1}{12}\pi$$

이므로 $p = \frac{1}{8}$, $q = \frac{1}{12}$이다.

$\therefore\ \frac{1}{pq} = 96$

답 96

229



삼각형 APQ는 $\overline{PA} = \overline{PQ}$인 이등변삼각형이므로 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 원의 중심 O를 지나는 직선 PH는 선분 AQ의 수직이등분선이고 두 삼각형 APH, QPH는 서로 합동이다.

$\therefore\ \angle APH = \angle QPH = \theta$

삼각형 AOP에서 $\angle PAO = \angle APO = \theta$이므로

$\angle AOP = \pi - 2\theta$이고,

이때 점 P의 좌표는 $(\cos(\pi - 2\theta),\ \sin(\pi - 2\theta))$, 즉 $(-\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$이므로

$\overline{AP}^2 = (1 + \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta = 2 + 2\cos 2\theta$

$$\therefore\ S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{PQ} \times \sin(\angle APQ)$$
$$= \frac{1}{2} \times \overline{AP}^2 \times \sin 2\theta$$
$$= (1 + \cos 2\theta)\sin 2\theta$$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(\theta)\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta)\sin 2\theta\,d\theta$에서

$1 + \cos 2\theta = t$라 하면 $-2\sin 2\theta = \frac{dt}{d\theta}$이고

$\theta = \frac{\pi}{6}$일 때 $t = \frac{3}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 $t = \frac{1}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta)\sin 2\theta\,d\theta = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}t\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} t\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

답 ③

230

조건 (가), (다)에 의하여

$f(0) = 1$, $f'(0) = -1$이고

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 $f''(x) = -\cos x$이므로

$f'(x) = -\sin x + C_1$에서 $-1 = 0 + C_1$,

즉 $C_1 = -1$이고

$f(x) = \cos x - x + C_2$에서 $1 = 1 + C_2$,

즉 $C_2 = 0$이다. (단, C_1과 C_2는 적분상수)

따라서 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f(x) = \cos x - x$이고,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 $f(x) = \cos x - x$이고

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$이다.

조건 (나)에 의하여

$\frac{\pi}{2} \le x < \pi$에서 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \ge f'(x)$,

즉 $-2 \ge f'(x)$이므로

양변을 적분하여 정리하면

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} (-2)dt \ge \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f'(t)dt,$$

$$-2x + \pi \ge f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$-2x + \frac{\pi}{2} \ge f(x)$이다.

따라서 그림과 같이

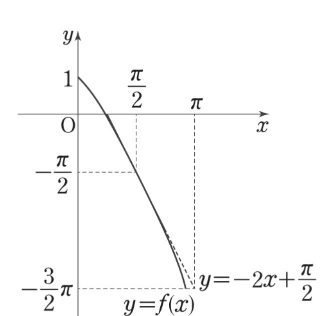
구간 $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$에서

함수 $y = f(x)$의 그래프는

직선 $y = -2x + \frac{\pi}{2}$와

일치하거나 아래에 놓여

있으므로



$$\int_0^{\pi} f(x)dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$$
$$\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-2x + \frac{\pi}{2}\right)dx$$
$$= \left[\sin x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-x^2 + \frac{\pi}{2}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= \left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right) + \left(-\frac{\pi^2}{2}\right) = 1 - \frac{5}{8}\pi^2$$

에서 최댓값은 $1 - \frac{5}{8}\pi^2$이다.

$$\therefore\ 16(p+q) = 16\left\{1 + \left(-\frac{5}{8}\right)\right\} = 6$$

답 6

231

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1 + \frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1 + \frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$$

$1 + x^2 = t$라 하면 $2xdx = dt$이고

$x = 1$일 때 $t = 2$, $x = 3$일 때 $t = 10$이므로

$$\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{x}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_2^{10} \frac{1}{t}dt = \frac{1}{4}\Big[\ln t\Big]_2^{10}$$
$$= \frac{1}{4}(\ln 10 - \ln 2) = \frac{\ln 5}{4}$$

답 ①

232

단면인 정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{x\sin x}$ 이므로

단면의 넓이는 $x\sin x$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx = \Big[-x\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$$
$$= 2\pi + \Big[\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

답 ②

233

조건 (나)에서 모든 양수 x에 대하여 $f(x) > 0$이고

$f(x)\ln x = 2x^2 f'(x)$이므로

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln x}{2x^2}$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{\ln x}{2x^2}dx$$

좌변의 식을 정리하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| = \ln f(x)\ (\because\ f(x) > 0)$$

우변의 식을 정리하면

$$\int \frac{\ln x}{2x^2}dx = -\frac{1}{2x}\ln x + \int \frac{1}{2x^2}dx$$ 참고

$$= -\frac{1}{2x}\ln x - \frac{1}{2x} + C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$$\therefore\ \ln f(x) = -\frac{1}{2x}\ln x - \frac{1}{2x} + C$$

조건 (가)에서 $f(1) = 1$이므로

$\ln f(1) = -\frac{1}{2} + C = 0$에서 $C = \frac{1}{2}$

따라서 $\ln f(x) = -\frac{1}{2x}\ln x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$이므로

$$\ln f(e) = -\frac{1}{2e} - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

답 ③

참고

$\int \frac{\ln x}{2x^2}dx$에서 $u(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{2x^2}$이라 하면

$u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = -\frac{1}{2x}$이므로 부분적분법에 의하여

$$\int \frac{\ln x}{2x^2}dx = -\frac{1}{2x}\ln x + \int \frac{1}{2x^2}dx$$

234

$f(x) = \int_0^x (t-a)e^t dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = (x-a)e^x$

방정식 $f'(x) = 0$의 해는 $x = a$뿐이고 $(\because\ e^x > 0)$

$x = a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이면서 최소이다.

$$g(a)=f(a)=\int_0^a (t-a)e^t dt$$
$$=\Big[(t-a)e^t\Big]_0^a-\int_0^a e^t dt$$
$$=a-\Big[e^t\Big]_0^a=a+1-e^a$$

$g'(a)=1-e^a$

$g(k)=g'(k)$에서

$k+1-e^k=1-e^k$

$\therefore\ k=0$

답 ③

235

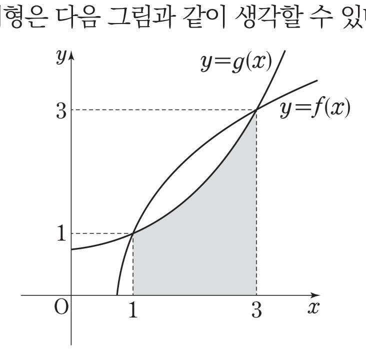
$\displaystyle\int_1^9 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$에서 $\sqrt{x}=s$로 놓으면

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{ds}{dx}$이고 $x=1$일 때 $s=1$, $x=9$일 때

$s=3$이므로

$$\int_1^9 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=\int_1^3 2g(s)ds=2\int_1^3 g(s)ds$$

함수 $f(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(x)>0$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같이 생각할 수 있다.



이때 $\displaystyle\int_1^3 g(s)ds$의 값은 색칠한 부분의 넓이를 의미하므로

조건 (가), (나)에 의하여

$$\int_1^3 g(s)ds=3\times3-1\times1-\int_1^3 f(s)ds$$
$$=9-1-5=3$$
$$\therefore\ \int_1^9 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^3 g(s)ds=2\times3=6$$

답 6

236

$\displaystyle\int_{-1}^1 f\left(\frac{x}{t}\right)dx$에서 $\dfrac{x}{t}=s$로 놓으면 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{ds}{dx}$이고

$x=-1$일 때 $s=-\dfrac{1}{t}$, $x=1$일 때 $s=\dfrac{1}{t}$이므로

$$\int_{-1}^1 f\left(\frac{x}{t}\right)dx=\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}} tf(s)ds=t\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}} f(s)ds$$

따라서 $\displaystyle t\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}} f(s)ds=t\sin\frac{1}{t}$이고 $t\neq0$이므로

$$\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}} f(s)ds=\sin\frac{1}{t}$$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$-\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t^2}f\left(-\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t}$$ 참고

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{t}\right)+f\left(-\frac{1}{t}\right)=\cos\frac{1}{t}$$

위의 식의 양변에 $t=\dfrac{3}{\pi}$을 대입하면

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

답 ④

참고

$\displaystyle\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}} f(s)ds$에서 $f(s)$의 한 부정적분을 $F(s)$라 하면

$$\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}} f(s)ds=F\left(\frac{1}{t}\right)-F\left(-\frac{1}{t}\right)$$

따라서 $F\left(\dfrac{1}{t}\right)-F\left(-\dfrac{1}{t}\right)$을 t에 대하여 미분하면

$$F'\left(\frac{1}{t}\right)\times\left(-\frac{1}{t^2}\right)-F'\left(-\frac{1}{t}\right)\times\frac{1}{t^2}=-\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t^2}f\left(-\frac{1}{t}\right)$$

237

$\displaystyle\int_0^{g(x+1)} f(t)dt=x+\ln x-1$의 양변을 x에 대하여

미분하면

$$\frac{d}{dx}\int_0^{g(x+1)} f(t)dt=1+\frac{1}{x}$$

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_0^{g(x+1)}=\frac{d}{dx}\{F(g(x+1))-F(0)\}$$

$$F'(g(x+1))g'(x+1)=1+\frac{1}{x}$$

$$f(g(x+1))g'(x+1)=1+\frac{1}{x} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$에서

$f(g(x+1))=x+1$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$$g'(x+1)=\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ g'(x)=\frac{1}{x-1}$$

$\therefore\ g(x)=\ln|x-1|+C$ (C는 적분상수)

$g(\alpha+1)=0$인 α에 대하여

$$\int_0^{g(\alpha+1)} f(t)dt=\int_0^0 f(t)dt$$

$$=\alpha+\ln\alpha-1=0$$

$\therefore\ \alpha=1$

따라서 $g(2)=\ln1+C=0$이므로 $C=0$

$\therefore\ g(x)=\ln(x-1)$

$\therefore\ g(5)=\ln4$

답 ③

238

곡선 $y=2^x$을 x축에 대하여 대칭이동시키면 $y=-2^x$이고

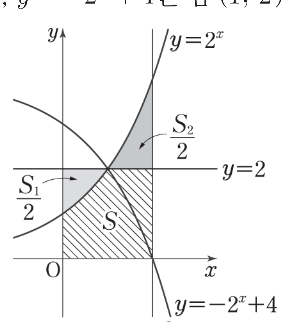
이를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동시키면

$y=-2^x+4$이다.

곡선 $y=-2^x+4$는 점 $(2,\ 0)$을 지나므로 직선 l의

방정식은 $x=2$이다.

두 곡선 $y=2^x$, $y=-2^x+4$는 점 $(1,\ 2)$에서 만난다.



이때, 두 곡선 $y=2^x$, $y=-2^x+4$는

서로 직선 $y=2$에 대하여 대칭이므로

곡선 $y=2^x$와 x축, y축, 직선 $x=2$, 직선 $y=2$로

둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$\frac{S_2}{2}-\frac{S_1}{2}=\left(\frac{S_2}{2}+S\right)-\left(\frac{S_1}{2}+S\right)$$

$$=\int_0^2 2^x dx-2\times2$$

$$=\frac{3}{\ln2}-4$$

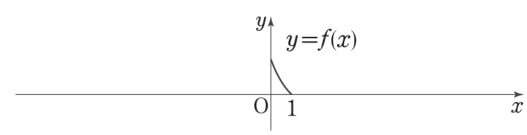
이므로 $S_2-S_1=\dfrac{6}{\ln2}-8$이다.

$\therefore\ m+n=6+8=14$

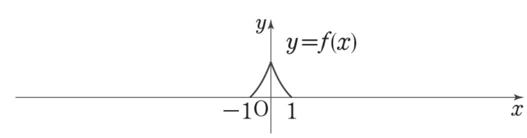
답 14

239

조건 (가)에서 $0<x<1$일 때 $f(x)=e^{-x+1}-1$이므로

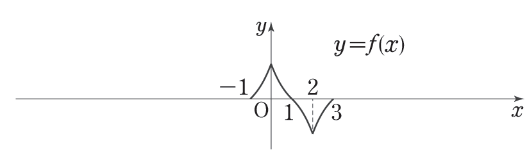


조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로

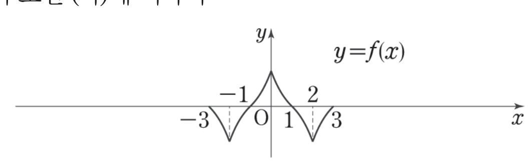


조건 (다)에서 곡선 $y=f(x)$는 점 $(1,\ 0)$에 대하여

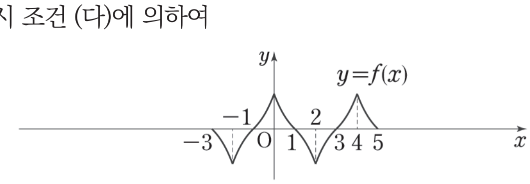
대칭이므로



다시 조건 (나)에 의하여



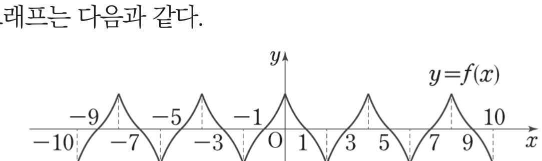
다시 조건 (다)에 의하여



⋮

따라서 닫힌구간 $[-10,\ 10]$에서 함수 $y=f(x)$의

그래프는 다음과 같다.



$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (e^{-x+1}-1)dx$$

$$= \left[-e^{-x+1}-x\right]_0^1 = e-2$$

따라서 $-10 \le x \le 10$일 때

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt = e-2$를 만족시키는 x의 값은

$-7, -3, 1, 5, 9$이므로

모든 해의 합은 $(-7)+(-3)+1+5+9=5$

답 5

240

조건 (가)에서

$$\int f''(2x)dx = -\pi\int f(x)f'(x)dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int 2f(x)f'(x)dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\{f(x)\}^2 + C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)}$$

이때 $f''(2x)$의 한 부정적분은 $\frac{1}{2}f'(2x)$이므로

$\displaystyle\int f''(2x)dx = \frac{1}{2}f'(2x)+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

따라서 $-\frac{\pi}{2}\{f(x)\}^2 + C_1 = \frac{1}{2}f'(2x)+C_2$에서

$\{f(x)\}^2 = -\frac{1}{\pi}f'(2x)+C$ (단, C는 적분상수) ……㉠

한편, 조건 (나)에서 $f(0)=0$, $f'(0)=\frac{\pi}{2}$이므로

㉠에 $x=0$을 대입하면 $C=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \pi\int_0^{\frac{1}{2}}\{f(x)\}^2dx = \pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{-\frac{1}{\pi}f'(2x)+\frac{1}{2}\right\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\left\{-f'(2x)+\frac{\pi}{2}\right\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}f(2x)+\frac{\pi}{2}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{f(1)-f(0)}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{1-0}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi-2}{4}$$

답 ②