정답 및 풀이

* 정답을 확인하려 할 때에는 「빠른 정답 찾기」를 이용하면 편리합니다.

01 함수의 극한

개념 정리

본책 6쪽

❶ 수렴 ❷ 발산 ❸ 좌극한 ❹ $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$
❺ $f(x)+g(x)$ ❻ $f(x)g(x)$ ❼ 유리화
❽ 최고차항 ❾ 0 ❿ L

쎈 B 유형 뽀개기

본책 7쪽

01 ㄱ. $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+2)=6$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to3+}|x-3|=\lim\limits_{x\to3+}(x-3)=0$

$\lim\limits_{x\to3-}|x-3|=\lim\limits_{x\to3-}\{-(x-3)\}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to3}|x-3|=0$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-5+}\dfrac{|x+5|}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to-5+}\dfrac{x+5}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to-5+}\dfrac{x+5}{(x+5)(x-5)}$

$=\lim\limits_{x\to-5+}\dfrac{1}{x-5}=-\dfrac{1}{10}$

$\lim\limits_{x\to-5-}\dfrac{|x+5|}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to-5-}\dfrac{-(x+5)}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to-5-}\dfrac{-(x+5)}{(x+5)(x-5)}$

$=\lim\limits_{x\to-5-}\dfrac{-1}{x-5}=\dfrac{1}{10}$

이므로 $\lim\limits_{x\to-5+}\dfrac{|x+5|}{x^2-25}\neq\lim\limits_{x\to-5-}\dfrac{|x+5|}{x^2-25}$

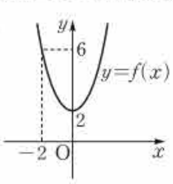
따라서 $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{|x+5|}{x^2-25}$의 값은 존재하지 않는다.

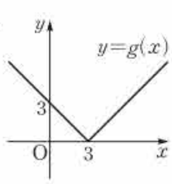
ㄹ. $x\neq-1$일 때, $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2}{x+1}=x+1$이므로

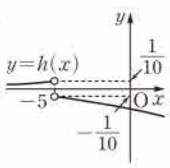
$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$

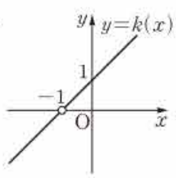
이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ⑤

참고 $f(x)=x^2+2$, $g(x)=|x-3|$, $h(x)=\dfrac{|x+5|}{x^2-25}$, $k(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$로 놓으면 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$, $y=k(x)$의 그래프는 각각 다음과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


02 ① $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

② $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값이 존재한다.

④ $\lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 ③

참고 ② $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$에서 $-\infty$는 일정한 값이 아닌 한없이 작아지는 상태를 나타내므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $-1\le a\le2$인 정수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to a-}f(x)$이다.

03 ㄱ. $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$

ㄷ. $1<a<3$인 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값이 항상 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

04 $\lim\limits_{x\to-3+}f(x)=\lim\limits_{x\to-3+}(kx+1)=-3k+1$ ··· ❶

$\lim\limits_{x\to-3-}f(x)=\lim\limits_{x\to-3-}(x-k)^2=(-3-k)^2$ ··· ❷

$\lim\limits_{x\to-3}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x\to-3+}f(x)=\lim\limits_{x\to-3-}f(x)$이어야 하므로

$-3k+1=(-3-k)^2$ ··· ❸

$k^2+9k+8=0$, $(k+8)(k+1)=0$

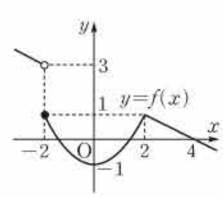
$\therefore k=-8$ 또는 $k=-1$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 -9이다. ··· ❹

답 -9

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to-3+}f(x)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\lim\limits_{x\to-3-}f(x)$의 값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ k에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❹ 모든 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

05 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때



$\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2+}\left(\dfrac{1}{2}x^2-1\right)=1$,

$\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2-}\left(2-\dfrac{1}{2}x\right)=3$

이므로 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore a=-2$ 답 -2

06 $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}(-x^2+2x)=-3$

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}(x+3)=5$

$f(2)=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1-}f(x)+\lim\limits_{x\to2+}f(x)-f(2)$

$=-3+5-(-1)=3$ 답 3

07 $\lim_{x\to-1+}f(x)-\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to1}f(x)$

$=1-(-1)+0=2$ 답 ⑤

08 $\lim_{x\to1-}\frac{x^2-4x+3}{|x-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x-3)}{-(x-1)}$

$=\lim_{x\to1-}(-x+3)=2$

$\therefore a=2$ ⋯ ❶

$\lim_{x\to-5+}\frac{x^2+2x-15}{|x+5|}=\lim_{x\to-5+}\frac{(x+5)(x-3)}{x+5}$

$=\lim_{x\to-5+}(x-3)=-8$

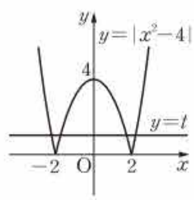
$\therefore b=-8$ ⋯ ❷

$\therefore \frac{b}{a}=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\frac{b}{a}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

09 함수 $y=|x^2-4|$의 그래프와 직선 $y=t$는 오른쪽 그림과 같으므로

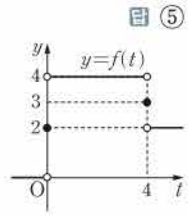


$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 2 & (t=0 \text{ 또는 } t>4)\\ 4 & (0<t<4)\\ 3 & (t=4)\end{cases}$$

따라서 $\lim_{t\to0+}f(t)=4$, $\lim_{t\to4+}f(t)=2$이므로

$\alpha=4$, $\beta=2$ $\quad\therefore \alpha+\beta=6$ 답 ⑤

참고 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



10 $\lim_{x\to2+}[x]=2$, $\lim_{x\to2-}[x+1]=2$이므로

$\lim_{x\to2+}\frac{[x]^2+3x}{[x]}+\lim_{x\to2-}([x+1]^2-3x)$

$=\frac{2^2+6}{2}+(2^2-6)$

$=5-2=3$ 답 3

11 ① $\lim_{x\to-2-}\frac{[x+1]}{x+1}=\frac{-2}{-1}=2$

② $\lim_{x\to0+}\frac{[x-1]}{[x+2]}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

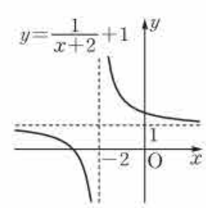
③ $\lim_{x\to1-}\frac{[x^2-1]}{[x]^2-1}=\frac{-1}{0^2-1}=1$

④ $\lim_{x\to-1+}[x^2+2x+1]=\lim_{x\to-1+}[(x+1)^2]=0$

⑤ $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+3}{x+2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x+2}+1\right]=0$

답 ③

참고 $y=\frac{1}{x+2}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $x\to-\infty$일 때, y의 값은 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워지므로



$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x+2}+1\right]=0$

12 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(a[x]^3+b[x]^2-1)$

$=a\cdot1+b\cdot1-1=a+b-1$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(a[x]^3+b[x]^2-1)$

$=a\cdot0+b\cdot0-1=-1$

$\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이어야 하므로

$a+b-1=-1$ $\quad\therefore a+b=0$ 답 0

13 $\lim_{x\to k+}\frac{[3x]}{[x]^2+2x}=\frac{3k}{k^2+2k}=\frac{3}{k+2}$ $(\because k\neq0)$

$\lim_{x\to k-}\frac{[3x]}{[x]^2+2x}=\frac{3k-1}{(k-1)^2+2k}=\frac{3k-1}{k^2+1}$ ⋯ ❶

$\lim_{x\to k}\frac{[3x]}{[x]^2+2x}$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to k+}\frac{[3x]}{[x]^2+2x}=\lim_{x\to k-}\frac{[3x]}{[x]^2+2x}$이어야 하므로

$\frac{3}{k+2}=\frac{3k-1}{k^2+1}$, $\quad 3k^2+3=3k^2+5k-2$

$5k=5$ $\quad\therefore k=1$ ⋯ ❷

따라서 $\alpha=\frac{3}{k+2}=\frac{3}{1+2}=1$이므로 ⋯ ❸

$k\alpha=1$ ⋯ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ 좌극한과 우극한을 각각 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ α의 값을 구할 수 있다.	10 %
❹ $k\alpha$의 값을 구할 수 있다.	10 %

14 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to0-}g(t)=\lim_{t\to0-}(t+1)^2=1$

또 $x\to1+$일 때 $t\to1+$이므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{t\to1+}g(t)=\lim_{t\to1+}(t+1)^2=4$

$\therefore \lim_{x\to0+}g(f(x))+\lim_{x\to1+}g(f(x))=1+4=5$ 답 ③

15 $x-2=t$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $t\to-1-$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x-2)=\lim_{t\to-1-}f(t)=1$

$f(x)=s$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $s\to0+$이므로

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{s\to0+}f(s)=0$

$\therefore \lim_{x\to1-}f(x-2)+\lim_{x\to1+}f(f(x))=1+0=1$ 답 ④

16 ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x-4)=-4$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=2$

즉 $\lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 0-$일 때 $t=2$이므로

$$\lim_{x\to 0-} f(f(x))=f(2)=-2$$

ㄷ. $x\to 4+$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 4+} f(f(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=\lim_{t\to 0+}(t-4)=-4$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

17 ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(g(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=0$$

또 $x\to 0-$일 때 $t\to 1-$이므로

$$\lim_{x\to 0-} f(g(x))=\lim_{t\to 1-} f(t)=-1$$

즉 $\lim_{x\to 0+} f(g(x))\neq \lim_{x\to 0-} f(g(x))$이므로 $\lim_{x\to 0} f(g(x))$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)=s$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $s\to 0-$이므로

$$\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{s\to 0-} g(s)=1$$

또 $x\to 0-$일 때 $s\to 0+$이므로

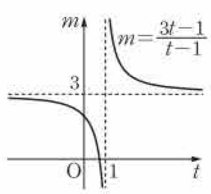
$$\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{s\to 0+} g(s)=0$$

즉 $\lim_{x\to 0+} g(f(x))\neq \lim_{x\to 0-} g(f(x))$이므로 $\lim_{x\to 0} g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

18 $\dfrac{3t-1}{t-1}=m$으로 놓으면

$$\frac{3t-1}{t-1}=3+\frac{2}{t-1}$$

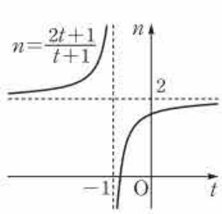


이므로 $m=\dfrac{3t-1}{t-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $t\to\infty$일 때 $m\to 3+$이므로

$$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{3t-1}{t-1}\right)=\lim_{m\to 3+} f(m)=3 \quad \cdots ❶$$

$\dfrac{2t+1}{t+1}=n$으로 놓으면

$$\frac{2t+1}{t+1}=2-\frac{1}{t+1}$$



이므로 $n=\dfrac{2t+1}{t+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $t\to\infty$일 때 $n\to 2-$이므로

$$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{2t+1}{t+1}\right)=\lim_{n\to 2-} f(n)=2 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{3t-1}{t-1}\right)+2\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{2t+1}{t+1}\right)=3+2\cdot 2=7 \quad \cdots ❸$$

답 7

채점 기준	비율
❶ $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{3t-1}{t-1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{2t+1}{t+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{3t-1}{t-1}\right)+2\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{2t+1}{t+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

19 $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=f(x)-h(x)$이고

$$\lim_{x\to a} h(x)=5$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to a}\frac{3f(x)-2g(x)}{-2f(x)+g(x)}&=\lim_{x\to a}\frac{3f(x)-2\{f(x)-h(x)\}}{-2f(x)+\{f(x)-h(x)\}}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+2h(x)}{-f(x)-h(x)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{1+2\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}{-1-\frac{h(x)}{f(x)}}\\&=-1\left(\because \lim_{x\to a}\frac{h(x)}{f(x)}=0\right)\end{aligned}$$

답 ②

쎈B특강

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)

일 때, $f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면 $x\to a$일 때 두 함수 $f(x)$, $h(x)$가 각각 수렴하므로 극한값을 구하려는 함수식을 $f(x)$와 $h(x)$로 나타낸 후 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

다른 풀이 $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=5$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=0$$

즉 $\lim_{x\to a}\left\{1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right\}=0$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to a}\frac{3f(x)-2g(x)}{-2f(x)+g(x)}&=\lim_{x\to a}\frac{3-2\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}{-2+\frac{g(x)}{f(x)}}\\&=\frac{3-2\cdot 1}{-2+1}=-1\end{aligned}$$

20

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}(x^2-4x-5)f(x)&=\lim_{x\to 5}(x+1)(x-5)f(x)\\&=\lim_{x\to 5}(x+1)\{(x-5)f(x)\}\\&=6\cdot 2=12\end{aligned}$$

답 12

21 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\{f(x)+3x^2\}=0$에서

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x^2}+3\right\}=0, \text{ 즉 } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=-3$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-4x+1}{3f(x)+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{f(x)}{x^2}-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{3\cdot\frac{f(x)}{x^2}+\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{2\cdot(-3)}{3\cdot(-3)}=\frac{2}{3}$$

답 ④

참고 함수의 극한에 대한 성질은

$x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$

일 때에도 성립한다.

22 $2f(x)-3g(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to\infty}h(x)=24$이고

$$g(x)=\frac{2f(x)-h(x)}{3} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-h(x)}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\{2\lim_{x\to\infty}f(x)-\lim_{x\to\infty}h(x)\}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(2\cdot6-24)=-4 \quad \cdots ❷$$

답 -4

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 $f(x)$, $h(x)$로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{x\to\infty}g(x)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

23 $\lim_{x\to-1}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to-1}g(x)=\beta$이므로

$\lim_{x\to-1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to-1}g(x)=\alpha+\beta=5$,

$\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1}f(x)\cdot\lim_{x\to-1}g(x)=\alpha\beta=-14$

즉 α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-5x-14=0$, 즉 $(x+2)(x-7)=0$

이므로 $\quad \alpha=-2$, $\beta=7$ ($\because \alpha<\beta$)

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{-2g(x)+3}{f(x)+1}=\frac{-2\lim_{x\to-1}g(x)+3}{\lim_{x\to-1}f(x)+1}$$

$$=\frac{-2\beta+3}{\alpha+1}=\frac{-2\cdot7+3}{-2+1}$$

$$=11$$

답 ③

쎈B특강

두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{두 근의 합}}x+\underbrace{\alpha\beta}_{\text{두 근의 곱}}=0$$

24 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=-2$$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{\underbrace{x^3-8}_{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}}=\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+4}$$

$$=-2\cdot\frac{1}{12}=-\frac{1}{6}$$

답 $-\frac{1}{6}$

25 ㄱ. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$이면

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=1$

이지만 $\lim_{x\to0}g(x)$, 즉 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)

라 하고 $f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$라 하면

$\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}k(x)=\beta$

이때 $f(x)=\frac{h(x)+k(x)}{2}$이므로

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)+k(x)}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge1)\\-1 & (x<1)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge1)\\1 & (x<1)\end{cases}$이면

$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=0$

이지만 $\lim_{x\to1}f(x)$와 $\lim_{x\to1}g(x)$의 값은 모두 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

26 ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\0 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\0 & (x<0)\end{cases}$이면

$f(x)-g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=0$이지만

$\lim_{x\to0}f(x)$와 $\lim_{x\to0}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하고

$\frac{g(x)}{f(x)}=h(x)$라 하면 $\quad \lim_{x\to\infty}h(x)=\beta$

이때 $g(x)=f(x)h(x)$이므로

$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)h(x)=\alpha\beta$

ㄷ. $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)라 하고

$f(x)g(x)=h(x)$라 하면 $\quad \lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

$g(x)\neq0$일 때, $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$이므로 $\lim_{x\to a}g(x)\neq0$이면

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

ㄹ. $\lim_{x\to a}(x-a)f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$f(x)g(x)=(x-a)f(x)\cdot\frac{g(x)}{x-a}$$

이므로

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}(x-a)f(x)\cdot\frac{g(x)}{x-a}=\alpha\beta$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

27
$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+x^2-x+2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-x+1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x+1}{x-1}$$

$$=-\frac{7}{3}$$

답 $-\frac{7}{3}$

28 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4-kx^2}{x^2}=\lim_{x\to0}(x^2-k)=-k$

즉 $-k=5$이므로

$k=-5$ 답 ①

29 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x^4-16)f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x^2+4)(x^2-4)f(x)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x^2+4)f(x)}$

$=\frac{1}{8f(2)}$

즉 $\frac{1}{8f(2)}=-1$이므로

$f(2)=-\frac{1}{8}$ 답 $-\frac{1}{8}$

30 $\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2+3f(x)}{x^2f(x)-f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)\{f(x)+3\}}{(x^2-1)f(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=8\cdot\frac{1}{2}=4$ 답 ⑤

31 $-1<x<1$일 때, $x^2-1<0$이므로

$\lim_{x\to1-}\frac{2x^2-x-1}{|x^2-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{2x^2-x-1}{-(x^2-1)}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{(2x+1)(x-1)}{-(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{2x+1}{-x-1}=-\frac{3}{2}$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$ ··· ❶

또 $\lim_{x\to0+}\frac{x}{x+|3x|}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$이므로

$b=\frac{1}{4}$ ··· ❷

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}=-6$ ··· ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\frac{a}{b}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

32 $\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(x^2-4x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x-1)(\sqrt{x+1}+2)$

$=2\cdot(2+2)=8$ 답 8

33 $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}f(x)(\sqrt{x}+1)$

$=2\cdot(1+1)=4$ 답 ③

34 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2xf(x)}-\sqrt{1-2xf(x)}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\{\sqrt{1+2xf(x)}-\sqrt{1-2xf(x)}\}\{\sqrt{1+2xf(x)}+\sqrt{1-2xf(x)}\}}{x\{\sqrt{1+2xf(x)}+\sqrt{1-2xf(x)}\}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4xf(x)}{x\{\sqrt{1+2xf(x)}+\sqrt{1-2xf(x)}\}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4f(x)}{\sqrt{1+2xf(x)}+\sqrt{1-2xf(x)}}$

$=\frac{4\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{1+0\cdot\frac{1}{3}}+\sqrt{1-0\cdot\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}$ 답 ④

35 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3-2x}-\sqrt{3+x}}{\sqrt{4-2x}-\sqrt{4-x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{3-2x}-\sqrt{3+x})(\sqrt{3-2x}+\sqrt{3+x})(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4-x})}{(\sqrt{4-2x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4-x})(\sqrt{3-2x}+\sqrt{3+x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-3x(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4-x})}{-x(\sqrt{3-2x}+\sqrt{3+x})}$

$=3\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-2x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{3-2x}+\sqrt{3+x}}$

$=3\cdot\frac{2+2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

36 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-5x+1}+2x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{9t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+5t+1}-2t}$

분자, 분모를 각각 t로 나눈다.

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{t^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{5}{t}+\frac{1}{t^2}}-2}$

$=\frac{3+1}{1-2}=-4$ 답 ①

37 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{9x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{9+\frac{1}{x}}}$

$=\frac{2}{1+3}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

38 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x^2-1}=0$이므로 $a=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-x}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{2}$이므로 $b=\frac{5}{2}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{1-\sqrt{16x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\frac{1}{x}-\sqrt{16+\frac{3}{x^2}}}=\frac{6}{0-4}=-\frac{3}{2}$이므로 $c=-\frac{3}{2}$

① $a<b$ ② $a\neq c$ ③ $b>c$

④ $a-b\neq c$ ⑤ $a+b+c=1$

답 ⑤

39 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-\{f(x)\}^2}{x^2+2f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{1+\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{2}{x}}$

분자, 분모를 각각 x^2으로 나눈다.

$=\frac{3-1^2}{1+1\cdot 0}=2$

답 2

40 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{-t}=a$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-a \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3f(x)+\sqrt{f(x)+4x^2}}{f(x)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3f(-t)+\sqrt{f(-t)+4t^2}}{f(-t)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3\cdot\frac{f(-t)}{t}+\sqrt{\frac{f(-t)}{t}\cdot\frac{1}{t}+4}}{\frac{f(-t)}{t}}$$

$$=\frac{-3a+2}{-a}\ (\because ㉠) \quad \cdots ❷$$

즉 $\frac{-3a+2}{-a}=2$이므로 $-3a+2=-2a$

$\therefore a=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-a$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{x\to-\infty}\frac{3f(x)+\sqrt{f(x)+4x^2}}{f(x)}$을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

41 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

(주어진 식) $=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{2+6t+t^2}-t)$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{2+6t+t^2}-t)(\sqrt{2+6t+t^2}+t)}{\sqrt{2+6t+t^2}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2+6t}{\sqrt{2+6t+t^2}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{2}{t}+6}{\sqrt{\frac{2}{t^2}+\frac{6}{t}+1}+1}$$

$$=\frac{0+6}{1+1}=3$$

답 ⑤

42 (주어진 식)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x+5}+2x}{(\sqrt{4x^2-x+5}-2x)(\sqrt{4x^2-x+5}+2x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x+5}+2x}{-x+5}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+2}{-1+\frac{5}{x}}$$

$$=\frac{2+2}{-1+0}=-4$$

답 -4

43 $\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+5}-1}{x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{(\sqrt{x+5}-1)(\sqrt{x+5}+1)}{(x+4)(\sqrt{x+5}+1)}$

$$=\lim_{x\to-4}\frac{x+4}{(x+4)(\sqrt{x+5}+1)}$$

$$=\lim_{x\to-4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+1}$$

$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$\therefore p=\frac{1}{2}$ ⋯ ❶

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-x+2})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-x+2})(\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+2})}{\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-4}{\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$

$\therefore q=2$ ⋯ ❷

$\therefore 2p+q=2\cdot\frac{1}{2}+2=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $2p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

44 $x=[x]+\alpha\ (0\le\alpha<1)$라 하면 $[x]=x-\alpha$이므로

(주어진 식) $=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+2\alpha}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x+2\alpha}-x)(\sqrt{x^2-2x+2\alpha}+x)}{\sqrt{x^2-2x+2\alpha}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+2\alpha}{\sqrt{x^2-2x+2\alpha}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{2\alpha}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2\alpha}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{-2+0}{1+1}=-1$$

답 ②

다른 풀이 (주어진 식)$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2-2[x]}-x)(\sqrt{x^2-2[x]}+x)}{\sqrt{x^2-2[x]}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2[x]}{\sqrt{x^2-2[x]}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\cdot\dfrac{[x]}{x}}{\sqrt{1-2\cdot\dfrac{[x]}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{-2\cdot 1}{1+1}=-1$$

$x>0$일 때, $\dfrac{x-1}{x}<\dfrac{[x]}{x}\le\dfrac{x}{x}$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x}=1$ $\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}=1$

45 (주어진 식)$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\cdot\dfrac{-x^2-2x+3}{4(x+1)^2}$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x+3)(x-1)}{4(x+1)^2}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{x+3}{4(x+1)^2}=-\frac{1}{4}$$

답 ②

46 (주어진 식)$=\lim\limits_{x\to9}(\sqrt{x}-3)\cdot\dfrac{x-7}{x-9}$

$$=\lim_{x\to9}(\sqrt{x}-3)\cdot\frac{x-7}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{x-7}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{3}$$

답 $\dfrac{1}{3}$

47 $\dfrac{1}{n}=x$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $x\to0+$이고

$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$

$\therefore$ (주어진 식)$=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x^2}\{f(2x+3)-f(3)\}^2$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\{(2x+2)^2-2^2\}^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\{4x(x+2)\}^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{16x^2(x+2)^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}16(x+2)^2=64$$

답 64

48 $x=4k+a$ (k는 정수, $0\le a<4$)라 하면

$\left[\dfrac{x}{4}\right]=\left[\dfrac{4k+a}{4}\right]=\left[k+\dfrac{a}{4}\right]=k\left(\because 0\le\dfrac{a}{4}<1\right)$

$x\to\infty$일 때 $k\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12}{x}\left[\dfrac{x}{4}\right]=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{12}{4k+a}\cdot k$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{12}{4+\dfrac{a}{k}}=3$$

$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a}{k}=0$임을 이용한다.

답 ④

49 $x\to-3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-3}(x^2+ax+b)=0$이므로

$9-3a+b=0 \qquad \therefore b=3a-9$ ...... ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+ax+3a-9}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x+a-3)}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to-3}(x+a-3)$$

$$=a-6$$

$a-6=-2$에서 $a=4$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$b=3 \qquad \therefore a+b=7$

답 ②

50 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}(2x^3+ax^2+b)=0$이므로

$-2+a+b=0 \qquad \therefore b=-a+2$ ...... ㉠ ··· ❶

$f(x)=2x^3+ax^2-a+2$이므로 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2x^3+ax^2-a+2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\{2x^2+(a-2)x-a+2\}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\{2x^2+(a-2)x-a+2\}$$

$$=6-2a$$

$6-2a=12$에서 $a=-3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$b=5$ ··· ❷

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+5$이므로

$f(-2)=-23$ ··· ❸

답 -23

채점 기준	비율
❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(-2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

51 $x\to3$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to3}(ax+b)=0$이므로

$3a+b=0 \qquad \therefore b=-3a$ ...... ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{3\sqrt{16+x^2}-5x}{ax-3a}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3\sqrt{16+x^2}-5x)(3\sqrt{16+x^2}+5x)}{(ax-3a)(3\sqrt{16+x^2}+5x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-16(x+3)(x-3)}{a(x-3)(3\sqrt{16+x^2}+5x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-16(x+3)}{a(3\sqrt{16+x^2}+5x)}$$

$$=-\frac{16}{5a}$$

$-\dfrac{16}{5a}=8$에서 $a=-\dfrac{2}{5}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$b=\dfrac{6}{5} \qquad \therefore b-a=\dfrac{8}{5}$

답 ④

52 $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x+b}\right)$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-a+b}{a(x+b)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x-a+b}{a(x-1)(x+b)}$ …… ㉠

$x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$ 이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x-a+b)=0$이므로

$1-a+b=0$ $\therefore b=a-1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{a(x-1)(x+a-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{a(x+a-1)}$

$=\frac{1}{a^2}$

$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{16}$에서 $a=4$ ($\because$ a는 자연수)

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b=7$

답 7

53 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=a$이므로

$a=5$

$\lim_{x\to-1}\frac{5x^2+bx+c}{x^2-2x-3}=\frac{3}{2}$ …… ㉠

에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(5x^2+bx+c)=0$이므로

$5-b+c=0$ $\therefore c=b-5$ …… ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\frac{5x^2+bx+b-5}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(5x+b-5)}{(x+1)(x-3)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{5x+b-5}{x-3}$

$=\frac{b-10}{-4}$

$\frac{b-10}{-4}=\frac{3}{2}$에서 $b=4$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$c=-1$ $\therefore abc=-20$

답 ①

54 $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+2bx}+2x)$

$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2-2bt}-2t)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{at^2-2bt}-2t)(\sqrt{at^2-2bt}+2t)}{\sqrt{at^2-2bt}+2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-4)t^2-2bt}{\sqrt{at^2-2bt}+2t}$ …… ㉠

㉠의 극한값이 존재하려면

$a-4=0$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{t\to\infty}\frac{-2bt}{\sqrt{4t^2-2bt}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2b}{\sqrt{4-\frac{2b}{t}}+2}=-\frac{b}{2}$

따라서 $-\frac{b}{2}=-1$이므로 $b=2$

$\therefore \frac{a}{b}=2$

답 2

55 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-ax+4}-\sqrt{x^2+3ax+1})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-ax+4}-\sqrt{x^2+3ax+1})(\sqrt{x^2-ax+4}+\sqrt{x^2+3ax+1})}{\sqrt{x^2-ax+4}+\sqrt{x^2+3ax+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4ax+3}{\sqrt{x^2-ax+4}+\sqrt{x^2+3ax+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4a+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{a}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{3a}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

$=-\frac{4a}{2}=-2a$

따라서 $-2a=10$이므로 $a=-5$

답 ②

56 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+4x+1}-\sqrt{x^2-2ax+1})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{ax^2+4x+1}-\sqrt{x^2-2ax+1})(\sqrt{ax^2+4x+1}+\sqrt{x^2-2ax+1})}{\sqrt{ax^2+4x+1}+\sqrt{x^2-2ax+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x^2+(4+2a)x}{\sqrt{ax^2+4x+1}+\sqrt{x^2-2ax+1}}$ …… ㉠

㉠의 극한값이 존재하려면

$a-1=0$ $\therefore a=1$ … ❶

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+4x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=3$

$\therefore b=3$ … ❷

$\therefore ab=3$ … ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

57 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2+1}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-3$에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$ — $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

$f(x)=2(x+1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x+1)(x+a)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{2(x+a)}{x-1}=1-a$$

이므로 $1-a=-3$ $\therefore a=4$

따라서 $f(x)=2(x+1)(x+4)$이므로

$f(6)=2\cdot7\cdot10=140$ 답 140

58 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=7$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ …… ❶

$f(x)=(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+a)=1+a$$

이므로 $1+a=7$ $\therefore a=6$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+6)$이므로 …… ❷

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x+4)}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+4-1)(x+4+6)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-3}(x+10)=7 \quad\text{…… ❸}$$

답 7

채점 기준	비율
❶ $f(1)=0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{x\to-3}\frac{f(x+4)}{x+3}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

59 조건 ㈎에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 -2, 이차항의 계수가 1인 삼차식임을 알 수 있다.

또 조건 ㈏에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$f(x)=-2x^3+x^2+ax$ (a는 상수)라 하면 조건 ㈏에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(-2x^2+x+a)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(-2x^2+x+a)=a$$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=-2x^3+x^2+2x$이므로 구하는 나머지는

$f(1)=-2+1+2=1$ 답 1

쎈B특강

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f(a)$

60 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{4x-1}=a$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=6$에서 $x\to-2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}f(x)=0$이므로 $f(-2)=0$

$f(x)=3(x+2)(x+k)$ (k는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{3(x+2)(x+k)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}3(x+k)=3(-2+k)$$

이므로 $3(-2+k)=6$ $\therefore k=4$

따라서 $f(x)=3(x+2)(x+4)=3x^2+18x+24$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+18x+24-3x^2}{4x-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{18x+24}{4x-1}=\frac{9}{2}$$

$\therefore a=\frac{9}{2}$ 답 ⑤

61 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-7$에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$

또 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=10$에서 $x\to-2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}f(x)=0$이므로 $f(-2)=0$

$f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식) …… ㉠

라 하고, ㉠을 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-7$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+2)Q(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x+2)Q(x)=Q(-1)$$

$\therefore Q(-1)=-7$ …… ㉡

또 ㉠을 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=10$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)(x+2)Q(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+1)Q(x)=-Q(-2)$$

$-Q(-2)=10$ $\therefore Q(-2)=-10$ …… ㉢

㉠에서 $Q(x)$의 차수가 낮아지면 $f(x)$의 차수도 낮아진다.

이때 ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면 ㉡, ㉢에서 $-a+b=-7$, $-2a+b=-10$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-4$

따라서 $g(x)=(x+1)(x+2)(3x-4)$이므로

$g(2)=3\cdot4\cdot2=24$ 답 ③

62 $\lim_{x\to5}\frac{f(x)-x^2}{x-5}=2$에서 $x\to5$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to5}\{f(x)-x^2\}=0$이므로 $f(5)-25=0$

$\therefore f(5)=25$

$g(x)=f(x)-f(5)=f(x)-25$이므로

$$\lim_{x\to5}\frac{f(x)g(x)}{x^2-25}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{f(x)\{f(x)-25\}}{x^2-25}=\lim_{x\to5}\frac{\{f(x)\}^2-25f(x)}{x^2-25}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2f(x)-25f(x)}{x^2-25}$$
$$=\lim_{x\to5}\left[\frac{f(x)\{f(x)-x^2\}}{(x+5)(x-5)}+\frac{f(x)(x^2-25)}{x^2-25}\right]$$
$$=\lim_{x\to5}\left\{\frac{f(x)}{x+5}\cdot\frac{f(x)-x^2}{x-5}+f(x)\right\}$$
$$=\frac{f(5)}{10}\cdot2+f(5)=5+25=30$$

답 30

63 $2x-1<f(x)<2x+5$의 각 변을 세제곱하면

$$(2x-1)^3<\{f(x)\}^3<(2x+5)^3$$

$x^3+1>0$, 즉 $x>-1$일 때 각 변을 x^3+1로 나누면

$$\frac{(2x-1)^3}{x^3+1}<\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}<\frac{(2x+5)^3}{x^3+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^3}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+5)^3}{x^3+1}=8$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}=8$$

답 ③

64 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+2로 나누면

$$\frac{3x^2+1}{x^2+2}\le f(x)\le\frac{3x^2+4}{x^2+2}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{x^2+2}=3$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=3$$

답 3

65 $\lim_{x\to1}\frac{2\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2}{f(x)g(x)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2\{f(x)\}^2}{f(x)g(x)}-\lim_{x\to1}\frac{\{g(x)\}^2}{f(x)g(x)}$$
$$=2\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}-\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)} \quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $\lim_{x\to1}(-2x^2+x-1)=\lim_{x\to1}(x^2-5x+2)=-2$이므로 주어진 부등식에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=-2$$

따라서 ㉠에서 구하는 극한값은

$$2\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}-\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=2\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{1}{\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}}$$
$$=2\cdot(-2)-\frac{1}{-2}=-\frac{7}{2}$$

답 ①

66 $|f(x)-3x|<2$에서 $\quad -2<f(x)-3x<2$

$\therefore 3x-2<f(x)<3x+2$

$3x-2>0$, 즉 $x>\frac{2}{3}$일 때 각 변을 제곱하면

$$(3x-2)^2<\{f(x)\}^2<(3x+2)^2 \quad\cdots ❶$$

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2x+2>0$이므로 각 변을 x^2+2x+2로 나누면

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$

$$\frac{(3x-2)^2}{x^2+2x+2}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+2x+2}<\frac{(3x+2)^2}{x^2+2x+2} \quad\cdots ❷$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-2)^2}{x^2+2x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+2)^2}{x^2+2x+2}=9$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+2x+2}=9 \quad\cdots ❸$$

답 9

채점 기준	비율
❶ $\{f(x)\}^2$의 범위를 x에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+2x+2}$의 범위를 x에 대한 부등식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+2x+2}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

67 $\mathrm{P}(x,\ \sqrt{x-1})$, $\mathrm{Q}(x,\ 1)$이고 $x>2$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=x-2$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{x-1}-1$

$$\therefore \lim_{x\to2+}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim_{x\to2+}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}(\sqrt{x-1}+1)=2$$

답 ④

68 직선 OP의 기울기가 $\frac{\frac{1}{2}t^2}{t}=\frac{t}{2}$이므로 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$을 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}t^2=-\frac{2}{t}(x-t) \quad\cdots ❶$$

$x=0$을 위의 식에 대입하면 $y=\frac{1}{2}t^2+2$이므로

$$f(t)=\frac{1}{2}t^2+2 \quad\cdots ❷$$

$$\therefore \lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{2}t^2+2\right)=2 \quad\cdots ❸$$

답 2

채점 기준	비율
❶ 점 P를 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(t)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{t\to0}f(t)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

쎈B특강

한 직선에 수직인 직선의 방정식

점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 $m\ (m\neq0)$인 직선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-b=-\frac{1}{m}(x-a)$$

69 $A(k, \sqrt{3k})$, $B(k, \sqrt{k})$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{k^2+3k}$, $\overline{OB}=\sqrt{k^2+k}$

$$\begin{aligned}\therefore\ &4\lim_{k\to\infty}(\overline{OA}-\overline{OB})\\ &=4\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2+k})\\ &=4\lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2+k})(\sqrt{k^2+3k}+\sqrt{k^2+k})}{\sqrt{k^2+3k}+\sqrt{k^2+k}}\\ &=4\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{\sqrt{k^2+3k}+\sqrt{k^2+k}}\\ &=4\lim_{k\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{k}}+\sqrt{1+\frac{1}{k}}}\\ &=4\cdot\frac{2}{1+1}=4\end{aligned}$$

답 ③

70 점 C의 좌표를 $(0, y)$, 점 P의 좌표를 $(x, 2x^2)$이라 하면 $\overline{CO}=\overline{CP}$, 즉 $\overline{CO}^2=\overline{CP}^2$이므로

$y^2=x^2+(2x^2-y)^2$, $\quad y^2=x^2+4x^4-4x^2y+y^2$

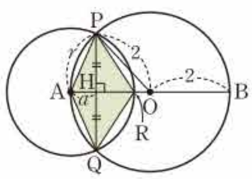
$4x^2y=4x^4+x^2$ $\quad\therefore y=x^2+\frac{1}{4}$ $(\because x\neq 0)$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $x\to 0$이므로 점 C가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

71 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{AH}=a$라 하면



$\overline{OH}=|2-a|$

이때 $\overline{PA}=r$, $\overline{OP}=2$이므로

△POH와 △PAH에서

$2^2-(2-a)^2=r^2-a^2$, $\quad 4a=r^2$

$\therefore a=\frac{r^2}{4}$

즉 $\overline{PH}=\sqrt{r^2-\left(\frac{r^2}{4}\right)^2}=\frac{r}{4}\sqrt{16-r^2}$이므로

$$\begin{aligned}S(r)&=2\triangle PAR\\ &=2\cdot\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{r}{4}\sqrt{16-r^2}\\ &=\frac{r^2}{4}\sqrt{16-r^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{r\to 4-}\frac{S(r)}{\sqrt{4-r}}&=\lim_{r\to 4-}\frac{r^2\sqrt{16-r^2}}{4\sqrt{4-r}}\\ &=\lim_{r\to 4-}\frac{r^2\sqrt{(4+r)(4-r)}}{4\sqrt{4-r}}\\ &=\lim_{r\to 4-}\frac{r^2\sqrt{4+r}}{4}\\ &=8\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $8\sqrt{2}$

02 함수의 연속

개념 정리

본책 18쪽

❶ $x=a$ ❷ $f(a)$ ❸ 불연속 ❹ (a, b) ❺ 닫힌구간 ❻ 연속 ❼ $f(a)\neq f(b)$ ❽ 0

쎈B 유형 뽀개기

본책 19쪽

01 ㄱ. $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

이때 $f(0)=3$이고,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x}\\ &=\lim_{x\to 0}(x+3)=3\end{aligned}$$

이므로 $\quad \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

이때 $g(-1)=2$이고,

$\lim_{x\to -1+}g(x)=\lim_{x\to -1+}(\sqrt{x+1}+2)=2$,

$\lim_{x\to -1-}g(x)=2$

에서 $\lim_{x\to -1}g(x)=2$이므로

$\lim_{x\to -1}g(x)=g(-1)$

따라서 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}h(x)&=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1+}(x+1)=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}h(x)&=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}\\ &=\lim_{x\to 1-}\{-(x+1)\}=-2\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x\to 1+}h(x)\neq\lim_{x\to 1-}h(x)$

따라서 $\lim_{x\to 1}h(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

쎈B 특강

여러 가지 함수의 연속성

① 다항함수 ➡ 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속

② 유리함수 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ ➡ $g(x)\neq 0$인 x에서 연속

③ 무리함수 $y=\sqrt{f(x)}$ ➡ $f(x)\geq 0$인 x에서 연속

④ 함수 $y=[x]$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)
➡ $x\neq n$ (n은 정수)에서 연속

02 ① $f(2)$가 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

② $\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+}[x-2]=0$

$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}[x-2]=-1$

$\therefore \lim_{x\to 2+} f(x) \neq \lim_{x\to 2-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

③ $f(2)=1$이고,

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\{(x-2)^2+1\}=1$

이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

④ $\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{x-2}=1$

$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$

$\therefore \lim_{x\to 2+} f(x) \neq \lim_{x\to 2-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

⑤ $f(2)=2$이고,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}(x+1)=3$$

이므로 $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

답 ③

03 $f(a)=5a$이고,

$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} 5x = 5a$

$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-} (2x^2-3) = 2a^2-3$ ··· ❶

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이어야 하므로

$5a=2a^2-3,\quad 2a^2-5a-3=0$

$(2a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=3$ ··· ❷

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{3}{2}$이다. ··· ❸

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f(a)$, $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a-} f(x)$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 실수 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

04 $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x+2}+x} = \dfrac{1}{\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}} = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$

따라서 $x+2=0$, $(x+1)^2=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속이 되는 x의 값은 -2, -1의 2개이다.

답 ②

05 ① $f(0)=1$

② $\lim_{x\to 1-} f(x)=-1$

③, ④ $f(0)=1$, $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

또 $f(-1)=0$, $\lim_{x\to -1} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to -1} f(x) \neq f(-1)$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

또 $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x) \neq \lim_{x\to 1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

즉 구간 $(-2, 2)$에서 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 -1, 0, 1의 3개이다.

⑤ $f(-2)=0$, $\lim_{x\to -2} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to -2} f(x)=f(-2)$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이다.

답 ④

06 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-2$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

또 $f(1)=-1$, $\lim_{x\to 1} f(x)=-2$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

또 $\lim_{x\to 3+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 3-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 3+} f(x) \neq \lim_{x\to 3-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 3} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

즉 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 0, 3의 2개이고, 불연속이 되는 x의 값은 0, 1, 3의 3개이므로

$a=2$, $b=3 \quad \therefore ab=6$ 답 6

07 주어진 함수의 그래프에서 $\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2-} f(x)=2$이지만 $f(-2)=1$이므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

$\therefore a=-2$ ··· ❶

이때 $f(2)=-2$이므로 $\quad b=2$ ··· ❷

$\therefore a-b=-4$ ··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

08 ㄱ. $\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}=-1+0=-1$

$\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to0+}g(x)$

$\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=1+0=1$

$\therefore \lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}$

따라서 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=-1\cdot0=0$

$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)\cdot\lim_{x\to0+}g(x)$

$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=1\cdot0=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$

ㄷ. ㄴ에서 $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$이고,

$f(0)g(0)=0\cdot(-1)=0$

이므로 $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

09 ㄱ. $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1+}f(-x)=1$이므로

$-x=t$라 하면 $x\to-1+$일 때 $t\to1-$이므로 $\lim_{x\to-1+}f(-x)=\lim_{t\to1-}f(t)=1$

$\lim_{x\to-1+}\{f(x)+f(-x)\}=2$

ㄴ. $\lim_{x\to-1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to-1-}f(-x)=0$이므로

$-x=t$라 하면 $x\to-1-$일 때 $t\to1+$이므로 $\lim_{x\to-1-}f(-x)=\lim_{t\to1+}f(t)=0$

$\lim_{x\to-1-}\{f(x)+f(-x)\}=0$

이때 ㄱ에서 $\lim_{x\to-1+}\{f(x)+f(-x)\}=2$이므로

$\lim_{x\to-1+}\{f(x)+f(-x)\}\neq\lim_{x\to-1-}\{f(x)+f(-x)\}$

따라서 $\lim_{x\to-1}\{f(x)+f(-x)\}$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)+f(-x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}x+1 & (-2\le x\le-1)\\ 1 & (-1<x<1)\\ x-1 & (1\le x\le2)\end{cases}$ 이므로

$f(-x)=\begin{cases}-x-1 & (-2\le x\le-1)\\ 1 & (-1<x<1)\\ -x+1 & (1\le x\le2)\end{cases}$

$\therefore f(x)+f(-x)=\begin{cases}0 & (-2\le x\le-1 \text{ 또는 } 1\le x\le2)\\ 2 & (-1<x<1)\end{cases}$

따라서 $f(x)+f(-x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이므로 구간 $[-2,\ 2]$에서 $f(x)+f(-x)$가 불연속이 되는 x의 값은 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

10 ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $x+1=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t\to0+$이고, $x\to-1-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x+1)=\lim_{t\to0+}f(t)=-1$

$\lim_{x\to-1-}f(x+1)=\lim_{t\to0-}f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to-1+}f(x+1)\neq\lim_{x\to-1-}f(x+1)$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x+1)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x+1)$은 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. $x-1=s$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $s\to0+$이고, $x\to1-$일 때 $s\to0-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)f(x-1)=\lim_{x\to1+}f(x)\cdot\lim_{x\to1+}f(x-1)$
$=\lim_{x\to1+}f(x)\cdot\lim_{s\to0+}f(s)$
$=0\cdot(-1)=0$

$\lim_{x\to1-}f(x)f(x-1)=\lim_{x\to1-}f(x)\cdot\lim_{x\to1-}f(x-1)$
$=\lim_{x\to1-}f(x)\cdot\lim_{s\to0-}f(s)$
$=0\cdot0=0$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)f(x-1)=0$

이때 $f(1)f(1-1)=f(1)f(0)=0\cdot0=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)f(x-1)=f(1)f(1-1)$

따라서 $f(x)f(x-1)$은 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

11 ㄱ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t\to2-$이고, $x\to-1-$일 때 $t=2$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(f(x))=\lim_{t\to2-}f(t)=0$

$\lim_{x\to-1-}f(f(x))=f(2)=0$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(f(x))=0$

ㄴ. ㄱ에서 $\lim_{x\to-1}f(f(x))=0$이고, $f(f(-1))=f(1)=2$이므로

$\lim_{x\to-1}f(f(x))\neq f(f(-1))$

따라서 $f(f(x))$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)=s$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $s\to2-$이고, $x\to1-$일 때 $s\to1-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{s\to2-}f(s)=0$

$\lim_{x\to1-}f(f(x))=\lim_{s\to1-}f(s)=1$

$\therefore \lim_{x\to1+}f(f(x))\neq\lim_{x\to1-}f(f(x))$

따라서 $\lim_{x\to1}f(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 $f(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

12 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 함수 $g(f(x))$의 연속성을 조사해 보자.

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to-1-$이고, $x\to0-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to-1-}g(t)$, $\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)$

이고 $g(f(0))=g(1)$이다.

ㄱ. $\lim_{x\to-1-}g(x)=2$, $\lim_{x\to0+}g(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to-1-}g(x)\neq\lim_{x\to0+}g(x)$$

따라서 $\lim_{x\to0}g(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to-1-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=1$, $g(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}g(f(x))\neq g(f(0))$$

따라서 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=-1$, $g(1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to0}g(f(x))=g(f(0))$$

따라서 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 $g(f(x))$가 구간 $[-2, 2]$에서 연속인 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

쎈B특강

$\lim_{x\to a+}g(f(x))$의 값은 $f(x)=t$로 놓고 다음을 이용한다.

① $x\to a+$일 때 $t\to b+$이면
$\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{t\to b+}g(t)$

② $x\to a+$일 때 $t\to b-$이면
$\lim_{x\to a+}g(f(x))=\lim_{t\to b-}g(t)$

③ $x\to a+$일 때 $t=b$이면
$\lim_{x\to a+}g(f(x))=g(b)$

13 ㄱ. $\lim_{x\to2+}\{f(x)+g(x)\}=1+2=3$

$\lim_{x\to2-}\{f(x)+g(x)\}=1+1=2$

$$\therefore \lim_{x\to2+}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim_{x\to2-}\{f(x)+g(x)\}$$

따라서 $f(x)+g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=1\cdot2=2$

$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=1\cdot1=1$

$$\therefore \lim_{x\to2+}f(x)g(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)g(x)$$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

ㄷ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to2+$일 때 $t\to2-$이고, $x\to2-$일 때 $t\to1-$이므로

$$\lim_{x\to2+}f(g(x))=\lim_{t\to2-}f(t)=1$$

$$\lim_{x\to2-}f(g(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to2}f(g(x))=1$$

이때 $f(g(2))=f(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to2}f(g(x))=f(g(2))$$

따라서 $f(g(x))$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄹ. $\lim_{x\to2}g(f(x))=g(1)=0$이고 $g(f(2))=g(1)=0$이므로

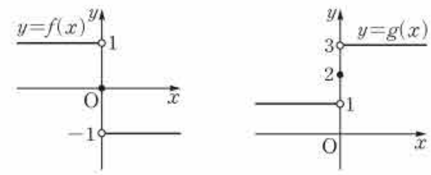
$$\lim_{x\to2}g(f(x))=g(f(2))$$

따라서 $g(f(x))$는 $x=2$에서 연속이다.

이상에서 $x=2$에서 연속인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

14 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $x>0$일 때, $f(g(x))=f(3)=-1$

$x=0$일 때, $f(g(x))=f(2)=-1$

$x<0$일 때, $f(g(x))=f(1)=-1$

모든 실수 x에 대하여 $f(g(x))=-1$

따라서 $f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0+}f(f(x))=f(-1)=1$, $\lim_{x\to0-}f(f(x))=f(1)=-1$

$$\therefore \lim_{x\to0+}f(f(x))\neq\lim_{x\to0-}f(f(x))$$

따라서 $\lim_{x\to0}f(f(x))$의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to0+}g(g(x))=g(3)=3$, $\lim_{x\to0-}g(g(x))=g(1)=3$

$$\therefore \lim_{x\to0}g(g(x))=3$$

이때 $g(g(0))=g(2)=3$이므로

$$\lim_{x\to0}g(g(x))=g(g(0))$$

따라서 $g(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

참고 $x>0$일 때, $-\dfrac{x}{|x|}=-\dfrac{x}{x}=-1$

$x<0$일 때, $-\dfrac{x}{|x|}=-\dfrac{x}{-x}=1$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$$

15 $f(1)=0$이므로

$-(1-b)^2=0$, $1-b=0$ $\therefore b=1$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$$

$-b^2=a$ $\therefore a=-1$

또 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$$

$6-c=-(3-b)^2$, $6-c=-4$ $\therefore c=10$

$\therefore a+b+c=10$

답 10

16 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to a+}|f(x)|=\lim_{x\to a-}|f(x)|=|f(a)|$$

이때 $|f(a)|=|3a-1|$이고,

$$\lim_{x\to a+}|f(x)|=\lim_{x\to a+}|3x-1|=|3a-1|,$$

$$\lim_{x\to a-}|f(x)|=\lim_{x\to a-}|x+5|=|a+5|$$

이므로 $|3a-1|=|a+5|$

$\therefore 3a-1=\pm(a+5)$

(i) $3a-1=a+5$일 때,

$2a=6$ $\therefore a=3$

(ii) $3a-1=-(a+5)$일 때,

$4a=-4 \qquad \therefore a=-1$

(i), (ii)에서 $\quad a=3\ (\because a>0)$ 답 ⑤

17 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1} f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$이어야 한다.

이때 $f(-1)g(-1)=(-k+7)(1+2)=-3k+21$이고,

$$\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}(kx+7)(-x)=-k+7,$$

$$\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}(kx+7)(-x+2)=-3k+21$$

이므로 $\quad -k+7=-3k+21, \quad 2k=14$

$\therefore k=7$ 답 7

18 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to1} g(x)=g(1)$이어야 한다.

이때 $g(1)=f(1)\{f(1)-k\}=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-k\right)=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}k$이고,

$$\lim_{x\to1+} g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)\{f(x)-k\}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x-1)(x-1-k)=0,$$

$$\lim_{x\to1-} g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)\{f(x)-k\}$$
$$=\lim_{x\to1-}\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x+1-k\right)=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}k$$

이므로 $\quad 0=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}k \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

19 함수 $\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to0}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$이어야 한다.

이때 $\{g(0)\}^2=\{f(2)\}^2=(6+k)^2$이고, ··· ❶

$x+2=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to2+$이므로

$$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0+}\{f(x+2)\}^2=\lim_{t\to2+}\{f(t)\}^2$$
$$=\lim_{t\to2+}(t^2+t+k)^2=(6+k)^2 \quad \cdots ❷$$

또 $x-2=s$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $s\to-2-$이므로

$$\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}\{f(x-2)\}^2=\lim_{s\to-2-}\{f(s)\}^2$$
$$=\lim_{s\to-2-}(s^2+s+k)^2=(2+k)^2 \quad \cdots ❸$$

따라서 $(6+k)^2=(2+k)^2$이므로

$8k=-32 \qquad \therefore k=-4$ ··· ❹

답 -4

채점 기준	비율
❶ $\{g(0)\}^2$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2$을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $f(x-2)=(x-2)^2+(x-2)+k=x^2-3x+2+k$,

$f(x+2)=(x+2)^2+(x+2)+k=x^2+5x+6+k$

이므로 $\quad g(x)=\begin{cases} x^2-3x+2+k & (x<0) \\ x^2+5x+6+k & (x\ge0) \end{cases}$

이때 $\{g(0)\}^2=(6+k)^2$이고,

$$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0+}(x^2+5x+6+k)^2=(6+k)^2,$$

$$\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}(x^2-3x+2+k)^2=(2+k)^2$$

이므로 $\quad (6+k)^2=(2+k)^2 \qquad \therefore k=-4$

20 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=4$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to4+} f(x)=\lim_{x\to4-} f(x)=f(4)$$

$16-b=16+4a+4 \qquad \therefore 4a+b=-4$ ······ ㉠

이때 $f(x)=f(x+5)$이므로 $\quad f(0)=f(5)$

$4=20-b \qquad \therefore b=16$

$b=16$을 ㉠에 대입하면

$4a+16=-4 \qquad \therefore a=-5$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+4 & (0\le x<4) \\ 4x-16 & (4\le x\le5) \end{cases}$이므로

$f(13)=f(8)=f(3)=9-15+4=-2$ 답 ②

쎈B특강

주기함수

함수 f의 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)=f(x)$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 f를 주기함수라 하고 이러한 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라 한다.

21 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to3} f(x)=f(3)$$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{x^2+ax+3}{x-3}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(x^2+ax+3)=0$이므로

$9+3a+3=0 \qquad \therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x-1)=2$$

이므로 $\quad b=2$

$\therefore a+b=-2$ 답 ①

22 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}+b}{x-2}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}(\sqrt{x^2+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{4+a}+b=0 \qquad \therefore\ b=-\sqrt{4+a}$ ······ ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a}}$$
$$=\frac{4}{2\sqrt{4+a}}=\frac{2}{\sqrt{4+a}}$$

따라서 $\dfrac{2}{\sqrt{4+a}}=1$이므로 $\quad 4+a=4$

$\therefore\ a=0$

$a=0$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=-2$

$\therefore\ a-b=2$

답 ④

23 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

└ 모든 실수 x에서 연속

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to-1+}\frac{x+b}{\sqrt{x+5}-2}=-a-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to-1+$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-1+}(x+b)=0$이므로

$-1+b=0 \qquad \therefore\ b=1$ ··· ❶

$b=1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1+}\frac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}(\sqrt{x+5}+2)=4$$

따라서 $-a-1=4$이므로 $\quad a=-5$ ··· ❷

$\therefore\ b-a=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	10 %

24 $g(x)$가 다항함수이므로 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)=-1$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{x-a}=-1$에서 $x\to a$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

$\therefore\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$

ㄷ. $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)}{x^2-ax}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)}{x(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}$$
$$=-\frac{1}{a}\cdot(-1)=\frac{1}{a}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

25 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to1}g(x)=g(1)$이어야 한다.

이때 $f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$이므로

$\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}[f(x)]=\lim\limits_{x\to1}[(x-1)^2+3]$

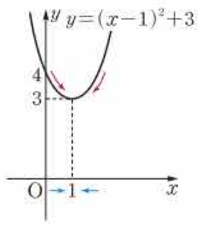
이고 $x\to1$일 때 $(x-1)^2+3\to3+$이므로

$\lim\limits_{x\to1}[(x-1)^2+3]=3$

$\therefore\ k=g(1)=\lim\limits_{x\to1}g(x)=3$

답 ④

참고 $y=(x-1)^2+3$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, $x\to1-$, $x\to1+$일 때 모두 y의 값이 3보다 큰 값에서 3에 한없이 가까워지므로 $x\to1$일 때 $(x-1)^2+3\to3+$임을 알 수 있다.



26 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이어야 한다.

이때 $f(-1)=(-1)^2+(-a)\cdot5=1-5a$이고,

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}([x]^2+ax[x+6])$$
$$=(-1)^2+(-a)\cdot5$$
$$=1-5a,$$
$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}([x]^2+ax[x+6])$$
$$=(-2)^2+(-a)\cdot4$$
$$=4-4a$$

이므로 $\quad 1-5a=4-4a$

$\therefore\ a=-3$

답 -3

27 (i) $0\le x^2\le4$일 때,

$3\le\sqrt{13-x^2}\le\sqrt{13}$이므로 $\quad f(x)=3$

(ii) $4<x^2\le9$일 때,

$2\le\sqrt{13-x^2}<3$이므로 $\quad f(x)=2$

(iii) $9<x^2\le12$일 때,

$1\le\sqrt{13-x^2}<2$이므로 $\quad f(x)=1$

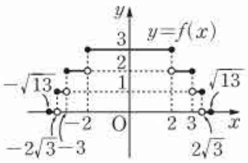
(iv) $12<x^2\le13$일 때,

$0\le\sqrt{13-x^2}<1$이므로 $\quad f(x)=0$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 불연속이 되는 정수 x의 값은

$-3,\ -2,\ 2,\ 3$

의 4개이다. 답 ③



28 $f(-1)$, $f(0)$의 값이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$에서 불연속이고 그 외의 구간에서는 연속이다.

$\therefore A=\{x|-3<x<-1\}\cup\{x|-1<x<0\}$
$\cup\{x|0<x<3\}$ ··· ❶

또 정수 n에 대하여 $\lim\limits_{x\to n}g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=n$ (n은 정수)에서 불연속이고 그 외의 구간에서는 연속이다.

$\therefore B=\{x|-3<x<-2\}\cup\{x|-2<x<-1\}$
$\cup\cdots\cup\{x|2<x<3\}$ ··· ❷

따라서 $A-B=\{-2,\ 1,\ 2\}$이므로 모든 원소의 합은

$-2+1+2=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 집합 A를 구할 수 있다.	30 %
❷ 집합 B를 구할 수 있다.	40 %
❸ 집합 $A-B$의 모든 원소의 합을 구할 수 있다.	30 %

29 $x\neq1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^3+ax+b}{x-1}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{x-1}$$

이어야 한다.

$x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to1}(x^3+ax+b)=0$이므로

$1+a+b=0 \qquad \therefore a+b=-1$ ······ ㉠

이때 $f(-1)=-3$이므로 $(x-1)f(x)=x^3+ax+b$에서

$-2f(-1)=-1-a+b \qquad \therefore a-b=-7$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=3$

따라서 $x\neq1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^3-4x+3}{x-1}$이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-4x+3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+x-3)$$
$$=-1$$

조립제법을 이용하여 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3-4x+3$
$=(x-1)(x^2+x-3)$

답 ②

30 $x\neq-2$일 때,

$$f(x)=\frac{x^4-16}{x+2}$$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$$f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^4-16}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(x^2+4)(x-2)=-32$$

답 -32

31 $x\neq3$일 때,

$$f(x)=\frac{a\sqrt{x+1}+b}{x-3}$$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로 $\quad \lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x+1}+b}{x-3}=1$$ ······ ㉠ ··· ❶

$x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to3}(a\sqrt{x+1}+b)=0$이므로

$2a+b=0 \qquad \therefore b=-2a$ ······ ㉡ ··· ❷

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x+1}-2a}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{a(\sqrt{x+1}-2)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{a(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{a}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{a}{4}$$

따라서 $\dfrac{a}{4}=1$이므로 $\quad a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $\quad b=-8$ ··· ❸

$\therefore a+b=-4$ ··· ❹

답 -4

채점 기준	비율
❶ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{a\sqrt{x+1}+b}{x-3}=1$임을 알 수 있다.	30 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

32 $x\neq2$일 때, $x=2$이면 $\sqrt{x}-\sqrt{4-x}=0$이다.

$$f(x)=\frac{x^2-kx}{\sqrt{x}-\sqrt{4-x}}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-kx}{\sqrt{x}-\sqrt{4-x}}$$

이어야 한다.

$x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}(x^2-kx)=0$이므로

$4-2k=0 \qquad \therefore k=2$

따라서 $x\neq2$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x}-\sqrt{4-x}}$이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x}-\sqrt{4-x}}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-2x)(\sqrt{x}+\sqrt{4-x})}{(\sqrt{x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{x}+\sqrt{4-x})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{4-x})}{2(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x(\sqrt{x}+\sqrt{4-x})}{2}$$
$$=\frac{2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2}=2\sqrt{2}$$

$\therefore\ k+f(2)=2+2\sqrt{2}=2(\sqrt{2}+1)$ 답 ⑤

33 ③ $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면

$g(x)=f(x)-h(x)$

이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

④ [반례] $f(x)=0,\ g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이면 $f(x)$와 $f(x)g(x)$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}g(x)=b$라 하면 $g(x)$가 연속함수이므로 $b=g(a)$

또 $f(x)$가 연속함수이므로

$\lim_{x\to a}f(g(x))=f(g(a))=f(b)$

따라서 $f(g(x))$도 연속함수이다.

답 ④

34 ① $f(x)+g(x)=x^2+1+\frac{3}{x}$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

② $f(x)g(x)=(x^2+1)\cdot\frac{3}{x}=3x+\frac{3}{x}$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ $f(g(x))=f\left(\frac{3}{x}\right)=\frac{9}{x^2}+1$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ $g(f(x))=g(x^2+1)=\frac{3}{x^2+1}$이므로 $g(f(x))$는 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{3}{x(x^2+1)}$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

답 ④

35 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),\ \lim_{x\to a}g(x)=g(a)$

ㄱ. $\lim_{x\to a}\{5f(x)-g(x)\}=5\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$
$=5f(a)-g(a)$

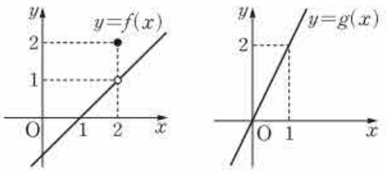
이므로 $5f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}f(x)=\{f(a)\}^2$

이므로 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. $g(a)=0$이면 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

ㄹ. [반례]



위의 그림에서 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=1$에서 연속이지만 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 $x=a$에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

쎈B특강

ㄹ. 함수 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a}f(g(x))=f(g(a))$가 성립해야 하므로 $f(x)$가 $x=g(a)$에서 연속이어야 한다.

36 $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{g(x)}{f(x)}$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $g(x)\ne0$, $f(x)\ne0$이어야 한다.

즉 두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 실근이 모두 존재하지 않아야 하므로 두 방정식의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=a^2-48<0,\ \frac{D_2}{4}=a^2+7a<0$

$a^2-48<0$에서 $(a+4\sqrt{3})(a-4\sqrt{3})<0$

$\therefore\ -4\sqrt{3}<a<4\sqrt{3}$ …… ㉠

$a^2+7a<0$에서 $a(a+7)<0$

$\therefore\ -7<a<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-4\sqrt{3}<a<0$

따라서 정수 a는

$-6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1$

의 6개이다. 답 6

37 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2-2x+2)=1$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-x^2+2x-2)=-1$

에서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다. ··· ❶

이때 $f(1)g(1)=1\cdot(a+5)=a+5$이고,

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}(x^2-2x+2)(ax+5)$
$=a+5$,

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}(-x^2+2x-2)(ax+5)$
$=-a-5$

이므로 $a+5=-a-5$

$2a=-10$ $\therefore\ a=-5$ ··· ❷

답 -5

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 알 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

38 조건 (가)에서 $\quad f(-3)=0,\ f(1)=0$

즉 $f(x)$가 $x+3$, $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)=a(x+3)(x-1)$ ($a\neq0$, a는 상수) ⋯ ❶

로 놓고 조건 (나)의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)(x-1)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-3}a(x-1)=-4a$$

따라서 $-4a=4$이므로 $\quad a=-1$

즉 $f(x)=-(x+3)(x-1)$이므로 ⋯ ❷

$f(0)=-3\cdot(-1)=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 인수를 찾고 $f(x)$를 미정계수를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

39 ① $\lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

② $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=1$이므로 $\quad \lim_{x\to3}f(x)=1$

③ $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 2, 3, 4의 3개이다.

④ $f(x)$가 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값을 갖는다.

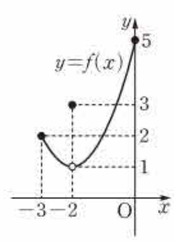
⑤ $f(x)$는 구간 $[2,\ 4]$에서 최솟값을 갖지 않는다.

답 ④

40 $x\neq-2$일 때,

$f(x)=x^2+4x+5=(x+2)^2+1$

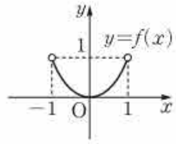
함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $[-3,\ 0]$에서 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-2$에서 불연속이다.



따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-3,\ 0]$에서 $x=0$일 때 최댓값 5를 갖고, 최솟값은 없다.

답 최댓값: 5, 최솟값: 없다.

41 ① 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(-1,\ 1)$에서 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-1,\ 1)$에서 최솟값 0을 갖고, 최댓값은 갖지 않는다.

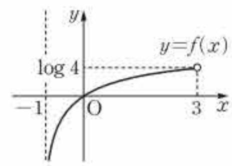


② $f(x)=-x+5$는 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-3,\ 3]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값, 최솟값을 모두 갖는다.

③ $f(x)=\sqrt{x-1}$은 $x\geq1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1,\ 4]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값, 최솟값을 모두 갖는다.

④ $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+3$은 $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이다.
또 $\lim_{x\to2-}f(x)=-\infty$이고 구간 $(-\infty,\ 2)$에서 감소하므로 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2)$에서 최댓값 $f(0)=\dfrac{5}{2}$를 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to-1+}f(x)=-\infty$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(-1,\ 3)$에서 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-1,\ 3)$에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖지 않는다.



답 ④

쎈B 특강

다음과 같은 경우에 함수의 최댓값, 최솟값이 존재하지 않을 수도 있다.
① 정의된 구간이 닫힌구간이 아닌 경우
② 닫힌구간에서 정의되었지만 연속이 아닌 경우

42 ㄱ. $f(x)-g(x)=x-2-\dfrac{1}{x+3}$은 $x\neq-3$인 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 $f(x)-g(x)$는 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값, 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. $f(x)g(x)=\dfrac{x-2}{x+3}=1-\dfrac{5}{x+3}$는 $x\neq-3$인 모든 실수 x에서 연속이다.
따라서 $f(x)g(x)$는 구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값, 최솟값을 모두 갖는다.

ㄷ. $g(f(x))=g(x-2)=\dfrac{1}{x+1}$은 $x=-1$에서 불연속이다.
또 $\lim_{x\to-1+}g(f(x))=\infty$, $\lim_{x\to-1-}g(f(x))=-\infty$이므로
$g(f(x))$는 구간 $[-2,\ 2]$에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖지 않는다.

이상에서 구간 $[-2,\ 2]$에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

43 $f(x)=x^3-3x^2+x+4$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-3)=-53<0$, $f(-2)=-18<0$, $f(-1)=-1<0$,
$f(0)=4>0$, $f(1)=3>0$, $f(2)=2>0$, $f(3)=7>0$

따라서 $f(-1)f(0)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(-1,\ 0)$이다.

답 ③

44 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-5,\ 2)$에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(-5)f(2)<0$이어야 하므로 ⋯ ❶

$(a-7)(a-3)<0 \qquad \therefore 3<a<7$ ⋯ ❷

따라서 정수 a는 4, 5, 6이므로 모든 정수 a의 값의 합은

$4+5+6=15$ ⋯ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-5,\ 2)$에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	60 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ 모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

45 $f(x)=x^4+5x^2-6$, $g(x)=-x^3+2x^2-x-5$라 하고 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$h(x)=x^4+x^3+3x^2+x-1$$

함수 $h(x)$는 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고

$$h(-1)=1>0,\ h(0)=-1<0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 구간 $(-1,\ 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 $f(c)-g(c)=0$, 즉 $f(c)=g(c)$인 c가 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재하므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 $-1<x<0$에서 적어도 하나의 교점을 갖는다. 답 풀이 참조

쎈B특강

두 곡선의 교점
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 실근과 같다.

46 ㄱ. $f(x)=|x^2-4|-1$이라 하면 $f(x)$는 구간 $[2,\ 3]$에서 연속이고

$$f(2)=-1<0,\ f(3)=4>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $g(x)=\dfrac{3x-7}{x-1}$이라 하면 $g(x)$는 구간 $[2,\ 3]$에서 연속이고

$$g(2)=-1<0,\ g(3)=1>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $h(x)=2^x-6$이라 하면 $h(x)$는 구간 $[2,\ 3]$에서 연속이고

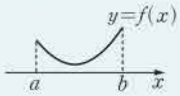
$$h(2)=-2<0,\ h(3)=2>0$$

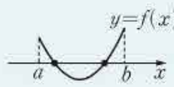
이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

쎈B특강

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)>0$이면 다음 그림과 같이 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(a,\ b)$에서 실근을 가질 수도 있고, 갖지 않을 수도 있다.





47 $f(0)=1>0$, $f(1)=-1<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
또 $f(3)=-1<0$, $f(4)=2>0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(3,\ 4)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 2개의 실근을 갖는다.

$\therefore\ n=2$ 답 ①

48 $f(-x)=-f(x)$에 $x=0$을 대입하면

$$f(0)=-f(0),\qquad 2f(0)=0$$
$$\therefore\ f(0)=0$$

즉 $x=0$은 방정식 $f(x)=0$의 실근이다. ··· ❶
$f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. ··· ❷
이때 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$$f(-3)f(-2)=f(2)f(3)<0 \quad f(-2)=-f(2),\ f(-3)=-f(3)$$

즉 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-3,\ -2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. ··· ❸
따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 3개의 실근을 갖는다. ··· ❹
답 3개

채점 기준	비율
❶ $x=0$이 방정식 $f(x)=0$의 실근임을 알 수 있다.	20 %
❷ 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다.	30 %
❸ 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-3,\ -2)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다.	30 %
❹ 방정식 $f(x)=0$이 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구할 수 있다.	20 %

49 조건 (가), (나)에서 $f(-2)=0$, $f(1)=0$이므로

$$f(x)=(x+2)(x-1)Q(x)\ (Q(x)\text{는 다항함수}) \quad \cdots\ ㉠$$

라 할 수 있다.
㉠을 (가)의 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)Q(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x-1)Q(x)=-3Q(-2)$$

즉 $-3Q(-2)=2$이므로 $\quad Q(-2)=-\dfrac{2}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 (나)의 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)Q(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+2)Q(x)=3Q(1)$$

즉 $3Q(1)=18$이므로 $\quad Q(1)=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

이때 $Q(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이고 ㉡, ㉢에서 $Q(-2)Q(1)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $Q(x)=0$은 구간 $(-2,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 ①

50 $g(x)=f(x)+2x$라 하면 함수 $g(x)$는 연속함수이고

$$g(-1)=f(-1)-2=1-2=-1<0,$$
$$g(0)=f(0)+0=-2+0=-2<0,$$
$$g(1)=f(1)+2=-1+2=1>0,$$
$$g(2)=f(2)+4=-5+4=-1<0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 $f(c)+2c=0$, 즉 $f(c)=-2c$인 c가 구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에 각각 적어도 하나씩 존재하므로 두 함수의 그래프의 교점이 반드시 존재하는 구간은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄷ, ㄹ

51 주어진 그래프에서 $a>0$, $b<0$, $c=0$
$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$라 하면

$$f(x)=(x-a)(x-b)+x(x-b)+x(x-a)$$

이고

$$f(a)=a(a-b)>0,$$
$$f(b)=b(b-a)>0,$$
$$f(c)=f(0)=ab<0$$

이때 함수 $f(x)$는 연속함수이고 $b<c<a$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 (b, c), (c, a)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
즉 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
답 풀이 참조

52 소희가 집을 출발한 지 x시간 후의 자전거의 속력을 $f(x)$ km/h라 하면 함수 $f(x)$는 연속함수이다.
집을 출발한 지 a시간, b시간 후에 각각 편의점, 도서관에 도착하였다고 하면

$$f(0)=0,\ f(a)=0,\ f(b)=0$$

이때 $0<\alpha<a$, $a<\beta<b$이고 $f(\alpha)=20$, $f(\beta)=20$인 α, β가 존재하므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(k)=10$인 k가 구간 $(0, \alpha)$, (α, a), (a, β), (β, b)에 각각 적어도 하나씩 존재한다.
따라서 자전거의 속력이 10 km/h인 순간은 적어도 4번 존재한다.

$$\therefore n=4$$

답 ④

53 기온의 변화는 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여
① 11시부터 12시까지 기온이 23.5 °C가 되는 때는 적어도 한 번 존재한다.
② 12시부터 13시까지 기온이 23 °C가 되는 때는 존재하지 않을 수도 있다.
③ 13시부터 14시까지 기온이 25 °C가 되는 때는 존재하지 않을 수도 있다.
④ 13시부터 16시까지 기온이 22.5 °C가 되는 때는 14시부터 15시까지 한 번, 15시부터 16시까지 한 번으로 적어도 두 번 존재한다.
⑤ 11시부터 16시까지 기온이 24.5 °C가 되는 때는 12시부터 13시까지 한 번, 14시부터 15시까지 한 번으로 적어도 두 번 존재한다.

답 ④

Ⅱ. 다항함수의 미분법

03 미분계수와 도함수

개념 정리

본책 30쪽

❶ $f(b)-f(a)$ ❷ 미분계수 ❸ $a+\Delta x$ ❹ 기울기
❺ dy ❻ nx^{n-1} ❼ $f'(x)+g'(x)$
❽ $f'(x)g(x)$

쎈B 유형 뽀개기

본책 31쪽

01 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^3+2a-3)-0}{a-1}$$
$$=\frac{(a-1)(a^2+a+3)}{a-1}=a^2+a+3$$

따라서 $a^2+a+3=9$이므로 $a^2+a-6=0$

$$(a+3)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a>1)$$

답 2

02 x의 값이 2에서 5까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{(25-5a+2)-(4-2a+2)}{3}$$
$$=\frac{-3a+21}{3}=-a+7$$

따라서 $-a+7=3$이므로 $a=4$

답 ④

03 x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=\frac{a^2+4a-(-3)}{a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a+3)}{a+1}=a+3 \quad \cdots ❶$$

또 x의 값이 -4에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}=\frac{12-0}{6}=2 \quad \cdots ❷$$

따라서 $a+3=2\cdot2$이므로

$$a=1 \quad \cdots ❸$$

답 1

채점 기준	비율
❶ x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 평균변화율을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ x의 값이 -4에서 2까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

04 x의 값이 k에서 $k+2$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 k이므로

$$\frac{f(k+2)-f(k)}{(k+2)-k}=k$$
$$\therefore f(k+2)-f(k)=2k \quad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 x의 값이 2에서 40까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(40)-f(2)}{40-2}$$
$$=\frac{1}{38}[\{f(40)-f(38)\}+\{f(38)-f(36)\}+\{f(36)-f(34)\}$$
$$+\cdots+\{f(6)-f(4)\}+\{f(4)-f(2)\}]$$
$$=\frac{1}{38}\cdot(2\cdot38+2\cdot36+2\cdot34+\cdots+2\cdot4+2\cdot2)\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{1}{19}\sum_{k=1}^{19}2k=\frac{1}{19}\cdot2\cdot\frac{19\cdot20}{2}$$
$$=20$$

답 20

쎈B특강

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ ② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

05 직선 AB의 기울기는 x의 값이 3에서 6까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(6)-f(3)}{6-3}=\frac{4}{3}$$

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$$f(0)=f(6)$$

따라서 x의 값이 0에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{f(3)-f(6)}{3}$$
$$=-\frac{f(6)-f(3)}{6-3}=-\frac{4}{3}$$

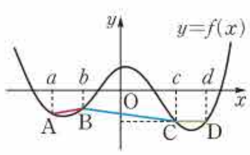
답 $-\frac{4}{3}$

06 x의 값이 -2에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은 두 점 $A(-2,\ f(-2))$, $B(2,\ f(2))$를 지나는 직선 AB의 기울기와 같다.

따라서 직선 AB의 기울기는 -5이다.

답 -5

07 오른쪽 그림의 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 α, β, γ의 값은 각각 직선 AB, 직선 BC, 직선 CD의 기울기와 같으므로



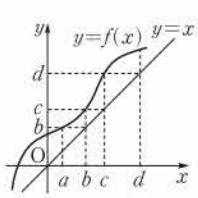
$$\alpha>0,\ \beta<0,\ \gamma=0$$
$$\therefore \beta<\gamma<\alpha$$

답 ④

08 x의 값이 b에서 d까지 변할 때의 함수 $g(x)$의 평균변화율은

$$\frac{g(d)-g(b)}{d-b}=\frac{f^{-1}(d)-f^{-1}(b)}{d-b}$$

오른쪽 그림에서 $f(c)=d$이므로



$$f^{-1}(d)=c$$

또 $f(a)=b$이므로 $f^{-1}(b)=a$

따라서 구하는 평균변화율은

$$\frac{f^{-1}(d)-f^{-1}(b)}{d-b}=\frac{c-a}{d-b}$$

답 ⑤

09 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{4-(-2)}{3}=2$$

또 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(a+h)^2-3(a+h)\}-(a^2-3a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2ah+h^2-3h}{h}=\lim_{h\to0}(2a+h-3)$$
$$=2a-3$$

따라서 $2a-3=2$이므로

$$a=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

10 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2+5b+1)-(a^2+5a+1)}{b-a}$$
$$=\frac{(b^2-a^2)+5(b-a)}{b-a}$$
$$=\frac{(b-a)(b+a+5)}{b-a}$$
$$=b+a+5$$ ··· ❶

또 함수 $f(x)$의 $x=-2$에서의 순간변화율은

$$f'(-2)=\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(-2+h)^2+5(-2+h)+1\}-(-5)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to0}(h+1)$$
$$=1$$ ··· ❷

따라서 $b+a+5=1$이므로

$$a+b=-4$$ ··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
❷ $x=-2$에서의 순간변화율을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

11 x의 값이 0에서 t까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 t^2-6이므로

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=t^2-6$$

이때 $f(0)=2$이므로

$$\frac{f(t)-2}{t}=t^2-6 \qquad \therefore f(t)=t^3-6t+2$$

즉 $f(x)=x^3-6x+2$이므로 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(1+h)^3-6(1+h)+2\}-(-3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-3h+3h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to0}(-3+3h+h^2)$$
$$=-3$$

답 ⑤

12 $\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1+5h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1-h)-f(1)\}-\{f(1+5h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)-\lim_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}\cdot5$

$=-f'(1)-5f'(1)=-6f'(1)$

$=-6\cdot(-3)=18$ 답 ④

13 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{7h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\cdot\frac{4}{7}$

$=\frac{4}{7}f'(a)$ 답 ②

14 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$를 만족시키므로 $f(8)=-f(-8)=-(-4)=4$

이때 $f'(8)=5$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(8-h)-4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(8-h)-f(8)}{-h}\cdot(-1)$

$=-f'(8)=-5$ 답 -5

15 $\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{f(a+h)}-\sqrt{f(a)}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{\sqrt{f(a+h)}-\sqrt{f(a)}\}\{\sqrt{f(a+h)}+\sqrt{f(a)}\}}{h\{\sqrt{f(a+h)}+\sqrt{f(a)}\}}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(a+h)}+\sqrt{f(a)}}$

$=\frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}$ 답 ③

16 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot2$

$=2f'(a)$

따라서 $2f'(a)=2$이므로 $f'(a)=1$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a+h^2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(a-3h)-f(a)\}-\{f(a+h^2)-f(a)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\cdot(-3)-\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h$

$=-3f'(a)-f'(a)\cdot0=-3f'(a)$

$=-3\cdot1=-3$ 답 -3

17 $\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\{x^2f(1)-f(1)\}-\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\cdot f(1)-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=2f(1)-f'(1)=2\cdot3-2=4$ 답 ②

18 $f(2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+3)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+3}$

$=\frac{1}{5}f'(2)=\frac{1}{5}\cdot10$

$=2$ 답 ④

19 $f(3)=9$에서 $3=\sqrt{f(3)}$이므로

$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{f(x)}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(3)}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

$=\lim_{x\to3}\frac{\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(3)}\}\{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(3)}\}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(3)}}$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(3)}}$

$=f'(3)\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{f(3)}}=f'(3)\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{f(3)}}$

$=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

20 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x+5)-4}{x^2-1}=7$에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}\{f(x+5)-4\}=0$이므로 $f(4)=4$ ··· ❶

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{f(x+5)-4}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x+5)-f(4)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x+5)-f(4)}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x+5)-f(4)}{(x+5)-4}\cdot\frac{1}{x-1}$

$=-\frac{1}{2}f'(4)$

따라서 $-\frac{1}{2}f'(4)=7$이므로 $f'(4)=-14$ ··· ❷

$\therefore f(4)+f'(4)=4+(-14)=-10$ ··· ❸

답 -10

채점 기준	비율
❶ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(4)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(4)+f'(4)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

21 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

$\therefore f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$

$=-1$ 답 ⑤

22 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \qquad \therefore f(0)=0$ ⋯ ❶

이때

$$\begin{aligned} f'(1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+1\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+1\\ &=f'(0)+1 \end{aligned}$$

이므로 $\quad f'(0)+1=4 \qquad \therefore f'(0)=3$ ⋯ ❷

$$\begin{aligned} \therefore f'(3)&=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(3)+f(h)+3h-f(3)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+3\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+3\\ &=f'(0)+3\\ &=3+3=6 \end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

23 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \qquad \therefore f(0)=1$

이때

$$\begin{aligned} f'(2)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+6h-1-f(2)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+6\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+6\\ &=f'(0)+6 \end{aligned}$$

이므로 $\quad f'(0)+6=8 \qquad \therefore f'(0)=2$

한편

$$\begin{aligned} f'(2a)&=\lim_{h\to0}\frac{f(2a+h)-f(2a)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(2a)+f(h)+6ah-1-f(2a)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}+6a\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+6a\\ &=f'(0)+6a\\ &=6a+2 \end{aligned}$$

이므로

$6a+2=20 \qquad \therefore a=3$

답 ②

24 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=4f(0)f(0) \qquad \therefore f(0)=\frac{1}{4}$ ($\because f(0)>0$) ⋯ ❶

이때

$$\begin{aligned} f'(10)&=\lim_{h\to0}\frac{f(10+h)-f(10)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{4f(10)f(h)-f(10)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{4f(10)\left\{f(h)-\frac{1}{4}\right\}}{h}\\ &=4f(10)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\ &=4f(10)f'(0) \end{aligned}$$ ⋯ ❷

이므로

$$\begin{aligned} \frac{f'(10)}{f(10)}&=\frac{4f(10)f'(0)}{f(10)}=4f'(0)\\ &=4\cdot(-3)=-12 \end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 -12

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(10)$을 $f(10)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $\frac{f'(10)}{f(10)}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

25 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$과 같고, 이 접선은 두 점 $(0,\ 5)$, $(1,\ 3)$을 지나므로

$f'(1)=\frac{3-5}{1-0}=-2$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{4h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot\frac{3}{4}\\ &=\frac{3}{4}f'(1)=\frac{3}{4}\cdot(-2)\\ &=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

26 네 수 $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$, $f'(d)$의 값은 각각 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$인 점에서의 접선의 기울기와 같으므로

$0<f'(a)<f'(c)$, $f'(b)=0$, $f'(d)<0$

$\therefore f'(d)<f'(b)<f'(a)<f'(c)$

답 $f'(d)<f'(b)<f'(a)<f'(c)$

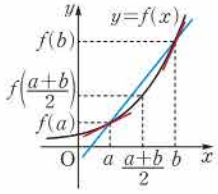
27 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 6)$에서의 접선의 기울기가 4이므로 $\quad f(2)=6$, $f'(2)=4$

$$\begin{aligned} &\therefore \lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{x-2}\\ &=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-2f(2)+2f(2)-xf(2)}{x-2}\\ &=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}-f(2)(x-2)}{x-2}\\ &=2\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-f(2)\\ &=2f'(2)-f(2)\\ &=2\cdot4-6=2 \end{aligned}$$

답 2

28 ㄱ. $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $x=b$인 점에서의 접선의 기울기보다 작으므로

$$f'(a)<f'(b)$$



ㄴ. $a\le x\le b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ㄷ. $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로

$$f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

쎈B 특강

$a<b$일 때

① 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2},\ f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

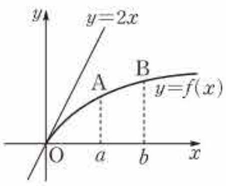
② 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2},\ f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

29 오른쪽 그림과 같이

$\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$

라 하자.



① 직선 AB의 기울기는 2보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<2$$

이때 $b-a>0$이므로

$$f(b)-f(a)<2(b-a)$$

② $\dfrac{f(a)}{a}$는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고, $\dfrac{f(b)}{b}$는 원점과 점 B를 지나는 직선의 기울기이므로

$$\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$$

이때 $0<a<b$이므로

$$bf(a)-af(b)>0$$

③ $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로

$$f'(a)>f'(b)$$

④ $\dfrac{f(a)}{a}$는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이므로

$$\frac{f(a)}{a}>f'(a)$$

이때 $a>0$이므로 $\quad f(a)>af'(a)$

⑤ $0<a<b$에 대하여 $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, 즉 $a+b>2\sqrt{ab}$이고, x의 값이 클수록 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 작아진다.

$$\therefore\ f'(a+b)<f'(2\sqrt{ab})$$

답 ④

쎈B 특강

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0,\ b>0$일 때,

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립})$$

30 ① $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h-0}{h}=1$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

② $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=-1$$

이므로 $f'(0)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

③ $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|^2-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to0}h=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

④ $f(0)$이 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

⑤ $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2-0}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}h=0,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2-0}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}(-h)=0$$

이므로 $\quad f'(0)=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

답 ②

31 ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h(1+h)|-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}(1+h)=1,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h(1+h)|-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\{-(1+h)\}=-1$$

이므로 $f'(1)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to1}g(x)=g(1)=0$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h|h|-0}{h}=\lim_{h\to0+}h=0,$$

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0-}(-h)=0$

이므로 $g'(1)=0$

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to 1}k(x)=k(1)=0$이므로 $k(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h+|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to 0+}2=2,$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h+|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{0}{h}=0$$

이므로 $k'(1)$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $k(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

32 ①, ② $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

③, ④ $f'(a)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

답 ⑤

쎈B특강

③ $x<a$일 때, 직선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 미분계수는 음수이므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0$$

$x>a$일 때, 직선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 미분계수는 양수이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$$

따라서 $f'(a)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

④ $x<a$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0$$

$x>a$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는 양수이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0$$

따라서 $f'(a)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

33 ① $x=-2$인 점에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'(-2)>0$이다.

② $\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to -1}f(x)$의 값이 존재한다.

③ $f'(x)=0$인 점은 구간 $(-2, -1)$에서 1개 존재한다.

⑤ 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점은 3개이다.

답 ⑤

34 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$에서

$16+b=4a-1\quad \therefore 4a-b=17$ …… ㉠

또 $f'(2)$가 존재하므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{a(2+h)^2-1-(4a-1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{4ah+ah^2}{h}=\lim_{h\to 0+}(4a+ah)=4a,$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{8(2+h)+b-(16+b)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{8h}{h}=8$$

에서 $4a=8\quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $8-b=17\quad \therefore b=-9$

$\therefore a+b=-7$

답 -7

다른 풀이 $g(x)=ax^2-1$, $h(x)=8x+b$라 하면

$g'(x)=2ax$, $h'(x)=8$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $g(2)=h(2)$

$4a-1=16+b\quad \therefore 4a-b=17$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $g'(2)=h'(2)$

$4a=8\quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $8-b=17\quad \therefore b=-9$

$\therefore a+b=-7$

쎈B특강

두 다항함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\ge a) \\ h(x) & (x<a) \end{cases}$$

가 $x=a$에서 미분가능하면

① $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다. ➡ $g(a)=h(a)$

② $f'(a)$가 존재한다. ➡ $g'(a)=h'(a)$

35 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$에서

$1-6+b=-3+a\quad \therefore a-b=-2$ …… ㉠ ⋯ ❶

또 $f'(1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(-3x^2+ax)-(-3+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{-3x^2+ax+3-a}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(-3x-3+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(-3x-3+a)=a-6,$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x^2-6x+b)-(1-6+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-6x+5}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x-5)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}(x-5)=-4$$

에서 $a-6=-4\quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $2-b=-2\quad \therefore b=4$ ⋯ ❷

$\therefore ab=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

36 $f'(-1)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{|x+1|(x+a)^2-0}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(x+a)^2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}(x+a)^2=(a-1)^2,$$
$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{|x+1|(x+a)^2-0}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\frac{-(x+1)(x+a)^2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\{-(x+a)^2\}=-(a-1)^2$$

에서 $(a-1)^2=-(a-1)^2$, $(a-1)^2=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $f'(-1)=(1-1)^2=0$이므로

$a+f'(-1)=1$

답 ③

37 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (2\le x<3)\\ 0 & (1\le x<2)\end{cases}$이 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$에서

$0=4+2a+b$ $\quad\therefore 2a+b=-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(2)$가 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{(2+h)^2+a(2+h)+b-(4+2a+b)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+(a+4)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(h+a+4)=a+4,$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{0-0}{h}=0$$

에서 $a+4=0$ $\quad\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $-8+b=-4$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore b-a=8$

답 ⑤

참고 $[x-1]=\begin{cases}1 & (2\le x<3)\\ 0 & (1\le x<2)\end{cases}$이므로 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (2\le x<3)\\ 0 & (1\le x<2)\end{cases}$

38 $x^2f(x)=g(x)$라 하면 $y=g(x)$에서

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2f(x+h)-x^2f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(x^2+2xh+h^2)f(x+h)-x^2f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{x^2\{f(x+h)-f(x)\}+\boxed{2xhf(x+h)}+h^2f(x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}x^2\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+2xf(x)$$
$$=x^2f'(x)+\boxed{2xf(x)}$$

답 (가) $2xhf(x+h)$ (나) $2xf(x)$

39 $f'(x)$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\boxed{(x+h)^n-x^n}}{h}$$

a^n-b^n
$=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(\boxed{x+h})-x}{h}\cdot\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}$$
$$=\lim_{h\to0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}$$
$$=\boxed{nx^{n-1}}$$

답 ③

40 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\quad\therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+4xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+4xh}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+4x$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+4x$$
$$=f'(0)+4x$$
$$=4x-3$$

답 ③

41 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ $\quad\therefore f(0)=1$ $\quad\cdots$ ❶

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+x^2h+xh^2-1-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+x^2h+xh^2-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-1}{h}+x^2+xh\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+x^2$$
$$=f'(0)+x^2$$

$\cdots$ ❷

이때 $f'(0)$은 상수이므로 $f'(x)$는 이차함수이다.

따라서 $f(x)$는 삼차함수이므로 $f(x)$의 차수는 3이다. $\cdots$ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 차수를 구할 수 있다.	30 %

42 ㄱ. 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0$ $\quad\therefore f(0)=0$

주어진 식에 $y=-x$를 대입하면

$f(x-x)=f(x)+f(-x)+3x^2$

$\therefore f(x)+f(-x)=-3x^2+f(0)=-3x^2$

ㄴ. $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-3xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-3xh}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-3x$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-3x$

$=f'(0)-3x=-3x-7$

ㄷ. 함수 $f(x)$가 미분가능하므로 모든 실수 a에서 연속이다.

$\therefore f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

43 $f'(x)=12x^{11}+11x^{10}+10x^9+\cdots+2x+1$

$\therefore f'(1)=12+11+10+\cdots+2+1$

$=\sum_{k=1}^{12}k=\frac{12\cdot13}{2}=78$ 답 ④

44 $f'(x)=x^2-2x+2$이므로 $f'(a)=5$에서

$a^2-2a+2=5,\quad a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0\quad \therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 3

45 $f(1)=1$에서 $\quad a+b+c=1$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로 $f'(-1)=8$에서

$-2a+b=8$ …… ㉡

$f'(3)=-8$에서 $\quad 6a+b=-8$ …… ㉢ … ❶

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=4,\ c=-1$ … ❷

$\therefore abc=8$ … ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	60 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20 %

46 $f'(x)=(x^3+x+1)'(x^4+x^2+1)$

$+(x^3+x+1)(x^4+x^2+1)'$

$=(3x^2+1)(x^4+x^2+1)$

$+(x^3+x+1)(4x^3+2x)$

$\therefore f'(1)=4\cdot3+3\cdot6=30$ 답 30

쎈B 특강

이 문제는 도함수가 아닌 미분계수를 구하는 문제이므로 복잡한 식을 전개하여 도함수를 간단히 정리할 필요가 없다.
또 $f'(x)$를 구할 때 $f(x)$를 전개하여 구해도 되지만 $f(x)$가 복잡한 식인 경우 전개하는 데 시간이 오래 걸리므로 곱의 미분법 공식을 이용하는 것이 편리하다.

47 $f'(x)=(x^2+1)'(2x-1)(4x-a)$

$+(x^2+1)(2x-1)'(4x-a)$

$+(x^2+1)(2x-1)(4x-a)'$

$=2x(2x-1)(4x-a)$

$+(x^2+1)\cdot2\cdot(4x-a)$

$+(x^2+1)(2x-1)\cdot4$

$f'(1)=32-6a=20$이므로

$6a=12\quad \therefore a=2$ 답 ⑤

48 $g'(x)=(x^3+2x^2)'f(x)+(x^3+2x^2)f'(x)$

$=(3x^2+4x)f(x)+(x^3+2x^2)f'(x)$

$\therefore g'(-1)=-f(-1)+f'(-1)$

$=-(-5)+6=11$ 답 11

49 $f'(x)=(x-2)'(x-4)(x-6)\cdots(x-18)(x-20)$

$+(x-2)(x-4)'(x-6)\cdots(x-18)(x-20)$

$+(x-2)(x-4)(x-6)'\cdots(x-18)(x-20)$

$+\cdots+(x-2)(x-4)(x-6)\cdots(x-18)'(x-20)$

$+(x-2)(x-4)(x-6)\cdots(x-18)(x-20)'$

$=(x-4)(x-6)(x-8)\cdots(x-18)(x-20)$

$+(x-2)(x-6)(x-8)\cdots(x-18)(x-20)$

$+(x-2)(x-4)(x-8)\cdots(x-18)(x-20)$

$+\cdots+(x-2)(x-4)(x-6)\cdots(x-16)(x-20)$

$+(x-2)(x-4)(x-6)\cdots(x-16)(x-18)$

이므로

$\frac{f'(2)}{f'(4)}=\frac{(-2)\cdot(-4)\cdot(-6)\cdot\cdots\cdot(-16)\cdot(-18)}{2\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot\cdots\cdot(-14)\cdot(-16)}$

$=\frac{-18}{2}=-9$ 답 ①

50 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-4}{x-3}=2$에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{f(x)-4\}=0$이므로

$f(3)=4$

$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x)-4}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$=f'(3)=2$ … ❶

또 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)+1}{x-3}=9$에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{g(x)+1\}=0$이므로

$g(3)=-1$

$\therefore \lim_{x\to3}\frac{g(x)+1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$=g'(3)=9$ … ❷

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)$

$=2\cdot(-1)+4\cdot9=34$ … ❸

답 34

채점 기준	비율
❶ $f(3)$, $f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(3)$, $g'(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $h'(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

51 $f'(x)=4(x^2-x)^3(x^2-x)'=4(x^2-x)^3(2x-1)$

$\therefore f'(-1)=4\cdot 2^3\cdot(-3)=-96$ 답 ③

52 $f(x)=(3x+4)^2(x^2-8)$이라 하면

$f'(x)=\{(3x+4)^2\}'(x^2-8)+(3x+4)^2(x^2-8)'$

$=6(3x+4)(x^2-8)+2x(3x+4)^2$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=-2$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=6\cdot(-2)\cdot(-4)+2\cdot(-2)\cdot(-2)^2=32$

답 32

53 $f'(x)=3(3x-a)^2(3x-a)'=9(3x-a)^2$

$f'(1)=9(3-a)^2=81$이므로

$a^2-6a=0,\quad a(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a\neq 0)$ ⋯ ❶

따라서 $f'(x)=9(3x-6)^2$이므로

$f'(0)=9\cdot(-6)^2=324$ ⋯ ❷

$\therefore a+f'(0)=330$ ⋯ ❸

답 330

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

54 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-1+2h)-f(-1-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-1+2h)-f(-1)-\{f(-1-3h)-f(-1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-1+2h)-f(-1)}{2h}\cdot 2$

$-\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-1-3h)-f(-1)}{-3h}\cdot(-3)$

$=2f'(-1)+3f'(-1)=5f'(-1)$

$f'(x)=3x^2-4x-4$이므로 $\quad f'(-1)=3$

따라서 구하는 값은

$5f'(-1)=5\cdot 3=15$ 답 ①

55 $\lim_{x\to 1}\dfrac{\{f(x)\}^2-\{f(1)\}^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\{f(x)-f(1)\}\{f(x)+f(1)\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\{f(x)+f(1)\}$

$=f'(1)\cdot 2f(1)$

$f(x)=x^3-3x^2$에서 $\quad f(1)=-2$

또 $f'(x)=3x^2-6x$이므로 $\quad f'(1)=-3$

따라서 구하는 값은

$f'(1)\cdot 2f(1)=-3\cdot 2\cdot(-2)=12$ 답 12

56 $\dfrac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to 0$이므로

$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(2+\dfrac{1}{n}\right)-f\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{-h}\cdot(-1)$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$ ⋯ ❶

$f'(x)=(x^2-3x)'(-x^2+x)+(x^2-3x)(-x^2+x)'$

$=(2x-3)(-x^2+x)+(x^2-3x)(-2x+1)$

이므로

$f'(2)=1\cdot(-2)+(-2)\cdot(-3)=4$ ⋯ ❷

따라서 구하는 값은 $\quad 2f'(2)=2\cdot 4=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(2+\frac{1}{n}\right)-f\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\}$을 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(2+\frac{1}{n}\right)-f\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

57 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=6$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이므로 $\quad f(2)=0$

$\therefore \lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=6$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$f(2)=0$에서 $\quad 8+4a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(2)=6$에서 $\quad 12+4a=6 \quad \therefore a=-\dfrac{3}{2}$

$a=-\dfrac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad 2+b=0 \quad \therefore b=-2$

$\therefore ab=3$ 답 ②

58 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=5$ ⋯ ❶

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-2-h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-2-h)-f(-2)}{-h}\cdot(-1)$

$=-f'(-2)=4$

$\therefore f'(-2)=-4$ ⋯ ❷

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+2b$이므로

$f'(1)=5$에서

$3+2a+2b=5 \quad \therefore a+b=1$ ⋯⋯ ㉠

$f'(-2)=-4$에서

$12-4a+2b=-4 \quad \therefore 2a-b=8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-2$ ⋯ ❸

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-4x+1$이므로

$f(-3)=13$ ⋯ ❹

답 13

채점 기준	비율
❶ $f'(1)=5$임을 알 수 있다.	20 %
❷ $f'(-2)=-4$임을 알 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(-3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

59 $\lim_{x\to3}\frac{f(x-2)-6}{x^2-9}=3$에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{f(x-2)-6\}=0$이므로 $f(1)=6$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{f(x-2)-6}{x^2-9}&=\lim_{x\to3}\frac{f(x-2)-f(1)}{(x+3)(x-3)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{f(x-2)-f(1)}{(x-2)-1}\cdot\frac{1}{x+3}\\&=\frac{1}{6}f'(1)\end{aligned}$$

이므로 $\frac{1}{6}f'(1)=3$ $\therefore f'(1)=18$

이때 $f'(x)=2x+2a$이므로

$f(1)=6$에서

$1+2a+b=6$ $\therefore 2a+b=5$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)=18$에서

$2+2a=18$ $\therefore a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면 $16+b=5$ $\therefore b=-11$

즉 $f(x)=x^2+16x-11$이므로

$f(2)=25$

답 ③

60 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+3cx+d}{x^2+3x+1}=2$이므로

$a=0,\ b=2$

또 조건 (나)에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}\{f(x)+15\}=0$이므로 $f(-1)=-15$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to-1}\frac{f(x)+15}{x+1}&=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\\&=f'(-1)=17\end{aligned}$$

이때 $f(x)=2x^2+3cx+d$에서 $f'(x)=4x+3c$이므로

$f(-1)=-15$에서

$2-3c+d=-15$ $\therefore 3c-d=17$ ⋯⋯ ㉠

$f'(-1)=17$에서

$-4+3c=17$ $\therefore c=7$

$c=7$을 ㉠에 대입하면

$21-d=17$ $\therefore d=4$

$\therefore a+b+c+d=13$

답 13

쎈B특강

다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ ($k\neq0$인 상수)이면

($f(x)$의 차수)$=$($g(x)$의 차수), $k=$(최고차항의 계수의 비)

61 $f(x)=x^n+x^2$이라 하면 $f(1)=2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$f'(x)=nx^{n-1}+2x$이므로 $f'(1)=n+2$

따라서 $n+2=14$이므로

$n=12$

답 ①

62 $f(x)=x^8+4x$라 하면 $f(-1)=-3$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^8+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$$

$f'(x)=8x^7+4$이므로

$f'(-1)=-4$

답 -4

63 $f(x)=x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7$이라 하면 $f(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$f'(x)=11x^{10}+10x^9-9x^8+8x^7-7x^6$이므로

$f'(1)=11+10-9+8-7=13$

답 ②

64 $\lim_{x\to2}\frac{x^n-x^3-6x-12}{x-2}=a$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^n-x^3-6x-12)=0$이므로

$2^n-2^3-6\cdot2-12=0$, $2^n=32$

$\therefore n=5$ ⋯ ❶

$f(x)=x^5-x^3-6x$라 하면 $f(2)=12$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^5-x^3-6x-12}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

$f'(x)=5x^4-3x^2-6$이므로

$f'(2)=62$ $\therefore a=62$ ⋯ ❷

$\therefore n+a=67$ ⋯ ❸

답 67

채점 기준	비율
❶ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $n+a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

65 조건 (가)에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 8인 이차식이다.

$f(x)=8x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 조건 (나)에서

$\lim_{x\to0}\frac{8x^2+ax+b+5}{x}=4$ ⋯⋯ ㉠

이고 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(8x^2+ax+b+5)=0$이므로

$b+5=0 \qquad \therefore b=-5$

따라서 ㉠에서

$$\lim_{x\to0}\frac{8x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(8x+a)=a=4$$

$\therefore f(x)=8x^2+4x-5$

한편

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^{16}+f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^{16}+8x^2+4x-5}{x+1}$$

이고 $g(x)=x^{16}+8x^2+4x$라 하면 $g(-1)=5$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^{16}+f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=g'(-1)$$

$g'(x)=16x^{15}+16x+4$이므로 구하는 값은

$g'(-1)=-28$

답 ①

66 $f(1)=6$에서 $\quad 1+a+3=6 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=x^3+2x+3$이므로

$f'(x)=3x^2+2$

이때 $f'(1)=m$이므로

$m=3\cdot1^2+2=5$

$\therefore a+m=7$

답 ③

67 $f(x)=ax^2+bx+10$이라 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ -2)$를 지나므로 $\quad f(-1)=-2$

$a-b+10=-2 \qquad \therefore a-b=-12 \quad \cdots\cdots$ ㉠ $\quad \cdots$ ❶

$f'(x)=2ax+b$이고 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 기울기가 16이므로 $\quad f'(-1)=16$

$\therefore -2a+b=16 \quad \cdots\cdots$ ㉡ $\quad \cdots$ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=8$

$\therefore ab=-32 \quad \cdots$ ❸

답 -32

채점 기준	비율
❶ 곡선이 점 $(-1,\ -2)$를 지남을 이용하여 a, b에 대한 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 곡선 위의 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 기울기를 이용하여 a, b에 대한 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

68 $f(x)=(x-k)^3$에서 $\quad f'(x)=3(x-k)^2$

$y=f(x)g(x)$에서

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이고 $x=3$인 점에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=-1$

$3(3-k)^2\cdot(-1)+(3-k)^3\cdot2=-1$

$2k^3-15k^2+36k-28=0, \qquad (k-2)^2(2k-7)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=\frac{7}{2}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$2\cdot\frac{7}{2}=7$

답 7

69 조건 ㈎에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0 \quad \cdots$ ❶

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=9 \quad \cdots ❷$$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f(1)=0$에서 $\quad 1+a+b+c=0$

$\therefore a+b+c=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=9$에서 $\quad 3+2a+b=9$

$\therefore 2a+b=6 \quad \cdots\cdots$ ㉡

또 조건 ㈏에서 $f'(x)$는 $x=4$에서 최솟값을 가지므로

$$f'(x)=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+b$$

에서 $\quad -\frac{a}{3}=4 \quad \therefore a=-12 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-12,\ b=30,\ c=-19 \quad \cdots$ ❸

따라서 $f(x)=x^3-12x^2+30x-19$이므로

$f(2)=8-48+60-19=1 \quad \cdots$ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ $f(1)=0$임을 알 수 있다.	20 %
❷ $f'(1)=9$임을 알 수 있다.	20 %
❸ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

70 $f(x)$가 이차함수이고, $f(0)=2$이므로

$f(x)=ax^2+bx+2$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(2x+1)(2ax+b)-4(ax^2+bx+2)+2=0$

$\therefore (2a-2b)x+(b-6)=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-2b=0,\ b-6=0$

$\therefore a=6,\ b=6$

따라서 $f'(x)=12x+6$이므로

$f'(-1)=-6$

답 ③

71 $f(x)=x^3+3xf'(2)$에서 $f'(2)$는 상수이므로

$f'(2)=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+3ax \qquad \therefore f'(x)=3x^2+3a$

$f'(2)=12+3a$이므로 $f(x)$와 $f'(2)$를 주어진 식에 대입하면

$x^3+3ax=x^3+3x(12+3a)$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$3a=3(12+3a), \qquad a=12+3a$

$2a=-12 \qquad \therefore a=-6$

따라서 $f'(x)=3x^2-18$이므로

$f'(3)=9$

답 ⑤

다른 풀이 $f(x)=x^3+3xf'(2)$에서

$f'(x)=3x^2+3f'(2)$

앞의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=12+3f'(2)$, $2f'(2)=-12$

$\therefore f'(2)=-6$

따라서 $f'(x)=3x^2-18$이므로

$f'(3)=9$

72 $f'(x)=2ax$이므로 $f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$6(ax^2+b)=(2ax)^2+12$

$\therefore 6ax^2+6b=4a^2x^2+12$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$6a=4a^2$, $6b=12$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$, $b=2$ ($\because \underbrace{a\neq 0}_{f(x)\text{는 이차함수이므로 } a\neq 0}$)

$\therefore ab=3$ 답 ②

73 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$2a(ax^2+bx+c)+b=8(ax^2+bx+c)$

$\therefore 2a^2x^2+2abx+2ac+b=8ax^2+8bx+8c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a^2=8a$, $2ab=8b$, $2ac+b=8c$

$\therefore a=4$, $b=0$ ($\because a\neq 0$)

또 $f(1)=a+b+c=4+c=-2$이므로 $c=-6$

따라서 $f(x)=4x^2-6$이므로

$f(3)=30$ 답 30

74 (1) $f(x)$가 상수함수이면 $f'(x)=0$이므로 주어진 등식에서 우변은 삼차식이고 좌변은 0이 되어 모순이다.

$f(x)$를 n (n은 자연수)차 함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 함수이다.

이때 주어진 등식에서 $n=1$이면 우변은 삼차식이고 좌변은 일차식이 되어 모순이므로 $n\geq 2$

따라서 좌변의 차수는 $n+(n-1)$이므로

$2n-1=3$ $\therefore n=2$ ⋯ ❶

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$, $c>0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)f'(x)=2x^3+9x^2-x-15$에서

$(ax^2+bx+c)(2ax+b)=2x^3+9x^2-x-15$

$\therefore 2a^2x^3+3abx^2+(b^2+2ac)x+bc$

$=2x^3+9x^2-x-15$ ⋯ ❷

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a^2=2$, $3ab=9$, $b^2+2ac=-1$, $bc=-15$

$2a^2=2$에서 $a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

(i) $a=-1$일 때, $3ab=9$에서

$-3b=9$ $\therefore b=-3$

$bc=-15$에서 $-3c=-15$ $\therefore c=5$

(ii) $a=1$일 때, $3ab=9$에서

$3b=9$ $\therefore b=3$

$bc=-15$에서 $3c=-15$ $\therefore c=-5$

이것은 상수항이 양수인 조건에 모순이다.

(i), (ii)에서 $a=-1$, $b=-3$, $c=5$

$\therefore f(x)=-x^2-3x+5$ ⋯ ❸

답 (1) 2 (2) $f(x)=-x^2-3x+5$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 차수를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$의 계수로 x에 대한 항등식을 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %

75 $f(x)=x^3-12x+k$라 하면 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(a)=0$, $f'(a)=0$

$f(a)=0$에서 $a^3-12a+k=0$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2-12$이므로 $f'(a)=0$에서

$3a^2-12=0$, $a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$8-24+k=0$ $\therefore k=16$

$\therefore a+k=18$ 답 ④

쎈B특강

다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 때, 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ …… ㉠

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(a)=0$, $f'(a)=0$

76 $f(x)=x^{12}+ax^2+5b$라 하면 $f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0$, $f'(1)=0$ ⋯ ❶

$f(1)=0$에서 $1+a+5b=0$ …… ㉠

$f'(x)=12x^{11}+2ax$이므로 $f'(1)=0$에서

$12+2a=0$ $\therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면

$-5+5b=0$ $\therefore b=1$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-5$ ⋯ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ $f(1)=0$, $f'(1)=0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

77 조건 (가)에서 $f(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(2)=0$, $f'(2)=0$

조건 ㈏에서 $f(x)-8$이 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로

$$f(-2)-8=0,\ f'(-2)=0$$

따라서

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,\ b,\ c,\ d\text{는 상수},\ a\neq0)$$

라 하면 $f(2)=0$에서

$$8a+4b+2c+d=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(-2)-8=0$에서

$$-8a+4b-2c+d-8=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(2)=0$에서 $\quad 12a+4b+c=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$

$f'(-2)=0$에서 $\quad 12a-4b+c=0 \qquad \cdots\cdots ㉣$

㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{4},\ b=0,\ c=-3,\ d=4$$

㉢－㉣을 하면 $8b=0 \quad \therefore b=0$
㉠＋㉡에서 $8b+2d-8=0$이므로
$d=4$
㉠, ㉢에서 $4a+c=-2$, $12a+c=0$
이므로 $a=\frac{1}{4}$, $c=-3$

즉 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x+4$이므로

$$f(4)=8$$

답 8

다른 풀이 $f(x)$가 삼차식이므로 조건 ㈎에서

$$f(x)=(x-2)^2(ax+b)\ (a,\ b\text{는 상수},\ a\neq0)$$

라 하면

$$f(x)-8=(x-2)^2(ax+b)-8 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 조건 ㈏에서 $f(-2)-8=0$이므로

$$16(-2a+b)-8=0 \qquad \therefore 4a-2b=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 조건 ㈏에서 $f'(-2)=0$이고 ㉠에서

$$f'(x)=2(x-2)(ax+b)+a(x-2)^2$$

이므로

$$-8(-2a+b)+16a=0 \qquad \therefore 4a-b=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{4},\ b=1$

따라서 $f(x)=(x-2)^2\left(\frac{1}{4}x+1\right)$이므로

$$f(4)=8$$

78 $\displaystyle\lim_{x\to9}\frac{f(x)-f(9)}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{f(x)-f(9)}{\sqrt{x}-3}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

$$=\lim_{x\to9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}\cdot(\sqrt{x}+3)$$

$$=6f'(9)$$

즉 $6f'(9)=18$이므로 $\quad f'(9)=3$

$f(x)=(x-6)(x-9)Q(x)$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(x-9)Q(x)+(x-6)Q(x)+(x-6)(x-9)Q'(x)$$

위의 식의 양변에 $x=9$를 대입하면 $f'(9)=3Q(9)$이므로

$$Q(9)=1$$

답 ①

다른 풀이 $f(x)=(x-6)(x-9)Q(x)$이므로

$$\lim_{x\to9}\frac{f(x)-f(9)}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{(x-6)(x-9)Q(x)}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{(x-6)(x-9)Q(x)}{x-9}\cdot(\sqrt{x}+3)$$

$$=\lim_{x\to9}(x-6)Q(x)\cdot(\sqrt{x}+3)$$

$$=18Q(9)$$

즉 $18Q(9)=18$이므로 $\quad Q(9)=1$

79 다항식 $x^{22}+2$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$x^{22}+2=(x-1)^2Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$3=a+b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$22x^{21}=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad a=22$

$a=22$를 ㉡에 대입하면

$$3=22+b \qquad \therefore b=-19$$

따라서 $R(x)=22x-19$이므로

$$R(2)=25$$

답 25

쎈B특강

다항식 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$는
① $g(x)$가 일차식 ➡ $R(x)$는 상수
➡ $R(x)=a$ (단, a는 상수)
② $g(x)$가 이차식 ➡ $R(x)$는 상수이거나 일차식
➡ $R(x)=ax+b$ (단, a, b는 상수)

80 다항식 x^6+ax^3+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$x^6+ax^3+b=(x+1)^2Q(x)+3x-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$1-a+b=-4 \qquad \therefore a-b=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$6x^5+3ax^2=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+3$$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$-6+3a=3 \qquad \therefore a=3$$

$a=3$을 ㉡에 대입하면

$$3-b=5 \qquad \therefore b=-2$$

$$\therefore ab=-6$$

답 ①

81 $f(x)$를 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+2)^2Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(-2,\ -10)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$$f(-2)=-10 \qquad \therefore -2a+b=-10 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2(x+2)Q(x)+(x+2)^2Q'(x)+a$$

점 $(-2,\ -10)$에서의 접선의 기울기가 8이므로

$$f'(-2)=8 \qquad \therefore a=8$$

$a=8$을 ㉡에 대입하면 $\quad -16+b=-10$

$$\therefore b=6$$

따라서 $R(x)=8x+6$이므로

$$R(-1)=-2$$

답 -2

04 도함수의 활용 (1)

Ⅱ. 다항함수의 미분법

개념 정리

본책 44쪽

❶ $f'(a)$ ❷ m ❸ (x_1, y_1) ❹ $g(a)$ ❺ $g'(a)$
❻ 0 ❼ $f'(c)$ ❽ 상수

쎈 B 유형 뽀개기

본책 45쪽

01 $f(x)=x^3+ax^2+bx-4$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

점 $(1, -6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=-6$

즉 $1+a+b-4=-6$에서 $a+b=-3$ …… ㉠

또 점 $(1, -6)$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(1)=2$

즉 $3+2a+b=2$에서 $2a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-5$

$\therefore a-b=7$

답 ⑤

02 $f(x)=x^4-4x^3+x+5$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2+1$

이때 점 P의 x좌표를 a라 하면 점 P에서의 접선이 직선 $y=x$와 평행하므로

$f'(a)=4a^3-12a^2+1=1$, $4a^2(a-3)=0$

직선 $y=x$와 평행한 직선의 기울기는 1이다.

$\therefore a=0$ 또는 $a=3$

따라서 모든 점 P의 x좌표의 합은

$0+3=3$

답 ③

03 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, -1)$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(3)=2$ ··· ❶

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)-\{f(3-2h)-f(3)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+2\lim_{h\to0}\frac{f(3-2h)-f(3)}{-2h}$$

$$=f'(3)+2f'(3)=3f'(3)$$

$$=3\cdot2=6$$ ··· ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ $f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

04 $f(x)=-x^3+3ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=-3x^2+6ax+b$

점 $(-1, 11)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=11$

즉 $1+3a-b+c=11$에서 $3a-b+c=10$ …… ㉠

점 $(-1, 11)$에서의 접선의 기울기가 -8이므로

$f'(-1)=-8$

즉 $-3-6a+b=-8$에서 $6a-b=5$ …… ㉡

또 x좌표가 2인 점에서의 접선의 기울기가 19이므로

$f'(2)=19$

즉 $-12+12a+b=19$에서 $12a+b=31$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=7$

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $c=11$

$\therefore 2a+b-c=0$

답 0

05 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

두 점 $(-2, 1)$, $(3, -4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-2)=1$, $f(3)=-4$

즉 $-16+4a-2b+c=1$에서

$4a-2b+c=17$ …… ㉠

또 $54+9a+3b+c=-4$에서

$9a+3b+c=-58$ …… ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $5a+5b=-75$

$\therefore a+b=-15$ …… ㉢

한편 두 점 $(-2, 1)$, $(3, -4)$에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(-2)=f'(3)$

즉 $24-4a+b=54+6a+b$에서

$10a=-30$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉢에 대입하면

$-3+b=-15$ $\therefore b=-12$

$a=-3$, $b=-12$를 ㉠에 대입하여 풀면 $c=5$

$\therefore ac-b=-3$

답 ③

06 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-2)^2-3$

이므로 $f'(x)$는 $x=2$에서 최솟값 -3을 갖는다.

$\therefore a=2$, $k=-3$

점 (a, b)가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$b=f(2)=8-24+18-4=-2$

$\therefore a-b-k=7$

답 ⑤

07 $f(x)=-x^3+3x^2+8x+1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x+8=-3(x-1)^2+11$

이므로 $f'(x)$는 $x=1$에서 최댓값 11을 갖는다.

따라서 구하는 기울기 m의 최댓값은 11이다.

답 ④

08 $f(x)=-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{3}x^2+kx+3$이라 하면

$f'(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+k=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{1}{3}+k$

이므로 $f'(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $\frac{1}{3}+k$를 갖는다.

즉 $\frac{1}{3}+k=5$이므로　　$k=\frac{14}{3}$　　답 $\frac{14}{3}$

09 $f(x)=-x^3+ax^2+1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+2ax$

점 $(-2, 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-2)=1$

즉 $8+4a+1=1$에서　　$4a=-8$　　$\therefore a=-2$

또 점 $(-2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-4$이므로 접선의 방정식은

$f'(x)=-3x^2-4x$에 $x=-2$를 대입

$y-1=-4(x+2)$　　$\therefore y=-4x-7$

따라서 $b=-4$, $c=-7$이므로

$ab+c=1$　　답 ①

10 $f(x)=(x-1)(x^2+5)$라 하면

$f'(x)=(x^2+5)+(x-1)\cdot 2x=3x^2-2x+5$

$f(2)=9$이고 점 $(2, 9)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=13$이므로 접선의 방정식은

$y-9=13(x-2)$　　$\therefore y=13x-17$

이 직선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=-13-17=-30$　　답 -30

11 $f(x)=-3x^2+7x-4$라 하면

$f'(x)=-6x+7$

점 $(0, -4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=7$이므로 직선 l의 방정식은　　$y+4=7(x-0)$

$\therefore 7x-y-4=0$　　…… ㉠　　⋯ ❶

점 $(2, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-5$이므로 직선 m의 방정식은　　$y+2=-5(x-2)$

$\therefore 5x+y-8=0$　　…… ㉡　　⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　　$x=1$, $y=3$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1, 3)$이다.　　⋯ ❸

답 $(1, 3)$

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 m의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 직선 l, m의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

12 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1}{x-3}=2$에서 $x\to 3$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이다.

즉 $\lim_{x\to 3}\{f(x)-1\}=0$이므로　　$f(3)=1$

$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=2$

따라서 점 $(3, 1)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 접선의 방정식은

$y-1=2(x-3)$　　$\therefore y=2x-5$

즉 $a=2$, $b=-5$이므로　　$a+b=-3$　　답 ②

13 $f(x)=2x^3-3x$에서

$f'(x)=6x^2-3$

따라서 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=6t^2-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^3-3t)=(6t^2-3)(x-t)$

$\therefore y=(6t^2-3)x-4t^3$

즉 $g(t)=-4t^3$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t+1)-g(t)}{3t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{-4(t+1)^3+4t^3}{3t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{-12t^2-12t-4}{3t^2}=-4$$

답 ①

14 점 $(4, -2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(4)=-2$

점 $(4, -2)$에서의 접선의 기울기가 $f'(4)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-2)=f'(4)(x-4)$

이 직선이 점 $(2, -3)$을 지나므로

$-1=-2f'(4)$　　$\therefore f'(4)=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore &\lim_{x\to 2}\frac{x^2f(4)-4f(x^2)}{x-2}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{x^2f(4)-4f(4)-\{4f(x^2)-4f(4)\}}{x-2}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{x^2f(4)-4f(4)}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{4f(x^2)-4f(4)}{x-2}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)f(4)}{x-2}\\ &\quad-\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{(x-2)(x+2)}\cdot 4(x+2)\\ &=\lim_{x\to 2}(x+2)f(4)-\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot 4(x+2)\\ &=4\cdot f(4)-f'(4)\cdot 16\\ &=4\cdot(-2)-\frac{1}{2}\cdot 16=-16\end{aligned}$$

답 ④

15 주어진 그래프에서　　$f(1)=-3$, $f'(1)=0$

$g(x)=x^2f(x)$에서　　$g(1)=f(1)=-3$　　⋯ ❶

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$에서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, -3)$에서의 접선의 기울기는

$g'(1)=2f(1)+f'(1)=-6$　　⋯ ❷

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-(-3)=-6(x-1)$　　$\therefore y=-6x+3$　　⋯ ❸

답 $y=-6x+3$

채점 기준	비율
❶ $g(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $g'(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $y=g(x)$의 그래프 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

16 $f(x)=x^3-2x$, $g(x)=ax^2+bx+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-2$, $g'(x)=2ax+b$

곡선 $y=g(x)$가 점 $(1,\ -1)$을 지나므로 $g(1)=-1$에서

$a+b+1=-1 \qquad \therefore a+b=-2$ ⋯⋯ ㉠

또 점 $(1,\ -1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(1)g'(1)=-1$에서

$1\cdot(2a+b)=-1 \qquad \therefore 2a+b=-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-3$

$\therefore ab=-3$

답 -3

쎈B특강

두 직선의 평행과 수직

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이

① 평행하다. ➡ $m=m'$, $n\neq n'$

② 수직이다. ➡ $mm'=-1$

17 $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$라 하면

$f'(x)=3x^2-4x+3$

점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 점 $(1,\ -2)$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore x+2y+3=0$

직선 $x+2y+3=0$, 즉 $-2x-4y-6=0$이 직선 $ax+by-6=0$과 일치해야 하므로 $\quad a=-2,\ b=-4$

$\therefore a^2+b^2=20$

답 ③

18 $y=x^3+ax^2+ax+6$에서

$x^3-y+6+ax(x+1)=0$

위의 등식이 a에 대한 항등식이므로

$x^3-y+6=0,\ x(x+1)=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-1,\ y=5$ 또는 $x=0,\ y=6$

즉 곡선 $y=x^3+ax^2+ax+6$은 a의 값에 관계없이 항상 두 점 $(-1,\ 5)$, $(0,\ 6)$을 지난다. ⋯ ❶

이때 $y'=3x^2+2ax+a$이므로 두 점 $(-1,\ 5)$, $(0,\ 6)$에서의 접선의 기울기는 각각

$3-a,\ a$

이고 두 점에서의 접선이 서로 수직이므로

$a(3-a)=-1 \qquad \therefore a^2-3a-1=0$ ⋯ ❷

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 3이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 곡선이 항상 지나는 두 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ a에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 모든 실수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

참고 이차방정식 $a^2-3a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot(-1)=13>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

쎈B특강

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식

$\iff a=0,\ b=0,\ c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식

$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$

19 $g(x)=x^3$이라 하면 $\qquad g'(x)=3x^2$

점 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2$이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3t^2}$이다.

따라서 점 P를 지나고 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-t^3=-\frac{1}{3t^2}(x-t) \qquad \therefore y=-\frac{1}{3t^2}x+\frac{1}{3t}+t^3$

즉 $f(t)=\frac{1}{3t}+t^3$이므로

$$\lim_{t\to 0}tf(t)=\lim_{t\to 0}t\left(\frac{1}{3t}+t^3\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{3}+t^4\right)=\frac{1}{3}$$

답 ①

20 $f(x)=-x^3+3x^2+x-7$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x+1$

점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-(-1)=1\cdot(x-2) \qquad \therefore y=x-3$

직선 $y=x-3$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$-x^3+3x^2+x-7=x-3$에서 $\qquad x^3-3x^2+4=0$

$(x+1)(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 다시 만나는 점의 좌표가 $(-1,\ \underbrace{-4}_{f(-1)=-4})$이므로

$a=-1,\ b=-4 \qquad \therefore ab=4$

답 4

21 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x$라 하면 $\qquad f'(x)=3x^2-\frac{1}{2}$

점 $\mathrm{A}\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=\frac{5}{2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{5}{2}x-2$

직선 $y=\frac{5}{2}x-2$가 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$x^3-\frac{1}{2}x=\frac{5}{2}x-2$에서 $\qquad x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 $\mathrm{B}(-2,\ -7)$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-2)^2+(-7)^2}=\sqrt{53}$

답 ②

쎈B특강

두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

특히 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

22 $f(x)=x^3-4x^2+x-1$이라 하면

$$f'(x)=3x^2-8x+1$$

점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-4$이므로 접선의 방정식은

$$y-(-3)=-4(x-1) \qquad \therefore\ y=-4x+1$$ ⋯ ❶

직선 $y=-4x+1$이 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$x^3-4x^2+x-1=-4x+1$에서

$$x^3-4x^2+5x-2=0, \qquad (x-1)^2(x-2)=0$$

$$\therefore\ x=1 \text{ 또는 } x=2$$

즉 점 P의 좌표는 $(2,\ -7)$이다. ⋯ ❷

이때 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-3$이므로 접선의 방정식은

$$y-(-7)=-3(x-2) \qquad \therefore\ y=-3x-1$$

따라서 점 P에서의 접선의 y절편은 -1이다. ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 P에서의 접선의 y절편을 구할 수 있다.	40 %

23 $f(x)=x^3-5x+6$이라 하면

$$f'(x)=3x^2-5$$

점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$이므로 접선의 방정식은

$$y-2=-2(x-1) \qquad \therefore\ y=-2x+4$$

$$\therefore\ \mathrm{R}(2,\ 0)$$

또 직선 $y=-2x+4$가 주어진 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$x^3-5x+6=-2x+4$에서 $\quad x^3-3x+2=0$

$$(x+2)(x-1)^2=0 \qquad \therefore\ x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-2,\ 8)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-2-1)^2+(8-2)^2}=3\sqrt{5}$$

$$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{PR}}=3\sqrt{5}:\sqrt{5}=3:1$$

답 ②

24 $f'(x)=(x+2)(kx+1)+x(kx+1)+kx(x+2)$

점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=4k-2$이므로 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{4k-2}$이다.

따라서 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{4k-2}(x+2)$$ ⋯ ❶

이때 이 직선이 곡선 $y=f(x)$와 한 점에서 만나려면 방정식

점 A에서만 만난다.

$$x(x+2)(kx+1)=-\frac{1}{4k-2}(x+2)$$

가 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

즉 $(x+2)\left(kx^2+x+\dfrac{1}{4k-2}\right)=0$에서 이차방정식

$$kx^2+x+\frac{1}{4k-2}=0$$

은 서로 다른 두 허근을 가져야 한다. ⋯ ❷

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=1-4k\cdot\frac{1}{4k-2}<0, \qquad \frac{1}{2k-1}>0$$

$$2k-1>0 \qquad \therefore\ k>\frac{1}{2}$$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 곡선 $y=f(x)$와 한 점에서 만나는 조건을 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

25 $f(x)=x^3-3x^2-2x$라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x-2$$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2-2t)$라 하면 직선 $2x+y+3=0$, 즉 $y=-2x-3$에 평행한 직선의 기울기는 -2이므로

$$f'(t)=3t^2-6t-2=-2$$

$$t^2-2t=0, \qquad t(t-2)=0$$

$$\therefore\ t=0 \text{ 또는 } t=2$$

즉 접점의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(2,\ -8)$이므로 접선의 방정식은

$$y-0=-2(x-0),\ y-(-8)=-2(x-2)$$

$$\therefore\ y=-2x,\ y=-2x-4$$

답 $y=-2x$, $y=-2x-4$

26 $f(x)=4x^2-5x-1$이라 하면

$$f'(x)=8x-5$$

접점의 좌표를 $(t,\ 4t^2-5t-1)$이라 하면 직선 $y=3x+1$에 평행한 접선의 기울기는 3이므로

직선을 평행이동하여도 기울기는 변하지 않는다.

$$f'(t)=8t-5=3 \qquad \therefore\ t=1$$

즉 접점의 좌표는 $(1,\ -2)$이므로

$$m=1,\ n=-2$$

$$\therefore\ m+n=-1$$

답 ③

27 $f(x)=x^3-x+2$라 하면

$$f'(x)=3x^2-1$$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t+2)$라 하면 접선의 기울기가 11이므로

$$f'(t)=3t^2-1=11, \qquad t^2=4$$

$$\therefore\ t=-2 \text{ 또는 } t=2$$ ⋯ ❶

즉 접점의 좌표는 $(-2,\ -4)$, $(2,\ 8)$이므로 접선의 방정식은

$$y-(-4)=11(x+2),\ y-8=11(x-2)$$

$$\therefore\ y=11x+18,\ y=11x-14$$

따라서

$$a=18,\ b=-14 \text{ 또는 } a=-14,\ b=18$$

이므로

$$a+b=4$$ ⋯ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	50 %

28 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1$이라 하면

$f'(x)=x^2-3x+2$

$f'(0)=2$이므로 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는 2이다.
이때 기울기가 2인 다른 접선의 접점의 좌표를
$\left(t, \frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t+1\right)$이라 하면

$f'(t)=t^2-3t+2=2$

$t^2-3t=0, \quad t(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t\neq0$)

즉 접점의 좌표는 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{5}{2}=2(x-3) \quad \therefore y=2x-\frac{7}{2}$

이 직선이 점 $\left(k, \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{1}{2}=2k-\frac{7}{2} \quad \therefore k=2$ 답 ②

29 $f(x)=-x^3+3x^2+10x+1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x+10$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+3t^2+10t+1)$ $(t>0)$이라 하면 접선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로

$f'(t)=-3t^2+6t+10=1$

$t^2-2t-3=0, \quad (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

즉 접점의 좌표는 $(3, 31)$이므로 접선의 방정식은

$y-31=1\cdot(x-3) \quad \therefore y=x+28$

따라서 $a=1$, $b=28$이므로

$a-b=-27$ 답 ①

30 $f(x)=2x^2-3x+7$이라 하면

$f'(x)=4x-3$

점 $(1, 6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 직선 l과 수직이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선을 m이라 하면 직선 m의 기울기는 -1이다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 m의 접점의 좌표를 $(t, 2t^2-3t+7)$이라 하면

$f'(t)=4t-3=-1 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$이므로 구하는 직선 m의 방정식은

$y-6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore y=-x+\frac{13}{2}$, 즉 $2x+2y-13=0$ 답 ③

31 $f(x)=x^3+ax+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2+a$

접점의 좌표를 (t, t^3+at+3)이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+a$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at+3)=(3t^2+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+a)x-2t^3+3$

이 직선이 직선 $y=4x+1$과 일치해야 하므로

$3t^2+a=4$ …… ㉠

$-2t^3+3=1$ …… ㉡

㉡에서

$t^3-1=0, \quad (t-1)(t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because \underbrace{t^2+t+1>0}_{t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0}$)

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$3+a=4 \quad \therefore a=1$ 답 ③

32 곡선 $y=3x^2+2x+a$와 직선 $y=8x-4$의 접점의 x좌표가 t이므로 $x=t$일 때 접선의 기울기는 8이다.
$f(x)=3x^2+2x+a$라 하면 $f'(x)=6x+2$이므로

$f'(t)=6t+2=8 \quad \therefore t=1$

따라서 접점의 좌표가 $(1, \underbrace{4}_{t=1\text{을 } y=8t-4\text{에 대입한다.}})$이므로 $x=1$, $y=4$를 $y=3x^2+2x+a$에 대입하면

$4=3+2+a \quad \therefore a=-1$

$\therefore a+t=0$ 답 0

33 $f(x)=-x^3+6$이라 하면

$f'(x)=-3x^2$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+6)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=-3t^2$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+6)=-3t^2(x-t)$

$\therefore y=-3t^2x+2t^3+6$

이 직선이 직선 $y=mx-10$과 일치해야 하므로

$-3t^2=m$ …… ㉠

$2t^3+6=-10$ …… ㉡

㉡에서

$t^3+8=0, \quad (t+2)(t^2-2t+4)=0$

$\therefore t=-2$ ($\because \underbrace{t^2-2t+4>0}_{t^2-2t+4=(t-1)^2+3>0}$)

$t=-2$를 ㉠에 대입하면

$m=-12$ 답 ②

34 $f(x)=2x^2-6x+7$이라 하면

$f'(x)=4x-6$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가 $f'(2)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-3=2(x-2) \quad \therefore y=2x-1$ ⋯→ ❶

곡선 $y=x^3-3x^2+5x+6$을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$y-a=x^3-3x^2+5x+6$

$\therefore y=x^3-3x^2+5x+6+a$ ⋯→ ❷

$g(x)=x^3-3x^2+5x+6+a$라 하면

$g'(x)=3x^2-6x+5$

따라서 곡선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(t, t^3-3t^2+5t+6+a)$라 하면

$g'(t)=3t^2-6t+5=2$

$t^2-2t+1=0,\qquad (t-1)^2=0$

$\therefore t=1$ ⋯ ❸

따라서 접점의 좌표가 $(1,\ a+9)$이므로 $x=1$, $y=a+9$를 $y=2x-1$에 대입하면

$a+9=1\qquad \therefore a=-8$ ⋯ ❹

답 -8

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=2x^2-6x+7$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❷ 곡선 $y=x^3-3x^2+5x+6$을 평행이동한 곡선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❸ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

35 $f(x)=x^3+ax^2+2ax+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+2a$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at^2+2at+1)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+2at+2a$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+2at+1)=(3t^2+2at+2a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2at+2a)x-2t^3-at^2+1$

이 직선이 직선 $y=3x+1$과 일치해야 하므로

$3t^2+2at+2a=3$ ⋯⋯ ㉠

$-2t^3-at^2+1=1$ ⋯⋯ ㉡

㉡에서 $t^2(2t+a)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=-\frac{a}{2}$

(i) $t=0$을 ㉠에 대입하면

$2a=3\qquad \therefore a=\frac{3}{2}$

(ii) $t=-\frac{a}{2}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{4}a^2-a^2+2a=3,\qquad a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0\qquad \therefore a=2$ 또는 $a=6$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은

$\frac{3}{2}+2+6=\frac{19}{2}$

답 $\frac{19}{2}$

36 $f(x)=2x^3-3x^2-10x+7$이라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-10$

접점의 좌표를 $(t,\ 2t^3-3t^2-10t+7)$이라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=6t^2-6t-10=2,\qquad t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0\qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=2$

즉 접점의 좌표는 $(-1,\ 12)$, $(2,\ -9)$이므로 접선의 방정식은

$y-12=2(x+1)$, $y-(-9)=2(x-2)$

$\therefore 2x-y+14=0$, $2x-y-13=0$

위의 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+14=0$ 위의 점 $(-7,\ 0)$과 직선 $2x-y-13=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$\frac{|2\cdot(-7)-0-13|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{27\sqrt{5}}{5}$

답 ③

쎈B특강

평행한 두 직선 사이의 거리

① 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

② 평행한 두 직선 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ 사이의 거리는

$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

37 $f(x)=x^3-9x+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-9$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-9t+4)$라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=3t^2-9=3,\qquad t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$ ⋯ ❶

즉 접점의 좌표는

$(-2,\ 14)$, $(2,\ -6)$ ⋯ ❷

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+2}{2},\ \frac{14-6}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 4)$ ⋯ ❸

답 $(0,\ 4)$

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ 선분 AB의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %

38 $f(x)=x^3-3x^2-14x-5$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-14$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2-14t-5)$라 하면 직선 $5x+y-1=0$, 즉 $y=-5x+1$에 평행한 직선의 기울기는 -5이므로

$f'(t)=3t^2-6t-14=-5$

$t^2-2t-3=0,\qquad (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

$\therefore |a-b|=4$

$a=-1$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=-1$이므로 $|a-b|=4$

답 4

39 $f(x)=-x^2-5$라 하면

$f'(x)=-2x$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=4x+1$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2-5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=-2t=4\qquad \therefore t=-2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ -9)$이고, 점 $(-2,\ -9)$와 직선 $y=4x+1$, 즉 $4x-y+1=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$\frac{|-8+9+1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$

답 ②

40 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{3}\ (x<0)$이라 하면

$f'(x)=x^2$

곡선 $y=f(x)(x<0)$의 접선 중에서 직선 $x-y+5=0$, 즉 $y=x+5$와 평행한 접선의 접점이 점 P이다.

따라서 점 $P(a, b)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=a^2=1$

이때 $x<0$이므로 $\quad a<0$

$\therefore a=-1$

즉 점 P의 좌표는 $(-1, 2)$이므로 $\quad b=2$

$\therefore ab=-2$

답 ①

41 $f(x)=2x^2-6x+7$이라 하면

$f'(x)=4x-6$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2x-6$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t, 2t^2-6t+7)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=4t-6=2$

$\therefore t=2$ ··· ❶

따라서 점 P의 좌표가 $(2, 3)$일 때 △ABP의 넓이가 최소이다.

점 $(2, 3)$과 직선 $y=2x-6$, 즉 $2x-y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4-3-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$ ··· ❷

$\overline{AB}=\sqrt{(6-4)^2+(6-2)^2}=2\sqrt{5}$이므로 △ABP의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 기울기가 2인 접선의 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 P와 직선 $y=2x-6$ 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ △ABP의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

42 $f(x)=-x^2-3x+4$라 하면 $f(x)=0$에서

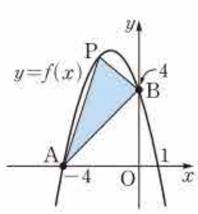
$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

$\therefore A(-4, 0)$

또 $f(0)=4$이므로 $\quad B(0, 4)$

따라서 오른쪽 그림에서 △ABP의 넓이는 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때 최댓값을 갖는다.



직선 AB의 기울기는

$\frac{4-0}{0-(-4)}=1$

$f'(x)=-2x-3$이므로 곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 기울기가 1인 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^2-3t+4)$라 하면

$f'(t)=-2t-3=1 \quad \therefore t=-2$

따라서 점 P의 좌표가 $(-2, 6)$일 때 △ABP의 넓이가 최대이다.

직선 AB의 방정식은

$y=1\cdot(x+4)$, 즉 $x-y+4=0$

이므로 점 $P(-2, 6)$과 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|-2-6+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$이므로 △ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=8$

답 ④

43 $f(x)=x^3+4$라 하면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3+4)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+4)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3+4$ ······ ㉠

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로 $\quad 2=-2t^3+4$

$t^3-1=0, \quad (t-1)(t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1\ (\because t^2+t+1>0)$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=3x+2$

이 직선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=-3+2=-1$

답 ⑤

44 $f(x)=x^2+2x-1$이라 하면

$f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 (t, t^2+2t-1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2t-1)=(2t+2)(x-t)$

$\therefore y=(2t+2)x-t^2-1$

이 직선이 점 $(-1, -3)$을 지나므로

$-3=-t^2-2t-3, \quad t^2+2t=0$

$t(t+2)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=0$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-2)f'(0)=-2\cdot 2=-4$

답 -4

45 $f(x)=-x^2+3x$라 하면

$f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+3t)=(-2t+3)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+3)x+t^2$ ······ ㉠

이 직선이 점 $(1, 6)$을 지나므로

$6=-2t+3+t^2, \quad t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=3$

$t=-1$, $t=3$을 ㉠에 각각 대입하면

$y=5x+1$, $y=-3x+9$

이상에서 접선의 방정식인 것은 ㄴ, ㅁ이다.

답 ④

46 $f(x)=x^3+2x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2t+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t+2)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2+2)x-2t^3+2$ …… ㉠

이 직선이 원점을 지나므로 $0=-2t^3+2$

$t^3-1=0,\quad (t-1)(t^2+t+1)=0$

$\therefore\ t=1\ (\because\ t^2+t+1>0)$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $y=5x$

따라서 직선 $y=5x$ 위의 점의 좌표는 ④이다. 답 ④

47 $f(x)=x^3+x^2-5$라 하면

$f'(x)=3x^2+2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t^2-5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+t^2-5)=(3t^2+2t)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2-5$

이 직선이 점 $(1,\ -5)$를 지나므로

$-5=-2t^3+2t^2+2t-5$

$\therefore\ t^3-t^2-t=0$

위의 삼차방정식의 세 실근이 세 접점의 x좌표 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$ 답 ①

참고 $t^3-t^2-t=0$에서 $t(t^2-t-1)=0$

이차방정식 $t^2-t-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot(-1)=5>0$

이므로 삼차방정식 $t^3-t^2-t=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

쎈B특강

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

48 $f(x)=x^2+x$라 하면

$f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t)$

$\therefore\ y=(2t+1)x-t^2$

이 직선이 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로

$-1=-2t-1-t^2,\quad t^2+2t=0$

$t(t+2)=0\quad \therefore\ t=0$ 또는 $t=-2$ ⋯ ❶

한편 접점 $(t,\ t^2+t)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2t+1}$이므로 직선의 방정식은

$y-(t^2+t)=-\frac{1}{2t+1}(x-t)$

위의 식에 $t=0,\ t=-2$를 각각 대입하면

$y=-x,\ y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$ ⋯ ❷

따라서 두 직선의 x절편은 각각 $0,\ -8$이므로

$a+b=-8$ ⋯ ❸

$y=-x,\ y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$에 $y=0$을 각각 대입한다.

답 -8

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 접점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

49 $f(x)=x^2-2x+5$라 하면

$f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-2t+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-2t+5)=(2t-2)(x-t)$

$\therefore\ y=(2t-2)x-t^2+5$

이 직선이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

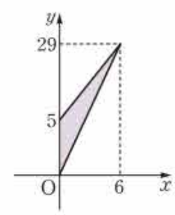
$-1=-t^2+6t-1,\quad t^2-6t=0$

$t(t-6)=0\quad \therefore\ t=0$ 또는 $t=6$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 5),\ (6,\ 29)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15$

답 ①



50 $f(x)=x^4+4x^2+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3+8x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4+4t^2+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3+8t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+4t^2+3)=(4t^3+8t)(x-t)$

$\therefore\ y=(4t^3+8t)x-3t^4-4t^2+3$ ⋯ ❶

이 직선이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로

$-4=-3t^4-4t^2+3,\quad 3t^4+4t^2-7=0$

$(t+1)(t-1)(3t^2+7)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$ ($\because$ t는 실수) ⋯ ❷

따라서 접점 P, Q의 좌표는 $(-1,\ 8),\ (1,\ 8)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2$ ⋯ ❸

$1-(-1)=2$

답 2

채점 기준	비율
❶ 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하고 접선의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ t의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 선분 PQ의 길이를 구할 수 있다.	30 %

51 $f(x)=-x^2+k$라 하면

$f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+k)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+k)=-2t(x-t)$

$\therefore\ y=-2tx+t^2+k$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$t^2-4t+k=0$ ······ ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 $t=\alpha$, $t=\beta$에서의 기울기는 각각 -2α, -2β이고 두 접선이 서로 수직이므로

$(-2\alpha)(-2\beta)=-1, \quad 4\alpha\beta=-1$

$\therefore \alpha\beta=-\frac{1}{4}$

따라서 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$k=\alpha\beta=-\frac{1}{4}$ 답 ②

52 $f(x)=x^2+3x-3$이라 하면

$f'(x)=2x+3$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+3t-3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+3t-3)=(2t+3)(x-t)$

$\therefore y=(2t+3)x-t^2-3$

이 직선이 점 $A(a,\ 4)$를 지나므로

$4=(2t+3)a-t^2-3$

$\therefore t^2-2at-3a+7=0$

위의 이차방정식의 두 실근을 t_1, t_2라 하면 t_1, t_2는 각각 두 점 B, C의 x좌표이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1+t_2=2a$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는

$\frac{a+t_1+t_2}{3}=\frac{a+2a}{3}=3$

$\therefore a=3$ 답 3

쎈B특강

삼각형의 무게중심

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

53 $f(x)=x^3+8x^2+6$이라 하면

$f'(x)=3x^2+16x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+8t^2+6)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+16t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+8t^2+6)=(3t^2+16t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+16t)x-2t^3-8t^2+6$

이 직선이 점 $(a,\ 6)$을 지나므로

$6=(3t^2+16t)a-2t^3-8t^2+6$

$t\{2t^2+(8-3a)t-16a\}=0$

$\therefore t=0$ 또는 $2t^2+(8-3a)t-16a=0$

이때 접선이 오직 한 개 존재하려면 이차방정식

$2t^2+(8-3a)t-16a=0$ ······ ㉠

이 $t=0$을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다. ⋯ ❶

(i) ㉠이 $t=0$을 중근으로 갖는 경우

$8-3a=0,\ -16a=0$

그런데 이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠이 실근을 갖지 않는 경우

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(8-3a)^2-4\cdot2\cdot(-16a)<0$

$9a^2+80a+64<0, \quad (a+8)(9a+8)<0$

$\therefore -8<a<-\frac{8}{9}$

(i), (ii)에서 $-8<a<-\frac{8}{9}$ ⋯ ❷

답 $-8<a<-\frac{8}{9}$

채점 기준	비율
❶ 접선이 오직 한 개 존재하도록 하는 조건을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

54 $f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-1,\ g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$t^3-t=t^2-1, \quad t^3-t^2-t+1=0$

$(t+1)(t-1)^2=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2-1=2t, \quad 3t^2-2t-1=0$

$(3t+1)(t-1)=0 \quad \therefore t=-\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

따라서 $t=1$일 때, 즉 점 $(1,\ 0)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(1)=g'(1)=2$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y=2(x-1) \quad \therefore y=2x-2$ 답 ②

55 $f(x)=x^3+ax^2$, $g(x)=-x^2+4$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax,\ g'(x)=-2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$t^3+at^2=-t^2+4$ ······ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2+2at=-2t$

$3t+2a=-2$ ($\because t\neq0$)

$t=0$은 ㉠을 만족시키지 않는다.

$\therefore a=\frac{-3t-2}{2}$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$t^3+8=0, \quad (t+2)(t^2-2t+4)=0$

$\therefore t=-2$ ($\because t^2-2t+4>0$)

$t=-2$를 ㉡에 대입하면 $a=2$ 답 ②

56 $f(x)=x^3+ax+1$, $g(x)=bx^2-10x+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2bx-10$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(3,\ 7)$을 지나므로

$f(3)=7$에서 $27+3a+1=7 \quad \therefore a=-7$

$g(3)=7$에서 $9b-30+c=7$

$\therefore 9b+c=37$ ······ ㉠ ⋯ ❶

점 (3, 7)에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(3)=g'(3)$에서 $\quad 27+a=6b-10$

$6b=30 \quad \therefore b=5$ ⋯ ❷

$b=5$를 ㉠에 대입하여 정리하면 $\quad c=-8$ ⋯ ❸

$\therefore a+b+c=-10$ ⋯ ❹

답 -10

채점 기준	비율
❶ a의 값과 b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ c의 값을 구할 수 있다.	10 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

57 $f(x)=2x^2-1$, $g(x)=-x^2+ax$라 하면

$f'(x)=4x$, $g'(x)=-2x+a$

두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$2t^2-1=-t^2+at$

$\therefore at=3t^2-1$ ⋯⋯ ㉠

두 접선이 서로 수직이므로 $f'(t)g'(t)=-1$에서

$4t(-2t+a)=-1$

$\therefore 8t^2-4at=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad 8t^2-4(3t^2-1)=1$

$4t^2=3 \quad \therefore t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) $t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{5}{4} \quad \therefore a=-\frac{5\sqrt{3}}{6}$

(ii) $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{5}{4} \quad \therefore a=\frac{5\sqrt{3}}{6}$

(i), (ii)에서 $\quad a=\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ($\because a>0$)

답 $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

58 $f(x)=x^3+\frac{2}{3}$, $g(x)=x^2+ax+b$라 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=2x+a$

두 곡선이 점 $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$에서 만나므로 $g(-1)=-\frac{1}{3}$에서

$1-a+b=-\frac{1}{3} \quad \therefore a-b=\frac{4}{3}$ ⋯⋯ ㉠

점 $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(-1)g'(-1)=-1$에서

$3(-2+a)=-1 \quad \therefore a=\frac{5}{3}$

$a=\frac{5}{3}$를 ㉠에 대입하여 정리하면 $\quad b=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=2$

답 2

59 $f(x)=-x^2+3$, $g(x)=ax^2-5x-3$이라 하면

$f'(x)=-2x$, $g'(x)=2ax-5$

두 곡선의 교점의 x좌표를 $t(t>0)$라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$-t^2+3=at^2-5t-3$ ⋯⋯ ㉠

또 $m_1=f'(t)=-2t$, $m_2=g'(t)=2at-5$이므로 $m_1+m_2=3$에서

$-2t+2at-5=3 \quad \therefore at=t+4$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2t^2-t-6=0, \quad (2t+3)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

$t=2$를 ㉡에 대입하면 $\quad 2a=6$

$\therefore a=3$

답 3

60 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1, k)$에서 만나므로

$f(1)=k$, $g(1)=k$

또 점 $(1, k)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(1)g'(1)=-1$ ⋯⋯ ㉠

$y'=f'(x)\{g(x)\}^2+2f(x)g(x)g'(x)$이고 점 $(1, k^3)$에서의 접선의 기울기는 0이므로 (직선 $y=k^3$의 기울기)$=0$

$f'(1)\{g(1)\}^2+2f(1)g(1)g'(1)=0$

$k^2\{f'(1)+2g'(1)\}=0$

$\therefore f'(1)+2g'(1)=0$ ($\because k\neq0$)

즉 $f'(1)=-2g'(1)$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$-2\{g'(1)\}^2=-1$

$\therefore g'(1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $g'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(i) $g'(1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\quad f'(1)=\sqrt{2}$

(ii) $g'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\quad f'(1)=-\sqrt{2}$

그런데 $f'(1)>g'(1)$이므로 $\quad f'(1)=\sqrt{2}$, $g'(1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore f'(1)-g'(1)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

답 ③

61 $f(x)=x^3+2x^2-5x+5$라 하면

$f'(x)=3x^2+4x-5$

점 P(1, 3)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 접선 l의 방정식은

$y-3=2(x-1) \quad \therefore y=2x+1$

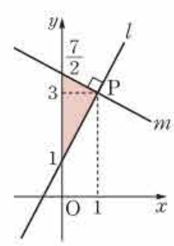
한편 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 점 P(1, 3)을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선 m의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{2}-1\right)\cdot1=\frac{5}{4}$

답 ④



62 $f(x)=x^2+6x+11$이라 하면

$f'(x)=2x+6$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+6t+11)$이라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=2t+6=4 \qquad \therefore t=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 6)$이므로 접선의 방정식은

$y-6=4(x+1) \qquad \therefore y=4x+10$

이 접선의 x절편은 $-\frac{5}{2}$, y절편은 10이므로 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot10=\frac{25}{2}$

답 ③

63 점 $(2,\ k)$는 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+a$ 위의 점이므로

$k=2+a$ ······ ㉠

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+a$라 하면 $\quad f'(x)=x$

점 $(2,\ k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-k=2(x-2) \qquad \therefore y=2x+k-4$ ··· ❶

따라서 접선의 x절편과 y절편은 각각 $\frac{4-k}{2}$, $k-4$이다.

이때 $k<4$이고 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4-k}{2}\cdot(4-k)=9, \qquad (4-k)^2=36$

$\therefore k=-2\ (\because k<4)$ ··· ❷

$k=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad a=-4$ ··· ❸

$\therefore a+k=-6$ ··· ❹

답 -6

채점 기준	비율
❶ 점 $(2,\ k)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $a+k$의 값을 구할 수 있다.	10 %

64 $f(x)=x^2-2$라 하면 $\quad f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-2)=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2-2$ ······ ㉠

직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$을 지나므로

$1=-4t-t^2-2, \qquad t^2+4t+3=0$

$(t+3)(t+1)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=-1$

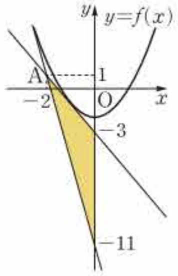
$t=-3$, $t=-1$을 ㉠에 각각 대입하면

$y=-6x-11$, $y=-2x-3$

따라서 두 접선의 y축과의 교점의 좌표는 각각

$(0,\ -11)$, $(0,\ -3)$

이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot\{-3-(-11)\}\cdot2=8$

답 ④

65 정사각형 ABCD에서 두 대각선의 교점이 원점 O이므로 △ABO는 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\angle\mathrm{ABO}=45°$이므로 직선 AB의 기울기는

$\tan 45°=1$

$f(x)=-2x^2+\frac{7}{8}$이라 하면

$f'(x)=-4x$

직선 AB와 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 $\left(t,\ -2t^2+\frac{7}{8}\right)$이라 하면 직선 AB의 기울기가 1이므로

$f'(t)=-4t=1 \qquad \therefore t=-\frac{1}{4}$

즉 접점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$이므로 직선 AB의 방정식은

$y-\frac{3}{4}=1\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right) \qquad \therefore y=x+1$

따라서 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 □ABCD의 둘레의 길이는

$4\sqrt{2}$

답 $4\sqrt{2}$

66 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=-x^2-2x+5$라 하면

$f'(x)=2x$, $g'(x)=-2x-2$

두 곡선이 제1사분면 위에서 만나는 점의 x좌표를 $t\,(t>0)$라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$t^2+1=-t^2-2t+5, \qquad t^2+t-2=0$

$(t+2)(t-1)=0 \qquad \therefore t=1\ (\because t>0)$

$\therefore \mathrm{P}(1,\ 2)$

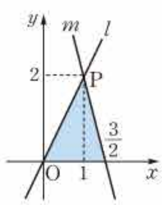
점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서 두 곡선에 그은 접선 l, m의 기울기는 각각 $f'(1)=2$, $g'(1)=-4$이므로 직선 l의 방정식은

$y-2=2(x-1) \qquad \therefore y=2x$

직선 m의 방정식은

$y-2=-4(x-1) \qquad \therefore y=-4x+6$

따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

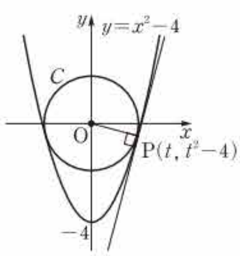


$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot2=\frac{3}{2}$

답 ③

67 $f(x)=x^2-4$라 하면 $\quad f'(x)=2x$

오른쪽 그림과 같이 접점을 $\mathrm{P}(t,\ t^2-4)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이고, 직선 OP의 기울기는



$\frac{t^2-4}{t}$

이때 점 P에서의 접선과 직선 OP는 서로 수직이므로

$2t\cdot\frac{t^2-4}{t}=-1, \qquad 2t^2=7$

$\therefore t=-\frac{\sqrt{14}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{14}}{2}$

따라서 두 접점의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{14}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{14}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이므로 원 C의 반지름의 길이는

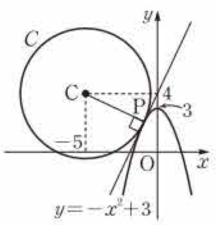
$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

답 ③

68 $f(x)=-x^2+3$이라 하면 $f'(x)=-2x$

오른쪽 그림과 같이 원 C의 중심을 $\mathrm{C}(-5,\ 4)$, 접점을 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+3)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이고, 직선 CP의 기울기는

$\frac{-t^2-1}{t+5}$



이때 점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로

$$-2t\cdot\frac{-t^2-1}{t+5}=-1$$

$2t^3+3t+5=0,\qquad (t+1)(2t^2-2t+5)=0$

$\therefore t=-1\ (\because 2t^2-2t+5>0)$

따라서 구하는 접점의 좌표는 $(-1,\ 2)$이다. 답 ③

69 $f(x)=x^3+x-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2+1$

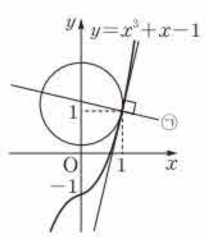
점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=4$이므로 이 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

따라서 점 $(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 직선의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{4}(x-1)$$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ ……㉠ ⋯ ❶

y축 위에 있는 원의 중심의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면 직선 ㉠이 점 $(0,\ a)$를 지나야 하므로 $a=\frac{5}{4}$ ⋯ ❷



이때 원의 반지름의 길이는 두 점 $(1,\ 1)$, $\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(1-0)^2+\left(1-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$$ ⋯ ❸

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2=\frac{17}{16}\pi$$ ⋯ ❹

답 $\frac{17}{16}\pi$

채점 기준	비율
❶ 점 (1, 1)을 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 원의 중심의 y좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❹ 원의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

70 함수 $f(x)=(x+2)^2(x-3)=x^3+x^2-8x-12$는 닫힌구간 $[-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}]$에서 연속이고 열린구간 $(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$에서 미분가능하며 $f(-2\sqrt{2})=f(2\sqrt{2})=-4$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2+2x-8$이므로

$f'(c)=3c^2+2c-8=0$

$(c+2)(3c-4)=0\qquad \therefore c=-2$ 또는 $c=\frac{4}{3}$

따라서 모든 상수 c의 값의 합은

$$-2+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$$

답 ②

71 함수 $f(x)=kx-x^2$은 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(1)=f(4)$이어야 하므로

$k-1=4k-16\qquad \therefore k=5$

한편 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=5x-x^2$에서 $f'(x)=5-2x$이므로

$f'(c)=5-2c=0\qquad \therefore c=\frac{5}{2}$ 답 ④

72 함수 $f(x)=-\frac{1}{2}x^3-x^2+2x+\frac{3}{4}$은 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(-a,\ a)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$$\frac{1}{2}a^3-a^2-2a+\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}a^3-a^2+2a+\frac{3}{4}$$

$a^3-4a=0,\qquad a(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a$는 자연수$)$ ⋯ ❶

한편 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2-2x+2$이므로

$f'(c)=-\frac{3}{2}c^2-2c+2=0$

$3c^2+4c-4=0,\qquad (c+2)(3c-2)=0$

$\therefore c=\frac{2}{3}\ (\because -2<c<2)$ ⋯ ❷

$\therefore \frac{a}{c}=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\frac{a}{c}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

73 함수 $f(x)=(x-2a)(x-b)=x^2-(2a+b)x+2ab$는 닫힌구간 $[2a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(2a,\ b)$에서 미분가능하며 $f(2a)=f(b)=0$이다.

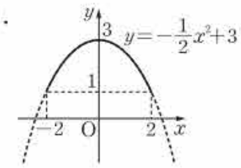
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(2a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

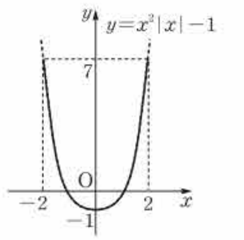
$f'(x)=2x-(2a+b)$이므로

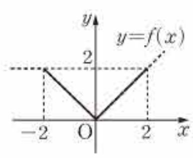
$f'(c)=2c-(2a+b)=0$

$\therefore c=\frac{2a+b}{2}$ 답 ⑤

74 $f(2)-f(-2)=4f'(c)$에서 $\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c)$
이때 보기의 세 함수는 모두 $f(2)=f(-2)$를 만족시키므로 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 존재하는지 알아보아야 한다.
ㄱ, ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄱ.


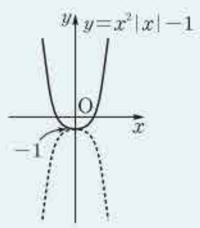
ㄷ.


ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 구간 $(-2,\ 2)$에 존재하지 않는다.


이상에서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

쎈B특강

함수 $y=x^2|x|-1$의 그래프는 $x=0$을 경계로 구간을 나누어 그린다. 즉
(i) $x<0$일 때, $y=-x^3-1$
(ii) $x\geq0$일 때, $y=x^3-1$
이므로 (i), (ii)에서 $y=x^2|x|-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.


75 함수 $f(x)=2x^3-x+3$은 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=6x^2-1$이므로

$$\frac{4-2}{1-(-1)}=6c^2-1, \qquad 3c^2=1$$

$$\therefore c=-\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 또는 } c=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 모든 상수 c의 값의 곱은 $-\dfrac{1}{3}$이다.

답 $-\dfrac{1}{3}$

76 함수 $g(x)=f'(x)=2x^2-4x+1$은 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{g(3)-g(1)}{3-1}=g'(c)$$

인 c가 구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
$g'(x)=4x-4$이므로

$$\frac{7-(-1)}{3-1}=4c-4, \qquad 4c=8$$

$$\therefore c=2$$

답 ③

77 함수 $f(x)=x^3-2x+1$에 대하여 닫힌구간 $[-1,\ k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 1이므로

$$\frac{f(k)-f(-1)}{k-(-1)}=f'(1)$$

$f'(x)=3x^2-2$이므로

$$\frac{k^3-2k+1-2}{k-(-1)}=1 \quad \cdots ❶$$

$$k^3-3k-2=0, \qquad (k+1)^2(k-2)=0$$

$$\therefore k=2\,(\because k>1) \quad \cdots ❷$$

답 2

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{f(k)-f(-1)}{k-(-1)}=f'(1)$임을 이용하여 k에 대한 방정식을 세울 수 있다.	70 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

78 ㄱ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 6]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 6)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(6)=-4$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c_1)=0$인 c_1이 열린구간 $(0,\ 6)$에 적어도 하나 존재한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 6]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 6)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(6)-f(1)}{6-1}=\frac{-4-1}{5}=-1=f'(c_2)$$

인 c_2가 열린구간 $(1,\ 6)$에 적어도 하나 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하며 $g(0)=g(1)=-4$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $g'(c_3)=0$인 c_3이 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이 ㄷ. $g(x)=f(x)-5x$에서 $g'(x)=f'(x)-5$이므로 $g'(c_3)=0$인 c_3이 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재하려면 $f'(c_3)-5=0$, 즉 $f'(c_3)=5$인 c_3이 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재해야 한다.
이때 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-(-4)=5=f'(c_3)$$

인 c_3이 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

79 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[x-2,\ x+6]$에서 연속이고 열린구간 $(x-2,\ x+6)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+6)-f(x-2)}{(x+6)-(x-2)}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(x-2,\ x+6)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x \to \infty$이면 $c \to \infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+6)-f(x-2)\}=8\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+6)-f(x-2)}{(x+6)-(x-2)}$$
$$=8\lim_{c\to\infty}f'(c)$$
$$=8\cdot 2=16$$

답 16

80 $f(x)=-x^3$에서 $\quad f'(x)=-3x^2$

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$에서

$$-(a+h)^3=-a^3+h\{-3(a+\theta h)^2\}$$
$$3ah^2+h^3=6a\theta h^2+3\theta^2h^3$$
$$\underline{3h\theta^2+6a\theta-3a-h=0}\ (\because h>0)$$

θ에 대한 이차방정식으로 생각하고 근의 공식을 이용하여 θ를 구한다.

$$\therefore \theta=\frac{-3a+\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}}{3h}\ (\because \theta>0)$$
$$\therefore \lim_{h\to 0}\theta=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}-3a}{3h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{9a^2+9ah+3h^2-9a^2}{3h(\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3a+h}{\sqrt{9a^2+9ah+3h^2}+3a}$$
$$=\frac{3a}{3a+3a}=\frac{1}{2}$$

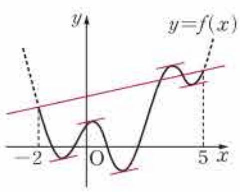
따라서 $p=2$, $q=1$이므로

$p+q=3$

답 ①

81 닫힌구간 $[-2, 5]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-2, f(-2))$, $(5, f(5))$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

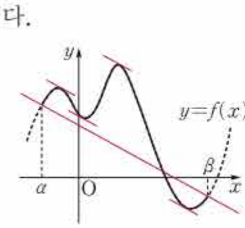
이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-2, f(-2))$, $(5, f(5))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 구하는 상수 c의 개수는 5이다.



답 ④

82 $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$를 잇는 직선의 기울기이고, $f'(c)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=c$인 점에서의 접선의 기울기이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$를 잇는 직선과 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 주어진 조건을 만족시키는 상수 c의 개수는 4이다.

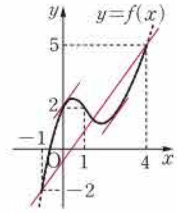


답 4

83 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-1, -2)$, $(4, 5)$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)^2+1 & (x\ge 1)\\ -2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2} & (x<1)\end{cases}$$ 이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이때 두 점 $(-1, -2)$, $(4, 5)$를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있다.



따라서 상수 c의 개수는 2이다.

답 ②

다른 풀이 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\frac{5-(-2)}{5}=\frac{7}{5}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(-1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=\begin{cases}2x-4 & (x\ge 1)\\ -4x+2 & (x<1)\end{cases}$ 이므로

$2c-4=\frac{7}{5}$에서 $\quad c=\frac{27}{10}$

$-4c+2=\frac{7}{5}$에서 $\quad c=\frac{3}{20}$

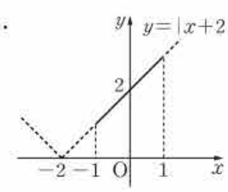
따라서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 $\frac{3}{20}$, $\frac{27}{10}$의 2개이다.

84 $\frac{f(1)-f(-1)}{2}=f'(c)$에서

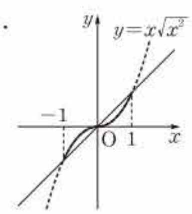
$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ, ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 ㉠을 만족시키는 c가 구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

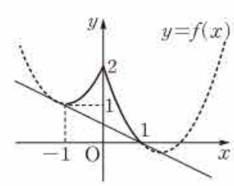
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㉠을 만족시키는 c가 구간 $(-1, 1)$에 존재하지 않는다.



이상에서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

Ⅱ. 다항함수의 미분법

05 도함수의 활용 (2)

개념 정리

본책 60쪽

❶ 감소 ❷ $<$ ❸ 극대 ❹ 극댓값 ❺ 0
❻ $f(a)$ ❼ 음 ❽ 양 ❾ $f'(x)$

쎈B 유형 뽀개기

본책 61쪽

01 $f(x)=-x^3-6x^2+15x+4$에서

$f'(x)=-3x^2-12x+15=-3(x+5)(x-1)$

이때 $f'(x)\ge0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 증가하므로

$-3(x+5)(x-1)\ge0,\quad (x+5)(x-1)\le0$

$\therefore -5\le x\le1$

따라서 $\alpha=-5,\ \beta=1$이므로

$\alpha+\beta=-4$

답 ①

02 $f(x)=x^3-12x+5$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

이때 $f'(x)\le0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

$3(x+2)(x-2)\le0\quad \therefore -2\le x\le2$

따라서 양수 a의 최댓값은 2이다.

답 ②

03 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+7$에서

$f'(x)=-x^2+2ax+b$

주어진 조건에 의하여 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -3, 1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=2a,\ -3\cdot1=-b\quad \therefore a=-1,\ b=3$

$\therefore ab=-3$

답 -3

04 $f(x)=3x^3+ax^2-72x+18$에서

$f'(x)=9x^2+2ax-72$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $b\le x\le2$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 b, 2이다. ··· ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+2=-\frac{2a}{9},\ b\cdot2=-8\quad \therefore a=9,\ b=-4$ ··· ❷

$\therefore a+b=5$ ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

05 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2ax^2+(a+14)x+3$에서

$f'(x)=x^2+4ax+a+14$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-a-14\le0,\quad (4a+7)(a-2)\le0$

$\therefore -\frac{7}{4}\le a\le2$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

답 ③

쎈B 특강

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$이 성립하려면

$a>0,\ D\le0$

② 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$이 성립하려면

$a<0,\ D\le0$

06 $f(x)=2ax^3+3x^2-x$에서

$f'(x)=6ax^2+6x-1$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 하므로

$a<0$ ······ ㉠

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9+6a\le0\quad \therefore a\le-\frac{3}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\le-\frac{3}{2}$

답 ①

07 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=\frac{2}{3}x^3-ax^2-2ax$에서

$f'(x)=2x^2-2ax-2a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+4a\le0,\quad a(a+4)\le0$

$\therefore -4\le a\le0$

따라서 정수 a는 -4, -3, -2, -1, 0의 5개이다.

답 ⑤

08 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 증가하거나 감소해야 한다. 그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다. ··· ❶

$f(x)=-x^3+3x^2-kx+2$에서

$f'(x)=-3x^2+6x-k$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3k\le 0 \qquad \therefore k\ge 3$ ⋯ ❷

따라서 실수 k의 최솟값은 3이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

쎈B특강

역함수가 존재하기 위한 조건

함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재한다.

➡ f가 일대일대응이다.

➡ 정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$

이고, 치역과 공역이 서로 같다.

09 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$를 만족시키는 함수는 일대일함수이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=x^3-2(2-a)x^2+6ax+1$에서

$f'(x)=3x^2-4(2-a)x+6a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4(2-a)^2-18a\le 0$

$2a^2-17a+8\le 0, \qquad (2a-1)(a-8)\le 0$

$\therefore \frac{1}{2}\le a\le 8$

따라서 정수 a의 최댓값은 8, 최솟값은 1이므로 구하는 합은 9이다. 답 ②

10 모든 실수 t에 대하여 구간 $[t, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(t)$가 되려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=3x^3-3ax^2+(a+6)x-a$에서

$f'(x)=9x^2-6ax+a+6$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-9(a+6)\le 0$

$a^2-a-6\le 0, \qquad (a+2)(a-3)\le 0$

$\therefore -2\le a\le 3$

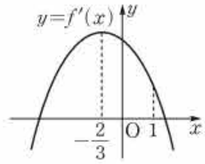
따라서 실수 a의 최댓값은 3이다. 답 ④

11 $f(x)=-x^3-2x^2+ax+3$에서

$f'(x)=-3x^2-4x+a$

$=-3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+a+\frac{4}{3}$

함수 $f(x)$가 $0<x<1$에서 증가하려면 $0<x<1$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(1)=-7+a\ge 0 \qquad \therefore a\ge 7$

따라서 실수 a의 최솟값은 7이다.

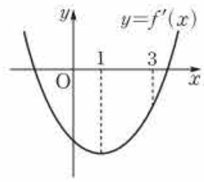
답 ①

12 $f(x)=x^3-3x^2+(1-4a)x$에서

$f'(x)=3x^2-6x+1-4a$

$=3(x-1)^2-2-4a$

함수 $f(x)$가 구간 $(0, 3)$에서 감소하려면 $0<x<3$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(3)=10-4a\le 0$

$\therefore a\ge \frac{5}{2}$ 답 $a\ge \frac{5}{2}$

13 $f(x)=x^3+ax^2-8x+5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-8$

함수 $f(x)$가 구간 $(-2, 1)$에서 감소하려면 $-2<x<1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f'(-2)=12-4a-8\le 0$에서 $\quad a\ge 1$

$f'(1)=3+2a-8\le 0$에서 $\quad a\le \frac{5}{2}$

따라서 a의 값의 범위는 $1\le a\le \frac{5}{2}$이므로

$M=\frac{5}{2}, m=1 \qquad \therefore M-m=\frac{3}{2}$ 답 ②

14 $f(x)=-x^3+2ax^2-3$에서

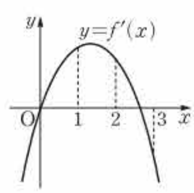
$f'(x)=-3x^2+4ax$

함수 $f(x)$가 구간 $(1, 2)$에서 증가하고, 구간 $(3, \infty)$에서 감소하려면 $1<x<2$에서 $f'(x)\ge 0$, $x>3$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다. ⋯ ❶

$f'(1)=-3+4a\ge 0$에서 $\quad a\ge \frac{3}{4}$

$f'(2)=-12+8a\ge 0$에서 $\quad a\ge \frac{3}{2}$

$f'(3)=-27+12a\le 0$에서 $\quad a\le \frac{9}{4}$



따라서 a의 값의 범위는

$\frac{3}{2}\le a\le \frac{9}{4}$ ⋯ ❷

이므로 정수 a의 값은 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ x의 값의 범위에 따른 $f'(x)$의 부호를 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 a의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $f'(x)=-3x^2+4ax=-x(3x-4a)$

이때 $f'(2)\ge 0$, $f'(3)\le 0$이므로 위의 $y=f'(x)$의 그래프에서

$2\le \frac{4}{3}a\le 3 \qquad \therefore \frac{3}{2}\le a\le \frac{9}{4}$

15 $f(x)=-x^3+2ax^2+(a-1)x$에서

$$f'(x)=-3x^2+4ax+a-1$$

따라서 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=-3t^2+4at+a-1$$

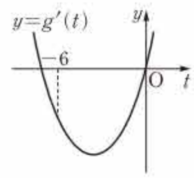
이므로 접선의 방정식은

$$y-\{-t^3+2at^2+(a-1)t\}=(-3t^2+4at+a-1)(x-t)$$

$$\therefore\ y=(-3t^2+4at+a-1)x+2t^3-2at^2$$

즉 $g(t)=2t^3-2at^2$이므로 $\quad g'(t)=6t^2-4at$

함수 $g(t)$가 구간 $(-6,\ 0)$에서 감소하려면 $-6<t<0$에서 $g'(t)\le 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$$g'(-6)=216+24a\le 0$$

$$\therefore\ a\le -9$$

따라서 실수 a의 최댓값은 -9이다. 답 -9

다른 풀이 $g'(t)=6t^2-4at=2t(3t-2a)$이므로 위의 $y=g'(t)$의 그래프에서

$$\frac{2a}{3}\le -6 \qquad \therefore\ a\le -9$$

16 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 음의 부분에서 만나는 점의 x좌표를 a라 하자.

ㄱ. 구간 $(-4,\ a)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 구간 $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

ㄷ. 구간 $(2,\ 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

ㄹ. 구간 $(3,\ 4)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

17 $h(x)=f(x)-g(x)$에서

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)$$

① 구간 $(-\infty,\ b)$에서 $f'(x)<g'(x)$이므로

$$f'(x)-g'(x)<0,\ \text{즉 } h'(x)<0$$

따라서 구간 $(-\infty,\ b)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.

② 구간 $(b,\ d)$에서 $f'(x)>g'(x)$이므로

$$f'(x)-g'(x)>0,\ \text{즉 } h'(x)>0$$

따라서 구간 $(b,\ d)$에서 함수 $h(x)$는 증가한다.

③ 구간 $(b,\ c)$에서 $f'(x)>g'(x)$이므로

$$f'(x)-g'(x)>0,\ \text{즉 } h'(x)>0$$

따라서 구간 $(b,\ c)$에서 함수 $h(x)$는 증가한다.

④ 구간 $(b,\ e)$에서 $f'(x)>g'(x)$이므로

$$f'(x)-g'(x)>0,\ \text{즉 } h'(x)>0$$

따라서 구간 $(b,\ e)$에서 함수 $h(x)$는 증가한다.

⑤ 구간 $(d,\ e)$에서 $f'(x)>g'(x)$이므로

$$f'(x)-g'(x)>0,\ \text{즉 } h'(x)>0$$

따라서 구간 $(d,\ e)$에서 함수 $h(x)$는 증가한다.

답 ①

18 $y=\{f(x)\}^2$에서 $\quad y'=2f(x)f'(x)$

① 구간 $(-\infty,\ a)$에서 $f(x)>0,\ f'(x)<0$이므로

$$2f(x)f'(x)<0$$

따라서 구간 $(-\infty,\ a)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

② 구간 $(b,\ c)$에서 $f(x)<0,\ f'(x)>0$이므로

$$2f(x)f'(x)<0$$

따라서 구간 $(b,\ c)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

③ 구간 $(c,\ d)$에서 $f(x)>0,\ f'(x)>0$이므로

$$2f(x)f'(x)>0$$

따라서 구간 $(c,\ d)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 증가한다.

④ 구간 $(d,\ e)$에서 $f(x)>0,\ f'(x)<0$이므로

$$2f(x)f'(x)<0$$

따라서 구간 $(d,\ e)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

⑤ 구간 $(f,\ g)$에서 $f(x)<0,\ f'(x)>0$이므로

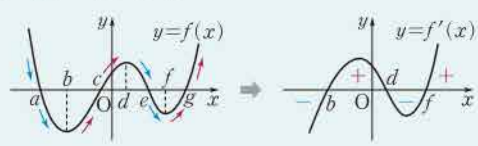
$$2f(x)f'(x)<0$$

따라서 구간 $(f,\ g)$에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 감소한다.

답 ③

쎈B특강

미분가능한 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 증가하면 $f'(x)\ge 0$, 감소하면 $f'(x)\le 0$이므로 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



19 $f(x)=-x^3-3x^2+9x+10$에서

$$f'(x)=-3x^2-6x+9=-3(x+3)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-17	↗	15	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 극솟값 -17, $x=1$일 때 극댓값 15를 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은

$$15+(-17)=-2$$

답 -2

20 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-6x^2-16x+16$에서

$$f'(x)=x^3-12x-16=(x+2)^2(x-4)$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	-80	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 극솟값 -80을 갖고, $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=-2$에서는 극값을 갖지 않는다.

따라서 $a=0,\ b=1$이므로

$$3a+b=1$$

답 ①

21 $f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x$에서

$f'(x)=12x^3+24x^2-12x-24=12(x+2)(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	8	↗	13	↘	-19	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 극솟값 8, $x=-1$일 때 극댓값 13, $x=1$일 때 극솟값 -19를 가지므로 구하는 극값의 합은

$8+13+(-19)=2$

답 ④

22 $f(x)=-x^4+6x^2-6$에서

$f'(x)=-4x^3+12x=-4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

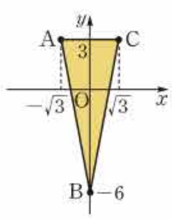
x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	3	↘	-6	↗	3	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$일 때 극댓값 3, $x=0$일 때 극솟값 -6을 갖는다. ⋯ ❶

$A(-\sqrt{3},\ 3)$, $B(0,\ -6)$, $C(\sqrt{3},\ 3)$이라 하면 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})\}\cdot\{3-(-6)\}=9\sqrt{3}$

⋯ ❷



답 $9\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있다.	60 %
❷ 삼각형 ABC의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

23 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

이때 $f'(0)=-2$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=-2$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+2x(x+h)\right\}=-2+2x^2$$

$f'(x)=0$에서 $2(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로

$\alpha=-1$, $\beta=1$

$\therefore 2\alpha+5\beta=-2+5=3$

답 3

24 $f(x)=x^3-3ax+b$에서

$f'(x)=3x^2-3a$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값 14를 가지므로

$f(-2)=14$, $f'(-2)=0$

$-8+6a+b=14$, $12-3a=0$

$\therefore a=4$, $b=-2$

즉 $f(x)=x^3-12x-2$이므로

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	14	↘	-18	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -18을 갖는다.

답 ②

25 $f(x)=-x^3+ax^2-15x+b$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-15$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(1)=-2$, $f'(1)=0$

$-1+a-15+b=-2$, $-3+2a-15=0$

$\therefore a=9$, $b=5$

$\therefore ab=45$

답 45

26 $f(x)=2x^3-ax^2-bx$에서

$f'(x)=6x^2-2ax-b$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극값을 가지므로

$f'(3)=0$ $\therefore 54-6a-b=0$ ⋯⋯ ㉠

또 $x=-1$인 점에서의 접선의 기울기가 8이므로

$f'(-1)=8$ $\therefore 6+2a-b=8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=12$

$\therefore a+b=19$

답 ④

27 $f(x)=x^3+3ax^2-9a^2x$에서

$f'(x)=3x^2+6ax-9a^2=3(x+3a)(x-a)$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $x=-3a$ 또는 $x=a$

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$27a^3$	↘	$-5a^3$	↗

$a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-3a$에서 극댓값 $27a^3$을 갖고, $x=a$에서 극솟값 $-5a^3$을 갖는다. ⋯ ❷

이때 극댓값과 극솟값의 합이 22이므로

$27a^3-5a^3=22$, $a^3=1$

$\therefore a=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ 극댓값과 극솟값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

28 $f(x)=-x^3+3(a-1)x^2+3(-a^2+2a)x$에서

$f'(x)=-3x^2+6(a-1)x+3(-a^2+2a)$

$=-3(x-a+2)(x-a)$

$f'(x)=0$에서　$x=a-2$ 또는 $x=a$

x	$\cdots$	$a-2$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(a)=4$

$-a^3+3(a-1)a^2+3(-a^2+2a)a=4$

$a^3-3a^2+4=0$,　$(a+1)(a-2)^2=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$　…… ㉠

이때 $f(-2)\le 2$이므로

$8+12(a-1)-6(-a^2+2a)\le 2$

$a^2-1\le 0$,　$(a+1)(a-1)\le 0$

$\therefore -1\le a\le 1$　…… ㉡

㉠, ㉡에서　$a=-1$

즉 $f(x)=-x^3-6x^2-9x$이므로

$f(1)=-1-6-9=-16$

답 ①

29 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$　$\therefore 3+2a+b=0$　…… ㉠　⋯ ❶

조건 (나)에서 $x\to -3$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -3} f(x)=0$이므로　$f(-3)=0$

$\therefore -27+9a-3b+c=0$　…… ㉡

또 $\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=f'(-3)$이므로

$f'(-3)=16$

$\therefore 27-6a+b=16$　…… ㉢　⋯ ❷

㉠, ㉢을 연립하여 풀면　$a=1$, $b=-5$

이것을 ㉡에 대입하면　$c=3$　⋯ ❸

따라서 $f(x)=x^3+x^2-5x+3$이므로

$f(2)=8+4-10+3=5$　⋯ ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 이용하여 a, b에 대한 관계식을 구할 수 있다.	20 %
❷ 조건 (나)를 이용하여 a, b, c에 대한 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

쎈B특강

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$ (c는 실수)이면

$f(a)=b$, $f'(a)=c$

30 $f(x)=\frac{1}{9}x^3-3x+3$에서

$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-3=\frac{1}{3}(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$에서　$x=-3$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	9	↘	-3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 극댓값 9, $x=3$일 때 극솟값 -3을 가지므로

$A(-3, 9)$, $B(3, -3)$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{9-3}{2}\right)$, 즉 $(0, 3)$

답 ③

쎈B특강

선분의 중점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 잇는 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

31 $f(x)=-x^3+2(a-1)x^2+\frac{1}{3}x$에서

$f'(x)=-3x^2+4(a-1)x+\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고, $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 α, β는 이차방정식 $-3x^2+4(a-1)x+\frac{1}{3}=0$의 두 근이다.

이때 두 점 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$가 원점에 대하여 대칭이므로

$\alpha=-\beta$, 즉 $\alpha+\beta=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{4(a-1)}{3}=0$　$\therefore a=1$

답 ④

32 $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+12ax$에서

$f'(x)=6x^2-6(a+2)x+12a$

$=6(x-2)(x-a)$

$f'(x)=0$에서　$x=2$ 또는 $x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=a$에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로

└ 극댓값 또는 극솟값이 0이다.

$f(2)=0$ 또는 $f(a)=0$

(i) $f(2)=0$일 때,

$16-12(a+2)+24a=0,\qquad 12a=8$

$\therefore a=\frac{2}{3}$

(ii) $f(a)=0$일 때,

$2a^3-3(a+2)a^2+12a^2=0,\qquad a^2(a-6)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=6$

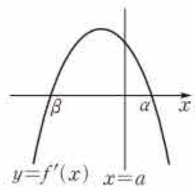
(i), (ii)에서 구하는 a의 값은

$a=0$ 또는 $a=\frac{2}{3}$ 또는 $a=6$ 　　답 $0,\ \frac{2}{3},\ 6$

33 $f(x)=-2x^3+ax^2+48x-12$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax+48$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고, $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이고, 오른쪽 그림에서 $\beta<\alpha$이다.



이때 직선 $x=a$가 두 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ 사이를 지나야 하므로

$\beta<a<\alpha$

즉 $f'(a)>0$이어야 하므로

$-6a^2+2a^2+48>0,\qquad a^2-12<0$

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0\qquad \therefore -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

따라서 정수 a는

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

의 7개이다. 　　답 ②

34 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -3을 가지므로

$f(2)=-3,\ f'(2)=0$

이때 $g(x)=(5-2x)f(x)$에서

$g'(x)=-2f(x)+(5-2x)f'(x)$

$g(2)=f(2)=-3$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ -3)$에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=-2f(2)+f'(2)=6$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-3)=6(x-2)\qquad \therefore y=6x-15$

이 직선의 x절편이 $\frac{5}{2}$, y절편이 -15이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot15=\frac{75}{4}$ 　　답 ②

35 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2-8x-\frac{2}{3}$에서

$f'(x)=2x^2-6x-8=2(x+1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 　$x=-1$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{11}{3}$	↘	-38	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값 -38을 가지므로

$a=4,\ b=-38$ 　　⋯ ❶

한편 점 $(1,\ f(1))$, 즉 점 $(1,\ -11)$에서의 접선 l의 기울기는

$f'(1)=2\cdot2\cdot(-3)=-12$

이므로 접선 l의 방정식은

$y-(-11)=-12(x-1)\qquad \therefore 12x+y-1=0$ 　　⋯ ❷

따라서 점 $(4,\ -38)$에서 직선 $12x+y-1=0$까지의 거리 d는

$d=\frac{|12\cdot4-38-1|}{\sqrt{12^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{145}}$

$\therefore 145d^2=145\cdot\frac{81}{145}=81$ 　　⋯ ❸

답 81

채점 기준	비율
❶ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 접선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $145d^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

쎈B특강

점과 직선 사이의 거리

좌표평면 위의 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

36 함수 $f(x)=ax^3-bx^2+cx+d$의 그래프에서 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to-\infty$이므로 　$a<0$

그래프가 y축과 양의 부분에서 만나므로 　$d>0$

$f'(x)=3ax^2-2bx+c$이고 $f(x)$가 $x=\alpha,\ x=\beta$에서 극값을 갖는다고 하면 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 $\alpha,\ \beta$이고, $\alpha,\ \beta$는 서로 다른 두 음수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{2b}{3a}<0,\ \alpha\beta=\frac{c}{3a}>0$

이때 $a<0$이므로 　$b>0,\ c<0$

$\therefore ac>0,\ cd<0$ 　　답 ②

37 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-3$의 그래프에서 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to\infty$이므로 　$a>0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 $\alpha,\ \beta$이고, $\alpha<0,\ \beta>0,\ |\alpha|>|\beta|$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}<0,\ \alpha\beta=\frac{c}{3a}<0$

이때 $a>0$이므로 　$b>0,\ c<0$

$\therefore a+b>0,\ b-c>0,\ ab>0,\ abc<0$

또 $bc<0$이므로 　$a-bc>0$ 　　답 ④

38 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 음의 부분에서 만나므로

$c<0$ 　　⋯ ❶

$f'(x)=-3x^2+2ax-b$이고 $f(x)$가 $x=\alpha,\ x=\beta$에서 극값을 갖는다고 하면 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 $\alpha,\ \beta$이고, $\alpha,\ \beta$는 서로 다른 두 양수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 　$\alpha+\beta=\frac{2a}{3}>0,\ \alpha\beta=\frac{b}{3}>0$

$\therefore a>0,\ b>0$ ⋯ ❷

$\therefore \dfrac{|a|}{a}+\dfrac{2|b|}{b}+\dfrac{3|c|}{c}=\dfrac{a}{a}+\dfrac{2b}{b}+\dfrac{-3c}{c}$

$=1+2-3=0$ ⋯ ❸

답 0

채점 기준	비율
❶ c의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b의 부호를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\dfrac{\lvert a\rvert}{a}+\dfrac{2\lvert b\rvert}{b}+\dfrac{3\lvert c\rvert}{c}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

39 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -3, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-3)=0$, $f'(1)=0$이므로

$27-6a+b=0$, $3+2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-9$

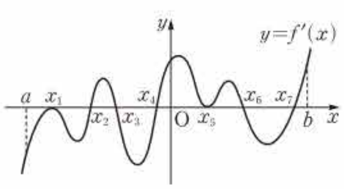
즉 $f(x)=x^3+3x^2-9x+c$이고, 함수 $f(x)$의 극솟값이 -13이므로

$f(1)=1+3-9+c=-13$ $\therefore c=-8$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x-8$이므로 구하는 극댓값은

$f(-3)=-27+27+27-8=19$ 답 19

40 다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 작은 순서대로 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7이라 하자.



(ⅰ) $x=x_3$, $x=x_6$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=x_3$, $x=x_6$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore m=2$

(ⅱ) $x=x_2$, $x=x_4$, $x=x_7$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=x_2$, $x=x_4$, $x=x_7$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore n=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $m-n=-1$ 답 -1

참고 $x=x_1$, $x=x_5$의 좌우에서는 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

41 $h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)=0$에서 $f'(x)=g'(x)$이므로

$x=a$ 또는 $x=c$ 또는 $x=e$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$	e	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=c$에서 극대이다. 답 ③

42 ㄱ, ㄴ. $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 극댓값은 $f(0)=0$, 극솟값은 $f(2)$이다.

ㄷ. $0<x<2$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 감소한다.

$\therefore f(0)>f(1)>f(2)$

이때 $f(0)=0$이므로 $f(1)<0$, $f(2)<0$

$\therefore f(1)f(2)>0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

43 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$3a-2b+c=0$, $3a+2b+c=0$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$f(x)$의 극댓값이 9, 극솟값이 5이므로

$f(-1)=9$, $f(1)=5$

$-a+b-c+d=9$, $a+b+c+d=5$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=0$, $c=-3$, $d=7$ ⋯ ❸

따라서 $f(x)=x^3-3x+7$이므로

$f(2)=8-6+7=9$ ⋯ ❹

답 9

채점 기준	비율
❶ $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$임을 이용할 수 있다.	30 %
❷ $f(-1)=9$, $f(1)=5$임을 이용할 수 있다.	30 %
❸ a, b, c, d의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

44 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -3, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(0)=1$이므로 $\quad d=1$ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $f(0)=1$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 $f'(0)=3$이므로 $\quad c=3$

$f'(-3)=0$, $f'(1)=0$이므로

$27a-6b+3=0$, $3a+2b+3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{3}$, $b=-1$

즉 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+1$이므로 $f(x)$의 극댓값과 극솟값은 각각

$f(1)=\frac{8}{3}$, $f(-3)=-8$

따라서 극댓값과 극솟값의 합은

$\frac{8}{3}+(-8)=-\frac{16}{3}$ 답 $-\frac{16}{3}$

45 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2, 5이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

① 구간 $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.
② 구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
③ $f'(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
④ $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.
⑤ $f'(4)\neq0$이므로 $f(x)$는 $x=4$에서 극값을 갖지 않는다.

답 ④

46 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -3, 1, 3이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗		↗

ㄱ. $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
ㄴ. 구간 $(-1,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
ㄷ. $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖고 $f(1)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $x=1$에서 x축에 접한다.
ㄹ. 구간 $(-4,\ 4)$에서 $f(x)$가 극댓값을 갖는 x의 값은 -3의 1개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

47 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 4, 6이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=6$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

① $-1<x<7$에서 $f(x)$는 $x=0$, $x=6$에서 극값을 가지므로 극값은 2개이다.
② $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=4$에서 극값을 갖지 않는다.
③ $1<x<3$에서 $f'(x)$의 값이 일정하므로 $f'(x)=k\ (k>0)$로 놓을 수 있다. 따라서 $1<x<3$에서 $f(x)$는 일차함수이다.
④ $f'(5)$의 값이 존재하므로 $f(x)$는 $x=5$에서 미분가능하다.
⑤ $0<x<6$일 때, $f'(x)\geq0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

답 ⑤

48 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다. 답 ④

49 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, b, c이므로 $f'(x)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대, $x=c$에서 극소이다.

또 $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=b$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

50 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1, 3이므로 $f'(x)=0$에서

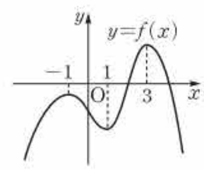
$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

이때

$f(1)<f(-1)<0<f(3)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(x)$는 구간 $(-1,\ 1)$에서 감소하고 $f(-1)<0$이므로
$f(0)<0$이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

51 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2+3ax$에서
$f'(x)=2x^2+2ax+3a$
삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-6a>0,\quad a(a-6)>0$
$\therefore a<0$ 또는 $a>6$
따라서 자연수 a의 최솟값은 7이다. 답 ⑤

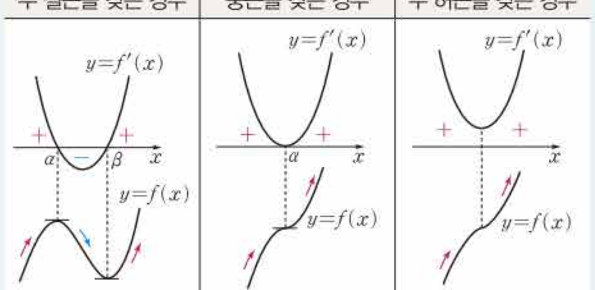
52 $f(x)=x^3+ax^2+12x-1$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+12$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ··· ❶
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-36>0,\quad (a+6)(a-6)>0$
$\therefore a<-6$ 또는 $a>6$ ··· ❷
따라서 $\alpha=-6$, $\beta=6$이므로
$\alpha\beta=-36$ ··· ❸
답 -36

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

쎈B특강

삼차함수가 극값을 가질 조건
도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 보면 다음과 같다.

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우	$f'(x)=0$이 중근을 갖는 경우	$f'(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는 경우
극댓값과 극솟값을 갖는다.	극값을 갖지 않는다.	



➡ 삼차함수는 극값을 갖지 않을 수도 있고, 극값을 가지면 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

53 $f(x)=ax^3-4x^2+3ax+2$에서
$f'(x)=3ax^2-8x+3a$
삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=16-9a^2>0,\quad (3a+4)(3a-4)<0$
$\therefore -\frac{4}{3}<a<0$ 또는 $0<a<\frac{4}{3}$ $(\because a\neq 0)$
따라서 정수 a는 -1, 1의 2개이다. 답 ①

54 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-2ax-9$에서
$f'(x)=x^2+2ax-2a$
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2+2a\leq 0,\quad a(a+2)\leq 0$
$\therefore -2\leq a\leq 0$ 답 $-2\leq a\leq 0$

55 $f(x)=-x^3+2x^2-kx$에서
$f'(x)=-3x^2+4x-k$
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4-3k\leq 0\quad \therefore k\geq\frac{4}{3}$
따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다. 답 $\frac{4}{3}$

56 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x+3$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+a+6$
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-3(a+6)\leq 0,\quad a^2-3a-18\leq 0$
$(a+3)(a-6)\leq 0\quad \therefore -3\leq a\leq 6$
따라서 $\alpha=-3$, $\beta=6$이므로 $\beta-\alpha=9$ 답 ④

57 $f(x)=-x^3+3ax^2-24x+8$에서
$f'(x)=-3x^2+6ax-24$
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=9a^2-72\leq 0,\quad a^2\leq 8$
$\therefore -2\sqrt{2}\leq a\leq 2\sqrt{2}$ ······ ㉠ ··· ❶
$g(x)=x^3-ax^2-ax+2$에서
$g'(x)=3x^2-2ax-a$

함수 $g(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $g'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=a^2+3a>0, \qquad a(a+3)>0$$

$$\therefore a<-3 \text{ 또는 } a>0 \qquad \cdots\cdots \text{ ㉡} \qquad \cdots \text{➋}$$

㉠, ㉡에서 $\quad 0<a\le 2\sqrt{2}$

따라서 정수 a는 1, 2이므로 구하는 합은 3이다. ⋯ ➌

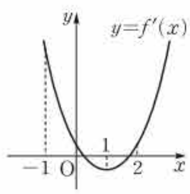
답 3

채점 기준	비율
➊ 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➋ 함수 $g(x)$가 극값을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➌ 모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

58 $f(x)=x^3-3x^2+ax-1$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 2)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=9-3a>0 \qquad \therefore a<3$$

(ii) $f'(-1)=3+6+a>0$에서

$a>-9$

$f'(2)=12-12+a>0$에서 $\quad a>0$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이고, $-1<1<2$이다.

이상에서 a의 값의 범위는

$0<a<3$

따라서 정수 a는 1, 2의 2개이다.

답 2

쎈B특강

이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

① 서로 다른 두 실근이 모두 p보다 크다.
➡ $D>0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}>p$

② 서로 다른 두 실근이 모두 p보다 작다.
➡ $D>0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}<p$

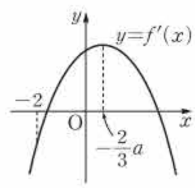
③ 서로 다른 두 실근 사이에 p가 있다.
➡ $f(p)<0$

④ 서로 다른 두 실근이 $p,\ q\ (p<q)$ 사이에 있다.
➡ $D>0,\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\frac{b}{2a}<q$

59 $f(x)=-x^3-2ax^2+8ax$에서

$f'(x)=-3x^2-4ax+8a$

함수 $f(x)$가 $x>-2$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>-2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4a^2+24a>0$$

$a(a+6)>0$

$\therefore a<-6$ 또는 $a>0$

(ii) $f'(-2)=-12+16a<0$에서 $\quad a<\frac{3}{4}$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{2}{3}a$이므로

$-\frac{2}{3}a>-2 \qquad \therefore a<3$

이상에서 실수 a의 값의 범위는

$a<-6$ 또는 $0<a<\frac{3}{4}$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

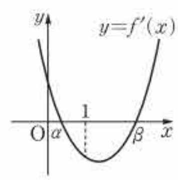
60 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(3a-2)x-4$에서

$f'(x)=x^2-2ax+3a-2$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면

$0<\alpha<1,\ \beta>1$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(0)=3a-2>0 \qquad \therefore a>\frac{2}{3}$

$f'(1)=1-2a+3a-2<0 \qquad \therefore a<1$

$\therefore \frac{2}{3}<a<1$

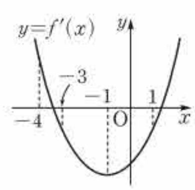
답 ④

61 $f(x)=x^3+3x^2-(k+6)x$에서

$f'(x)=3x^2+6x-k-6$

이때 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이므로 $\quad f'(1)=f'(-3)$

따라서 함수 $f(x)$가 구간 $(-4, 1)$에서 하나의 극값만을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-4<x\le-3$에서 하나의 실근을 가져야 한다. ⋯ ➊



$f'(-4)=48-24-k-6>0$에서 $\quad k<18$

$f'(-3)=27-18-k-6\le0$에서 $\quad k\ge3$

$\therefore 3\le k<18$ ⋯ ➋

따라서 $M=17,\ m=3$이므로 $\quad Mm=51$ ⋯ ➌

답 51

채점 기준	비율
➊ 함수 $f(x)$가 구간 $(-4, 1)$에서 하나의 극값만을 가질 조건을 구할 수 있다.	40 %
➋ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➌ Mm의 값을 구할 수 있다.	20 %

62 $f(x)=x^4+4x^3-4ax^2$에서

$f'(x)=4x^3+12x^2-8ax$
$=4x(x^2+3x-2a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
그런데 방정식 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $x^2+3x-2a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2+3x-2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9+8a>0 \qquad \therefore a>-\frac{9}{8}$

이때 $x=0$이 방정식 $x^2+3x-2a=0$의 근이 아니므로

$-2a\neq0 \qquad \therefore a\neq0$

$\therefore -\frac{9}{8}<a<0$ 또는 $a>0$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

쎈B특강

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때 함수 $f(x)$는 항상 극솟값을 갖고, 최고차항의 계수가 음수일 때 함수 $f(x)$는 항상 극댓값을 갖는다.

63 $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+x^3-ax^2$에서

$f'(x)=-2x^3+3x^2-2ax$
$=-x(2x^2-3x+2a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
그런데 방정식 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2-3x+2a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ··· ❶

이차방정식 $2x^2-3x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-16a>0 \qquad \therefore a<\frac{9}{16}$

이때 $x=0$이 방정식 $2x^2-3x+2a=0$의 근이 아니므로

$2a\neq0 \qquad \therefore a\neq0$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\frac{9}{16}$ ··· ❷

따라서 $\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=\frac{9}{16}$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{9}{16}$ ··· ❸

답 $\frac{9}{16}$

채점 기준	비율
❶ 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가질 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha+\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	20 %

64 $f(x)=x^4-2(1+2a)x^2-8ax$에서

$f'(x)=4x^3-4(1+2a)x-8a$
$=4(x+1)(x^2-x-2a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2-x-2a=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1+8a<0 \qquad \therefore a<-\frac{1}{8}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2-x-2a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖거나 -1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

ⓘ 이차방정식 $x^2-x-2a=0$이 $x=-1$을 근으로 가질 때,

$2-2a=0 \qquad \therefore a=1$

ⓘⓘ 이차방정식 $x^2-x-2a=0$이 -1이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1+8a=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는

$a\le-\frac{1}{8}$ 또는 $a=1$

따라서 음수 a의 최댓값은 $-\frac{1}{8}$이다. 답 ④

참고 이차방정식 $x^2-x-2a=0$이 $x=-1$을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

65 $f(x)=-3x^4-8x^3+6(a+3)x^2-12ax$에서

$f'(x)=-12x^3-24x^2+12(a+3)x-12a$
$=-12(x-1)(x^2+3x-a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2+3x-a=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=9+4a<0 \qquad \therefore a<-\frac{9}{4}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2+3x-a=0$이 $x=1$을 근으로 갖거나 1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

ⓘ 이차방정식 $x^2+3x-a=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때,

$4-a=0 \qquad \therefore a=4$

ⓘⓘ 이차방정식 $x^2+3x-a=0$이 1이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=9+4a=0 \qquad \therefore a=-\frac{9}{4}$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는

$a\le-\frac{9}{4}$ 또는 $a=4$ 답 $a\le-\frac{9}{4}$ 또는 $a=4$

66 $f(x)=2x^4-ax^3+x^2+2$에서

$f'(x)=8x^3-3ax^2+2x$
$=x(8x^2-3ax+2)$

사차함수 $f(x)$가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $8x^2-3ax+2=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=9a^2-64<0$, $\quad (3a+8)(3a-8)<0$

$\therefore -\frac{8}{3}<a<\frac{8}{3}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $8x^2-3ax+2=0$이 $x=0$을 근으로 가질 수 없으므로 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

즉 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=9a^2-64=0$

$\therefore a=-\frac{8}{3}$ 또는 $a=\frac{8}{3}$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는

$-\frac{8}{3}\le a\le\frac{8}{3}$

따라서 $M=\frac{8}{3}$, $m=-\frac{8}{3}$이므로

$9Mm=-64$ 답 -64

67 $f(x)=-x^4+8x^3-10x^2-3$에서

$f'(x)=-4x^3+24x^2-20x=-4x(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=5$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-22	↗	-3	↘	-6	↗	122	↘	69

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$일 때 최댓값 122, $x=-1$일 때 최솟값 -22를 가지므로

$M=122$, $m=-22$

$\therefore M+m=100$ 답 ⑤

68 $f'(x)=0$에서 $\quad x=a$ 또는 $x=x_3$ 또는 $x=b$

x	a	$\cdots$	x_3	$\cdots$	b
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=x_3$에서 극대이자 최대이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(x_3)$이다. 답 ③

69 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+12$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↗	19	↘	-8	↗	3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 19, $x=2$일 때 최솟값 -8을 가지므로

$M=19$, $m=-8$

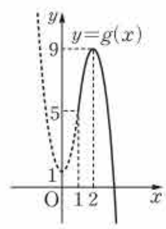
$\therefore M-m=27$ 답 ④

70 $g(x)=-2x^3+6x^2+1$이라 하면

$g'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because x\ge1)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$	5	↗	9	↘



$a=2$일 때, 구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 $g(1)=5$이므로

$f(2)=5$ ⋯ ❶

$a=3$일 때, 구간 $[1,\ 3]$에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 $g(3)=1$이므로

$f(3)=1$ ⋯ ❷

$a=4$일 때, 구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 $g(4)=-31$이므로

$f(4)=-31$ ⋯ ❸

$\therefore f(2)+f(3)-f(4)=37$ ⋯ ❹

답 37

채점 기준	비율
❶ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(2)+f(3)-f(4)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

71 $x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

$-1\le x\le2$에서 t의 값의 범위는 $\quad 2\le t\le6$

$g(t)=t^3-6t^2+5$라 하면

$g'(t)=3t^2-12t=3t(t-4)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=4\ (\because 2\le t\le6)$

t	2	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-11	↘	-27	↗	5

따라서 함수 $g(t)$는 $t=6$일 때 최댓값 5, $t=4$일 때 최솟값 -27을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은 -22이다. 답 ①

72 $g(x)=-x^2+6x-7=-(x-3)^2+2$이므로 $g(x)=t$로 놓으면 $\quad t\le2$ ⋯ ❶

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-3t-3$ ⋯ ❷

$\therefore f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=-1$ 또는 $t=1$

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	↗	-1	↘	-5	↗	-1

따라서 함수 $f(t)$는 $t=-1$ 또는 $t=2$일 때 최댓값 -1을 갖는다. ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $g(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❷ $(f\circ g)(x)$를 t에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ 최댓값을 구할 수 있다.	60 %

73 $f(x)=x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 1\le x\le 4)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-2$	↘	$k-4$	↗	$k+16$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 $k+16$, $x=2$일 때 최솟값 $k-4$를 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 18이므로

$(k+16)+(k-4)=18$

$\therefore k=3$

답 3

74 $f(x)=x^3+ax^2+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax$

$f'(-2)=-12$에서

$12-4a=-12 \qquad \therefore a=6$

즉 $f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0\ (\because 0\le x\le 2)$

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	b	↗	$b+32$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $b+32$를 가지므로

$b+32=16$

$\therefore b=-16$

$\therefore a-b=22$

답 ③

75 $f(x)=-x^3+12x+k$에서

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$k-9$	↘	$k-16$	↗	$k+16$	↘	$k+9$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $k+16$, $x=-2$일 때 최솟값 $k-16$을 갖는다. ⋯ ❶

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -21이므로

$k-16=-21 \qquad \therefore k=-5$ ⋯ ❷

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$-5+16=11$

이다. ⋯ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

76 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0\ (\because -1\le x\le 2)$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-7a+b$	↗	b	↘	$-16a+b$

이때 a, b가 양수이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 b, $x=2$일 때 최솟값 $-16a+b$를 갖는다.

따라서 $b=3$, $-16a+b=-13$이므로

$a=1$, $b=3$

$\therefore a+b=4$

답 ①

77 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=3$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$, $f'(3)=0$

$3+2a+b=0$, $27+6a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=9$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x+c$

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$c-50$	↗	$c+4$	↘	c	↗	$c+4$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$ 또는 $x=4$일 때 최댓값 $c+4$, $x=-2$일 때 최솟값 $c-50$을 갖는다.

이때 조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 -25이므로

$c-50=-25 \qquad \therefore c=25$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$25+4=29$

이다.

답 ⑤

78 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2-2)$라 하면 점 P와 원점 사이의 거리는 $\quad \sqrt{t^2+(t^2-2)^2}=\sqrt{t^4-3t^2+4}$

$f(t)=t^4-3t^2+4$라 하면

$f'(t)=4t^3-6t=2t(2t^2-3)$

$f'(t)=0$에서

$t=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $t=0$ 또는 $t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$\frac{7}{4}$	↗	4	↘	$\frac{7}{4}$	↗

따라서 $f(t)$는 $t=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때 최솟값 $\frac{7}{4}$을 가지므로 구하는 거리의 최솟값은 $\frac{\sqrt{7}}{2}$이다. 답 ②

79 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=t^2+(t^2-1)^2+(t-4)^2+t^4$

$=2t^4-8t+17$ ⋯ ❶

$f(t)=2t^4-8t+17$이라 하면

$f'(t)=8t^3-8=8(t-1)(t^2+t+1)$

$f'(t)=0$에서

$t=1$ ($\because$ $t^2+t+1>0$) $t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	11	↗

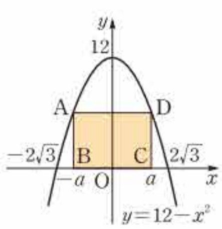
따라서 $f(t)$는 $t=1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$f(1)=11$ ⋯ ❷

답 11

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 점 P의 x좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

80 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 꼭짓점 C의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(0<a<2\sqrt{3})$이라 하면



$D(a,\ 12-a^2)$,

$A(-a,\ 12-a^2)$,

$B(-a,\ 0)$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(12-a^2)=-2a^3+24a$

$\therefore S'(a)=-6a^2+24=-6(a+2)(a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=2$ ($\because$ $0<a<2\sqrt{3}$)

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	32	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=2$일 때 최대이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은

$S(2)=32$ 답 ③

81 점 P의 좌표를 $(a,\ -a^2+6a)$ $(0<a<6)$라 하면

$H(a,\ 0)$

이때 △OPH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}a(-a^2+6a)=-\frac{1}{2}a^3+3a^2$

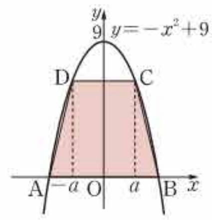
$\therefore S'(a)=-\frac{3}{2}a^2+6a=-\frac{3}{2}a(a-4)$

$S'(a)=0$에서 $a=4$ ($\because$ $0<a<6$)

a	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	16	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=4$일 때 최대이므로 △OPH의 넓이의 최댓값은 $S(4)=16$ 답 ③

82 $-x^2+9=0$에서



$(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

$\therefore A(-3,\ 0),\ B(3,\ 0)$

오른쪽 그림과 같이 점 C의 좌표를 $(a,\ -a^2+9)$ $(0<a<3)$라 하면

$D(-a,\ -a^2+9)$ ⋯ ❶

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}(2a+6)(-a^2+9)$

$=-a^3-3a^2+9a+27$ ⋯ ❷

$\therefore S'(a)=-3a^2-6a+9=-3(a+3)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because$ $0<a<3$)

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	32	↘	

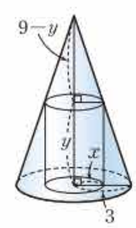
따라서 $S(a)$는 $a=1$일 때 최대이므로 넓이가 최대인 사다리꼴의 높이는

$-a^2+9=-1^2+9=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구하고 두 점 C, D의 좌표를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $S(a)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ 넓이가 최대인 사다리꼴의 높이를 구할 수 있다.	50 %

83 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면



$3:9=x:(9-y)$

$\therefore y=9-3x$ $(0<x<3)$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(9-3x)$

$=3\pi(3x^2-x^3)$

$\therefore V'(x)=3\pi(6x-3x^2)=-9\pi x(x-2)$

$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because$ $0<x<3$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	12π	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=2$일 때 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $V(2)=12\pi$ 답 ④

84 주어진 입체도형에서 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면 $r+h=6$이므로

$h=6-r$

따라서 원뿔의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2(6-r)=-\frac{1}{3}\pi r^3+2\pi r^2$

$\therefore V'(r)=-\pi r^2+4\pi r=-\pi r(r-4)$

$V'(r)=0$에서 $\quad r=4\ (\because 0<\underline{r<6})$

└ $h=6-r>0$에서 $r<6$

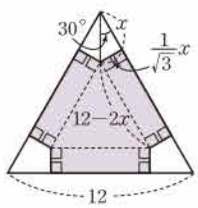
r	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	$\frac{32}{3}\pi$	↘	

따라서 $V(r)$는 $r=4$일 때 최대이므로 구하는 입체도형의 부피는

$\frac{32}{3}\pi+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot4^3}_{\text{반구의 부피}}=\frac{32}{3}\pi+\frac{128}{3}\pi=\frac{160}{3}\pi$

답 $\frac{160}{3}\pi$

85 오른쪽 그림에서 상자의 높이는



$x\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}x$

한편 삼각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$인 정삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2=\sqrt{3}(6-x)^2$

따라서 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\sqrt{3}(6-x)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}x=x^3-12x^2+36x$

$\therefore V'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 0<\underline{x<6})$

└ $12-2x>0$에서 $x<6$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	32	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=2$일 때 최대이다. 답 2

06 도함수의 활용 (3)

Ⅱ. 다항함수의 미분법

개념 정리

본책 76쪽

❶ x축 ❷ $<$ ❸ $>$ ❹ 최솟값 ❺ 0
❻ dx ❼ dv

쎈B 유형 뽀개기

본책 77쪽

01 $3x^4+4x^3-24x^2-48x-k=0$에서

$3x^4+4x^3-24x^2-48x=k \quad \cdots\cdots ㉠$

방정식 ㉠이 한 중근과 서로 다른 두 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=3x^4+4x^3-24x^2-48x$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 접점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

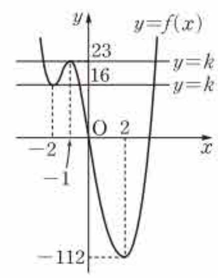
$f(x)=3x^4+4x^3-24x^2-48x$라 하면

$f'(x)=12x^3+12x^2-48x-48=12(x+2)(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	16	↗	23	↘	-112	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 접점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나려면



$k=16$ 또는 $k=23$

즉 모든 실수 k의 값의 합은

$16+23=39$ 답 ③

02 $-x^3+6x^2-k=0$에서 $\quad -x^3+6x^2=k \quad \cdots\cdots ㉠$

방정식 ㉠이 $-1\le x\le5$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=-x^3+6x^2$과 직선 $y=k$가 $-1\le x\le5$일 때 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

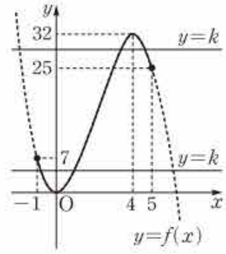
$f(x)=-x^3+6x^2$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=4$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	7	↘	0	↗	32	↘	25

따라서 $-1\le x\le5$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 $-1\le x\le5$일 때 서로 다른 두 점에서 만나려면



$0<k\le7$ 또는 $25\le k<32$

즉 정수 k는

$1, 2, \cdots, 7, 25, 26, \cdots, 31$

의 14개이다. 답 14

03 $\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3-5x^2-6x+k=0$에서

$$\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3-5x^2-6x=-k \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

방정식 ㉠이 한 중근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3-5x^2-6x$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나고 그 점에서 접해야 한다.

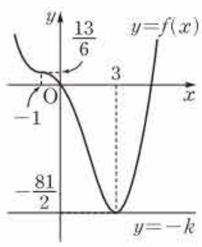
$f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3-5x^2-6x$라 하면

$$f'(x)=2x^3-2x^2-10x-6=2(x+1)^2(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{13}{6}$	↘	$-\frac{81}{2}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나고 그 점에서 접하려면



$$-k=-\frac{81}{2}$$

$$\therefore k=\frac{81}{2}$$

답 ⑤

04 $3x^4+4x^3-12x^2-k=0$에서

$$3x^4+4x^3-12x^2=k \qquad \cdots\cdots \text{㉠} \qquad \cdots❶$$

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=3x^4+4x^3-12x^2$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

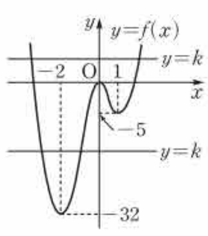
$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$이라 하면

$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$ $\qquad \cdots❷$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-32	↗	0	↘	-5	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면



$$-32<k<-5 \text{ 또는 } k>0 \qquad \cdots❸$$

즉 음의 정수 k는

$$-31,\ -30,\ -29,\ \cdots,\ -6$$

의 26개이다. $\qquad \cdots❹$

답 26

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	10 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❹ 음의 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	10 %

05 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 α, β, γ이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=\alpha \text{ 또는 } x=\beta \text{ 또는 } x=\gamma$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지려면

$$f(\alpha)>0,\ f(\beta)<0,\ f(\gamma)>0$$

이어야 한다.

답 ②

06 $f(x)=-2x^3+12x^2-18x+5$에서

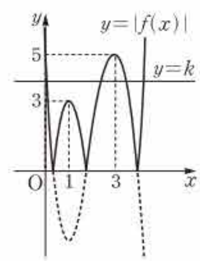
$$f'(x)=-6x^2+24x-18=-6(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↗	5	↘

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로



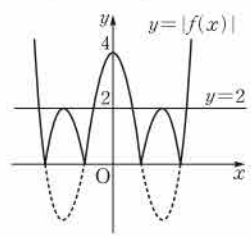
$$a_1=a_2=6,\ a_3=5,\ a_4=4,\ a_5=3$$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=24$$

답 ③

07 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 y절편은 4이고, 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이때 조건 (다)에 의하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로 함수 $f(x)$는 극댓값 4, 극솟값 -2를 갖는다. $\cdots❶$



$f(x)=x^4-ax^2+4\ (a>0)$라 하면

$$f'(x)=4x^3-2ax$$
$$=2x(2x^2-a)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{\sqrt{2a}}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2a}}{2}$

즉 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\sqrt{2a}}{2}$에서 극솟값 -2를 가지므로

$$f\left(\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)^4-a\cdot\left(\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)^2+4=-2$$

$a^2=24 \qquad \therefore a=2\sqrt{6}\ (\because a>0) \qquad \cdots❷$

따라서 $f(x)=x^4-2\sqrt{6}x^2+4$이므로

$$f(1)=5-2\sqrt{6} \qquad \cdots❸$$

답 $5-2\sqrt{6}$

채점 기준	비율
❶ $y=\|f(x)\|$의 그래프의 개형을 파악할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)=x^4-ax^2+4$라 하고 a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

쎈B특강

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
① $f(-x)=f(x)$를 만족시키면 $f(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있다.
② $f(-x)=-f(x)$를 만족시키면 $f(x)$는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있다.

08 $x^3-3x^2-9x+p=0$에서

$x^3-3x^2-9x=-p$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=-p$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이어야 한다.

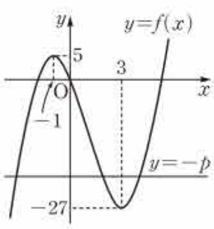
$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-p$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이려면



$-27<-p<0$

$\therefore 0<p<27$ 답 ⑤

09 $-x^3+x^2+8x=x^2-4x+a$에서

$-x^3+12x=a$ …… ㉠

방정식 ㉠이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=-x^3+12x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이어야 한다.

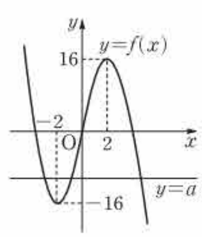
$f(x)=-x^3+12x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-16	↗	16	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이려면



$-16<a<0$

즉 정수 a는 $-15, -14, -13, \cdots, -1$의 15개이다. 답 ⑤

10 $x^3-9x^2+15x-k=0$에서

$x^3-9x^2+15x=k$ …… ㉠ ⋯ ❶

방정식 ㉠이 한 개의 음근과 두 개의 허근을 가지려면 곡선 $y=x^3-9x^2+15x$와 직선 $y=k$의 교점이 1개이고 그 교점의 x좌표가 음수이어야 한다.

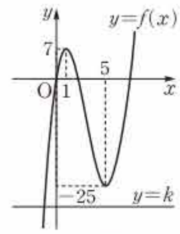
$f(x)=x^3-9x^2+15x$라 하면

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$ ⋯ ❷

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	-25	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 1개이고 그 교점의 x좌표가 음수이려면



$k<-25$ ⋯ ❸

즉 정수 k의 최댓값은 -26이다. ⋯ ❹

답 -26

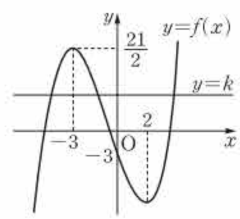
채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	10 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❹ 정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

11 방정식 $f(x)=k$가 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이어야 한다.

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -3, 2이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{21}{2}$	↘	극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이려면



$-3<k<\frac{21}{2}$

답 $-3<k<\frac{21}{2}$

12 $\frac{1}{4}x^4+x^3+8-k=0$에서

$\frac{1}{4}x^4+x^3+8=k$ …… ㉠

방정식 ㉠의 음근의 개수 $f(k)$는 곡선 $y=\frac{1}{4}x^4+x^3+8$과 직선 $y=k$의 x좌표가 음수인 교점의 개수와 같다.

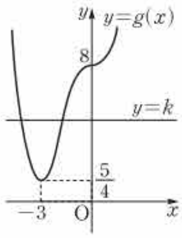
$g(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3+8$이라 하면

$g'(x)=x^3+3x^2=x^2(x+3)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	$\frac{5}{4}$	↗	8	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



(i) $k=1$일 때,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$는 x좌표가 음수인 점에서 만나지 않으므로

$f(1)=0$

(ii) $2\le k\le 7$일 때,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 x좌표가 음수인 교점이 2개이므로

$f(2)=f(3)=\cdots=f(7)=2$

(iii) $k\ge 8$일 때,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 x좌표가 음수인 교점이 1개이므로

$f(8)=f(9)=\cdots=f(15)=1$ ⋯ ❷

이상에서

$\sum_{k=1}^{15} f(k)=0+2\cdot 6+1\cdot 8=20$ ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ $y=\frac{1}{4}x^4+x^3+8$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(15)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\sum_{k=1}^{15} f(k)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

13 $2x^4-4x^3-9x^2+7=-x^4+3x^2+k$에서

$3x^4-4x^3-12x^2+7=k$ ⋯⋯ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=3x^4-4x^3-12x^2+7$과 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이어야 한다.

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+7$이라 하면

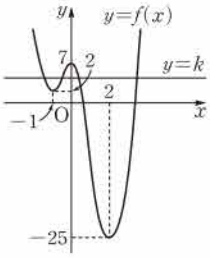
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗	7	↘	-25	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이려면



$2<k<7$

즉 $a=2$, $b=7$이므로

$ab=14$

답 ②

14 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-18x+n$이라 하면

$f'(x)=3x^2+3x-18=3(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)f(2)<0$이어야 하므로

$\left(n+\frac{81}{2}\right)(n-22)<0 \quad \therefore -\frac{81}{2}<n<22$

따라서 정수 n의 최댓값은 21, 최솟값은 -40이므로

$M=21$, $m=-40$

$\therefore M-m=21-(-40)=61$

답 ④

다른 풀이 $x^3+\frac{3}{2}x^2-18x+n=0$에서

$x^3+\frac{3}{2}x^2-18x=-n$ ⋯⋯ ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3+\frac{3}{2}x^2-18x$와 직선 $y=-n$이 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

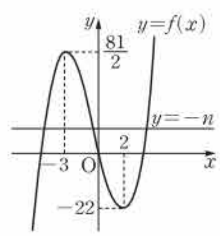
$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-18x$라 하면

$f'(x)=3x^2+3x-18=3(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{81}{2}$	↘	-22	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-n$이 서로 다른 세 점에서 만나려면



$-22<-n<\frac{81}{2}$

$\therefore -\frac{81}{2}<n<22$

15 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-2)f(1)=0$이어야 하므로

$(20+k)(-7+k)=0 \quad \therefore k=-20$ 또는 $k=7$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-20+7=-13$

답 -13

16 $f(x)=x^3+3x^2-9x-a-7$이라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$f(-3)f(1)>0$이어야 하므로

$(20-a)(-12-a)>0, \quad (a-20)(a+12)>0$

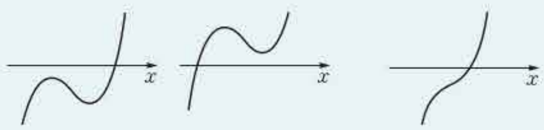
$\therefore a<-12$ 또는 $a>20$

따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 ①이다.

답 ①

쎈B특강

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가질 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



17 $f(x)=2x^3-3(1+n)x^2+6nx$라 하면

$f'(x)=6x^2-6(1+n)x+6n=6(x-1)(x-n)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=n$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(1)f(n)<0$이어야 하므로

$(3n-1)(-n^3+3n^2)<0$

$n^2(3n-1)(n-3)>0$

$\therefore n<0$ 또는 $0<n<\frac{1}{3}$ 또는 $n>3$

따라서 가장 작은 자연수 n의 값은 4이므로

$a=4$ ⋯ ❶

$n=4$일 때 $f(x)=2x^3-15x^2+24x$이므로

$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	11	↘	−16	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 극솟값 -16을 가지므로

$b=-16$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-12$ ⋯ ❸

답 -12

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

18 함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치하므로

$g(x)=2x^3-3x^2-12x+3+a$

$\therefore g'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $g(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$g(-1)g(2)=0$이어야 하므로

$(a+10)(a-17)=0$

$\therefore a=-10$ 또는 $a=17$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-10+17=7$

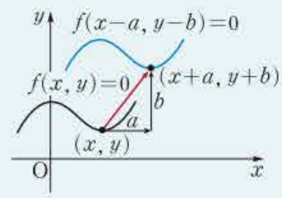
답 ⑤

쎈B특강

도형의 평행이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x-a, y-b)=0$



19 $f(x)=x^3-3ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $\quad a>0$ ⋯⋯ ㉠

따라서 $f'(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면

$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})>0$이어야 하므로

$(2a\sqrt{a}+2)(-2a\sqrt{a}+2)>0, \qquad -4a^3+4>0$

$(a-1)(a^2+a+1)<0$

$\therefore a<1$ ($\because \underbrace{a^2+a+1>0}_{a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0}$) ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 0<a<1$

답 $0<a<1$

20 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3+3x^2=9x+k$, 즉 $x^3+3x^2-9x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)f(1)<0$이어야 하므로

$(27-k)(-5-k)<0, \qquad (k-27)(k+5)<0$

$\therefore -5<k<27$

따라서 $a=-5$, $b=27$이므로 $\quad b-a=32$

답 ③

다른 풀이 $x^3+3x^2=9x+k$에서 $\quad x^3+3x^2-9x=k$

곡선 $y=x^3+3x^2$과 직선 $y=9x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 곡선 $y=x^3+3x^2-9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x$라 하면

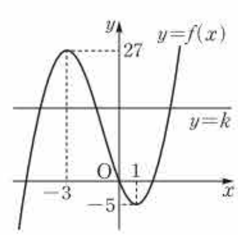
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	−3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	27	↘	−5	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$-5<k<27$



21 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $4x^3-2x^2+x=x^2+7x-k$, 즉 $4x^3-3x^2-6x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ··· ❶

$f(x)=4x^3-3x^2-6x+k$라 하면

$$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ ··· ❷

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f\left(-\frac{1}{2}\right)f(1)=0$이어야 하므로

$$\left(\frac{7}{4}+k\right)(-5+k)=0 \qquad \therefore k=-\frac{7}{4} \text{ 또는 } k=5$$

따라서 정수 k의 값은 5이다. ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 k의 값을 구할 수 있다.	50 %

22 주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $2x^2+3x=-x^3-x^2+3x-k$, 즉 $x^3+3x^2+k=0$이 한 실근만을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2+k$라 하면

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근만을 가지려면 $f(-2)f(0)>0$이어야 하므로

$$k(k+4)>0 \qquad \therefore k<-4 \text{ 또는 } k>0$$

답 ①

23 주어진 곡선과 직선이 한 점에서 만나고 다른 한 점에서는 접하려면 방정식 $\frac{2}{3}x^3-3x^2+x+2=-3x+k$, 즉 $\frac{2}{3}x^3-3x^2+4x+2-k=0$이 한 실근과 중근을 가져야 한다.

$f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+4x+2-k$라 하면

$$f'(x)=2x^2-6x+4=2(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(1)f(2)=0$이어야 하므로

$$\left(\frac{11}{3}-k\right)\left(\frac{10}{3}-k\right)=0 \qquad \therefore k=\frac{10}{3} \text{ 또는 } k=\frac{11}{3}$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$$\frac{10}{3}+\frac{11}{3}=7$$

답 7

24 $y=x^3+k$에서 $\quad y'=3x^2$

점 $(2,\ 5)$에서 곡선 $y=x^3+k$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+k)$라 하면 접선의 방정식은

$$y-(t^3+k)=3t^2(x-t)$$

이 직선이 점 $(2,\ 5)$를 지나므로

$$5-(t^3+k)=3t^2(2-t)$$

$$\therefore 2t^3-6t^2+5-k=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(2,\ 5)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3-6t^2+5-k$라 하면

$$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=2$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(0)f(2)=0$이어야 하므로

$$(5-k)(-3-k)=0 \qquad \therefore k=5\ (\because k>0)$$

답 ④

25 $y=x^3-3x$에서 $\quad y'=3x^2-3$

점 $(1,\ a)$에서 곡선 $y=x^3-3x$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t)$라 하면 접선의 방정식은

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t) \qquad \cdots ❶$$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$$a-(t^3-3t)=(3t^2-3)(1-t)$$

$$\therefore 2t^3-3t^2+3+a=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(1,\ a)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. ··· ❷

$f(t)=2t^3-3t^2+3+a$라 하면

$$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=1$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(0)f(1)<0$이어야 하므로

$$(a+3)(a+2)<0 \qquad \therefore -3<a<-2 \qquad \cdots ❸$$

답 $-3<a<-2$

채점 기준	비율
❶ 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t)$라 하고 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ t에 대한 삼차방정식을 구하고 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	30 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

26 $y=x^3-6x^2+2$에서 $\quad y'=3x^2-12x$

점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=x^3-6x^2+2$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-6t^2+2)$라 하면 접선의 방정식은

$$y-(t^3-6t^2+2)=(3t^2-12t)(x-t)$$

이 직선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$$k-(t^3-6t^2+2)=(3t^2-12t)(-t)$$

$$\therefore 2t^3-6t^2-2+k=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(0,\ k)$에서 주어진 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 t에 대한 삼차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(t)=2t^3-6t^2-2+k$라 하면

$$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=2$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(0)f(2)<0$이어야 하므로

$$(k-2)(k-10)<0 \qquad \therefore 2<k<10$$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(0)f(2)=0$이어야 하므로

$(k-2)(k-10)=0 \quad \therefore k=2$ 또는 $k=10$

삼차방정식 $f(t)=0$이 한 실근만을 가지려면 $f(0)f(2)>0$이어야 하므로

$(k-2)(k-10)>0 \quad \therefore k<2$ 또는 $k>10$

즉 $n(1)=1$, $n(2)=n(10)=2$, $n(3)=n(4)=\cdots=n(9)=3$이므로

$\sum_{k=1}^{10} n(k)=1+2\cdot2+3\cdot7=26$ 답 ⑤

다른 풀이 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=x^3-6x^2+2$에 그을 수 있는 접선의 개수는 t에 대한 삼차방정식 $2t^3-6t^2-2+k=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같고 $2t^3-6t^2-2+k=0$에서

$2t^3-6t^2-2=-k$ …… ㉠

이때 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=2t^3-6t^2-2$와 직선 $y=-k$의 교점의 개수와 같다.

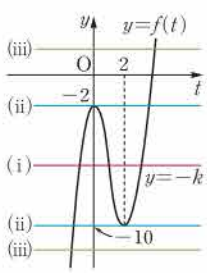
$f(t)=2t^3-6t^2-2$라 하면

$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=2$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	-2	↘	-10	↗

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $-10<-k<-2$, 즉 $2<k<10$일 때

$n(k)=3$

(ii) $-k=-10$ 또는 $-k=-2$, 즉 $k=10$ 또는 $k=2$일 때

$n(k)=2$

(iii) $-k<-10$ 또는 $-k>-2$, 즉 $k>10$ 또는 $k<2$일 때

$n(k)=1$

이상에서 $\quad \sum_{k=1}^{10} n(k)=1+2\cdot2+3\cdot7=26$

27 $f(x)=x^3-12x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$-1<x<1$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-1, 1)$에서 감소한다.

따라서 $-1<x<1$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $f(1)\ge0$이어야 하므로

$1-12+k\ge0 \quad \therefore k\ge11$ 답 ⑤

28 $f(x)=x^3-3x^2+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$x>2$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(2, \infty)$에서 증가한다. ⋯➊

따라서 $x>2$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $f(2)\ge0$이어야 하므로

$8-12+k\ge0 \quad \therefore k\ge4$ ⋯➋

즉 실수 k의 최솟값은 4이다. ⋯➌

답 4

채점 기준	비율
➊ 함수 $f(x)=x^3-3x^2+k$가 구간 $(2, \infty)$에서 증가함을 알 수 있다.	50 %
➋ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➌ k의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

29 $x^3+x^2<-\frac{1}{3}x^3+6x-k$에서

$\frac{4}{3}x^3+x^2-6x+k<0$

$f(x)=\frac{4}{3}x^3+x^2-6x+k$라 하면

$f'(x)=4x^2+2x-6=2(2x+3)(x-1)$

$\frac{3}{2}<x<3$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$에서 증가한다.

따라서 $\frac{3}{2}<x<3$에서 $f(x)<0$이 항상 성립하려면 $f(3)\le0$이어야 하므로

$36+9-18+k\le0 \quad \therefore k\le-27$

즉 실수 k의 최댓값은 -27이다. 답 ④

30 $f(x)=2x^3-\frac{9}{2}x^2+3x$라 하면

$f'(x)=6x^2-9x+3=3(2x-1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	$\frac{5}{8}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	4

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 4이므로 $x\le2$에서 $f(x)\le k$가 항상 성립하려면

$k\ge4$

즉 실수 k의 최솟값은 4이다. 답 ④

31 $x^3-4x^2-10x\ge-x^2+14x-k$에서

$x^3-3x^2-24x+k\ge0$

$f(x)=x^3-3x^2-24x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=4 \ (\because x>0)$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$k-80$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-80$이므로 $x>0$에서 $f(x)\ge0$이 항상 성립하려면

$k-80\ge0 \quad \therefore k\ge80$ 답 ⑤

32 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+k$라 하면

$f'(x)=2x^2-2x-4=2(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$ ⋯ ❶

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$k-15$	↗	$k+\frac{7}{3}$	↘	$k-\frac{20}{3}$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $k+\frac{7}{3}$, 최솟값은 $k-15$이므로 $-3\le x\le 2$에서 $-18\le f(x)\le 2$가 항상 성립하려면

$k-15\ge -18,\ k+\frac{7}{3}\le 2$

이어야 한다.

$\therefore -3\le k\le -\frac{1}{3}$ ⋯ ❷

즉 정수 k는 $-3,\ -2,\ -1$이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$ ⋯ ❸

답 -6

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 모든 정수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

33 운송 회사가 손해를 보지 않으려면 (배달 요금)$\ge$(비용)이어야 하므로 $x>0$에서 부등식 $2x^3+6x^2+a\ge 144x+5000$, 즉 $2x^3+6x^2-144x-5000+a\ge 0$이 항상 성립해야 한다.

$f(x)=2x^3+6x^2-144x-5000+a$라 하면

$f'(x)=6x^2+12x-144=6(x+6)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=4\ (\because x>0)$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$a-5352$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $a-5352$이므로 $x>0$에서 $f(x)\ge 0$이 항상 성립하려면

$a-5352\ge 0 \quad \therefore a\ge 5352$

즉 a의 최솟값은 5352이다.

답 5352

34 $f(x)=x^4-4k^3x+12$라 하면

$f'(x)=4x^3-4k^3=4(x-k)(x^2+kx+k^2)$

$x^2+kx+k^2=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=k\ (\because \underbrace{x^2+kx+k^2>0}_{>0})$

x	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-3k^4+12$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-3k^4+12$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이 성립하려면

$-3k^4+12>0,\quad k^4-4<0$

$(k^2+2)(k^2-2)<0$

$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})<0\ (\because k^2+2>0)$

$\therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

따라서 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다.

답 3

35 $x^4-6x^2-8x\ge k$에서

$x^4-6x^2-8x-k\ge 0$

$f(x)=x^4-6x^2-8x-k$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$3-k$	↘	$-24-k$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-24-k$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$-24-k\ge 0 \quad \therefore k\le -24$

즉 실수 k의 최댓값은 -24이다.

답 ②

36 $f(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2-5$라 하면

$f'(x)=4x^3+4ax-4(a+1)$

$=4(x-1)(x^2+x+a+1)$

$x^2+x+a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}>0\ (\because a>0)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because x^2+x+a+1>0)$ ⋯ ❶

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a^2-2a-8	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 a^2-2a-8이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$a^2-2a-8\ge 0,\quad (a+2)(a-4)\ge 0$

$\therefore a\ge 4\ (\because a>0)$ ⋯ ❷

즉 양수 a의 최솟값은 4이다. ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 양수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

37 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$가 성립해야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^4-3x^3+x^2-2x+a-(x^3-3x^2-2x)$

$=x^4-4x^3+4x^2+a$

$\therefore h'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	a	↗	$a+1$	↘	a	↗

따라서 함수 $h(x)$의 최솟값은 a이므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이 성립하려면

$a>0$

답 ⑤

쎈B특강

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
① $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있다.
➡ 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립한다.
② $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있다.
➡ 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립한다.

38 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=-2x^3+x^2-(-5x^2-a)=-2x^3+6x^2+a$

$\therefore h'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0
$h(x)$	$a+40$	↘	a	↗	$a+8$

따라서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $a+40$이므로 $-2\le x\le 2$에서 $h(x)\le 0$이 항상 성립하려면

$a+40\le 0$ $\therefore a\le -40$

즉 실수 a의 최댓값은 -40이다. 답 -40

39 $x<1$에서 곡선 $y=x^3+x^2$이 직선 $y=-2x+k$보다 항상 아래쪽에 있으려면 $x<1$에서 부등식 $x^3+x^2<-2x+k$, 즉 $x^3+x^2+2x-k<0$이 항상 성립해야 한다.

$f(x)=x^3+x^2+2x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2+2x+2=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\ge\frac{5}{3}$

$x<1$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1)$에서 증가한다.

따라서 $x<1$에서 $f(x)<0$이 항상 성립하려면 $f(1)\le 0$이어야 하므로

$4-k\le 0$ $\therefore k\ge 4$

$\therefore a=4$ 답 ③

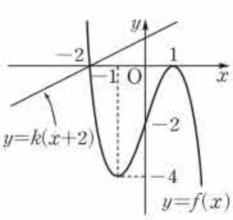
40 $f(x)=-x^3+3x-2$라 하면

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ ⋯ ❶

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↘	-4	↗	0	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❷



이때 $y=k(x+2)$의 그래프는 k의 값에 관계없이 점 $(-2, 0)$을 지나는 직선이므로 $x\ge -2$에서 $f(x)\le k(x+2)$가 항상 성립하려면

$k\ge 0$ ⋯ ❸

답 $k\ge 0$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

참고 $-x^3+3x-2\le k(x+2)$에서

$-x^3+(3-k)x-2-2k\le 0$

이때 $f(x)=-x^3+(3-k)x-2-2k$라 하면

$f'(x)=-3x^2+3-k$

이므로 $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 없다.

41 $f(x)\le -4x+k$에서 $-\frac{1}{2}x^4+2x^2-12x\le -4x+k$

$\therefore \frac{1}{2}x^4-2x^2+8x+k\ge 0$

$h(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2+8x+k$라 하면

$h'(x)=2x^3-4x+8=2(x+2)(x^2-2x+2)$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because \underline{x^2-2x+2>0}$)

$x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-16+k$	↗

따라서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $-16+k$이므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\ge 0$이 성립하려면

$-16+k\ge 0$ $\therefore k\ge 16$ ⋯⋯ ㉠

또 $-4x+k\le g(x)$에서 $-4x+k\le 4x^2+n$

$\therefore 4x^2+4x+n-k\ge 0$

이차방정식 $4x^2+4x+n-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-4(n-k)\le 0$, $4-4n+4k\le 0$

$\therefore k\le n-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $16\le k\le n-1$

위의 부등식을 만족시키는 정수 k의 개수가 3이므로

$n-1=18$ $\therefore n=19$ 답 19

참고 $n=19$이면 $16\le k\le n-1$에서 $16\le k\le 18$

즉 정수 k는 16, 17, 18의 3개이다.

쎈B특강

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여
① $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D<0$
② $ax^2+bx+c\ge 0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D\le 0$
③ $ax^2+bx+c<0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D<0$
④ $ax^2+bx+c\le 0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D\le 0$

42 점 P가 원점을 지날 때 $x=0$이므로

$t^3-2t^2+t=0$, $t(t-1)^2=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$

따라서 점 P가 출발 후 다시 원점을 지날 때는 $t=1$일 때이고, 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t+1$$

이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$3-4+1=0$ 답 0

43 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4at+4$$

$t=4$일 때 $v=20$이므로

$48-16a+4=20$, $-16a=-32$

$\therefore a=2$ 답 ④

44 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=2t^2+4t$, $v_Q=6t+4$ ⋯ ❶

두 점 P, Q의 속도가 같을 때 $v_P=v_Q$이므로

$2t^2+4t=6t+4$, $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$ $\therefore t=2$ ($\because t\geq0$) ⋯ ❷

$t=2$일 때, $x_P=14$, $x_Q=20$이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는 $20-14=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	40 %
❷ 속도가 같아지는 순간의 시각을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

45 점 P의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=t^2-4t-5=(t-2)^2-9$

즉 $1\leq t\leq6$에서 $-9\leq f'(t)\leq7$이므로

$0\leq|f'(t)|\leq9$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 9이고 그때의 시각은 $t=2$이므로 $M=9$, $a=2$

$\therefore M+a=11$ 답 ④

46 $h(t)=f(t)-g(t)=t^3+at^2+24t+b$라 하면

$h'(t)=f'(t)-g'(t)=3t^2+2at+24$

$t=2$에서 두 점 P, Q가 만나므로 $h(2)=0$

$8+4a+48+b=0$ $\therefore 4a+b=-56$ ⋯⋯ ㉠

또 $t=2$에서 두 점 P, Q의 속도가 같으므로 $h'(2)=0$

$12+4a+24=0$ $\therefore a=-9$

$a=-9$를 ㉠에 대입하면 $b=-20$ ⋯ ❶

즉 $h(t)=t^3-9t^2+24t-20$이므로

$h'(t)=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$

$h'(t)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=4$

따라서 두 점 P, Q의 속도가 다시 같아지는 시각은 $t=4$이다.

⋯ ❷

이때 $h(4)=64-144+96-20=-4$이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|-4|=4$ ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 속도가 다시 같아지는 시각을 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

47 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-3t-12$$

$3t^2-3t-12=6$에서 $3t^2-3t-18=0$

$3(t+2)(t-3)=0$ $\therefore t=3$ ($\because t\geq0$)

점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-3$$

이므로 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$18-3=15$ 답 15

쎈B특강

속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점의 위치의 함수를 시각에 대하여 미분하면 속도를 구할 수 있고, 속도의 함수를 시각에 대하여 미분하면 가속도를 구할 수 있다.

$$\text{위치 } x \xrightarrow{\text{미분}} \text{속도 } v=\frac{dx}{dt} \xrightarrow{\text{미분}} \text{가속도 } a=\frac{dv}{dt}$$

48 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+12t-10,$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-6t+12$$

따라서 점 P의 가속도가 0이면 $-6t+12=0$이므로

$t=2$

즉 $t=2$에서의 점 P의 위치가 9이므로

$-8+24-20+k=9$ $\therefore k=13$ 답 13

49 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=2t^3-3t^2+2kt-8$$

$t=2$에서의 점 P의 속도가 16이므로

$16-12+4k-8=16$

$4k=20$ $\therefore k=5$

$\therefore v=2t^3-3t^2+10t-8$

이때 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t^2-6t+10$$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$24-12+10=22$ 답 ⑤

50 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=2$ 또는 $t=4$

$t=2$에서의 점 P의 위치는 $\quad 8-36+48=20$

$t=4$에서의 점 P의 위치는 $\quad 64-144+96=16$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$20-16=4$ 답 4

51 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=t^2-8t+15=(t-3)(t-5)$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=3$ 또는 $t=5$

즉 점 P는 $t=3$일 때 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고, $t=5$일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

이때 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=2t-8$$

따라서 $t=5$에서의 점 P의 가속도는

$10-8=2$ 답 ②

52 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-2t^2+10t-2(a+4)$$

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 실수 $t(t\geq 0)$에 대하여 항상 $v\geq 0$이거나 $v\leq 0$이어야 한다.

이때

$$v=-2t^2+10t-2a-8=-2\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-2a+\frac{9}{2}$$

이므로 $\quad -2a+\frac{9}{2}\leq 0 \qquad \therefore a\geq\frac{9}{4}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{9}{4}$이다. 답 ④

53 점 M의 시각 t에서의 위치를 $m(t)$라 하면

$$m(t)=\frac{1}{2}\{f(t)+g(t)\}=t^3-4t^2+4t+3 \quad \cdots ❶$$

점 M의 속도를 v라 하면

$$v=m'(t)=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2) \quad \cdots ❷$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$

따라서 점 M은 $t=\frac{2}{3}$, $t=2$에서 운동 방향을 2번 바꾼다. ⋯ ❸

답 2번

채점 기준	비율
❶ 점 M의 위치를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 M의 속도를 구할 수 있다.	20 %
❸ 점 M이 운동 방향을 몇 번 바꾸는지 구할 수 있다.	50 %

54 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=4t-2$, $v_Q=2t-10$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$(4t-2)(2t-10)<0, \qquad (2t-1)(t-5)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<t<5$ 답 ③

55 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2mt+n$$

점 P는 $t=1$에서 운동 방향을 바꾸므로 $t=1$일 때 $v=0$이다.

즉 $3-2m+n=0$이므로 $\quad -2m+n=-3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

한편 $t=1$에서의 점 P의 위치는 1이므로

$1-m+n-6=1 \qquad \therefore -m+n=6 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad m=9,\ n=15$ ⋯ ❶

$\therefore v=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$

즉 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은 $v=0$에서 $t=5$이다. ⋯ ❷

이때 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-18$$

따라서 $t=5$에서의 점 P의 가속도는

$30-18=12$ ⋯ ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ m, n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각을 구할 수 있다.	30 %
❸ 가속도를 구할 수 있다.	30 %

56 열차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=32-1.6t$$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$32-1.6t=0 \qquad \therefore t=20$

따라서 20초 동안 열차가 움직인 거리는

$32\times 20-0.8\times 20^2=320\,(\text{m})$ 답 320 m

57 자동차가 브레이크를 밟은 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면 $\quad v=\frac{dx}{dt}=24-8t$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$24-8t=0 \qquad \therefore t=3$

따라서 브레이크를 밟은 후 자동차가 정지할 때까지 걸린 시간은 3초이다. 답 ②

58 자동차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=14.4-1.44t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$14.4-1.44t=0 \qquad \therefore t=10$ ⋯ ❶

이때 10초 동안 자동차가 움직인 거리는

$14.4\times 10-0.72\times 10^2=72\,(\text{m})$

따라서 목적지로부터 전방 72 m의 지점에서 제동을 걸어야 하므로 $\quad a=72$ ⋯ ❷

답 72

채점 기준	비율
❶ 자동차가 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

59 로켓의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=50-10t$$

최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$$50-10t=0 \qquad \therefore t=5$$

따라서 5초 후의 로켓의 지면으로부터의 높이는

$$50\cdot5-5\cdot5^2=125\ (\mathrm{m})$$

답 ④

60 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $h=0$에서

$$40+10t-5t^2=0, \qquad t^2-2t-8=0$$

$$(t+2)(t-4)=0 \qquad \therefore t=4\ (\because t\geq0) \quad \cdots ❶$$

물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=10-10t \quad \cdots ❷$$

$t=4$일 때 물체의 속도는

$$10-40=-30\ (\mathrm{m/s}) \quad \cdots ❸$$

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속력은 30 m/s이다. ··· ❹

답 30 m/s

채점 기준	비율
❶ 물체가 지면에 떨어질 때의 시각을 구할 수 있다.	40 %
❷ t초 후의 속도를 구할 수 있다.	30 %
❸ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구할 수 있다.	20 %
❹ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속력을 구할 수 있다.	10 %

61 물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=a-10t$$

최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$$a-10t=0 \qquad \therefore t=\frac{a}{10}$$

즉 $t=\frac{a}{10}$일 때 물체의 지면으로부터의 높이가 최대가 되므로

$$a\cdot\frac{a}{10}-5\cdot\left(\frac{a}{10}\right)^2\geq45, \qquad \frac{a^2}{20}\geq45$$

$$a^2\geq900 \qquad \therefore a\geq30\ (\because a>0)$$

따라서 양수 a의 최솟값은 30이다.

답 30

참고 물체가 지면으로부터의 높이가 최소 45 m인 지점까지 도달하려면
(물체가 최고 지점에 도달했을 때의 높이)≥45

62 ① $0<t<3$에서 점 P는 양의 방향으로 이동했으므로 $t=3$일 때 원점을 다시 지나지 않는다.

② $1<t<2$에서 $v(t)>0$이므로 점 P는 움직이고 있다.

③ $3<t<5$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

④ $2<t<3$에서 $v(t)>0$이므로 점 P는 양의 방향으로 움직이고, $3<t<4$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

⑤ 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $v'(t)$이고 $v'(5)>0$이므로 $t=5$일 때 점 P의 가속도는 양의 값이다.

답 ⑤

63 ㄱ. $v(a)<0$, $v(c)>0$이므로 $t=a$일 때와 $t=c$일 때 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

ㄴ. $b<t<c$에서 $v(t)$의 값이 증가하므로 점 P의 속도는 증가한다.

ㄷ. $0<t<e$에서 $t=b$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P가 운동 방향을 바꾸는 것은 $t=b$일 때의 1번이다.

ㄹ. $0<t<e$에서 $v'(a)=0$, $v'(c)=0$, $v'(d)=0$이므로 점 P의 가속도가 0이 되는 순간은 $t=a$, $t=c$, $t=d$일 때의 3번이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

참고 ㄷ. $0<t<e$에서 $v(d)=0$이지만 $t=d$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $t=d$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

64 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하자.

① $v(a)=x'(a)=0$이므로 $t=a$일 때, 점 P의 속도는 0이다.

② $b<t<c$에서 $v(t)=x'(t)>0$이므로 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

③ $c<t<e$에서 $\underbrace{v(t)=x'(t)<0}_{\text{점 P는 음의 방향으로 움직인다.}}$이므로 $t=d$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

④ $0<t<e$에서 $x(b)=0$, $x(d)=0$이므로 점 P가 원점을 지나는 것은 $t=b$, $t=d$일 때의 2번이다.

⑤ $0<t<e$에서 $t=c$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P는 $t=c$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

답 ③

65 주어진 그래프에서 점 P가 원점을 지나는 시각은 $t=b$ 또는 $t=d$ 또는 $t=e$이고, 이 중 두 번째로 원점을 지나는 시각은 $t=d$이므로 구하는 속도는 $x'(d)$의 값과 같다.

답 ④

66 $x(t)$는 t에 대한 삼차식이고, $x(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 t좌표가 각각 0, 1, 4이므로

$$x(t)=kt(t-1)(t-4)=kt^3-5kt^2+4kt\ (k<0)$$

라 할 수 있다.

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=x'(t)=3kt^2-10kt+4k,$$

$$a=\frac{dv}{dt}=6kt-10k$$

따라서 점 P의 가속도가 0이 되는 시각은 $a=0$에서

$$6kt-10k=0 \qquad \therefore t=\frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

67 ㄱ. $t=a$일 때 $0<g'(a)<f'(a)$이므로 점 P의 속력은 점 Q의 속력보다 빠르다.

ㄴ. $b<t<c$일 때 $f'(t)<0$, $g'(t)>0$이므로 두 점 P, Q는 서로 반대 방향으로 움직인다.

ㄷ. $c\leq t\leq d$일 때, 두 점 P, Q가 움직인 거리는 각각

$$f(c)-f(d),\ g(c)-g(d)$$

주어진 그래프에서

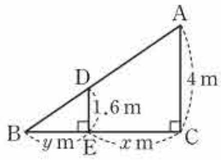
$$f(c)-f(d)>g(c)-g(d)$$

이므로 점 P가 움직인 거리가 점 Q가 움직인 거리보다 길다.

ㄹ. $f(e)=g(e)=0$이므로 $t=e$일 때, 두 점 P, Q는 원점에서 만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

68 t초 동안 사람이 움직인 거리를 x m, 사람의 그림자의 길이를 y m라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$ (AA 닮음)

이므로

$4 : 1.6=(x+y) : y$

$4y=1.6x+1.6y, \qquad 2.4y=1.6x$

$\therefore y=\frac{2}{3}x$

그런데 $x=1.5t$이므로

$y=t \qquad \therefore \frac{dy}{dt}=1$ $x=\frac{3}{2}t$이므로 $y=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}t=t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 1 m/s이다. 답 ①

69 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(3t, 0)$, $(0, t)$이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{3t}+\frac{y}{t}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$ ⋯ ❶

이때 직선 ㉠과 직선 $y=2x$의 교점 R의 x좌표는 $\frac{x}{3t}+\frac{2x}{t}=1$에서 $\frac{7x}{3t}=1 \qquad \therefore x=\frac{3}{7}t$

$\therefore R\left(\frac{3}{7}t, \frac{6}{7}t\right)$ ⋯ ❷

선분 OR의 길이를 l이라 하면

$l=\sqrt{\left(\frac{3}{7}t\right)^2+\left(\frac{6}{7}t\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{7}t \ (\because t>0)$

$\therefore \frac{dl}{dt}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$

따라서 선분 OR의 길이의 변화율은 $\frac{3\sqrt{5}}{7}$이다. ⋯ ❸

답 $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ 선분 OR의 길이의 변화율을 구할 수 있다.	50 %

쎈B특강

x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

70 t초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $7t$ cm이므로 원의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\pi\cdot(7t)^2=49\pi t^2$

$\therefore \frac{dS}{dt}=98\pi t$

따라서 $t=3$일 때 원의 넓이의 변화율은

$98\pi\cdot3=294\pi$ (cm^2/s) $\qquad \therefore a=294$ 답 294

71 t초 후의 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $(10+2t)$ cm, $(6+2t)$ cm

이므로 직사각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=(10+2t)(6+2t)=4(t^2+8t+15)$

$\therefore \frac{dS}{dt}=4(2t+8)$

직사각형의 넓이가 320 cm^{2}가 되는 순간은

$4(t^2+8t+15)=320$에서 $\qquad t^2+8t-65=0$

$(t+13)(t-5)=0 \qquad \therefore t=5 \ (\because t>0)$

따라서 $t=5$일 때 직사각형의 넓이의 변화율은

$4\cdot(2\cdot5+8)=72$ (cm^2/s) 답 ③

72 t초 후의 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이는 각각 $4t$, $20-4t$이므로 두 원의 넓이의 합을 S라 하면

$S=\pi\cdot(2t)^2+\pi\cdot(10-2t)^2$

$=\pi(8t^2-40t+100) \ (0<t<5)$ ⋯ ❶

$\therefore \frac{dS}{dt}=\pi(16t-40)$ ⋯ ❷

따라서 $t=\frac{7}{2}$일 때 두 원의 넓이의 합의 변화율은

$\pi\cdot\left(16\cdot\frac{7}{2}-40\right)=16\pi$ ⋯ ❸

답 16π

채점 기준	비율
❶ 넓이의 합 S를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 넓이의 합의 변화율을 구할 수 있다.	30 %
❸ $t=\frac{7}{2}$일 때 넓이의 합의 변화율을 구할 수 있다.	30 %

73 t초 후의 $\overline{BP}$, $\overline{BQ}$의 길이는 각각 $8-t$, $3t$이므로 $\triangle PBQ$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{BQ}\cdot\sin45°=\frac{1}{2}\cdot(8-t)\cdot3t\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{4}(8t-t^2) \ (0<t\le3)$ $\overline{BQ}\le\overline{BC}$이므로 $3t\le9$ $\therefore t\le3$

$\therefore \frac{dS}{dt}=\frac{3\sqrt{2}}{4}(8-2t)$

따라서 $t=2$일 때 $\triangle PBQ$의 넓이의 변화율은

$\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot(8-2\cdot2)=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

쎈B특강

삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 두 변의 길이가 각각 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ일 때 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin\theta$

74 t초 후의 고무풍선의 반지름의 길이는 $\left(3+\frac{1}{3}t\right)$cm이므로 고무풍선의 부피를 V cm^{3}라 하면

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(3+\frac{1}{3}t\right)^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{27}t^3+t^2+9t+27\right)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{9}t^2+2t+9\right)$$

따라서 $t=3$일 때 고무풍선의 부피의 변화율은

$$\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot3^2+2\cdot3+9\right)=\frac{64}{3}\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$$

답 ③

75 t초 후의 직육면체의 밑면의 한 변의 길이와 높이는 각각 $(4+t)$ cm, $(10-2t)$ cm이므로 직육면체의 부피를 V cm^{3}라 하면

$$V=(4+t)^2(10-2t)\ (0<t<5)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=2(4+t)(10-2t)+(4+t)^2\cdot(-2)$$
$$=6(4+t)(2-t) \quad \cdots ❶$$

$\frac{dV}{dt}=0$에서 $\quad t=2\ (\because\ 0<t<5)$ $\quad \cdots ❷$

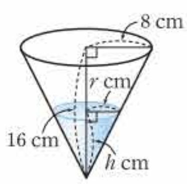
따라서 구하는 부피는

$$(4+2)^2\cdot(10-2\cdot2)=216\ (\text{cm}^3) \quad \cdots ❸$$

답 216 cm^3

채점 기준	비율
❶ 직육면체의 부피의 변화율을 구할 수 있다.	50 %
❷ 직육면체의 부피의 변화율이 0이 될 때의 시각을 구할 수 있다.	20 %
❸ 직육면체의 부피를 구할 수 있다.	30 %

76 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 수면의 높이를 h cm라 하면



$$r:h=8:16 \qquad \therefore r=\frac{1}{2}h$$

이때 t초 동안 수면의 높이는 $\frac{3}{2}t$ cm만큼 올라가므로 $\quad h=\frac{3}{2}t$

$$\therefore r=\frac{1}{2}h=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}t=\frac{3}{4}t$$

물의 부피를 V cm^{3}라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{3}{4}t\right)^2\cdot\frac{3}{2}t=\frac{9}{32}\pi t^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{27}{32}\pi t^2$$

수면의 높이가 12 cm가 되는 시각은 $12=\frac{3}{2}t$에서

$$t=8$$

따라서 $t=8$일 때의 물의 부피의 변화율은

$$\frac{27}{32}\pi\cdot8^2=54\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$$

$$\therefore a=54$$

답 ④

07 부정적분

Ⅲ. 다항함수의 적분법

개념 정리

본책 92쪽

❶ 적분상수 ❷ $f(x)$ ❸ $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ ❹ x

❺ $k\int f(x)dx$

쎈B 유형 뽀개기

본책 93쪽

01 $\int(x-1)f(x)dx=x^3+6x^2-15x+C$에서

$$(x-1)f(x)=(x^3+6x^2-15x+C)'$$
$$=3x^2+12x-15$$
$$=3(x+5)(x-1)$$

따라서 $f(x)=3(x+5)$이므로

$$f(1)=3\cdot6=18$$

답 18

02 $F(x)=2x^2-3x+1$이라 하면

$$f(x)=F'(x)=(2x^2-3x+1)'$$
$$=4x-3$$
$$\therefore f(2)=8-3=5$$

답 ③

03 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$$F(x)-G(x)=k\ (k\text{는 상수})$$

라 하면

$$k=F(2)-G(2)=5-(-2)=7$$
$$\therefore F(3)-G(3)=7$$

답 ④

쎈B특강

함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $H(x)$라 하면 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$$F(x)=H(x)+C_1,\ G(x)=H(x)+C_2$$
$$(C_1,\ C_2\text{는 적분상수})$$

로 나타낼 수 있다.

따라서

$$F(x)-G(x)=H(x)+C_1-H(x)-C_2$$
$$=C_1-C_2$$
$$=k\ (k\text{는 상수})$$

이다.

04 $f(x)=F'(x)=(x^3+ax^2+bx)'$
$$=3x^2+2ax+b$$

이므로 $f(0)=-1$에서

$$b=-1 \quad \cdots ❶$$

$f'(x)=6x+2a$이므로 $f'(0)=2$에서

$$2a=2 \qquad \therefore a=1 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore ab=-1 \quad \cdots ❸$$

답 -1

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

05 $F(x)-G(x)=k$ (k는 상수)라 하면

$k=F(1)-G(1)=5-2=3$ ⋯ ❶

이므로

$G(x)=F(x)-k=x^3+2x^2-x+3-3$

$=x^3+2x^2-x$ ⋯ ❷

$\therefore G(-1)=-1+2+1=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $F(x)-G(x)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $G(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $G(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

06 $\int\{x+h(x)\}dx=f(x)g(x)$에서

$x+h(x)=\{f(x)g(x)\}'$

$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=(4x-1)(x^2+3)+(2x^2-x)\cdot 2x$

$=8x^3-3x^2+12x-3$

$\therefore h(x)=8x^3-3x^2+11x-3$

따라서 함수 $h(x)$의 일차항의 계수는 11이다. 답 ⑤

쎈B특강

곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$y=f(x)g(x) \Rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

07 $F(x)=\dfrac{d}{dx}\int xf(x)dx=xf(x)=4x^4-x^3+5x^2-2x$

$\therefore F(1)=4-1+5-2=6$ 답 ①

08 $\dfrac{d}{dx}\int(x^2+ax+8)dx=x^2+ax+8$이므로

$x^2+ax+8=bx^2-2x+c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=-2,\ b=1,\ c=8$

$\therefore a+b+c=7$ 답 ④

09 $\dfrac{d}{dx}\int(x^3-5x+1)dx=x^3-5x+1$,

$\dfrac{d}{dx}\int(2x^2-5)dx=2x^2-5$이므로 주어진 방정식은

$x^3-5x+1-(2x^2-5)=0$

$\therefore x^3-2x^2-5x+6=0$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 2이다. 답 ⑤

참고 $x^3-2x^2-5x+6=0$에서

$(x+2)(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 방정식의 모든 근의 합을

$-2+1+3=2$

와 같이 직접 구할 수도 있다.

10 $\int\left\{\dfrac{d}{dx}(2x^3+x^2-x)\right\}dx=2x^3+x^2-x+C$이므로

$F(x)=2x^3+x^2-x+C$

$F(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $F(x)=2x^3+x^2-x+3$이므로

$F(1)=2+1-1+3=5$ 답 ⑤

11 $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$이므로

$g(x)=x^3-3x$ ⋯ ❶

$\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$h(x)=x^3-3x+C$

$h(2)=4$이므로

$8-6+C=4$ $\therefore C=2$

따라서 $h(x)=x^3-3x+2$이므로 ⋯ ❷

$g(-2)+h(1)=-2+0=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $h(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $g(-2)+h(1)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

12 $\dfrac{d}{dx}\int\{f(x)+4x^3-x^2\}dx=f(x)+4x^3-x^2$,

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{3f(x)+2x^3+x^2-6x\}\right]dx=3f(x)+2x^3+x^2-6x+C$

이므로

$f(x)+4x^3-x^2=3f(x)+2x^3+x^2-6x+C$

$\therefore f(x)=x^3-x^2+3x-\dfrac{C}{2}$

$f(1)=4$이므로

$1-1+3-\dfrac{C}{2}=4$ $\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+3x+1$이므로

$f(0)=1$ 답 ①

13 $\int\left\{\dfrac{d}{dx}(2x^2-x)\right\}dx=2x^2-x+C$이므로

$f(x)=2x^2-x+C=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+C-\dfrac{1}{8}$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 $\dfrac{7}{8}$이므로

$C-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=2x^2-x+1$이므로

$f(-1)=2+1+1=4$ 답 4

14 $\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$

$=f(x)+C_2$

이므로 $F(x)=100x^{100}+99x^{99}+\cdots+2x^2+x+C_2$

$F(0)=-1$이므로 $C_2=-1$

따라서 $F(x)=100x^{100}+99x^{99}+\cdots+2x^2+x-1$이므로 ⋯ ❶

$F(1)=100+99+\cdots+2+1-1$

$=\frac{100\cdot101}{2}-1=5049$ ⋯ ❷

답 5049

채점 기준	비율
❶ $F(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $F(1)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

15 $\int(x-1)f'(x)dx=\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-7x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x-1)f'(x)=2x^2+5x-7$

$=(x-1)(2x+7)$

$\therefore f'(x)=2x+7$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+7)dx$

$=x^2+7x+C$

$f(1)=4$이므로

$1+7+C=4$ $\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=x^2+7x-4$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -4이다.

답 ②

16 $\int\{f(x)-x\}dx=x^3+ax^2+bx+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-x=3x^2+2ax+b$

$\therefore f(x)=3x^2+(2a+1)x+b$

$f(0)=8$이므로 $b=8$

또 $f'(x)=6x+(2a+1)$이고 $f'(1)=1$이므로

$6+2a+1=1$, $2a=-6$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=3x^2-5x+8$이므로

$f(-1)=3+5+8=16$

답 16

17 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=6$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 6\,dx$

$\therefore f(x)+g(x)=6x+C_1$

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=16x-2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(16x-2)dx$

$\therefore f(x)g(x)=8x^2-2x+C_2$ ⋯ ❶

이때 $f(0)=1$, $g(0)=-3$이므로

$f(0)+g(0)=C_1=-2$, $f(0)g(0)=C_2=-3$

$\therefore f(x)+g(x)=6x-2$,

$f(x)g(x)=8x^2-2x-3$

$=(2x+1)(4x-3)$

그런데 $f(0)=1$, $g(0)=-3$이므로

$f(x)=2x+1$, $g(x)=4x-3$ ⋯ ❷

$\therefore f(3)-g(3)=7-9=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$를 적분상수를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(3)-g(3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

18 $f(x)=\int(3-\sqrt{x})^2dx+\int(3+\sqrt{x})^2dx$

$=\int\{(3-\sqrt{x})^2+(3+\sqrt{x})^2\}dx$

$=\int(2x+18)dx$

$=x^2+18x+C$

$f(1)=20$이므로

$1+18+C=20$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=x^2+18x+1$이므로

$f(0)=1$

답 1

19 $f(x)=\int\frac{x^3}{x-2}dx-\int\frac{8}{x-2}dx$

$=\int\frac{x^3-8}{x-2}dx$

$=\int\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}dx$

$=\int(x^2+2x+4)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+C$

$f(0)=\frac{2}{3}$이므로 $C=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+\frac{2}{3}$이므로

$f(-2)=-\frac{8}{3}+4-8+\frac{2}{3}=-6$

답 -6

20 $f(x)=\int(x+1)(x^2-x+1)dx-\int(x-1)(x^2+x+1)dx$

$=\int\{(x+1)(x^2-x+1)-(x-1)(x^2+x+1)\}dx$

$=\int\{x^3+1-(x^3-1)\}dx$

$=\int 2\,dx$

$=2x+C$

$f(-1)=5$이므로

$-2+C=5 \quad \therefore C=7$

따라서 $f(x)=2x+7$이므로

$f(3)=6+7=13$

답 ③

21 $f(x)=\int\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{20}x^{20}\right)dx$

$=\frac{1}{1\cdot2}x^2+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{3\cdot4}x^4+\cdots+\frac{1}{20\cdot21}x^{21}+C$

$f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서

$f(x)=\frac{1}{1\cdot2}x^2+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{3\cdot4}x^4+\cdots+\frac{1}{20\cdot21}x^{21}$

이므로

$f(1)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{20\cdot21}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)$

$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$

답 $\frac{20}{21}$

22 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2ax+2)dx$

$=x^3+ax^2+2x+C$

$f(1)=0$, $f(2)=-3$이므로

$1+a+2+C=0$, $8+4a+4+C=-3$

$\therefore a=-4$, $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+2x+1$이므로

$f(-1)=-1-4-2+1=-6$

답 -6

23 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x^4-1}{x^2+1}dx$

$=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}dx=\int(x^2-1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-x+C$

$f(1)=\frac{4}{3}$이므로

$\frac{1}{3}-1+C=\frac{4}{3} \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+2$이므로

$f(3)=9-3+2=8$

답 ④

24 $f'(x)=24x(x+2)=24x^2+48x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(24x^2+48x)dx$

$=8x^3+24x^2+C_1$

$f(1)=22$이므로

$8+24+C_1=22 \quad \therefore C_1=-10$

$\therefore f(x)=8x^3+24x^2-10$ ··· ❶

$\therefore F(x)=\int f(x)dx=\int(8x^3+24x^2-10)dx$

$=2x^4+8x^3-10x+C_2$

$F(-1)=5$이므로

$2-8+10+C_2=5 \quad \therefore C_2=1$

$\therefore F(x)=2x^4+8x^3-10x+1$ ··· ❷

따라서 $F(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$F(1)=2+8-10+1=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $F(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $F(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	20 %

쎈B 특강

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f(\alpha)$

25 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-10x+k)dx$

$=2x^3-5x^2+kx+C$

다항식 $f(x)$가 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$, $f(3)=0$

$f(-1)=0$에서

$-2-5-k+C=0 \quad \therefore k-C=-7$ ······ ㉠

$f(3)=0$에서

$54-45+3k+C=0 \quad \therefore 3k+C=-9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad k=-4$, $C=3$

따라서 $f(x)=2x^3-5x^2-4x+3$이므로

$f(1)=2-5-4+3=-4$

답 -4

26 $f(x)-g(x)=\int\{f'(x)-g'(x)\}dx$

$=\int(-2x+6)dx=-x^2+6x+C_1$

$f(x)g(x)=\int\{\underbrace{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}_{\{f(x)g(x)\}'}\}dx$

$=\int(3x^2-12x+7)dx=x^3-6x^2+7x+C_2$

이때 $f(0)=-1$, $g(0)=2$이므로

$f(0)-g(0)=C_1=-3$, $f(0)g(0)=C_2=-2$

$\therefore f(x)-g(x)=-x^2+6x-3$,

$f(x)g(x)=x^3-6x^2+7x-2=(x-1)(x^2-5x+2)$

그런데 $f(0)=-1$, $g(0)=2$이므로

$f(x)=x-1$, $g(x)=x^2-5x+2$

$\therefore f(2)+g(1)=1+(-2)=-1$

답 ②

27 $F(x)=xf(x)-3x^4-2x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3-6x^2$

이므로 $\quad xf'(x)=12x^3+6x^2$

$\therefore f'(x)=12x^2+6x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x^2+6x)dx$

$=4x^3+3x^2+C$

$f(-1)=1$이므로

$-4+3+C=1 \qquad \therefore C=2$

$\therefore f(x)=4x^3+3x^2+2$ 　　답 $f(x)=4x^3+3x^2+2$

28 $\int g(x)dx=2x^2f(x)+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=4xf(x)+2x^2f'(x)$

$\therefore g(1)=4f(1)+2f'(1)$

$=4\cdot3+2\cdot(-1)=10$ 　　답 ④

29 $2\int f(x)dx=f(x)+xf(x)+3x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f'(x)+f(x)+xf'(x)+3$

$\therefore f(x)=(1+x)f'(x)+3$ …… ㉠ ⋯ ❶

$f(x)$가 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

라 하면 $f'(x)=a$

$f(x)=ax+b$, $f'(x)=a$를 ㉠에 대입하면

$ax+b=a(1+x)+3, \qquad ax+b=ax+a+3$

$\therefore b=a+3$ …… ㉡

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, -1)$을 지나므로

$a+b=-1$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

$\therefore f(x)=-2x+1$ ⋯ ❷

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, k)$를 지나므로

$k=f(2)=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 양변을 미분할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

30 $f(x)+\int xf(x)dx=x^4-x^3-x^2-3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xf(x)=4x^3-3x^2-2x-3$ …… ㉠

$f(x)$를 n차 함수라 하면 $xf(x)$는 $(n+1)$차 함수이므로 ㉠에서

$n+1=3 \qquad \therefore n=2$

즉 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)

라 하면 $f'(x)=2ax+b$

$f(x)=ax^2+bx+c$, $f'(x)=2ax+b$를 ㉠에 대입하면

$2ax+b+x(ax^2+bx+c)=4x^3-3x^2-2x-3$

$\therefore ax^3+bx^2+(2a+c)x+b=4x^3-3x^2-2x-3$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=4$, $b=-3$, $2a+c=-2$

$\therefore a=4$, $b=-3$, $c=-10$

따라서 $f(x)=4x^2-3x-10$이므로

$f(1)=4-3-10=-9$ 　　답 ①

31 $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & (x>1)\\ k & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^2+x+C_1 & (x>1)\\ kx+C_2 & (x<1)\end{cases}$

$f(-1)=-3$이므로 $-k+C_2=-3$ …… ㉠

$f(2)=5$이므로

$4+2+C_1=5 \qquad \therefore C_1=-1$

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}(x^2+x-1)=\lim_{x\to1-}(kx+C_2)$

$\therefore k+C_2=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$C_2=-1$, $k=2$ 　　답 ②

쎈B특강

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립한다. 이때 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하므로 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$이다. 따라서 이 문제에서는 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$임을 이용한다.

32 $f'(x)=\begin{cases}-4x^3+1 & (x\geq-1)\\ 3x^2+2 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}-x^4+x+C_1 & (x\geq-1)\\ x^3+2x+C_2 & (x<-1)\end{cases}$

$f(0)=1$이므로 $C_1=1$

$f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하므로 $x=-1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to-1-}(x^3+2x+C_2)=f(-1)$이므로

$-1-2+C_2=-1-1+1 \qquad \therefore C_2=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x^4+x+1 & (x\geq-1)\\ x^3+2x+2 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(-2)=-8-4+2=-10$ 　　답 -10

33 $f'(x)=\begin{cases}2x & (x\geq0)\\ 4x & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^2+C_1 & (x\geq0)\\ 2x^2+C_2 & (x<0)\end{cases}$

$f(0)=1$이므로 $C_1=1$

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}(2x^2+C_2)=f(0) \qquad \therefore C_2=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\geq0)\\ 2x^2+1 & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(-2)f(3)=9\cdot10=90$ 　　답 ⑤

34 주어진 그래프에서

$f'(x)=\begin{cases}2 & (x\geq1)\\ -2x+4 & (x<1)\end{cases}$ ⋯ ❶

이므로 $f(x)=\begin{cases} 2x+C_1 & (x\ge1) \\ -x^2+4x+C_2 & (x<1) \end{cases}$ ··· ❷

$y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0 \quad \therefore C_2=0$

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}(-x^2+4x)=f(1)$

$-1+4=2+C_1 \quad \therefore C_1=1$ ··· ❸

따라서 $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x\ge1) \\ -x^2+4x & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(2)=2\cdot2+1=5$ ··· ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20 %
❸ C_1, C_2의 값을 구할 수 있다.	50 %
❹ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

35 $f'(x)=3x^2-1$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-1)dx$

$=x^3-x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$f(1)=C=0$

따라서 $f(x)=x^3-x$이므로

$f(3)=27-3=24$

답 24

36 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^2에 정비례하므로

$f'(x)=ax^2$ (a는 상수, $a\neq0$)

이라 하면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax^2\,dx$

$=\frac{a}{3}x^3+C$

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(0, -4)$, $(3, 5)$를 지나므로

$f(0)=C=-4$

$f(3)=9a-4=5 \quad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4$이므로

$f(2)=\frac{8}{3}-4=-\frac{4}{3}$

답 ②

37 $f'(x)=6x+k$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x+k)dx$

$=3x^2+kx+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$f(0)=C=1$

$\therefore f(x)=3x^2+kx+1$

따라서 방정식 $3x^2+kx+1=0$의 두 근의 합이 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{k}{3}=2 \quad \therefore k=-6$

답 -6

38 $f'(x)=-2x+10$이므로 ··· ❶

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x+10)dx$

$=-x^2+10x+C$

$=-(x-5)^2+25+C$

함수 $f(x)$의 최댓값이 18이므로

$25+C=18 \quad \therefore C=-7$

$\therefore f(x)=-x^2+10x-7$ ··· ❷

따라서 구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$f(-1)=-1-10-7=-18$ ··· ❸

답 -18

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

39 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f(x)=\int(2x-1)(4x^2+2x+1)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2x-1)(4x^2+2x+1)=8x^3-1$

$\therefore f'(1)=7$

따라서 구하는 값은

$2f'(1)=14$

답 ②

40 $\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}$

$=F'(-1)=f(-1)$

$=-4+6-3=-1$

답 -1

41 $\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x-4h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x-h)-f(x)\}-\{f(x-4h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot(-1)+\lim_{h\to0}\frac{f(x-4h)-f(x)}{-4h}\cdot4$

$=-f'(x)+4f'(x)=3f'(x)$

07 부정적분

즉 $3f'(x)=12x^3-18x+15$이므로

$f'(x)=4x^3-6x+5$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3-6x+5)dx$

$=x^4-3x^2+5x+C$

$f(1)=5$이므로

$1-3+5+C=5 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^4-3x^2+5x+2$이므로

$f(-2)=16-12-10+2=-4$ 답 ②

42 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)+5}{x-2}=0$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)+5\}=0$이므로 $\qquad f(2)=-5$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)+5}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=0$ ⋯ ❶

따라서 $f'(2)=f'(-1)=0$이고 $f'(x)$의 최고차항이 $6x^2$이므로

$f'(x)=6(x+1)(x-2)=6x^2-6x-12$ ⋯ ❷

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-6x-12)dx$

$=2x^3-3x^2-12x+C$

$f(2)=-5$이므로

$16-12-24+C=-5 \qquad \therefore C=15$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+15$이므로 ⋯ ❸

$f(1)=2-3-12+15=2$ ⋯ ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

43 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x-2}=2$이므로 $f'(x)$는 일차항의 계수가 2인 일차함수이다. 즉

$f'(x)=2x+k$ (k는 상수)

라 할 수 있다.

조건 (나)에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\qquad f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-3$

$f'(1)=2+k=-3$에서 $\qquad k=-5$

$\therefore f'(x)=2x-5$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-5)dx=x^2-5x+C$이므로

$f(1)=1-5+C=0 \qquad \therefore C=4$

$\therefore f(x)=x^2-5x+4$

따라서 방정식 $x^2-5x+4=0$의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 5이다. 답 ⑤

44 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \qquad \therefore f(0)=0$

$f'(2)=7$이므로

$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+4h-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+4$

$=7$

즉 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=3$이므로

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+2x$

$=3+2x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(3+2x)dx$

$=x^2+3x+C$

그런데 $f(0)=0$이므로 $\qquad C=0$

따라서 $f(x)=x^2+3x$이므로

$f(5)=25+15=40$ 답 40

45 $\Delta y=(ax-2)\Delta x+(\Delta x)^2$의 양변을 Δx로 나누면

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=ax-2+\Delta x$

이므로

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=ax-2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax-2)dx$

$=\frac{1}{2}ax^2-2x+C$

$f(0)=4$이므로 $\qquad C=4$

$f(1)=3$이므로

$\frac{1}{2}a-2+4=3 \qquad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=x^2-2x+4$이므로

$f(2)=4-4+4=4$ 답 ②

46 $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{mxh-3h^2}{h}=mx$ ⋯ ❶

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int mx\,dx$

$=\frac{m}{2}x^2+C$ ⋯ ❷

$f(-1)=4$이므로 $\qquad \frac{m}{2}+C=4$ ⋯⋯ ㉠

$f(2)=-5$이므로 $\qquad 2m+C=-5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=-6,\ C=7$

$\therefore f(x)=-3x^2+7$ ⋯ ❸

답 $f(x)=-3x^2+7$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %

47 $f'(x)=ax(x+1)\ (a>0)$이라 하면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x+1)dx$$
$$=\int (ax^2+ax)dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+C$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	⋯	-1	⋯	0	⋯
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$f(-1)=6,\ f(0)=5$ — $\frac{a}{6}+5=6$에서 $a=6$

$-\frac{a}{3}+\frac{a}{2}+C=6,\ C=5$ $\therefore a=6,\ C=5$

$\therefore f(x)=2x^3+3x^2+5$

답 $f(x)=2x^3+3x^2+5$

48 $f(x)=\int (3x^2+3x-6)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	⋯	-2	⋯	1	⋯
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$f(-2)=16$

이때

$$f(x)=\int (3x^2+3x-6)dx=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+C$$

이므로

$f(-2)=-8+6+12+C=16$

$\therefore C=6$

즉 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+6$이므로 극솟값은

$f(1)=1+\frac{3}{2}-6+6=\frac{5}{2}$

답 ①

49 $f'(x)=2x(x-2)=2x^2-4x$에서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x^2-4x)dx$$
$$=\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

이때 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하고 함수 $f(x)$의 극댓값이 양수이므로 극솟값이 0이다.

즉 $f(2)=0$이므로

$\frac{16}{3}-8+C=0$ $\therefore C=\frac{8}{3}$

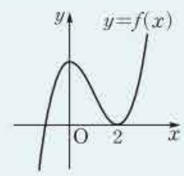
따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}$이므로

$f(3)=18-18+\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$

답 ③

쎈B특강

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 양수인 극댓값을 갖고 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.



50 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-2=x^3-6x-2$ $\therefore f(x)=x^3-6x$

$f'(x)=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	⋯	$-\sqrt{2}$	⋯	$\sqrt{2}$	⋯
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$에서 극댓값을 갖고, $x=\sqrt{2}$에서 극솟값을 가지므로

$\alpha=f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}=4\sqrt{2}$,

$\beta=f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}-6\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$

$\therefore \alpha\beta=-32$

답 ①

51 $f'(x)=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ (a<0)$이라 하면 $f'(0)=0$이므로

$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}=0$ $\therefore a=-2$

$\therefore f'(x)=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=-2x(x+1)$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	⋯	-1	⋯	0	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$f(0)=1$ ⋯ ❷

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x^2-2x)dx$$
$$=-\frac{2}{3}x^3-x^2+C$$

이므로

$C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3-x^2+1$이므로 ⋯ ❸

$f(-3)=18-9+1=10$ ⋯ ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(0)=1$임을 알 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $f(-3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

52 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.
이때 $f'(-1)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f(1)=0$

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3(x+1)(x-1)dx$$
$$=\int(3x^2-3)dx$$
$$=x^3-3x+C$$

이므로

$f(1)=1-3+C=0$

$\therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$이므로 극댓값은

$f(-1)=-1+3+2=4$ 답 ④

다른 풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\therefore f'(-1)=3-2a+b=0$, $f'(1)=3+2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x+c$

이때 $f(1)=0$에서 $c=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$이므로 극댓값은

$f(-1)=4$

53 $f'(x)=-x^2+2kx=-x(x-2k)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\underbrace{2k}_{0<k<\frac{2}{3}\text{에서 } 0<2k<\frac{4}{3}}$

x	0	$\cdots$	$2k$	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $\underbrace{x=2k\text{에서 극대}}_{x=2k\text{에서 최대이다.}}$이다.

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x^2+2kx)dx$$
$$=-\frac{1}{3}x^3+kx^2+C$$

이므로

$f(0)=C$, $f(2k)=\frac{4}{3}k^3+C$,

$f(2)=-\frac{8}{3}+4k+C$

$f(2)-f(0)=-\frac{8}{3}+4k$이고 $0<k<\frac{2}{3}$이므로

$-\frac{8}{3}<-\frac{8}{3}+4k<0$

즉 $f(2)-f(0)<0$이므로

$f(2)<f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=2k$일 때 최댓값 $\frac{4}{3}k^3+C$, $x=2$일 때 최솟값 $-\frac{8}{3}+4k+C$를 가지므로

$$\frac{4}{3}k^3+C-\left(-\frac{8}{3}+4k+C\right)=\frac{5}{6}$$

$8k^3-24k+11=0$

$(2k-1)(\underbrace{4k^2+2k-11}_{})=0$ ┌ $4k^2+2k-11=0$에서 $k=\frac{-1\pm3\sqrt{5}}{4}$ 따라서 $0<k<\frac{2}{3}$를 만족시키지 않는다.

$\therefore k=\frac{1}{2}\left(\because 0<k<\frac{2}{3}\right)$ 답 $\frac{1}{2}$

08 정적분

Ⅲ. 다항함수의 적분법

개념 정리

본책 102쪽

❶ $\int_b^a f(x)dx$ ❷ $f(x)$ ❸ $k\int_a^b f(x)dx$

❹ $\int_a^b f(x)dx$ ❺ 0 ❻ $f(x+a)-f(x)$

❼ $f(a)$

쎈B 유형 뽀개기

본책 103쪽

01 $\int_2^2 (x-1)(2x+5)dx-\int_{-2}^{-4}(x+2)(3x-2)dx$

$=0+\int_{-4}^{-2}(x+2)(3x-2)dx=\int_{-4}^{-2}(3x^2+4x-4)dx$

$=\Big[x^3+2x^2-4x\Big]_{-4}^{-2}=8-(-16)=24$ 답 24

02 $\int_0^1 3(1-y)(1+y)(1+y^2)(1+y^4)dy$

$=\int_0^1 3(1-y^2)(1+y^2)(1+y^4)dy=\int_0^1 3(1-y^4)(1+y^4)dy$

$=\int_0^1 3(1-y^8)dy=\Big[-\frac{1}{3}y^9+3y\Big]_0^1=\frac{8}{3}$

따라서 $p=3$, $q=8$이므로 $p+q=11$ 답 ②

03 $\int_0^1 (1+4x+9x^2+\cdots+n^2x^{n-1})dx$

$=\Big[x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n\Big]_0^1$

$=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

이므로 $\frac{n(n+1)}{2}=120$, $n(n+1)=240$

$n^2+n-240=0$, $(n+16)(n-15)=0$

$\therefore n=15$ ($\because$ n은 1보다 큰 자연수) 답 ①

04 $\int_1^3 \{5f'(x)-x\}dx=\Big[5f(x)-\frac{1}{2}x^2\Big]_1^3$

$=\Big\{5f(3)-\frac{9}{2}\Big\}-\Big\{5f(1)-\frac{1}{2}\Big\}$

$=5f(3)-14$ ($\because$ $f(1)=2$) ⋯ ❶

즉 $5f(3)-14=6$이므로 $f(3)=4$ ⋯ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 정적분을 $f(3)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

05 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^3-3kx^2)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4-kx^3\Big]_0^2=4-8k$

이때 $f(2)=8-12k$이므로 $4-8k=8-12k$

$\therefore k=1$ 답 ⑤

06 $\int_0^1 \{f(x)\}^2dx=\int_0^1 (2x+1)^2dx$

$=\int_0^1 (4x^2+4x+1)dx$

$=\Big[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\Big]_0^1=\frac{13}{3}$ ⋯ ❶

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (2x+1)dx=\Big[x^2+x\Big]_0^1=2$ ⋯ ❷

따라서 주어진 등식에서 $\frac{13}{3}=4a$ $\therefore a=\frac{13}{12}$ ⋯ ❸

답 $\frac{13}{12}$

채점 기준	비율
❶ $\int_0^1 \{f(x)\}^2dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_0^1 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 $\int_{-1}^k (2-6x)dx=\Big[2x-3x^2\Big]_{-1}^k=(2k-3k^2)-(-5)$

$=-3k^2+2k+5=-3\Big(k-\frac{1}{3}\Big)^2+\frac{16}{3}$

이므로 $\int_{-1}^k (2-6x)dx$는 $k=\frac{1}{3}$일 때 최댓값 $\frac{16}{3}$을 갖는다.

따라서 $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{16}{3}$이므로 $m-n=-5$ 답 -5

08 $\int_{-2}^1 (3x^2+4kx+4)dx=\Big[x^3+2kx^2+4x\Big]_{-2}^1$

$=(5+2k)-(-16+8k)$

$=-6k+21$

즉 $-6k+21>-9$에서 $k<5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 ④

09 $f(0)-3=0$, $f(1)-3=0$, $f(2)-3=0$이므로

$f(x)-3=x(x-1)(x-2)$

$\therefore f(x)=x(x-1)(x-2)+3$

$\therefore \int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 \{x(x-1)(x-2)+3\}dx$

$=\int_0^2 (x^3-3x^2+2x+3)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+3x\Big]_0^2=6$ 답 ③

쎈B 특강

최고차항의 계수가 k $(k\neq0)$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

① $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$이 성립하면

➡ $f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 놓는다.

② $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=m$이 성립하면

➡ $f(x)-m=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 놓는다.

10 $f'(x)=4x^3+3x^2+1$이므로

$$f(x)=\int(4x^3+3x^2+1)dx=x^4+x^3+x+C$$

따라서

$$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x^4+x^3+x+C)dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+Cx\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\frac{11}{20}+C$$

이므로

$$-\frac{11}{20}+C=-\frac{9}{20}\qquad \therefore C=\frac{1}{10}$$
$$\therefore f(x)=x^4+x^3+x+\frac{1}{10}$$

답 $f(x)=x^4+x^3+x+\frac{1}{10}$

11 조건 (가)에서

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{2}$$

이므로 $f'(2)=2$

이때 $f'(x)=2ax-b$이므로

$4a-b=2$ …… ㉠ ⋯ ❶

조건 (나)에서

$$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(ax^2-bx)dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}=-\frac{2}{3}$$

이므로 $2a-3b=-4$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$ ⋯ ❸

따라서 $f(x)=x^2-2x$이므로

$f(-2)=4+4=8$ ⋯ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 (나)를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(-2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

12 $\int_{0}^{1}(x^2-4x)dx+2\int_{0}^{1}(2x-x^2)dx$

$$=\int_{0}^{1}(x^2-4x)dx+\int_{0}^{1}(4x-2x^2)dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^2-4x+4x-2x^2)dx$$
$$=\int_{0}^{1}(-x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}=-\frac{1}{3}$$

답 ③

13 $\int_{0}^{2}\frac{x^3+x^2-1}{x+1}dx+\int_{2}^{0}\frac{t}{t+1}dt$

$$=\int_{0}^{2}\frac{x^3+x^2-1}{x+1}dx-\int_{0}^{2}\frac{x}{x+1}dx$$
$$=\int_{0}^{2}\frac{x^3+x^2-x-1}{x+1}dx=\int_{0}^{2}\frac{(x+1)^2(x-1)}{x+1}dx$$
$$=\int_{0}^{2}(x+1)(x-1)dx=\int_{0}^{2}(x^2-1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{0}^{2}=\frac{2}{3}$$

답 ②

14 $\int_{-1}^{1}\{f(x)+g(x)\}dx+\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=6+(-10)$
$=-4$

이므로

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)\}dx=-4$$
$$\int_{-1}^{1}2f(x)dx=-4,\quad 2\int_{-1}^{1}f(x)dx=-4$$
$$\therefore \int_{-1}^{1}f(x)dx=-2$$ ⋯ ❶

$\int_{-1}^{1}\{f(x)+g(x)\}dx-\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=6-(-10)$
$=16$

이므로

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)\}dx=16$$
$$\int_{-1}^{1}2g(x)dx=16,\quad 2\int_{-1}^{1}g(x)dx=16$$
$$\therefore \int_{-1}^{1}g(x)dx=8$$ ⋯ ❷

$$\therefore \int_{-1}^{1}\{f(x)+3g(x)\}dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+3\int_{-1}^{1}g(x)dx$$
$$=-2+3\cdot8$$
$$=22$$ ⋯ ❸

답 22

채점 기준	비율
❶ $\int_{-1}^{1}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_{-1}^{1}g(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\int_{-1}^{1}\{f(x)+3g(x)\}dx$의 값을 구할 수 있다.	20 %

15 $\int_{3}^{1}f(x)dx=-2$에서 $\int_{1}^{3}f(x)dx=2$

$$\therefore \int_{1}^{3}\{2f(x)-1\}^2dx$$
$$=\int_{1}^{3}[4\{f(x)\}^2-4f(x)+1]dx$$
$$=4\int_{1}^{3}\{f(x)\}^2dx-4\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{1}^{3}1\,dx$$
$$=4\cdot8-4\cdot2+\left[x\right]_{1}^{3}$$
$$=24+2=26$$

답 26

16 $\int_{-1}^{2}(2x-k)^2dx-\int_{2}^{-1}(4-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^{2}(4x^2-4kx+k^2)dx+\int_{-1}^{2}(4-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^{2}(4x^2-4kx+k^2+4-3x^2)dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^2-4kx+k^2+4)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2kx^2+(k^2+4)x\right]_{-1}^{2}$

$=\left\{\frac{8}{3}-8k+2(k^2+4)\right\}-\left\{-\frac{1}{3}-2k-(k^2+4)\right\}$

$=3k^2-6k+15=3(k-1)^2+12$

따라서 주어진 정적분의 최솟값은 12이다. 답 12

17 $\int_{-2}^{3}f(x)dx+\int_{1}^{0}f(x)dx-\int_{1}^{3}f(x)dx$

$=\int_{-2}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{0}f(x)dx$

$=\int_{-2}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{0}f(x)dx$

$=\int_{-2}^{0}f(x)dx=\int_{-2}^{0}(6x^3-4x+3)dx$

$=\left[\frac{3}{2}x^4-2x^2+3x\right]_{-2}^{0}=-10$ 답 ①

18 $\int_{1}^{3}(x^2-3x-1)dx+\int_{3}^{5}(x^2-3x-1)dx$

$=\int_{1}^{5}(x^2-3x-1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x\right]_{1}^{5}$

$=-\frac{5}{6}-\left(-\frac{13}{6}\right)=\frac{4}{3}$ 답 ②

19 $\int_{0}^{6}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{6}f(x)dx$

$=\left\{\int_{0}^{3}f(x)dx-\int_{2}^{3}f(x)dx\right\}+\int_{2}^{6}f(x)dx$

$=(A-B)+C$

$=A-B+C$ 답 $A-B+C$

20 $\int_{0}^{4}(x+3)^2dx-\int_{-1}^{4}(x-3)^2dx+\int_{-1}^{0}(x-3)^2dx$

$=\int_{0}^{4}(x+3)^2dx-\left\{\int_{-1}^{4}(x-3)^2dx-\int_{-1}^{0}(x-3)^2dx\right\}$

$=\int_{0}^{4}(x+3)^2dx-\left\{\int_{-1}^{4}(x-3)^2dx+\int_{0}^{-1}(x-3)^2dx\right\}$

$=\int_{0}^{4}(x+3)^2dx-\int_{0}^{4}(x-3)^2dx$

$=\int_{0}^{4}\{(x+3)^2-(x-3)^2\}dx$

$=\int_{0}^{4}(x^2+6x+9-x^2+6x-9)dx$

$=\int_{0}^{4}12x\,dx=\left[6x^2\right]_{0}^{4}=96$ 답 96

21 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

이때 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx$이므로

$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

$\therefore \int_{0}^{1}f(x)dx=0$

$\therefore \int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx=0$

한편 $f(0)=1$이므로 $f(x)=ax^2+bx+1$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(ax^2+bx+1)dx$

$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}$

$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1=0$ …… ㉠

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(ax^2+bx+1)dx$

$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0}$

$=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=0$

따라서 $f(x)=-3x^2+1$이므로

$f(2)=-12+1=-11$ 답 ②

22 조건 (나)에서

$\int_{n}^{n+6}f(x)dx=\int_{n}^{n+1}2x\,dx=\left[x^2\right]_{n}^{n+1}$

$=2n+1$ ⋯ ❶

$\therefore \int_{0}^{18}f(x)dx=\int_{0}^{6}f(x)dx+\int_{6}^{12}f(x)dx+\int_{12}^{18}f(x)dx$

$=1+13+25=39$ ⋯ ❷

또 조건 (가)에서 $\int_{0}^{2}f(x)dx=0$이므로

$\int_{0}^{20}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{8}f(x)dx+\int_{8}^{14}f(x)dx$

$+\int_{14}^{20}f(x)dx$

$=0+5+17+29=51$ ⋯ ❸

$\therefore \int_{18}^{20}f(x)dx=\int_{0}^{20}f(x)dx-\int_{0}^{18}f(x)dx$

$=51-39=12$ ⋯ ❹

답 12

채점 기준	비율
❶ $\int_{n}^{n+6}f(x)dx$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\int_{0}^{18}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\int_{0}^{20}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\int_{18}^{20}f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	20 %

08 정적분

23 $\int_0^3 xf(x)dx=\int_0^2 xf(x)dx+\int_2^3 xf(x)dx$

$$=\int_0^2 x(x-1)^2dx+\int_2^3 x(x-1)dx$$
$$=\int_0^2 (x^3-2x^2+x)dx+\int_2^3 (x^2-x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_2^3$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{23}{6}=\frac{9}{2}$$

답 ④

24 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$$
$$8-2a=a+2, \qquad 3a=6$$
$$\therefore a=2$$
$$\therefore \int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 (2x+2)dx+\int_1^2 (3x^2-4x+5)dx$$
$$=\Big[x^2+2x\Big]_0^1+\Big[x^3-2x^2+5x\Big]_1^2$$
$$=3+6=9$$

따라서 $a=2$, $k=9$이므로

$$a+k=11$$

답 ②

25 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & (x\geq-2) \\ -2x-4 & (x\leq-2) \end{cases}$이므로 ⋯ ❶

$$\int_{-3}^1 f(x)dx=\int_{-3}^{-2} (-2x-4)dx+\int_{-2}^1 \left(\frac{1}{2}x+1\right)dx \quad \cdots ❷$$
$$=\Big[-x^2-4x\Big]_{-3}^{-2}+\left[\frac{1}{4}x^2+x\right]_{-2}^1$$
$$=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{13}{4}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\int_{-3}^1 f(x)dx$를 구간에 따라 나누어 두 정적분의 합으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 정적분의 값을 구할 수 있다.	30 %

26 $\int_{-1}^a f(x)dx=\int_{-1}^1 (3x^2-5)dx+\int_1^a (-2)\,dx$

$$=\Big[x^3-5x\Big]_{-1}^1+\Big[-2x\Big]_1^a$$
$$=-8-2a+2$$
$$=-2a-6$$

따라서 $-2a-6=-16$이므로

$$a=5$$

답 5

27 $|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & (x\leq-2 \text{ 또는 } x\geq2) \\ -x^2+4 & (-2\leq x\leq2) \end{cases}$이므로

$$\int_0^5 \frac{|x^2-4|}{x+2}dx$$
$$=\int_0^2 \frac{-x^2+4}{x+2}dx+\int_2^5 \frac{x^2-4}{x+2}dx$$
$$=-\int_0^2 \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}dx+\int_2^5 \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}dx$$
$$=-\int_0^2 (x-2)dx+\int_2^5 (x-2)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^5$$
$$=2+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$$

답 ④

28 $2x+|x-1|=\begin{cases} 3x-1 & (x\geq1) \\ x+1 & (x\leq1) \end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^3 (2x+|x-1|)dx=\int_{-2}^1 (x+1)dx+\int_1^3 (3x-1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^1+\left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^3$$
$$=\frac{3}{2}+10=\frac{23}{2}$$

답 $\frac{23}{2}$

29 $|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x & (x\leq0 \text{ 또는 } x\geq2) \\ -x^2+2x & (0\leq x\leq2) \end{cases}$이고 $a>2$이므로

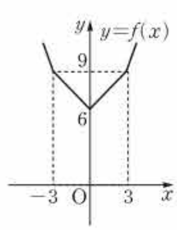
$$\int_0^a |x^2-2x|dx=\int_0^2 (-x^2+2x)dx+\int_2^a (x^2-2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^a$$
$$=\frac{1}{3}a^3-a^2+\frac{8}{3}$$

따라서 $\frac{1}{3}a^3-a^2+\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$이므로

$$a^3-3a^2=0, \qquad a^2(a-3)=0$$
$$\therefore a=3\ (\because a>2)$$

답 ①

30 $f(x)=\begin{cases} 3x & (x\geq3) \\ x+6 & (0\leq x\leq3) \\ -x+6 & (-3\leq x\leq0) \\ -3x & (x\leq-3) \end{cases}$이므로



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 6을 가지므로

$$a=6 \quad \cdots ❶$$
$$\therefore \int_0^a f(x)dx=\int_0^6 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 (x+6)dx+\int_3^6 3x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+6x\right]_0^3+\left[\frac{3}{2}x^2\right]_3^6$$
$$=\frac{45}{2}+\frac{81}{2}$$
$$=63 \quad \cdots ❷$$

답 63

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\int_0^a f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

31 $|x^2-n^2|=\begin{cases} x^2-n^2 & (x\le -n \text{ 또는 } x\ge n) \\ -x^2+n^2 & (-n\le x\le n)\end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n)&=\int_0^{2n}|x^2-n^2|dx \\ &=\int_0^n(-x^2+n^2)dx+\int_n^{2n}(x^2-n^2)dx \\ &=\left[-\frac{1}{3}x^3+n^2x\right]_0^n+\left[\frac{1}{3}x^3-n^2x\right]_n^{2n} \\ &=\frac{2}{3}n^3+\frac{4}{3}n^3=2n^3 \end{aligned}$$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned} \therefore\ &\frac{1}{50}\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)\} \\ &=\frac{1}{50}\sum_{k=1}^{10}f(k)=\frac{1}{25}\sum_{k=1}^{10}k^3 \\ &=\frac{1}{25}\cdot\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2=121 \end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 121

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\frac{1}{50}\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)\}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

쎈B 특강

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ ② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

32 $\int_{-a}^{a}(x^3+10x^2)dx=2\int_0^a 10x^2dx=2\left[\frac{10}{3}x^3\right]_0^a=\frac{20}{3}a^3$

즉 $\frac{20}{3}a^3=\frac{5}{6}$이므로 $a^3=\frac{1}{8}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because$ a는 실수)

$\therefore 10a=5$

답 ③

33 $\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$

$$\begin{aligned} &=\int_{-1}^{1}f(x)dx \\ &=\int_{-1}^{1}(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots-20x^{19})dx \\ &=\int_{-1}^{1}(1+3x^2+\cdots+19x^{18})dx \\ &\quad-\int_{-1}^{1}(2x+4x^3+\cdots+20x^{19})dx \\ &=2\int_0^1(1+3x^2+\cdots+19x^{18})dx \\ &=2\left[x+x^3+\cdots+x^{19}\right]_0^1 \\ &=2\cdot 10=20 \end{aligned}$$

답 ②

34 $\int_{-a}^{a}(-x^3+3x^2+5x-a)dx=2\int_0^a(3x^2-a)dx$

$$\begin{aligned} &=2\left[x^3-ax\right]_0^a \\ &=2a^3-2a^2 \end{aligned}$$

이므로 $2a^3-2a^2=a^2-1$

$2a^3-3a^2+1=0$, $(2a+1)(a-1)^2=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 실수 a의 값은 $-\frac{1}{2}$, 1이다. 답 $-\frac{1}{2}$, 1

35 $\int_{-1}^{1}|x|(x^4+x^3+x^2+x+1)dx$

$$\begin{aligned} &=\int_{-1}^{1}(|x|x^4+|x|x^3+|x|x^2+|x|x+|x|)dx \\ &=2\int_0^1(|x|x^4+|x|x^2+|x|)dx \\ &=2\int_0^1(x^5+x^3+x)dx \\ &=2\left[\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{11}{6} \end{aligned}$$

답 ⑤

쎈B 특강

자연수 n에 대하여

$|-x|(-x)^{2n-1}=-|x|x^{2n-1}$, $|-x|(-x)^{2n}=|x|x^{2n}$

이므로 $|x|x^{2n-1}$은 기함수, $|x|x^{2n}$은 우함수이다.

따라서 $|x|x^3$, $|x|x$는 기함수이고, $|x|x^4$, $|x|x^2$은 우함수이다.

36 $\int_{-2}^{2}xf(x)dx=16$에서

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2}xf(x)dx&=\int_{-2}^{2}(ax^2+bx)dx=2a\int_0^2 x^2dx \\ &=2a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=2a\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{3}a \end{aligned}$$

즉 $\frac{16}{3}a=16$이므로 $a=3$ ⋯ ❶

$\int_{-2}^{2}x^2f(x)dx=-8$에서

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2}x^2f(x)dx&=\int_{-2}^{2}(ax^3+bx^2)dx=2b\int_0^2 x^2dx \\ &=2b\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=2b\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{3}b \end{aligned}$$

즉 $\frac{16}{3}b=-8$이므로 $b=-\frac{3}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore a-4b=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-4b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

37 조건 ㈎에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.

따라서 $f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+a$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x-2)(3x^2+a)dx&=\int_{-1}^{1}(3x^3-6x^2+ax-2a)dx\\&=2\int_0^1(-6x^2-2a)dx\\&=2\Big[-2x^3-2ax\Big]_0^1\\&=2(-2-2a)\\&=-4-4a\end{aligned}$$

즉 $-4-4a=0$이므로

$$a=-1$$

따라서 $f(x)=x^3-x=x(x+1)(x-1)$이므로

$$|f(x)|=\begin{cases}x^3-x & (-1\le x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ -x^3+x & (x\le -1 \text{ 또는 } 0\le x\le 1)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^{1}|f(x)|dx&=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_0^1(-x^3+x)dx\\&=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{0}+\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

다른 풀이 조건 (가), (나)에서 $f(x)=x^3-x$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$$

즉 $|f(x)|$는 우함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|f(x)|dx&=2\int_0^1|f(x)|dx\\&=2\int_0^1(-x^3+x)dx\\&=2\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1\\&=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

38 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 기함수이다.

$$\begin{aligned}&\therefore \int_{-1}^{1}(x^3-5x-2)f(x)dx\\&=\underbrace{\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx}_{0}-5\underbrace{\int_{-1}^{1}xf(x)dx}_{0}-2\int_{-1}^{1}f(x)dx\\&=-4\int_0^1f(x)dx\\&=-4\cdot(-3)=12\end{aligned}$$

답 12

쎈B특강

우함수, 기함수의 곱

① (우함수)×(우함수) ➡ (우함수)
② (우함수)×(기함수) ➡ (기함수)
③ (기함수)×(기함수) ➡ (우함수)

39 $f(x)=-f(-x)$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이고, $g(x)=g(-x)$에서 $g(x)$는 우함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^{3}\{f(x)-g(x)\}dx&=\int_{-3}^{3}f(x)dx-\int_{-3}^{3}g(x)dx\\&=-2\int_0^3g(x)dx\\&=(-2)\cdot3=-6\end{aligned}$$

답 ④

40 $f(x)+f(-x)=0$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.

따라서 $x^2f(x)$는 기함수이고, $xf(x)$는 우함수이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{2}(2x^2+3x+1)f(x)dx\\&=2\underbrace{\int_{-2}^{2}x^2f(x)dx}_{0}+3\int_{-2}^{2}xf(x)dx+\underbrace{\int_{-2}^{2}f(x)dx}_{0}\\&=6\int_0^2xf(x)dx\\&=6\cdot4=24\end{aligned}$$

답 ⑤

41 $f(x)-f(-x)=0$에서 $f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

따라서 $\int_{-5}^{5}f(x)dx=2\int_0^5f(x)dx=16$이므로

$$\int_0^5f(x)dx=8$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^5f(x)dx&=\int_0^5f(x)dx-\int_0^1f(x)dx\\&=8-(-1)=9\end{aligned}$$

답 ④

42 $f(x)=-f(-x)$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다. ⋯ ❶

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^{4}f(x)dx&=\underbrace{\int_{-3}^{3}f(x)dx}_{0}+\int_3^4f(x)dx\\&=\int_3^4f(x)dx\\&=\int_0^4f(x)dx-\int_0^3f(x)dx \quad\cdots ❷\\&=5k-1-(-3k)=8k-1\end{aligned}$$

이때 $\int_{-3}^{4}f(x)dx=15$이므로

$8k-1=15 \qquad \therefore k=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 기함수임을 알 수 있다.	20 %
❷ $\int_{-3}^{4}f(x)dx$를 $\int_0^3f(x)dx$, $\int_0^4f(x)dx$로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

43 $\int_0^2f(t)dt=k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

라 하면 $f(x)=4x^3-6x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^2(4t^3-6t+k)dt=k, \qquad \Big[t^4-3t^2+kt\Big]_0^2=k$$

$4+2k=k \qquad \therefore k=-4$

따라서 $f(x)=4x^3-6x-4$이므로

$f(1)=4-6-4=-6$ 답 ③

44 $f(x)=3x^2+\int_0^1 (x+1)f(t)dt$

$=3x^2+x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt$

이때

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

라 하면 $f(x)=3x^2+kx+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 (3t^2+kt+k)dt=k$, $\left[t^3+\frac{1}{2}kt^2+kt\right]_0^1=k$

$1+\frac{3}{2}k=k$ $\therefore k=-2$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=-2$ 답 ①

45 $\int_0^3 tf'(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

라 하면 $f(x)=x^2-8x+k$

$\therefore f'(x)=2x-8$ ⋯➊

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^3 (2t^2-8t)dt=k$, $\left[\frac{2}{3}t^3-4t^2\right]_0^3=k$

$\therefore k=-18$ ⋯➋

따라서 $f(x)=x^2-8x-18$이므로

$f(-2)=4+16-18=2$ ⋯➌

답 2

채점 기준	비율
➊ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
➋ $\int_0^3 tf'(t)dt$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ $f(-2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

46 $f(x)=3x^2-2x-\int_{-1}^1 f(t)dt$에서

$\int_{-1}^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

라 하면 $f(x)=3x^2-2x-k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_{-1}^1 (3t^2-2t-k)dt=2\int_0^1 (3t^2-k)dt=k$

$2\left[t^3-kt\right]_0^1=k$, $2-2k=k$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

즉 $f(x)=3x^2-2x-\frac{2}{3}$이므로 부등식 $f(x)<g(x)$에서

$3x^2-2x-\frac{2}{3}<x^2-8x+6$, $3x^2+9x-10<0$

$\therefore m+n=-\frac{9}{3}=-3$ 답 -3

쎈B특강

이차방정식 $3x^2+9x-10=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9^2-4\cdot3\cdot(-10)=201>0$

이므로 이 이차방정식은 두 실근 m, n을 갖는다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $m+n$의 값을 구할 수 있다.

47 $f(x)=x^2-\int_0^2 xf(t)dt+2\int_0^1 f(t)dt$

$=x^2-x\int_0^2 f(t)dt+2\int_0^1 f(t)dt$

에서 상수 a, b에 대하여

$\int_0^2 f(t)dt=a$, $\int_0^1 f(t)dt=b$

라 하면 $f(x)=x^2-ax+2b$

이때

$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (t^2-at+2b)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2+2bt\right]_0^2=\frac{8}{3}-2a+4b$

이므로 $\frac{8}{3}-2a+4b=a$

$\therefore 3a-4b=\frac{8}{3}$ ...... ㉠

또

$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (t^2-at+2b)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2+2bt\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+2b$

이므로 $\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+2b=b$

$\therefore \frac{a}{2}-b=\frac{1}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$이므로

$f(-1)=1+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=3$ 답 ②

48 상수 a, b에 대하여

$\int_0^1 \{2f(y)+g(y)\}dy=a$, $\int_0^1 \{f(y)-2g(y)\}dy=b$

라 하면

$f(x)=3x^2+a$, $g(x)=4x^3+b$

이때

$\int_0^1 \{2f(y)+g(y)\}dy=\int_0^1 \{4y^3+6y^2+(2a+b)\}dy$

$=\left[y^4+2y^3+(2a+b)y\right]_0^1$

$=3+2a+b$

이므로 $3+2a+b=a$

$\therefore a+b=-3$ ...... ㉠

또

$$\int_0^1\{f(y)-2g(y)\}dy=\int_0^1\{-8y^3+3y^2+(a-2b)\}dy$$
$$=\Big[-2y^4+y^3+(a-2b)y\Big]_0^1$$
$$=a-2b-1$$

이므로 $a-2b-1=b$

$\therefore a-3b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-1$ ⋯→ ❶

따라서 $f(x)=3x^2-2,\ g(x)=4x^3-1$이므로

$f(0)g(0)=-2\cdot(-1)=2$ ⋯→ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	80 %
❷ $f(0)g(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

49 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$a^2-3a=0,\quad a(a-3)=0\quad \therefore a=3\ (\because a>0)$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-3\quad \therefore f(1)=-1$

$\therefore a+f(1)=3+(-1)=2$ 답 ③

50 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면 $f(-2)=0$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+4x$

따라서 $f'(-2)=-4$이므로

$f(-2)+f'(-2)=-4$ 답 -4

51 $\displaystyle\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3-kx^2-5$에서

$\displaystyle\int_1^x f'(t)dt=x^3-kx^2-5$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-k-5=0\quad \therefore k=-4$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-2kx=3x^2+8x$

$\therefore f'(k)=f'(-4)=16$ 답 ③

52 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^3-(x+1)\}-(x^3-x)=3x^2+3x$

$$\therefore \int_0^4 f'(x)dx=\int_0^4(3x^2+3x)dx$$
$$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^4=88$$

답 88

53 주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$3a^2-a^2-8=0,\quad a^2=4\quad \therefore a=2\ (\because a>0)$ ⋯→ ❶

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-a=6x-2$

따라서 $f(a)=f(2)=10$이므로 ⋯→ ❷

$\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{10}{2}=5$ ⋯→ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(a)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\dfrac{f(a)}{a}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

54 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-2$ …… ㉠

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=4x^3-9x^2+2xf(x)$

$x^2f'(x)=4x^3-9x^2\quad \therefore f'(x)=4x-9$

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x-9)dx=2x^2-9x+C$$

이므로 ㉠에서 $2-9+C=-2\quad \therefore C=5$

따라서 $f(x)=2x^2-9x+5$이므로 $f(k)=31$에서

$2k^2-9k+5=31,\quad 2k^2-9k-26=0$

$(k+2)(2k-13)=0\quad \therefore k=-2\ (\because k$는 정수$)$ 답 ④

55 $\displaystyle\int_{-1}^x(x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+3x+1$의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $-1+a-3+1=0\quad \therefore a=3$

$\displaystyle\int_{-1}^x(x-t)f(t)dt=x^3+3x^2+3x+1$에서

$$x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt=x^3+3x^2+3x+1$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+6x+3$$
$$\therefore \int_{-1}^x f(t)dt=3x^2+6x+3$$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+6\quad \therefore b=f(0)=6$

$\therefore a+b=9$ 답 9

56 $\displaystyle\int_1^x(x-t)f(t)dt=x^3+2x^2-3x$에서

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3+2x^2-3x$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+4x-3$$
$$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2+4x-3$$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+4\quad \therefore f(2)=16$ 답 ⑤

57 $\displaystyle\int_0^x(x-t)f'(t)dt=x^4+x^3+x^2$에서

$$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=x^4+x^3+x^2$$

앞의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x) = 4x^3+3x^2+2x$$

$$\int_0^x f'(t)dt = 4x^3+3x^2+2x, \qquad \Big[f(t)\Big]_0^x = 4x^3+3x^2+2x$$

$\therefore f(x)-f(0)=4x^3+3x^2+2x$

이때 $f(0)=-1$이므로

$f(x)=4x^3+3x^2+2x-1$ 답 $f(x)=4x^3+3x^2+2x-1$

58 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-16+12a+b=0 \qquad \therefore 12a+b=16$ …… ㉠

$\int_2^x (x-t)f(t)dt = -2x^3+6ax+b$에서

$$x\int_2^x f(t)dt - \int_2^x tf(t)dt = -2x^3+6ax+b$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = -6x^2+6a$$

$$\therefore \int_2^x f(t)dt = -6x^2+6a$$

위의 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-24+6a=0 \qquad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$48+b=16 \qquad \therefore b=-32$ ⋯ ❶

따라서 $\int_2^x f(t)dt=-6x^2+24$이므로 이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\quad f(x)=-12x$

$\therefore f(-1)=12$ ⋯ ❷

$\therefore af(-1)+b=4\cdot 12+(-32)=16$ ⋯ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $f(-1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $af(-1)+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

59 $f(x)=\int_0^x (3t^2+at+b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 5를 가지므로

$f(-1)=5,\ f'(-1)=0$

이때

$$f(-1)=\int_0^{-1}(3t^2+at+b)dt = \left[t^3+\frac{1}{2}at^2+bt\right]_0^{-1}$$

$$=-1+\frac{1}{2}a-b$$

이므로 $\quad -1+\frac{1}{2}a-b=5$

$\therefore a-2b=12$ …… ㉠

$f'(-1)=0$에서 $\quad 3-a+b=0$

$\therefore a-b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-6,\ b=-9$

$\therefore ab=54$ 답 ④

60 $f(x)=\int_0^x (t^2+kt+3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+kx+3$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 가지므로 $\quad f'(3)=0$

$9+3k+3=0, \qquad 3k=-12$

$\therefore k=-4$ 답 -4

61 $f(x)=\int_{-1}^x (-t^2+t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-x^2+x=-x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=1$일 때 극대이므로 극댓값 a는

$$a=f(1)=\int_{-1}^1(-t^2+t)dt=2\int_0^1(-t^2)dt$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=-\frac{2}{3}$$

또 $x=0$일 때 극소이므로 극솟값 b는

$$b=f(0)=\int_{-1}^0(-t^2+t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0=-\frac{5}{6}$$

$\therefore a-b=\frac{1}{6}$ 답 ①

62 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=a$

즉 $f(x)$는 $x=a$일 때 극대, $x=1$일 때 극소이다. ⋯ ❶

이때 $f(x)$의 극솟값이 $-\frac{7}{6}$이므로

$$f(1)=\int_0^1(t-1)(t-a)dt$$

$$=\int_0^1\{t^2-(a+1)t+a\}dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+1}{2}t^2+at\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{a+1}{2}+a$$

$$=\frac{3a-1}{6}=-\frac{7}{6}$$

$3a-1=-7 \qquad \therefore a=-2$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)$는 $x=-2$일 때 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f(-2)=\int_0^{-2}(t-1)(t+2)dt$$

$$=\int_0^{-2}(t^2+t-2)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^{-2}=\frac{10}{3}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{10}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$는 $x=a$일 때 극대임을 알 수 있다.	20 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	40 %

63 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)=x^3-27x+9a$$

이므로 사차함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 삼차방정식 $F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근을 가져야 한다.

이때 $f'(x)=3x^2-27=3(x+3)(x-3)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=3$

즉 $\underbrace{f(-3)f(3)\ge 0}_{(\text{극댓값})\times(\text{극솟값})\ge 0}$이어야 하므로

$(9a+54)(9a-54)\ge 0,\quad (a+6)(a-6)\ge 0$

$\therefore a\le -6$ 또는 $a\ge 6$

따라서 양수 a의 최솟값은 6이다.

답 6

쎈B특강

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $F(x)$의 도함수를 $f(x)$라 할 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 근과 사차함수 $F(x)$의 관계는 다음과 같다.

① $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는다.
➡ $F(x)$는 극솟값만 갖는다.
② $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는다.
➡ $F(x)$는 극솟값만 갖는다.
③ $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.
➡ $F(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

64 $f(x)=\int_x^{x+1}(t^2+t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\{(x+1)^2+(x+1)\}-(x^2+x)$$
$$=2x+2=2(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

이때

$$f(-2)=\int_{-2}^{-1}(t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{-2}^{-1}=\frac{5}{6},$$

$$f(-1)=\int_{-1}^{0}(t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{6},$$

$$f(2)=\int_{2}^{3}(t^2+t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_{2}^{3}=\frac{53}{6}$$

이므로 $-2\le x\le 2$에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{53}{6}$, 최솟값은 $-\frac{1}{6}$이다.

즉 $M=\frac{53}{6}$, $m=-\frac{1}{6}$이므로

$M-m=9$

답 ②

65 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

$$=\int_{-a}^{0}(-2x-3)dx+\int_0^a(x^2-2x-3)dx$$
$$=\left[-x^2-3x\right]_{-a}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_0^a$$
$$=a^2-3a+\frac{1}{3}a^3-a^2-3a$$
$$=\frac{1}{3}a^3-6a \quad \cdots ❶$$

이때 $g(a)=\frac{1}{3}a^3-6a$라 하면

$g'(a)=a^2-6=(a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6})$

$g'(a)=0$에서 $\quad a=\sqrt{6}\ (\because a>0)$

따라서 $g(a)$는 $a=\sqrt{6}$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$g(\sqrt{6})=-4\sqrt{6} \quad \cdots ❷$

a	0	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		↘	$-4\sqrt{6}$	↗

답 $-4\sqrt{6}$

채점 기준	비율
❶ $\int_{-a}^{a}f(x)dx$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\int_{-a}^{a}f(x)dx$의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

66 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=-\frac{1}{6}x^4+2x^3+x^2$에서

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=-\frac{1}{6}x^4+2x^3+x^2$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-\frac{2}{3}x^3+6x^2+2x$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt=-\frac{2}{3}x^3+6x^2+2x \quad \cdots ❶$$

위의 등식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-2x^2+12x+2 \quad \cdots ❷$

즉 $f(x)=-2(x-3)^2+20$이므로 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 20을 갖는다. $\cdots ❸$

답 20

채점 기준	비율
❶ $\int_0^x f(t)dt$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

67 $f(x)=\int_{-2}^{x}(|t|-2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=|x|-2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 0\le x\le 4)$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f(2)=\int_{-2}^{2}(|t|-2)dt=2\int_{0}^{2}(|t|-2)dt$$

$y=|x|-2$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 우함수이다.

$$=2\int_{0}^{2}(t-2)dt$$

$$=2\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^2$$

$$=2\cdot(-2)=-4$$

답 ①

68 주어진 그래프에 의하여

$F(x)=a(x+2)(x-1)=a(x^2+x-2)\ (a>0)$

라 하면 $\int_{1}^{x}f(t)dt=a(x^2+x-2)$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=a(2x+1)$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 10)$을 지나므로 $f(2)=10$

$5a=10 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(2x+1)$이므로

$f(-1)=-2$

답 ②

69 주어진 그래프에 의하여

$f(x)=ax(x-4)\ (a<0)$

라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이고, $f(x)$의 최댓값이 2이므로 $f(2)=2$에서

$-4a=2 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x(x-4)=-\frac{1}{2}x^2+2x$ ··· ❶

$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

따라서 $F(x)$는 $x=4$에서 극대이므로 극댓값은

$F'(4)=0$이고, $x=4$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호가 양 → 음이다.

$$F(4)=\int_{0}^{4}f(t)dt=\int_{0}^{4}\left(-\frac{1}{2}t^2+2t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{6}t^3+t^2\right]_0^4=\frac{16}{3}$$ ··· ❷

답 $\frac{16}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $F(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	60 %

70 주어진 그래프에 의하여

$f(x)=a(x+1)(x-1)(x-3)\ (a<0)$

이라 하면 $f(0)=-3$이므로

$3a=-3 \quad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-(x+1)(x-1)(x-3)$

$g(x)=\int_{2}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이므로

$g'(1)=0$이고, $x=1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음 → 양이다.

$\alpha=1$

$\therefore g(\alpha)=g(1)$

$$=\int_{2}^{1}f(t)dt=-\int_{1}^{2}f(t)dt$$

$$=-\int_{1}^{2}\{-(t+1)(t-1)(t-3)\}dt$$

$$=\int_{1}^{2}(t^3-3t^2-t+3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4-t^3-\frac{1}{2}t^2+3t\right]_1^2$$

$$=0-\frac{7}{4}=-\frac{7}{4}$$

$\therefore \alpha-g(\alpha)=\frac{11}{4}$

답 ④

71 주어진 그래프에 의하여

$f(x)=a(x-3)(x-6)\ (a>0)$

이라 하고, $g(x)=\int_{x}^{x+1}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f(x+1)-f(x)$$
$$=a(x-2)(x-5)-a(x-3)(x-6)$$
$$=a(x^2-7x+10-x^2+9x-18)$$
$$=2a(x-4)$$

$g'(x)=0$에서 $x=4$

따라서 $g(x)$는 $x=4$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $g(4)$이다.

x	···	4	···
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

답 ⑤

72 $S(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$S'(x)=f(x)$

$S'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$ ($\because 0\le x\le 4$)

x	0	···	2	···	4
$S'(x)$		$+$	0	$-$	0
$S(x)$		↗	극대	↘	

이때

$S(0)=\int_{0}^{0}f(t)dt=0,$

$S(2)=\int_{0}^{2}f(t)dt=4,$

$S(4)=\int_{0}^{4}f(t)dt=\int_{0}^{2}f(t)dt+\int_{2}^{4}f(t)dt$

$=4+(-2)=2$

이므로 구간 $[0,\ 4]$에서 $S(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.

따라서 구하는 합은

$4+0=4$

답 4

73 $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

이므로 $f(x)$는 $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$의 도함수이다.

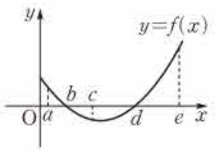
그런데 주어진 그래프에서 함수 $F(x)$가

$0\le x\le b$에서 증가하므로 $\quad f(x)\ge 0$

$b\le x\le d$에서 감소하므로 $\quad f(x)\le 0$

$x\ge d$에서 증가하므로 $\quad f(x)\ge 0$

따라서 $x\ge 0$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ, ㄴ. $f(a)>0$, $f(b)=0$, $f(c)<0$, $f(d)=0$, $f(e)>0$에서

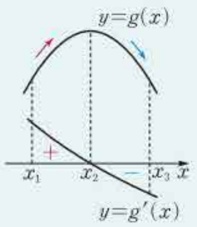
$f(a)f(c)<0$

ㄷ. $d<x<e$일 때, $f(x)>0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

쎈B특강

미분가능한 함수 $g(x)$가 $x_1\le x\le x_2$에서 증가하면 $g'(x)\ge 0$이고, $x_2\le x\le x_3$에서 감소하면 $g'(x)\le 0$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소에 따른 $y=g'(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



74 $f(x)=\int_0^x (5t^2-2t+7)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=5x^2-2x+7$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f'(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=f'(0)=7$ 답 7

75 $f(x)=x^3-2x^2$, $F'(x)=f(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_3^{3+2h}(x^3-2x^2)dx=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_3^{3+2h}f(x)dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(3+2h)-F(3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(3+2h)-F(3)}{2h}\cdot 2$

$=2F'(3)=2f(3)$

$=2\cdot 9=18$ 답 ②

76 $f(x)=3x^2-x+a$, $F'(x)=f(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-5h}^{1+h}(3x^2-x+a)dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-5h}^{1+h}f(x)dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1-5h)}{h}$ ⋯ ❶

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{F(1+h)-F(1)\}-\{F(1-5h)-F(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F(1-5h)-F(1)}{-5h}\cdot 5$

$=F'(1)+5F'(1)=6F'(1)$ ⋯ ❷

$=6f(1)=6(2+a)=6a+12$

따라서 $6a+12=10$이므로

$a=-\frac{1}{3}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 $F(x)$를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 주어진 등식의 좌변을 $F'(1)$을 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

77 $f(t)=|t+3a|$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x |t+3a|dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=F'(0)=f(0)$

$=|3a|=3a\ (\because a>0)$

따라서 $3a=2a^2-9$이므로

$2a^2-3a-9=0,\quad (2a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 ③

78 $F'(x)=f(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-1}^{-1+h}f(x)dx=\lim_{h\to 0}\frac{F(-1+h)-F(-1)}{h}$

$=F'(-1)=f(-1)$

따라서 $f(-1)=8$이므로

$1-a+b=8 \quad \therefore a-b=-7$ ⋯⋯ ㉠

또 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{4}{3}$에서 $\quad \int_0^1 (x^2+ax+b)dx=\frac{4}{3}$

$\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^1=\frac{4}{3}$

$\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=\frac{4}{3} \quad \therefore a+2b=2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-4$, $b=3$

$\therefore ab=-12$ 답 -12

79 $F'(t)=f(t)$라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_x^2 f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{x-2}\int_2^x f(t)dt$

$=-\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$=-F'(2)=-f(2)$

$=-9$ 답 ①

80 $F'(t)=f(t)$라 하면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$

$=2F'(1)=2f(1)$

$=2\cdot 5=10$ 답 ②

81 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{1}{x^3+8}\int_{-2}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to-2}\frac{F(x)-F(-2)}{x-(-2)}\cdot\frac{1}{x^2-2x+4}$$
$$=\frac{1}{12}F'(-2)=\frac{1}{12}f(-2)$$
$$=\frac{-20+a}{12}$$

따라서 $\frac{-20+a}{12}=-2$이므로

$a=-4$

답 -4

82 $f(t)=t(t-k^2)$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}t(t-k^2)dt=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}$$
$$=F'(-1)=f(-1)$$
$$=k^2+1 \quad \cdots\cdots ❶$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}t(t-k^2)dt\right\}=\sum_{k=1}^{10}(k^2+1)$$
$$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+10$$
$$=395 \quad \cdots\cdots ❷$$

답 395

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x}t(t-k^2)dt$를 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

83 $\lim_{x\to3}\frac{\int_3^x f(t)dt-f(x)}{x^2-9}=2$에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\left\{\int_3^x f(t)dt-f(x)\right\}=0$이므로

$f(3)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to3}\frac{\int_3^x f(t)dt-f(x)}{x^2-9}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)-\{f(x)-f(3)\}}{(x-3)(x+3)}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}-\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{1}{6}F'(3)-\frac{1}{6}f'(3)=\frac{1}{6}f(3)-\frac{1}{6}f'(3)$$
$$=-\frac{1}{6}f'(3)\ (\because ㉠)$$

따라서 $-\frac{1}{6}f'(3)=2$이므로

$f'(3)=-12$

답 ③

09 정적분의 활용

Ⅲ. 다항함수의 적분법

개념 정리

본책 116쪽

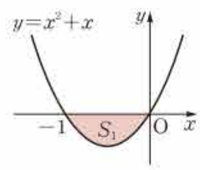
❶ $|f(x)|$ ❷ $|f(x)-g(x)|$ ❸ $v(t)$

❹ $\int_a^b v(t)dt$ ❺ $\int_a^b |v(t)|dt$

쎈 유형 뽀개기

본책 117쪽

01 곡선 $y=x^2+x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+x=0$에서

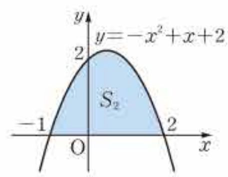


$x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

$$\therefore S_1=\int_{-1}^{0}\{-(x^2+x)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{6}$$

곡선 $y=-x^2+x+2$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+x+2=0$에서



$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$$\therefore S_2=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{9}{2}$$

$\therefore 6(S_1+S_2)=6\left(\frac{1}{6}+\frac{9}{2}\right)=28$

답 28

다른 풀이 포물선 $y=x(x+1)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

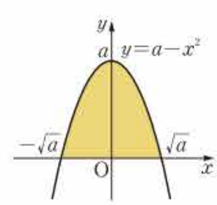
$$S_1=\frac{\{0-(-1)\}^3}{6}=\frac{1}{6}$$

포물선 $y=-(x+1)(x-2)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S_2=\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}=\frac{9}{2}$$

$\therefore 6(S_1+S_2)=28$

02 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$2\int_0^{\sqrt{a}}(a-x^2)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+ax\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

따라서 $\frac{4}{3}a\sqrt{a}=\frac{32}{3}$이므로

$a\sqrt{a}=8,\quad a^3=64$

$\therefore a=4$

답 ④

03 $y=x^2+2|x|-3=\begin{cases} x^2+2x-3 & (x\ge 0) \\ x^2-2x-3 & (x\le 0) \end{cases}$

함수 $y=x^2+2|x|-3$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

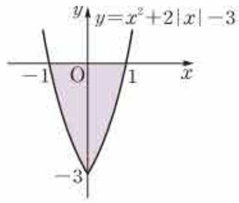
(i) $x\ge 0$일 때, $x^2+2x-3=0$에서

$$(x+3)(x-1)=0 \qquad \therefore x=1\ (\because x\ge 0)$$

(ii) $x\le 0$일 때, $x^2-2x-3=0$에서

$$(x+1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-1\ (\because x\le 0)$$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{0}\{-(x^2-2x-3)\}dx$$
$$+\int_{0}^{1}\{-(x^2+2x-3)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{0}(x^2-2x-3)dx$$
$$-\int_{0}^{1}(x^2+2x-3)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{5}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{10}{3}$$

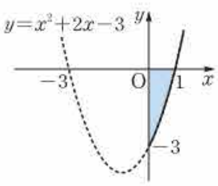
답 ②

다른 풀이 $f(x)=x^2+2|x|-3$이라 하면

$$f(-x)=(-x)^2+2|-x|-3$$
$$=x^2+2|x|-3$$
$$=f(x)$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

오른쪽 그림에서 $x\ge 0$일 때 $y=x^2+2|x|-3$, 즉 $y=x^2+2x-3$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{0}^{1}\{-(x^2+2x-3)\}dx$$
$$=-\int_{0}^{1}(x^2+2x-3)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_{0}^{1}=\frac{5}{3}$$

따라서 구하는 넓이는

$$2\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$$

04 $f(x)=ax^2(x+3)\ (a>0)$이라 하면 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-3}^{0}ax^2(x+3)dx=a\int_{-3}^{0}(x^3+3x^2)dx$$
$$=a\left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_{-3}^{0}$$
$$=\frac{27}{4}a \qquad \cdots ❶$$

따라서 $\frac{27}{4}a=9$이므로

$$a=\frac{4}{3} \qquad \cdots ❷$$
$$\therefore f(x)=\frac{4}{3}x^2(x+3) \qquad \cdots ❸$$

답 $f(x)=\frac{4}{3}x^2(x+3)$

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	10 %

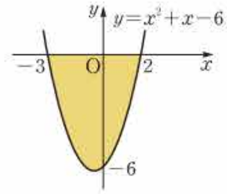
05 $xf(x)=\int_{0}^{x}tf'(t)dt+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=xf'(x)+x^2+x-6$$
$$\therefore f(x)=x^2+x-6$$

곡선 $y=x^2+x-6$과 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+x-6=0$에서

$$(x+3)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-3}^{2}\{-(x^2+x-6)\}dx$$
$$=-\int_{-3}^{2}(x^2+x-6)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\right]_{-3}^{2}$$
$$=-\left(-\frac{22}{3}-\frac{27}{2}\right)=\frac{125}{6}$$

답 $\frac{125}{6}$

06 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2S_2=S_1+S_3$$

이때

$$S_2=\int_{1}^{4}\{-(x^2-5x+4)\}dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_{1}^{4}$$
$$=-\left(-\frac{8}{3}-\frac{11}{6}\right)=\frac{9}{2}$$

이므로 $\quad S_1+S_3=2\cdot\frac{9}{2}=9$

답 ④

쎈B 특강

등차중항과 등비중항

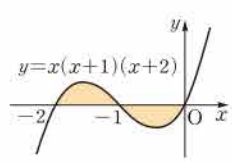
① 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라 하고 $b=\frac{a+c}{2}$가 성립한다.

② 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라 하고 $b^2=ac$가 성립한다.

07 $y=x(x+1)(x+2)$에서

$$y=x^3+3x^2+2x$$

따라서 구하는 넓이는



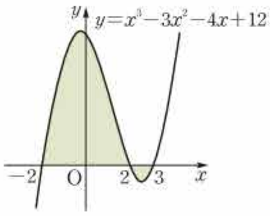
$$\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx$$
$$+\int_{-1}^{0}(-x^3-3x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ③

08 곡선 $y=x^3-3x^2-4x+12$와 x축의 교점의 x좌표는
$x^3-3x^2-4x+12=0$에서

$(x+2)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}(x^3-3x^2-4x+12)dx+\int_{2}^{3}(-x^3+3x^2+4x-12)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-3x^2+12)dx+\int_{2}^{3}(-x^3+3x^2+4x-12)dx$$
$$=2\Big[-x^3+12x\Big]_0^2+\Big[-\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2-12x\Big]_2^3$$
$$=2\cdot16+\frac{3}{4}=\frac{131}{4}$$

답 $\frac{131}{4}$

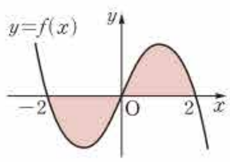
09 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(-\frac{3}{2}x^2+2\right)dx$

$$=-\frac{1}{2}x^3+2x+C$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^3+2x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $-\frac{1}{2}x^3+2x=0$에서



$\frac{1}{2}x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x^3-2x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^3+2x\right)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{8}x^4-x^2\Big]_{-2}^0+\Big[-\frac{1}{8}x^4+x^2\Big]_0^2$$
$$=2+2=4$$

답 ②

참고 곡선 $y=f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로

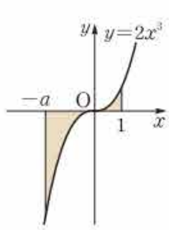
$$\int_{-2}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{2}\{-f(x)\}dx=-\int_{0}^{2}f(x)dx$$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를

$$\int_{-2}^{0}\{-f(x)\}dx+\int_{0}^{2}f(x)dx=2\int_{0}^{2}f(x)dx=2\cdot2=4$$

와 같이 구할 수도 있다.

10 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{-a}^{0}(-2x^3)dx+\int_{0}^{1}2x^3dx \quad \cdots ❶$$
$$=\Big[-\frac{1}{2}x^4\Big]_{-a}^0+\Big[\frac{1}{2}x^4\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}a^4+\frac{1}{2} \quad \cdots ❷$$

따라서 $\frac{1}{2}a^4+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$이므로 $a^4=16$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) $\cdots$ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 색칠한 부분의 넓이를 적분 기호를 사용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 색칠한 부분의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

11 $S_1=\int_{a}^{0}(-4x^3)dx=\Big[-x^4\Big]_a^0=a^4$

$S_2=\int_{0}^{b}4x^3dx=\Big[x^4\Big]_0^b=b^4$

이때 $|a|=\frac{1}{2}b$이므로

$a^4=\frac{1}{16}b^4$

$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{b^4}{\frac{1}{16}b^4}=16$

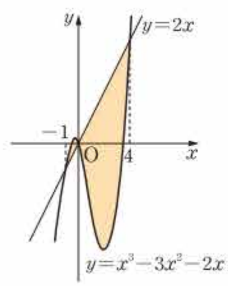
답 ③

12 곡선 $y=x^3-3x^2-2x$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는
$x^3-3x^2-2x=2x$에서

$x^3-3x^2-4x=0$

$x(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(x^3-3x^2-2x)-2x\}dx+\int_{0}^{4}\{2x-(x^3-3x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2-4x)dx+\int_{0}^{4}(-x^3+3x^2+4x)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2\Big]_{-1}^0+\Big[-\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2\Big]_0^4$$
$$=\frac{3}{4}+32=\frac{131}{4}$$

답 ④

13 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는
$-x^2+3x=x$에서

$x^2-2x=0,\quad x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$$\therefore S_1=\int_{0}^{2}\{(-x^2+3x)-x\}dx$$
$$=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_0^2$$
$$=\frac{4}{3}$$

곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 S_1+S_2

$$\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_0^3=\frac{9}{2}$$

이므로

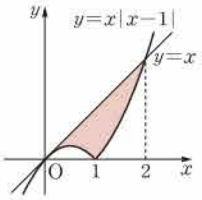
$S_2=\frac{9}{2}-\frac{4}{3}=\frac{19}{6}$

$\therefore S_2-S_1=\frac{19}{6}-\frac{4}{3}=\frac{11}{6}$

답 $\frac{11}{6}$

14 $y=x|x-1|=\begin{cases} x^2-x & (x\ge1) \\ -x^2+x & (x\le1) \end{cases}$

함수 $y=x|x-1|$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



(i) $x\ge1$일 때,

$x^2-x=x$에서 $\quad x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x\ge1$)

(ii) $x\le1$일 때,

$-x^2+x=x$에서 $\quad x^2=0$

$\therefore x=0$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{x-(-x^2+x)\}dx+\int_1^2\{x-(x^2-x)\}dx$$

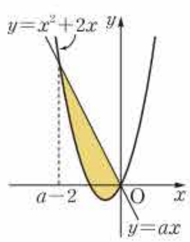
$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(-x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

답 ③

15 곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2+2x=ax$에서



$x^2+(2-a)x=0$

$x(x+2-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a-2$ ⋯ ❶

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{a-2}^0\{ax-(x^2+2x)\}dx=\int_{a-2}^0\{-x^2+(a-2)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a-2}{2}x^2\right]_{a-2}^0$$

$$=-\frac{1}{6}(a-2)^3 \quad ⋯ ❷$$

즉 $-\frac{1}{6}(a-2)^3=36$이므로

$(a-2)^3=-216, \qquad a-2=-6$

$\therefore a=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

16 $S_1=\int_0^2\frac{1}{4}x^2dx=\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^2=\frac{2}{3}$

곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 직선 $y=k^2$의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{4}x^2=k^2$에서

$x^2-4k^2=0, \qquad (x+2k)(x-2k)=0$

$\therefore x=-2k$ 또는 $x=2k$

이때 $k>1$이므로 $\qquad x=\underbrace{2k}_{2k>2}$

$$\therefore S_2=\int_2^{2k}\left(k^2-\frac{1}{4}x^2\right)dx$$

$$=\left[k^2x-\frac{1}{12}x^3\right]_2^{2k}$$

$$=\frac{4}{3}k^3-2k^2+\frac{2}{3}$$

이때 $S_1=S_2$이므로

$\frac{2}{3}=\frac{4}{3}k^3-2k^2+\frac{2}{3}, \qquad \frac{4}{3}k^3-2k^2=0$

$\frac{4}{3}k^2\left(k-\frac{3}{2}\right)=0 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$ ($\because k>1$)

답 ③

17 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 0, 1, 3이므로 삼차방정식 $g(x)-f(x)=0$의 세 근은 0, 1, 3이다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $g(x)-f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다. 즉

$g(x)-f(x)=ax(x-1)(x-3)$

$=a(x^3-4x^2+3x)$ $(a<0)$ ⋯ ❶

라 하면 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_1^3\{g(x)-f(x)\}dx=\int_1^3a(x^3-4x^2+3x)dx$$

$$=a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^3$$

$$=-\frac{8}{3}a$$

즉 $-\frac{8}{3}a=4$이므로

$a=-\frac{3}{2}$ ⋯ ❷

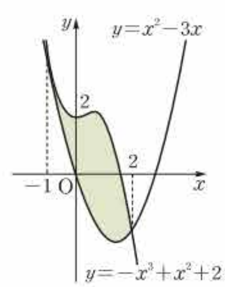
따라서 $g(x)-f(x)=-\frac{3}{2}x(x-1)(x-3)$이므로

$g(2)-f(2)=-\frac{3}{2}\cdot2\cdot1\cdot(-1)=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $g(x)-f(x)$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $g(2)-f(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

18 두 곡선 $y=-x^3+x^2+2$, $y=x^2-3x$의 교점의 x좌표는



$-x^3+x^2+2=x^2-3x$에서

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^2\{(-x^3+x^2+2)-(x^2-3x)\}dx$$

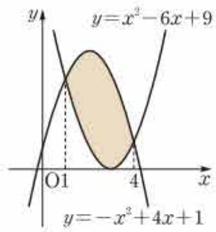
$$=\int_{-1}^2(-x^3+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$$

$$=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}$$

답 ④

19 두 곡선 $y=x^2-6x+9$, $y=-x^2+4x+1$의 교점의 x좌표는 $x^2-6x+9=-x^2+4x+1$에서



$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^4 \{(-x^2+4x+1)-(x^2-6x+9)\}dx$$
$$=\int_1^4 (-2x^2+10x-8)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4$$
$$=\frac{16}{3}-\left(-\frac{11}{3}\right)=9$$

답 ③

20 $\int_{-7}^{5} \{f(x)-g(x)\}dx$

$$=\int_{-7}^{-4}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{-4}^{0}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{0}^{5}\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=-\int_{-7}^{-4}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{-4}^{0}\{f(x)-g(x)\}dx-\int_{0}^{5}\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=-4+6-11=-9$$

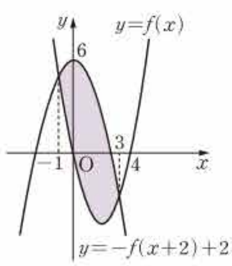
답 -9

21 $y=-f(x+2)+2$

$=-\{(x+2)^2-4(x+2)\}+2$

$=-x^2+6$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x+2)+2$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=-x^2+6$에서



$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

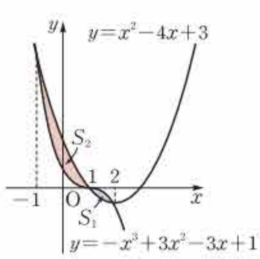
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{3}\{(-x^2+6)-(x^2-4x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}$$
$$=18-\left(-\frac{10}{3}\right)=\frac{64}{3}$$

답 ④

22 두 곡선 $y=-x^3+3x^2-3x+1$, $y=x^2-4x+3$의 교점의 x좌표는 $-x^3+3x^2-3x+1=x^2-4x+3$에서



$x^3-2x^2-x+2=0$

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ ⋯ ❶

$\therefore S_2-S_1$

$$=\int_{-1}^{1}\{(x^2-4x+3)-(-x^3+3x^2-3x+1)\}dx-\int_{1}^{2}\{(-x^3+3x^2-3x+1)-(x^2-4x+3)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)dx-\int_{1}^{2}(-x^3+2x^2+x-2)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx-\int_{1}^{2}(-x^3+2x^2+x-2)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1-\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^2$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{5}{12}=\frac{9}{4}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{9}{4}$

채점 기준	비율
❶ 두 곡선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ S_2-S_1의 값을 구할 수 있다.	70 %

23 곡선 $y=-x^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은

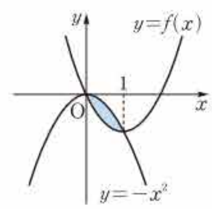
$y=x^2$

이 곡선을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$y=(x-1)^2-1$

$\therefore f(x)=(x-1)^2-1=x^2-2x$

두 곡선 $y=-x^2$, $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 $-x^2=x^2-2x$에서



$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

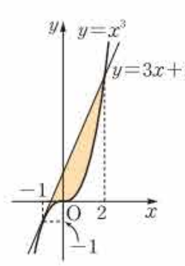
따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{-x^2-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_0^1(-2x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 ④

24 $y=x^3$에서 $y'=3x^2$

즉 곡선 위의 점 $(-1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $3\cdot(-1)^2=3$이므로 접선의 방정식은



$y+1=3(x+1)$

$\therefore y=3x+2$

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x+2$의 교점의 x좌표는 $x^3=3x+2$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x-2)(x+1)^2=0$

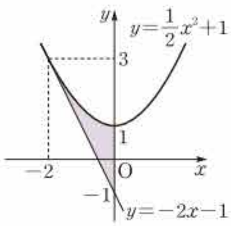
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 앞의 그림에서 색칠한 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{2}\{(3x+2)-x^3\}dx=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=6-\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{27}{4}$$
$$\therefore 4S=4\cdot\frac{27}{4}=27$$

답 27

25 $y=\frac{1}{2}x^2+1$에서



$y'=x$

즉 곡선 위의 점 $(-2, 3)$에서의 접선의 기울기는 -2이므로 접선의 방정식은

$y-3=-2(x+2)$

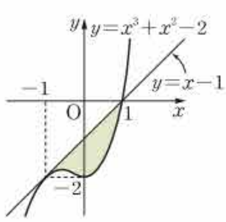
$\therefore y=-2x-1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)-(-2x-1)\right\}dx=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+2\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^3+x^2+2x\right]_{-2}^{0}$$
$$=\frac{4}{3}$$

답 ④

26 $y=x^3+x^2-2$에서



$y'=3x^2+2x$

즉 곡선 위의 점 $(-1, -2)$에서의 접선의 기울기는

$3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)=1$

이므로 접선의 방정식은

$y+2=1\cdot(x+1)$

$\therefore y=x-1$ ⋯ ❶

곡선 $y=x^3+x^2-2$와 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는

$x^3+x^2-2=x-1$에서

$x^3+x^2-x-1=0, \quad (x+1)^2(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ ⋯ ❷

따라서 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(x-1)-(x^3+x^2-2)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-x^3-x^2+x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

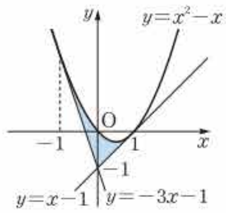
즉 $p=3$, $q=4$이므로

$p+q=7$ ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 곡선과 접선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	50 %

27 $y=x^2-x$에서



$y'=2x-1$

접점의 좌표를 (t, t^2-t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2t-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-t)=(2t-1)(x-t)$

$\therefore y=(2t-1)x-t^2$ ⋯⋯ ㉠

이 직선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=-t^2, \quad t^2-1=0$

$(t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

(i) $t=-1$일 때, ㉠에서 $\quad y=-3x-1$

(ii) $t=1$일 때, ㉠에서 $\quad y=x-1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(x^2-x)-(-3x-1)\}dx+\int_{0}^{1}\{(x^2-x)-(x-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ③

쎈B특강

곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 (x_1, y_1)에서 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 한다.
(ii) 접선의 기울기 $f'(t)$를 구한다.
(iii) 직선 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$가 점 (x_1, y_1)을 지남을 이용하여 t의 값을 구한다.
(iv) t의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입한다.

28 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선이고, 직선 $y=g(x)$와 곡선 $y=f(x)$가 원점에서 만나므로 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$은 중근 $x=2$와 다른 한 근 $x=0$을 갖는다.

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로

$f(x)-g(x)=3x(x-2)^2=3x^3-12x^2+12x$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{0}^{2}(3x^3-12x^2+12x)dx$$
$$=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=4$$

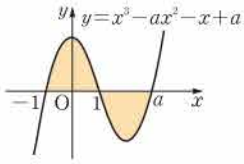
답 ①

29 곡선 $y=x^3-ax^2-x+a$와 x축의 교점의 x좌표는
$x^3-ax^2-x+a=0$에서

$(x+1)(x-1)(x-a)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_{-1}^{a}(x^3-ax^2-x+a)dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^{a}=0$$

$$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^4-\frac{1}{2}a^2+a^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}-a\right)=0$$

$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}=0$$

$$a^4-6a^2-8a-3=0, \qquad (a+1)^3(a-3)=0$$

$\therefore$ $a=3$ ($\because$ $a>1$) 답 ②

30 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{0}^{3}\{(9-x^2)-k\}dx=0$$

즉 $\int_{0}^{3}(-x^2+9-k)dx=0$이므로

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+9x-kx\right]_{0}^{3}=0$$

$18-3k=0$ $\qquad\therefore$ $k=6$ 답 ③

31 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{0}^{4}\{x^2(x-4)-ax(x-4)\}dx=0$$

즉 $\int_{0}^{4}\{x^3-(a+4)x^2+4ax\}dx=0$이므로

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+4}{3}x^3+2ax^2\right]_{0}^{4}=0$$

$$64-\frac{64(a+4)}{3}+32a=0$$

$32a-64=0$ $\qquad\therefore$ $a=2$ 답 ⑤

32 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{0}^{1}[x(x-a)(x-1)-\{-x(x-b)(x-1)\}]dx=0$$

즉 $\int_{0}^{1}\{2x^3-(a+b+2)x^2+(a+b)x\}dx=0$이므로

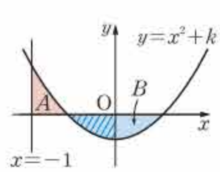
$$\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}(a+b+2)x^3+\frac{1}{2}(a+b)x^2\right]_{0}^{1}=0$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}(a+b+2)+\frac{1}{2}(a+b)=0$$

$\frac{1}{6}(a+b)=\frac{1}{6}$ $\qquad\therefore$ $a+b=1$ 답 1

33 $A : B=1 : 2$에서 $\qquad B=2A$

이때 곡선 $y=x^2+k$가 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B=A$이다. ⋯ ❶



즉 곡선 $y=x^2+k$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=0$으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{-1}^{0}(x^2+k)dx=0 \qquad \cdots ❷$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3+kx\right]_{-1}^{0}=0, \qquad \frac{1}{3}+k=0$$

$$\therefore\ k=-\frac{1}{3} \qquad \cdots ❸$$

답 $-\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ A와 빗금 친 부분의 넓이가 서로 같음을 알 수 있다.	30 %
❷ $\int_{-1}^{0}(x^2+k)dx=0$임을 알 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

34 삼차방정식 $x^3-6x+k=0$의 근 중 가장 큰 값을 α $(\alpha>0)$라 하면

$\alpha^3-6\alpha+k=0$ $\qquad\therefore$ $k=6\alpha-\alpha^3$ ⋯⋯ ㉠

$S_1=S_2$이므로

$$\int_{0}^{\alpha}(x^3-6x+k)dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-3x^2+kx\right]_{0}^{\alpha}=0$$

$$\frac{1}{4}\alpha^4-3\alpha^2+k\alpha=0, \qquad \alpha^4-12\alpha^2+4k\alpha=0$$

$\therefore$ $\alpha^3-12\alpha+4k=0$ ($\because$ $\alpha>0$) ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\alpha^3-12\alpha+4(6\alpha-\alpha^3)=0$$

$$-3\alpha^3+12\alpha=0, \qquad 3\alpha(\alpha+2)(\alpha-2)=0$$

그런데 $\alpha>0$이므로 $\qquad\alpha=2$

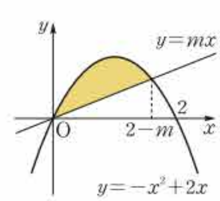
$\therefore$ $k=6\cdot2-2^3=4$ 답 4

35 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는
$-x^2+2x=mx$에서

$x^2+(m-2)x=0, \qquad x(x+m-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2-m$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{2-m}\{(-x^2+2x)-mx\}dx$$

$$=\int_{0}^{2-m}\{-x^2+(2-m)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2-m}{2}x^2\right]_{0}^{2-m}$$

$$=\frac{1}{6}(2-m)^3$$

이때 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}=\frac{4}{3}$$

이므로

$\frac{1}{6}(2-m)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}$ $\qquad\therefore$ $(2-m)^3=4$ 답 ②

36 두 곡선 $y=-x^4-x$, $y=kx(x+1)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(-x^4-x)-kx(x+1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}\{-x^4-kx^2-(k+1)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}kx^3-\frac{1}{2}(k+1)x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{k}{6}+\frac{3}{10}$$

이때 두 곡선 $y=x^4-x^2$, $y=-x^4-x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(-x^4-x)-(x^4-x^2)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-2x^4+x^2-x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{13}{30}$$

이므로

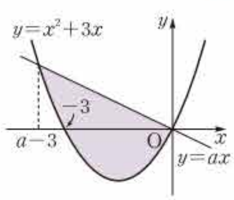
$$\frac{k}{6}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{30}$$
$$\frac{k}{6}=-\frac{1}{12}\qquad\therefore k=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore 10k=-5$$

답 -5

37 곡선 $y=x^2+3x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는
$x^2+3x=ax$에서

$$x^2+(3-a)x=0,\qquad x(x+3-a)=0$$
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a-3 \qquad \cdots ❶$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{a-3}^{0}\{ax-(x^2+3x)\}dx$$
$$=\int_{a-3}^{0}\{-x^2+(a-3)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a-3}{2}x^2\right]_{a-3}^{0}$$
$$=-\frac{1}{6}(a-3)^3 \qquad \cdots ❷$$

이때 곡선 $y=x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-3}^{0}(-x^2-3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0}=\frac{9}{2} \qquad \cdots ❸$$

이므로

$$-\frac{1}{6}(a-3)^3=2\cdot\frac{9}{2},\qquad (a-3)^3=-54$$
$$a^3-9a^2+27a-27=-54$$
$$\therefore a^3-9a^2+27a=-27 \qquad \cdots ❹$$

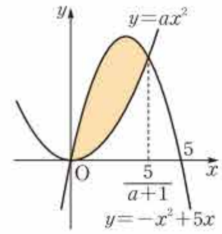
답 -27

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=x^2+3x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 색칠한 부분의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 곡선 $y=x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❹ a^3-9a^2+27a의 값을 구할 수 있다.	20 %

38 두 곡선 $y=-x^2+5x$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는
$-x^2+5x=ax^2$에서

$$(a+1)x^2-5x=0,\qquad x\{(a+1)x-5\}=0$$
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{5}{a+1}$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{\frac{5}{a+1}}\{(-x^2+5x)-ax^2\}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{5}{a+1}}\{-(a+1)x^2+5x\}dx$$
$$=\left[-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_{0}^{\frac{5}{a+1}}$$
$$=\frac{125}{6(a+1)^2}$$

이때 곡선 $y=-x^2+5x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

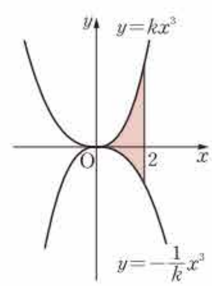
$$\int_{0}^{5}(-x^2+5x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_{0}^{5}=\frac{125}{6}$$

이므로

$$\frac{125}{6(a+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{125}{6},\qquad (a+1)^2=2$$
$$\therefore a=\sqrt{2}-1\ (\because a>0)$$

답 $\sqrt{2}-1$

39 오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=kx^3$, $y=-\frac{1}{k}x^3$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_{0}^{2}\left\{kx^3-\left(-\frac{1}{k}x^3\right)\right\}dx$$
$$=\left(k+\frac{1}{k}\right)\int_{0}^{2}x^3\,dx$$
$$=\left(k+\frac{1}{k}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2}$$
$$=4k+\frac{4}{k}$$

이때 $4k>0$, $\frac{4}{k}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4k+\frac{4}{k}\geq 2\sqrt{4k\cdot\frac{4}{k}}=8\ \left(\text{단, 등호는 } 4k=\frac{4}{k}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 8이다.

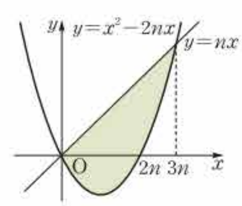
답 ④

쎈B특강

산술평균과 기하평균의 관계
$a>0$, $b>0$일 때,

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\ (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립})$$

40 곡선 $y=x^2-2nx$와 직선 $y=nx$의 교점의 x좌표는
$x^2-2nx=nx$에서



$$x^2-3nx=0$$
$$x(x-3n)=0$$
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3n$$

따라서 앞의 그림에서 색칠한 부분의 넓이 S_n은

$$S_n=\int_0^{3n}\{nx-(x^2-2nx)\}dx$$
$$=\int_0^{3n}(-x^2+3nx)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3n}{2}x^2\right]_0^{3n}$$
$$=\frac{9}{2}n^3$$

즉 $\frac{9}{2}n^3>180$에서 $\quad n^3>40$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4이다. 답 ①

41 곡선 $y=-x^2+kx$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$라 하면

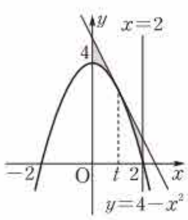
$$S(k)=\int_0^k(-x^2+kx)dx+\int_k^4(x^2-kx)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right]_k^4$$
$$=\frac{1}{6}k^3+\frac{64}{3}-8k+\frac{1}{6}k^3$$
$$=\frac{1}{3}k^3-8k+\frac{64}{3}$$
$$\therefore S'(k)=k^2-8=(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})$$

$S'(k)=0$에서 $\quad k=2\sqrt{2}$ ($\because 0<k<4$)

k	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$	4
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(k)$는 $k=2\sqrt{2}$일 때 최소이다. 답 $2\sqrt{2}$

42 $y=4-x^2$에서 $\quad y'=-2x$



즉 곡선 위의 점 $(t,\ 4-t^2)$에서의 접선의 기울기는 $-2t$이므로 접선의 방정식은

$$y-(4-t^2)=-2t(x-t)$$
$$\therefore y=-2tx+t^2+4 \qquad \cdots ❶$$

위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

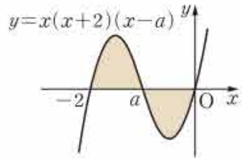
$$\int_0^2\{(-2tx+t^2+4)-(4-x^2)\}dx$$
$$=\int_0^2(x^2-2tx+t^2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{3}-4t+2t^2 \qquad \cdots ❷$$
$$=2(t-1)^2+\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다. $\cdots$ ❸

답 $\frac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 도형의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ 도형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

43 곡선 $y=x(x+2)(x-a)$ $(-2<a<0)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면 오른쪽 그림에서



$$S(a)=\int_{-2}^a x(x+2)(x-a)dx$$
$$+\int_a^0\{-x(x+2)(x-a)\}dx$$
$$=\int_{-2}^a\{x^3+(2-a)x^2-2ax\}dx$$
$$-\int_a^0\{x^3+(2-a)x^2-2ax\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2-a}{3}x^3-ax^2\right]_{-2}^a$$
$$-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2-a}{3}x^3-ax^2\right]_a^0$$
$$=-\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3+\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3\right)$$
$$=-\frac{1}{6}a^4-\frac{2}{3}a^3+\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}$$
$$\therefore S'(a)=-\frac{2}{3}a^3-2a^2+\frac{4}{3}$$
$$=-\frac{2}{3}(a^3+3a^2-2)$$
$$=-\frac{2}{3}(a+1)(a^2+2a-2)$$

$S'(a)=0$에서 $-\frac{2}{3}(a+1)(a^2+2a-2)=0$에서 $a=-1$ 또는 $a=-1\pm\sqrt{3}$

$a=-1$ ($\because -2<a<0$)

a	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(a)$는 $a=-1$일 때 최소이다. 답 -1

44 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$$\int_1^5 f(x)dx=\int_5^9 f(x)dx$$
$$=\int_9^{13} f(x)dx$$
$$=\int_{13}^{17} f(x)dx$$
$$=3$$
$$\therefore \int_1^{17} f(x)dx=\int_1^5 f(x)dx+\int_5^9 f(x)dx+\int_9^{13} f(x)dx$$
$$+\int_{13}^{17} f(x)dx$$
$$=4\cdot 3=12$$

답 ③

45 조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 2x^2\,dx$$
$$=4\int_0^1 x^2\,dx$$
$$=4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{4}{3} \qquad \cdots ❶$$

이때 조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$$\int_{-9}^{9} f(x)dx=9\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$=9\cdot\frac{4}{3}=12 \quad \cdots ❷$$

답 12

채점 기준	비율
❶ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_{-9}^{9} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60 %

46 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+3)$이므로

$$\int_{1}^{2} f(x)dx=\int_{4}^{5} f(x)dx=\int_{7}^{8} f(x)dx$$

$$=\cdots=\int_{2020}^{2021} f(x)dx=\int_{2023}^{2024} f(x)dx=\cdots$$

이상에서 정적분 $\int_{1}^{2} f(x)dx$와 그 값이 항상 같은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

47 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=2\int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$=2\cdot 7=14$$

한편 $f(x-2)=f(x+2)$에 x 대신 $x+2$를 대입하면

$$f(x)=f(x+4)$$

즉 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$$\int_{-6}^{-2} f(x)dx=\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{2}^{6} f(x)dx$$

$$=\int_{6}^{10} f(x)dx=\int_{10}^{14} f(x)dx=14$$

$$\therefore \int_{-6}^{14} f(x)dx=\int_{-6}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{6} f(x)dx$$

$$+\int_{6}^{10} f(x)dx+\int_{10}^{14} f(x)dx$$

$$=5\cdot 14=70$$

답 70

쎈B특강

함수 $f(x)$에 대하여

$f(x-a)=f(x+a) \Longleftrightarrow f(x)=f(x+2a)$

➡ $f(x)$는 주기함수이다.

48 $f(x)=\begin{cases} 1 & (0\le x<1) \\ x & (1\le x<2) \\ -x+4 & (2\le x<3) \end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{3} f(x)dx=\int_{0}^{1} 1\,dx+\int_{1}^{2} x\,dx+\int_{2}^{3} (-x+4)\,dx$$

$$=\Big[x\Big]_{0}^{1}+\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_{1}^{2}+\Big[-\frac{1}{2}x^2+4x\Big]_{2}^{3}$$

$$=1+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=4$$

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{0}^{12} f(x)dx=\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{6} f(x)dx+\int_{6}^{9} f(x)dx$$

$$+\int_{9}^{12} f(x)dx$$

$$=4\cdot 4=16$$

$$\int_{0}^{15} f(x)dx=\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{6} f(x)dx+\int_{6}^{9} f(x)dx$$

$$+\int_{9}^{12} f(x)dx+\int_{12}^{15} f(x)dx$$

$$=5\cdot 4=20$$

따라서 $12<k<15$이므로

$$\int_{0}^{k} f(x)dx=\int_{0}^{12} f(x)dx+\int_{12}^{k} f(x)dx$$

$$17=16+\int_{12}^{k} f(x)dx \qquad \therefore \int_{12}^{k} f(x)dx=1$$

이때

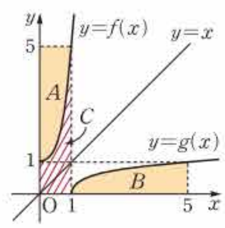
$$\int_{12}^{13} f(x)dx=\int_{9}^{10} f(x)dx=\int_{6}^{7} f(x)dx=\int_{3}^{4} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} 1\,dx=1$$

이므로 $k=13$

답 ⑤

49 함수 $f(x)=4x^3+1\,(x\ge 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림에서

$(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$

이므로

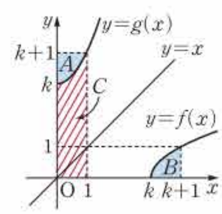
$$\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{5} g(x)dx=(C\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$

$$=(C\text{의 넓이})+(A\text{의 넓이})$$

$$=1\cdot 5=5$$

답 ④

50 함수 $f(x)=\sqrt{x-k}$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. $\cdots$ ❶



오른쪽 그림에서

$(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$ $\cdots$ ❷

이므로

$$\int_{0}^{1} g(x)dx+\int_{k}^{k+1} f(x)dx=(C\text{의 넓이})+(B\text{의 넓이})$$

$$=(C\text{의 넓이})+(A\text{의 넓이})$$

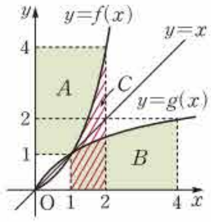
따라서 $1\cdot(k+1)=4$이므로

$k=3$ $\cdots$ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.	40 %
❷ $(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$임을 알 수 있다.	20 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

51 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x(x^2+2)\ (x\ge 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



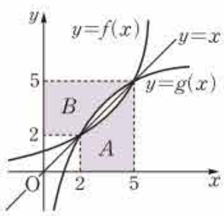
오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned}(B\text{의 넓이})&=(A\text{의 넓이})\\&=2\cdot4-1\cdot1-(C\text{의 넓이})\\&=7-\int_1^2 f(x)dx\\&=7-\int_1^2 \frac{1}{3}x(x^2+2)dx\\&=7-\frac{1}{3}\int_1^2 (x^3+2x)dx\\&=7-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_1^2\\&=7-\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{4}=\frac{19}{4}\end{aligned}$$

$\therefore \int_1^4 g(x)dx=(B\text{의 넓이})=\frac{19}{4}$

답 $\frac{19}{4}$

52 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림에서

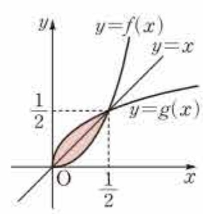
$(A\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$

이므로

$$\begin{aligned}\int_2^5 f(x)dx+\int_2^5 g(x)dx&=A+\int_2^5 g(x)dx\\&=B+\int_2^5 g(x)dx\\&=5^2-2^2=21\end{aligned}$$

답 ②

53 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$2x^2=x$에서 $\quad 2x\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}2\int_0^{\frac{1}{2}}\{x-f(x)\}dx&=2\int_0^{\frac{1}{2}}(x-2x^2)dx\\&=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}\\&=2\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

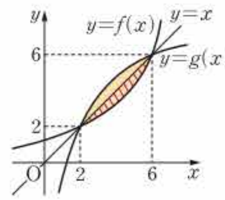
답 ①

쎈B특강

함수와 그 역함수의 그래프의 교점

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이 존재하면 그 교점은 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이다.

54 오른쪽 그림과 같이 구하는 넓이는 직선 $y=x$에 의하여 이등분되고, 빗금 친 부분의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot(6^2-2^2)-\int_2^6 f(x)dx$

$=16-13=3$

따라서 구하는 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배이므로

$2\cdot3=6$

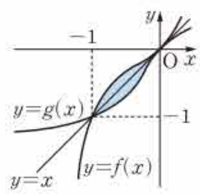
답 6

55 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고

$$f'(x)=3x^2+2x+1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로 $x^3+x^2+x=x$에서



$x^3+x^2=0,\quad x^2(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ ⋯ ❶

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}2\int_{-1}^0\{f(x)-x\}dx&=2\int_{-1}^0(x^3+x^2+x-x)dx\\&=2\int_{-1}^0(x^3+x^2)dx\\&=2\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^0\\&=2\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

⋯ ❷

답 $\frac{1}{6}$

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

56 $t=0$에서의 점 P의 위치가 1이므로 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}1+\int_0^4(5-2t)dt&=1+\left[5t-t^2\right]_0^4\\&=1+4=5\end{aligned}$$

답 ②

57 $t=2$에서의 점 P의 위치가 10이므로

$$0+\int_0^2 (9t^2-2t-k)dt=10$$

$$\left[3t^3-t^2-kt\right]_0^2=10, \qquad 20-2k=10$$

$$\therefore k=5$$ ⋯➊

따라서 $t=2$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_2^3 (9t^2-2t-5)dt=\left[3t^3-t^2-5t\right]_2^3$$
$$=47$$ ⋯➋

답 47

채점 기준	비율
➊ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ $t=2$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구할 수 있다.	50 %

58 $v(t)=0$일 때 용액이 멈추므로

$$6t-2t^2=0, \qquad 2t(3-t)=0$$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$

따라서 $t=3$일 때까지 흘러나온 용액의 양은

$$\pi\cdot 1^2\cdot\int_0^3 (6t-2t^2)dt=\pi\left[3t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^3=9\pi$$

답 ④

쎈B특강

물체의 운동과 속도의 관계

① 움직이던 물체가 정지할 때 ➡ (속도)$=0$

② 움직이던 물체가 운동 방향을 바꿀 때 ➡ (속도)$=0$

59 $$0+\int_0^{15} v(t)dt=\int_0^{10} 3t\,dt+\int_{10}^{15} (50-2t)dt$$
$$=\left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^{10}+\left[50t-t^2\right]_{10}^{15}$$
$$=150+125=275\,(\mathrm{m})$$

따라서 15분 후의 지면으로부터의 열기구의 높이는 275 m이다.

답 275 m

60 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각을 $t=k$라 하면

$$k^2-3k=-3k^2+9k, \qquad 4k^2-12k=0$$

$$4k(k-3)=0 \qquad \therefore k=3\ (\because k>0)$$ ⋯➊

$t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 (t^2-3t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_0^3=-\frac{9}{2}$$

$t=3$에서의 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^3 (-3t^2+9t)dt=\left[-t^3+\frac{9}{2}t^2\right]_0^3=\frac{27}{2}$$ ⋯➋

따라서 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\frac{27}{2}-\left(-\frac{9}{2}\right)=18$$ ⋯➌

답 18

채점 기준	비율
➊ 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각을 구할 수 있다.	30 %
➋ 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점의 위치를 각각 구할 수 있다.	50 %
➌ 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

61 자동차 B가 P 지점을 지나 t초 동안 달린 거리를 x_{B} m라 하면

$$x_{\mathrm{B}}=\int_0^t (2t+1)dt=t^2+t$$

자동차 A가 P 지점을 지나 $(t+1)$초 동안 달린 거리를 x_{A} m라 하면

$$x_{\mathrm{A}}=\underbrace{24(t+1)}_{(\text{거리})=(\text{속력})\times(\text{시간})}$$

두 자동차 A와 B가 만날 때 $x_{\mathrm{A}}=x_{\mathrm{B}}$이므로

$$24(t+1)=t^2+t, \qquad t^2-23t-24=0$$

$$(t+1)(t-24)=0 \qquad \therefore t=24\ (\because t>0)$$

따라서 자동차 B가 P 지점을 지난 지 24초 후에 두 자동차 A, B가 만난다.

답 ⑤

62 $v(t)=40-8t=0$에서

$t=5$

따라서 전동차는 제동을 건 지 5초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^5 |40-8t|dt=\int_0^5 (40-8t)dt$$
$$=\left[40t-4t^2\right]_0^5$$
$$=100\,(\mathrm{m})$$

답 ①

63 $v(t)=30-10t=0$에서

$t=3$

따라서 물체는 위로 쏘아 올린 지 3초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 거리는

$$\int_3^6 |30-10t|dt=\int_3^6 (10t-30)dt$$
$$=\left[5t^2-30t\right]_3^6$$
$$=0-(-45)$$
$$=45\,(\mathrm{m})$$

답 45 m

64 (1) 점 P가 원점에서 출발하여 원점으로 돌아왔으므로 이때 위치의 변화량은 0이다.

$t=a\ (a>0)$일 때 점 P의 위치의 변화량이 0이라 하면

$$\int_0^a (8-2t)dt=0, \qquad \left[8t-t^2\right]_0^a=0$$

$$8a-a^2=0, \qquad a(8-a)=0$$

$$\therefore a=8\ (\because a>0)$$

따라서 점 P가 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간은 8초이다.

⋯➊

(2) $\displaystyle\int_0^8 |8-2t|\,dt=\int_0^4 (8-2t)dt+\int_4^8 (2t-8)dt$

$$=\Big[8t-t^2\Big]_0^4+\Big[t^2-8t\Big]_4^8$$

$$=16+16=32 \quad \cdots\cdots ❷$$

답 (1) 8초 (2) 32

채점 기준	비율
❶ 점 P가 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간을 구할 수 있다.	60 %
❷ 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 움직인 거리를 구할 수 있다.	40 %

65 $v(t)=0$에서 $t^2-2kt=0$

$t(t-2k)=0 \quad \therefore t=2k \ (\because t>0)$

따라서 $t=2k$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

이때 점 P가 $t=0$에서 $t=2k$까지 움직인 거리는

$$\int_0^{2k} |t^2-2kt|\,dt=\int_0^{2k} (-t^2+2kt)dt$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+kt^2\Big]_0^{2k}$$

$$=\frac{4}{3}k^3$$

즉 $\frac{4}{3}k^3=36$이므로

$k^3=27 \quad \therefore k=3$

답 ③

66 $t=a\ (a>0)$일 때까지 열차가 달린 거리가 4 km라 하면

$$\int_0^a \Big|\frac{3}{4}t^2+t\Big|dt=4, \qquad \int_0^a \Big(\frac{3}{4}t^2+t\Big)dt=4$$

$$\Big[\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{2}t^2\Big]_0^a=4, \qquad \frac{1}{4}a^3+\frac{1}{2}a^2=4$$

$a^3+2a^2-16=0, \quad (a-2)(a^2+4a+8)=0$

$\therefore a=2 \ (\because a^2+4a+8>0)$

열차가 출발한 후 2분이 지났을 때의 속도는

$$v(2)=\frac{3}{4}\cdot 2^2+2=5\ (\text{km/min})$$

따라서 열차가 출발한 후 10분 동안 달린 거리는

$$4+\underbrace{\int_2^{10} 5\,dt}_{\text{열차가 } t=2\text{에서 } t=10\text{까지 움직인 거리}}=4+\Big[5t\Big]_2^{10}$$

$$=4+40$$

$$=44\ (\text{km})$$

답 ④

67 $v(t)=at(t-4)\ (a<0)$라 하면 속도 $v(t)$의 그래프가 점 $(2,\ 40)$을 지나므로

$40=2a\cdot(-2) \quad \therefore a=-10$

$\therefore v(t)=-10t(t-4)=-10t^2+40t$

이때 두 도시 A, B 사이의 거리는 $t=0$에서 $t=4$까지 자전거가 이동한 거리이므로

$$\int_0^4 |-10t^2+40t|\,dt=\int_0^4 (-10t^2+40t)dt$$

$$=\Big[-\frac{10}{3}t^3+20t^2\Big]_0^4$$

$$=\frac{320}{3}\ (\text{km})$$

답 ③

68 ㄱ. 점 P의 운동 방향은

$v(t)=0$, 즉 $t=2$, $t=\frac{14}{3}$

두 점 $(4,\ -2)$, $(5,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식이 $v(t)=3t-14$이므로 $v(t)=0$일 때, $t=\frac{14}{3}$

일 때 바뀌므로 $t=7$일 때까지 두 번 바뀐다.

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속력 $|v(t)|$의 값이 가장 큰 것은 $t=4$일 때이다.

ㄷ. $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=\frac{5}{2}$$

ㄹ. $t=7$일 때 점 P의 위치는

$$\int_0^7 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1-\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{14}{3}-2\Big)\cdot2$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\Big\{\Big(7-\frac{14}{3}\Big)+1\Big\}\cdot1$$

$$=1-\frac{8}{3}+\frac{5}{3}=0$$

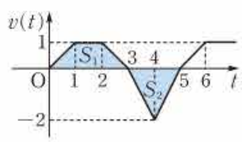
이므로 $t=7$일 때 점 P는 원점에 놓여 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

참고 ㄹ. $t=2$일 때 점 P의 위치는 1, $t=\frac{14}{3}$일 때 점 P의 위치는 $1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}$이므로 $t=\frac{14}{3}$일 때 점 P는 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다.

69 $t=a$일 때, 다시 원점을 지난다고 하면 $\int_0^a v(t)dt=0$이어야 한다.



오른쪽 그림에서

$$\int_0^5 v(t)dt=S_1-S_2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot1-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2$$

$$=2-2=0$$

이므로 $t=5$일 때 다시 원점을 지난다.

답 ④

70 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4a+\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot a=3a=6$$

$\therefore a=2 \quad \cdots\cdots ❶$

따라서 $t=5$에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^5 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot1\cdot8-\frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot2+\frac{1}{2}\cdot(5-3)\cdot8$$

$$=10 \quad \cdots\cdots ❷$$

답 10

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $t=5$에서의 점 P의 위치를 구할 수 있다.	50 %

71 $t=4$에서의 점 P의 위치가 1이므로

$$\int_0^4 v(t)dt=1$$

$$\therefore \int_0^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $\int_0^4 |v(t)|dt=5$이므로

$$\int_0^2 v(t)dt-\int_2^4 v(t)dt=5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠－㉡을 하면 $\quad 2\int_2^4 v(t)dt=-4$

$$\therefore \int_2^4 v(t)dt=-2$$

따라서 $t=2$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_2^6 |v(t)|dt=\int_2^4 |v(t)|dt+\int_4^6 |v(t)|dt$$
$$=2+5=7$$

답 7

72 $t=0$에서의 점 P의 위치를 x_0이라 하면 $t=2$에서의 점 P의 위치는 $x_0+\int_0^2 v(t)dt$이므로

$$x_0-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a=-3$$

$$\therefore x_0-a=-3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$t=1$에서 $t=3$까지의 위치의 변화량과 $t=4$에서 $t=5$까지의 위치의 변화량은 각각 0이고, $t=5$에서의 점 P의 위치는 $x_0+\int_0^5 v(t)dt$이므로

$$x_0-\frac{1}{2}\cdot(1-0)\cdot a+(4-3)\cdot a=3$$

$$\therefore x_0+\frac{1}{2}a=3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x_0=1,\ a=4$

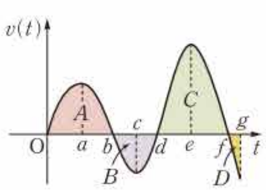
따라서 $t=6$에서 $t=8$까지의 위치의 변화량은 0이므로 $t=9$에서의 점 P의 위치는

$$3-(6-5)\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot(9-8)\cdot 4=1$$

└ ($t=5$에서의 위치)+($t=5$에서 $t=9$까지의 위치의 변화량)

답 ②

73 오른쪽 그림에서 속도 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 차례대로 A, B, C, D라 하면 주어진 조건에서



$A+B=C-D$,
즉 $C=A+B+D$
$A-B=D$, 즉 $A=B+D$

ㄱ. $\int_b^d |v(t)|dt=B$, $\int_f^g |v(t)|dt=D$이므로

$$\int_b^d |v(t)|dt+\int_f^g |v(t)|dt=B+D$$
$$=A$$
$$=\int_0^b v(t)dt$$

ㄴ. 점 P는 $t=b$, $t=d$, $t=f$에서 운동 방향을 바꾸므로 3번 바꾼다.

ㄷ. $2\int_0^b v(t)dt=2A$, $\int_d^f v(t)dt=C=A+B+D=2A$이므로

$$2\int_0^b v(t)dt=\int_d^f v(t)dt$$

ㄹ. $\int_0^b v(t)dt=A>0$, $\int_0^d v(t)dt=A-B=D>0$,

$$\int_0^f v(t)dt=A-B+C=C+D>0,$$

$$\int_0^g v(t)dt=A-B+C-D=C>0$$

따라서 점 P의 위치의 변화량이 0이 되는 때는 없으므로 점 P는 출발 후 원점을 다시 지나지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

MEMO

MEMO