수학의 바이블

유형 ON

1권

정답과 풀이

미적분

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Ⅰ 수열의 극한

유형별 문제

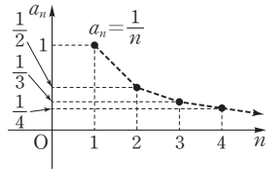
PART A 01 수열의 극한

유형 01 수열의 수렴과 발산

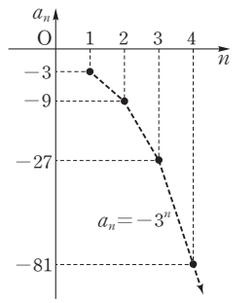
확인 문제 (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴, 2

각 수열의 일반항을 a_n이라 하고, n이 한없이 커질 때 a_n의 값의 변화를 그래프로 나타내면 다음과 같다.

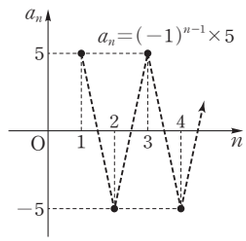
(1) 오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{1}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.



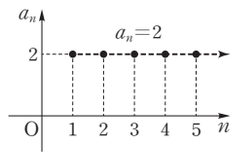
(2) 오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, -3^n의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.



(3) 오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, $(-1)^{n-1}\times 5$의 값은 5와 -5가 교대로 나타나므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.



(4) 오른쪽 그림에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2$이므로 주어진 수열은 2에 수렴한다.



0001 답 ③

① n의 값이 한없이 커지면 $3n+1$의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

② n의 값이 한없이 커지면 $\frac{(-1)^n}{4}$의 값은 $-\frac{1}{4}$과 $\frac{1}{4}$이 교대로 나타나므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

③ n의 값이 한없이 커지면 $\frac{1}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\log\left(10+\frac{1}{n}\right)$의 값은 $\log 10$, 즉 1에 수렴한다.

④ 주어진 수열에서 각 항의 분모를 유리화하면

$\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{9}}{3}, \frac{\sqrt{12}}{3}, \cdots, \frac{\sqrt{3n}}{3}, \cdots$

n의 값이 한없이 커지면 $\frac{\sqrt{3n}}{3}$의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

⑤ n의 값이 한없이 커지면 $-\left(\frac{3}{2}\right)^n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

따라서 수렴하는 수열은 ③이다.

0002 답 ②

① $a_n=3^n\times n$이라 하고 $n=1$을 대입하면 $a_1=3$

이때 n의 값이 한없이 커지면 a_n의 값도 한없이 커지므로 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다.

② $a_n=\frac{2n+1}{n}=2+\frac{1}{n}$이라 하고 $n=1$을 대입하면 $a_1=3$

이때 n의 값이 한없이 커지면 a_n의 값은 2에 한없이 가까워지므로 수열 $\{a_n\}$은 2에 수렴한다.

③ $a_n=n+2$라 하고 $n=1$을 대입하면 $a_1=3$

이때 n의 값이 한없이 커지면 a_n의 값도 한없이 커지므로 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다.

④ $a_n=\frac{3n+2}{n}=3+\frac{2}{n}$라 하고 $n=1$을 대입하면 $a_1=5$

이때 n의 값이 한없이 커지면 a_n의 값은 3에 한없이 가까워지므로 수열 $\{a_n\}$은 3에 수렴한다.

⑤ $a_n=4-\frac{1}{n}$이라 하고 $n=1$을 대입하면 $a_1=3$

이때 n의 값이 한없이 커지면 a_n의 값은 4에 한없이 가까워지므로 수열 $\{a_n\}$은 4에 수렴한다.

따라서 주어진 그래프로 표현되는 수열로 가장 적당한 것은 ②이다.

0003 답 ④

① n의 값이 한없이 커지면 $\frac{1}{n+1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{5+\frac{1}{n+1}\right\}$은 5에 수렴한다.

② n의 값이 한없이 커지면 $\frac{2}{\sqrt{n}}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{2}{\sqrt{n}}\right\}$는 0에 수렴한다.

③ $\frac{4n^2+1}{3n^2}=\frac{4}{3}+\frac{1}{3n^2}$에서 n의 값이 한없이 커지면 $\frac{1}{3n^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{4n^2+1}{3n^2}\right\}$은 $\frac{4}{3}$에 수렴한다.

④ $\frac{3n+(-1)^n}{2}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$1, \frac{7}{2}, 4, \frac{13}{2}, \cdots$

즉, n의 값이 한없이 커지면 $\frac{3n+(-1)^n}{2}$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\left\{\frac{3n+(-1)^n}{2}\right\}$은 양의 무한대로 발산한다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

⑤ $\frac{(-1)^n+1^n}{n}$에 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$을 차례대로 대입하면

$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \cdots$ → 홀수 번째 항도 0에 수렴하고, 짝수 번째 항도 0에 수렴한다.

즉, n의 값이 한없이 커지면 $\frac{(-1)^n+1^n}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{(-1)^n+1^n}{n}\right\}$은 0에 수렴한다.

따라서 발산하는 수열은 ④이다.

0004

답 2

n의 값이 한없이 커지면 $\frac{3}{n^2+1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{2-\frac{3}{n^2+1}\right\}$은 2에 수렴한다.

$\therefore x=2$

$\frac{\cos n\pi}{3n}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \cdots$ → 홀수 번째 항도 0에 수렴하고, 짝수 번째 항도 0에 수렴한다.

즉, n의 값이 한없이 커지면 $\frac{\cos n\pi}{3n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{\cos n\pi}{3n}\right\}$는 0에 수렴한다.

$\therefore y=0$

$\therefore x+y=2+0=2$

Bible Says 부호가 교대로 나타나는 수열의 극한값

수열 $\{a_n\}$의 값의 부호가 양과 음(또는 음과 양)이 교대로 나타날 때, 자연수 k에 대하여

$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1}=\lim_{k\to\infty} a_{2k}=\alpha$ (α는 실수)

이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고 그 극한값은 α이다.

0005

답 ③

ㄱ. $1-(-1)^n$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$2, 0, 2, 0, \cdots$이므로 수열 $\{1-(-1)^n\}$은 발산(진동)한다.

ㄴ. $(-1)^n\times\frac{n}{n^2+1}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \cdots$ → 홀수 번째 항도 0에 수렴하고, 짝수 번째 항도 0에 수렴한다.

이므로 수열 $\left\{(-1)^n\times\frac{n}{n^2+1}\right\}$은 0에 수렴한다.

ㄷ. n의 값이 한없이 커지면 $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$의 값은 음수와 양수가 교대로 나타나면서 그 절댓값은 0에 한없이 가까워진다.

즉, 수열 $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$은 1에 수렴한다.

ㄹ. $\sin\frac{2n+1}{2}\pi=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면 $-1, 1, -1, 1, \cdots$이므로 수열 $\left\{\sin\frac{2n+1}{2}\pi\right\}$는 발산(진동)한다.

따라서 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄷ이다.

유형 02 수열의 극한에 대한 기본 성질

확인 문제 (1) -7 (2) -24 (3) $-\frac{9}{10}$ (4) $\frac{5}{16}$

(1) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n+4\lim_{n\to\infty}b_n$
$=3\times3+4\times(-4)=-7$

(2) $\lim_{n\to\infty}2a_nb_n=2\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=2\times3\times(-4)=-24$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n}{5b_n}=\frac{6\lim_{n\to\infty}a_n}{5\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{6\times3}{5\times(-4)}=-\frac{9}{10}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-7}{b_n^2}=\frac{4\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}7}{\lim_{n\to\infty}b_n\times\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{4\times3-7}{(-4)^2}=\frac{5}{16}$

0006

답 ④

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n-6}{a_n+2b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n-6}{\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n}$
$=\frac{6\times(-5)-6}{6+2\times(-5)}=9$

0007

답 10

$\lim_{n\to\infty}(a_n+3)=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+3)-3\}=5-3=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n(7-a_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}(7-a_n)$
$=2\times(7-2)=10$

0008

답 33

$\lim_{n\to\infty}\{(a_n+2b_n)+(2a_n+b_n)\}=\lim_{n\to\infty}(3a_n+3b_n)$
$=3\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$

따라서 $3\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=9+90=99$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=33$

참고

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴한다는 조건이 없으므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓을 수 없다.

0009

답 ⑤

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}-3\right)=-3$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\frac{3}{n(n+1)}\right\}=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_nb_n-3a_n+b_n)$
$=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n-3\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$
$=(-3)\times2-3\times(-3)+2=5$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0010

답 20

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)^2$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-4a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-4\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=4\times4-4\times(-1)=20$

0011

답 -6

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

❶

$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=4$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n=4$이므로

$\alpha+2\beta=4$ …… ㉠

$\lim_{n\to\infty}(3a_n-b_n)=-9$에서 $3\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=-9$이므로

$3\alpha-\beta=-9$ …… ㉡

❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=-2$, $\beta=3$

❸

$\therefore\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=(-2)\times3=-6$

❹

채점 기준	배점
❶ $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}b_n$의 값을 각각 α, β로 놓기	10%
❷ $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=4$, $\lim_{n\to\infty}(3a_n-b_n)=-9$임을 이용하여 α, β에 대한 두 식 세우기	40%
❸ ❷에서 세운 두 식을 연립하여 α, β의 값 구하기	20%
❹ $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값 구하기	30%

유형 03 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$의 이용

0012

답 2

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}+8}{3a_{n+1}-1}=2$에서 $\frac{\alpha+8}{3\alpha-1}=2$

$\alpha+8=6\alpha-2$, $5\alpha=10$ $\therefore\alpha=2$

$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=2$

0013

답 9

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+6$에서 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}a_n+6\right)$이므로

$\alpha=\frac{1}{3}\alpha+6$, $\frac{2}{3}\alpha=6$

$\therefore\alpha=9$

$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=9$

0014

답 ②

수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수에 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha\neq0$)으로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$a_na_{n+1}=6-a_n$에서 $\lim_{n\to\infty}a_na_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(6-a_n)$이므로

$\alpha^2=6-\alpha$

$\alpha^2+\alpha-6=0$, $(\alpha+3)(\alpha-2)=0$

$\therefore\alpha=-3$ 또는 $\alpha=2$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $\alpha=2$

$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=2$

0015

답 ⑤

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}{}^2-4\lim_{n\to\infty}a_{2n}-1=0$에서 $\alpha^2-4\alpha-1=0$

$\therefore\alpha=2+\sqrt{5}$ 또는 $\alpha=2-\sqrt{5}$

이때 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\geq0$이므로

$\alpha=2+\sqrt{5}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=2+\sqrt{5}$

0016

답 4

이차방정식 $x^2-2a_nx+a_{n+1}+12=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a_n)^2-(a_{n+1}+12)=0$

$\therefore a_n{}^2-a_{n+1}-12=0$

❶

즉, $\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2-a_{n+1}-12)=0$이고 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\alpha^2-\alpha-12=0$

❷

$(\alpha+3)(\alpha-4)=0$ $\therefore\alpha=-3$ 또는 $\alpha=4$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $\alpha=4$

$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=4$

❸

채점 기준	배점
❶ 이차방정식의 판별식을 이용하여 a_n, a_{n+1}에 대한 식 세우기	30%
❷ $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$로 놓고 α에 대한 식 세우기	40%
❸ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값 구하기	30%

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 04 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

확인 문제 (1) 수렴, $-\frac{1}{3}$ (2) 수렴, 0 (3) 발산

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-n}{3n-5}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-1}{3-\frac{5}{n}}=-\frac{1}{3}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n-4}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\infty$

0017

답 ⑤

① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n(n+5)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^2+5n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{5}{n}}=2$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{3}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=0$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+3n-1}}{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{9n+4}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{4}{n}}}=\frac{1}{3}$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^3}{2n(n+1)(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^3-12n^2+6n-1}{2n^3+6n^2+4n}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8-\frac{12}{n}+\frac{6}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}=\frac{8}{2}=4$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

0018

답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공차가 2이므로 일반항은
$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$

0019

답 ⑤

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\times n}{\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\times n}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=5$

0020

답 3

$a_n+a_{n+1}=3n^2$ ····· ㉠
$a_{n+1}+a_{n+2}=3(n+1)^2$ ····· ㉡
㉡−㉠을 하면 $a_{n+2}-a_n=3(n+1)^2-3n^2=6n+3$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{2n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+3}{2n+5}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6+\frac{3}{n}}{2+\frac{5}{n}}=3$

0021

답 $\frac{1}{9}$

다항식 $f(x)$를 $3x-n$으로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(\frac{n}{3}\right)$이므로

$R_n=f\left(\frac{n}{3}\right)=3\times\left(\frac{n}{3}\right)^2+2\times\frac{n}{3}+1=\frac{n^2}{3}+\frac{2}{3}n+1$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R_n}{f(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{3}+\frac{2}{3}n+1}{3n^2+2n+1}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{9}$

참고

다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$

0022

답 8

$n\geq2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2n^2-3n-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}$
$=4n-5$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4n-5)^2}{2n^2-3n}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{16n^2-40n+25}{2n^2-3n}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{16-\frac{40}{n}+\frac{25}{n^2}}{2-\frac{3}{n}}=8$

0023

답 ②

이차방정식 $x^2+(2n+3)x-2n-\sqrt{n^2+n}=0$의 두 실근이 α_n, β_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha_n+\beta_n=-(2n+3)$
$\alpha_n\beta_n=-2n-\sqrt{n^2+n}$

$\therefore\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{-(2n+3)}{-2n-\sqrt{n^2+n}}$
$=\frac{2n+3}{2n+\sqrt{n^2+n}}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{2}{3}$$

유형 05 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 - 합 또는 곱

0024

답 3

$$(n+1)+(n+2)+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}(n+k)=n^2+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{3n^2+n}{2}$$
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)+(n+2)+\cdots+2n}{1+2+3+\cdots+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2+n}{2}}{\frac{n^2+n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{n^2+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=3$$

참고

(1) $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(4) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

0025

답 $\frac{1}{12}$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{3n^4+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{3n^4+2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{12n^4+8n+4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{12+\frac{8}{n^3}+\frac{4}{n^4}}$$
$$=\frac{1}{12}$$

0026

답 ②

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$
$$3+5+7+\cdots+(2n+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=n^2+2n$$
$$\therefore f(n)=\frac{\frac{2n^3+3n^2+n}{6}}{n^2+2n}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^2+12n}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3+12n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6+\frac{12}{n}}=\frac{1}{3}$$

0027

답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\right.$$
$$\left.\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

따라서 $p=2$, $q=1$이므로 $p+q=2+1=3$

0028

답 $\frac{1}{3}$

$$a_n=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+(n-1)n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(k-1)k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$ ❶

$$b_n=1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1$$
$$=2(1+2+\cdots+n)-n=2\sum_{k=1}^{n}k-n$$
$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n(n+1)-n=n^2$$ ❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n+1)}{3n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{3}=\frac{1}{3}$$ ❸

채점 기준	배점
❶ a_n을 간단히 하기	35%
❷ b_n을 간단히 하기	35%
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{nb_n}$의 값 구하기	30%

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 06 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 - 로그를 포함한 식

0029

답 3

$\log_2(2n-1)+\log_2(4n+3)-2\log_2(n+5)$

$=\log_2\frac{(2n-1)(4n+3)}{(n+5)^2}$

$=\log_2\frac{8n^2+2n-3}{n^2+10n+25}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\log_2(2n-1)+\log_2(4n+3)-2\log_2(n+5)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{8n^2+2n-3}{n^2+10n+25}$

$=\log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+2n-3}{n^2+10n+25}\right)$

$=\log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{10}{n}+\frac{25}{n^2}}\right)$

$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

Bible Says 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

0030

답 ②

$\lim_{n\to\infty}(\log_3\sqrt{2n^2+n+3}-\log_3\sqrt{6n^2-5n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{\sqrt{2n^2+n+3}}{\sqrt{6n^2-5n+1}}$

$=\log_3\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+n+3}}{\sqrt{6n^2-5n+1}}\right)$

$=\log_3\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}}{\sqrt{6-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}}\right)$

$=\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=\log_3 3^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

0031

답 ①

$a_n=\log\frac{n+1}{n}$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$

$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$

$=\log(n+1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{\log(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

유형 07 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 - 미정계수의 결정

확인 문제 6

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+n-1}{2n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{a}{2}$

따라서 $\frac{a}{2}=3$이므로 $a=6$

0032

답 6

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n-1)}{an^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)}{a-\frac{2}{n^2}}=\frac{3}{a}$

따라서 $\frac{3}{a}=\frac{1}{2}$이므로 $a=6$

0033

답 2

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{\sqrt{4n^2+5n-1}+a^2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}+a^2}$

$=\frac{1}{2+a^2}$

따라서 $\frac{1}{2+a^2}=\frac{1}{6}$이므로 $2+a^2=6$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

0034

답 12

$a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+7}{3n+1}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로 $a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+7}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+7}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{b}{3}$

따라서 $\frac{b}{3}=4$이므로 $b=12$

$\therefore a+b=0+12=12$

0035

답 ③

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a^2+a-6)n^2+(a+3)n+1}{n+4}\neq0$이므로

$a^2+a-6=0$, $a+3\neq0$

$a^2+a-6=(a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=2$

이때 $a+3\neq0$에서 $a\neq-3$이므로 $a=2$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{(a^2+a-6)n^2+(a+3)n+1}{n+4}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5+\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}}=5$

$\therefore b=5$

$\therefore ab=2\times5=10$

0036

답 18

$a+2b\neq0$이면

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{(a+2b)n^2-(2a+b)n+1}{9n+b^2}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$a+2b=0 \quad \therefore a=-2b \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{(a+2b)n^2-(2a+b)n+1}{9n+b^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3bn+1}{9n+b^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3b+\frac{1}{n}}{9+\frac{b^2}{n}}=\dfrac{b}{3}$

따라서 $\dfrac{b}{3}=2$이므로 $b=6$

$b=6$을 ㉠에 대입하면

$a=-2\times6=-12$

$\therefore b-a=6-(-12)=18$

0037

답 $-2\sqrt{2}$

$a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16n^2-3n+1}}{an^2+2n+5}=0$이므로 $a=0$ ❶

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16n^2-3n+1}}{an^2+2n+5}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16n^2-3n+1}}{2n+5}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{5}{n}}=\dfrac{4}{2}=2$

$\therefore b=2$ ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{an^2-4n+3}{\sqrt{bn^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-4n+3}{\sqrt{2n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-4+\frac{3}{n}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$

$=\dfrac{-4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$ ❸

채점 기준	배점
❶ a의 값 구하기	20%
❷ b의 값 구하기	40%
❸ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{an^2-4n+3}{\sqrt{bn^2-n}}$의 값 구하기	40%

유형 08 ∞−∞ 꼴의 극한

0038

답 2

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\dfrac{4}{1+1}=2$

0039

답 ①

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+2n+1}-\sqrt{4n^2-2n-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{4n^2+2n+1}-\sqrt{4n^2-2n-1})(\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1})}{\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(4n^2+2n+1)-(4n^2-2n-1)}{\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n+2}{\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}$

$=\dfrac{4}{2+2}=1$

0040

답 2

이차방정식 $x^2+2nx-4n=0$의 두 실근은

$x=-n\pm\sqrt{n^2+4n}$

이때 a_n이 양의 실근이므로

$a_n=-n+\sqrt{n^2+4n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}$

$=\dfrac{4}{1+1}=2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0041

답 $\sqrt{2}$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3, 공차가 4이므로

$S_n=\frac{n\{2\times3+(n-1)\times4\}}{2}=2n^2+n$

$S_{n+1}=2(n+1)^2+(n+1)=2n^2+5n+3$ ❶

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n-3})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+5n+3}-\sqrt{2n^2+n-3})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n^2+5n+3}-\sqrt{2n^2+n-3})(\sqrt{2n^2+5n+3}+\sqrt{2n^2+n-3})}{\sqrt{2n^2+5n+3}+\sqrt{2n^2+n-3}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+6}{\sqrt{2n^2+5n+3}+\sqrt{2n^2+n-3}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n}}{\sqrt{2+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}}$

$=\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ❷

채점 기준	배점
❶ S_n, S_{n+1} 구하기	50%
❷ $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n-3})$의 값 구하기	50%

0042

답 ③

$\sqrt{(2n)^2}<\sqrt{4n^2+3n+1}<\sqrt{(2n+1)^2}$이므로

$2n<\sqrt{4n^2+3n+1}<2n+1$

$\therefore a_n=\sqrt{4n^2+3n+1}-2n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n)(\sqrt{4n^2+3n+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$

0043

답 ③

$a_{2k}=2\times2k-1=4k-1$이므로

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-n$

$=2n^2+n$

$a_{2k-1}=2\times(2k-1)-1=4k-3$이므로

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(4k-3)$

$=4\times\frac{n(n+1)}{2}-3n$

$=2n^2-n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n})(\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-n})}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$

$=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

유형 09 ∞−∞ 꼴의 극한 - 분수 꼴

0044

답 $\frac{3}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(\sqrt{n^2+4n+1}+n)}{(\sqrt{n^2+4n+1}-n)(\sqrt{n^2+4n+1}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(\sqrt{n^2+4n+1}+n)}{4n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{4+\frac{1}{n}}$

$=\frac{3(1+1)}{4}=\frac{3}{2}$

0045

답 ①

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$

0046

답 -1

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{n-\sqrt{n\times(n+2)}}=\frac{1}{n-\sqrt{n^2+2n}}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n^2+2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+2n}}{(n-\sqrt{n^2+2n})(n+\sqrt{n^2+2n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+2n}}{-2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{-2}$$

$$= \frac{1+1}{-2} = -1$$

0047

답 -4

두 점 $(2, 0)$, $(n, 3)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(n-2)^2+3^2} = \sqrt{n^2-4n+13}$이므로
$f(n) = \sqrt{n^2-4n+13}$ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{8}{f(n)-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{\sqrt{n^2-4n+13}-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8(\sqrt{n^2-4n+13}+n)}{(\sqrt{n^2-4n+13}-n)(\sqrt{n^2-4n+13}+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8(\sqrt{n^2-4n+13}+n)}{-4n+13}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8\left(\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{13}{n^2}}+1\right)}{-4+\frac{13}{n}}$$

$$= \frac{8(1+1)}{-4} = -4$$ ❷

채점 기준	배점
❶ $f(n)$ 구하기	30%
❷ $\lim_{n\to\infty} \frac{8}{f(n)-n}$의 값 구하기	70%

0048

답 ①

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{9n+4}-3\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{9n+4}+3\sqrt{n})}{(\sqrt{9n+4}-3\sqrt{n})(\sqrt{9n+4}+3\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-(\sqrt{9n+4}+3\sqrt{n})}{4(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\left(\sqrt{9+\frac{4}{n}}+3\right)}{4\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}$$

$$= \frac{-(3+3)}{4(1+1)} = -\frac{3}{4}$$

유형 10 ∞−∞ 꼴의 극한 - 미정계수의 결정

0049

답 -2

$a \le 0$이면 $\lim_{n\to\infty} \{\sqrt{n^2+5n+4}-(an+b)\} = \infty$이므로

$a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \{\sqrt{n^2+5n+4}-(an+b)\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\{\sqrt{n^2+5n+4}-(an+b)\}\{\sqrt{n^2+5n+4}+(an+b)\}}{\sqrt{n^2+5n+4}+(an+b)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-a^2)n^2+(5-2ab)n+4-b^2}{\sqrt{n^2+5n+4}+(an+b)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-a^2)n+(5-2ab)+\frac{4-b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}+a+\frac{b}{n}}$$

위 식의 극한값이 3이므로

$1-a^2 = 0$, $\frac{5-2ab}{1+a} = 3$

두 식을 연립하여 풀면

$a = 1$ ($\because a > 0$), $b = -\frac{1}{2}$

$$\therefore 4ab = 4\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

0050

답 8

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+an}-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+an}-n)(\sqrt{n^2+an}+n)}{\sqrt{n^2+an}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{an}{\sqrt{n^2+an}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}$$

$$= \frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2} = 4$이므로 $a = 8$

0051

답 ④

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+a-\sqrt{9n^2+an}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+a+\sqrt{9n^2+an}}{(3n+a-\sqrt{9n^2+an})(3n+a+\sqrt{9n^2+an})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+a+\sqrt{9n^2+an}}{5an+a^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{a}{n}+\sqrt{9+\frac{a}{n}}}{5a+\frac{a^2}{n}}$$

$$= \frac{3+3}{5a} = \frac{6}{5a}$$

따라서 $\frac{6}{5a} = \frac{3}{10}$이므로 $a = 4$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0052

답 ④

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an})$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an})(\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an})}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(1+a)n}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+a}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a-\frac{a}{n}}}=\dfrac{1+a}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\dfrac{1+a}{2\sqrt{a}}$

따라서 $\dfrac{1+a}{2\sqrt{a}}=\dfrac{5}{4}$이므로

$2(1+a)=5\sqrt{a}$, $2a+2=5\sqrt{a}$

$4a^2+8a+4=25a$

$4a^2-17a+4=0$

$(4a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=\dfrac{1}{4}$ 또는 $a=4$

따라서 모든 양수 a의 값의 합은

$\dfrac{1}{4}+4=\dfrac{17}{4}$

0053

답 -3

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{an-4}{\sqrt{9n^2+bn}-3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(an-4)(\sqrt{9n^2+bn}+3n)}{(\sqrt{9n^2+bn}-3n)(\sqrt{9n^2+bn}+3n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(an-4)(\sqrt{9n^2+bn}+3n)}{bn}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(an-4)\left(\sqrt{9+\frac{b}{n}}+3\right)}{b}$

이때 $a\neq0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$a=0$ ..... ❶

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{-4\left(\sqrt{9+\frac{b}{n}}+3\right)}{b}=\dfrac{-4(3+3)}{b}=-\dfrac{24}{b}$

따라서 $-\dfrac{24}{b}=8$이므로

$b=-3$ ..... ❷

$\therefore a+b=0+(-3)=-3$ ..... ❸

채점 기준	배점
❶ $\dfrac{an-4}{\sqrt{9n^2+bn}-3n}$를 유리화한 후 a의 값 구하기	60%
❷ b의 값 구하기	30%
❸ $a+b$의 값 구하기	10%

0054

답 ⑤

$k\geq0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $k<0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n-1)(n+4)}+kn\}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\{\sqrt{(n-1)(n+4)}+kn\}\{\sqrt{(n-1)(n+4)}-kn\}}{\sqrt{(n-1)(n+4)}-kn}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(1-k^2)n^2+3n-4}{\sqrt{(n-1)(n+4)}-kn}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(1-k^2)n+3-\frac{4}{n}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}-k}$

이때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $1-k^2=0$, $k^2=1$

$\therefore k=-1$ ($\because k<0$)

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3-\frac{4}{n}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}+1}=\dfrac{3}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

유형 11 일반항 a_n을 포함한 식의 극한값

0055

답 ②

$\dfrac{2a_n-1}{3a_n+2}=b_n$으로 놓으면

$2a_n-1=3a_nb_n+2b_n$, $(2-3b_n)a_n=2b_n+1$

$\therefore a_n=\dfrac{2b_n+1}{2-3b_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2b_n+1}{2-3b_n}=\dfrac{2\times2+1}{2-3\times2}=-\dfrac{5}{4}$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-1}{3a_n+2}=2$에서 $\dfrac{2\alpha-1}{3\alpha+2}=2$

$2\alpha-1=6\alpha+4$, $4\alpha=-5$ $\therefore \alpha=-\dfrac{5}{4}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-\dfrac{5}{4}$

0056

답 ①

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면 $a_n=\dfrac{1}{b_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{-2a_n+1}{a_n+3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-\frac{2}{b_n}+1}{\frac{1}{b_n}+3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-2+b_n}{1+3b_n}=-2$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{-2a_n+1}{a_n+3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-2+\frac{1}{a_n}}{1+\frac{3}{a_n}}=\dfrac{-2+0}{1+3\times0}=-2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0057

답 7

$a_n-\dfrac{3n^2-2n}{n^2+5n+1}=b_n$으로 놓으면

$a_n=b_n+\dfrac{3n^2-2n}{n^2+5n+1}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{3n^2-2n}{n^2+5n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$=4+3=7$$

0058

답 6

$na_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\dfrac{b_n}{n}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(2n-3)a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(2n-3)\times\frac{b_n}{n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n}\times\lim_{n\to\infty} b_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{1}\times\lim_{n\to\infty} b_n$$

$$=2\times 3=6$$

0059

답 ①

$(n^2+3)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\dfrac{b_n}{n^2+3}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n^2+2n)a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{3n^2+2n}\times\frac{1}{b_n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{2}{n}}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

0060

답 ⑤

$3a_n-5n=b_n$으로 놓으면 $3a_n=b_n+5n$

$\therefore\ a_n=\dfrac{b_n+5n}{3}$

또한 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{4n}\times\frac{a_n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{4n}\times\frac{b_n+5n}{3n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{4}\times\frac{\frac{b_n}{n}+5}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{4}\times\frac{0+5}{3}=\frac{5}{6}$$

유형 12 일반항 a_n을 포함한 식의 극한값 – 식의 변형

0061

답 3

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2)=3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\{(a_n-2)+2\}=3+2=5$

$2a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=c_n-2a_n$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=8$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-2a_n)=8-2\times 5=-2$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-2b_n}{a_n+b_n}=\dfrac{5-2\times(-2)}{5+(-2)}=3$

0062

답 ②

$a_n+b_n=c_n$, $a_n-b_n=d_n$으로 놓으면

$a_n=\dfrac{c_n+d_n}{2}$, $b_n=\dfrac{c_n-d_n}{2}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=-3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2\times\frac{c_n+d_n}{2}+3\times\frac{c_n-d_n}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}c_n-\frac{1}{2}d_n\right)$$

$$=\frac{5}{2}\times 1-\frac{1}{2}\times(-3)=4$$

주의 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴한다는 조건이 없으므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓을 수 없다.

0063

답 ③

$(2n+1)a_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=\dfrac{c_n}{2n+1}$

$(3n^2-2)b_n=d_n$으로 놓으면 $b_n=\dfrac{d_n}{3n^2-2}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=4$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=9$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n^3a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left\{n^3\times\frac{c_n}{2n+1}\times\frac{d_n}{3n^2-2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(2n+1)(3n^2-2)}\times\lim_{n\to\infty} c_n\times\lim_{n\to\infty} d_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n^2}\right)}\times\lim_{n\to\infty} c_n\times\lim_{n\to\infty} d_n$$

$$=\frac{1}{6}\times 4\times 9=6$$

다른 풀이

$$\lim_{n\to\infty} n^3a_nb_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{(2n+1)a_n\times(3n^2-2)b_n\times\frac{n^3}{(2n+1)(3n^2-2)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n\times\lim_{n\to\infty}(3n^2-2)b_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(2n+1)(3n^2-2)}$$

$$=4\times 9\times\frac{1}{6}=6$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0064

답 6

$(n^3-8)a_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=\dfrac{c_n}{n^3-8}$

$(n-2)b_n=d_n$으로 놓으면 $b_n=\dfrac{d_n}{n-2}$ ❶

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2(n-2)c_n}{(n^3-8)d_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2-4n+1)(n-2)}{(n-2)(n^2+2n+4)}\times\frac{\lim\limits_{n\to\infty}c_n}{\lim\limits_{n\to\infty}d_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n+1}{n^2+2n+4}\times\frac{\lim\limits_{n\to\infty}c_n}{\lim\limits_{n\to\infty}d_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}\times\frac{\lim\limits_{n\to\infty}c_n}{\lim\limits_{n\to\infty}d_n}$$

$$=4\times\frac{3}{2}=6$$ ❷

채점 기준	배점
❶ $(n^3-8)a_n$, $(n-2)b_n$을 다른 일반항으로 치환한 후 a_n, b_n을 n에 대한 식으로 나타내기	30%
❷ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^2a_n}{b_n}$의 값 구하기	70%

0065

답 ②

$2a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=2a_n-c_n$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$에서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$이고, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8a_n+b_n}{a_n-3b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8a_n+2a_n-c_n}{a_n-3(2a_n-c_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10a_n-c_n}{-5a_n+3c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10-c_n\times\frac{1}{a_n}}{-5+3c_n\times\frac{1}{a_n}}$$

$$=\frac{10}{-5}=-2$$

다른 풀이

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$에서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$이고, $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{a_n}\times(2a_n-b_n)\right\}=0$$

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{b_n}{a_n}\right)=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=2$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{8a_n+b_n}{a_n-3b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{b_n}{a_n}}{1-3\times\frac{b_n}{a_n}}$$

$$=\frac{8+2}{1-3\times2}=-2$$

유형 13 수열의 극한의 대소 관계

0066

답 1

$\dfrac{2n}{4n^2-1}\le a_n\le\dfrac{2n+1}{4n^2-1}$이므로

$\dfrac{2n(2n+1)}{4n^2-1}\le(2n+1)a_n\le\dfrac{(2n+1)^2}{4n^2-1}$

$\dfrac{4n^2+2n}{4n^2-1}\le(2n+1)a_n\le\dfrac{4n^2+4n+1}{4n^2-1}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+2n}{4n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+4n+1}{4n^2-1}=1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_n=1$

0067

답 ④

$a_n=7+(n-1)\times2=2n+5$이므로

$n+1\le a_nb_n\le n+3$에서

$n+1\le(2n+5)b_n\le n+3$

$\therefore\ \dfrac{n+1}{2n+5}\le b_n\le\dfrac{n+3}{2n+5}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{2n+5}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{2}$

0068

답 ④

$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$의 각 변을 제곱하면

$9n^2+4<na_n<(3n+2)^2$이므로

$\dfrac{9n^2+4}{n^2}<\dfrac{a_n}{n}<\dfrac{(3n+2)^2}{n^2}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^2+4}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^2}{n^2}=9$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=9$

0069

답 5

$1+\log_5 n<\log_5 a_n<1+\log_5(n+3)$에서

$\log_5 5+\log_5 n<\log_5 a_n<\log_5 5+\log_5(n+3)$이므로

$\log_5 5n<\log_5 a_n<\log_5 5(n+3)$

$\therefore\ 5n<a_n<5n+15$

$\therefore\ \dfrac{5n}{n+3}<\dfrac{a_n}{n+3}<\dfrac{5n+15}{n+3}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+15}{n+3}=5$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n+3}=5$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0070

답 $\frac{1}{3}$

$2n<a_n<2n+1$에서

$\sum_{k=1}^{n}2k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

$2\times\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$

$n^2+n<\sum_{k=1}^{n}a_k<n^2+2n$

$\therefore \frac{n^2+n}{3n^2+5n-1}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{3n^2+5n-1}<\frac{n^2+2n}{3n^2+5n-1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{3n^2+5n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{3n^2+5n-1}=\frac{1}{3}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{3n^2+5n-1}=\frac{1}{3}$

0071

답 ⑤

이차방정식 $x^2-(n+1)x+a_n=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=\{-(n+1)\}^2-4a_n\geq 0$

$\therefore a_n\leq\frac{(n+1)^2}{4}$ ····· ㉠

이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-n)^2-4a_n<0$

$\therefore a_n>\frac{n^2}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\frac{n^2}{4}<a_n\leq\frac{(n+1)^2}{4}$

$\therefore \frac{n^2}{4n^2}<\frac{a_n}{n^2}\leq\frac{(n+1)^2}{4n^2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}$

0072

답 4

조건 (가)에서

$16-\frac{1}{n}<a_n+b_n<16+\frac{1}{n}$ ····· ㉠

조건 (나)에서

$8-\frac{1}{n}<a_n-b_n<8+\frac{1}{n}$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$\left(16-\frac{1}{n}\right)-\left(8+\frac{1}{n}\right)<2b_n<\left(16+\frac{1}{n}\right)-\left(8-\frac{1}{n}\right)$이므로

$8-\frac{2}{n}<2b_n<8+\frac{2}{n}$

$\therefore 4-\frac{1}{n}<b_n<4+\frac{1}{n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n}\right)=4$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=4$

유형 14 수열의 극한의 대소 관계 – 삼각함수를 포함한 수열

0073

답 0

$-1\leq\cos n\theta\leq 1$이므로

$-\frac{2n^2+1}{n^3+5}\leq\frac{(2n^2+1)\cos n\theta}{n^3+5}\leq\frac{2n^2+1}{n^3+5}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2n^2+1}{n^3+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^3+5}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+1)\cos n\theta}{n^3+5}=0$

0074

답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $-1\leq\cos\frac{n\pi}{3}\leq 1$이므로

$-\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}\leq\frac{1}{n^2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}=0$ (거짓)

ㄴ. $-1\leq\sin\frac{3n\pi}{4}\leq 1$이므로

$-\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{3n\pi}{4}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{3n\pi}{4}=0$ (참)

ㄷ. n은 자연수이므로

$0<\tan\frac{\pi}{5n}<\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\therefore 0<\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{5n}<\frac{1}{n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{\pi}{5n}=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0075

답 −2

$-1\leq\sin n\theta\leq 1$이므로

$-\frac{1}{n^2}\leq\frac{\sin n\theta}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$ ····· ❶

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n^2}=0$ ····· ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+\sin n\theta}{-5n-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{\sin n\theta}{n^2}}{-\frac{5}{n}-1}=-2$ ····· ❸

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

채점 기준	배점
❶ $\frac{\sin n\theta}{n^2}$에 대한 부등식 세우기	20%
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n^2}$의 값 구하기	30%
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+\sin n\theta}{-5n-n^2}$의 값 구하기	50%

유형 15 수열의 극한에 대한 진위 판단

0076

답 ④

ㄱ. [반례] $a_n=n$, $b_n=n^2$

이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (거짓)

ㄴ. $a_nb_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=\frac{c_n}{a_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이고, $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\times\lim_{n\to\infty}c_n=0$ (참)

ㄷ. [반례] $a_n=\frac{2}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$

이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만 $a_n>b_n$ (거짓)

ㄹ. $a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=c_n-a_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-a_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{a_n}-1\right)=0-1=-1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

0077

답 ①

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}a_n=\beta-\alpha$

즉, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n+b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다. (참)

ㄴ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$

이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}1=1$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ (거짓)

ㄷ. [반례] $a_n=-1$, $b_n=1$, $c_n=(-1)^n$

이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=-1$, $\lim_{n\to\infty}b_n=1$이지만 수열 $\{c_n\}$은 발산(진동)한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

0078

답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, …

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, …

이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다. (거짓)

ㄴ. $a_n<b_n$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이다. (참)

ㄷ. [반례] $a_n=\frac{3}{2n}$

이면 $\frac{1}{n}<a_n<1$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n}=0$ (거짓)

ㄹ. $-|a_n|\le a_n\le|a_n|$이고 $\lim_{n\to\infty}(-|a_n|)=\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

0079

답 ④

① [반례] $a_n=n$, $b_n=-n$

이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty$ (거짓)

② [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$

이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1}=-1$

즉, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 발산(진동)하지만 수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴한다. (거짓)

③ [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$

이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ (거짓)

④ $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\right\}$

$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\right\}$

$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

즉, 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다. (참)

⑤ [반례] $a_n=n-\frac{1}{n}$, $b_n=n+\frac{1}{n}$, $c_n=n$

이면 $a_n<c_n<b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}c_n=\infty$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ④이다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 16 등비수열의 극한

확인 문제 (1) 수렴 (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴

(1) 공비가 0.7이고 $-1<0.7<1$이므로 0에 수렴한다.

(2) 공비가 -4이고 $-4<-1$이므로 발산한다.

(3) 공비가 $\sqrt{3}$이고 $\sqrt{3}>1$이므로 발산한다.

(4) 공비가 $-\frac{2}{3}$이고 $-1<-\frac{2}{3}<1$이므로 0에 수렴한다.

0080

답 10

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times5^{n+1}+1}{5^n+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10+\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n}=10$$

0081

답 -2

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\times a_n-4^{n+1}}{4^n\times a_n+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n\times a_n-4}{a_n+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{-4}{\alpha}$$

따라서 $-\frac{4}{\alpha}=2$이므로 $\alpha=-2$

0082

답 ④

$x^2-2x-1=0$에서 $x=1\pm\sqrt{2}$

$\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=1-\sqrt{2}$로 놓으면 $|\alpha|>|\beta|$이므로

$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+\beta\times\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}$$
$$=\alpha=1+\sqrt{2}$$

참고

$\alpha=1-\sqrt{2}$, $\beta=1+\sqrt{2}$로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\times\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}+\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}+1}=\beta=1+\sqrt{2}$$

0083

답 5

$5^{n+1}-3^n<(2^{n+1}+5^n)a_n<2^n+5^{n+1}$에서

$$\frac{5^{n+1}-3^n}{2^{n+1}+5^n}<a_n<\frac{2^n+5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-3^n}{2^{n+1}+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=5,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+5}{2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=5$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=5$

0084

답 8

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4^n+2^{n+4}}-2^n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4^n+2^{n+4}}-2^n)(\sqrt{4^n+2^{n+4}}+2^n)}{\sqrt{4^n+2^{n+4}}+2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+4}}{\sqrt{4^n+2^{n+4}}+2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{\sqrt{1+16\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1}$$
$$=\frac{16}{1+1}=8$$

0085

답 7

주어진 수열은 $7^{\frac{1}{2}}$, $7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$, $7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$, …이므로

제n항은 $7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$

이때 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$이고

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$이므로 주어진 수열의 극한값은 $7^1=7$이다.

0086

답 10

$2x^n+4x-3$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 a_n은

$a_n=2\times2^n+4\times2-3=2^{n+1}+5$ ……❶

$2x^n+4x-3$을 $x-5$로 나누었을 때의 나머지 b_n은

$b_n=2\times5^n+4\times5-3=2\times5^n+17$ ……❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2^{n+1}+5^{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+2\times5^n+22}{2^{n+1}+5^{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+2\times5+22\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{4\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+1}$$
$$=10$$ ……❸

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

채점 기준	배점
❶ a_n 구하기	30%
❷ b_n 구하기	30%
❸ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{2^{n+1}+5^{n-1}}$의 값 구하기	40%

유형 17 등비수열의 극한 – 수열의 합

0087

답 $\frac{4}{5}$

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=4^n+5^n-3-(4^{n-1}+5^{n-1}-3)$

$=3\times 4^{n-1}+4\times 5^{n-1}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\times 4^{n-1}+4\times 5^{n-1}}{4^n+5^n-3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+\frac{4}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1-3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\dfrac{4}{5}$

0088

답 ③

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n\times 3^{n-1}-(n-1)\times 3^{n-2}$

$=3n\times 3^{n-2}-(n-1)\times 3^{n-2}$

$=(2n+1)\times 3^{n-2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\times 3^{n-1}}{(2n+1)\times 3^{n-2}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$

0089

답 4

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1이고 공비가 r이므로

$a_n=1\times r^{n-1}=r^{n-1}$

$\therefore S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}r^{k-1}=\dfrac{1\times(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{r^n-1}{r-1}$

$r>1$에서 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$, 즉 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{n-1}}{\frac{r^n-1}{r-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n-r^{n-1}}{r^n-1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r^n}}=1-\dfrac{1}{r}$

따라서 $1-\dfrac{1}{r}=\dfrac{3}{4}$이므로 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{4}$ $\therefore r=4$

0090

답 $\frac{3}{2}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_3=a_1+a_1r^2=90$

$\therefore a_1(1+r^2)=90$ …… ㉠

$a_2+a_4=a_1r+a_1r^3=270$

$\therefore a_1r(1+r^2)=270$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=3$

❶

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $a_1(1+9)=90$ $\therefore a_1=9$

❷

따라서 $a_n=9\times 3^{n-1}=3^{n+1}$이고

$S_n=\dfrac{9(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{9}{2}(3^n-1)$이므로

❸

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{9}{2}(3^n-1)}{3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{9}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{3}=\dfrac{3}{2}$

❹

채점 기준	배점
❶ 등비수열 $\{a_n\}$의 공비 구하기	30%
❷ 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항 구하기	20%
❸ a_n, S_n 구하기	20%
❹ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{a_n}$의 값 구하기	30%

유형 18 등비수열의 수렴 조건

확인 문제 (1) $-\frac{1}{3}<r\leq\frac{1}{3}$ (2) $-2\leq r<2$

(1) 공비가 $3r$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<3r\leq 1$ $\therefore -\dfrac{1}{3}<r\leq\dfrac{1}{3}$

(2) 공비가 $-\dfrac{r}{2}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<-\dfrac{r}{2}\leq 1$ $\therefore -2\leq r<2$

0091

답 20

공비가 $\dfrac{2x-7}{5}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\dfrac{2x-7}{5}\leq 1$이어야 한다.

$-5<2x-7\leq 5$, $2<2x\leq 12$

$\therefore 1<x\leq 6$

따라서 구하는 모든 정수 x의 값의 합은

$2+3+4+5+6=20$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0092

답 ③

공비가 $\frac{|k|}{3}-2$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{|k|}{3}-2\le 1$이어야 한다.

$1<\frac{|k|}{3}\le 3,\ 3<|k|\le 9$

따라서 구하는 정수 k는 $\pm 4,\ \pm 5,\ \cdots,\ \pm 9$의 12개이다.

0093

답 372

공비가 $\log_3 x-2$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\log_3 x-2\le 1$이어야 한다.

$1<\log_3 x\le 3,\ \log_3 3<\log_3 x\le \log_3 3^3$

$\therefore\ 3<x\le 27$

따라서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은

$4+5+6+\cdots+27=\frac{24\times(4+27)}{2}=372$

0094

답 ②

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로 $-1<r\le 1$

ㄱ. $-1<r\le 1$에서 $-\frac{1}{4}<\frac{r}{4}\le\frac{1}{4}$이므로 수열 $\left\{\left(\frac{r}{4}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

ㄴ. $-1<r\le 1$에서 $-1\le -r<1$

이때 $-r=-1$, 즉 $r=1$이면 수열 $\{(-r)^n\}$은 발산(진동)한다.

ㄷ. $-1<r\le 1$에서 $-1\le -r<1$

$0\le 1-r<2\qquad\therefore\ 0\le\frac{1-r}{3}<\frac{2}{3}$

즉, 수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{3}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

ㄹ. $-1<r\le 1$에서 $0\le r^2\le 1$

$0\le\frac{r^2}{2}\le\frac{1}{2}\qquad\therefore\ -1\le\frac{r^2}{2}-1\le-\frac{1}{2}$

이때 $\frac{r^2}{2}-1=-1$, 즉 $r=0$이면 수열 $\left\{\left(\frac{r^2}{2}-1\right)^n\right\}$은 발산(진동)한다.

따라서 항상 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄷ이다.

0095

답 ①

공비가 $\frac{x^2-4x}{5}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-4x}{5}\le 1$이어야 한다.

$-5<x^2-4x\le 5$에서

(i) $-5<x^2-4x$, 즉 $x^2-4x+5>0$일 때

$(x-2)^2+1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $x^2-4x\le 5$, 즉 $x^2-4x-5\le 0$일 때

$(x+1)(x-5)\le 0$

$\therefore\ -1\le x\le 5$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 x의 값의 범위는

$-1\le x\le 5$

따라서 구하는 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 7개이다.

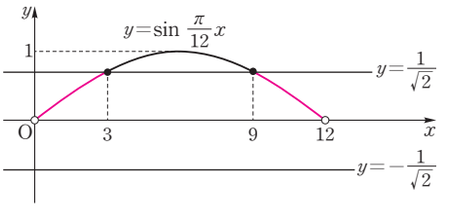
0096

답 ④

공비가 $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}x$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}x\le 1$이어야 한다.

$\therefore\ -\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\frac{\pi}{12}x\le\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots$ ㉠



이때 $0<x<12$에서 $0<\frac{\pi}{12}x<\pi$이므로 부등식 ㉠의 해는

$0<\frac{\pi}{12}x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le\frac{\pi}{12}x<\pi$

즉, $0<x\le 3$ 또는 $9\le x<12$

따라서 구하는 자연수 x는 1, 2, 3, 9, 10, 11의 6개이다.

0097

답 −8

주어진 수열은 첫째항이 $(x+1)(x^2-6x+8)$, 공비가 x^2-6x+8인 등비수열이므로 이 수열이 수렴하려면

$(x+1)(x^2-6x+8)=0$ 또는 $-1<x^2-6x+8\le 1$

$\therefore\ x+1=0$ 또는 $-1<x^2-6x+8\le 1$

$x+1=0$에서 $x=-1\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$-1<x^2-6x+8\le 1$에서

(i) $-1<x^2-6x+8$, 즉 $x^2-6x+9>0$일 때

$(x-3)^2>0$

$\therefore\ x\ne 3$인 모든 실수

(ii) $x^2-6x+8\le 1$, 즉 $x^2-6x+7\le 0$일 때

$3-\sqrt{2}\le x\le 3+\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $3-\sqrt{2}\le x<3$ 또는 $3<x\le 3+\sqrt{2}\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 모든 정수 x는 -1, 2, 4이므로 구하는 곱은

$-1\times 2\times 4=-8$

유형 19 r^n을 포함한 수열의 극한

0098

답 −1

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$a=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3}{1+r^n}=-3$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로

$b=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3}{1+r^n}=\frac{1-3}{1+1}=-1$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$c=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{r^n}}{\frac{1}{r^n}+1}=1$

(i)~(iii)에서 $a-b+c=-3-(-1)+1=-1$

0099

답 8

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{n+1}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+5}{1-2r^n}=5$

..... ❶

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{n+1}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+5}{1-2r^n}=\frac{1+5}{1-2}=-6$

..... ❷

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+5}{1-2r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r+\frac{5}{r^n}}{\frac{1}{r^n}-2}=-\frac{r}{2}$

..... ❸

(i)~(iii)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+5}{1-2r^n}=-4$를 만족시키는 실수 r의 값은

$-\frac{r}{2}=-4$에서 $r=8$

..... ❹

채점 기준	배점
❶ $\lvert r\rvert<1$일 때, 극한값 구하기	30%
❷ $r=1$일 때, 극한값 구하기	20%
❸ $\lvert r\rvert>1$일 때, 극한값 구하기	30%
❹ r의 값 구하기	20%

0100

답 ②

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=\lim_{n\to\infty} r^{2n+1}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+2}{r^{2n}+1}=2$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=\lim_{n\to\infty} r^{2n+1}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+2}{r^{2n}+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+2}{r^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r+\frac{2}{r^{2n}}}{1+\frac{1}{r^{2n}}}=r$

(iv) $r=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty} r^{2n+1}=-1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+2}{r^{2n}+1}=\frac{-1+2}{1+1}=\frac{1}{2}$

(i)~(iv)에서 주어진 수열의 극한값이 될 수 없는 것은 ②이다.

0101

답 8

(i) $|r|<4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+2r^n}{4^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\times\left(\frac{r}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{r}{4}\right)^n}=1$

(ii) $r=4$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+2\times4^n}{4^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times4^n}{2\times4^n}=\frac{3}{2}$

(iii) $|r|>4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{r}\right)^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+2r^n}{4^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{r}\right)^n+2}{\left(\frac{4}{r}\right)^n+1}=2$

(i)~(iii)에서 주어진 수열의 극한값이 2보다 작으려면

$-4<r\le4$

따라서 구하는 정수 r는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4의 8개이다.

0102

답 ①

(i) $0<\frac{m}{5}<1$, 즉 $0<m<5$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1}=2$

(ii) $\frac{m}{5}=1$, 즉 $m=5$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}\neq2$

(iii) $\frac{m}{5}>1$, 즉 $m>5$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^n=\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{m}{5}+\frac{2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n}}{1+\frac{1}{\left(\frac{m}{5}\right)^n}}=\frac{m}{5}$

$\frac{m}{5}=2$에서 $m=10$

(i)~(iii)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1}=2$가 되도록 하는 자연수 m은

1, 2, 3, 4, 10의 5개이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 20 x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수

0103

답 ①

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n-1}=\lim_{n\to\infty} x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x-3}{x^{2n}+1}=x-3$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n-1}=\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x-3}{x^{2n}+1}=\frac{1+1-3}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x-3}{x^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2n-1}}-\frac{3}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n-1}=-1$, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x-3}{x^{2n}+1}=\frac{-1-1-3}{1+1}=-\frac{5}{2}$$

(i)~(iv)에서

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & (|x|<1)\\ -\frac{1}{2} & (x=1)\\ \frac{1}{x} & (|x|>1)\\ -\frac{5}{2} & (x=-1)\end{cases}$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1)+(f\circ f)(3)$$

$$=f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-3\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-3\right)$$

$$=-\frac{26}{3}$$

다른 풀이

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)-3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}+1}=-\frac{1}{2}-3=-\frac{7}{2}$$

$$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}+(-1)-3}{(-1)^{2n}+1}=\frac{-1-1-3}{1+1}=-\frac{5}{2}$$

$$f(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n-1}+3-3}{3^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3^{2n}}}=\frac{1}{3}$$

$$(f\circ f)(3)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}+\frac{1}{3}-3}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}+1}=\frac{1}{3}-3=-\frac{8}{3}$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1)+(f\circ f)(3)$$

$$=-\frac{7}{2}-\frac{5}{2}-\frac{8}{3}=-\frac{26}{3}$$

0104

답 ③

(i) $-1<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{n-1}=\lim_{n\to\infty} x^{n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{x^{n-1}+1}=-1$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{n-1}=\lim_{n\to\infty} x^{n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{x^{n-1}+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{n-1}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{x^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2-\frac{1}{x^{n-1}}}{1+\frac{1}{x^{n-1}}}=x^2$$

(i)~(iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 ③이다.

0105

답 18

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}-3}{1^n+2}=-\frac{2}{3}$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}-3}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+2}=-\frac{3}{2}$$

그런데 $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^n|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-3}{x^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{3}{x^n}}{1+\frac{2}{x^n}}=x$$

$$\therefore f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore (f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))=f\left(f\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

따라서 $p=-\frac{3}{2}$이므로 $8p^2=8\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2=18$

0106

답 ②

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^n+3}{3x^n+1}=3$$

(ii) $x=1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^n+3}{3x^n+1}=\frac{2+3}{3+1}=\frac{5}{4}$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^n|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^n+3}{3x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^n}}{3+\frac{1}{x^n}}=\frac{2}{3}$$

(i)~(iii)에서 함수 $f(x)$의 치역은 $\left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, 3\right\}$이므로 치역의 모든 원소의 곱은

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}\times 3=\frac{5}{2}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0107

답 $1<k<2$ 또는 $2<k<3$

(i) $0\le x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+3x}{x^{2n}+1}=3x$$

❶

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+3x}{x^{2n}+1}=\frac{1+3}{1+1}=2$$

❷

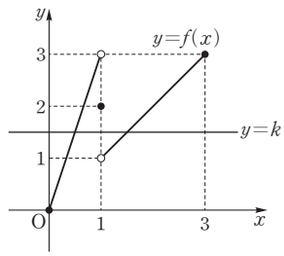
(iii) $1<x\le 3$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+3x}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{3}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x$$

❸

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는

$1<k<2$ 또는 $2<k<3$



❹

채점 기준	배점
❶ $0\le x<1$일 때, $f(x)$의 식 구하기	20%
❷ $x=1$일 때, 함숫값 구하기	20%
❸ $1<x\le 3$일 때, $f(x)$의 식 구하기	30%
❹ k의 값의 범위 구하기	30%

유형 21 수열의 극한의 활용 - 그래프

0108

답 ③

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 접선 l_n의 기울기는 $2n$이다.

즉, 점 $P_n(n, n^2)$을 지나고 기울기가 $2n$인 직선 l_n의 방정식은

$y=2n(x-n)+n^2=2nx-n^2$ …… ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$0=2nx-n^2$ $\therefore x=\frac{n}{2}$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$y=2n\times 0-n^2=-n^2$

즉, $Q_n\left(\frac{n}{2}, 0\right)$, $R_n(0, -n^2)$이므로

$\overline{Q_nS_n}=\overline{Q_nP_n}=\sqrt{\left(n-\frac{n}{2}\right)^2+(n^2)^2}=\sqrt{\frac{n^2}{4}+n^4}$,

$\overline{P_nR_n}=\sqrt{n^2+(2n^2)^2}=\sqrt{n^2+4n^4}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{Q_nS_n}}{\overline{P_nR_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n^2}{4}+n^4}}{\sqrt{n^2+4n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{4n^2}+1}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+4}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

0109

답 16

$P_n(n, 4^n)$, $Q_n(n, 3^n)$이므로

$\overline{P_nQ_n}=4^n-3^n$, $\overline{P_{n+2}Q_{n+2}}=4^{n+2}-3^{n+2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_{n+2}Q_{n+2}}}{\overline{P_nQ_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}-3^{n+2}}{4^n-3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16-9\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=16$$

0110

답 41

$P_n(4^n, 2^n)$, $P_{n+1}(4^{n+1}, 2^{n+1})$이므로

$\overline{P_nQ_n}=2^n$, $\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}=2^{n+1}$

이때 $\overline{Q_nQ_{n+1}}=4^{n+1}-4^n$이므로 사각형 $P_nQ_nQ_{n+1}P_{n+1}$의 넓이는

$a_n=\frac{1}{2}\times(2^n+2^{n+1})\times(4^{n+1}-4^n)$

$=\frac{1}{2}\times(3\times 2^n)\times(3\times 4^n)=\frac{9}{2}\times 8^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-4^{n+1}}{a_n+2^{3n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{2}\times 8^{n+1}-4^{n+1}}{\frac{9}{2}\times 8^n+\frac{1}{2}\times 2^{3n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{36\times 8^n-4\times 4^n}{\frac{9}{2}\times 8^n+\frac{1}{2}\times 8^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{36-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{9}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{36}{5}$$

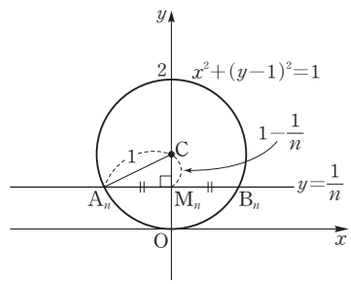
따라서 $p=5$, $q=36$이므로

$p+q=5+36=41$

0111

답 ④

다음 그림과 같이 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 중심을 C, 직선 $y=\frac{1}{n}$이 y축과 만나는 점을 M_n이라 하자.



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때 $C(0, 1)$, $M_n\left(0, \frac{1}{n}\right)$이므로

$\overline{CM_n}=1-\frac{1}{n}$, $\overline{CA_n}=1$

↳ 점 C에서 현 A_nB_n에 내린 수선의 발이 M_n이므로 $\angle CM_nA_n=90^\circ$

직각삼각형 CA_nM_n에서 피타고라스 정리에 의하여

$\left(\frac{l_n}{2}\right)^2=\overline{A_nM_n}^2=\overline{CA_n}^2-\overline{CM_n}^2$

$=1^2-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2=\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}$

$\frac{(l_n)^2}{4}=\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}$ $\therefore (l_n)^2=\frac{8}{n}-\frac{4}{n^2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} n(l_n)^2=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{8}{n}-\frac{4}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{4}{n}\right)=8$

0112

답 ③

$A_n(n, \sqrt{5n+4})$이므로

$a_n=\overline{OA_n}=\sqrt{n^2+5n+4}$

$B_n(n, \sqrt{2n-1})$이므로

$b_n=\overline{OB_n}=\sqrt{n^2+2n-1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{12}{a_n-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{\sqrt{n^2+5n+4}-\sqrt{n^2+2n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{12(\sqrt{n^2+5n+4}+\sqrt{n^2+2n-1})}{(n^2+5n+4)-(n^2+2n-1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{12(\sqrt{n^2+5n+4}+\sqrt{n^2+2n-1})}{3n+5}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{12\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)}{3+\frac{5}{n}}$

$=\frac{12(1+1)}{3}=8$

0113

답 4

$nx=\frac{1}{x}$에서 $x^2=\frac{1}{n}$

$\therefore x=-\frac{\sqrt{n}}{n}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{n}}{n}$

즉, 직선 $y=nx$와 곡선 $y=\frac{1}{x}$이 만나는 두 점의 좌표는

$\left(-\frac{\sqrt{n}}{n}, -\sqrt{n}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{n}}{n}, \sqrt{n}\right)$ ❶

두 점 사이의 거리 a_n은

$a_n=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{n}}{n}\right)^2+(2\sqrt{n})^2}=2\sqrt{\frac{1}{n}+n}$ ❷

$\sqrt{n}a_n=\sqrt{n}\times 2\sqrt{\frac{1}{n}+n}=2\sqrt{n^2+1}$

$\sqrt{n+2}a_{n+2}=2\sqrt{(n+2)^2+1}=2\sqrt{n^2+4n+5}$ ❸

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}a_{n+2}-\sqrt{n}a_n)$

$=2\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+5}-\sqrt{n^2+1})$

$=2\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n+5}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{n^2+1}}$

$=2\lim_{n\to\infty}\frac{4n+4}{\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{n^2+1}}$

$=2\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$

$=2\times\frac{4}{1+1}=4$ ❹

채점 기준	배점
❶ 직선 $y=nx$와 곡선 $y=\frac{1}{x}$이 만나는 두 점의 좌표 구하기	20%
❷ a_n 구하기	20%
❸ $\sqrt{n}a_n$, $\sqrt{n+2}a_{n+2}$ 구하기	30%
❹ $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}a_{n+2}-\sqrt{n}a_n)$의 값 구하기	30%

유형 22 수열의 극한의 활용 - 도형

0114

답 6

$a_1=1$, $a_2=1+2$, $a_3=1+2+3$, …에서

$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$b_1=4$, $b_2=4+6$, $b_3=4+6+8$, …에서

$b_n=4+6+8+\cdots+(2n+2)=\sum_{k=1}^{n}(2k+2)$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}+2n=n^2+3n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+9n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+18n}{n^2+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{18}{n}}{1+\frac{1}{n}}=6$

0115

답 $6\sqrt{3}$

$[(n+1)$단계$]$에서는 $[n$단계$]$의 삼각형의 $\frac{1}{4}$씩 제거하므로

$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n$이다.

이때 $a_1=\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=\frac{3\sqrt{3}}{16}$이므로

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$이고 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이다.

$\therefore a_n=\frac{3\sqrt{3}}{16}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{6\times3^{n+1}+2^n}{4^{n+1}\times a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times3^{n+1}+2^n}{4^{n+1}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times3^{n+1}+2^n}{\sqrt{3}\times3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times3+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{3}}$$

$$=6\sqrt{3}$$

0116

답 π

$a_1=2+\frac{\pi}{3}$, $a_2=2+\frac{\pi}{3^2}$, $a_3=2+\frac{\pi}{3^3}$, …에서

$a_n=2+\frac{\pi}{3^n}$ ❶

$b_1=\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{2}$, $b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$이므로

$b_n=\frac{\pi}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(3^n a_n-\frac{1}{3}\right)b_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2\times3^n+\pi-\frac{1}{3}\right)\times\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\pi+\frac{\pi^2}{2\times3^n}-\frac{\pi}{2\times3^{n+1}}\right)$$

$$=\pi$$ ❸

채점 기준	배점
❶ a_n 구하기	35%
❷ b_n 구하기	35%
❸ $\lim_{n\to\infty}\left(3^n a_n-\frac{1}{3}\right)b_n$의 값 구하기	30%

0117

답 ③

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=4+n^2$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{n^2+4}$

한편, 선분 AD가 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$2:n=(\sqrt{n^2+4}-a_n):a_n$

$n\sqrt{n^2+4}-na_n=2a_n$

$(n+2)a_n=n\sqrt{n^2+4}$

따라서 $a_n=\frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)-n\sqrt{n^2+4}}{n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n+2}\times(n+2-\sqrt{n^2+4})\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n+2}\times\frac{(n+2)^2-(n^2+4)}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\times\frac{4n}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\right)$$

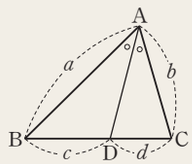
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\times\frac{4}{1+\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}\right)$$

$$=1\times\frac{4}{1+1}=2$$

Bible Says 각의 이등분선의 성질

삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때,

$a:b=c:d$



PART B 내신 잡는 종합 문제

0118

답 ①

$\frac{1+a_n}{a_n}=n^2+2$에서

$\frac{1}{a_n}+1=n^2+2$, $\frac{1}{a_n}=n^2+1$

$\therefore a_n=\frac{1}{n^2+1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1$$

0119

답 ⑤

$a-3\neq0$, 즉 $a\neq3$이면

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)n^3+(b-5)n^2+1}{2n^2+3}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$a=3$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)n^3+(b-5)n^2+1}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-5)n^2+1}{2n^2+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-5)+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{b-5}{2}$$

따라서 $\frac{b-5}{2}=4$이므로 $b-5=8$ $\therefore b=13$

$\therefore b-a=13-3=10$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0120 답 ③

$3^n x^2+4^n x+1$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$a_n=3^n+4^n+1$

$3^n x^2+4^n x+1$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$b_n=3^{n+2}+3\times 4^n+1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n+1}{3^{n+2}+3\times 4^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+3+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{1}{3}$$

0121 답 ③

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$,

$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$에서

$\alpha+\beta=3$ …… ㉠

$\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2-b_n{}^2)=12$에서

$\alpha^2-\beta^2=12$

즉, $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=12$이므로

$3(\alpha-\beta)=12$

$\therefore \alpha-\beta=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{7}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta=\frac{7}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{4}$$

0122 답 5

$2n<\sqrt{a_n}<2n+1$에서

$4n<\sqrt{a_{2n}}<4n+1$

$16n^2<a_{2n}<16n^2+8n+1$

$20n^2<a_{2n}+4n^2<20n^2+8n+1$

$$\therefore \frac{20n^2}{4n^2+3}<\frac{a_{2n}+4n^2}{4n^2+3}<\frac{20n^2+8n+1}{4n^2+3}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{20n^2}{4n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{20n^2+8n+1}{4n^2+3}=\frac{20}{4}=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+4n^2}{4n^2+3}=5$$

0123 답 ③

$$\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+3}\left\{\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{n+3}\times\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{(n+3)(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}=4$$

0124 답 ③

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=q$

$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}$에서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-p^2+\frac{6(2n-1)}{\sqrt{4(2n-1)^2+1}}\right\}=\lim_{n\to\infty}(4p-9)$$

p가 상수이므로 $-p^2+3=4p-9$

$p^2+4p-12=0$, $(p+6)(p-2)=0$

$\therefore p=2$ ($\because p>0$)

$$\therefore q=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=4p-9=4\times 2-9=-1$$

$\therefore p-q=2-(-1)=3$

0125 답 ③

조건 ㈏에서 $\frac{1}{3n^2+1}<\frac{a_nb_n}{9n^2}<\frac{1}{3n^2-1}$이므로

$$\frac{9n^2}{3n^2+1}<a_nb_n<\frac{9n^2}{3n^2-1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2}{3n^2-1}=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=3$

조건 ㈎에서 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$

$$=5\times 5-2\times 3=19$$

0126 답 4

(i) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+3r+2}{r^n+1}=3r+2$$

즉, $3r+2=\frac{7}{2}$이므로 $3r=\frac{3}{2}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+3r+2}{r^n+1}=\frac{1+3+2}{1+1}=3\neq\frac{7}{2}$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+3r+2}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r+\frac{3}{r^{n-1}}+\frac{2}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=r$$

$\therefore r=\frac{7}{2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(i)~(iii)에서 구하는 모든 r의 값의 합은

$\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=4$

0127

답 ①

이차방정식 $x^2+4\sqrt{a_n}x+3a_{n+1}=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\sqrt{a_n})^2-3a_{n+1}=0$

$4a_n-3a_{n+1}=0 \quad \therefore a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{4}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=4\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+2^{2n+1}}{3^n a_n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12\times\left(\frac{4}{3}\right)^n+2\times 4^n}{3\times 4^n-2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+2}{3-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\frac{2}{3}$$

0128

답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{(4-\sqrt{2}\cos x)^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left\{3\times\left(\frac{3}{4-\sqrt{2}\cos x}\right)^{n-1}\right\}$$

이고 이 극한이 0이 아닌 극한값을 가지므로

$\frac{3}{4-\sqrt{2}\cos x}=1$

$3=4-\sqrt{2}\cos x$

$\therefore \cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

이때 $\pi<x<2\pi$이므로 $x=\frac{7}{4}\pi$

0129

답 -7

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+1}=-1$$

$$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}-1}{(-1)^{2n}+1}=\frac{-1-1}{1+1}=-1$$

$|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(-1)-6f(2)+15f(-3)$$

$$=(-1)\times(-1)-6\times\frac{1}{2}+15\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$=1-3-5=-7$$

0130

답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=7 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a_6=a+5d=16 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=3$이므로

$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2})(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2})}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{3-\frac{2}{n}}}=\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

0131

답 ③

$\frac{a_n}{b_n}=c_n$으로 놓으면 $b_n=\frac{a_n}{c_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=\infty$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n}=0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(a_nb_n+2{a_n}^2-\frac{b_n}{a_n}+5\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n\times\frac{a_n}{c_n}+2{a_n}^2-\frac{\frac{a_n}{c_n}}{a_n}+5\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n\times\frac{a_n}{c_n}+2{a_n}^2-\frac{1}{c_n}+5\right)$$

$=3\times 0+2\times 3^2-0+5=23$

0132

답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=21$에서 $a_1+a_1r+a_1r^2=21$

$\therefore a_1(1+r+r^2)=21 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a_4+a_5+a_6=168$에서 $a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=168$

$\therefore a_1r^3(1+r+r^2)=168 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=8 \quad \therefore r=2$ ($\because r$는 실수)

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$7a_1=21 \quad \therefore a_1=3$

즉, $a_n=3\times 2^{n-1}$이므로

$a_{2n}=3\times 2^{2n-1}=\frac{3}{2}\times 4^n$

이때 $S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$이므로

${S_n}^2=9(4^n-2^{n+1}+1)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{\,2}}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9(4^n-2^{n+1}+1)}{\frac{3}{2}\times 4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\left\{1-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{\frac{3}{2}}$$

$$=9\times\frac{2}{3}=6$$

0133

답 ③

직선 $y=g(x)$는 원점과 점 $(3, 3)$을 지나므로 $g(x)=x$이다.

주어진 그래프에서 $f(2)=4$, $g(2)=2$이므로

$$h(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(2)\}^{n+1}+5\{g(2)\}^n}{\{f(2)\}^n+\{g(2)\}^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5\times 2^n}{4^n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=4$$

또한 $f(3)=3$, $g(3)=3$이므로

$$h(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(3)\}^{n+1}+5\{g(3)\}^n}{\{f(3)\}^n+\{g(3)\}^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5\times 3^n}{3^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8\times 3^n}{2\times 3^n}=4$$

$\therefore h(2)+h(3)=4+4=8$

0134

답 ⑤

$\sqrt{(3n)^2}<\sqrt{9n^2+5n+1}<\sqrt{(3n+1)^2}$이므로

$a_n=3n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9n^2+5n+1}-a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9n^2+5n+1}-3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+5n+1}+3n}{(\sqrt{9n^2+5n+1}-3n)(\sqrt{9n^2+5n+1}+3n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+5n+1}+3n}{5n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}{5+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=6$이므로

$p+q=5+6=11$

0135

답 10

$a\le 0$이면 $\lim_{n\to\infty}(an+b-\sqrt{4n^2-3n+1})=-\infty$이므로

$a>0$

$$\lim_{n\to\infty}(an+b-\sqrt{4n^2-3n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an+b-\sqrt{4n^2-3n+1})(an+b+\sqrt{4n^2-3n+1})}{an+b+\sqrt{4n^2-3n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an+b)^2-(4n^2-3n+1)}{an+b+\sqrt{4n^2-3n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a^2-4)n^2+(2ab+3)n+b^2-1}{an+b+\sqrt{4n^2-3n+1}}$$

이 극한값이 존재하려면 $a^2-4=0$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>0)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(a^2-4)n^2+(2ab+3)n+b^2-1}{an+b+\sqrt{4n^2-3n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4b+3)n+b^2-1}{2n+b+\sqrt{4n^2-3n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4b+3)+\frac{b^2-1}{n}}{2+\frac{b}{n}+\sqrt{4-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{4b+3}{2+2}$$

위 식의 극한값이 2이므로 $\frac{4b+3}{4}=2$

$4b+3=8$, $4b=5$ $\quad\therefore b=\frac{5}{4}$

$\therefore 4ab=4\times 2\times\frac{5}{4}=10$

0136

답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4x-1)^n}{8^n+9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4x-1}{9}\right)^n}{\left(\frac{8}{9}\right)^n+1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^n+1\right\}=0+1=1$이므로 주어진 수열이 수렴하려면

수열 $\left\{\left(\frac{4x-1}{9}\right)^n\right\}$이 수렴해야 한다.

수열 $\left\{\left(\frac{4x-1}{9}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{4x-1}{9}$인 등비수열이므로 이 수열이

수렴하려면 $-1<\frac{4x-1}{9}\le 1$이어야 한다.

$-9<4x-1\le 9$, $-8<4x\le 10$ $\quad\therefore -2<x\le\frac{5}{2}$

따라서 구하는 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

0137

답 $\frac{2}{9}$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라 하면

$3^n-2<S_n<3^n+2$에서

$3^{n-1}-2<S_{n-1}<3^{n-1}+2$이므로

$3^n-2-(3^{n-1}+2)<S_n-S_{n-1}<3^n+2-(3^{n-1}-2)$

$\therefore 2\times 3^{n-1}-4<a_n<2\times 3^{n-1}+4$

$$\therefore \frac{2\times 3^{n-1}-4}{3^{n+1}}<\frac{a_n}{3^{n+1}}<\frac{2\times 3^{n-1}+4}{3^{n+1}}$$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n-1}-4}{3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}-\frac{4}{3^n}}{3}=\frac{2}{9}$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n-1}+4}{3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{3^n}}{3}=\frac{2}{9}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^{n+1}}=\frac{2}{9}$

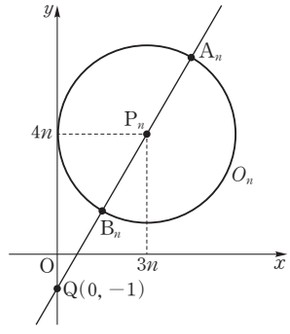
0138

답 4

자연수 n에 대하여 원 O_n의 중심을 $P_n(3n,\ 4n)$, 반지름의 길이를 r_n이라 하면 원 O_n이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 원의 중심 P_n의 x좌표와 같다.

$\therefore r_n=3n$

한편, $Q(0,\ -1)$이라 하고 직선 P_nQ와 원 O_n이 만나는 점 중 원점으로부터의 거리가 먼 점을 A_n, 가까운 점을 B_n이라 하자.



원 O_n 위를 움직이는 점과 점 Q 사이의 거리는

원 O_n 위를 움직이는 점이 점 A_n과 일치할 때 최댓값 $a_n=\overline{QA_n}$,

원 O_n 위를 움직이는 점이 점 B_n과 일치할 때 최솟값 $b_n=\overline{QB_n}$을 갖는다.

이때

$\overline{QP_n}=\sqrt{(3n-0)^2+\{4n-(-1)\}^2}=\sqrt{25n^2+8n+1}$,

$\overline{P_nA_n}=\overline{P_nB_n}=r_n=3n$이므로

$a_n=\overline{QP_n}+\overline{P_nA_n}=\sqrt{25n^2+8n+1}+3n$

$b_n=\overline{QP_n}-\overline{P_nB_n}=\sqrt{25n^2+8n+1}-3n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+8n+1}+3n}{\sqrt{25n^2+8n+1}-3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}-3}=\frac{5+3}{5-3}=4$

0139

답 60

겹쳐서 반으로 자를 때마다 종잇조각의 개수는 2배로 늘어나므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore a_n=2\times2^{n-1}=2^n$ ❶

주어진 직사각형의 넓이가 5이고 과정을 n번 반복했을 때의 종잇조각의 개수가 a_n, 종잇조각 하나의 넓이가 b_n이므로 $a_nb_n=5$

$\therefore b_n=\frac{5}{a_n}=\frac{5}{2^n}$ ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{12^{n+1}\times b_n}{3^n\times a_n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12^{n+1}\times\frac{5}{2^n}}{3^n\times2^n+4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{60\times6^n}{6^n+4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{60}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=60$ ❸

채점 기준	배점
❶ 일반항 a_n 구하기	30%
❷ 일반항 b_n 구하기	30%
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{12^{n+1}\times b_n}{3^n\times a_n+4^n}$의 값 구하기	40%

0140

답 $\frac{14}{3}$

(i) $-3<x<3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-3^n}{x^n+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x\times\left(\frac{x}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{x}{3}\right)^n+3}=-\frac{1}{3}$ ❶

(ii) $x=3$일 때

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-3^n}{x^n+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-3^n}{3^n+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^n}{4\times3^n}=\frac{1}{2}$ ❷

(iii) $3<x\le5$일 때

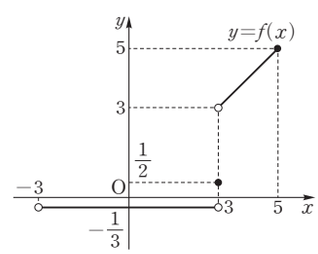
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^n=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-3^n}{x^n+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\left(\frac{3}{x}\right)^n}{1+3\times\left(\frac{3}{x}\right)^n}=x$ ❸

(i)~(iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이고 최댓값은 5이다.

따라서 구하는 합은

$-\frac{1}{3}+5=\frac{14}{3}$



❹

채점 기준	배점
❶ $-3<x<3$일 때, $f(x)$의 식 구하기	30%
❷ $x=3$일 때, 함숫값 구하기	20%
❸ $3<x\le5$일 때, $f(x)$의 식 구하기	30%
❹ 함수 $f(x)$의 최솟값과 최댓값의 합 구하기	20%

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART C 수능 녹인 변별력 문제

0141

답 ④

(i) $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, 즉 $-2<x<2$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=-1$

이때 $f(k)=k$를 만족시키는 실수 k는 -1이다.

(ii) $\frac{x}{2}=1$, 즉 $x=2$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=1$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\frac{3\times1-1}{1+1}=1$

이때 $f(k)=k$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

(iii) $\left|\frac{x}{2}\right|>1$, 즉 $x<-2$ 또는 $x>2$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\frac{x}{2}-\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}$

$=\frac{3}{2}x$

이때 $f(k)=k$를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

(iv) $\frac{x}{2}=-1$, 즉 $x=-2$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=-1$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\frac{3\times(-1)-1}{1+1}=-2$

이때 $f(k)=k$를 만족시키는 실수 k는 -2이다.

(i)~(iv)에서 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+(-2)=-3$

0142

답 ②

$a_n=\log_3(2n+1)-\log_3(2n-1)$

$=\log_3\frac{2n+1}{2n-1}$

이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=\log_3\frac{3}{1}+\log_3\frac{5}{3}+\log_3\frac{7}{5}+\cdots+\log_3\frac{2n+1}{2n-1}$

$=\log_3\left(\frac{3}{1}\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n-1}\right)$

$=\log_3(2n+1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+1}}{3^{a_1}\times3^{a_2}\times3^{a_3}\times\cdots\times3^{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+1}}{3^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+1}}{3^{\log_3(2n+1)}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+1}}{2n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{4}{2}=2$

0143

답 328

수열 $\left\{\left(\frac{x^3-48x}{128}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$-1<\frac{1}{128}x(x^2-48)\le1$

$-128<x(x^2-48)\le128$

(i) $-128<x(x^2-48)$에서 $x^3-48x+128>0$

$(x+8)(x-4)^2>0$

$\therefore -8<x<4$ 또는 $x>4$

(ii) $x(x^2-48)\le128$에서 $x^3-48x-128\le0$

$(x+4)^2(x-8)\le0$

$\therefore x\le8$

(i), (ii)에서 $-8<x<4$ 또는 $4<x\le8$

따라서 정수 x를 작은 수부터 크기순으로 나열하면 -7, -6, -5, $\cdots$, 2, 3, 5, 6, 7, 8이므로 $m=15$이다.

$\therefore \sum_{i=1}^{m}x_i^2=\sum_{i=1}^{15}x_i^2=2(7^2+6^2+5^2+\cdots+1^2)-4^2+8^2$

$=2\sum_{k=1}^{7}k^2+48=2\times\frac{7\times8\times15}{6}+48=328$

0144

답 ④

(i) $a<5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{5}\right)^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times a^n+5^{n+1}}{a^{n+1}+b\times5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\left(\frac{a}{5}\right)^n+5}{a\times\left(\frac{a}{5}\right)^n+b}=\frac{5}{b}$

즉, $\frac{5}{b}>1$이어야 하므로 $b<5$

따라서 $a<5$, $b<5$를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$4\times4=16$

(ii) $a=5$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times a^n+5^{n+1}}{a^{n+1}+b\times5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times5^n+5^{n+1}}{5^{n+1}+b\times5^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times5^n}{(5+b)5^n}=\frac{9}{5+b}$

즉, $\frac{9}{5+b}>1$이어야 하므로 $5+b<9$ $\therefore b<4$

따라서 $a=5$, $b<4$를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 3이다.

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(iii) $a>5$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times a^n+5^{n+1}}{a^{n+1}+b\times 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+5\times\left(\frac{5}{a}\right)^n}{a+b\times\left(\frac{5}{a}\right)^n}=\frac{4}{a}$$

즉, $\frac{4}{a}>1$이어야 하므로 $a<4$

그런데 $a>5$를 만족시키지 않으므로 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 없다.

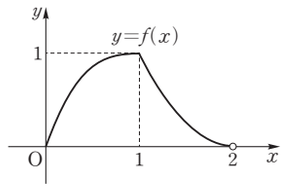
(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$16+3=19$

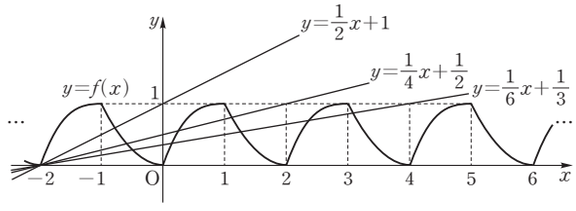
0145

답 $\frac{1}{3}$

조건 (가)에서 $0\le x<2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 주기가 2이므로 실수 전체의 집합에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



자연수 n에 대하여 $y=\frac{1}{2n}x+\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}(x+2)$에서

$n=1$일 때, 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$과의 교점은 2개이므로 $a_1=2$

$n=2$일 때, 직선 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$과의 교점은 4개이므로 $a_2=4$

$n=3$일 때, 직선 $y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$과의 교점은 6개이므로 $a_3=6$

⋮

$a_n=2n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{12n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n+2)}{12n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(2+\frac{2}{n}\right)}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

0146

답 9

$\frac{a^{n+1}+3a^n-5}{a^{n+2}-9a^n+3}=\frac{(a+3)a^n-5}{(a^2-9)a^n+3}$이므로

(i) $0<a<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+3)a^n-5}{(a^2-9)a^n+3}=-\frac{5}{3}$$

(ii) $a=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+3)a^n-5}{(a^2-9)a^n+3}=\frac{4\times 1-5}{-8\times 1+3}=\frac{1}{5}$$

(iii) $a>1$ $(a\ne 3)$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+3)a^n-5}{(a^2-9)a^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+3)-\frac{5}{a^n}}{(a^2-9)+\frac{3}{a^n}}=\frac{a+3}{a^2-9}=\frac{1}{a-3}$$

즉, $\frac{1}{a-3}=\frac{1}{5}$이므로 $a=8$

(iv) $a=3$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\lim\limits_{n\to\infty}3^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+3)a^n-5}{(a^2-9)a^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times 3^n-5}{3}=\infty$$

(i)~(iv)에서 주어진 수열이 $\frac{1}{5}$에 수렴하도록 하는 모든 양수 a의 값은 1, 8이므로 그 합은

$1+8=9$

0147

답 ③

ㄱ. $a_n=\frac{(-1)^n+3}{2}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$1, 2, 1, 2, \cdots$

n이 홀수일 때 a_n은 1, n이 짝수일 때 a_n은 2이므로 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다. (참)

ㄴ. $b_n=p\times(-1)^{n+1}+q$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$p+q, -p+q, p+q, -p+q, \cdots$

이때 $p=0$이면 수열 $\{b_n\}$은

$q, q, q, q, \cdots$

가 되어 수렴한다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여 수열 $\{a_n+b_n\}$은

$1+p+q, 2-p+q, 1+p+q, 2-p+q, \cdots$

이므로

$1+p+q=2-p+q$, 즉 $p=\frac{1}{2}$이면 수열 $\{a_n+b_n\}$은 수렴한다.

또한 수열 $\{a_n b_n\}$은

$1\times(p+q), 2\times(-p+q), 1\times(p+q), 2\times(-p+q), \cdots$

이므로

$1\times(p+q)=2\times(-p+q)$, $p+q=-2p+2q$에서 $3p=q$이면 수열 $\{a_n b_n\}$은 수렴한다.

이때 $p=\frac{1}{2}$, $q=3p=\frac{3}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(1+p+q)=3$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n b_n=\lim_{n\to\infty}\{1\times(p+q)\}=2$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_n b_n\}=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_n b_n=3^2-2\times 2=5\ (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

참고

두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$의 일반항을 이용하여 p, q의 값을 구할 수도 있다.

ㄷ. $a_n+b_n=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}+\{p\times(-1)^{n+1}+q\}$

$=\frac{1}{2}\times(-1)^n-p\times(-1)^n+\frac{3}{2}+q$

$=\left(\frac{1}{2}-p\right)\times(-1)^n+\frac{3}{2}+q$

이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하려면

$\frac{1}{2}-p=0$, 즉 $p=\frac{1}{2}$이어야 한다.

또한 $p=\frac{1}{2}$일 때

$a_nb_n=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^{n+1}+q\right\}$

$=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}\left\{-\frac{1}{2}\times(-1)^n+q\right\}$

$=-\frac{1}{4}\times(-1)^{2n}+\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)\times(-1)^n+\frac{3}{2}q$

$=\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)\times(-1)^n-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}q$

이므로 수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하려면

$\frac{q}{2}-\frac{3}{4}=0$, 즉 $q=\frac{3}{2}$이어야 한다.

0148

답 6

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)$

$=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$

$=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_{n+1}}-3$

즉, $\frac{1}{a_{n+1}}-3=n^2+4n$이므로

$\frac{1}{a_{n+1}}=n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$

따라서 $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+3)}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_n=\frac{1}{n(n+2)}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

이 식에 $n=1$을 대입하면 $a_1=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3}$이므로

$a_n=\frac{1}{n(n+2)}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(8n^2+3)a_nS_n$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8n^2+3}{n(n+2)}\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}\right)$

$=8\times\frac{3}{4}=6$

0149

답 ③

조건 (가)에서 $4^n<a_n<4^n+1$의 각 변을 4^n으로 나누면

$1<\frac{a_n}{4^n}<1+\frac{1}{4^n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=1$

조건 (나)에서

$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$

이므로 $2^{n+1}-2<b_n<2^{n+1}$의 각 변을 2^n으로 나누면

$2-\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{b_n}{2^n}<2$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}2=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^n}=2$

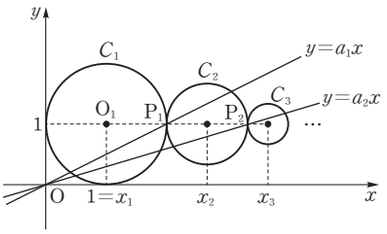
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+b_n}{2a_n+2^nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4a_n+b_n}{4^n}}{\frac{2a_n+2^nb_n}{4^n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{1}{2^n}\times\frac{b_n}{2^n}}{2\times\frac{a_n}{4^n}+\frac{b_n}{2^n}}$

$=\frac{4\times1+0\times2}{2\times1+2}=1$

0150

답 4



원 C_1은 반지름의 길이가 1이고 x축과 y축에 모두 접하므로 중심의 좌표는 $(1, 1)$이다.

원 C_n의 중심을 $O_n(x_n, y_n)$, 반지름의 길이를 r_n이라 하자.

조건 (다)에서 $y_n=1$, 조건 (나)에서 $r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n$이다.

즉, 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 r_1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

조건 (가)에서 $r_1=1$이므로 $r_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

조건 (나)에서 원 C_n과 원 C_{n+1}은 외접하므로

$x_1=r_1=1,\ x_2=2r_1+r_2,\ x_3=2(r_1+r_2)+r_3,\ \cdots$

즉, $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여

$$x_n=2\sum_{k=1}^{n-1}r_k+r_n=2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

점 P_1의 x좌표는 x_1+r_1, 점 P_2의 x좌표는 x_2+r_2, 점 P_3의 x좌표는 x_3+r_3, …이므로 점 P_n의 x좌표는

$$x_n+r_n=x_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이때 점 P_n의 y좌표는 $y_n=1$이므로

$$a_n=\frac{y_n}{x_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\frac{1}{4-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{4-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{4-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=4$$

0151

답 24

조건 (가)에서

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+bn+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n+1}{\sqrt{n^2+an+2}+\sqrt{n^2+bn+1}}$$

$$=\frac{a-b}{2}=3$$

$$\therefore\ a-b=6 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

조건 (나)에서

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{16^n+(a+b)^n}-4^n\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{16^n+(a+b)^n}-4^n\}\{\sqrt{16^n+(a+b)^n}+4^n\}}{\sqrt{16^n+(a+b)^n}+4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)^n}{\sqrt{16^n+(a+b)^n}+4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a+b}{4}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{16}\right)^n}+1}$$

(i) $\left|\frac{a+b}{4}\right|<1$, 즉 $|a+b|<4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+b}{4}\right)^n=0$이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

(ii) $a+b=4$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a+b}{4}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{16}\right)^n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $|a+b|>4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{a+b}{4}\right)^n\right|=\infty$이므로 주어진 수열은 발산한다.

(iv) $a+b=-4$일 때, 수열 $\left\{\left(\frac{a+b}{4}\right)^n\right\}$은 발산(진동)하므로 주어진 수열은 발산한다.

(i)~(iv)에서 수열 $\{\sqrt{16^n+(a+b)^n}-4^n\}$이 수렴하려면

$$-4<a+b\leq 4 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠에서 $a=b+6$이므로

$$a^2-b^2=(b+6)^2-b^2=12b+36$$

㉠, ㉡에서 $-4<2b+6\leq 4$이므로

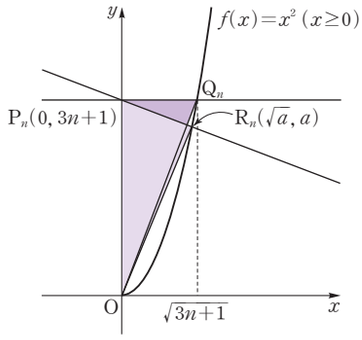
$$-10<2b\leq -2 \qquad \therefore\ -5<b\leq -1$$

따라서 $a^2-b^2=12b+36$의 최댓값은 $b=-1$일 때이므로

$$12\times(-1)+36=24$$

0152

답 ①



점 Q_n은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고 점 Q_n의 y좌표는 점 P_n의 y좌표와 같으므로 $Q_n(\sqrt{3n+1},\ 3n+1)$

즉, 삼각형 P_nOQ_n의 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{P_nQ_n}=\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n+1}$$

점 R_n은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고 y좌표가 자연수이므로 $R_n(\sqrt{a},\ a)$라 하자. (단, a는 자연수)

이때 직선 P_nR_n의 기울기 $\frac{a-(3n+1)}{\sqrt{a}}$이 음수이므로

$$a-(3n+1)<0 \qquad \therefore\ a<3n+1$$

삼각형 P_nOR_n의 넓이가 최대가 되려면 점 R_n의 x좌표 $\sqrt{a}$가 최대이어야 하므로 $a=3n$일 때이고, 이때 점 R_n의 좌표는 $(\sqrt{3n},\ 3n)$이므로 삼각형 P_nOR_n의 최대 넓이 T_n은

$$T_n=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\sqrt{3n}=\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n-T_n}{\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n+1}-\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2\sqrt{n}}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3n+1}{2\sqrt{n}}\times\frac{(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n})(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n})}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2(\sqrt{3n^2+n}+\sqrt{3n^2})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2\left(\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{3}\right)}=\frac{3}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A 02 급수

유형 01 급수의 합

확인 문제 (1) 2 (2) 3

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-3}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{4}{2} = 2$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = 3$

0153 답 ⑤

$S_n = \frac{5n^2-1}{n^2+2}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-1}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{5}{1} = 5$

0154 답 5

$S_n = \frac{25n^2+3n}{5(n+1)(n+2)}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{25n^2+3n}{5(n+1)(n+2)}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{25+\frac{3}{n}}{5\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{25}{5} = 5$

0155 답 $\frac{1}{6}$

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$이므로

$S_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{3n^2+5n} = \frac{n(n+1)}{2n(3n+5)} = \frac{n+1}{2(3n+5)}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2(3n+5)}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(3+\frac{5}{n}\right)} = \frac{1}{6}$

유형 02 부분분수를 이용하는 급수

0156 답 4

주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n = \frac{2}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{4}{n(n+1)}$

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)} = 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$= 4\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$= 4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

따라서 주어진 급수의 합은

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 4\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 4$

0157 답 14

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{84}{(2k+1)(2k+3)} = 42\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

$= 42\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$

$= 42\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{84}{(2n+1)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 42\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$

$= 42\times\frac{1}{3} = 14$

0158 답 ③

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+2)} = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$= \frac{3}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$= \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n'이라 하면

$b_n = \frac{3}{(n+1)(n+3)}$이므로

$S_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(k+1)(k+3)} = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$

$= \frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} S_n' = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{9}{4}\times\frac{5}{4} = \frac{45}{2^4}$$

참고

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n$임에 주의한다.
급수의 성질과 진위 판단은 유형 07, 유형 08에서 자세히 살펴보도록 한다.

0159

답 ④

$S_n = \frac{n\{2\times4+(n-1)\times2\}}{2} = n(n+3)$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)}$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{11}{6} = \frac{11}{18}$$

참고

공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$S_n = \frac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}$이다.

0160

답 13

2, 3은 소수이므로 $2^{n+1}\times3^{n+3}$의 모든 양의 약수의 개수 a_n은
$a_n = (n+2)(n+4)$ ❶

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{a_n}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{a_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(k+2)(k+4)}$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+4}\right)$$
$$= 2\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)\right\}$$
$$= 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$$ ❷

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{a_n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = 2\times\frac{7}{12} = \frac{7}{6}$$

따라서 $p=6$, $q=7$이므로
$p+q=6+7=13$ ❸

채점 기준	배점
❶ 일반항 a_n 구하기	30%
❷ 주어진 급수의 부분합 구하기	40%
❸ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{a_n}$의 값을 구하여 $p+q$의 값 구하기	30%

0161

답 1

주어진 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha_n+\beta_n = -2$, $\alpha_n\beta_n = -4n^2+1$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\beta_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k+\beta_k}{\alpha_k\beta_k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{-2}{-4k^2+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$= \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = 1$$

0162

답 ①

수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수이고 공차가 3인 등차수열이므로

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) \ (\because a_{n+1}-a_n = 3)$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

이때 $a_{n+1} = a_1+3n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+3n}\right) = \frac{1}{3a_1}$$

따라서 $\frac{1}{3a_1} = \frac{1}{6}$이므로 $3a_1 = 6$
$\therefore a_1 = 2$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 03 로그를 포함한 급수

0163

답 -1

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\\&=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k}{k+1}\times\frac{k+2}{k+1}\right)\\&=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log_2\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\log_2\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\\&\qquad+\cdots+\log_2\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)\\&=\log_2\left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\right.\\&\qquad\left.\times\cdots\times\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}\\&=\log_2\frac{n+2}{2(n+1)}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\log_2\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+2}{2(n+1)}=\log_2\frac{1}{2}=-1$$

Bible Says 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

0164

답 ②

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\log_5 a_k\\&=\log_5 a_1+\log_5 a_2+\log_5 a_3+\cdots+\log_5 a_n\\&=\log_5(a_1a_2a_3\cdots a_n)\\&=\log_5\frac{n-3}{5n+2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\log_5 a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_5\frac{n-3}{5n+2}=\log_5\frac{1}{5}=-1$$

0165

답 1

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k+1}{k}\times\frac{k+1}{k+2}\right)\\&=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\right)+\log_2\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\right)+\log_2\left(\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\right)\\&\qquad+\cdots+\log_2\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+1}{n+2}\right)\\&=\log_2\left\{\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\right)\right.\\&\qquad\left.\times\cdots\times\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+1}{n+2}\right)\right\}\\&=\log_2\frac{2(n+1)}{n+2}\end{aligned}$$ ❶

$$\therefore\ \sum_{n=2}^{\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{2(n+1)}{n+2}=\log_2 2=1$$ ❷

채점 기준	배점
❶ 주어진 급수의 부분합 구하기	60%
❷ $\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$의 값 구하기	40%

0166

답 3

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(\log_{k+1}8-\log_{k+2}8)\\&=(\log_2 8-\log_3 8)+(\log_3 8-\log_4 8)+(\log_4 8-\log_5 8)\\&\qquad+\cdots+(\log_{n+1}8-\log_{n+2}8)\\&=\log_2 8-\log_{n+2}8\\&=3-\frac{3}{\log_2(n+2)}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(\log_{n+1}8-\log_{n+2}8)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{3-\frac{3}{\log_2(n+2)}\right\}=3$$

다른 풀이

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\log_8(k+1)}-\frac{1}{\log_8(k+2)}\right\}\\&=\left(\frac{1}{\log_8 2}-\frac{1}{\log_8 3}\right)+\left(\frac{1}{\log_8 3}-\frac{1}{\log_8 4}\right)+\left(\frac{1}{\log_8 4}-\frac{1}{\log_8 5}\right)\\&\qquad+\cdots+\left\{\frac{1}{\log_8(n+1)}-\frac{1}{\log_8(n+2)}\right\}\\&=\frac{1}{\log_8 2}-\frac{1}{\log_8(n+2)}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(\log_{n+1}8-\log_{n+2}8)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\log_8 2}-\frac{1}{\log_8(n+2)}\right\}=\frac{1}{\log_8 2}=\log_2 8=3$$

참고

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때, $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 04 항의 부호가 교대로 바뀌는 급수

0167 답 ⑤

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

ㄱ. $S_{2n-1}=1+(-1+1)+\cdots+(-1+1)=1$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$

$S_{2n}=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)=0$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_{2n-1}=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)=1$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$

$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=1$이므로 주어진 급수는 수렴한다.

ㄷ. $S_n=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$

$=2-\frac{n+2}{n+1}$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$

즉, 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄴ, ㄷ이다.

0168 답 -2

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_{2n-1}=-2+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n-1}\right)$

$=-2$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=-2$

$S_{2n}=\left(-2+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)+\cdots+\left(-\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n+1}\right)$

$=-2+\frac{2}{2n+1}=-\frac{4n}{2n+1}$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{4n}{2n+1}\right)=-2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=-2$이므로 주어진 급수의 합은 -2이다.

다른 풀이

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=-2$, $S_2=-\frac{4}{3}$, $S_3=-2$, $S_4=-\frac{8}{5}$, $S_5=-2$, $S_6=-\frac{12}{7}$, $\cdots$

이므로 $S_{2n-1}=-2$, $S_{2n}=-\frac{4n}{2n+1}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=-2$, $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{4n}{2n+1}\right)=-2$이므로 주어진 급수의 합은 -2이다.

0169 답 ②

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=a_1$, $S_2=a_1-a_2$, $S_3=a_1$, $S_4=a_1-a_3$, $\cdots$이므로

$S_{2n-1}=a_1$, $S_{2n}=a_1-a_{n+1}$

이때 주어진 급수가 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이어야 하므로

$\lim_{n\to\infty}a_1=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})$에서 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0$이어야 한다.

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이어야 한다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+3}=0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{3n}=\frac{2}{3}\neq0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{3n}{n+2}=\log 3\neq0$

따라서 주어진 급수가 수렴하도록 하는 수열은 ㄱ, ㄷ이다.

0170 답 0

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}=a_{2n}=\frac{1}{n+1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-\cdots$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}+\cdots$

이 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_{2n-1}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$

$=-\frac{1}{n+1}$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=0$

$S_{2n}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)=0$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=0$

유형 05 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

0171 답 18

$\lim_{n\to\infty}S_n$, 즉 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore\lim_{n\to\infty}(2S_n+7a_n)=2\lim_{n\to\infty}S_n+7\lim_{n\to\infty}a_n$

$=2\times9+7\times0=18$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Bible Says 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-k)$ (k는 실수)가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-k)=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=k$이다.

0172

답 ①

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3a_n-\frac{1}{4}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(3a_n-\frac{1}{4}\right)=0$

$3a_n-\frac{1}{4}=b_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고, $a_n=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{12}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{12}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{12}$$
$$=\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

0173

답 ⑤

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n-4}{3a_n-2n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}-4-\frac{4}{n}}{\frac{3a_n}{n}-2-\frac{5}{n}}=\frac{0-4-0}{0-2-0}=2$$

0174

답 ③

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n+5)=3\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}5=3\times 3+5=14$$

0175

답 ⑤

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0$

또한 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면 주어진 조건에 의하여

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=24$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_n=24$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}+25a_{2n}}{a_n-6}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}+24a_{2n}}{a_n-6}$$
$$=\frac{24+24\times 0}{0-6}=-4$$

0176

답 $\frac{1}{3}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3a_n-1}{4a_n+2}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-1}{4a_n+2}=0$

이때 $\frac{3a_n-1}{4a_n+2}=b_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고

$3a_n-1=b_n(4a_n+2)$, $3a_n-1=4a_nb_n+2b_n$

$(3-4b_n)a_n=2b_n+1$ $\therefore a_n=\frac{2b_n+1}{3-4b_n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n+1}{3-4b_n}=\frac{3\times 0+1}{3-4\times 0}=\frac{1}{3}$$

0177

답 -3

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n+2n}{n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+2n}{n}=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+2n}{n}=\lim_{n\to\infty}(a_n+2)=0$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=-2$

또한 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nb_n-\frac{2n^2-3}{n^2+2n}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_nb_n-\frac{2n^2-3}{n^2+2n}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\left(a_nb_n-\frac{2n^2-3}{n^2+2n}\right)=\lim_{n\to\infty}a_nb_n-2=0$에서 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{a_n}=\frac{2}{-2}=-1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=-2+(-1)=-3$

유형 06 급수의 수렴과 발산

0178

답 ②

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1}=\frac{1}{3}\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$이므로 주어진 급수가 수렴하는지 파악하려면 이 급수의 부분합을 살펴야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$이므로 주어진 급수는 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$

$$=\frac{2}{1+1}=1\neq 0$$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 수렴하는 급수는 ㄴ이다.

참고

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴과 발산을 조사할 때 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이어도 급수는 발산할 수 있다. 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합 S_n을 구한 후 수열 $\{S_n\}$의 수렴과 발산을 반드시 조사해야 한다.

0179

답 ⑤

① $\lim_{n\to\infty} 3n=\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

② $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

③ 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=2$, $S_2=\frac{1}{2}$, $S_3=2$, $S_4=\frac{2}{3}$, $S_5=2$, …에서

$S_{2n-1}=2$, $S_{2n}=\frac{n}{n+1}$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty} S_{2n}$

즉, 주어진 급수는 발산한다.

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

⑤ $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+2+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n(n+1)}=0$

이므로 주어진 급수가 수렴하는지 파악하려면 이 급수의 부분합을 살펴야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+2+\cdots+k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)}$$
$$=4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=4\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

즉, $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} 4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=4$이므로 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 수렴하는 급수는 ⑤이다.

0180

답 1

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^2+2n}=1\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$이므로 주어진 급수가 수렴하는지 파악하려면 이 급수의 부분합을 살펴야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$
$$+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$
$$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$$

즉, $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} (-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})=\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=0$이므로 주어진 급수가 수렴하는지 파악하려면 이 급수의 부분합을 살펴야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

즉, $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$이므로 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 수렴하는 급수의 개수는 1이다.

0181

답 ⑤

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} (n-5)=\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=1\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} \log\frac{2n-1}{2n+1}=\log 1=0$이므로 주어진 급수가 수렴하는지 파악하려면 이 급수의 부분합을 살펴야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} \log\frac{2k-1}{2k+1}$$
$$=\log\frac{1}{3}+\log\frac{3}{5}+\log\frac{5}{7}+\cdots+\log\frac{2n-1}{2n+1}$$
$$=\log\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n+1}\right)=\log\frac{1}{2n+1}$$

즉, $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \log\frac{1}{2n+1}=-\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 발산하는 급수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유형 07 급수의 성질

확인 문제 21

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=5$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty} a_n+3\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$=2\times 3+3\times 5=21$$

0182

답 4

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\sum_{n=1}^{\infty}(5a_n+2b_n)=5\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=17$에서

$5\alpha+2\beta=17$ ····· ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-7b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-7\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$에서

$3\alpha-7\beta=2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=3$, $\beta=1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3+1=4$

0183

답 ④

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)=22$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}3b_n&=\sum_{n=1}^{\infty}\{(2a_n+3b_n)-2a_n\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n\\&=22-2\times2=18\end{aligned}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}3b_n=\frac{1}{3}\times18=6$

0184

답 8

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+3)=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)=20$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+3)&=\sum_{n=1}^{\infty}\{(b_n+3)+(3a_n-b_n)\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+3)+\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)\\&=4+20=24\end{aligned}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+3)=\frac{1}{3}\times24=8$

0185

답 -2

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면 ····· ❶

$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n^{\,2}b_n=6$에서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n^{\,2}b_n&=\sum_{n=1}^{\infty}(2\log a_n+\log b_n)\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=6\end{aligned}$$

$2\alpha+\beta=6$ ····· ㉠ ····· ❷

$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n^{\,3}}{b_n}=4$에서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n^{\,3}}{b_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}(3\log a_n-\log b_n)\\&=3\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=4\end{aligned}$$

$3\alpha-\beta=4$ ····· ㉡ ····· ❸

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=2$, $\beta=2$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n}{b_n^{\,2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}(\log a_n-2\log b_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n\\&=\alpha-2\beta=2-4=-2\end{aligned}$$ ····· ❹

채점 기준	배점
❶ 수렴하는 두 급수를 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=\beta$로 놓기	10%
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n^{\,2}b_n$을 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$에 대하여 나타내기	30%
❸ $\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n^{\,3}}{b_n}$을 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$에 대하여 나타내기	30%
❹ $\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n}{b_n^{\,2}}$의 값 구하기	30%

0186

답 9

$S_n=\frac{6n}{n+1}$에서

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n+1}=6$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=6$

이때 $a_1=S_1=\frac{6}{2}=3$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-a_1=6-3=3$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=6+3=9$

유형 08 급수의 성질의 진위 판단

0187

답 ⑤

① [반례] $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$이지만

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\infty$ (거짓)

② [반례] $a_n=1$, $b_n=2$

이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim_{n\to\infty}b_n=2$

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}b_n$은 모두 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2\neq0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 발산한다. (거짓)

③ [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, ···, $\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, ···

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$으로 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다. (거짓)

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이다.

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다. (거짓)

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\beta-\alpha$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

0188

답 ②

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면 ㄱ에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=2-\alpha$$

즉, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이므로 ㄴ에 의하여

$\lim_{n\to\infty}b_n=2-0=2$

즉, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0189

답 ①

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=0$ (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴한다. (참)

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 0, 0, …, $\{b_n\}$: 0, 1, 0, 0, 0, …

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=1$이므로 $\alpha=\beta=1$

또한 $a_nb_n=0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$이다.

하지만 $\alpha\beta=1\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\neq\alpha\beta$이다. (거짓)

ㄹ. [반례] $\{a_n\}$: 0, 0, 0, 0, …, $\{b_n\}$: 1, 1, 1, 1, …

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty}b_n=1\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0190

답 ④

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓자.

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=0-\alpha=-\alpha$$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다. (참)

ㄴ. [반례] $\{a_n\}$: 0, 0, 0, …, $\{b_n\}$: 1, 2, 3, …

이면 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 모두 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$이므로 수열 $\{b_n\}$은 발산한다. (거짓)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=k$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2-2a_nb_n+{b_n}^2)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2-2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n+\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2$$
$$=k-2k+k=0$$

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n-b_n=0$이므로 $a_n=b_n$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

유형 09 급수의 활용

0191

답 ②

$x-2y+2=0$에서 $y=\frac{1}{2}x+1$

이때 1은 자연수이므로 y의 값이 자연수이려면 $\frac{1}{2}x$의 값도 자연수이어야 한다.

즉, x는 2의 배수이어야 한다.

$x=2n$ (n은 자연수)로 놓으면 $y=n+1$이므로

$a_n=2n$, $b_n=n+1$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0192

답 $\frac{1}{2}$

점 A_n의 좌표는 $\left(n, \frac{1}{n+1}\right)$이므로

$$\overline{A_nA_{n+1}}^2=\{(n+1)-n\}^2+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)^2$$
$$=1+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)^2$$

이때 $\sqrt{\overline{A_nA_{n+1}}^2-1}=\left|\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$이므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\overline{A_nA_{n+1}}^2-1}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\overline{A_kA_{k+1}}^2-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\overline{A_nA_{n+1}}^2-1}=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

0193

답 ②

직선 $(n+2)x+(n+3)y=5$의 x절편이 $\frac{5}{n+2}$, y절편이 $\frac{5}{n+3}$이므로

$$a_n=\frac{1}{2}\times\frac{5}{n+2}\times\frac{5}{n+3}$$
$$=\frac{25}{2}\times\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$
$$=\frac{25}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{25}{2}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{25}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{25}{6}$$

0194

답 ⑤

$\overline{AP}:\overline{PB}=n:1$에서 $\overline{AP}^2:\overline{PB}^2=n^2:1$이므로

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$(x^2+y^2):\{(x-3)^2+y^2\}=n^2:1$

$n^2\{(x-3)^2+y^2\}=x^2+y^2$

$(n^2-1)x^2-6n^2x+9n^2+(n^2-1)y^2=0$

$$x^2-\frac{6n^2}{n^2-1}x+\frac{9n^2}{n^2-1}+y^2=0$$
$$\left(x-\frac{3n^2}{n^2-1}\right)^2+y^2=\frac{9n^4}{(n^2-1)^2}-\frac{9n^2}{n^2-1}$$
$$=\frac{9n^4-9n^2(n^2-1)}{(n^2-1)^2}$$
$$=\frac{9n^2}{(n^2-1)^2}$$

따라서 집합 X_n이 나타내는 도형은 점 $\left(\frac{3n^2}{n^2-1}, 0\right)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{\frac{9n^2}{(n^2-1)^2}}=\frac{3n}{n^2-1}$인 원이다.

$$\therefore T_n=2\pi\times\frac{3n}{n^2-1}=\frac{6\pi n}{(n-1)(n+1)}$$

이때

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{T_n}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{6\pi n}{(n-1)(n+1)}}{n}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{6\pi}{(n-1)(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\pi}{n(n+2)}$$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\pi}{n(n+2)}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6\pi}{k(k+2)}$$
$$=3\pi\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=3\pi\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=3\pi\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{T_n}{n}=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}3\pi\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{9}{2}\pi$$

Bible Says 아폴로니우스의 원

좌표평면에서 두 점 A, B에 이르는 거리의 비가 $m:n$인 점의 자취는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원이 되고, 이 원을 '아폴로니우스의 원'이라 한다.

유형 10 등비급수의 합

확인 문제 (1) 1 (2) $\frac{2}{3}$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0195

답 ⑤

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}-2^{n-1}}{5^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9\times3^n-\frac{1}{2}\times2^n}{5\times5^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{9}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n-\frac{1}{10}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{9}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n-\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$
$$=\frac{9}{5}\times\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{1}{10}\times\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}$$
$$=\frac{9}{5}\times\frac{3}{2}-\frac{1}{10}\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{27}{10}-\frac{2}{30}=\frac{79}{30}$$

0196

답 ①

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\cos\frac{n\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\cos\pi+\left(\frac{1}{4}\right)^3\cos\frac{3}{2}\pi+\left(\frac{1}{4}\right)^4\cos2\pi+\cdots$$
$$=0-\frac{1}{4^2}+0+\frac{1}{4^4}+0-\frac{1}{4^6}+\cdots$$
$$=-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{4^6}+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4^2}\right)^n$$
$$=\frac{-\frac{1}{4^2}}{1-\left(-\frac{1}{4^2}\right)}=-\frac{1}{17}$$

0197

답 ④

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

0198

답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=a_1r^{n-1}=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

이므로

$(a_n)^2=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}^2=\left(\frac{1}{9}\right)^{n-2}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-2}=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{81}{8}$

0199

답 ⑤

3^n에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

3, 9, 27, 81, …

따라서 $a_1=3, a_2=1, a_3=3, a_4=1, \cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{7^n}=\frac{3}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{1}{7^4}+\frac{3}{7^5}+\frac{1}{7^6}+\cdots$$
$$=3\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{7^6}+\cdots\right)$$
$$=3\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^5}+\cdots\right)+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^5}+\cdots\right)$$
$$=\frac{22}{7}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^5}+\cdots\right)$$
$$=\frac{22}{7}\times\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}}=\frac{22}{7}\times\frac{7}{48}=\frac{11}{24}$$

0200

답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$a=0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{0+2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\infty\neq6$

즉, $a\neq0$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{ar^{n-1}+2^n}=6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $|r|<3$일 때 $\left|\frac{r}{3}\right|<1$, $0<\frac{2}{3}<1$이므로 ㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{a\times\left(\frac{r}{3}\right)^{n-1}+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}=\infty$$

즉, ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $r=-3$일 때 $\frac{r}{3}=-1$, $0<\frac{2}{3}<1$이므로 ㉠에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{a\times(-1)^{n-1}+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$은 발산(진동)한다.

즉, ㉠을 만족시키지 않는다.

(iii) $r=3$일 때 $\frac{r}{3}=1$, $0<\frac{2}{3}<1$이므로 ㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{a+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}=\frac{3}{a}$$

즉, $\frac{3}{a}=6$이므로 $a=\frac{1}{2}$

(iv) $|r|>3$일 때 $0<\left|\frac{3}{r}\right|<1$, $0<\left|\frac{2}{r}\right|<1$이므로 ㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{3}{r}\right)^{n-1}}{a+2\times\left(\frac{2}{r}\right)^{n-1}}=\frac{0}{a+0}=0$$

즉, ㉠을 만족시키지 않는다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(i)~(iv)에서 $r=3$, $a=\frac{1}{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 3인 등비수열이다.

따라서 $a_n=\frac{1}{2}\times 3^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}\times 3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$$

유형 11 합이 주어진 등비급수

0201

답 256

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=-4$ $\quad\therefore a=-\frac{4}{r}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또한 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하므로

$|r|<1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=\frac{-\frac{4}{r}}{1-r}=\frac{16}{3}$이므로

$-\frac{4}{r}=\frac{16}{3}(1-r)$에서

$-3=4r(1-r)$, $4r^2-4r-3=0$

$(2r+1)(2r-3)=0$

$\therefore r=-\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉡)

이를 ㉠에 대입하면 $a=-\frac{4}{-\frac{1}{2}}=8$

따라서 수열 $\{a_n^{\,2}\}$은 첫째항이 $8^2=64$이고 공비가 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}3a_n^{\,2}=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}=3\times\frac{64}{1-\frac{1}{4}}=3\times\frac{256}{3}=256$$

0202

답 ④

$x+x^2+x^3+\cdots$은 첫째항과 공비가 모두 x인 등비급수의 합이다.

이때 급수 $x+x^2+x^3+\cdots$은 수렴하므로 $|x|<1$이고

$x+x^2+x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}=9$에서

$x=9(1-x)$, $10x=9$

$\therefore x=\frac{9}{10}$

한편, $x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{27}x^4+\cdots$, 즉

$x+\left(-\frac{1}{3}x^2\right)+\frac{1}{9}x^3+\left(-\frac{1}{27}x^4\right)+\cdots$은 첫째항이 x이고 공비가 $-\frac{1}{3}x$인 등비급수의 합이다.

이때 $-\frac{1}{3}x=\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{9}{10}=-\frac{3}{10}$이므로 $\left|-\frac{1}{3}x\right|<1$

$$\therefore x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{27}x^4+\cdots=\frac{x}{1-\left(-\frac{1}{3}x\right)}$$

$$=\frac{\frac{9}{10}}{1-\left(-\frac{3}{10}\right)}=\frac{9}{13}$$

0203

답 $\frac{\pi}{6}$

$\cos^2x+\cos^4x+\cos^6x+\cdots$는 첫째항과 공비가 모두 $\cos^2x$인 등비급수의 합이다.

이때 급수 $\cos^2x+\cos^4x+\cos^6x+\cdots$는 수렴하므로 $\cos^2x<1$이고

$\cos^2x+\cos^4x+\cos^6x+\cdots=\frac{\cos^2x}{1-\cos^2x}=3$에서

$\cos^2x=3(1-\cos^2x)$, $4\cos^2x=3$

$\cos^2x=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$

0204

답 $\frac{8}{3}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_1+a_2=4$에서 $a_1+a_1r=4$이므로

$a_1(1+r)=4$ $\quad\therefore a_1=\frac{4}{1+r}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠ ❶

한편, 등비급수 $\sum_{n=3}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $0<r<1$

$$\sum_{n=3}^{\infty}a_n=\frac{a_3}{1-r}=\frac{a_1r^2}{1-r}$$

$$=\frac{4}{1+r}\times\frac{r^2}{1-r}\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{4r^2}{1-r^2}$$

즉, $\frac{4r^2}{1-r^2}=\frac{4}{3}$이므로 $3r^2=1-r^2$에서

$4r^2=1$, $r^2=\frac{1}{4}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because 0<r<1$) ❷

이를 ㉠에 대입하면

$a_1=\frac{4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}$ ❸

채점 기준	배점
❶ a_1을 공비 r를 포함한 식으로 나타내기	30%
❷ 공비 r의 값 구하기	40%
❸ a_1의 값 구하기	30%

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0205

답 16

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 모두 r라 하면

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 모두 수렴하므로 $|r|<1$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a_1}{1-r}=12$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{b_1}{1-r}=4$ …… ㉡

㉠−㉡에서 $\frac{a_1-b_1}{1-r}=8$

이때 $a_1-b_1=4$이므로

$\frac{4}{1-r}=8$, $1=2(1-r)$

$2r=1$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

이를 ㉠, ㉡에 각각 대입하여 정리하면

$a_1=6$, $b_1=2$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 $a_1b_1=6\times2=12$이고 공비가

$r^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\frac{12}{1-\frac{1}{4}}=16$

0206

답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

수열 $\left\{\frac{1}{a_n^{\,2}}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a^2}$, 공비가 $\frac{1}{r^2}$이고

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{\,2}}$이 수렴하므로 $\left|\frac{1}{r^2}\right|<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{\,2}}=\frac{\frac{1}{a^2}}{1-\frac{1}{r^2}}=\frac{r^2}{a^2(r^2-1)}=\frac{16}{9}$ …… ㉠

수열 $\left\{\frac{1}{a_{2n}}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{ar}$, 공비가 $\frac{1}{r^2}$이고 $\left|\frac{1}{r^2}\right|<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}=\frac{\frac{1}{ar}}{1-\frac{1}{r^2}}=\frac{r}{a(r^2-1)}=\frac{16}{9}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{r}{a}\times\frac{16}{9}=\frac{16}{9}$

$\frac{r}{a}=1$ $\therefore a=r$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{r^2-1}=\frac{16}{9}$

$r^2-1=\frac{9}{16}$, $r^2=\frac{25}{16}$

$\therefore r=\frac{5}{4}$ $(\because r>0)$, $a=\frac{5}{4}$ $(\because$ ㉢$)$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_{3n}}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{ar^2}=\frac{64}{125}$이고 공비가 $\frac{1}{r^3}=\frac{64}{125}$

인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{3n}}=\frac{\frac{64}{125}}{1-\frac{64}{125}}=\frac{64}{61}$

0207

답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_{2n-1}=ar^{2n-2}$, $a_{2n}=ar^{2n-1}$이므로

$a_{2n-1}-a_{2n}=ar^{2n-2}-ar^{2n-1}=ar^{2n-2}(1-r)$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a(1-r)$이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$은 수렴하므로 $|r^2|<1$ …… ㉠

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=\frac{a(1-r)}{1-r^2}$

$=\frac{a(1-r)}{(1+r)(1-r)}$

$=\frac{a}{1+r}=3$ …… ㉡

한편, 수열 $\{a_n^{\,2}\}$은 첫째항이 a^2이고 공비가 r^2인 등비수열이므로

㉠에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,2}=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1+r}\times\frac{a}{1-r}$

$=3\times\frac{a}{1-r}$ $(\because$ ㉡$)$

$=6$

$\therefore \frac{a}{1-r}=2$ …… ㉢

㉠에 의하여 $|r|<1$이므로 ㉢에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a}{1-r}=2$

참고

㉡에서 $a=3+3r$이고 ㉢에서 $a=2-2r$이므로 $3+3r=2-2r$에서

$r=-\frac{1}{5}$이다. 이를 다시 ㉡에 대입하면 $a=\frac{12}{5}$이다.

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{12}{5}$이고 공비가 $-\frac{1}{5}$인 등비수열이다.

유형 12 등비급수의 수렴 조건

0208

답 ③

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x-4}{9}\right)^n$이 수렴하려면 $\left|\frac{3x-4}{9}\right|<1$이어야 하므로

$-1<\frac{3x-4}{9}<1$에서

$-9<3x-4<9$, $-5<3x<13$

$\therefore -\frac{5}{3}<x<\frac{13}{3}$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x-4}{9}\right)^n$이 수렴하도록 하는 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4의 6개이다.

0209

답 ③

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\log_2 x^2-3)^{n-1}$이 수렴하려면 $|\log_2 x^2-3|<1$이어야 하므로 $-1<\log_2 x^2-3<1$에서

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$2<2\log_2|x|<4$, $1<\log_2|x|<2$

$2^1<|x|<2^2$

$\therefore -4<x<-2$ 또는 $2<x<4$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\log_2 x^2-3)^{n-1}$이 수렴하도록 하는 정수 x는 -3, 3의 2개이다.

주의 x의 값의 범위를 구할 때 사용되지는 않았지만 로그의 정의에 의하여 $x\neq0$임을 잊지 않도록 한다.

0210

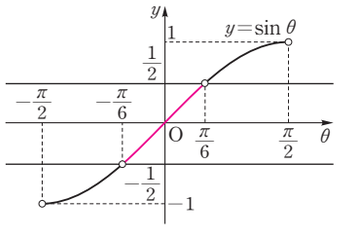
답 $-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{6}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2\sin\theta)^{n-1}$이 수렴하려면 $|2\sin\theta|<1$이어야 하므로

$-1<2\sin\theta<1$에서 $-\frac{1}{2}<\sin\theta<\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{6}\left(\because -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

참고



0211

답 9

$\frac{x+3}{2}+\frac{(x+3)(x-4)}{4}+\frac{(x+3)(x-4)^2}{8}+\cdots$은 첫째항이 $\frac{x+3}{2}$이고 공비가 $\frac{x-4}{2}$인 등비급수의 합이다.

이때 주어진 급수가 수렴하려면 $\frac{x+3}{2}=0$ 또는 $\left|\frac{x-4}{2}\right|<1$이어야 한다. ❶

(i) $\frac{x+3}{2}=0$일 때

$x+3=0$에서 $x=-3$

(ii) $\left|\frac{x-4}{2}\right|<1$일 때

$-1<\frac{x-4}{2}<1$에서 $-2<x-4<2$

$\therefore 2<x<6$

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $2<x<6$ ❷

따라서 주어진 급수가 수렴하도록 하는 정수 x는 -3, 3, 4, 5이므로 그 합은

$(-3)+3+4+5=9$ ❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 급수가 수렴하도록 하는 조건 찾기	40%
❷ 조건을 만족시키는 x의 값 또는 범위 구하기	40%
❸ ❷에서 구한 모든 정수 x의 값의 합 구하기	20%

0212

답 ③

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3^a+1)^n}{6^{3n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^a+1}{216}\right)^n$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$\left|\frac{3^a+1}{216}\right|<1$이어야 한다.

$-1<\frac{3^a+1}{216}<1$에서 $-216<3^a+1<216$

$\therefore -217<3^a<215$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3^a+1)^n}{6^{3n}}$이 수렴하도록 하는 자연수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

0213

답 $\frac{3}{4}<x\leq1$

수열 $\left\{\left(\frac{x+2}{3}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{x+2}{3}$인 등비수열이므로 이 수열이 수렴하려면 $-1<\frac{x+2}{3}\leq1$이어야 한다.

$-1<\frac{x+2}{3}\leq1$에서 $-3<x+2\leq3$

$\therefore -5<x\leq1$ ····· ㉠ ❶

한편, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2x-\frac{5}{2}\right)^{n-1}$이 수렴하려면 $\left|2x-\frac{5}{2}\right|<1$이어야 한다.

$-1<2x-\frac{5}{2}<1$에서 $\frac{3}{2}<2x<\frac{7}{2}$

$\therefore \frac{3}{4}<x<\frac{7}{4}$ ····· ㉡ ❷

수열 $\left\{\left(\frac{x+2}{3}\right)^n\right\}$과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2x-\frac{5}{2}\right)^{n-1}$이 모두 수렴하려면 ㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 구하는 x의 값의 범위는

$\frac{3}{4}<x\leq1$ ❸

채점 기준	배점
❶ 수열 $\left\{\left(\frac{x+2}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위 구하기	40%
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2x-\frac{5}{2}\right)^{n-1}$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위 구하기	40%
❸ 두 조건을 모두 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	20%

유형 13 등비급수의 수렴 여부 판단

0214

답 ③

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $|r|<1$이다.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n$ $(r\neq0)$은 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비급수이고

$|r|<1$에서 $\left|\frac{1}{r}\right|>1$이므로 발산한다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}$은 공비가 r인 등비급수이므로 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{r}{2}$인 등비급수이고 $|r|<1$에서

$\left|\frac{r}{2}\right|<\frac{1}{2}$이므로 수렴한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-3r}{3}\right)^n$은 공비가 $\frac{1-3r}{3}$인 등비급수이고 $|r|<1$, 즉 $-1<r<1$에서

$-3<-3r<3$, $-2<1-3r<4$

$\therefore -\frac{2}{3}<\frac{1-3r}{3}<\frac{4}{3}$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-3r}{3}\right)^n$이 항상 수렴하는 것은 아니다.

따라서 항상 수렴하는 급수는 ㄴ, ㄷ이다.

0215

답 ⑤

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $|r|<1$이다.

① $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{r}\times(r^2)^n\right\}$은 공비가 r^2인 등비급수이고 $|r|<1$에서 $0\le r^2<1$이므로 수렴한다.

② n이 홀수일 때 $\frac{r^n+(-r)^n}{2}=\frac{r^n-r^n}{2}=0$,

n이 짝수일 때 $\frac{r^n+(-r)^n}{2}=\frac{r^n+r^n}{2}=r^n$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}=0+r^2+0+r^4+0+r^6+\cdots$$
$$=r^2+r^4+r^6+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(r^2)^n$$

이때 $|r|<1$에서 $0\le r^2<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty}(r^2)^n$은 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+1}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{r+1}{2}$인 등비급수이고 $|r|<1$, 즉 $-1<r<1$에서 $0<\frac{r+1}{2}<1$이므로 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{r-1}{2}$인 등비급수이고 $|r|<1$, 즉 $-1<r<1$에서 $-1<\frac{r-1}{2}<0$이므로 수렴한다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}+1\right)^n$은 공비가 $\frac{r}{2}+1$인 등비급수이고 $|r|<1$, 즉 $-1<r<1$에서 $\frac{1}{2}<\frac{r}{2}+1<\frac{3}{2}$이므로 항상 수렴하는 것은 아니다.

따라서 항상 수렴하는 급수가 아닌 것은 ⑤이다.

참고

②에서 $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 공비가 $-r$인 등비급수이고 $-1<r<1$에서 $-1<-r<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$

임을 이용하여 주어진 급수가 수렴함을 보일 수도 있다.

0216

답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $a=0$ 또는 $|r|<1$ ····· ㉠

한편, 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 ar, 공비가 r^2인 등비수열이다.

이때 ㉠에 의하여 $ar=0$ 또는 $0\le r^2<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$도 수렴한다. (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 $a\ne0$이고 $|r|\ge1$이므로 $r^2\ge1$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$은 공비가 r^2인 등비급수이므로 발산한다.

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$도 발산한다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ne0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0217

답 ④

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2라 하자.

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n=0$ (참)

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n\ne0$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다. (참)

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$이 수렴하면 $a_1=0$ 또는 $0\le r^2<1$에서 $-1<r<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다. (참)

④ [반례] $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$이고

$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n\ne\sum_{n=1}^{\infty} a_n\times\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이다. (거짓)

⑤ 주어진 명제의 대우가 참이면 주어진 명제 또한 참임을 이용하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산한다고 가정하면

$a_1\ne0$이고 $|r_1|\ge1$ ····· ㉠

$b_1\ne0$이고 $|r_2|\ge1$ ····· ㉡

한편, $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 첫째항이 a_1b_1, 공비가 r_1r_2인 등비급수이다.

이때 ㉠, ㉡에 의하여 $a_1b_1\ne0$이고 $|r_1r_2|\ge1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 발산한다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$은 발산하므로 주어진 명제의 대우가 참이다.

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 중 적어도 하나는 수렴한다. (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

유형 14 S_n과 a_n 사이의 관계를 이용하는 급수

0218

답 $\frac{3}{8}$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=4$

(ii) $n\geq 2$일 때

$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1}\\ &=2(3^n-1)-2(3^{n-1}-1)\\ &=2\times(3-1)\times 3^{n-1}\\ &=4\times 3^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

이때 $a_1=4$는 $n=1$을 ㉠에 대입한 값과 같으므로

$a_n=4\times 3^{n-1}\ (n\geq 1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\times 3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}$$

0219

답 4

$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1}\\ &=12\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-12\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\\ &=12\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\\ &=12\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &=6\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n\geq 2) \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $6\times\frac{1}{2}=3$이고 공비가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$a_2+a_4+a_6+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4$$

0220

답 ④

$\log_2(S_n+1)=-2n$에서 $S_n+1=2^{-2n}$

$\therefore S_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n-1$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$

(ii) $n\geq 2$일 때

$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1}\\ &=\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n-1\right\}-\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-1\right\}\\ &=\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}-1\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\\ &=-\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

이때 $a_1=-\frac{3}{4}$은 $n=1$을 ㉠에 대입한 값과 같으므로

$a_n=-\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 $-\frac{3}{4}$이고 공비가 $\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\right\}=\frac{-\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{16}}=-\frac{4}{5}$$

0221

답 ②

$S_n=a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=7n$이라 하자.

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=7$

(ii) $n\geq 2$일 때

$3^{n-1}a_n=S_n-S_{n-1}=7n-7(n-1)=7$

$\therefore a_n=\frac{7}{3^{n-1}}$ ㉠

이때 $a_1=7$은 $n=1$을 ㉠에 대입한 값과 같으므로

$a_n=\frac{7}{3^{n-1}}\ (n\geq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 7이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{7}{1-\frac{1}{3}}=\frac{21}{2}$$

유형 15 순환소수와 등비급수

0222

답 ④

$0.\dot{2}=\frac{2}{9}$, $0.0\dot{1}\dot{9}=\frac{18}{900}=\frac{1}{50}$이므로 주어진 등비급수의 공비를 r라 하면

$$r^2=\frac{0.0\dot{1}\dot{9}}{0.\dot{2}}=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{2}{9}}=\frac{9}{100} \qquad \therefore r=\pm\frac{3}{10}$$

이때 주어진 등비급수의 모든 항은 양수이므로 $r=\frac{3}{10}$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{3}{10}}=\frac{20}{63}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0223

답 3

$0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, $0.\dot{2}\dot{a}=\frac{20+a}{99}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{a}{9}}{1-\frac{20+a}{99}}=\frac{11a}{79-a}$$

따라서 $\frac{11a}{79-a}=\frac{33}{76}$이므로

$11a\times76=(79-a)\times33$, $76a=237-3a$

$79a=237$ $\therefore a=3$

0224

답 ⑤

$\frac{4}{11}=\frac{36}{99}=0.\dot{3}\dot{6}$이므로

$$a_n=\begin{cases}3 & (n\text{은 홀수})\\ 6 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

$$\therefore \frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4}+\cdots$$

$$=\frac{3}{7}+\frac{6}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{6}{7^4}+\frac{3}{7^5}+\frac{6}{7^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{7^3}+\frac{3}{7^5}+\cdots\right)+\left(\frac{6}{7^2}+\frac{6}{7^4}+\frac{6}{7^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{1}{7^2}}+\frac{\frac{6}{7^2}}{1-\frac{1}{7^2}}=\frac{21}{48}+\frac{6}{48}=\frac{27}{48}=\frac{9}{16}$$

0225

답 ②

$$a_n=\frac{10^{n-1}}{10^n}+\frac{10^{n-1}}{10^{2n}}+\frac{10^{n-1}}{10^{3n}}+\cdots=\frac{\frac{10^{n-1}}{10^n}}{1-\frac{1}{10^n}}=\frac{10^{n-1}}{10^n-1}$$

이므로

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{10^{n+1}-1}{10^n}-\frac{10^n-1}{10^{n-1}}$$

$$=\frac{(10^{n+1}-1)-(10^{n+1}-10)}{10^n}=\frac{9}{10^n}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{9}{10}$이고 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$$

참고

$a_1=0.\dot{1}=\frac{1}{9}=\frac{1}{10-1}$

$a_2=0.\dot{1}\dot{0}=\frac{10}{99}=\frac{10}{10^2-1}$

$a_3=0.\dot{1}0\dot{0}=\frac{100}{999}=\frac{10^2}{10^3-1}$

⋮

$a_n=\frac{10^{n-1}}{10^n-1}$

을 이용하여 급수의 합을 구할 수도 있다.

유형 16 등비급수의 활용 - 좌표

0226

답 ②

기울기가 -1이고 점 $(a_n, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-(x-a_n)=-x+a_n$

$\therefore x+y-a_n=0$ …… ㉠

기울기가 음수인 이 직선이 원 $x^2+y^2=\frac{2}{3^n}$와 제1사분면에서 접하므로 $a_n>0$

또한 직선 ㉠과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-a_n|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{\frac{2}{3^n}}$, $|a_n|=\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{2}{3^n}}$

$\therefore a_n=\frac{2}{\sqrt{3^n}}$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 $a_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$이고 공비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$인 등비급수이므로

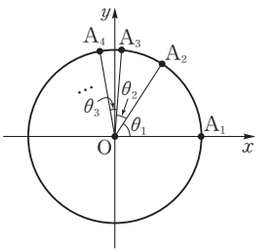
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{3}=1+\sqrt{3}$$

0227

답 ④

원점 O를 중심으로 하고 점 A_1을 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r=\overline{OA_1}=1$



$\angle A_nOA_{n+1}=\theta_n$이라 하자.

$\widehat{A_1A_2}=r\times\theta_1=\theta_1=1$

$\widehat{A_2A_3}=r\times\theta_2=\theta_2=\frac{1}{2}$

$\widehat{A_3A_4}=r\times\theta_3=\theta_3=\frac{1}{2^2}$

⋮

$\therefore \theta_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ …… ㉠

한편, 점 A_{n+1}의 좌표는 $(\cos(\angle A_1OA_{n+1}), \sin(\angle A_1OA_{n+1}))$이고 $\angle A_1OA_{n+1}=\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n$

이때 ㉠에 의하여 수열 $\{\theta_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}\angle A_1OA_n=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 점 A_{n+1}, 즉 점 A_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $(\cos 2,\ \sin 2)$이므로

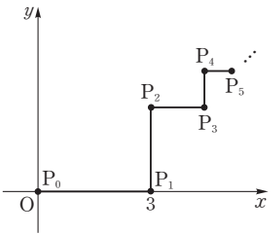
$a=\cos 2,\ b=\sin 2$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin 2}{\cos 2}=\tan 2$

0228

답 ②

㈎, ㈏, ㈐에 의하여 점 P_0, P_1, P_2, …를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



점 P_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 하면

$\overline{P_0P_1}=3,\ \overline{P_2P_3}=3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2,\ \overline{P_4P_5}=3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4,$ …이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=3+3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4+\cdots=\dfrac{3}{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{27}{5}$

$\overline{P_1P_2}=3\times\dfrac{2}{3},\ \overline{P_3P_4}=3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3,\ \overline{P_5P_6}=3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^5,$ …이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=3\times\dfrac{2}{3}+3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^5+\cdots=\dfrac{2}{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{18}{5}$

따라서 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{27}{5},\ \dfrac{18}{5}\right)$이다.

0229

답 $\dfrac{30}{13}$

점 P_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 하면

$\overline{OP_1}=2,\ \overline{P_2P_3}=2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2,\ \overline{P_4P_5}=2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4,$ …이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2-2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4-\cdots=\dfrac{2}{1-\left(-\dfrac{4}{9}\right)}=\dfrac{18}{13}$

$\therefore p=\dfrac{18}{13}$ ……❶

$\overline{P_1P_2}=2\times\dfrac{2}{3},\ \overline{P_3P_4}=2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3,\ \overline{P_5P_6}=2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^5,$ …이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=2\times\dfrac{2}{3}-2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^5-\cdots=\dfrac{\dfrac{4}{3}}{1-\left(-\dfrac{4}{9}\right)}=\dfrac{12}{13}$

$\therefore q=\dfrac{12}{13}$ ……❷

$\therefore p+q=\dfrac{18}{13}+\dfrac{12}{13}=\dfrac{30}{13}$ ……❸

채점 기준	배점
❶ p의 값 구하기	45%
❷ q의 값 구하기	45%
❸ $p+q$의 값 구하기	10%

유형 17 등비급수의 활용 – 선분의 길이

0230

답 6

$\angle XOY=60^\circ,\ \overline{OA_1}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots$

$=\overline{OA_1}\sin 60^\circ+\overline{A_1A_2}\cos 60^\circ+\overline{A_2A_3}\cos 60^\circ+\cdots$

$=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}+2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots$

$=\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{2}}=6$

0231

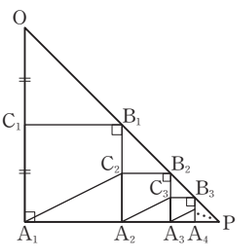
답 ④

사각형 $A_1A_2B_1C_1$은 점 A_1과 직각이등변삼각형 A_1PO의 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 정사각형이므로

$\overline{A_2B_1}=\dfrac{1}{2}\times\overline{A_1O}=\dfrac{1}{2}$

또한 사각형 $A_2A_3B_2C_2$는 점 A_2와 직각이등변삼각형 A_2PB_1의 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 정사각형이므로

$\overline{A_3B_2}=\dfrac{1}{2}\times\overline{A_2B_1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$



이때 $\overline{A_2C_2}=\overline{A_3B_2}=\dfrac{1}{4}$이므로 직각삼각형 $A_1A_2C_2$에서

$\overline{A_1C_2}=\sqrt{\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_2C_2}^2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}\ \left(\because \overline{A_1A_2}=\overline{A_2B_1}=\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

한편, 두 정사각형 $A_1A_2B_1C_1$과 $A_2A_3B_2C_2$의 닮음비는 $2:1$, 즉 $1:\dfrac{1}{2}$이므로 같은 과정을 반복하면 모든 자연수 n에 대하여 두 정사각형 $A_nA_{n+1}B_nC_n$과 $A_{n+1}A_{n+2}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는 $1:\dfrac{1}{2}$이다.

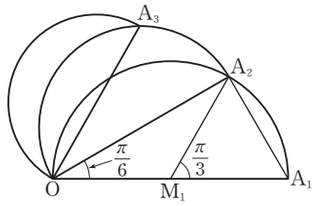
즉, 두 선분 A_nC_{n+1}과 $A_{n+1}C_{n+2}$의 길이의 비는 $1:\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 수열 $\{\overline{A_nC_{n+1}}\}$은 첫째항이 $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{A_nC_{n+1}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{5}}{4}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

0232

답 ①



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\angle A_1OA_2=\frac{\pi}{6}$이므로 선분 OA_1의 중점을 M_1이라 하면 원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle A_1M_1A_2=\frac{\pi}{3}$

이때 $\overline{M_1A_1}=\frac{1}{2}\overline{OA_1}=\frac{1}{2}$이므로

$l_1=\overline{M_1A_1}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

한편, 직각삼각형 A_1A_2O에서

$\overline{OA_2}=\overline{OA_1}\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉, 선분 OA_1을 지름으로 하는 반원과 선분 OA_2를 지름으로 하는 반원의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

같은 과정을 반복하면 모든 자연수 n에 대하여 선분 OA_n을 지름으로 하는 반원과 선분 OA_{n+1}을 지름으로 하는 반원의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $l_n:l_{n+1}=1:\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{6}$이고 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{\pi}{6}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\pi}{3(2-\sqrt{3})}=\frac{(2+\sqrt{3})\pi}{3}$$

0233

답 ②

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$, $g(x)=3x(x-1)$이라 하자.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면 x에 대한 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉

$3x^2-\left\{3+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$의 실근은 1, x_n이다.

위의 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1\times x_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ x_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

이를 함수 $f(x)$의 식에 대입하면

$$f(x_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 점 P_n의 y좌표는 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$$\overline{P_nH_n}=\left|\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nH_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$$

유형 18 등비급수의 활용 - 둘레의 길이

0234

답 ③

$\overline{A_1B_1}=4$이므로 $l_1=4\times\overline{A_1B_1}=4\times4=16$

한편, 점 A_2는 선분 A_1B_1의 중점이므로

$\overline{A_2B_1}=\frac{1}{2}\times\overline{A_1B_1}=2$

또한 삼각형 $A_2B_1B_2$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{A_2B_2}=\sqrt{2}\times\overline{A_2B_1}=2\sqrt{2}$

두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는 $4:2\sqrt{2}$, 즉 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $l_1:l_2=1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

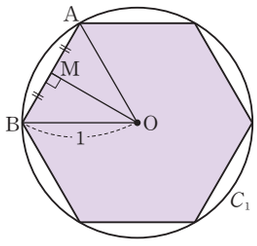
같은 과정을 반복하면 두 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $l_n:l_{n+1}=1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 16이고 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{16}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{32}{2-\sqrt{2}}=16(2+\sqrt{2})$$

0235

답 $4(2+\sqrt{3})\pi$



원 C_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자.

원 C_1의 반지름의 길이는 1이므로

$l_1=2\pi\times1=2\pi$

한편, 원 C_1의 중심을 O라 하고 내접하는 정육각형의 이웃하는 두 꼭짓점을 각각 A, B라 하자.

이때 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 원 C_2의 반지름의 길이는

$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

두 원 C_1과 C_2의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $l_1:l_2=1:\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

같은 과정을 반복하면 두 원 C_n과 C_{n+1}의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$l_n:l_{n+1}=1:\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

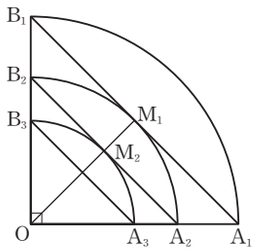
따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 2π이고 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{2\pi}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\pi}{2-\sqrt{3}}=4(2+\sqrt{3})\pi$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0236

답 ①



$\overline{OA_1}=2$이므로 호 A_1B_1의 길이는

$\overline{OA_1}\times\frac{\pi}{2}=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$

또한 삼각형 B_1OA_1은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{A_1B_1}=\sqrt{2}\times\overline{OA_1}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ l_1=2\sqrt{2}+\pi$

한편, 점 M_1은 선분 A_1B_1의 중점이므로 직각이등변삼각형 B_1OA_1에서

$\overline{OM_1}=\overline{A_1M_1}=\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}=\sqrt{2}$

이때 사분원 OA_2B_2의 반지름의 길이는 $\overline{OM_1}=\sqrt{2}$

두 사분원 OA_1B_1과 OA_2B_2의 닮음비는 $2:\sqrt{2}$, 즉 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$l_1:l_2=1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

같은 과정을 반복하면 두 사분원 OA_nB_n과 $OA_{n+1}B_{n+1}$의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $l_n:l_{n+1}=1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{2}+\pi$이고 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{2\sqrt{2}+\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2(2\sqrt{2}+\pi)}{2-\sqrt{2}}=(2+\sqrt{2})(2\sqrt{2}+\pi)$$

유형 19 등비급수의 활용 - 넓이

0237

답 ③

그림 R_1에서 큰 정사각형의 한 변의 길이는 4이므로 4개로 나누어진 정사각형의 한 변의 길이는 2이다.

$\therefore\ S_1=2^2=4$

한편, 그림 R_1에서 색칠되지 않은 3개의 정사각형의 한 변의 길이는 모두 2이므로 이 정사각형 중 1개를 4개의 정사각형으로 나누었을 때, 나누어진 정사각형의 한 변의 길이는 1이다.

따라서 그림 R_1에서 색칠된 정사각형과 그림 R_2에서 새로 색칠된 정사각형의 닮음비는 $2:1$, 즉 $1:\frac{1}{2}$이고 넓이의 비는 $1:\frac{1}{4}$이다.

같은 과정을 반복하면 두 그림 R_n과 R_{n+1}에 각각 새로 색칠된 부분의 넓이의 비는 $1:\frac{1}{4}$이다.

즉, S_n은 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}$$

0238

답 40

정사각형 S_n의 넓이를 a_n이라 하고, 직각이등변삼각형 T_n의 넓이를 b_n이라 하자.

정사각형 S_1의 한 변의 길이가 4이므로

$a_1=4^2=16$

직각이등변삼각형 T_1의 빗변의 길이는 4이므로 남은 두 변의 길이는 모두 $2\sqrt{2}$이다.

$\therefore\ b_1=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2=4$

정사각형 S_2는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$이고, 직각이등변삼각형 T_2의 빗변의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 남은 두 변의 길이는 모두 2이다.

따라서 두 정사각형 S_1과 S_2의 닮음비는 $4:2\sqrt{2}$, 즉 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이고 두 직각이등변삼각형 T_1과 T_2의 닮음비는 $2\sqrt{2}:2$, 즉 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

같은 과정을 반복하면 모든 자연수 n에 대하여 두 정사각형 S_n과 S_{n+1}의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 넓이의 비는

$a_n:a_{n+1}=1^2:\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1:\frac{1}{2}$

두 직각이등변삼각형 T_n과 T_{n+1}의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 넓이의 비는

$b_n:b_{n+1}=1^2:\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1:\frac{1}{2}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 16이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이고 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서 구하는 부분의 넓이의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\\&=\frac{16}{1-\frac{1}{2}}+\frac{4}{1-\frac{1}{2}}\\&=32+8=40\end{aligned}$$

다른 풀이

정사각형 S_n의 넓이를 s_n, 직각이등변삼각형 T_n의 넓이를 t_n이라 하자.

정사각형 S_1의 한 변의 길이가 직각이등변삼각형 T_1의 빗변의 길이와 같으므로

$t_1=\frac{1}{4}s_1$ $\therefore\ s_1=4t_1$

정사각형 S_2의 한 변의 길이가 직각이등변삼각형 T_1의 빗변이 아닌 한 변의 길이와 같으므로

$t_1=\frac{1}{2}s_2$ $\therefore\ s_2=2t_1$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

두 정사각형 S_1과 S_2의 넓이가 비가 $s_1 : s_2 = 4t_1 : 2t_1 = 1 : \frac{1}{2}$이므로 두 정사각형 S_1과 S_2의 한 변의 길이를 빗변으로 하는 두 직각이등변삼각형 T_1과 T_2의 넓이의 비도 $1 : \frac{1}{2}$이다.

즉, 두 도형 S_1+T_1과 S_2+T_2의 넓이의 비도 $1 : \frac{1}{2}$이므로 같은 과정을 반복하면 두 도형 S_n+T_n과 $S_{n+1}+T_{n+1}$의 넓이의 비도 $1 : \frac{1}{2}$이다.

이때 $a_n = s_n + t_n$이라 하면

$a_1 = s_1 + t_1 = s_1 + \frac{1}{4}s_1 = \frac{5}{4}s_1 = \frac{5}{4} \times 4^2 = 20$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 20이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 구하는 부분의 넓이의 합은

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{20}{1-\frac{1}{2}} = 40$

0239

답 ⑤

$\overline{OA_1} = \sqrt{3}$, $\overline{B_1D_1} = 2\overline{C_1D_1}$이므로

$\overline{B_1D_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\overline{C_1D_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 직각삼각형 $E_1A_1B_1$에서

$\overline{A_1E_1} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{A_1E_1} : \overline{A_1B_1} = 1 : \sqrt{3}$이므로

$\angle A_1B_1E_1 = \frac{\pi}{6}$이고

$\angle D_1B_1E_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

따라서 부채꼴 $B_1D_1E_1$의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2}{9}\pi$

부채꼴 $C_1C_2D_1$의 넓이는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

$\therefore S_1 = \frac{2}{9}\pi + \frac{\pi}{12} = \frac{11}{36}\pi$

한편, 그림 R_1에 색칠된 모양의 도형과 그림 R_2에 새로 색칠된 모양의 도형의 닮음비는 두 직사각형 $OA_1B_1C_1$과 $OA_2B_2C_2$의 닮음비 $\overline{OC_1} : \overline{OC_2} = 1 : \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 : \frac{3-\sqrt{3}}{3}$과 같다.

같은 과정을 반복하면 두 그림 R_n과 R_{n+1}에 각각 새로 색칠된 모양의 도형의 닮음비도 $1 : \frac{3-\sqrt{3}}{3}$이므로 넓이의 비는

$1^2 : \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 : \frac{4-2\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{11}{36}\pi$이고 공비가 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{11}{36}\pi}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{11}{36}\pi}{\frac{2\sqrt{3}-1}{3}}$

$= \frac{11\pi}{12(2\sqrt{3}-1)} = \frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

0240

답 ②

$\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = 3$

점 D_1은 선분 B_1C_1을 2 : 1로 내분하는 점이므로 $\overline{D_1B_1} = 2$이고

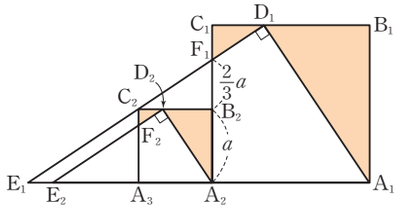
$\angle A_1D_1F_1 = \frac{\pi}{2}$에서 $\angle B_1D_1A_1 + \angle C_1D_1F_1 = \frac{\pi}{2}$이므로 두 삼각형 $A_1B_1D_1$과 $D_1C_1F_1$은 서로 닮음이다.

이때 삼각형 $A_1B_1D_1$의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$이고 $\overline{C_1D_1} = 1$에서 $\overline{A_1B_1} : \overline{D_1C_1} = 3 : 1$이므로 두 삼각형 $A_1B_1D_1$, $D_1C_1F_1$의 넓이의 비는 9 : 1이다.

따라서 삼각형 $D_1C_1F_1$의 넓이는

$3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

$\therefore S_1 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$



한편, 두 삼각형 $D_1C_1F_1$과 $E_1A_2F_1$은 서로 닮음이고 삼각형 $C_2B_2F_1$ 또한 삼각형 $E_1A_2F_1$과 닮음이다.

이때 정사각형 $A_2B_2C_2A_3$의 한 변의 길이를 a라 하면

$\overline{B_2C_2} : \overline{B_2F_1} = \overline{A_1B_1} : \overline{B_1D_1} = 3 : 2$에서 $\overline{B_2F_1} = \frac{2}{3}a$

이때 삼각형 $D_1C_1F_1$에서 $\overline{C_1F_1} = \frac{2}{3}$이므로

$\overline{A_2F_1} = \overline{A_2B_2} + \overline{B_2F_1} = a + \frac{2}{3}a = \frac{5}{3}a$

$= \overline{C_1A_2} - \overline{C_1F_1} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

따라서 $\frac{5}{3}a = \frac{7}{3}$에서 $a = \frac{7}{5}$

두 정사각형 $A_1B_1C_1A_2$와 $A_2B_2C_2A_3$의 닮음비는 $3 : \frac{7}{5}$, 즉 $1 : \frac{7}{15}$이므로 두 그림 R_1과 R_2에 각각 새로 색칠된 도형의 닮음비는 $1 : \frac{7}{15}$이고 넓이의 비는 $1^2 : \left(\frac{7}{15}\right)^2 = 1 : \frac{49}{225}$이다.

같은 과정을 반복하면 두 그림 R_n과 R_{n+1}에 각각 새로 색칠된 부분의 넓이의 비도 $1 : \frac{49}{225}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{10}{3}$이고 공비가 $\frac{49}{225}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{49}{225}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{176}{225}} = \frac{375}{88}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 20 등비급수의 실생활에의 활용

0241 답 ④

$a_1=15\times1.1\times0.3=\frac{99}{20}$

$a_2=\{15\times1.1\times(1-0.3)\}\times1.1\times0.3$

$=(15\times1.1\times0.3)\times1.1\times0.7$

$=\frac{99}{20}\times\frac{77}{100}$

$a_3=[\{15\times1.1\times(1-0.3)\}\times1.1\times(1-0.3)]\times1.1\times0.3$

$=(15\times1.1\times0.3)\times(1.1\times0.7)^2$

$=\frac{99}{20}\times\left(\frac{77}{100}\right)^2$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{99}{20}$이고 공비가 $\frac{77}{100}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{99}{20}}{1-\frac{77}{100}}=\frac{495}{23}$

0242 답 ③

$a_1=1000\times\frac{65}{100}\times\frac{40}{100}=260$

$a_2=\left(1000\times\frac{65}{100}\times\frac{40}{100}\right)\times\frac{65}{100}\times\frac{40}{100}$

$=1000\times\left(\frac{65}{100}\times\frac{40}{100}\right)^2$

$a_3=1000\times\left(\frac{65}{100}\times\frac{40}{100}\right)^2\times\frac{65}{100}\times\frac{40}{100}$

$=1000\times\left(\frac{65}{100}\times\frac{40}{100}\right)^3$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 260이고 공비가 $\frac{65}{100}\times\frac{40}{100}=\frac{13}{50}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{260}{1-\frac{13}{50}}=\frac{13000}{37}$

0243 답 175 mg

환자가 이 약을 매회 복용하는 양을 a mg이라 하면 8시간이 지날 때마다 체내에 남아 있는 약의 양은 8시간 전의 양의 반으로 줄어든다.

따라서 약을 복용한 지 24시간 후, 24시간 전에 복용한 약 중 체내에 남아 있는 약의 양은

$a\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{a}{8}$ (mg)

또한 24시간마다 a mg의 약을 복용하므로 두 번째 복용한 직후, 즉 처음 약을 복용하고 24시간 후 체내에 남아 있는 약의 양은

$a+\frac{a}{8}$ (mg)

마찬가지로 세 번째 복용한 직후, 즉 처음 약을 복용하고 48시간 후 체내에 남아 있는 약의 양은

$a+\left(a+\frac{a}{8}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=a+\frac{a}{8}+\frac{a}{8^2}$ (mg)

⋮

n번째 복용한 직후, 즉 처음 약을 복용하고 $24(n-1)$시간 후 체내에 남아 있는 약의 양은

$a+\frac{a}{8}+\frac{a}{8^2}+\frac{a}{8^3}+\cdots+\frac{a}{8^{n-1}}=\sum_{k=1}^{n}\left\{a\times\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}\right\}$ (mg) ❶

따라서 규칙적으로 평생 복용할 때 체내에 남아 있는 약의 양은

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{a\times\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}\right\}=\frac{a}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}a$ (mg)

이때 주어진 조건에 의하여 $\frac{8}{7}a\le200$이어야 하므로

$8a\le1400$ $\therefore a\le175$

따라서 매회 복용할 수 있는 약의 양은 최대 175 mg이다. ❷

채점 기준	배점
❶ 약을 n번째 복용한 직후 체내에 남아 있는 약의 양 구하기	60%
❷ 매회 복용할 수 있는 약의 양의 최댓값 구하기	40%

PART B 내신 잡는 종합 문제

0244 답 4

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}a_1=6$

$\therefore a_1=6\times\frac{2}{3}=4$

0245 답 ④

$a_n=5^{-n}=\left(\frac{1}{5}\right)^n$이므로 $a_{2n}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{25}\right)^n$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{1}{25}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{\frac{1}{25}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{1}{24}$

0246 답 ①

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{4+0}}=\frac{1}{2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0247

답 9

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)$이 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}5a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(3a_n+b_n)+(2a_n-b_n)\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)+\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)$$
$$=17+3=20$$

에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$

이때 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(3a_n+b_n)-2a_n\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$$
$$=17-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$
$$=17-2\times4=9$$

0248

답 -242

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log_{\frac{1}{81}}x^2+\frac{3}{2}\right)^n$이 수렴하려면 $\left|\log_{\frac{1}{81}}x^2+\frac{3}{2}\right|<1$이어야 하므로 $-1<\log_{\frac{1}{81}}x^2+\frac{3}{2}<1$에서

$$-\frac{5}{2}<2\log_{\frac{1}{81}}|x|<-\frac{1}{2},\ -\frac{5}{4}<\log_{\frac{1}{81}}|x|<-\frac{1}{4}$$

$81^{\frac{1}{4}}<|x|<81^{\frac{5}{4}}$, $3<|x|<3^5$

$\therefore -243<x<-3$ 또는 $3<x<243$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log_{\frac{1}{81}}x^2+\frac{3}{2}\right)^n$이 수렴하도록 하는 정수 x의 최솟값은 -242이다.

0249

답 12

$0.\dot{p}\dot{q}=0.pqpqpq\cdots$

$$=\frac{p}{10}+\frac{q}{10^2}+\frac{p}{10^3}+\frac{q}{10^4}+\frac{p}{10^5}+\frac{q}{10^6}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{p}{10}}{1-\frac{1}{10^2}}+\frac{\frac{q}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}$$
$$=\frac{10p+q}{99}=\frac{7}{11}$$

이때 p와 q는 10보다 작은 자연수이므로

$10p+q=63$에서 $p=6$, $q=3$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{6}{1-\frac{1}{2}}=12$$

참고

$\frac{7}{11}=\frac{63}{99}=0.636363\cdots$임을 이용하여 $p=6$, $q=3$으로 구할 수도 있다.

0250

답 ⑤

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-n}{n}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)=0$$

에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{5n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{a_n}{n}}{5-\frac{a_n}{n}}=\frac{5+1}{5-1}=\frac{3}{2}$$

0251

답 ①

$\sum_{n=1}^{\infty}r^n$은 공비가 r인 등비급수이므로 이 급수가 수렴하려면

$|r|<1$, 즉 $-1<r<1$ ····· ㉠

한편, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-k}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{r-k}{2}$인 등비급수이다.

이때 ㉠에 의하여

$$\frac{-1-k}{2}<\frac{r-k}{2}<\frac{1-k}{2}$$

이고, 이 급수가 수렴하려면 $-1<\frac{r-k}{2}<1$이어야 하므로

$-1\le\frac{-1-k}{2}$에서 $k\le1$

$\frac{1-k}{2}\le1$에서 $k\ge-1$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-k}{2}\right)^n$이 항상 수렴하도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-1\le k\le1$이므로 항상 수렴하는 급수는 ① $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$이다.

0252

답 1

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3이고 공차가 2이므로

$a_n=3+2(n-1)=2n+1$

$$\therefore S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\{3+(2n+1)\}}{2}=n^2+2n$$

$$\therefore \log_2\left(1+\frac{1}{S_n}\right)=\log_2\frac{S_n+1}{S_n}=\log_2\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$
$$=\log_2\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{S_n}\right)$의 제$n$항까지의 부분합을 T_n이라 하면

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(1+\frac{1}{S_k}\right)$$
$$=\log_2\frac{2^2}{1\times3}+\log_2\frac{3^2}{2\times4}+\log_2\frac{4^2}{3\times5}+\cdots+\log_2\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$
$$=\log_2\left\{\frac{2^2}{1\times3}\times\frac{3^2}{2\times4}\times\frac{4^2}{3\times5}\times\cdots\times\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right\}$$
$$=\log_2\frac{2\times(n+1)}{1\times(n+2)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{S_n}\right)=\lim_{n\to\infty}T_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{2\times(n+1)}{1\times(n+2)}$$
$$=\log_2 2=1$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0253

답 ④

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+2)}=0$이므로 주어진 급수의 부분합을 이용하여 급수의 수렴과 발산을 조사해야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

즉, 주어진 급수는 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=0$이므로 주어진 급수의 부분합을 이용하여 급수의 수렴과 발산을 조사해야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+3}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2})}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2}}{(k+3)-(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2})$$

$$=(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})$$

$$=\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{3})=\infty$

즉, 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. 주어진 급수의 제n항은 $\log\frac{(n+2)^2}{n(n+4)}$이고

$\lim_{n\to\infty}\log\frac{(n+2)^2}{n(n+4)}=\log 1=0$이므로 주어진 급수의 부분합을 이용하여 급수의 수렴과 발산을 조사해야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\log\frac{3^2}{1\times5}+\log\frac{4^2}{2\times6}+\log\frac{5^2}{3\times7}+\cdots+\log\frac{(n+2)^2}{n(n+4)}$$

$$=\log\left\{\frac{3^2}{1\times5}\times\frac{4^2}{2\times6}\times\frac{5^2}{3\times7}\times\cdots\times\frac{(n+2)^2}{n(n+4)}\right\}$$

$$=\log\frac{3\times4\times(n+1)(n+2)}{1\times2\times(n+3)(n+4)}=\log\frac{6(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{6(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}=\log 6$

즉, 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄱ, ㄷ이다.

0254

답 19

조건 (나)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{4n}-2\right)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{4n}-2\right)=0$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n}=2$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=2+(n-1)d=dn+2-d$ ($\because$ 조건 (가))

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{dn+2-d}{4n}=\frac{d}{4}=2$

$\therefore d=8$

$\therefore a_n=8n-6$

$50\le a_n\le 90$에서

$50\le 8n-6\le 90$

$56\le 8n\le 96$

$\therefore 7\le n\le 12$

따라서 구하는 자연수 n의 최댓값과 최솟값의 합은

$12+7=19$

0255

답 ③

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+30}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+3a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+30}{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+2a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+30}{S_n+2a_n}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

이때 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=m$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0$이므로 ㉠에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+30}{S_n+2a_n}=\frac{0+30}{m+2\times0}=\frac{30}{m}$

$\frac{30}{m}$이 자연수이려면 m은 30의 약수이어야 한다.

따라서 자연수 m은 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30의 8개이다.

0256

답 ①

$S_n=n^3-7n$에서 $\cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1}=(n-1)^3-7(n-1)$

$=(n^3-3n^2+3n-1)-7n+7$

$=n^3-3n^2-4n+6$ (단, $n\ge2$) $\cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡에서

$S_n-S_{n-1}=a_n$

$=3n^2-3n-6$

$=3(n^2-n-2)$

$=3(n-2)(n+1)$ (단, $n\ge2$)

한편, $a_1=S_1=-6$이므로

$a_n=3(n-2)(n+1)$ (단, $n\ge1$)

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{3(n-2)(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(n+3)}$

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$의 제$n$항까지의 부분합을 T_n이라 하면

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(n+3)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}T_n$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{54}$$

0257

답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r_1이라 하고, 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비를 r_2라 하자.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면

$a=0$ 또는 $-1<r_1<1$ ····· ㉠

$b=0$ 또는 $-1<r_2<1$ ····· ㉡

한편, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 첫째항이 ab, 공비가 r_1r_2인 등비급수이다.

이때 ㉠, ㉡에 의하여 $ab=0$ 또는 $-1<r_1r_2<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴한다. (참)

ㄴ. [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 모두 발산하지만

$a_n+b_n=(-1)^n+(-1)^{n+1}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$이다. (거짓)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^3$은 첫째항이 a^3, 공비가 ${r_1}^3$인 등비급수이고, $\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^3$은 첫째항이 b^3, 공비가 ${r_2}^3$인 등비급수이다.

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^3$이 수렴하면 $a^3=0$ 또는 $-1<{r_1}^3<1$에서 $a=0$ 또는 $-1<r_1<1$이고, $\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^3$이 수렴하면 $b^3=0$ 또는 $-1<{r_2}^3<1$에서 $b=0$ 또는 $-1<r_2<1$이다.

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0258

답 ③

새 배터리를 장착한 전기차의 주행 가능한 거리가 400 km이므로 $a_1=400$이라 하고, n번째 완충 시 주행 가능한 거리를 a_{n+1} km라 하면

$$a_2=400\times\left(1-\frac{1}{10^3}\right)$$
$$a_3=400\times\left(1-\frac{1}{10^3}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$a_n=400\times\left(1-\frac{1}{10^3}\right)^{n-1}\ (\text{단, } n\geq2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=400$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$$a_n=400\times\left(1-\frac{1}{10^3}\right)^{n-1}\ (\text{단, } n\geq1)$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 400, 공비가 $1-\frac{1}{10^3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{400\times\left(1-\frac{1}{10^3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{400}{1-\left(1-\frac{1}{10^3}\right)}=400000$$

따라서 이 배터리를 장착한 자동차로 완충과 방전을 한없이 반복하여 갈 수 있는 거리는 400000 km이다.

0259

답 ④

삼각형 $A_1B_1C_1$은 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$a_1=3\times4=12$

한편, 두 점 A_2, B_2가 각각 두 변 A_1B_1과 B_1C_1을 1 : 3으로 내분하는 점이므로

$\overline{A_2B_1}=3$, $\overline{B_1B_2}=1$, $\angle A_2B_1B_2=\frac{\pi}{3}$

삼각형 $A_2B_1B_2$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{A_2B_2}^2=\overline{A_2B_1}^2+\overline{B_1B_2}^2-2\times\overline{A_2B_1}\times\overline{B_1B_2}\times\cos(\angle A_2B_1B_2)$$
$$=9+1-3=7$$
$$\therefore \overline{A_2B_2}=\sqrt{7}$$

두 정삼각형 $A_1B_1C_1$과 $A_2B_2C_2$의 닮음비는 $4:\sqrt{7}$, 즉 $1:\frac{\sqrt{7}}{4}$이다.

같은 과정을 반복하면 모든 자연수 n에 대하여 두 삼각형 $A_nB_nC_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비도 $1:\frac{\sqrt{7}}{4}$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 12이고 공비가 $\frac{\sqrt{7}}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{12}{1-\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{48}{4-\sqrt{7}}=\frac{16(4+\sqrt{7})}{3}$$

0260

답 0

ㄱ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 0, 0, 0, ···, $\{b_n\}$: 0, 1, 0, 0, 0, ···, $\{c_n\}$: 2, 0, 0, 0, 0, ···

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이지만 $c_1\neq a_1+b_1$이다. (거짓)

ㄴ. [반례] $\{a_n\}$: 1, −1, 1, 0, 0, 0, ···

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=3\neq1$이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $a_{2n-1}=a_{2n}=n$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=0$이지만 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 할 때 $S_{2n-1}=-n$이므로 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 발산한다.

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$은 발산한다. (거짓)

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

ㄹ. [반례] $a_n=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$, $b_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$,

$c_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)-\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)\right\}=0$

이지만

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+2}-\dfrac{1}{k+3}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+3}\right)=\dfrac{1}{3}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$

즉, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\neq\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$이다. (거짓)

따라서 옳은 것의 개수는 0이다.

0261

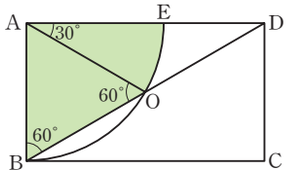
답 ④

호 BE와 선분 BD가 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 O라 하면

$\overline{AB}=\overline{AO}$

직각삼각형 ABD에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$이므로

$\angle ABD=60^\circ$, $\angle AOB=60^\circ$



삼각형 ABO는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고 부채꼴 AEO의 중심각의 크기는 30°이므로

$S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times1^2+\pi\times1^2\times\dfrac{30}{360}=\dfrac{\pi+3\sqrt{3}}{12}$

한편, $\overline{BD}=2$, $\overline{BO}=1$이므로 점 O는 선분 BD의 중점이다.

따라서 직사각형 ABCD와 그림 R_2에 새로 그려진 직사각형의 닮음비는 $1:\dfrac{1}{2}$이다.

같은 과정을 반복하면 두 그림 R_n과 R_{n+1}에 새로 색칠된 '▱' 모양의 도형의 닮음비도 $1:\dfrac{1}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\dfrac{\pi+3\sqrt{3}}{12}$이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{\pi+3\sqrt{3}}{12}}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\pi+3\sqrt{3}}{9}$

0262

답 1

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$은 a_1, a_2, a_3, a_4가 반복되는 수열이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{4^n}=\left(\dfrac{a_1}{4^1}+\dfrac{a_2}{4^2}+\dfrac{a_3}{4^3}+\dfrac{a_4}{4^4}\right)+\left(\dfrac{a_5}{4^5}+\dfrac{a_6}{4^6}+\dfrac{a_7}{4^7}+\dfrac{a_8}{4^8}\right)+\cdots$

$=\left(\dfrac{a_1}{4^1}+\dfrac{a_2}{4^2}+\dfrac{a_3}{4^3}+\dfrac{a_4}{4^4}\right)+\left(\dfrac{a_1}{4^5}+\dfrac{a_2}{4^6}+\dfrac{a_3}{4^7}+\dfrac{a_4}{4^8}\right)+\cdots$

$=\left(\dfrac{a_1}{4^1}+\dfrac{a_2}{4^2}+\dfrac{a_3}{4^3}+\dfrac{a_4}{4^4}\right)+\dfrac{1}{4^4}\left(\dfrac{a_1}{4^1}+\dfrac{a_2}{4^2}+\dfrac{a_3}{4^3}+\dfrac{a_4}{4^4}\right)+\cdots$

$=\dfrac{\dfrac{a_1}{4^1}+\dfrac{a_2}{4^2}+\dfrac{a_3}{4^3}+\dfrac{a_4}{4^4}}{1-\dfrac{1}{4^4}}=\dfrac{4^3a_1+4^2a_2+4a_3+a_4}{255}$

조건 (나)에서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{4^n}=\dfrac{89}{255}$이므로

$\dfrac{4^3a_1+4^2a_2+4a_3+a_4}{255}=\dfrac{89}{255}$

$\therefore\ 4^3a_1+4^2a_2+4a_3+a_4=89$ ····· ㉠

이때 a_1, a_2, a_3, a_4는 모두 한 자리의 자연수이고 $4^3+4^2+4+1=85$이므로 ㉠을 만족시키려면 $a_1=a_2=a_3=1$, $a_4=5$ 또는 $a_1=a_2=a_4=1$, $a_3=2$이어야 한다.

주어진 조건에서 $a_3>a_{10}$이고, 조건 (가)에 의하여 $a_{10}=a_2$이므로 $a_3>a_2$에서

$a_1=a_2=a_4=1$, $a_3=2$

따라서 $a_{4n-1}=a_3=2$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{4n-1}}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}=\dfrac{\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}=1$

0263

답 1

점 A_n의 좌표는 $\left(n,\ \dfrac{1}{n}\right)$이므로

$\overline{A_nA_{n+1}}^2=\{(n+1)-n\}^2+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}\right)^2$

$=1+\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$

❶

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\overline{A_nA_{n+1}}^2-1}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\overline{A_kA_{k+1}}^2-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\left\{1+\dfrac{1}{k^2(k+1)^2}\right\}-1}$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{n+1}$

❷

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\overline{A_nA_{n+1}}^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$

❸

채점 기준	배점
❶ $\overline{A_nA_{n+1}}^2$을 n에 대한 식으로 나타내기	20%
❷ 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\overline{A_nA_{n+1}}^2-1}$의 부분합 구하기	50%
❸ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\overline{A_nA_{n+1}}^2-1}$의 값 구하기	30%

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0264

답 5

점 P_n의 x좌표를 p_n이라 하자.

㈏에서 곡선 $y=2\sqrt{x}$ 위의 점 Q_n의 좌표는

$(p_n,\ 2\sqrt{p_n})$

㈐에서 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 P_{n+1}의 y좌표가 $2\sqrt{p_n}$이므로

$P_{n+1}(4p_n,\ 2\sqrt{p_n})$

즉, $p_{n+1}=4p_n$이고 ㈎에서 $p_1=1$이므로

$p_n=4^{n-1}$

$\therefore P_n(4^{n-1},\ 2^{n-1})$ ❶

곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기는

$a_n=\dfrac{2^n-2^{n-1}}{4^n-4^{n-1}}=\dfrac{2^{n-1}}{3\times4^{n-1}}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$ ❷

따라서 $p=3$, $q=2$이므로

$p+q=3+2=5$ ❸

채점 기준	배점
❶ 점 P_n의 좌표 나타내기	50%
❷ a_n을 구하고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값 구하기	40%
❸ $p+q$의 값 구하기	10%

PART C 수능 녹인 변별력 문제

0265

답 ②

$b_n=na_n+\dfrac{3n^4-2}{n^2+2n}$라 하면

$na_n=b_n-\dfrac{3n^4-2}{n^2+2n}$

위의 식의 양변을 n^2으로 나누면

$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{b_n}{n^2}-\dfrac{3n^4-2}{n^4+2n^3}$

이때 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n+\dfrac{3n^4-2}{n^2+2n}\right)$, 즉 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n^2}=0$이고 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^4-2}{n^4+2n^3}=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_n}{n^2}-\dfrac{3n^4-2}{n^4+2n^3}\right)=0-3=-3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{-a_n+3n}{2-a_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-\frac{a_n}{n}+3}{\frac{2}{n}-\frac{a_n}{n}}=\dfrac{-(-3)+3}{0-(-3)}=2$

0266

답 9

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{an^2+b}{9n^2-3n-2}$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{an^2+b}{9n^2-3n-2}=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{an^2+b}{9n^2-3n-2}=\dfrac{a}{9}$이므로 $\dfrac{a}{9}=0$에서

$a=0$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{an^2+b}{9n^2-3n-2}$

$=b\times\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$=b\times\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$

$=b\times\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{3k-2}-\dfrac{1}{3k+1}\right)$

$=b\times\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left\{\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)\right\}$

$=b\times\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\dfrac{b}{3}$

따라서 $\dfrac{b}{3}=3$이므로 $b=9$

$\therefore a+b=0+9=9$

0267

답 2

$a_na_{n+1}=\dfrac{1}{3^n}$에서

$n=1$일 때 $a_1a_2=\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore a_2=\dfrac{1}{3}$ ($\because a_1=1$)

$n=2$일 때 $a_2a_3=\dfrac{1}{3^2}$ $\quad\therefore a_3=\dfrac{1}{3}$

$n=3$일 때 $a_3a_4=\dfrac{1}{3^3}$ $\quad\therefore a_4=\dfrac{1}{3^2}$

$n=4$일 때 $a_4a_5=\dfrac{1}{3^4}$ $\quad\therefore a_5=\dfrac{1}{3^2}$

$n=5$일 때 $a_5a_6=\dfrac{1}{3^5}$ $\quad\therefore a_6=\dfrac{1}{3^3}$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이고, 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{3}$, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$

$=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2$

0268

답 ②

$a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_2=-\dfrac{1}{4}$, $a_3=\dfrac{1}{6}$, $a_4=-\dfrac{1}{8}$, $a_5=\dfrac{1}{10}$, $\cdots$

즉, $b_1=\dfrac{1}{2}$, $b_2=\dfrac{1}{6}$, $b_3=\dfrac{1}{6}$, $b_4=\dfrac{1}{10}$, $b_5=\dfrac{1}{10}$, $\cdots$이므로

$b_{2n-1}=\dfrac{1}{4n-2}$, $b_{2n}=\dfrac{1}{4n+2}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}b_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-2)(4n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-2)(4k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}\right)=\frac{1}{8}$$

0269

답 ④

조건 (가)에서 $a_nb_n=\frac{2}{n}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $b_n\neq0$이고 $na_n=\frac{2}{b_n}$이다.

따라서 조건 (나)에서

$\sum_{n=1}^{\infty}na_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{b_n}=2$ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|na_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{b_n}\right|=4$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{b_n}\right|=2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{b_n}\right|+\frac{1}{b_n}\right)=2+1=3$ …… ㉠

이때 $d_n=\left|\frac{1}{b_n}\right|+\frac{1}{b_n}$이라 하면

$b_n\le0$일 때, $d_n=\left(-\frac{1}{b_n}\right)+\frac{1}{b_n}=0$

$b_n>0$일 때, $d_n=\frac{1}{b_n}+\frac{1}{b_n}=\frac{2}{b_n}$

이므로

$c_n=\frac{1}{2}d_n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}d_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{b_n}\right|+\frac{1}{b_n}\right)=\frac{3}{2}$ ($\because$ ㉠)

0270

답 ③

이차방정식 $x^2+kx-5=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=-5$ …… ㉠

이때 $\alpha\beta=-5$에서 $|\alpha|\times|\beta|=5$이므로 $|\alpha|$, $|\beta|$는 모두 0이 아니고, 둘 중 적어도 하나는 1보다 크다.

따라서 $|\alpha|>1$이면 $0<\left|\frac{1}{\alpha}\right|<1$이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$은 수렴한다.

또한 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}\right)$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^n$도 수렴한다.

즉, $|\beta|>1$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^n=\frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}}+\frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{1}{\beta}}$$
$$=\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}=\frac{(\beta-1)+(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\frac{(-k)-2}{(-5)-(-k)+1}\ (\because \text{㉠})$$
$$=\frac{k+2}{4-k}$$

따라서 $\frac{k+2}{4-k}=2$이므로 $k+2=2(4-k)$

$3k=6$ $\therefore k=2$

참고

이차방정식 $x^2+2x-5=0$의 실근은 $x=-1\pm\sqrt{6}$이고 $|-1+\sqrt{6}|>1$, $|-1-\sqrt{6}|>1$이다.

0271

답 ③

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(8-S_n)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(8-S_n)=0$에서 $\lim_{n\to\infty}S_n=8$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$이고 $-1<r<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{a_1}{1-r}=8$ …… ㉠

또한

$$\sum_{k=1}^{n}(8-S_k)=\sum_{k=1}^{n}\left\{8-\frac{a_1(1-r^k)}{1-r}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{8-8(1-r^k)\}=\sum_{k=1}^{n}8r^k$$
$$=\frac{8r(1-r^n)}{1-r}$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(8-S_n)=16$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(8-S_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(8-S_k)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8r(1-r^n)}{1-r}=\frac{8r}{1-r}=16$$

$8r=16(1-r)$, $24r=16$

$\therefore r=\frac{2}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 $a_1=\frac{8}{3}$

따라서 $a_n=\frac{8}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_n-a_{n+1})$$
$$=a_1-a_{n+1}=\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\frac{8}{3}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

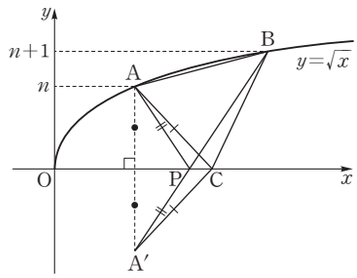
0272

답 1

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 두 점 A, B의 y좌표가 각각 n, $n+1$이므로

$A(n^2, n)$, $B((n+1)^2, n+1)$

이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소가 되려면 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 값이 최소이어야 한다.



점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$A'(n^2, -n)$이고 $\overline{AC}=\overline{A'C}$

직선 A′B가 x축과 만나는 점을 P라 하면 $\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{A'C}+\overline{BC}$의 값이 최소일 때는 점 C가 점 P와 일치할 때이다.

직선 A′B의 기울기는 $\frac{(n+1)-(-n)}{(n+1)^2-n^2}=1$이므로 직선 A′B의 방정식은

$y=x-n^2-n$

따라서 $a_n=n^2+n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

0273

답 ④

자연수 n에 대하여 $\frac{n}{x}$의 값이 자연수이려면 x는 n의 약수이어야 한다.

즉, $f(n)$은 n의 약수인 자연수의 개수를 의미한다.

ㄱ. 2^n의 약수인 자연수의 개수는 $n+1$이고 3^n의 약수인 자연수의 개수도 $n+1$이므로

$f(2^n)=f(3^n)=n+1$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $f(2^n)=f(3^n)=n+1$이므로

$\frac{f(2^n)\times f(3^n)}{f(m^n)}=\frac{(n+1)^2}{f(m^n)}$

이때 수열 $\left\{\frac{(n+1)^2}{f(m^n)}\right\}$이 수렴하려면 $f(m^n)$의 최고차항의 차수가 2 이상이어야 한다.

즉, m의 서로 다른 소인수의 개수는 2 이상이어야 한다.

1부터 20까지의 자연수 중에서 서로 다른 소인수의 개수가 2 이상인 수는 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20이므로 구하는 자연수 m의 개수는 7이다. (거짓)

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{f(k^n)}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{f(k^n)}=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{f(k^n)}=0$을 만족시키려면 $f(k^n)$의 최고차항의 차수는 적어도 5 이상이어야 한다.

즉, k의 서로 다른 소인수의 개수는 5 이상이어야 한다.

이때 소수인 자연수 중에서 작은 수부터 차례대로 4개의 수를 곱하면

$2\times3\times5\times7=210$

이므로 k의 서로 다른 소인수의 개수가 5 이상이면 k는 200보다 큰 수이다.

즉, 200 이하의 자연수 k는 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{f(k^n)}=0$을 만족시킬 수 없으므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{f(k^n)}$은 발산한다. (참)

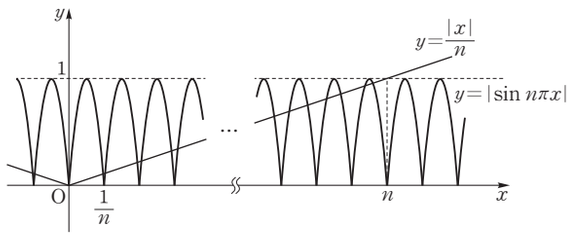
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0274

답 ④

함수 $y=|\sin n\pi x|$의 그래프는 함수 $y=\sin n\pi x$의 그래프에서 x축의 아래쪽에 그려진 부분을 x축을 기준으로 위쪽으로 접어 올린 것과 같다.

또한 함수 $y=\frac{|x|}{n}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고 $x\geq0$에서 함수 $y=\frac{|x|}{n}$의 그래프는 원점을 지나고 기울기가 $\frac{1}{n}$인 직선과 같으므로 두 함수 $y=|\sin n\pi x|$, $y=\frac{|x|}{n}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=\sin n\pi x$는 주기가 $\frac{2\pi}{n\pi}=\frac{2}{n}$이고, 이 함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $y=|\sin n\pi x|$는 주기가 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}=\frac{1}{n}$이다.

이때 $x\geq0$에서 함수 $y=\frac{|x|}{n}$의 그래프는 원점과 점 $(n, 1)$을 지나므로 $x\geq0$에서 두 함수 $y=|\sin n\pi x|$, $y=\frac{|x|}{n}$의 그래프의 교점은 $0\leq x\leq n$일 때 존재한다.

$0\leq x\leq n$에서 함수 $y=|\sin n\pi x|$의 그래프의 볼록한 부분이 n^2개가 생기고, 함수 $y=|\sin n\pi x|$의 그래프의 볼록한 부분 1개와 함수 $y=\frac{|x|}{n}$의 그래프의 교점은 2개씩이다.

이때 두 함수 $y=|\sin n\pi x|$, $y=\frac{|x|}{n}$의 그래프는 모두 y축에 대하여 대칭이므로 교점은 $-n\leq x\leq n$일 때 존재하고, 원점이 중복되므로 그 교점의 개수는

$2\times2n^2-1=4n^2-1$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $a_n=4n^2-1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_{n+1}^{\,2}}{a_na_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{a_{k+1}^{\,2}}{a_ka_{k+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{a_2^{\,2}}{a_1a_3}+\log\frac{a_3^{\,2}}{a_2a_4}+\cdots+\log\frac{a_{n+1}^{\,2}}{a_na_{n+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{a_2^{\,2}}{a_1a_3}\times\frac{a_3^{\,2}}{a_2a_4}\times\cdots\times\frac{a_{n+1}^{\,2}}{a_na_{n+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{a_2\times a_{n+1}}{a_1\times a_{n+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{15\{4(n+1)^2-1\}}{3\{4(n+2)^2-1\}}$$

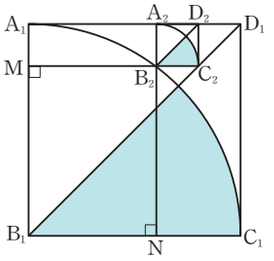
$$=\log\frac{15}{3}=\log 5$$

0275

답 ②

$\angle C_1B_1D_1=\frac{\pi}{4}$이므로 $S_1=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

한편, 그림 R_2에서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 a라 하고 점 B_2에서 두 선분 A_1B_1, B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자.



$\overline{D_2D_1}=\overline{D_2C_2}=a$이므로

$\overline{B_1N}=\overline{A_1A_2}=2-2a$, $\overline{B_2N}=2-a$

또한 $\overline{B_1B_2}=\overline{B_1C_1}=2$이므로 직각삼각형 B_1NB_2에서

$(2-2a)^2+(2-a)^2=4$

$5a^2-12a+4=0$, $(5a-2)(a-2)=0$

$\therefore a=\frac{2}{5}$ ($\because 0<a<2$)

따라서 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는 $2:\frac{2}{5}$, 즉 $1:\frac{1}{5}$이다.

같은 과정을 반복하면 두 그림 R_n과 R_{n+1}에 새로 색칠된 두 도형의 닮음비도 $1:\frac{1}{5}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{25}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{25}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{25}{48}\pi$$

0276

답 ③

$\overline{AB}=4$이므로 $\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{CP}=\overline{PB}=\frac{\overline{AB}}{4}=1$

다음 그림과 같이 직각삼각형 DCE에서 $\overline{DC}=1$, $\overline{CE}=2$이므로

$\overline{DE}=\sqrt{3}$, $\angle DCE=\frac{\pi}{3}$

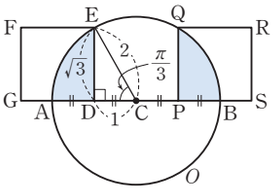


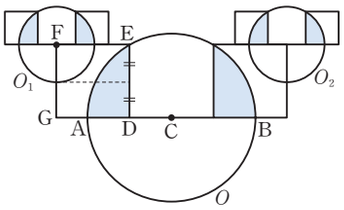
그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 모양의 도형 2개의 넓이이므로

$S_1=\{(\text{부채꼴 ACE의 넓이})-(\text{직각삼각형 DCE의 넓이})\}\times2$

$=\left(\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right)\times2$

$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{3}$

한편, 두 원 O와 O_1의 닮음비는 $\frac{\overline{AB}}{2}:\frac{\overline{DE}}{2}=2:\frac{\sqrt{3}}{2}=1:\frac{\sqrt{3}}{4}$이다.



같은 과정을 반복하면 두 그림 R_n과 R_{n+1}에 새로 색칠된 모양의 도형의 닮음비도 $1:\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 넓이의 비는 $1^2:\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=1:\frac{3}{16}$이다.

또한 R_{n+1}에 새로 색칠된 모양의 도형의 개수는 R_n에서 새로 색칠된 모양의 도형의 개수보다 2배씩 많아지면서 누적되고 있다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{3}$이고 공비가 $\frac{3}{16}\times2=\frac{3}{8}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{8(4\pi-3\sqrt{3})}{15}=\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$$

0277

답 2

$S_n=a_{n+1}+p+\frac{q}{n}$에서 $S_{n+1}=a_{n+2}+p+\frac{q}{n+1}$이므로

$S_{n+1}-S_n=\left(a_{n+2}+p+\frac{q}{n+1}\right)-\left(a_{n+1}+p+\frac{q}{n}\right)$

$a_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}+\frac{q}{n+1}-\frac{q}{n}$

$\therefore a_{n+2}-2a_{n+1}=q\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$\therefore\sum_{n=2}^{\infty}(a_{n+1}-2a_n)=q\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=q\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=q\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=q\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=q=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

한편, $S_n=a_{n+1}+p+\frac{q}{n}$에서

$n=1$일 때, $S_1=a_1=a_2+p+q$

$\therefore a_1-a_2=p+3$ ($\because$ ㉠) ····· ㉡

$n=2$일 때, $S_2=a_1+a_2=a_3+p+\frac{q}{2}$

$a_1+a_2=\frac{11}{2}+p+\frac{3}{2}$ $\left(\because a_3=\frac{11}{2},\ ㉠\right)$

$\therefore a_1+a_2=p+7$ ····· ㉢

㉢−㉡에서 $2a_2=4$

$\therefore a_2=2$

참고

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하는지는 알 수 없으므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}+p+\frac{q}{n}\right)$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=p$가 아님에 주의한다.

0278

답 24

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n=a_1r^{n-1}$이라 하자.

이때 주어진 조건을 만족시키려면 $a_1\neq0$이다.

(i) $r>1$ 또는 $r<-1$일 때

$|a_n|$의 값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $r=1$일 때

$a_n=a_1$이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iii) $r=-1$일 때

a_n의 값이 $a_1,\ -a_1,\ a_1,\ -a_1,\ a_1,\ \cdots$이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iv) $r=0$일 때

a_n의 값이 첫째항을 제외하고 모두 0이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(i)~(iv)에서 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$

한편, $b_3=-1$이므로 $a_3\le-1$, 즉 $a_1r^2\le-1$

그런데 $0<r^2<1$이므로

$a_1\le-1$ $\therefore b_1=-1$

또한 $a_1\le-1$이므로 $0<r<1$이면 a_n의 모든 항은 음수이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

$\therefore -1<r<0$

ⓐ $a_2=a_1r\le-1$일 때

$r\ge-\frac{1}{a_1}>0$이므로 모순이다.

즉, $a_2=a_1r>-1$이므로

$b_2=a_2=a_1r$

ⓑ $b_3=-1$이므로

$a_3=a_1r^2\le-1$

ⓒ $a_4=a_1r^3\le-1$일 때

$a_4=a_1r^3=a_1r^2\times r\ge-r>0$이므로 모순이다.

즉, $a_4>-1$이므로

$b_4=a_4=a_1r^3$

ⓓ $a_5=a_1r^4\le-1$일 때

$b_5=-1$

이때 $b_1+b_3+b_5=-3$이므로 조건 (가)에 모순이다.

$\therefore b_5=a_5=a_1r^4$

ⓔ $a_6=a_4r^2$이고 $a_4>-1$ ($\because$ ⓒ)이므로

$a_6>-r^2>-1$

$\therefore b_6=a_6=a_1r^5$

마찬가지 방법으로

$b_7=a_7,\ b_8=a_8,\ b_9=a_9,\ \cdots$

이므로

$$b_n=\begin{cases}-1 & (n=1,\ n=3)\\ a_1r^{n-1} & (n=2,\ n\ge4)\end{cases}$$

조건 (가)에서

$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}=-1+(-1)+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8+\cdots$

$=-2+\frac{a_1r^4}{1-r^2}=-3$

$\frac{a_1r^4}{1-r^2}=-1,\ a_1r^4=r^2-1$ ····· ㉠

조건 (나)에서

$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=a_1r+a_1r^3+a_1r^5+\cdots=\frac{a_1r}{1-r^2}=8$

$a_1r=8(1-r^2)$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a_1r=-8a_1r^4$, $r^3=-\frac{1}{8}$

$\therefore r=-\frac{1}{2}$

이를 ㉡에 대입하면

$-\frac{1}{2}a_1=6$ $\therefore a_1=-12$

따라서 $a_n=-12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|-12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\frac{12}{1-\frac{1}{2}}=24$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Ⅱ 미분법

유형별 문제

PART A

03 지수함수와 로그함수의 미분

유형 01 지수함수의 극한

확인 문제 (1) $\frac{9}{14}$ (2) ∞ (3) 0

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3^x}{2^x+5x}=\frac{3^2}{2^2+5\times 2}=\frac{9}{14}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(6^x-4^x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[6^x\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}\right]=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^{x+1}}{3^x-3^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^{2x+1}}{3^{2x}-1}=\frac{0}{0-1}=0$

0279 답 ④

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{2x+1}-3^x}{4^{x-1}+3^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^x}=\frac{2-0}{\frac{1}{4}+0}=8$

0280 답 1

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{1-2^{-\frac{1}{x}}}$에서 $\lim\limits_{x\to 0+}2^{-\frac{1}{x}}=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{1-2^{-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1-0}=1$

0281 답 4

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{3x+a}+1}{27^{x-1}+8}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^a+\frac{1}{3^{3x}}}{\frac{1}{27}+\frac{8}{3^{3x}}}$

$=\frac{3^a+0}{3^{-3}+0}=3^{a-(-3)}=3^{a+3}$

따라서 $3^{a+3}=3^7$이므로 $a+3=7$

$\therefore\ a=4$

0282 답 -2

$-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6^x+4x^3-1}{4-2x^3}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{6^{-t}-4t^3-1}{4+2t^3}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3\times 6^t}-4-\frac{1}{t^3}}{\frac{4}{t^3}+2}$

$=\frac{0-4-0}{0+2}=-2$

0283 답 ②

$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{1}{4}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{2x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{2x}}\right]$

$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

0284 답 11

(i) $a=2$일 때

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{x+2}+2^x}{3^x+2^{x-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^2+\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^x}=\frac{9+0}{1+0}=9$

(ii) $a=3$일 때

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{x+2}+3^x}{3^x+3^{x-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^2+1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{10}{\frac{4}{3}}=\frac{15}{2}$

(iii) $a\geq 4$일 때

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{x+2}+a^x}{3^x+a^{x-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9\times\left(\frac{3}{a}\right)^x+1}{\left(\frac{3}{a}\right)^x+\frac{1}{a}}=\frac{0+1}{0+\frac{1}{a}}=a$

이때 $a\geq 4$에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{x+2}+a^x}{3^x+a^{x-1}}=9$를 만족시키는 자연수 a의 값은 9이다.

(i)~(iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 2 이상의 모든 자연수 a의 값의 합은

$2+9=11$

유형 02 로그함수의 극한

확인 문제 (1) $-\infty$ (2) ∞ (3) 0

(1) $\lim\limits_{x\to 0+}\log_5 25x=\lim\limits_{x\to 0+}(2+\log_5 x)=-\infty$

(2) $x-1=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim\limits_{x\to 1+}\log_{\frac{1}{3}}(x-1)=\lim\limits_{t\to 0+}\log_{\frac{1}{3}}t=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\log_4(x+1)+\log_{\frac{1}{4}}x\}=\lim\limits_{x\to\infty}\log_4\frac{x+1}{x}$

$=\log_4\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}$

$=\log_4 1=0$

0285 답 -2

$\lim\limits_{x\to\infty}(\log_2\sqrt{x^2+8x}-\log_2 4x)=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\frac{\sqrt{x^2+8x}}{4x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\sqrt{\frac{x^2+8x}{16x^2}}$

$=\log_2\left(\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2x}}\right)$

$=\log_2\sqrt{\frac{1}{16}}=\log_2\frac{1}{4}=-2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0286

답 $2\sqrt{2}$

$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(ax+\sqrt{2})-\log_2(x-\sqrt{2})\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{ax+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{a+\frac{\sqrt{2}}{x}}{1-\frac{\sqrt{2}}{x}}$

$=\log_2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{\sqrt{2}}{x}}{1-\frac{\sqrt{2}}{x}}\right)=\log_2\frac{a+0}{1-0}=\log_2 a$

따라서 $\log_2 a=\frac{3}{2}$이므로 $a=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

0287

답 ②

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_4(7^x+8^x)=\lim_{x\to\infty}\log_4(7^x+8^x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_4\left[8^x\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_4 8\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=\log_4\left[\lim_{x\to\infty}8\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}\right]$

$=\log_4(8\times1)=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$

0288

답 1

$\lim_{x\to0+}\frac{\log_2\frac{6}{x}}{\log_2\left(\frac{3}{x}+4\right)}=\lim_{x\to0+}\frac{\log_2 6-\log_2 x}{\log_2(3+4x)-\log_2 x}$

$=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{\log_2 6}{\log_2 x}-1}{\frac{\log_2(3+4x)}{\log_2 x}-1}=\frac{0-1}{0-1}=1$

다른 풀이

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to0+}\frac{\log_2\frac{6}{x}}{\log_2\left(\frac{3}{x}+4\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log_2 6t}{\log_2(3t+4)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log_2 t+\log_2 6}{\log_2 t\left(3+\frac{4}{t}\right)}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\log_2 t+\log_2 6}{\log_2 t+\log_2\left(3+\frac{4}{t}\right)}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{\log_2 6}{\log_2 t}}{\frac{\log_2\left(3+\frac{4}{t}\right)}{\log_2 t}}=\frac{1+0}{1+0}=1$

0289

답 ④

$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^6+2x^4)}{\log(x^4+3x^3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x^6\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\log x^4\left(1+\frac{3}{x}\right)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x^6+\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\log x^4+\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6\log x+\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{4\log x+\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\log x}}{4+\frac{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\log x}}$

$=\frac{6+0}{4+0}=\frac{3}{2}$

0290

답 -23

$\lim_{x\to1-}\{\log_2 f(x)-\log_2(1-x^3)\}=3$에서

$\lim_{x\to1-}\left\{\log_2\frac{f(x)}{1-x^3}\right\}=3$

$\log_2\left\{\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{1-x^3}\right\}=\log_2 2^3$

$\therefore\ \lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{1-x^3}=8$ ····· ㉠

❶

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to1-$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

또한 진수 조건에 의하여 $x<1$일 때 $f(x)>0$이어야 하므로

$f(x)=(x-1)(x-a)$ $(a\geq1$인 상수$)$ ····· ㉡

❷

㉠에 ㉡을 대입하면

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{1-x^3}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x-a)}{(1-x)(x^2+x+1)}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{a-x}{x^2+x+1}=\frac{a-1}{3}=8$

에서 $a-1=24$ $\therefore\ a=25$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-25)$이므로

$f(2)=-23$

❸

채점 기준	배점
❶ 로그의 성질을 이용하여 식 정리하기	30%
❷ $f(x)$를 인수 $x-1$을 포함한 식으로 나타내기	30%
❸ 주어진 극한값을 이용하여 $f(2)$의 값 구하기	40%

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 03 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 꼴의 극한

0291 답 ⑤

$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}\times\lim_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{3x}}$

$=\lim_{x\to0}\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^4\times\lim_{x\to0}\left\{(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\right\}^{-1}$

$=e^4\times e^{-1}=e^{4+(-1)}=e^3$

0292 답 ①

$5-x=t$로 놓으면 $x\to5$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to5}(x-4)^{\frac{3}{5-x}}=\lim_{t\to0}(1-t)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to0}\left\{(1-t)^{-\frac{1}{t}}\right\}^{-3}$

$=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

0293 답 ④

$\lim_{x\to0}\left\{\left(1-\frac{x}{a}\right)(1+2ax)\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}(1+2ax)^{\frac{1}{x}}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left[\left\{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{a}{x}}\right\}^{-\frac{1}{a}}\left\{(1+2ax)^{\frac{1}{2ax}}\right\}^{2a}\right]$

$=e^{-\frac{1}{a}}\times e^{2a}=e^{2a-\frac{1}{a}}$

따라서 $e^{2a-\frac{1}{a}}=e^{\frac{1}{6}}$이므로 $2a-\frac{1}{a}=\frac{1}{6}$

$12a^2-a-6=0$, $(3a+2)(4a-3)=0$

$\therefore a=\frac{3}{4}$ ($\because a>0$)

유형 04 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 꼴의 극한

0294 답 ③

$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{6x}\right)\left(1+\frac{1}{9x}\right)\right\}^{18x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{18x}\left(1+\frac{1}{9x}\right)^{18x}\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\left[\left\{\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{6x}\right\}^3\left\{\left(1+\frac{1}{9x}\right)^{9x}\right\}^2\right]$

$=e^3\times e^2=e^{3+2}=e^5$

0295 답 4

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right\}^{-2a}=e^{-2a}=\frac{1}{e^{2a}}$

따라서 $\frac{1}{e^{2a}}=\frac{1}{e^8}$이므로 $2a=8$

$\therefore a=4$

0296 답 ①

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-6}{3x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{3x}}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{3x}\right)^x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-2}}{\left\{\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{-\frac{3x}{2}}\right\}^{-\frac{2}{3}}}$

$=\frac{e^{-2}}{e^{-\frac{2}{3}}}=e^{-2-\left(-\frac{2}{3}\right)}=e^{-\frac{4}{3}}$

0297 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x-5}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x\left(\frac{x}{x-2}\right)^5\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\left[\left\{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-2}\left(\frac{x}{x-2}\right)^5\right]$

$=e^{-2}\times1=\frac{1}{e^2}$ (참)

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$

$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=e$

즉, $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right\}^{4x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{x+1}{x}\times\frac{x+2}{x+1}\times\frac{x+3}{x+2}\times\cdots\times\frac{2x+1}{2x}\right)^{4x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{4x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{4x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^2=e^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유형 05 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ 꼴의 극한

0298 답 ④

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+8x)}{\ln(1+2x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+8x)}{2\ln(1+2x)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+8x)}{8x}\times\frac{2x}{\ln(1+2x)}\times2\right\}$

$=1\times1\times2=2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0299

답 ③

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(2x^2+3x)-\ln 3x}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\frac{2x^2+3x}{3x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\left(\frac{2}{3}x+1\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\left\{\frac{\ln\left(\frac{2}{3}x+1\right)}{\frac{2}{3}x}\times\frac{2}{3}\right\}$$
$$=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

0300

답 ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times(\sqrt{x+4}+2)\right\}$$
$$=1\times(\sqrt{4}+2)=4$$

0301

답 5

$$\lim_{x\to\infty}x\{\ln(x+2)-\ln(x-3)\}=\lim_{x\to\infty}\left(x\times\ln\frac{x+2}{x-3}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{x\times\ln\left(1+\frac{5}{x-3}\right)\right\}$$

$\frac{5}{x-3}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left\{x\times\ln\left(1+\frac{5}{x-3}\right)\right\}=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{5+3t}{t}\times\ln(1+t)\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left\{(5+3t)\times\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}$$
$$=5\times 1=5$$

0302

답 ⑤

$y=1-\frac{1}{e^{3x}}=1-e^{-3x}$으로 놓으면

$e^{-3x}=1-y$

$-3x=\ln(1-y)$

$\therefore x=-\frac{1}{3}\ln(1-y)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{3}\ln(1-x)$

따라서 $g(x)=-\frac{1}{3}\ln(1-x)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-3x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1-x)}{-x}\times\frac{1}{3}\right\}$$
$$=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Bible Says 역함수 구하기

함수 $y=f(x)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.
❶ 주어진 함수 $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.
❷ $y=f(x)$를 x에 대하여 정리한 후, $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.
❸ x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

0303

답 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3x}{f(x)}\right\}$$
$$=1\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{f(x)}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=6$

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+6x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{x}\times\frac{1}{x+6}\right\}$$
$$=6\times\frac{1}{6}=1$$

유형 06 $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ 꼴의 극한

0304

답 ①

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(4+x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(4+x)-\log_2 4}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log_2\left(1+\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}\times\frac{1}{4}\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4\ln 2}$$

0305

답 ①

$x-2=t$로 놓으면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log_3(x-1)}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3(1+t)}{t}=\frac{1}{\ln 3}$$

0306

답 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\log_8(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2x}{\log_8(1+2x)}\times\frac{a}{2}\right\}$$
$$=\ln 8\times\frac{a}{2}=\ln 2^3\times\frac{a}{2}$$
$$=3\ln 2\times\frac{a}{2}=\frac{3}{2}a\ln 2$$

따라서 $\frac{3}{2}a\ln 2=9\ln 2$이므로

$a=9\times\frac{2}{3}=6$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0307 답 ①

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\left\{\log_5\left(25+\frac{1}{x}\right)-2\right\}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\log_5(25+t)-2}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\log_5(25+t)-\log_5 25}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\log_5\left(1+\frac{t}{25}\right)}{t}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\log_5\left(1+\frac{t}{25}\right)}{\frac{t}{25}}\times\frac{1}{25}\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln 5}\times\frac{1}{25}=\frac{1}{25\ln 5}$$

유형 07 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$ 꼴의 극한

0308 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+6x)}{6x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times3\right\}$$
$$=1\times1\times3=3$$

0309 답 8

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}+e^{3x}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1+e^{3x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{5x}-1}{5x}\times5+\frac{e^{3x}-1}{3x}\times3\right)$$
$$=1\times5+1\times3=8$$

0310 답 −1

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{ax}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1-(e^{ax}-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2-\frac{e^{ax}-1}{ax}\times a\right)$$
$$=1\times2-1\times a=2-a$$

따라서 $2-a=3$이므로 $a=-1$

0311 답 18

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{e^{3x}-1}\times\frac{e^{3x}-1}{3x}\times3\right\}=4\times1\times3=12$$ ❶

조건 (나)에서 $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{6x-6}-1}{g(x-1)}=\lim_{t\to0}\frac{e^{6t}-1}{g(t)}=9$$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{x}{g(x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{6x}-1}{g(x)}\times\frac{6x}{e^{6x}-1}\times\frac{1}{6}\right\}=9\times1\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$$ ❷

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{x}\times\frac{x}{g(x)}\right\}=12\times\frac{3}{2}=18$$ ❸

채점 기준	배점
❶ 조건 (가)를 이용하여 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값 구하기	30%
❷ 조건 (나)를 이용하여 $\lim_{x\to0}\frac{x}{g(x)}$의 값 구하기	40%
❸ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값 구하기	30%

유형 08 $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$ 꼴의 극한

0312 답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{8^x-4^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{8^x-1-(4^x-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{8^x-1}{x}-\frac{4^x-1}{x}\right)$$
$$=\ln 8-\ln 4=3\ln 2-2\ln 2=\ln 2$$

0313 답 ②

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{4^{x-1}-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{4^{x-1}-1}{(x-1)(x+3)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{4^t-1}{t(t+4)}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{4^t-1}{t}\times\frac{1}{t+4}\right)$$
$$=\ln 4\times\frac{1}{4}=\frac{\ln 2}{2}$$

0314 답 ④

$\frac{1}{3x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}9x(5^{\frac{1}{3x}}-1)=\lim_{t\to0+}\left(\frac{5^t-1}{t}\times3\right)=3\ln5$$

0315 답 5

$$\lim_{x\to0}\frac{a^{2x}+6a^x-7}{b^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{(a^x-1)(a^x+7)}{b^x-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{a^x-1}{x}\times\frac{x}{b^x-1}\times(a^x+7)\right\}$$
$$=\ln a\times\frac{1}{\ln b}\times8$$
$$=\frac{8\ln a}{\ln b}=8\log_b a$$

따라서 $8\log_b a=40$이므로 $\log_b a=5$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0316

답 9

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{72x^2}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{4^{ax}-1}{ax}\times\frac{\log_2(1+bx)}{bx}\times\frac{ab}{72}\right\}$$
$$=\ln 4\times\frac{1}{\ln 2}\times\frac{ab}{72}=\frac{ab}{36}$$

즉, $\frac{ab}{36}=1$이므로 $ab=36$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는 $(1, 36)$, $(2, 18)$, $(3, 12)$, $(4, 9)$, $(6, 6)$, $(9, 4)$, $(12, 3)$, $(18, 2)$, $(36, 1)$의 9개이다.

참고

$ab=36$을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 36의 양의 약수의 개수를 의미하므로 $36=2^2\times3^2$
즉, 구하는 개수는 $(2+1)(2+1)=3\times3=9$

유형 09 지수·로그함수의 극한에서 미정계수의 결정

0317

답 ②

$\lim_{x\to0}\frac{ax+b}{e^{5x}-1}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,
(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to0}(ax+b)=0$이므로 $b=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{ax}{e^{5x}-1}=\lim_{x\to0}\left(\frac{5x}{e^{5x}-1}\times\frac{a}{5}\right)$$
$$=1\times\frac{a}{5}=\frac{a}{5}$$

따라서 $\frac{a}{5}=2$이므로 $a=10$

$\therefore a-b=10-0=10$

0318

답 3

$\lim_{x\to2}\frac{ax+b}{\ln\frac{x^4}{16}}=a^2-3$에서 극한값이 존재하고 $x\to2$일 때,
(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to2}(ax+b)=0$이므로 $2a+b=0$
$\therefore b=-2a$
$x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{ax+b}{\ln\frac{x^4}{16}}=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)}{4\ln\frac{x}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{at}{4\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\frac{t}{2}}{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}\times\frac{a}{2}\right\}=1\times\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=a^2-3$이므로
$2a^2-a-6=0$, $(2a+3)(a-2)=0$
$\therefore a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=2$

이때 b가 양수이므로 $a=-\frac{3}{2}$
$\therefore b=-2a=-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=3$

0319

답 ④

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{f(x)}=3$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,
(분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$에서 $f(0)=0$이므로
$f(x)=x(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{x(ax+b)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+6x)}{6x}\times\frac{6}{ax+b}\right\}$$
$$=1\times\frac{6}{b}=\frac{6}{b}$$

따라서 $\frac{6}{b}=3$이므로 $b=2$

$f(x)=ax^2+2x$이므로 $f'(x)=2ax+2$
$\therefore f'(0)=2$

0320

답 ③

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+b}-4}{\ln(1+5x)}=\frac{1}{10}$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,
(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-4)=0$이므로 $b=16$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+16}-4}{\ln(1+5x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{ax+16}-4)(\sqrt{ax+16}+4)}{\ln(1+5x)\times(\sqrt{ax+16}+4)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{ax}{\ln(1+5x)\times(\sqrt{ax+16}+4)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{5x}{\ln(1+5x)}\times\frac{1}{\sqrt{ax+16}+4}\times\frac{a}{5}\right\}$$
$$=1\times\frac{1}{8}\times\frac{a}{5}=\frac{a}{40}$$

따라서 $\frac{a}{40}=\frac{1}{10}$이므로 $a=4$

$\therefore a+b=4+16=20$

0321

답 7

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+b)}{e^{4x}-1}=\frac{3}{2}$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,
(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to0}\ln(ax+b)=0$이므로 $\ln b=0$
$\therefore b=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{4x}{e^{4x}-1}\times\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times\frac{a}{4}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{a}{4}=\frac{a}{4}$$

따라서 $\frac{a}{4}=\frac{3}{2}$이므로 $a=\frac{3}{2}\times4=6$

$\therefore a+b=6+1=7$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0322

답 4

$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2+4x-7}{e^{a(x-b)}-1}=3$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고

$x\to1$일 때, (분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{e^{a(x-b)}-1\}=0$이므로 $e^{a(1-b)}-1=0$

$a(1-b)=0 \quad \therefore b=1\ (\because a\neq0)$ ❶

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x^2+3x+7)}{e^{a(x-1)}-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x-1}{e^{a(x-1)}-1}\times(2x^2+3x+7)\right\}$$
$$=12\lim_{x\to1}\frac{x-1}{e^{a(x-1)}-1}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$12\lim_{x\to1}\frac{x-1}{e^{a(x-1)}-1}=12\lim_{t\to0}\frac{t}{e^{at}-1}$$
$$=12\lim_{t\to0}\left(\frac{at}{e^{at}-1}\times\frac{1}{a}\right)$$
$$=12\times1\times\frac{1}{a}=\frac{12}{a}$$

따라서 $\frac{12}{a}=3$이므로 $a=4$ ❷

$\therefore ab=4\times1=4$ ❸

채점 기준	배점
❶ 극한값이 존재함을 이용하여 b의 값 구하기	40%
❷ 지수함수의 극한을 이용하여 a의 값 구하기	50%
❸ ab의 값 구하기	10%

유형 10 지수·로그함수의 극한의 도형에의 활용

0323

답 ②

점 $P(t,\ 3e^{at}-3)$에서 x축에 내린 수선의 발이 $H(t,\ 0)$이므로

$\overline{OH}=t$, $\overline{PH}=3e^{at}-3$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{\overline{PH}}{\overline{OH}}=\lim_{t\to0+}\frac{3e^{at}-3}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{e^{at}-1}{at}\times3a\right)$$
$$=1\times3a=3a$$

따라서 $3a=2$이므로 $a=\frac{2}{3}$

0324

답 ①

삼각형 ABP의 넓이는

$f(t)=\frac{1}{2}\times8\times\ln t=4\ln t$

삼각형 APC의 넓이는

$g(t)=\frac{1}{2}\times4\times(t-1)=2(t-1)$

$$\therefore \frac{g(t)}{f(t)}=\frac{t-1}{2\ln t}$$

$t-1=k$로 놓으면 $t\to1+$일 때 $k\to0+$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{g(t)}{f(t)}=\lim_{t\to1+}\frac{t-1}{2\ln t}$$
$$=\lim_{k\to0+}\frac{k}{2\ln(1+k)}$$
$$=\lim_{k\to0+}\left\{\frac{k}{\ln(1+k)}\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

0325

답 ①

두 점 A, B는 각각 $A(t,\ 2^t)$, $B\left(t,\ \left(\frac{1}{2}\right)^t\right)$이고 점 A에서 y축에 내린 수선의 발은 $H(0,\ 2^t)$이므로

$\overline{AH}=t$, $\overline{AB}=2^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{2^t-1}{t}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t-1}{t}\right\}$$
$$=\ln2-\ln\frac{1}{2}=2\ln2$$

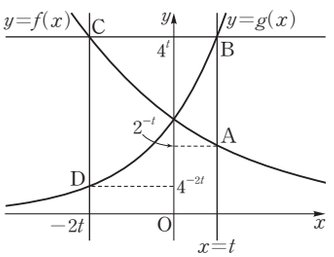
참고

분자를 $\left(\frac{1}{2}\right)^t$으로 묶어 극한값을 구할 수도 있다.

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t(4^t-1)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^t\times\frac{4^t-1}{t}\right\}$$
$$=1\times\ln4=2\ln2$$

0326

답 2



$\overline{AB}=g(t)-f(t)=4^t-2^{-t}$ ❶

점 C의 x좌표는 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4^t$에서 $2^{-x}=2^{2t}$

$\therefore x=-2t$

$\overline{CD}=f(-2t)-g(-2t)=4^t-4^{-2t}$ ❷

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\lim_{t\to 0+}\frac{4^t-4^{-2t}}{4^t-2^{-t}}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{4^t-4^{-2t}}{t}}{\frac{4^t-2^{-t}}{t}}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{4^t-1}{t}+\frac{4^{-2t}-1}{-2t}\times 2}{\frac{4^t-1}{t}+\frac{2^{-t}-1}{-t}}$$
$$=\frac{\ln 4+2\ln 4}{\ln 4+\ln 2}=\frac{6\ln 2}{3\ln 2}=2$$

❸

채점 기준	배점
❶ 선분 AB의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기	10%
❷ 선분 CD의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기	30%
❸ 식을 적절히 변형하여 $\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$의 값 구하기	60%

유형 11 지수·로그함수의 연속

0327

답 6

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(6x+1)}{x} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$, 즉 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(6x+1)}{x}=a$

$\therefore a=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(6x+1)}{6x}\times 6\right\}=1\times 6=6$

0328

답 ①

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-a}{(a+5)x}=f(0)$ …… ㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때,

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(e^{4x}-a)=0$이므로

$1-a=0$에서 $a=1$

$\therefore f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{6x}$
$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{2}{3}\right)$
$=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

0329

답 1

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{2x}+8e^x+a}{x} & (x\neq 0)\\ b & (x=0)\end{cases}$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$, 즉 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+8e^x+a}{x}=b$ …… ㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때,

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(e^{2x}+8e^x+a)=0$이므로

$9+a=0$에서 $a=-9$

❶

$a=-9$를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+8e^x-9}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^x+9)}{x}$
$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^x-1}{x}\times(e^x+9)\right\}$
$=1\times(1+9)=10=b$

❷

$\therefore a+b=(-9)+10=1$

❸

채점 기준	배점
❶ 극한값이 존재함을 이용하여 a의 값 구하기	45%
❷ 지수함수의 극한을 이용하여 b의 값 구하기	45%
❸ $a+b$의 값 구하기	10%

Bible Says 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $x=a$에서 연속이다.

(1) 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

(2) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(3) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

0330

답 ②

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(4x-7)}{e^{x-2}-1} & (x>2)\\ 5x+a & (x\leq 2)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(5x+a)=10+a$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{\ln(4x-7)}{e^{x-2}-1}$

$f(2)=10+a$에서 $\lim_{x\to 2+}\frac{\ln(4x-7)}{e^{x-2}-1}=10+a$

$x-2=t$로 놓으면 $x\to 2+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 2+}\frac{\ln(4x-7)}{e^{x-2}-1}=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+4t)}{e^t-1}$
$=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\ln(1+4t)}{4t}\times\frac{t}{e^t-1}\times 4\right\}$
$=1\times 1\times 4=4=10+a$

$\therefore a=-6$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0331 답 ③

$(x-1)f(x)=e^{4x-4}-1$에서

$x\neq1$일 때, $f(x)=\dfrac{e^{4x-4}-1}{x-1}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{4x-4}-1}{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{4x-4}-1}{x-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{4t}-1}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{e^{4t}-1}{4t}\times4\right)=1\times4=4$

$\therefore f(1)=4$

유형 12 지수함수의 도함수

0332 답 ④

$f(x)=e^x-x^2+5x$에서

$f'(x)=e^x-2x+5$

$\therefore f'(0)=1-0+5=6$

0333 답 ④

$f(x)=e^x(2x+1)$에서

$f'(x)=e^x\times(2x+1)+e^x\times2$

$=(2x+3)e^x$

$\therefore f'(1)=5e$

0334 답 ⑤

$f(x)=(x+a)e^x$에서

$f'(x)=1\times e^x+(x+a)\times e^x$

$=(x+a+1)e^x$

$f'(2)=(a+3)e^2$

따라서 $(a+3)e^2=8e^2$이므로

$a+3=8$ $\therefore a=5$

0335 답 21

$f(x)=3^x+3^{2x}=3^x+9^x$에서

$f'(x)=3^x\ln3+9^x\ln9$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3\ln3+9\ln9=3\ln3+18\ln3=21\ln3$

$\therefore a=21$

0336 답 ⑤

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}+\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f(x)=4^x$에서 $f'(x)=4^x\ln4$

$\therefore 2f'(1)=2\times4\ln4=8\ln4=16\ln2$

유형 13 로그함수의 도함수

0337 답 5

$f(x)=x^4\ln x$에서

$f'(x)=4x^3\times\ln x+x^4\times\dfrac{1}{x}=4x^3\ln x+x^3$

$f'(e)=4e^3\times1+e^3=5e^3$

$\therefore \dfrac{f'(e)}{e^3}=5$

0338 답 ⑤

$f(x)=\log_3 6x=\log_3 6+\log_3 x$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln3}$

$f'(a)=\dfrac{1}{a\ln3}=\dfrac{1}{9\ln3}$

$\therefore a=9$

0339 답 ④

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}-\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}\right\}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2+\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$

$=f'(1)\times2+f'(1)=3f'(1)$

$f(x)=x^2+x\ln x$에서

$f'(x)=2x+1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=2x+\ln x+1$

$\therefore 3f'(1)=3\times(2+0+1)=9$

0340 답 ②

함수 $f(x)=\ln x$가 닫힌구간 $[2, 32]$에서 연속이고, 열린구간 $(2, 32)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(32)-f(2)}{32-2}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(2, 32)$에 적어도 하나 존재한다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때

$\frac{f(32)-f(2)}{32-2}=\frac{\ln 32-\ln 2}{30}=\frac{5\ln 2-\ln 2}{30}=\frac{4\ln 2}{30}=\frac{2\ln 2}{15}$

이고,

$f(x)=\ln x$에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로 $f'(c)=\frac{1}{c}$

즉, $\frac{2\ln 2}{15}=\frac{1}{c}$이므로 $c=\frac{15}{2\ln 2}$

Bible Says 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

Bible Says 구간으로 나누어 정의된 함수의 미분가능성

미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x\geq a) \end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

(1) 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

➡ $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} g(x)=g(a)$

(2) 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 미분계수가 존재한다.

➡ $f'(a)=g'(a)$

[방법1] 도함수를 이용

$h'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<a) \\ g'(x) & (x>a) \end{cases}$에서 $f'(a)=g'(a)$

임을 보인다.

[방법2] 미분계수의 정의를 이용

$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

임을 보인다.

유형 14 지수·로그함수의 미분가능성

0341

답 ③

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ 2^x & (x\geq 1) \end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} (ax+b)=a+b$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} 2^x=2$

$f(1)=2$

에서 $a+b=2$ ····· ㉠

또한 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 좌미분계수, 우미분계수가 같아야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f'(x)=\lim_{x\to 1+} f'(x)$이어야 하므로

$f'(x)=\begin{cases} a & (x<1) \\ 2^x\ln 2 & (x>1) \end{cases}$에서 $a=2\ln 2$

$a=2\ln 2$를 ㉠에 대입하면 $b=2-2\ln 2$

$\therefore a-b=2\ln 2-(2-2\ln 2)=4\ln 2-2$

참고

미분계수의 정의를 이용하여 a의 값을 구할 수도 있다.

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ 2^x & (x\geq 1) \end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 좌미분계수, 우미분계수가 같아야 한다.

$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-} \frac{ax+b-(a+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-} \frac{a(x-1)}{x-1}=a$

$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+} \frac{2^x-2}{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 1+} \frac{2^x-2}{x-1}=\lim_{t\to 0+} \frac{2^{t+1}-2}{t}$

$=\lim_{t\to 0+} \frac{2(2^t-1)}{t}=2\ln 2$

$\therefore a=2\ln 2$

0342

답 ③

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+7 & (x\leq 1) \\ \ln bx & (x>1) \end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} (ax+7)=a+7$

$\lim_{x\to 1+} \ln bx=\ln b$

$f(1)=a+7$

에서 $a+7=\ln b$ ····· ㉠

또한 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 좌미분계수, 우미분계수가 같아야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f'(x)=\lim_{x\to 1+} f'(x)$이어야 하므로

$f'(x)=\begin{cases} a & (x<1) \\ \frac{1}{x} & (x>1) \end{cases}$에서 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\ln b=8$ $\therefore b=e^8$

$\therefore ab=1\times e^8=e^8$

참고

미분계수의 정의를 이용하여 a의 값을 구할 수도 있다.

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+7 & (x\leq 1) \\ \ln bx & (x>1) \end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 좌미분계수, 우미분계수가 같아야 한다.

$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-} \frac{ax+7-(a+7)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-} \frac{a(x-1)}{x-1}=a$

$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+} \frac{\ln bx-\ln b}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+} \frac{\ln x}{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 1+} \frac{\ln x}{x-1}=\lim_{t\to 0+} \frac{\ln(1+t)}{t}=1$

$\therefore a=1$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0343

답 ③

함수 $f(x)=\begin{cases}(8x-8)e^x+a & (x<b)\\ 5 & (x\geq b)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=b$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이므로

$\lim_{x\to b-} f(x)=\lim_{x\to b+} f(x)=f(b)$이어야 한다.

$\lim_{x\to b-} f(x)=\lim_{x\to b-}\{(8x-8)e^x+a\}=(8b-8)e^b+a$

$\lim_{x\to b+} f(x)=f(b)=5$

에서 $(8b-8)e^b+a=5$ ····· ㉠

또한 함수 $f(x)$의 $x=b$에서의 좌미분계수, 우미분계수가 같아야 한다.

즉, $\lim_{x\to b-} f'(x)=\lim_{x\to b+} f'(x)$이어야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}8e^x+(8x-8)e^x & (x<b)\\ 0 & (x>b)\end{cases}$에서

$8be^b=0$ $\therefore b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$-8+a=5$ $\therefore a=13$

$\therefore a+b=13+0=13$

0344

답 13

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

함수 $g(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (x\leq 2)\\ e^{x-2}+6 & (x>2)\end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to 2+} g(x)=g(2)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to 2-}(x^2+ax+b)=4+2a+b$

$\lim_{x\to 2+} g(x)=\lim_{x\to 2+}(e^{x-2}+6)=7$

$g(2)=4+2a+b$

에서 $4+2a+b=7$

$\therefore 2a+b=3$ ····· ㉠ ❶

또한 함수 $g(x)$의 $x=2$에서의 좌미분계수, 우미분계수가 같아야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2-} g'(x)=\lim_{x\to 2+} g'(x)$이어야 하므로

$g'(x)=\begin{cases}2x+a & (x<2)\\ e^{x-2} & (x>2)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 2-}(2x+a)=\lim_{x\to 2+} e^{x-2}$

$4+a=1$ $\therefore a=-3$ ❷

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=3-2a=9$

따라서 $f(x)=x^2-3x+9$이므로

$f(-1)=1+3+9=13$ ❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속일 조건 구하기	30%
❷ 함수 $g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수가 존재할 조건 구하기	40%
❸ 함수 $f(x)$의 식을 구한 후 $f(-1)$의 값 구하기	30%

PART B 내신 잡는 종합 문제

0345

답 ①

$x+1=t$로 놓으면 $x\to -1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{2^{2x+2}-1}{12x+12}=\lim_{t\to 0}\frac{2^{2t}-1}{12t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{2^{2t}-1}{2t}\times\frac{1}{6}\right)$$
$$=\ln 2\times\frac{1}{6}=\frac{\ln 2}{6}$$

0346

답 ①

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+4e^x-5}{\ln(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^x+5)}{\ln(1-2x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^x-1}{x}\times\frac{-2x}{\ln(1-2x)}\times\frac{e^x+5}{-2}\right\}$$
$$=1\times 1\times\left(-\frac{6}{2}\right)=-3=a$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2}{\left\{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-2}}$$
$$=\frac{e^2}{e^{-2}}=e^{2-(-2)}$$
$$=e^4=b$$

$\therefore ab=-3e^4$

참고

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left\{\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}}\right\}^{\frac{4}{x-2}}\right]^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}}\right\}^{\frac{4x}{x-2}}=e^4=b$$

0347

답 ③

$f(x)=x^2e^x$이라 하면 $f(1)=e$이고

$f'(x)=2x\times e^x+x^2\times e^x=(x^2+2x)e^x$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3e$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0348

답 1

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\log_2\frac{2}{x}}{\log_2\left(\frac{8}{x}+1\right)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\log_2 2t}{\log_2(8t+1)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\log_2 t+1}{\log_2 t+\log_2\left(8+\frac{1}{t}\right)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\log_2 t}}{1+\frac{\log_2\left(8+\frac{1}{t}\right)}{\log_2 t}}=\frac{1}{1}=1$$

0349

답 ③

$$\lim_{x\to 0}\{(1+ax)(1+a^2x-3ax)\}^{\frac{1}{2x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(1+ax)^{\frac{1}{2x}}(1+a^2x-3ax)^{\frac{1}{2x}}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right\}^{\frac{a}{2}}\times\lim_{x\to 0}\left[\{1+(a^2-3a)x\}^{\frac{1}{(a^2-3a)x}}\right]^{\frac{a^2-3a}{2}}$$
$$=e^{\frac{a}{2}}\times e^{\frac{a^2-3a}{2}}=e^{\frac{a^2-2a}{2}}$$

따라서 $e^{\frac{a^2-2a}{2}}=e^{12}$이므로 $\frac{a^2-2a}{2}=12$

$a^2-2a-24=0$, $(a-6)(a+4)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$)

0350

답 ④

$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2\{1+f(2x)\}}{x}=\frac{8}{\ln 2}$에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때,

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\log_2\{1+f(2x)\}=0$이므로 $\lim_{x\to 0}f(2x)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2\{1+f(2x)\}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\log_2\{1+f(2x)\}}{f(2x)}\times\frac{f(2x)}{x}\right]$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=\frac{8}{\ln 2}$$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=8$

$2x=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\frac{t}{2}}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{f(t)}{t}\times 2\right\}$$
$$=2\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=8$$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$

0351

답 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^{x+2}-2\times b^{-x}}{a^x-b^{-x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^2-2\times\left(\frac{1}{ab}\right)^x}{1-\frac{1}{b}\times\left(\frac{1}{ab}\right)^x}=a^2$$

$-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a^{x+2}-2\times b^{-x}}{a^x-b^{-x-1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{a^{-t+2}-2\times b^t}{a^{-t}-b^{t-1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{a^2\times\left(\frac{1}{ab}\right)^t-2}{\left(\frac{1}{ab}\right)^t-\frac{1}{b}}=2b$$

따라서 $a^2+2b=50$을 만족시키는 2 이상의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(2, 23)$, $(4, 17)$, $(6, 7)$의 3개이다.

0352

답 ②

두 점 P, Q는 각각 $P(t, e^{2t+k})$, $Q(t, e^{-3t+k})$이므로

$\overline{PQ}=e^{2t+k}-e^{-3t+k}=e^k(e^{2t}-e^{-3t})$

$\overline{PQ}=t$에서

$e^k(e^{2t}-e^{-3t})=t$, $e^k=\frac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$

$\therefore e^{f(t)}=\frac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$

$$\therefore \lim_{t\to 0+}e^{f(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{e^{-3t}(e^{5t}-1)}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{5t}{e^{5t}-1}\times\frac{e^{3t}}{5}\right)=1\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$$

0353

답 88

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x^2)}{f(x)}=4$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때,

(분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x^2)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x^2)}{x(x^2+ax+b)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+6x^2)}{6x^2}\times\frac{6x}{x^2+ax+b}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{x^2+ax+b}=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때,

(분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{x^2+ax}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6}{x+a}=\frac{6}{a}=4$$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)$이므로

$f(4)=4\times(16+6)=88$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0354

답 ④

$\ln(1-2x) \le f(x) \le \frac{1}{2}(e^{-4x}-1)$에서

(i) $0<x<\frac{1}{2}$일 때

$$\frac{\ln(1-2x)}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{e^{-4x}-1}{2x}$$

이때

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1-2x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\left\{\frac{\ln(1-2x)}{-2x}\times(-2)\right\}$$
$$=1\times(-2)=-2$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-4x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0+}\left\{\frac{e^{-4x}-1}{-4x}\times(-2)\right\}$$
$$=1\times(-2)=-2$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=-2$$

(ii) $x<0$일 때

$$\frac{e^{-4x}-1}{2x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{\ln(1-2x)}{x}$$

이때

$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^{-4x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0-}\left\{\frac{e^{-4x}-1}{-4x}\times(-2)\right\}$$
$$=1\times(-2)=-2$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\ln(1-2x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\left\{\frac{\ln(1-2x)}{-2x}\times(-2)\right\}$$
$$=1\times(-2)=-2$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=-2$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-2$

$\frac{x}{6}=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{x}{6}\right)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{6t}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{f(t)}{t}\times\frac{1}{6}\right\}$$
$$=(-2)\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$$

Bible Says 함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)<g(x)$이면 $\alpha\le\beta$

(2) $f(x)<h(x)<g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

0355

답 ②

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (x\ne 0)\\ 8(x^2+ax+b) & (x=0)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\infty)$에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때,

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+a)}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a}{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$
$$=\frac{a}{1}=a=0$$

따라서 $f(x)=x^2$이므로 $f(3)=9$

0356

답 1

함수 $f(x)=\begin{cases}2^x+a & (x\le 0)\\ 8^x+b^x & (x>0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(2^x+a)=1+a$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(8^x+b^x)=1+1=2$

$f(0)=1+a$

에서 $1+a=2$

$\therefore a=1$

또한 함수 $f(x)$의 $x=0$에서의 좌미분계수, 우미분계수가 같아야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0-}f'(x)=\lim_{x\to 0+}f'(x)$이어야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}2^x\ln 2 & (x<0)\\ 8^x\ln 8+b^x\ln b & (x>0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 0-}2^x\ln 2=\lim_{x\to 0+}(8^x\ln 8+b^x\ln b)$

$\ln 2=\ln 8+\ln b$

$\ln 2=3\ln 2+\ln b$, $\ln b=\ln\frac{1}{4}$

$\therefore b=\frac{1}{4}$

$\therefore 4ab=4\times 1\times\frac{1}{4}=1$

0357

답 ③

ㄱ. $f(0)=f'(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\times\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right\}$$
$$=1\times f'(0)=0 \text{ (참)}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

ㄴ. [반례] $f(x)=|x|$이면

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$이지만

$\lim_{x\to 0-}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{-x}-1}{x}$

$=\lim_{x\to 0-}\left\{\frac{e^{-x}-1}{-x}\times(-1)\right\}$

$=1\times(-1)=-1$

$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

즉, $\lim_{x\to 0-}\frac{e^{f(x)}-1}{x}\neq\lim_{x\to 0+}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$의 값이 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{f(x)}=1$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{8^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2^x-1}{f(x)}\times\frac{8^x-1}{x}\times\frac{x}{2^x-1}\right\}$

$=1\times\ln 8\times\frac{1}{\ln 2}=\frac{3\ln 2}{\ln 2}=3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0358

답 ①

점 P의 x좌표를 p $(0<p<1)$이라 하자.

점 P는 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=-x+t$의 교점이므로

$\ln p=-p+t$에서

$t=\ln p+p=\ln p+\ln e^{p}=\ln pe^{p}$

$\therefore pe^{p}=e^{t}$

점 Q의 x좌표가 p이므로 y좌표는 e^{p}이다.

따라서 삼각형 OHQ의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{1}{2}\times p\times e^{p}=\frac{1}{2}e^{t}$

$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{2S(t)-1}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{e^{t}-1}{t}=1$

0359

답 $-\frac{1}{4}$

함수 $f(x)$가 $x\neq 2$에서 연속이고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이면 된다.

즉, $\lim_{x\to 2-}g(f(x))=\lim_{x\to 2+}g(f(x))=g(f(2))$이어야 한다.

❶

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to 2-$일 때 $t\to 2a-$이므로

$\lim_{x\to 2-}g(f(x))=\lim_{t\to 2a-}g(t)=\lim_{t\to 2a-}(2^{t}+2^{-t})=2^{2a}+2^{-2a}$

$x\to 2+$일 때 $t\to 1-$이므로

$\lim_{x\to 2+}g(f(x))=\lim_{t\to 1-}g(t)=\lim_{t\to 1-}(2^{t}+2^{-t})=2+2^{-1}=\frac{5}{2}$

$g(f(2))=g(2a)=2^{2a}+2^{-2a}$

에서 $4^{a}+4^{-a}=\frac{5}{2}$

❷

$4^{a}=s$ $(s>0)$으로 놓으면

$s+\frac{1}{s}=\frac{5}{2}$, $2s^{2}-5s+2=0$

$(2s-1)(s-2)=0$ $\therefore s=\frac{1}{2}$ 또는 $s=2$

$4^{a}=\frac{1}{2}$ 또는 $4^{a}=2$이므로

$2^{2a}=\frac{1}{2}$ 또는 $2^{2a}=2$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건 구하기	30%
❷ 조건을 이용하여 a를 포함한 식 세우기	40%
❸ 지수방정식을 풀어 모든 a의 값의 곱 구하기	30%

0360

답 18

조건 (가)의 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}=0$에서 극한값이 존재하고 $x\to 1$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}g(x)=0$이므로 $g(1)=0$

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=0$

❶

한편, $g(x)=f(x)e^{-x}$이므로

$g'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}$

$g(1)=0$에서 $f(1)e^{-1}=0$이므로

$f(1)=0$

$g'(1)=0$에서 $f'(1)\times e^{-1}-f(1)\times e^{-1}=0$이므로

$f'(1)=0$

즉, $f(1)=f'(1)=0$이므로

$f(x)=a(x-1)^{2}$ ($a\neq 0$인 상수) ····· ㉠

❷

조건 (나)에서

$\lim_{x\to 0}\frac{g(2x)-f(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)e^{-2x}-f(2x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)(e^{-2x}-1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}f(2x)\times\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\times(-2)\right\}$

$=-2f(0)=-4$

이므로 $f(0)=2$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=a=2$이므로

$f(x)=2(x-1)^{2}$

$\therefore f(4)=2\times 3^{2}=18$

❸

채점 기준	배점
❶ 조건 (가)를 이용하여 $g(1)$, $g'(1)$의 값 구하기	30%
❷ 함수 $g'(x)$의 식을 이용하여 함수 $f(x)$의 식 나타내기	30%
❸ 조건 (나)를 이용하여 함수 $f(x)$를 구하고 $f(4)$의 값 구하기	40%

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART C 수능 녹인 변별력 문제

0361

답 ⑤

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+bx)}{a^{x-1}+\dfrac{1}{c}}=\dfrac{8}{\ln 2}$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때,

(분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\left(a^{x-1}+\dfrac{1}{c}\right)=0$이므로 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=0$

$\therefore c=-a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)}{a^{x-1}+\frac{1}{c}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)}{\frac{1}{a}(a^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+bx)}{bx}\times\frac{x}{a^x-1}\times ab\right\}$$

$$=1\times\frac{1}{\ln a}\times ab$$

$$=\frac{ab}{\ln a}=\frac{8}{\ln 2}$$

$a=2^n$ (n은 자연수)로 놓으면 $b=\dfrac{8n}{2^n}$

$n=1$일 때

$a=2$, $b=4$, $c=-2$

$n=2$일 때

$a=4$, $b=4$, $c=-4$

$n=3$일 때

$a=8$, $b=3$, $c=-8$

$n=4$일 때

$a=16$, $b=2$, $c=-16$

$n=5$일 때

$b=\dfrac{5}{4}$이므로 b는 정수가 아니다.

$n\geq 6$일 때

$0<b<1$

따라서 세 정수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 최댓값은

$16+2-(-16)=34$

0362

답 200

$\lim_{x\to 2}\{\log_4|f(x)|-\log_4|x^2-x-2|\}$

$=\lim_{x\to 2}\log_4\left|\dfrac{f(x)}{(x-2)(x+1)}\right|$

$=\log_4\left\{\lim_{x\to 2}\left|\dfrac{f(x)}{(x-2)(x+1)}\right|\right\}=\dfrac{3}{2}$

이므로

$\lim_{x\to 2}\left|\dfrac{f(x)}{(x-2)(x+1)}\right|=4^{\frac{3}{2}}=8$ ····· ㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to 2$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}|f(x)|=0$이므로 $f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x+a)$ (a는 상수)라 하고 이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\left|\frac{f(x)}{(x-2)(x+1)}\right|=\lim_{x\to 2}\left|\frac{(x-2)(x+a)}{(x-2)(x+1)}\right|$$

$$=\lim_{x\to 2}\left|\frac{x+a}{x+1}\right|$$

$$=\left|\frac{2+a}{3}\right|=8$$

(i) $\dfrac{2+a}{3}=8$일 때

$2+a=24$

즉, $a=22$이므로

$f(x)=(x-2)(x+22)$

$\therefore f(12)=10\times 34=340$

(ii) $\dfrac{2+a}{3}=-8$일 때

$2+a=-24$

즉, $a=-26$이므로

$f(x)=(x-2)(x-26)$

$\therefore f(12)=10\times(-14)=-140$

(i), (ii)에서 $f(12)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$340+(-140)=200$

0363

답 ②

두 곡선 $y=e^{x-1}$, $y=a^x$의 교점의 x좌표는

$e^{x-1}=a^x$, $\dfrac{e^x}{e}=a^x$, $e=\dfrac{e^x}{a^x}=\left(\dfrac{e}{a}\right)^x$

양변에 밑이 e인 자연로그를 취하면

$\ln e=\ln\left(\dfrac{e}{a}\right)^x$, $1=x\ln\dfrac{e}{a}$

$x=\dfrac{1}{\ln\frac{e}{a}}$, 즉 $f(a)=\dfrac{1}{\ln\frac{e}{a}}$

$$\lim_{a\to e+}\frac{1}{(e-a)f(a)}=\lim_{a\to e+}\frac{1}{(e-a)\times\frac{1}{\ln\frac{e}{a}}}$$

$$=\lim_{a\to e+}\frac{\ln\frac{e}{a}}{e-a}$$

$a-e=t$로 놓으면 $a\to e+$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{a\to e+}\frac{\ln\frac{e}{a}}{e-a}=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln\frac{e}{t+e}}{-t}=\lim_{t\to 0+}\ln\left(\frac{e}{t+e}\right)^{-\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\ln\left(\frac{t+e}{e}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0+}\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\ln\left\{\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}}\right\}^{\frac{1}{e}}$$

$$=\ln\left[\lim_{t\to 0+}\left\{\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}}\right\}^{\frac{1}{e}}\right]$$

$$=\ln e^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0364

답 17

조건 (가)의 $\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{f(x)-1}=\frac{1}{2}$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고

$x\to 2$일 때, (분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-1\}=0$이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=1$

함수 $f(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=2$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=1$

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{f(x)-1}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{e^{x-2}-1}{x-2}\times\frac{x-2}{f(x)-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{e^{x-2}-1}{x-2}\times\frac{x-2}{f(x)-f(2)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x-2}\times\frac{1}{f'(2)}$$

$x-2=t$로 놓으면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x-2}\times\frac{1}{f'(2)}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}\times\frac{1}{f'(2)}$$

$$=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2}$$

$\therefore f'(2)=2$

조건 (나)에서 $f(x)g(x)=2\ln x$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)g(2)=2\ln 2$이고 $f(2)=1$이므로

$g(2)=2\ln 2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\frac{2}{x}$$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=1$

이때 $f(2)=1$, $f'(2)=2$, $g(2)=2\ln 2$이므로

$4\ln 2+g'(2)=1$

$\therefore g'(2)=1-4\ln 2$

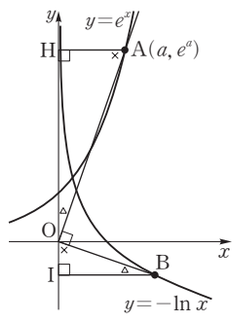
따라서 $a=1$, $b=-4$이므로

$a^2+b^2=1+16=17$

0365

답 ③

다음 그림과 같이 두 점 A, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.



조건 (나)에서 $\angle AOB=90^\circ$이므로

두 직각삼각형 OAH, BOI에 대하여

$\angle HOA=\angle IBO$, $\angle OAH=\angle BOI$

즉, 두 직각삼각형 OAH, BOI는 서로 닮음이고

닮음비는 조건 (가)에 의하여 $\overline{OA}:\overline{OB}=2:1$

점 A의 좌표를 (a, e^a) $(a>0)$이라 하면

$\overline{BI}=\frac{\overline{OH}}{2}=\frac{e^a}{2}$

$\overline{OI}=\frac{\overline{AH}}{2}=\frac{a}{2}$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{e^a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$

이때 점 B는 곡선 $y=-\ln x$ 위의 점이므로

$-\frac{a}{2}=-\ln\frac{e^a}{2}$, $\ln\frac{e^a}{2}=\frac{a}{2}$

$\frac{e^a}{2}=e^{\frac{a}{2}}$, $e^{\frac{a}{2}}=2$

양변에 밑이 e인 자연로그를 취하면

$\frac{a}{2}=\ln 2$에서 $a=2\ln 2$

따라서 직선 OA의 기울기는

$\frac{e^a}{a}=\frac{4}{2\ln 2}=\frac{2}{\ln 2}$

0366

답 −6

$g(x)=a|x^2-1|$, $h_k(x)=|(x^k-1)e^{x+1}|$ (k는 7 이하의 자연수)라 하자.

두 함수 $g(x)$, $h_k(x)$는 모두 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)=g(x)+\sum_{k=1}^{7}h_k(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면

$x=-1$에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같으면 된다.

즉, $\lim_{x\to -1-}f'(x)=\lim_{x\to -1+}f'(x)$이어야 한다.

$$g(x)=\begin{cases}a(x^2-1) & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ a(1-x^2) & (-1<x<1)\end{cases}$$에서

$$g'(x)=\begin{cases}2ax & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ -2ax & (-1<x<1)\end{cases}$$이므로

$\lim_{x\to -1-}g'(x)=-2a$, $\lim_{x\to -1+}g'(x)=2a$

한편, k가 홀수이면

$$h_k(x)=\begin{cases}-(x^k-1)e^{x+1} & (x<1)\\ (x^k-1)e^{x+1} & (x\ge 1)\end{cases}=\begin{cases}e(1-x^k)e^{x} & (x<1)\\ e(x^k-1)e^{x} & (x\ge 1)\end{cases}$$에서

$$h_k'(x)=\begin{cases}e(1-kx^{k-1}-x^k)e^{x} & (x<1)\\ e(x^k+kx^{k-1}-1)e^{x} & (x>1)\end{cases}$$이므로 함수 $h_k(x)$는

$x\ne 1$인 모든 실수에서 미분가능하다. 즉, 함수 $h_k(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

이때 $x=-1$에서의 미분계수를 a_k라 하면

$\lim_{x\to -1-}h_k'(x)=\lim_{x\to -1+}h_k'(x)=a_k$

k가 짝수이면

$$h_k(x)=\begin{cases}e(x^k-1)e^{x} & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ e(1-x^k)e^{x} & (-1<x<1)\end{cases}$$에서

$$h_k'(x)=\begin{cases}e(x^k+kx^{k-1}-1)e^{x} & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ e(1-kx^{k-1}-x^k)e^{x} & (-1<x<1)\end{cases}$$이므로

$\lim_{x\to -1-}h_k'(x)=-k$, $\lim_{x\to -1+}h_k'(x)=k$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서

$\lim_{x\to -1-} f'(x)=\lim_{x\to -1-}\left\{g'(x)+\sum_{k=1}^{7}h_k'(x)\right\}$

$=(-2a)+a_1+(-2)+a_3+(-4)+a_5+(-6)+a_7$

$\lim_{x\to -1+} f'(x)=\lim_{x\to -1+}\left\{g'(x)+\sum_{k=1}^{7}h_k'(x)\right\}$

$=2a+a_1+2+a_3+4+a_5+6+a_7$

에서 $\lim_{x\to -1-} f'(x)=\lim_{x\to -1+} f'(x)$이므로

$-2a-12+a_1+a_3+a_5+a_7=2a+12+a_1+a_3+a_5+a_7$

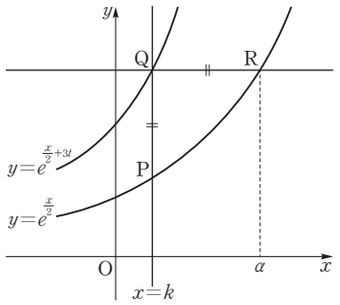
$\therefore a=-6$

0367

답 ③

두 점 P, Q는 각각 $\mathrm{P}\left(k,\ e^{\frac{k}{2}}\right)$, $\mathrm{Q}\left(k,\ e^{\frac{k}{2}+3t}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}$



점 R의 x좌표를 a라 하면 점 R는 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$ 위의 점이므로

$\mathrm{R}\left(a,\ e^{\frac{a}{2}}\right)$

이때 두 점 Q, R의 y좌표가 같으므로

$e^{\frac{k}{2}+3t}=e^{\frac{a}{2}}$

즉, $\frac{k}{2}+3t=\frac{a}{2}$에서 $a=k+6t$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=a-k=(k+6t)-k=6t$

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$이므로

$e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}=6t$, $e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)=6t$

$e^{\frac{k}{2}}=\frac{6t}{e^{3t}-1}$, $\frac{k}{2}=\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$

$\therefore k=2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$

$\therefore \lim_{t\to 0+} f(t)=\lim_{t\to 0+} 2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$

$=2\lim_{t\to 0+}\ln\left(\frac{3t}{e^{3t}-1}\times 2\right)$

$=2\ln 2=\ln 4$

0368

답 ②

조건 (가)에서 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{f(x)-e}=\frac{1}{2e}$ …… ㉠

㉠에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to 1$일 때,

(분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)-e\}=0$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=e$

함수 $f(x)$가 미분가능하므로 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=e$

이를 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\ln(3x-2)}{x-1}\times\frac{x-1}{f(x)-f(1)}\right\}=\frac{1}{2e}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+3t)}{t}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\ln(1+3t)}{3t}\times 3\right\}$

$=1\times 3=3$

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)-f(1)}=\frac{1}{f'(1)}$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{f(x)-f(1)}=3\times\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2e}$

$\therefore f'(1)=6e$

조건 (나)에서 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-h(-1)e}{x-1}=6e$ …… ㉡

㉡에서 극한값이 존재하고 $x\to 1$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)g(x)-h(-1)e\}=0$이므로

$f(1)g(1)-h(-1)e=0$

$\therefore g(1)=h(-1)$ ($\because f(1)=e$) …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=6e\times g(1)+e\times g'(1)=6e$

에서 $6g(1)+g'(1)=6$ …… ㉣

$f(x)\ln x+g(x)e^x=h(x)e^x$에서

양변에 $x=1$을 대입하면

$e\times 0+g(1)e=h(1)e$

$\therefore g(1)=h(1)$ …… ㉤

양변을 x에 대하여 미분한 후 $x=1$을 대입하면

$f'(x)\ln x+\frac{f(x)}{x}+g'(x)e^x+g(x)e^x=h'(x)e^x+h(x)e^x$

$6e\times 0+\frac{e}{1}+\{g'(1)+g(1)\}e=\{h'(1)+h(1)\}e$ ($\because f'(1)=6e$)

에서

$1+g'(1)+g(1)=h'(1)+h(1)$ …… ㉥

㉢, ㉤에서 $h(-1)=h(1)=g(1)$

즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$h(x)=x^2+a$ (a는 상수)라 하면

$h'(x)=2x$

㉤에서 $g(1)=h(1)=1+a$

㉥에서 $1+g'(1)+(1+a)=2+(1+a)$, 즉 $g'(1)=1$

㉣에서 $6(1+a)+1=6$ $\therefore a=-\frac{1}{6}$

따라서 $h(x)=x^2-\frac{1}{6}$이므로

$h(2)=4-\frac{1}{6}=\frac{23}{6}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A

04 삼각함수의 미분

유형 01 삼각함수 $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$

확인 문제

1. (1) $\frac{5}{3}$ (2) $-\frac{5}{4}$ (3) $-\frac{4}{3}$

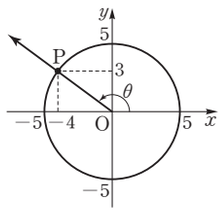
2. (1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 2, $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) -2, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $-\sqrt{3}$

(3) 2, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, -1

1. $\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로



(1) $\csc\theta=\frac{5}{3}$

(2) $\sec\theta=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4}$

(3) $\cot\theta=\frac{-4}{3}=-\frac{4}{3}$

2. (1) $\csc 60^\circ=\frac{1}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec 60^\circ=\frac{1}{\cos 60^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\cot 60^\circ=\frac{1}{\tan 60^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\csc 330^\circ=\frac{1}{\sin 330^\circ}=\frac{1}{\sin(360^\circ-30^\circ)}$

$=\frac{1}{-\sin 30^\circ}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

$\sec 330^\circ=\frac{1}{\cos 330^\circ}=\frac{1}{\cos(360^\circ-30^\circ)}$

$=\frac{1}{\cos 30^\circ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot 330^\circ=\frac{1}{\tan 330^\circ}=\frac{1}{\tan(360^\circ-30^\circ)}$

$=\frac{1}{-\tan 30^\circ}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\sqrt{3}$

(3) $\csc\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\sec\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$

(4) $\csc\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$

$\sec\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\cos\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\frac{1}{-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}$

$\cot\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\tan\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}$

$=\frac{1}{-\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{-1}=-1$

0369 답 ④

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\therefore \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$

$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}$

$\therefore 4\cot\theta+3\sec\theta=4\times\left(-\frac{3}{4}\right)+3\times\frac{5}{3}=2$

0370 답 ③

$\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}=13$이므로

$\csc\theta=-\frac{13}{5}$, $\sec\theta=-\frac{13}{12}$, $\cot\theta=\frac{12}{5}$

$\therefore \sec\theta\cot\theta+\csc\theta=\left(-\frac{13}{12}\right)\times\frac{12}{5}+\left(-\frac{13}{5}\right)=-\frac{26}{5}$

다른 풀이

$\sec\theta\cot\theta=\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$이므로

$\sec\theta\cot\theta+\csc\theta=2\csc\theta=2\times\left(-\frac{13}{5}\right)=-\frac{26}{5}$

0371 답 ③

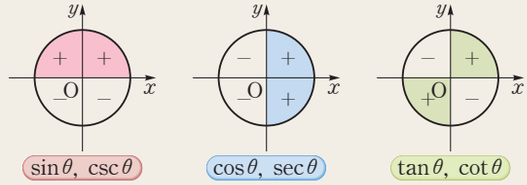
(i) $\csc\theta\sec\theta>0$에서 $\csc\theta$와 $\sec\theta$의 부호가 서로 같으므로
$\csc\theta>0$, $\sec\theta>0$ 또는 $\csc\theta<0$, $\sec\theta<0$
즉, θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\cot\theta<0$에서 $\cos\theta$와 $\cot\theta$의 부호가 서로 다르므로
$\cos\theta>0$, $\cot\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\cot\theta>0$
즉, θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제3사분면의 각이다.

Bible Says 삼각함수의 값의 부호

삼각함수의 값의 부호는 각 θ를 나타내는 동경이 위치한 사분면에 따라 다음과 같이 정해진다.



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0372

답 ②

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$

$\therefore \sec\theta-\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}=\frac{4}{3}$

0373

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\theta+\cot\theta=3$에서 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=3$

$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=3$, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=3$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$ ❶

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore |\sin\theta-\cos\theta|=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ❷

채점 기준	배점
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값 구하기	60%
❷ $\lvert\sin\theta-\cos\theta\rvert$의 값 구하기	40%

0374

답 $\sqrt{15}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\csc\theta+\sec\theta=-k$에서 $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=-k$ …… ㉠

$\csc\theta\sec\theta=-5$에서 $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=-5(\sin\theta+\cos\theta)=-k$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{k}{5}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{k^2}{25}$

㉡에서 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{5}$이므로

$1+2\times\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{k^2}{25}$, $k^2=15$

$\therefore k=\sqrt{15}$ ($\because k>0$)

유형 02 삼각함수 사이의 관계

확인 문제 (1) $\frac{25}{16}$ (2) $\frac{25}{9}$

(1) $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$

(2) $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{4}{3}$이므로

$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=1+\frac{16}{9}=\frac{25}{9}$

0375

답 ④

ㄱ. $\frac{\csc^2\theta-1}{\sec^2\theta-1}=\frac{1+\cot^2\theta-1}{1+\tan^2\theta-1}=\cot^4\theta$ (참)

ㄴ. $\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta}=\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{2}{\cos^2\theta}=2\sec^2\theta$ (거짓)

ㄷ. $\frac{\csc\theta}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{\csc\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$

$=\frac{\csc\theta(\sec\theta+\tan\theta)+\csc\theta(\sec\theta-\tan\theta)}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$

$=\frac{2\csc\theta\sec\theta}{1+\tan^2\theta-\tan^2\theta}=2\csc\theta\sec\theta$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0376

답 ③

$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2+\sqrt{3}$에서

$1-\tan\theta=(2+\sqrt{3})(1+\tan\theta)$

$(3+\sqrt{3})\tan\theta=-1-\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta=-\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$\sec^2\theta=1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$

이때 $\frac{3}{4}\pi<\theta<\pi$이므로

$\sec\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=-\sqrt{3}$이고 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로

$\csc^2\theta=1+(-\sqrt{3})^2=4$

$\therefore \sec\theta\csc^2\theta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\times4=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$

0377

답 ②

$\frac{1}{\csc\theta}\left(\frac{1}{\csc\theta-1}+\frac{1}{\csc\theta+1}\right)$

$=\frac{1}{\csc\theta}\times\frac{\csc\theta+1+\csc\theta-1}{\csc^2\theta-1}$

$=\frac{2}{\cot^2\theta}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $\frac{2}{\cot^2\theta}=\frac{5}{2}$이므로 $\cot^2\theta=\frac{4}{5}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cot\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$\therefore \tan\theta+\sec^2\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{9}{4}=\frac{9+2\sqrt{5}}{4}$

유형 03 삼각함수의 덧셈정리

확인 문제 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (3) $-2-\sqrt{3}$ (4) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(1) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$
$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)$
$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$
$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$
$=-2-\sqrt{3}$

(4) $\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$
$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

0378

답 ⑤

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$=\frac{1}{5}\times\left(-\frac{5}{7}\right)+\frac{2\sqrt{6}}{5}\times\frac{2\sqrt{6}}{7}$
$=\frac{-5+24}{35}=\frac{19}{35}$

0379

답 1

$2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\theta$
$=2\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)-\sin\theta$
$=2\left(\cos\theta\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta\times\frac{1}{2}\right)-\sin\theta$
$=\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$

0380

답 ③

$\tan\beta=\tan\{(\alpha+\beta)-\alpha\}$
$=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}$
$=\frac{2-\frac{2}{3}}{1+2\times\frac{2}{3}}=\frac{4}{7}$

다른 풀이

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$에 $\tan\alpha=\frac{2}{3}$, $\tan(\alpha+\beta)=2$를 대입하면

$2=\frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}$, $2-\frac{4}{3}\tan\beta=\frac{2}{3}+\tan\beta$

$\frac{7}{3}\tan\beta=\frac{4}{3}$ $\therefore \tan\beta=\frac{4}{7}$

0381

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 80^\circ\sin 125^\circ-\sin 10^\circ\sin 35^\circ$
$=\sin 80^\circ\sin(90^\circ+35^\circ)-\sin(90^\circ-80^\circ)\sin 35^\circ$
$=\sin 80^\circ\cos 35^\circ-\cos 80^\circ\sin 35^\circ$
$=\sin(80^\circ-35^\circ)$
$=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

0382

답 $\frac{1}{2}$

$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos(\alpha-\beta)>0$이므로

$\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}$
$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$ ❶

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$이므로

$\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\sin\alpha\sin\beta$

$\therefore \sin\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ ❷

채점 기준	배점
❶ $\cos(\alpha-\beta)$의 값 구하기	30%
❷ $\sin\alpha\sin\beta$의 값 구하기	70%

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0383

답 ④

$\sin\alpha-\sin\beta=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{4}{5}$의 양변을 각각 제곱하면

$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{9}{25}$ ····· ㉠

$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{16}{25}$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=1$

$2-2\cos(\alpha-\beta)=1$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$

0384

답 $\frac{\pi}{4}$

$g\left(\frac{1}{4}\right)=\alpha$, $g\left(\frac{3}{5}\right)=\beta$라 하면 $f(\alpha)=\frac{1}{4}$, $f(\beta)=\frac{3}{5}$이므로

$\tan\alpha=\frac{1}{4}$, $\tan\beta=\frac{3}{5}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}}=1$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\alpha+\beta<\pi$이고

$\tan(\alpha+\beta)=1$이므로 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

$\therefore g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{5}\right)=\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

0385

답 ④

$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$에서 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$이므로

$\sin\alpha=-\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$

$\therefore \sin(x+\alpha)=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha$

$=\frac{12}{13}\sin x-\frac{5}{13}\cos x$

부등식 $\cos x\le\sin(x+\alpha)\le 2\cos x$에서

$\cos x\le\frac{12}{13}\sin x-\frac{5}{13}\cos x\le 2\cos x$

이때 $0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x>0$이므로 각 변을 $\cos x$로 나누면

$1\le\frac{12}{13}\tan x-\frac{5}{13}\le 2$

$13\le 12\tan x-5\le 26$, $18\le 12\tan x\le 31$

$\therefore \frac{3}{2}\le\tan x\le\frac{31}{12}$

따라서 $\tan x$의 최댓값은 $\frac{31}{12}$, 최솟값은 $\frac{3}{2}$이므로 구하는 합은

$\frac{31}{12}+\frac{3}{2}=\frac{49}{12}$

유형 04 삼각함수의 덧셈정리의 활용 – 방정식

0386

답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{a}{3}$, $\tan\alpha\tan\beta=-\frac{4}{3}$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{-\frac{a}{3}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)}=-\frac{a}{7}$

즉, $-\frac{a}{7}=2$이므로 $a=-14$

0387

답 26

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=5$, $\tan\alpha\tan\beta=2$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{5}{1-2}=-5$ ····· ❶

$\therefore \sec^2(\alpha+\beta)=1+\tan^2(\alpha+\beta)$

$=1+(-5)^2=26$ ····· ❷

채점 기준	배점
❶ $\tan(\alpha+\beta)$의 값 구하기	70%
❷ $\sec^2(\alpha+\beta)$의 값 구하기	30%

0388

답 ②

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\sin^2\theta-4\cos\theta=(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta\ge 0$

$\therefore \cos^2\theta+4\cos\theta-1\le 0$ ····· ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-\sin\theta$, $\tan\alpha\tan\beta=\cos\theta$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$

즉, $\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{4}$이므로 $1-\cos\theta=-4\sin\theta$

위의 식의 양변을 제곱하면

$1-2\cos\theta+\cos^2\theta=16\sin^2\theta$

$1-2\cos\theta+\cos^2\theta=16(1-\cos^2\theta)$

$17\cos^2\theta-2\cos\theta-15=0$, $(17\cos\theta+15)(\cos\theta-1)=0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{15}{17}$ 또는 $\cos\theta=1$

이때 $\cos\theta=1$이면 ㉠을 만족시키지 않으므로

$\cos\theta=-\frac{15}{17}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 05 삼각함수의 덧셈정리의 활용 - 두 직선이 이루는 각의 크기

0389 답 ②

두 직선 $y=3x-2$, $y=-x+4$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=3$, $\tan\beta=-1$이므로

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{3-(-1)}{1+3\times(-1)}\right|=2$$

0390 답 ③

두 직선 $x-2y+2=0$, $3x-y=0$에서

$y=\frac{1}{2}x+1$, $y=3x$

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=3$이므로

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{1}{2}-3}{1+\frac{1}{2}\times3}\right|=1$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$

$\therefore \cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

0391 답 4

두 직선 $ax-2y+4=0$, $x-3y+1=0$에서

$y=\frac{a}{2}x+2$, $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\frac{a}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}$

$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$

$\frac{\frac{a}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{a}{2}\times\frac{1}{3}}=\pm1$

$\frac{a}{2}-\frac{1}{3}=1+\frac{a}{6}$ 또는 $\frac{a}{2}-\frac{1}{3}=-1-\frac{a}{6}$

$\therefore a=4$ 또는 $a=-1$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

0392 답 3

두 직선 $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$

따라서 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$이므로 $\frac{\overline{AB}}{5}=\frac{3}{5}$에서

$\overline{AB}=5\times\frac{3}{5}=3$

0393 답 3

두 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=ax-3$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=a$

이때 $\beta-\alpha=45^\circ$이므로

$\tan(\beta-\alpha)=1$, $\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=1$

$\frac{a-\frac{1}{2}}{1+a\times\frac{1}{2}}=1$, $a-\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}a$

$\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}$ $\therefore a=3$

유형 06 삼각함수의 덧셈정리의 도형에의 활용

0394 답 $\frac{\sqrt{2}}{10}$

정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$이므로

$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\frac{2a}{\sqrt{5}a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

또한 $\overline{DB}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$이므로

$\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{10}a}=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\frac{3a}{\sqrt{10}a}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

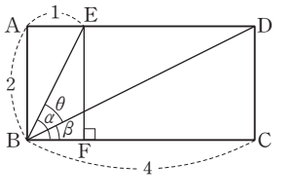
$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{10}-\frac{2\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0395

답 ③



점 E는 선분 AD를 1 : 3으로 내분하는 점이므로 $\overline{AE}=1$

$\angle EBC=\alpha$, $\angle DBC=\beta$라 하고 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 F라 하면

직각삼각형 BEF에서 $\tan\alpha=\frac{2}{1}=2$

직각삼각형 BCD에서 $\tan\beta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

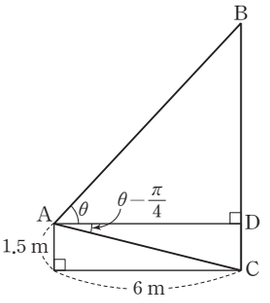
$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$

0396

답 11.5 m

오른쪽 그림과 같이 사람의 눈이 있는 지점을 A, 탑의 꼭대기와 밑부분을 각각 B, C라 하고 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자.



직각삼각형 ADC에서

$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1.5}{6}=\frac{1}{4}$이므로

$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{1}{4}$

$4\tan\theta-4=1+\tan\theta$, $3\tan\theta=5$

$\therefore \tan\theta=\frac{5}{3}$ ❶

직각삼각형 ADB에서 $\tan\theta=\frac{\overline{BD}}{6}=\frac{5}{3}$이므로

$\overline{BD}=10$ m

따라서 탑의 높이는

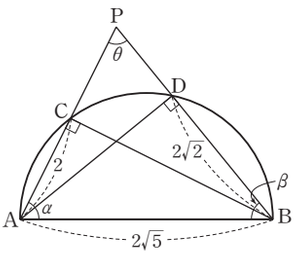
$\overline{BD}+\overline{CD}=10+1.5=11.5$(m) ❷

채점 기준	배점
❶ $\tan\theta$의 값 구하기	70%
❷ 탑의 높이 구하기	30%

0397

답 ③

오른쪽 그림과 같이 두 선분 AD, BC를 그으면 $\overline{AB}$가 반원의 지름이므로 원주각의 성질에 의하여



$\angle ACB=\angle ADB=\frac{\pi}{2}$

$\angle CAB=\alpha$, $\angle DBA=\beta$라 하면

두 직각삼각형 CAB, DAB에서

$\cos\alpha=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

삼각형 PAB에서 $\theta=\pi-(\alpha+\beta)$이므로

$\cos\theta=\cos\{\pi-(\alpha+\beta)\}=-\cos(\alpha+\beta)$

$=-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

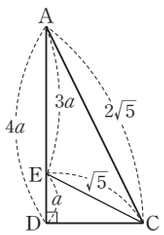
$=-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$

$=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5}$

0398

답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점이 E이므로 $\overline{DE}=a$라 하면



$\overline{AD}=4a$

두 직각삼각형 CDE, ACD에서

피타고라스 정리에 의하여

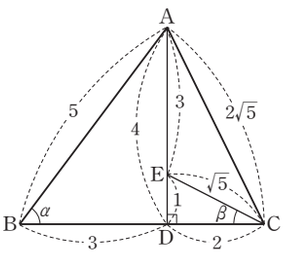
$\overline{CD}=\sqrt{5-a^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(4a)^2}$

즉, $5-a^2=20-16a^2$에서

$15a^2=15$, $a^2=1$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$\overline{AD}=4$이므로 직각삼각형 ABD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}=\sqrt{5^2-4^2}=3$



$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

또한 직각삼각형 CDE에서

$\overline{CD}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$이므로

$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0399

답 $2\sqrt{2}$

$\angle APO=\alpha$, $\angle BPO=\beta$라 하면 $\theta=\beta-\alpha$

두 직각삼각형 AOP, BOP에서 $\tan\alpha=\frac{1}{a}$, $\tan\beta=\frac{2}{a}$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{2}{a}-\frac{1}{a}}{1+\frac{2}{a}\times\frac{1}{a}}=\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{2}{a^2}}$$

$$=\frac{a}{a^2+2}$$

$$\therefore \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{a^2+2}{a}=a+\frac{2}{a}$$

이때 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{2}{a}\geq 2\sqrt{a\times\frac{2}{a}}=2\sqrt{2}$$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{2}{a}, \text{ 즉 } a=\sqrt{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\cot\theta$의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

Bible Says 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0, b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

유형 07 배각의 공식

확인 문제 (1) $\frac{24}{25}$ (2) $\frac{7}{25}$ (3) $\frac{24}{7}$

$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}$$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$$=\left(-\frac{4}{5}\right)^2-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$$

(3) $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{24}{7}$

0400

답 $-\frac{5}{9}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

$\therefore 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{9}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{9}$

0401

답 ①

$\sin\theta-3\cos\theta=0$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=3$ $\quad\therefore \tan\theta=3$

$$\therefore \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times 3}{1-3^2}=-\frac{3}{4}$$

0402

답 $\frac{7}{5}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$\therefore \sin 2\theta-\cos 2\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta-(2\cos^2\theta-1)$

$$=2\times\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{10}}{10}-\left\{2\times\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2-1\right\}$$

$$=\frac{3}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{7}{5}$$

0403

답 8

$f(x)=\cos 2x+4\sin x+3$

$=(1-2\sin^2 x)+4\sin x+3$

$=-2\sin^2 x+4\sin x+4$

$=-2(\sin x-1)^2+6$

이때 $-1\leq\sin x\leq 1$이므로 함수 $f(x)$는 $\sin x=1$일 때 최댓값 6, $\sin x=-1$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 $M=6$, $m=-2$이므로

$M-m=6-(-2)=8$

유형 08 배각의 공식의 활용

0404

답 $\frac{8}{15}$

직선 $y=\frac{1}{4}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

직선 $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 2θ이므로

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\tan\theta=\frac{1}{4}$, $\tan 2\theta=m$

$\therefore m=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\frac{2\times\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{8}{15}$

0405

답 ②

직선 $y=\frac{24}{7}x$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 2θ라 하면

$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{24}{7}$

$24(1-\tan^2\theta)=14\tan\theta$

$12\tan^2\theta+7\tan\theta-12=0$

$(3\tan\theta+4)(4\tan\theta-3)=0$

$\therefore \tan\theta=\frac{3}{4}$ ($\because \tan\theta>0$)

원의 반지름의 길이를 r라 하면 오른쪽 그림에서

$\tan\theta=\frac{r}{\sqrt{100-r^2}}$

이므로

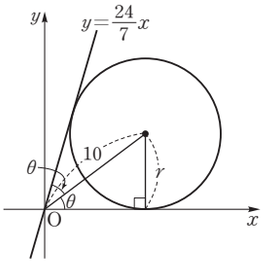
$\frac{3}{4}=\frac{r}{\sqrt{100-r^2}}$

$4r=3\sqrt{100-r^2}$

$16r^2=900-9r^2$

$25r^2=900$, $r^2=36$

$\therefore r=6$ ($\because r>0$)



0406

답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\overline{BF}=\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$이고 삼각형 FBC는 직각삼각형이므로

$\overline{FC}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\therefore \sin(\angle FBC)=\frac{\overline{FC}}{\overline{BF}}=\frac{3}{5}$

한편, $\angle ABE=\theta$이므로 $\angle FBC=\frac{\pi}{2}-2\theta$

$\sin(\angle FBC)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\cos 2\theta$

$=2\cos^2\theta-1=\frac{3}{5}$

$\therefore \cos^2\theta=\frac{4}{5}$

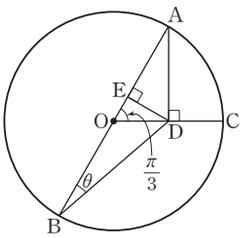
$\therefore \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

0407

답 ④

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E,

$\overline{OA}=\overline{OB}=4a$라 하면



$\overline{OD}=\overline{OA}\cos\frac{\pi}{3}=4a\times\frac{1}{2}=2a$

$\overline{OE}=\overline{OD}\cos\frac{\pi}{3}=2a\times\frac{1}{2}=a$

$\overline{DE}=\overline{OD}\sin\frac{\pi}{3}=2a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}a$

직각삼각형 BDE에서

$\overline{BE}=\overline{OB}+\overline{OE}=4a+a=5a$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{(5a)^2+(\sqrt{3}a)^2}=\sqrt{28a^2}=2\sqrt{7}a$

$\sin\theta=\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=\frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{7}a}=\frac{\sqrt{21}}{14}$,

$\cos\theta=\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}=\frac{5a}{2\sqrt{7}a}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{\sqrt{21}}{14}\times\frac{5\sqrt{7}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

유형 09 삼각함수의 합성

확인 문제 $2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$

$\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left\{\sin\theta\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos\theta\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$=2\left(\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$

0408

답 ①

$y=\cos x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$

$=\cos x+2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)+1$

$=\cos x+\sqrt{3}\sin x+\cos x+1$

$=\sqrt{3}\sin x+2\cos x+1$

$=\sqrt{7}\left(\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+\cos x\times\frac{2}{\sqrt{7}}\right)+1$

$=\sqrt{7}\sin(x+\alpha)+1$ $\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로

$-\sqrt{7}+1\le\sqrt{7}\sin(x+\alpha)+1\le\sqrt{7}+1$

따라서 $M=\sqrt{7}+1$, $m=-\sqrt{7}+1$이므로

$Mm=(\sqrt{7}+1)(-\sqrt{7}+1)=-6$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0409

답 ②

$3\sin\theta+4\cos\theta=5\left(\sin\theta\times\frac{3}{5}+\cos\theta\times\frac{4}{5}\right)$

$=5\sin(\theta+\alpha)\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\right)$

$\therefore r=5$

이때 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$이므로

$r\tan\alpha=5\times\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$

0410

답 ②

$y=\sqrt{5}\sin x-2\cos x+4$

$=3\left(\sin x\times\frac{\sqrt{5}}{3}-\cos x\times\frac{2}{3}\right)+4$

$=3\sin(x-\alpha)+4\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

ㄱ. 함수의 주기는 2π이다. (참)

ㄴ. $-1\le\sin(x-\alpha)\le1$이므로

$-3\le3\sin(x-\alpha)\le3$

$\therefore 1\le3\sin(x-\alpha)+4\le7$

따라서 최댓값은 7이다. (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여 최솟값은 1이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0411

답 12

$f(x)=a\sin x+\sqrt{11}\cos x-1$

$=\sqrt{a^2+11}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+11}}\sin x+\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{a^2+11}}\cos x\right)-1$

$=\sqrt{a^2+11}\sin(x+\alpha)-1$

$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{a^2+11}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+11}}\right)$ ····· ❶

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{a^2+11}-1\le\sqrt{a^2+11}\sin(x+\alpha)-1\le\sqrt{a^2+11}-1$

함수 $f(x)$의 최댓값이 5이므로

$\sqrt{a^2+11}-1=5,\ \sqrt{a^2+11}=6$

$a^2+11=36,\ a^2=25$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$ ····· ❷

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값 b는

$b=-\sqrt{5^2+11}-1=-7$

$\therefore a-b=5-(-7)=12$ ····· ❸

채점 기준	배점
❶ 삼각함수의 합성을 이용하여 나타내기	40%
❷ a의 값 구하기	40%
❸ $a-b$의 값 구하기	20%

0412

답 $\frac{1}{2}$

$f(x)=3\sqrt{2}\sin x+4\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=3\sqrt{2}\sin x+4\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=3\sqrt{2}\sin x+4\left(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=3\sqrt{2}\sin x+2\sqrt{2}\cos x-2\sqrt{2}\sin x$

$=\sqrt{2}\sin x+2\sqrt{2}\cos x$

$=\sqrt{10}\left(\sin x\times\frac{1}{\sqrt{5}}+\cos x\times\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$=\sqrt{10}\sin(x+\alpha)\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

함수 $f(x)$는 $\sin(x+\alpha)=1$일 때, 최댓값을 가지므로

$x+\alpha=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2}-\alpha$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$

$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{2}$

0413

답 $\sqrt{10}$

$\overline{AB}$가 반원의 지름이므로 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 ABP에서 $\angle PAB=\theta$라 하면

$\overline{AP}=\cos\theta,\ \overline{PB}=\sin\theta$

$\therefore \overline{AP}+3\overline{PB}=\cos\theta+3\sin\theta$

$=\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\times\cos\theta+\frac{3}{\sqrt{10}}\times\sin\theta\right)$

$=\sqrt{10}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

이때 $-1\le\sin(\theta+\alpha)\le1$이므로 구하는 최댓값은 $\sqrt{10}$이다.

0414

답 $\frac{1}{2}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DB}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\theta$

$=2-2\cos\theta$ ····· ❶

따라서 정삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DB}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\overline{DB}^2\times\sin\frac{\pi}{3}\ (\because \overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DB})$

$=\frac{1}{2}\times(2-2\cos\theta)\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos\theta)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

또한 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$이므로

(사각형 ABCD의 넓이)

=(삼각형 BCD의 넓이)+(삼각형 ABD의 넓이)

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ..... ❷

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, 즉 $\theta=\frac{5}{6}\pi$일 때 최댓값을 가지므로

$\sin\theta=\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ..... ❸

채점 기준	배점
❶ 코사인법칙을 이용하여 $\overline{DB}^2$을 θ로 나타내기	40%
❷ 사각형 ABCD의 넓이 구하기	40%
❸ 사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때, $\sin\theta$의 값 구하기	20%

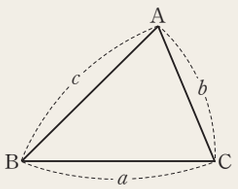
Bible Says 코사인법칙

삼각형 ABC에서

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



유형 10 삼각함수의 극한

확인 문제 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\tan x}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

0415 답 ②

$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to0}(1+\cos x)$

$=1+1=2$

0416 답 ②

$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x-\sin x}{\sec x}=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}}{\sec\frac{\pi}{3}}$

$=\cos\frac{\pi}{3}\times\left(\tan\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}$

0417 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\cot x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\frac{\cos x}{\sin x}}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x-\cos x}{\sin x}}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x$

$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

0418 답 ④

$\lim_{x\to0}\frac{\sec 2x-1}{\sec x-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}-1}{\frac{1}{\cos x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos 2x}{\cos 2x}}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}\times\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-(2\cos^2x-1)}{1-\cos x}\times\frac{\cos x}{\cos 2x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{2\times(1-\cos^2x)}{1-\cos x}\times\frac{\cos x}{\cos 2x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}\times\frac{2\cos x}{\cos 2x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{(1+\cos x)\times\frac{2\cos x}{\cos 2x}\right\}$

$=(1+1)\times\frac{2\times1}{1}=4$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 11 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ 꼴의 극한

확인 문제 (1) 3 (2) $\frac{1}{3}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\times3\right)=1\times3=3$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 6x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{6x}{\sin 6x}\times\frac{2}{6}\right)=1\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

0419

답 5

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x+\sin 3x}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin x}+\frac{\sin 3x}{\sin x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{x}{\sin x}\times2+\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{x}{\sin x}\times3\right)$$
$$=1\times1\times2+1\times1\times3=5$$

0420

답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(4x^3+2x^2+5x)}{3x^3-2x^2-5x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(4x^3+2x^2+5x)}{4x^3+2x^2+5x}\times\frac{4x^3+2x^2+5x}{3x^3-2x^2-5x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(4x^3+2x^2+5x)}{4x^3+2x^2+5x}\times\frac{4x^2+2x+5}{3x^2-2x-5}\right\}$$
$$=1\times(-1)=-1$$

0421

답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{5x}{\sin 5x}\times\frac{3}{5}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

0422

답 ③

$x^\circ=\frac{\pi}{180}x$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{4\sin x^\circ}{x}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin\frac{\pi}{180}x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\times\frac{\pi}{45}\right)$$
$$=1\times\frac{\pi}{45}=\frac{\pi}{45}$$

0423

답 2047

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 2^2x+\cdots+\sin 2^{10}x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\sin 2^2x}{x}+\cdots+\frac{\sin 2^{10}x}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\times2+\frac{\sin 2^2x}{2^2x}\times2^2+\cdots+\frac{\sin 2^{10}x}{2^{10}x}\times2^{10}\right)$$
$$=\underbrace{1+2+2^2+\cdots+2^{10}}_{\text{첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 합이다.}}$$
$$=\frac{2^{11}-1}{2-1}=2047$$

유형 12 $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ 꼴의 극한

확인 문제 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{4}{3}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{5x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{3}{5}\right)=1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x}{\tan 3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 4x}{4x}\times\frac{3x}{\tan 3x}\times\frac{4}{3}\right)=1\times1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

0424

답 $\frac{2}{5}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan 2x)}{\tan 5x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(\tan 2x)}{\tan 2x}\times\frac{5x}{\tan 5x}\times\frac{\tan 2x}{2x}\times\frac{2}{5}\right\}$$
$$=1\times1\times1\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$

0425

답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x\cos 2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{\cos 2x}\right)$$
$$=1\times1\times\frac{3}{2}\times1$$
$$=\frac{3}{2}$$

0426

답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{(2^x-1)(e^x-1)}{x\tan 3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x-1}{x}\times\frac{e^x-1}{x}\times\frac{3x}{\tan 3x}\times\frac{1}{3}\right)$$
$$=\ln 2\times1\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ln 2=\ln\sqrt[3]{2}$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0427

답 -2

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan 2x)}{\tan f(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{\tan f(x)}\times\frac{\sin(\tan 2x)}{\tan 2x}\times\frac{\tan 2x}{2x}\times\frac{2x}{f(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{\tan f(x)}\times\frac{\sin(\tan 2x)}{\tan 2x}\times\frac{\tan 2x}{2x}\times\frac{2}{3x^2-1}\right\}$$
$$=1\times1\times1\times\frac{2}{0-1}=-2$$

유형 13 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$ 꼴의 극한

0428

답 ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{x^2(1+\cos 2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\times\frac{4}{1+\cos 2x}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{4}{2}=2$$

다른 풀이

유형 07의 배각의 공식 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$를 이용하면 다음과 같이 풀 수도 있다.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{2\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\}$$
$$=2\times1=2$$

0429

답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 4x)(1+\cos 4x)}{x\sin 3x(1+\cos 4x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 4x}{x\sin 3x(1+\cos 4x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{16}{3}\times\frac{1}{1+\cos 4x}\right\}$$
$$=1^2\times1\times\frac{16}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{3}$$

다른 풀이

유형 07의 배각의 공식 $\cos 4x=1-2\sin^2 2x$를 이용하면 다음과 같이 풀 수도 있다.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 2x}{x\sin 3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{2\times\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{4x}{3x}\right\}$$
$$=2\times1^2\times1\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

0430

답 6

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos ax)(1+\cos ax)}{4x^2(1+\cos ax)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 ax}{4x^2(1+\cos ax)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 ax}{4x^2(1+\cos ax)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2\times\frac{a^2}{4}\times\frac{1}{1+\cos ax}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{a^2}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{8}$$ ❶

즉, $\frac{a^2}{8}=\frac{9}{2}$이므로 $a^2=36$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$ ❷

채점 기준	배점
❶ 주어진 식의 극한값을 a로 나타내기	70%
❷ a의 값 구하기	30%

0431

답 20

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{1+\cos(x^2)\}}{\{1-\cos(x^2)\}\{1+\cos(x^2)\}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{1+\cos(x^2)\}}{\sin^2(x^2)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{(x^2)^2}{\sin^2(x^2)}\times\frac{f(x)}{x^4}\times\{1+\cos(x^2)\}\right]$$
$$=1^2\times\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}\times2$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}=10$$

즉, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}=5$이므로 $a=4,\ b=5$

$\therefore ab=4\times5=20$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0432

답 8

$$\lim_{x\to0} f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{1+\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)}{1+\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin^2\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\left(\frac{x}{2}\right)^2 f(x)\times\frac{1}{1+\cos\frac{x}{2}}\right\}$$

$$=1^2\times\frac{1}{4}\lim_{x\to0}x^2f(x)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to0}x^2f(x)=1$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}x^2f(x)=8$$

유형 14 치환을 이용한 삼각함수의 극한 – $x\to a$ $(a\neq0)$일 때 $x-a=t$로 치환

0433

답 ④

$x-\pi=t$로 놓으면 $x=t+\pi$이고 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x\cos x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(t+\pi)\cos(t+\pi)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{-\sin t}{t}\times(-\cos t)\right\}$$

$$=(-1)\times(-1)=1$$

0434

답 ④

$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{\ln x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\ln(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\sin t}{t}\times\frac{t}{\ln(t+1)}\right\}$$

$$=1\times1=1$$

0435

답 ③

$x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $x=t+\frac{\pi}{4}$이고 $x\to\frac{\pi}{4}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan(4x-\pi)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{t\to0}\frac{\tan4t}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\tan4t}{4t}\times4\right)$$

$$=1\times4=4$$

0436

답 2

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\sin x\times\frac{1}{2}-\cos x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

❶

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $x=t+\frac{\pi}{3}$이고

$x\to\frac{\pi}{3}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin t}{t}$$

$$=2\times1=2$$

❷

채점 기준	배점
❶ 삼각함수의 합성을 이용하여 주어진 식을 간단히 나타내기	40%
❷ 삼각함수의 극한값 구하기	60%

유형 15 치환을 이용한 삼각함수의 극한 – $x\to\infty$일 때 $\frac{1}{x}=t$로 치환

0437

답 1

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\sin t$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

0438

답 6

$\frac{3}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{3}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}2x\tan\frac{3}{x}=\lim_{t\to0}\left(6\times\frac{\tan t}{t}\right)$$

$$=6\times1=6$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0439

답 ①

$\frac{1}{2x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{2t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x^2\cos\frac{1}{2x}\right)=\lim_{t\to0}\left\{\left(\frac{1}{2t}\right)^2-\left(\frac{1}{2t}\right)^2\cos t\right\}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{4t^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{4t^2(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos^2 t}{4t^2(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\times\frac{1}{1+\cos t}\times\frac{1}{4}\right)$$
$$=1^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

0440

답 ③

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\cot\frac{1}{x}\sin\left(\tan\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0}\cot t\sin(\tan t)$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\tan t)}{\tan t}$$
$$=1$$

0441

답 1

$-\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=-\frac{1}{t}$이고 $x\to-\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}\csc\frac{1}{x}\cot\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}t^2\csc(-t)\cot(-t)$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{t}{\sin(-t)}\times\frac{t}{\tan(-t)}\right\}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{t}{-\sin t}\times\frac{t}{-\tan t}\right)$$
$$=(-1)\times(-1)=1$$

유형 16 삼각함수의 극한에서 미정계수의 결정

0442

답 ④

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+a)}{\sin3x}=b$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\ln(x+a)=0$이므로 $\ln(0+a)=0$에서 $a=1$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{3x}{\sin3x}\times\frac{1}{3}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{1}{3}$$
$$=b$$

$$\therefore a+b=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

0443

답 6

$\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sqrt{ax+b}-1}=1$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

(분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-1)=0$이므로

$\sqrt{0+b}-1=0$에서 $b=1$

❶

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sqrt{ax+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\tan3x(\sqrt{ax+1}+1)}{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan3x(\sqrt{ax+1}+1)}{ax}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan3x}{3x}\times\frac{3(\sqrt{ax+1}+1)}{a}\right\}$$
$$=1\times\frac{3\times(1+1)}{a}=\frac{6}{a}$$

따라서 $\frac{6}{a}=1$이므로 $a=6$

❷

$\therefore ab=6\times1=6$

❸

채점 기준	배점
❶ b의 값 구하기	30%
❷ a의 값 구하기	60%
❸ ab의 값 구하기	10%

0444

답 14

$\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{2^{x+1}-a}=\frac{b}{2\ln2}$에서 $b>0$이므로 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때, (분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(2^{x+1}-a)=0$이므로 $2-a=0$에서 $a=2$

$a=2$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{2^{x+1}-2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin7x}{7x}\times\frac{x}{2^x-1}\times\frac{7}{2}\right)$$
$$=1\times\frac{1}{\ln2}\times\frac{7}{2}$$
$$=\frac{7}{2\ln2}$$

즉, $\frac{7}{2\ln2}=\frac{b}{2\ln2}$이므로 $b=7$

$\therefore ab=2\times7=14$

0445

답 ③

$f(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면

$\lim_{x\to-\pi}\frac{f(x)}{\sin(\pi+x)}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\to-\pi$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-\pi}f(x)=\lim_{x\to-\pi}(ax+b)=0$이므로

$-a\pi+b=0$ $\therefore b=a\pi$ …… ㉠

$$\therefore\lim_{x\to-\pi}\frac{f(x)}{\sin(\pi+x)}=\lim_{x\to-\pi}\frac{a(x+\pi)}{\sin(\pi+x)}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때 $x+\pi=t$로 놓으면 $x=t-\pi$이고 $x\to-\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{a(x+\pi)}{\sin(\pi+x)}=\lim_{t\to0}\left(a\times\frac{t}{\sin t}\right)=a\times1=a$$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=2\pi$

따라서 $f(x)=2x+2\pi$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times\frac{\pi}{2}+2\pi=3\pi$$

유형 17 삼각함수의 극한의 도형에의 활용

0446

답 ④

직각삼각형 POH에서 $\overline{OH}=\cos\theta$이므로

$\overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=1-\cos\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$$

$$=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

0447

답 6

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=6\sin\theta$

$\angle HAC=\angle ABC=\theta$이므로 직각삼각형 ACH에서

$\overline{CH}=\overline{AC}\sin\theta=6\sin^2\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{6\sin^2\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\left\{6\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\right\}$$

$$=6\times1^2=6$$

0448

답 2

직각삼각형 ABH에서 $\overline{AH}=2\sin\theta$, $\overline{BH}=2\cos\theta$

직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=\frac{2}{\cos\theta}$이므로

$$\overline{HC}=\overline{BC}-\overline{BH}=\frac{2}{\cos\theta}-2\cos\theta$$

$$=\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}\times2\sin\theta$$

$$=\frac{2\sin^3\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^3\theta}{\theta^3\cos\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\frac{2}{\cos\theta}\right\}$$

$$=1^3\times2=2$$

0449

답 π

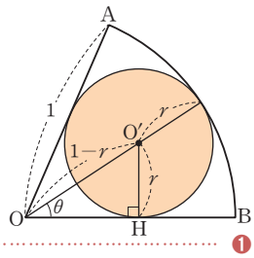
오른쪽 그림에서 $\sin\theta=\frac{r}{1-r}$이므로

$(1-r)\sin\theta=r$

$r+r\sin\theta=\sin\theta$

$r(1+\sin\theta)=\sin\theta$

$$\therefore r=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$$



❶

$$\therefore S(\theta)=\pi\left(\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$$

❷

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi}{\theta^2}\left(\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi\sin^2\theta}{\theta^2(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{\pi}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta}\right\}$$

$$=1^2\times\pi=\pi$$

❸

채점 기준	배점
❶ r를 θ로 나타내기	40%
❷ $S(\theta)$를 θ로 나타내기	10%
❸ 극한값 구하기	50%

0450

답 $\frac{2}{3}$

삼각형 AOP는 이등변삼각형이므로

$\angle APO=\angle PAO=\theta$

$\therefore \angle POC=\angle APO+\angle PAO=\theta+\theta=2\theta$

또한 $\angle CPO=\angle APO=\theta$이므로

$\angle OCP=\pi-(\theta+2\theta)=\pi-3\theta$

삼각형 POC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PC}}{\sin2\theta}=\frac{\overline{OP}}{\sin(\pi-3\theta)},\ \frac{\overline{PC}}{\sin2\theta}=\frac{1}{\sin3\theta}$$

$$\therefore \overline{PC}=\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\overline{PC}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}$$

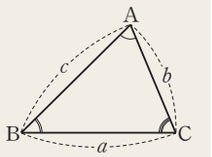
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{3\theta}{\sin3\theta}\times\frac{2}{3}\right)$$

$$=1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Bible Says 사인법칙

삼각형 ABC에서

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0451

답 ②

직각삼각형 CAH에서 $\overline{AH}=\frac{1}{2}\times 2=1$,

$\overline{AC}=\frac{1}{\cos\theta}$, $\overline{CH}=\tan\theta$이므로

$\overline{HD}=\overline{AD}-\overline{AH}=\overline{AC}-\overline{AH}$

$=\frac{1}{\cos\theta}-1=\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$

$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\times\tan\theta$

$=\frac{\tan\theta(1-\cos\theta)}{2\cos\theta}$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta(1-\cos\theta)}{2\theta^3\cos\theta}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{2\theta^3\cos\theta(1+\cos\theta)}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta\sin^2\theta}{2\theta^3\cos\theta(1+\cos\theta)}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{\tan\theta}{\theta}\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{2\cos\theta(1+\cos\theta)}\right\}$

$=1\times 1^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

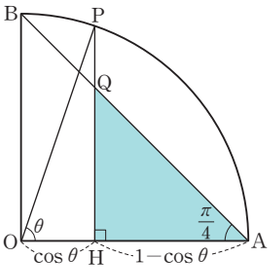
0452

답 ①

직각삼각형 POH에서

$\overline{OP}=\overline{OB}=1$, $\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta=\cos\theta$이므로

$\overline{HA}=\overline{OA}-\overline{OH}=1-\cos\theta$



직각삼각형 ABO에서 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

$\angle OAB=\angle OBA=\frac{\pi}{4}$

따라서 직각삼각형 AQH에서 $\overline{HA}=\overline{HQ}$

$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{HA}\times\overline{HQ}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\theta^4}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)\}^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(\sin^2\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\times\frac{1}{2(1+\cos\theta)^2}\right\}$

$=1^4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

유형 18 삼각함수의 연속

0453

답 ②

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\tan 2(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan 2t}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\tan 2t}{2t}\times 2\right)=1\times 2=2$

$\therefore a=2$

0454

답 ②

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)$

$f(0)=\cos 0+1=2$이므로 $\lim_{x\to 0-}f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{1-\cos ax}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to 0-}\frac{(1-\cos ax)(1+\cos ax)}{x\sin x(1+\cos ax)}$

$=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin^2 ax}{x\sin x(1+\cos ax)}$

$=\lim_{x\to 0-}\left\{\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{a^2}{1+\cos ax}\right\}$

$=1^2\times 1\times\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$

즉, $\frac{a^2}{2}=2$이므로 $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

0455

답 6

$x\neq 0$일 때, $f(x)=\frac{\sin ax}{e^{2x}-1}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=3$

$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{e^{2x}-1}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{a}{2}\right)$

$=1\times 1\times\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$

즉, $\frac{a}{2}=3$이므로 $a=6$

0456

답 ③

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0-}\frac{1-\cos x}{ax^2}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x+\sin x+c}{x}=b$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\lim_{x\to 0+}\dfrac{e^x+\sin x+c}{x}=b$에서 극한값이 존재하고 $x\to 0+$일 때,
(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 0+}(e^x+\sin x+c)=0$이므로
$1+c=0 \quad \therefore c=-1$
$c=-1$을 $\lim_{x\to 0+}\dfrac{e^x+\sin x+c}{x}=b$의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x+\sin x-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=1+1=2$$

$\therefore b=2$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1-\cos x}{ax^2}=\lim_{x\to 0-}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{ax^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin^2 x}{ax^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\left\{\frac{1}{a}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$
$$=\frac{1}{a}\times 1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2a}$$

따라서 $\dfrac{1}{2a}=b=2$이므로

$a=\dfrac{1}{4}$

$\therefore a+b+c=\dfrac{1}{4}+2+(-1)=\dfrac{5}{4}$

유형 19 삼각함수의 도함수

확인 문제 (1) $y'=-3\sin x+\cos x$
(2) $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$

(1) $y=3\cos x+\sin x$에서
$y'=-3\sin x+\cos x$
(2) $y=\sin x\cos x$에서
$y'=\cos x\times\cos x+\sin x\times(-\sin x)$
$=\cos^2 x-\sin^2 x$

0457 답 ⑤

$f(x)=e^x(2\cos x+1)$에서
$f'(x)=e^x(2\cos x+1)+e^x\times(-2\sin x)$
$=e^x(2\cos x-2\sin x+1)$
$\therefore f'(0)=1\times(2+1)=3$

0458 답 0

$f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$에서
$f'(x)=2\{\cos x\times\cos x+\sin x\times(-\sin x)\}$
$=2(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\times\left(\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}\right)=2\times\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}$$
$$=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

다른 풀이
합성함수의 미분법을 이용하면
$f'(x)=\cos 2x\times 2=2\cos 2x$
$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

참고
합성함수의 미분법은 05. 여러 가지 미분법의 유형 08에서 자세히 살펴보도록 한다.

0459 답 1

$f(x)=e^x(a\sin x+b\cos x)$라 하면
곡선 $y=f(x)$가 점 (0, 2)를 지나므로
$f(0)=b=2$ ❶

점 (0, 2)에서의 접선의 기울기가 5이므로 $f'(0)=5$
$f'(x)=e^x(a\sin x+2\cos x)+e^x(a\cos x-2\sin x)$이므로
$f'(0)=2+a=5 \quad \therefore a=3$ ❷

$\therefore a-b=3-2=1$ ❸

채점 기준	배점
❶ b의 값 구하기	30%
❷ a의 값 구하기	50%
❸ $a-b$의 값 구하기	20%

0460 답 6

$f(x)=2\sin x+x\cos x$에서 $f(0)=0$
$f'(x)=2\cos x+\cos x-x\sin x=3\cos x-x\sin x$이므로
$f'(0)=3$
$h(x)=f(x)g(x)$에서
$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로
$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$
$=3\times 2+0\times g'(0)=6$

0461 답 ③

$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$에서
$f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$
$f'(\alpha)=0$에서
$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3}$, $\tan\alpha=\sqrt{3}$
$-\pi<\alpha<\pi$이므로 $\alpha=-\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$
따라서 모든 α의 값의 합은 $-\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

다른 풀이 1

$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$에서

$f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$=2\left(\cos x\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\times\frac{1}{2}\right)$

$=2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ← 삼각함수의 합성을 이용한다.

$=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$f'(\alpha)=0$이므로 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=0$

이때 $-\pi<\alpha<\pi$에서 $-\frac{5}{6}\pi<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{7}{6}\pi$이므로

$\alpha+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \alpha=-\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\alpha=\frac{\pi}{3}$

따라서 모든 α의 값의 합은 $-\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

다른 풀이 2

$f'(\alpha)=\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=0$에서 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=0$이므로

삼각함수의 합성을 이용하면

$2\left(\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)=0$

$2\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)=0$

$2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$-\pi<\alpha<\pi$에서 $-\frac{4}{3}\pi<\alpha-\frac{\pi}{3}<\frac{2}{3}\pi$이므로

$\alpha-\frac{\pi}{3}=-\pi$ 또는 $\alpha-\frac{\pi}{3}=0$

$\therefore\ \alpha=-\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\alpha=\frac{\pi}{3}$

따라서 모든 α의 값의 합은

$-\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

0462

답 $-\frac{1}{2}$

$f(x)=\sin x$에서 $f'(x)=\cos x$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=\frac{\pi}{2}+t$이고 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{2x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{2t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{-\sin t}{2t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\left\{\frac{\sin t}{t}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

유형 20 삼각함수의 도함수 - 미분계수를 이용한 극한값의 계산

0463

답 ④

$f(x)=\sin x-2\cos x$에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

이때 $f(x)=\sin x-2\cos x$에서

$f'(x)=\cos x+2\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0+2\times1=2$

0464

답 ①

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{\{f(\pi+2h)-f(\pi)\}-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}\times2\right\}+\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$

$=2f'(\pi)+f'(\pi)=3f'(\pi)$

이때 $f(x)=(x^2+x)\cos x$에서

$f'(x)=(2x+1)\cos x-(x^2+x)\sin x$이므로

$3f'(\pi)=3\times\{(2\pi+1)\times(-1)\}=-6\pi-3$

0465

답 ①

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\pi+\sin x)-f(\pi)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{f(\pi+\sin x)-f(\pi)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\right\}$

$=f'(\pi)\times1=f'(\pi)$

이때 $f(x)=x\sin x$에서

$f'(x)=\sin x+x\cos x$이므로

$f'(\pi)=0+\pi\times(-1)=-\pi$

유형 21 삼각함수의 미분가능성

0466

답 ③

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0-}(\sin x+a)=\lim\limits_{x\to0+}(e^x+bx)=f(0)$

$\therefore\ a=1$

또한 $f'(x)=\begin{cases}\cos x & (x<0)\\ e^x+b & (x>0)\end{cases}$이고 $f'(0)$이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to0-}\cos x=\lim\limits_{x\to0+}(e^x+b)$

$1=1+b\qquad\therefore\ b=0$

$\therefore\ a+b=1+0=1$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0467

답 ④

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

즉, $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-} a\sin x\cos x=\lim_{x\to0+}(x^2+bx+c)=f(0)$

$\therefore c=0$

또한 $f'(x)=\begin{cases}a(\cos^2 x-\sin^2 x) & (x<0)\\ 2x+b & (x>0)\end{cases}$이고

$f'(0)$이 존재하므로

$\lim_{x\to0-} a(\cos^2 x-\sin^2 x)=\lim_{x\to0+}(2x+b)$

$\therefore a=b$ ····· ㉠

이때 $f(1)=3$이므로

$1+b=3$ $\therefore b=2$

㉠에 의하여 $a=b=2$

$\therefore a+b+c=2+2+0=4$

0468

답 ①

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=\pi$에서 미분가능하다.

즉, $x=\pi$에서 미분가능하면 $x=\pi$에서 연속이므로

$\lim_{x\to\pi-}(a\sin x+\cos x)=\lim_{x\to\pi+} b\cos x\ln x=f(\pi)$

$-1=-b\ln\pi$ $\therefore b=\dfrac{1}{\ln\pi}$

또한 $f'(x)=\begin{cases}a\cos x-\sin x & (x<\pi)\\ \dfrac{1}{\ln\pi}\left(-\sin x\ln x+\cos x\times\dfrac{1}{x}\right) & (x>\pi)\end{cases}$이고

$f'(\pi)$가 존재하므로

$\lim_{x\to\pi-}(a\cos x-\sin x)=\lim_{x\to\pi+}\dfrac{1}{\ln\pi}\left(-\sin x\ln x+\dfrac{1}{x}\cos x\right)$

$-a=\dfrac{1}{\ln\pi}\times\left(-\dfrac{1}{\pi}\right)$ $\therefore a=\dfrac{1}{\pi\ln\pi}$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{\frac{1}{\ln\pi}}{\frac{1}{\pi\ln\pi}}=\pi$

PART B 내신 잡는 종합 문제

0469

답 ⑤

$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$이므로 $\cot\theta=3$

$\therefore \csc^2\theta+\sec^2\theta=1+\cot^2\theta+1+\tan^2\theta$

$=1+3^2+1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$=\dfrac{100}{9}$

0470

답 ④

$\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\left\{\dfrac{\sin 4x}{4x}\times\dfrac{2x}{\ln(1+2x)}\times2\right\}$

$=1\times1\times2=2$

0471

답 -1

$f(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{x\sin(x+h)-x\sin x}{h}$

$=x\lim_{h\to0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$=x(\sin x)'=x\cos x$

이므로 $f'(x)=\cos x-x\sin x$

$\therefore f'(\pi)=\cos\pi-\pi\sin\pi=-1$

0472

답 ②

직선 $x-3y+2=0$에서 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$이므로

$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$

또한 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$이므로

$\sec^2\theta=1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{10}{9}$

$\therefore \sec\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ $\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \sec\theta\tan\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{10}}{9}$

0473

답 ②

$\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\dfrac{2\sin x\cos x-2\sin x}{x^3}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{2\sin x(\cos x-1)}{x^3}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{2\sin x(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^3(\cos x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{-2\sin^3 x}{x^3(\cos x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{-2\times\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3\times\dfrac{1}{\cos x+1}\right\}$

$=-2\times1^3\times\dfrac{1}{2}=-1$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0474

답 ③

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{\sin 2x}=3$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-2)=0$이므로

$\sqrt{b}-2=0 \quad \therefore b=4$

$b=4$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+4}-2}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)}{\sin 2x(\sqrt{ax+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ax}{\sin 2x(\sqrt{ax+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{1}{\sqrt{ax+4}+2}\times\frac{a}{2}\right)$$

$$=1\times\frac{1}{4}\times\frac{a}{2}=\frac{a}{8}$$

즉, $\frac{a}{8}=3$이므로 $a=24$

$\therefore a-b=24-4=20$

0475

답 ①

$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=2\left(\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\times\frac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

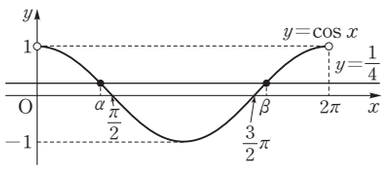
이때 함수 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 함수 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로

$a=2,\ b=-\frac{\pi}{6}$

$\therefore ab=2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{3}$

0476

답 ②



함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$0<\alpha<\beta<2\pi$, $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{4}$이므로

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$

따라서 $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$,

$\sin\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=-\sqrt{\frac{15}{16}}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$이므로

$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$

$=\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\times\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

$=-\frac{\sqrt{15}}{8}$

참고

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$에서 $\beta=2\pi-\alpha$이므로

$\sin(\beta-\alpha)=\sin(2\pi-2\alpha)=-\sin 2\alpha=-2\sin\alpha\cos\alpha$

를 이용하여 구할 수도 있다.

0477

답 ④

$x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$이고 $x\to-2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{\tan\pi x}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{\tan\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{t(t-4)}{\tan\{\pi(t-2)\}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t(t-4)}{\tan(-2\pi+\pi t)}=\lim_{t\to0}\frac{t(t-4)}{\tan\pi t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\pi t}{\tan\pi t}\times\frac{t-4}{\pi}\right)$$

$$=1\times\left(-\frac{4}{\pi}\right)=-\frac{4}{\pi}$$

0478

답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-a$, $\tan\alpha\tan\beta=-3a+1$이므로

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{-a}{1-(-3a+1)}=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore \csc^2(\alpha+\beta)=1+\cot^2(\alpha+\beta)$$

$$=1+\left\{\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}\right\}^2$$

$$=1+(-3)^2=10$$

0479

답 ④

$$\lim_{x\to\infty}3x\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}3x\sin\frac{4}{x}$$

$\frac{4}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{4}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}3x\sin\frac{4}{x}=\lim_{t\to0}\left(\frac{12}{t}\times\sin t\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\left(12\times\frac{\sin t}{t}\right)=12\times1=12$$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0480

답 ⑤

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이므로 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(4\cos x\tan x+a)$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(4\sin x+a)=4+a$$

즉, $4+a=5a$이므로

$a=1$

$0\le x\le\pi$에서 $f(x)=4\sin x+1$이고 $0\le\sin x\le 1$이므로

$1\le 4\sin x+1\le 5$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 5, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$5+1=6$

0481

답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)-f(a)\}\{f(x)+f(a)\}}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\{f(x)+f(a)\}\right]$$
$$=2f'(a)f(a)$$

즉, $2f'(a)f(a)=1$이고,

$f(x)=\sin x+\cos x$에서 $f'(x)=\cos x-\sin x$이므로

$2(\cos a-\sin a)(\sin a+\cos a)=1$

$2(\cos^2 a-\sin^2 a)=1$, $2\cos 2a=1$

$\therefore \cos 2a=\frac{1}{2}$

0482

답 ③

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$이므로 $2\cos 2x=3\cos x-1$에서

$2(2\cos^2 x-1)=3\cos x-1$

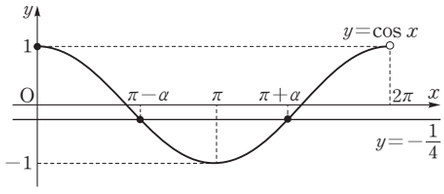
$4\cos^2 x-3\cos x-1=0$

$(4\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\therefore \cos x=-\frac{1}{4}$ 또는 $\cos x=1$

(i) $\cos x=-\frac{1}{4}$의 실근은 함수 $y=\cos x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{4}$의 교점의 x좌표이므로 2개이고, 두 교점은 직선 $x=\pi$를 기준으로 서로 대칭이다.

따라서 두 근 중 하나를 $x=\pi+\alpha$라 하면 다른 한 근은 $x=\pi-\alpha$이다.



(ii) $\cos x=1$에서 $x=0$ ($\because 0\le x<2\pi$)

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$(\pi-\alpha)+(\pi+\alpha)+0=2\pi$

0483

답 ④

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sec^2 x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x}{1+\cos x}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos 3x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\cos 3x)}{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(1+\cos 3x)}{\sin^2 3x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2\times\frac{1}{9}\times\frac{1+\cos 3x}{1+\cos x}\right\}$

$=1^2\times 1^2\times\frac{1}{9}\times\frac{1+1}{1+1}=\frac{1}{9}$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^4 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos^2 x-1)(\cos^2 x+1)}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x(\cos^2 x+1)}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times(\cos^2 x+1)\right\}$

$=-1^2\times(1+1)=-2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sec^2 x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\tan^2 x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2}{\tan^2 x}\times\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2}{\tan^2 x}\times\frac{\cos^2 x-1}{x^2(\cos x+1)}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2}{\tan^2 x}\times\frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{-1}{\cos x+1}\right\}$

$=1^2\times 1^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ (참)

0484

답 ④

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-} e^{x+1}=\lim_{x\to 0+}(a\sin x+b\cos x)=f(0)$

$\therefore b=e$

또한 $f'(x)=\begin{cases} e^{x+1} & (x<0) \\ a\cos x-e\sin x & (x>0)\end{cases}$이고

$f'(0)$이 존재하므로

$\lim_{x\to 0-} e^{x+1}=\lim_{x\to 0+}(a\cos x-e\sin x)$

$\therefore a=e$

$\therefore a+b=e+e=2e$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0485

답 1

주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=3-a \quad \therefore a=3$

$x\neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $e^{3x}-1\neq 0$이므로

$f(x)=\dfrac{3-3\cos x}{x(e^{3x}-1)}$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

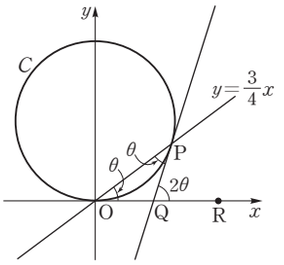
$$\begin{aligned}\therefore f(0)&=\lim_{x\to 0}f(x)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos x}{x(e^{3x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{x(e^{3x}-1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(e^{3x}-1)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos^2 x)}{x(e^{3x}-1)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x}{x(e^{3x}-1)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{3\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{3x}{e^{3x}-1}\times\frac{1}{3(1+\cos x)}\right\}\\&=3\times 1^2\times 1\times\frac{1}{3\times 2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{6f(0)}{a}=\dfrac{6\times\frac{1}{2}}{3}=1$

0486

답 $\dfrac{24}{7}$

오른쪽 그림과 같이 원 C 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고, x축 위의 점 Q보다 오른쪽에 놓인 한 점을 R라 하자.



점 Q에서 원 C에 그은 두 접선 OQ, PQ에 대하여 $\overline{OQ}=\overline{PQ}$이므로 삼각형 OPQ에서 $\angle POQ=\theta$라 하면 $\angle QPO=\angle POQ=\theta$이고

$\angle PQR=\theta+\theta=2\theta$

이때 직선 OP의 기울기는 $\tan\theta$이므로

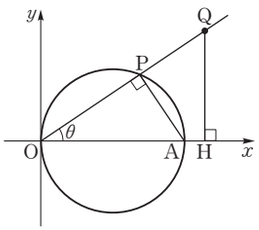
$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

따라서 원 C 위의 점 P에서의 접선 PQ의 기울기는

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{24}{7}$

0487

답 12



$\angle OPA$는 원의 지름 OA에 대한 원주각이므로 $\angle OPA=\dfrac{\pi}{2}$

$\overline{OP}=\overline{OA}\cos\theta=4\cos\theta$

이때 $\overline{PQ}=2$이므로

$\overline{OQ}=\overline{OP}+\overline{PQ}=4\cos\theta+2$

점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\overline{OQ}\cos\theta=(4\cos\theta+2)\cos\theta$,

$\overline{QH}=\overline{OQ}\sin\theta=(4\cos\theta+2)\sin\theta$

이므로

$f(\theta)=(4\cos\theta+2)\cos\theta$, $g(\theta)=(4\cos\theta+2)\sin\theta$

$$\begin{aligned}g'(\theta)&=(-4\sin\theta)\sin\theta+(4\cos\theta+2)\cos\theta\\&=-4\sin^2\theta+4\cos^2\theta+2\cos\theta\\&=8\cos^2\theta+2\cos\theta-4\ (\because \sin^2\theta=1-\cos^2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore h(\theta)&=f(\theta)+g'(\theta)\\&=(4\cos\theta+2)\cos\theta+8\cos^2\theta+2\cos\theta-4\\&=12\cos^2\theta+4\cos\theta-4\end{aligned}$$

이때 $\cos\theta=t$로 놓으면 $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<t\le 1$이고,

함수 $h(\theta)$를 t에 대한 함수로 나타내면

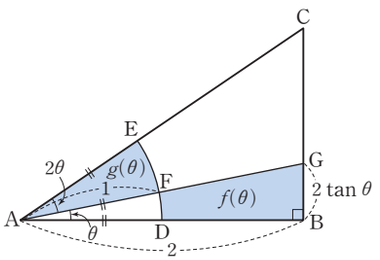
$y=12t^2+4t-4=12\left(t+\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{13}{3}$

따라서 $0<t\le 1$에서 $h(\theta)$의 최댓값은

$t=1$, 즉 $\cos\theta=1$에서 $\theta=0$일 때 $12+4-4=12$이다.

0488

답 60



직각삼각형 ABG에서 $\angle BAG=\theta$, $\overline{AB}=2$이므로 $\overline{BG}=2\tan\theta$

따라서 삼각형 ABG의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BG}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\tan\theta=2\tan\theta$

부채꼴 ADF는 중심각의 크기가 θ이고 반지름의 길이가 1이므로

부채꼴 ADF의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\theta=\dfrac{1}{2}\theta$

$\therefore f(\theta)=$(삼각형 ABG의 넓이)$-$(부채꼴 ADF의 넓이)

$=2\tan\theta-\dfrac{1}{2}\theta$

호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점이 F이므로

$\angle DAF:\angle EAF=1:2$에서 $\angle EAF=2\theta$

따라서 부채꼴 AFE의 넓이 $g(\theta)$는

$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta=\theta$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore\ 40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan\theta-\frac{1}{2}\theta}{\theta}$$
$$=40\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2\tan\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=40\times\left(2\times1-\frac{1}{2}\right)=60$$

0489

답 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이고 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

..... ❶

삼각형 ROQ는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{RQ}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

$\therefore\ \sin\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

..... ❷

$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$
$=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

..... ❸

채점 기준	배점
❶ $\cos\alpha$의 값 구하기	20%
❷ $\sin\beta$, $\cos\beta$의 값 구하기	30%
❸ $\cos(\alpha+\beta)$의 값 구하기	50%

0490

답 $\frac{12}{5}$

(삼각형 ABC의 넓이)
=(삼각형 ABD의 넓이)+(삼각형 ADC의 넓이)이고,
$\angle BAC=2\theta$이므로
$\overline{AD}=x$라 하면

$\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin2\theta=\frac{1}{2}\times2\times x\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times x\times3\times\sin\theta$

$3\sin2\theta=\frac{5}{2}x\sin\theta\qquad\therefore\ x=\frac{6\sin2\theta}{5\sin\theta}$

..... ❶

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\overline{AD}=\lim_{\theta\to0+}\frac{6\sin2\theta}{5\sin\theta}$
$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{12}{5}\right)$
$=1\times1\times\frac{12}{5}=\frac{12}{5}$

..... ❷

채점 기준	배점
❶ $\overline{AD}$의 길이를 θ로 나타내기	50%
❷ $\lim_{\theta\to0+}\overline{AD}$의 값 구하기	50%

PART C 수능 녹인 변별력 문제

0491

답 ⑤

점 P의 좌표를 $(t,\ 2-t^2)$이라 하면
$\overline{PH}=t,\ \overline{AH}=\overline{OA}-\overline{OH}=2-(2-t^2)=t^2$

이때 $\tan\theta_1=\frac{2}{3}$이므로 직각삼각형 AHP에서

$\tan\theta_1=\frac{\overline{AH}}{\overline{PH}}=\frac{t^2}{t}=t=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \overline{PH}=\frac{2}{3},\ \overline{AH}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$\overline{OH}=\overline{OA}-\overline{AH}=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$이므로 직각삼각형 OHP에서

$\tan\theta_2=\frac{\overline{OH}}{\overline{PH}}=\frac{\frac{14}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{7}{3}$

$\therefore\ \tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$
$=\frac{\frac{7}{3}-\frac{2}{3}}{1+\frac{7}{3}\times\frac{2}{3}}=\frac{15}{23}$

0492

답 5

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$가 삼각형 ABC의 세 내각의 크기이므로
$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ..... ㉠
$\alpha,\ \beta,\ \gamma$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}\qquad\therefore\ \alpha+\gamma=2\beta$ ..... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3\beta=\pi\qquad\therefore\ \beta=\frac{\pi}{3}$

즉, $\alpha+\frac{\pi}{3}+\gamma=\pi$에서 $\alpha+\gamma=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\cos(\alpha+\gamma)=\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\cos(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma=-\frac{1}{2}$ ..... ㉢

한편, $\cos\alpha,\ 2\cos\beta,\ 8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(2\cos\beta)^2=8\cos\alpha\cos\gamma$

이때 $\beta=\frac{\pi}{3}$이므로 $\cos\beta=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\left(2\times\frac{1}{2}\right)^2=8\cos\alpha\cos\gamma$

$\therefore\ \cos\alpha\cos\gamma=\frac{1}{8}$ ..... ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$\frac{1}{8}-\sin\alpha\sin\gamma=-\frac{1}{2}$

$\sin\alpha\sin\gamma=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

$\therefore\ \tan\alpha\tan\gamma=\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{1}{8}}=5$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0493

답 15

$g(x)=f(x)\sin x$에서 $\dfrac{g(x)}{x^2}=\dfrac{f(x)}{x^2}\times\sin x$이므로

조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$이다.

즉, $f(x)$는 일차 이하의 다항함수이다.

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$g(x)=(ax+b)\sin x$에서

$g'(x)=a\sin x+(ax+b)\cos x$

조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\sin x+(ax+b)\cos x}{x}=10$ ····· ㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\{a\sin x+(ax+b)\cos x\}=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{a\sin x+ax\cos x}{x}&=\lim_{x\to0}\left(a\times\frac{\sin x}{x}+a\cos x\right)\\&=a\times1+a\times1\\&=2a\end{aligned}$$

$2a=10$이므로 $a=5$

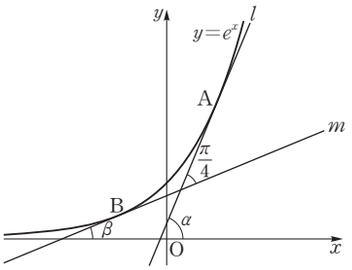
따라서 $f(x)=5x$이므로

$f(3)=5\times3=15$

0494

답 ①

$y'=e^x$이므로 곡선 $y=e^x$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(t,\ e^t)$, $\mathrm{B}(-t,\ e^{-t})$에서의 접선 l, m의 기울기는 각각 e^t, e^{-t}이다.



두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β ($\alpha>\beta$)라 하면

$\tan\alpha=e^t$, $\tan\beta=e^{-t}$

이때 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{4}&=\tan(\alpha-\beta)\ (\because\alpha>\beta)\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{e^t-e^{-t}}{1+e^te^{-t}}=1\end{aligned}$$

$e^t-e^{-t}=2$

양변에 e^t을 곱하여 정리하면

$e^{2t}-2e^t-1=0$

$\therefore e^t=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-(-1)}=1\pm\sqrt{2}$

이때 $e^t>0$이므로 $e^t=1+\sqrt{2}$

$\therefore t=\ln(1+\sqrt{2})$

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{e^t-e^{-t}}{t-(-t)}=\frac{2}{2t}=\frac{1}{t}=\frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$$

0495

답 ③

$0<x<\pi$일 때, $-1<\cos x<1$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{1-\cos x}$

$\lim\limits_{x\to0}(ax^2+b)f(x)=6$에서

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^2+b}{1-\cos x}=6$ ····· ㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}(ax^2+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{ax^2}{1-\cos x}&=\lim_{x\to0}\frac{ax^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{ax^2(1+\cos x)}{\sin^2x}\\&=\lim_{x\to0}\left\{a\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times(1+\cos x)\right\}\\&=a\times1^2\times2=2a\end{aligned}$$

$2a=6$이므로 $a=3$

$\therefore a+b=3+0=3$

참고

$f(x)$는 첫째항이 1, 공비가 $\cos x$인 등비급수이다.

0496

답 4

$x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=\dfrac{\pi}{2}+t$이고 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(e^{\cos x}-1)\ln(\sin^2x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\left\{e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}-1\right\}\ln\left\{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right\}}{t^n}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(e^{-\sin t}-1)\ln(\cos^2t)}{t^n}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{e^{-\sin t}-1}{-\sin t}\times\frac{\ln(1-\sin^2t)}{-\sin^2t}\times\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3\times\frac{1}{t^{n-3}}\right\}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때

$\lim_{t\to0}\frac{e^{-\sin t}-1}{-\sin t}=1$, $\lim_{t\to0}\frac{\ln(1-\sin^2 t)}{-\sin^2 t}=1$, $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

이므로 주어진 식이 0이 아닌 값 a에 수렴하려면

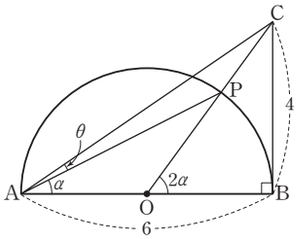
$n-3=0 \quad \therefore n=3$

$\therefore a=1\times1\times1^3\times1=1$

$\therefore a+n=1+3=4$

0497

답 ②



$\angle PAB=\alpha$라 하면 $\angle POB=2\alpha$

직각삼각형 OBC에서 $\tan 2\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}=\frac{4}{3}$이므로

$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4}{3}$에서

$4-4\tan^2\alpha=6\tan\alpha$, $2\tan^2\alpha+3\tan\alpha-2=0$

$(2\tan\alpha-1)(\tan\alpha+2)=0$

$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{2}$ ($\because \tan\alpha>0$)

$0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ $\therefore \tan\alpha>0$

또한 직각삼각형 ABC에서

$\tan(\alpha+\theta)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로

$\tan\theta=\tan\{(\alpha+\theta)-\alpha\}$

$=\frac{\tan(\alpha+\theta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\theta)\tan\alpha}$

$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$

0498

답 ④

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+\pi)$이고 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to\pi-}f(x)$가 성립한다.

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{a}{\pi}x-1\right)=-1$

$\lim_{x\to\pi-}f(x)=\lim_{x\to\pi-}\frac{\sin bx}{x-\pi}$에서 극한값이 존재하고 $x\to\pi-$일 때, (분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\pi-}\sin bx=0$이므로 $\sin b\pi=0$ ····· ㉠

$x-\pi=t$로 놓으면 $x=t+\pi$이고 $x\to\pi-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to\pi-}\frac{\sin bx}{x-\pi}=\lim_{t\to0-}\frac{\sin(bt+b\pi)}{t}$

$=\lim_{t\to0-}\frac{\sin bt\cos b\pi+\cos bt\sin b\pi}{t}$

$=\lim_{t\to0-}\left(\frac{\sin bt}{t}\times\cos b\pi\right)$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{t\to0-}\left(\frac{\sin bt}{bt}\times b\cos b\pi\right)$

$=1\times b\cos b\pi$

$=b\cos b\pi$

$\lim_{x\to\pi-}f(x)=-1$이므로 $b\cos b\pi=-1$ ····· ㉡

한편, ㉠에서 $\sin b\pi=0$이므로

$\cos b\pi=1$ 또는 $\cos b\pi=-1$

이때 $b>0$이므로 ㉡에서 $\cos b\pi<0$

$\therefore \cos b\pi=-1$

이 식을 ㉡에 대입하면 $b=1$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x)$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{a}{\pi}x-1\right)=\frac{a}{2}-1$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{\sin bx}{x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{\sin x}{x-\pi}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$

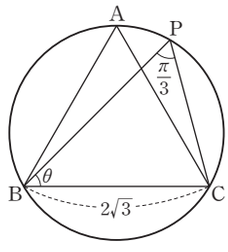
즉, $\frac{a}{2}-1=-\frac{2}{\pi}$이므로 $a=2-\frac{4}{\pi}$

$\therefore ab=\left(2-\frac{4}{\pi}\right)\times1=2-\frac{4}{\pi}$

0499

답 80

삼각형 ABC가 정삼각형이고 호 BC에 대한 원주각의 크기는 항상 같으므로

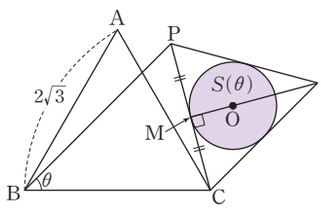


$\angle BPC=\angle BAC=\frac{\pi}{3}$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\overline{PC}}{\sin\theta}$

$\therefore \overline{PC}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\sin\theta=4\sin\theta$



선분 PC의 중점을 M이라 하고 선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 중심을 O라 하자.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때 점 O는 정삼각형의 무게중심과 일치하므로 이 원의 반지름의 길이 $\overline{OM}$은

$\overline{OM}$=(한 변의 길이가 $\overline{PC}$인 정삼각형의 높이)$\times\frac{1}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{PC}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sin\theta\times\frac{1}{3}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$

$\therefore S(\theta)=\pi\times\overline{OM}^2=\frac{4\pi\sin^2\theta}{3}$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\pi\sin^2\theta}{3\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{4}{3}\pi\right\}$

$=1^2\times\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

따라서 $a=\frac{4}{3}$이므로

$60a=60\times\frac{4}{3}=80$

0500

답 ④

삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OHP에서

$\overline{PH}=\overline{OP}\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore \overline{PA}=2\overline{PH}=2\sin\frac{\theta}{2}$

두 이등변삼각형 OPA, PAD의 각각의 밑각의 크기가 $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이므로 이 두 이등변삼각형은 서로 닮음이다.

$\therefore \angle DPA=\angle AOP=\theta$

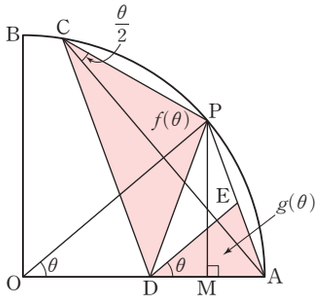
또한 원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여

$\angle PCA=\frac{1}{2}\angle POA=\frac{\theta}{2}$

이므로 이등변삼각형 PCA에서

$\angle CPA=\pi-\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=\pi-\theta$

$\therefore \angle CPD=\angle CPA-\angle DPA=\pi-\theta-\theta=\pi-2\theta$



$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times\overline{PD}\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin(\pi-2\theta)\ (\because \overline{PC}=\overline{PD}=\overline{PA})$

$=2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta$

한편, $\overline{OP}/\!/\overline{DE}$이므로 $\angle DEA=\angle OPA=\angle OAP$

따라서 삼각형 DEA는 $\overline{DE}=\overline{DA}$인 이등변삼각형이다.

점 P에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 M이라 하면

직각삼각형 PMA에서

$\overline{MA}=\overline{PA}\sin\frac{\theta}{2}=2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\therefore \overline{DA}=2\overline{MA}=4\sin^2\frac{\theta}{2}=\overline{DE}$

또한 $\overline{OP}/\!/\overline{DE}$에서 $\angle EDA=\angle POA=\theta$이므로

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{DA}\times\overline{DE}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta$

$=8\sin^4\frac{\theta}{2}\sin\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{8\sin^4\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\theta^2\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}$

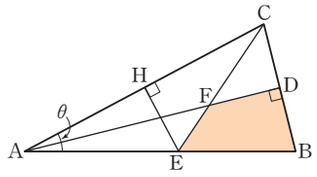
$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\theta^2\times\sin 2\theta}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times 2}\right\}$

$=1^2\times\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$

0501

답 6



삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}=6$인 이등변삼각형이므로

직선 AD는 선분 BC를 수직이등분한다.

$\therefore$ (삼각형 ABD의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(삼각형 ABC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin\theta\right)$

$=9\sin\theta$

$\angle ACE=\angle CAE$에서 삼각형 AEC는 $\overline{AE}=\overline{CE}$인 이등변삼각형이므로 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}=3$, $\overline{EH}=\overline{AH}\times\tan\theta=3\tan\theta$

$\therefore$ (삼각형 AEC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{EH}$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 3\tan\theta=9\tan\theta$

한편, $\overline{AE}=\overline{CE}=\frac{3}{\cos\theta}$이고 삼각형 AEC에서 선분 AF는 $\angle CAE$의 이등분선이므로

$\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{CF}:\overline{FE}$이다.

즉, $\overline{CF}:\overline{FE}=6:\frac{3}{\cos\theta}=2\cos\theta:1$이므로

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(삼각형 AEF의 넓이)=(삼각형 AEC의 넓이)$\times\dfrac{1}{2\cos\theta+1}$

$=\dfrac{9\tan\theta}{2\cos\theta+1}$

따라서 사각형 EBDF의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)$=(삼각형 ABD의 넓이)−(삼각형 AEF의 넓이)

$=9\sin\theta-\dfrac{9\tan\theta}{2\cos\theta+1}$

$\therefore \lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to0+}\left\{\dfrac{9\sin\theta}{\theta}-\dfrac{9\tan\theta}{\theta(2\cos\theta+1)}\right\}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\left(9\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}-\dfrac{9}{2\cos\theta+1}\times\dfrac{\tan\theta}{\theta}\right)$

$=9\times1-\dfrac{9}{3}\times1=9-3=6$

0502

답 3

$f(x)=\begin{cases}\cos x & (0\le x\le 2\pi)\\ 2-\cos x & (2\pi<x\le 4\pi)\end{cases}$에서

$\lim\limits_{x\to2\pi-}f(x)=\lim\limits_{x\to2\pi-}\cos x=1$

$\lim\limits_{x\to2\pi+}f(x)=\lim\limits_{x\to2\pi+}(2-\cos x)=1$

$f(2\pi)=\cos 2\pi=1$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=2\pi$에서 연속이다.

또한 $f'(x)=\begin{cases}-\sin x & (0<x<2\pi)\\ \sin x & (2\pi<x<4\pi)\end{cases}$에서

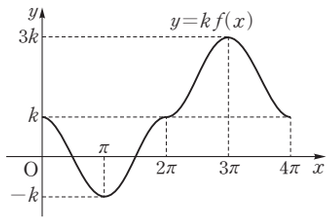
$\lim\limits_{x\to2\pi-}f'(x)=\lim\limits_{x\to2\pi-}(-\sin x)=0$

$\lim\limits_{x\to2\pi+}f'(x)=\lim\limits_{x\to2\pi+}\sin x=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=2\pi$에서 미분가능하다.

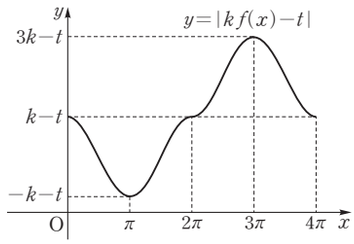
즉, 함수 $f(x)$는 $0<x<4\pi$에서 미분가능하다.

이때 함수 $f(x)$의 식을 이용하여 함수 $y=kf(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



함수 $y=|kf(x)-t|$의 그래프는 함수 $y=kf(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동시킨 후 x축보다 아래에 위치한 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로 다음과 같이 나누어 생각해 볼 수 있다.

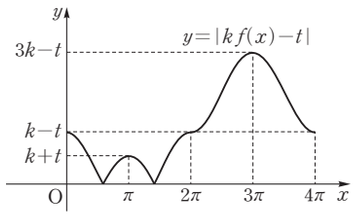
(i) $t\le -k$일 때



구간 $(0,\ 4\pi)$에서 함수 $|kf(x)-t|$는 미분가능하므로

$g(t)=0$

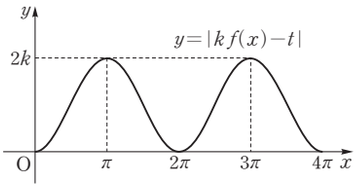
(ii) $-k<t<k$일 때



구간 $(0,\ 4\pi)$에서 함수 $|kf(x)-t|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 2이므로

$g(t)=2$

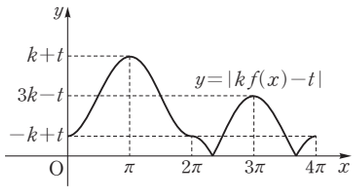
(iii) $t=k$일 때



구간 $(0,\ 4\pi)$에서 함수 $|kf(x)-t|$는 미분가능하므로

$g(t)=0$

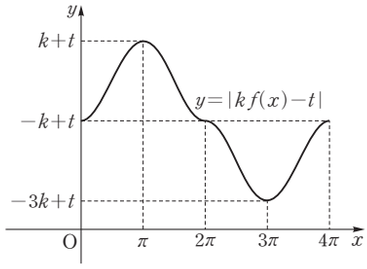
(iv) $k<t<3k$일 때



구간 $(0,\ 4\pi)$에서 함수 $|kf(x)-t|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 2이므로

$g(t)=2$

(v) $t\ge 3k$일 때



구간 $(0,\ 4\pi)$에서 함수 $|kf(x)-t|$는 미분가능하므로

$g(t)=0$

(i)~(v)에서 $g(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 값의 범위는

$-k<t<k$ 또는 $k<t<3k$

이때 k가 자연수이고, 주어진 조건을 만족시키는 정수 t의 개수는 10이므로

$2k-1+2k-1=4k-2=10$

$\therefore k=3$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A

05 여러 가지 미분법

유형 01 함수의 몫의 미분법 $\frac{1}{g(x)}$ 꼴

확인 문제 (1) $y'=-\frac{2}{(2x+3)^2}$ (2) $y'=\frac{e^x}{(e^x-3)^2}$

(1) $y=\frac{1}{2x+3}$에서 $y'=-\frac{(2x+3)'}{(2x+3)^2}=-\frac{2}{(2x+3)^2}$

(2) $y=-\frac{1}{e^x-3}$에서 $y'=\frac{(e^x-3)'}{(e^x-3)^2}=\frac{e^x}{(e^x-3)^2}$

0503 답 ⑤

$f(1)=2$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

$f(x)=x^2-\frac{1}{x^2-2}$에서 $f'(x)=2x+\frac{2x}{(x^2-2)^2}$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-2}{h}=f'(1)=2+2=4$

0504 답 ①

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)=-\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{1}{x-2}$에서 $f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$이므로

$f'(a)=-\frac{1}{(a-2)^2}=-\frac{1}{4}$

$(a-2)^2=4$, $a-2=\pm2$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

0505 답 4

$f(x)=\frac{1}{kx^2+2x}$에서 $f'(x)=-\frac{2kx+2}{(kx^2+2x)^2}$

이때 $f'(-1)=\frac{3}{2}$이므로

$-\frac{-2k+2}{(k-2)^2}=\frac{3}{2}$, $-2(-2k+2)=3(k-2)^2$

$3k^2-16k+16=0$, $(3k-4)(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k$는 정수)

0506 답 7

$g(x)=\frac{1}{e^xf(x)+1}$에서

$g'(x)=-\frac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{\{e^xf(x)+1\}^2}=-\frac{e^x\{f(x)+f'(x)\}}{\{e^xf(x)+1\}^2}$

이므로

$g'(0)=-\frac{e^0\{f(0)+f'(0)\}}{\{e^0f(0)+1\}^2}=-\frac{f(0)+f'(0)}{\{f(0)+1\}^2}$

이때 $f(0)=2$, $g'(0)=-1$이므로

$-1=-\frac{2+f'(0)}{3^2}$ $\therefore f'(0)=7$

유형 02 함수의 몫의 미분법 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

확인 문제 (1) $y'=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ (2) $y'=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

(1) $y=\frac{x}{x^2+1}$에서

$y'=\frac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{1\times(x^2+1)-x\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

(2) $y=\frac{e^x}{e^x-1}$에서

$y'=\frac{(e^x)'(e^x-1)-e^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}$

$=\frac{e^x(e^x-1)-e^x\times e^x}{(e^x-1)^2}=-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

0507 답 ②

$f(2)=2$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$

$=\frac{1}{4}f'(2)$

$f(x)=\frac{3x}{2x-1}$에서

$f'(x)=\frac{3(2x-1)-3x\times2}{(2x-1)^2}=\frac{-3}{(2x-1)^2}$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x^2-4}=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{12}$

0508 답 −2

$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)-f(\pi-h)+f(\pi)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$

$=f'(\pi)+f'(\pi)=2f'(\pi)$

$f(x)=\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}$에서

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$f'(x)=\frac{\cos x(\sin x-\cos x)-\sin x(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$
$$=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$$
$$=\frac{-1}{(\sin x-\cos x)^2}$$
$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}=2f'(\pi)$$
$$=2\times\frac{-1}{\{0-(-1)\}^2}$$
$$=-2$$

0509

답 ③

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^{x-1}-\ln x}\text{에서}$$
$$g'(x)=\frac{f'(x)(e^{x-1}-\ln x)-f(x)\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)}{(e^{x-1}-\ln x)^2}$$
$$\therefore g'(1)=\frac{f'(1)(e^0-\ln 1)-f(1)(e^0-1)}{(e^0-\ln 1)^2}$$
$$=f'(1)$$

0510

답 16

$$f(x)=\frac{x}{x^2+x+8}\text{에서}$$
$$f'(x)=\frac{1\times(x^2+x+8)-x(2x+1)}{(x^2+x+8)^2}$$
$$=\frac{-x^2+8}{(x^2+x+8)^2}$$
$f'(x)>0$에서 $-x^2+8>0$ ($\because (x^2+x+8)^2>0$)
$x^2-8<0$, $(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})<0$
$\therefore -2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$
따라서 $\alpha=-2\sqrt{2}$, $\beta=2\sqrt{2}$이므로
$\alpha^2+\beta^2=8+8=16$

0511

답 17

$$f(x)=\frac{ax^2-bx}{2x+3}\text{에서}$$
$$f'(x)=\frac{(2ax-b)(2x+3)-(ax^2-bx)\times 2}{(2x+3)^2}$$
$$=\frac{2ax^2+6ax-3b}{(2x+3)^2}$$
이때 $f'(0)=-2$이므로 $\frac{-3b}{3^2}=-2$
$\therefore b=6$ ❶

즉, $f(x)=\frac{ax^2-6x}{2x+3}$이고 $f(1)=1$이므로
$\frac{a-6}{5}=1$ $\quad\therefore a=11$ ❷

따라서 $f(x)=\frac{11x^2-6x}{2x+3}$이므로
$f(-1)=\frac{11-(-6)}{-2+3}=17$ ❸

채점 기준	배점
❶ b의 값 구하기	50%
❷ a의 값 구하기	30%
❸ $f(-1)$의 값 구하기	20%

0512

답 ④

$$f(x)=1+e^{-\ln x}+e^{-2\ln x}+\cdots+e^{-n\ln x}+\cdots$$
$$=1+x^{-\ln e}+x^{-2\ln e}+\cdots+x^{-n\ln e}+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots$$
$x>1$에서 $0<\frac{1}{x}<1$이므로
$$f(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}$$
$$f'(x)=\frac{1\times(x-1)-x\times 1}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$$
$\therefore f(2)+f'(2)=2+(-1)=1$

유형 03 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수

확인 문제 (1) $y'=-\frac{2}{x^3}$ (2) $y'=-\frac{12}{x^4}$

(1) $y=x^{-2}$에서 $y'=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$

(2) $y=\frac{4}{x^3}=4x^{-3}$이므로 $y'=4\times(-3)x^{-4}=-\frac{12}{x^4}$

다른 풀이

(2) $y'=-\frac{4\times 3x^2}{(x^3)^2}=-\frac{12}{x^4}$

0513

답 ②

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\cdots+\frac{1}{x^9}-\frac{1}{x^{10}}$$
$$=x^{-1}-x^{-2}+x^{-3}-\cdots+x^{-9}-x^{-10}$$
이므로
$$f'(x)=-x^{-2}-(-2)x^{-3}-3x^{-4}-\cdots-9x^{-10}-(-10)x^{-11}$$
$$=-x^{-2}+2x^{-3}-3x^{-4}+\cdots-9x^{-10}+10x^{-11}$$
$$\therefore f'(1)=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-9+10)$$
$$=1+1+1+1+1=5$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0514

답 -6

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)}{x^4}$$
$$=\frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^4}$$
$$=\frac{x^6-1}{x^4}=x^2-x^{-4}$$

이므로

$$f'(x)=2x+4x^{-5}=2x+\frac{4}{x^5}$$

따라서 $x=-1$에서의 미분계수는

$$f'(-1)=-2-4=-6$$

0515

답 11

$$f(x)=\frac{x^5+5x^3-3x}{x^2}=x^3+5x-3x^{-1}$$이므로

$$f'(x)=3x^2+5+3x^{-2}=3x^2+\frac{3}{x^2}+5$$

이때 $x^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f'(x)=3x^2+\frac{3}{x^2}+5\geq 2\sqrt{3x^2\times\frac{3}{x^2}}+5=11$$

$\left(\text{단, 등호는 } 3x^2=\frac{3}{x^2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $f'(x)$의 최솟값은 11이다.

유형 04 삼각함수의 도함수

0516

답 ③

$$f(x)=\frac{1+\csc x}{\cot x}=\frac{1}{\cot x}+\frac{\csc x}{\cot x}=\tan x+\sec x$$이므로

$$f'(x)=\sec^2 x+\sec x\tan x$$

$$\therefore f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\left\{\sec^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$\times\left(\sec^2\frac{\pi}{3}+\sec\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\{2^2+2\times(-\sqrt{3})\}(2^2+2\times\sqrt{3})$$
$$=(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})$$
$$=16-12=4$$

0517

답 ⑤

$$f(x)=\csc x-\sqrt{3}\cot x$$에서

$$f'(x)=-\csc x\cot x-\sqrt{3}\times(-\csc^2 x)$$
$$=-\csc x\cot x+\sqrt{3}\csc^2 x$$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\csc^2\frac{\pi}{6}$$
$$=-2\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 2^2=2\sqrt{3}$$

0518

답 -16

$$f(x)=\sin x\cos x$$에서

$$f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$이므로

$$g(x)=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\cot x-\tan x$$

$$g'(x)=-\csc^2 x-\sec^2 x$$이므로

$$3g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\times\left(-4-\frac{4}{3}\right)=-16$$

0519

답 ③

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-1}{\sin\frac{\pi}{4}}=0$$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4f(x)}{4x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4\left\{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x)=\frac{\tan x-1}{\sin x}$$에서

$$f'(x)=\frac{\sec^2 x\sin x-(\tan x-1)\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{\sec^2 x\sin x-\sin x+\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4f(x)}{4x-\pi}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\sec^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{(\sqrt{2})^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$
$$=2\sqrt{2}$$

0520

답 2

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0-}(\sec x+e^x)=\lim_{x\to 0+}(ax+b)=b$$

$$\therefore b=\sec 0+e^0=1+1=2$$ ❶

또한 $f'(x)=\begin{cases}\sec x\tan x+e^x & (x<0)\\ a & (x>0)\end{cases}$이고

$f'(0)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to 0-}(\sec x\tan x+e^x)=\lim_{x\to 0+}a$$

$$\therefore a=e^0=1$$ ❷

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\therefore ab=1\times2=2$ ····· ❸

채점 기준	배점
❶ b의 값 구하기	40%
❷ a의 값 구하기	50%
❸ ab의 값 구하기	10%

유형 05 합성함수의 미분법

0521 답 ④

$(f\circ g)(x)=3x^5-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=15x^4-4x$ ····· ㉠

$g(x)=17$이면 $x^4+1=17$, $x^4=16$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$)

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$f'(g(2))g'(2)=15\times2^4-4\times2$

$f'(17)g'(2)=232$

이때 $g'(x)=4x^3$이므로 $g'(2)=4\times2^3=32$

즉, $f'(17)\times32=232$이므로

$f'(17)=\dfrac{29}{4}$

0522 답 ④

$f(g(x))=3x+2$에서

$f(g(1))=3\times1+2=5$

이때 $g(1)=3$이므로 $f(3)=5$

한편, $f'(g(x))g'(x)=3$이므로

$f'(g(1))g'(1)=3$

$f'(3)\times1=3$ $\therefore f'(3)=3$

$\therefore f(3)+f'(3)=5+3=8$

0523 답 $\frac{3}{8}$

$g(x)=x^2+x$에서 $g(-1)=1-1=0$이고,

$g'(x)=2x+1$에서 $g'(-1)=-2+1=-1$ ····· ❶

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(-1)=f'(g(-1))g'(-1)=-f'(0)$

$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x-4}$에서

$f'(x)=\dfrac{1\times(x^2+2x-4)-(x+1)(2x+2)}{(x^2+2x-4)^2}$

$=\dfrac{-x^2-2x-6}{(x^2+2x-4)^2}$

이므로 $f'(0)=\dfrac{-6}{(-4)^2}=-\dfrac{3}{8}$ ····· ❷

$\therefore h'(-1)=-f'(0)=-\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{3}{8}$ ····· ❸

채점 기준	배점
❶ $g(-1)$, $g'(-1)$의 값 구하기	30%
❷ $f'(0)$의 값 구하기	50%
❸ $h'(-1)$의 값 구하기	20%

0524 답 ⑤

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)+1}{x-1}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\to1$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{g(x)+1\}=0$이므로 $g(1)=-1$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$이므로

$g'(1)=2$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{h(x)-2}{x-1}=12$에서 극한값이 존재하고 $x\to1$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{h(x)-2\}=0$이므로 $h(1)=2$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{h(x)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$이므로

$h'(1)=12$

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h(1)=2$에서 $f(g(1))=2$ $\therefore f(-1)=2$

$h'(1)=12$에서

$f'(g(1))g'(1)=12$, $f'(-1)\times2=12$

$\therefore f'(-1)=6$

$\therefore f(-1)+f'(-1)=2+6=8$

0525 답 -5

조건 (가)의 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-1}{x^2-9}=-1$에서 극한값이 존재하고 $x\to3$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(3)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-1}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\left\{\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\dfrac{1}{x+3}\right\}$

$=f'(3)\times\dfrac{1}{6}=-1$

$\therefore f'(3)=-6$

조건 (나)에서

$g(f(x))=2x-1$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$g(f(3))=6-1=5$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\therefore g(1)=5$ ($\because f(3)=1$)

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=2$ ····· ㉡

㉡의 양변에 $x=3$을 대입하면

$g'(f(3))f'(3)=2$

$g'(1)\times(-6)=2$ ($\because f(3)=1$, $f'(3)=-6$)

$\therefore g'(1)=-\frac{1}{3}$

$\therefore 3g(1)g'(1)=3\times5\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-5$

0526

답 $\frac{1}{32}$

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)-2}=2$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to1$일 때,

(분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(1)=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)-2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)-f(1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\frac{1}{f'(1)}$$

이므로 $\frac{1}{f'(1)}=2$ $\therefore f'(1)=\frac{1}{2}$ ❶

$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)}=4$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to2$일 때,

(분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-f(2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}=\frac{1}{f'(2)}$$

이므로 $\frac{1}{f'(2)}=4$ $\therefore f'(2)=\frac{1}{4}$ ❷

한편, $g(x)=f(f(x))$라 하면 $g(1)=f(f(1))=f(2)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(f(x))}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{(x-1)(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+3}\right\}$$
$$=g'(1)\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}f'(f(1))f'(1)\ (\because g'(x)=f'(f(x))f'(x))$$
$$=\frac{1}{4}\times f'(2)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$$

❸

채점 기준	배점
❶ $f'(1)$의 값 구하기	30%
❷ $f'(2)$의 값 구하기	30%
❸ $\lim_{x\to1}\frac{f(f(x))}{x^2+2x-3}$의 값 구하기	40%

유형 06 합성함수의 미분법 – 유리함수

확인 문제 (1) $y'=8(2x-1)^3$ (2) $y'=-\frac{8}{(2x-1)^5}$

(1) $y=(2x-1)^4$에서

$y'=4(2x-1)^3(2x-1)'=4(2x-1)^3\times2$

$=8(2x-1)^3$

(2) $y=\frac{1}{(2x-1)^4}=(2x-1)^{-4}$이므로

$y'=-4(2x-1)^{-5}(2x-1)'=-4(2x-1)^{-5}\times2$

$=-\frac{8}{(2x-1)^5}$

다른 풀이

(2) $y=\frac{1}{(2x-1)^4}=\left(\frac{1}{2x-1}\right)^4$이므로

$y'=4\left(\frac{1}{2x-1}\right)^3\times\left(\frac{1}{2x-1}\right)'=4\left(\frac{1}{2x-1}\right)^3\times\left\{-\frac{2}{(2x-1)^2}\right\}$

$=-\frac{8}{(2x-1)^5}$

0527

답 7

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\frac{q}{p}$에서 극한값이 존재하고 $x\to2$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(2)=1$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$f(x)=\left(\frac{x^3+1}{2x^2+1}\right)^3$에서

$f'(x)=3\left(\frac{x^3+1}{2x^2+1}\right)^2\times\frac{3x^2(2x^2+1)-(x^3+1)\times4x}{(2x^2+1)^2}$

$=3\left(\frac{x^3+1}{2x^2+1}\right)^2\times\frac{2x^4+3x^2-4x}{(2x^2+1)^2}$

이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=f'(2)=3\times1^2\times\frac{36}{9^2}=\frac{4}{3}$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로

$p+q=3+4=7$

0528

답 135

$g(x)=x^3\{f(x)\}^4$에서

$g'(x)=3x^2\{f(x)\}^4+x^3\times4\{f(x)\}^3f'(x)$

$=x^2\{f(x)\}^3\{3f(x)+4xf'(x)\}$

$\therefore g'(1)=\{f(1)\}^3\{3f(1)+4f'(1)\}$

$=3^3\times\{3\times3+4\times(-1)\}$

$=135$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0529

답 ②

$$\lim_{h\to0}\frac{f(4+2h)-f(4-h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(4+2h)-f(4)-f(4-h)+f(4)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(4+2h)-f(4)}{3h}+\lim_{h\to0}\frac{f(4-h)-f(4)}{-3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(4+2h)-f(4)}{2h}\times\frac{2}{3}+\lim_{h\to0}\frac{f(4-h)-f(4)}{-h}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2}{3}f'(4)+\frac{1}{3}f'(4)=f'(4)$$

$f(x)=(a-x)^4$에서
$f'(x)=4(a-x)^3\times(-1)=-4(a-x)^3$
이때 $f'(1)=-32$이므로
$-4(a-1)^3=-32$
$(a-1)^3=8$, $a^3-3a^2+3a-9=0$
$(a^2+3)(a-3)=0$
$\therefore a=3$ ($\because a$는 실수)
따라서 $f'(x)=-4(3-x)^3$이므로
$$\lim_{h\to0}\frac{f(4+2h)-f(4-h)}{3h}=f'(4)=-4\times(-1)^3=4$$

유형 07 합성함수의 미분법 - 지수함수

확인 문제
(1) $y'=2e^{2x+3}$
(2) $y'=3^{x^2-2x}(2x-2)\ln3$
(3) $y'=\dfrac{1-3x}{e^{3x}}$

(1) $y=e^{2x+3}$에서
$y'=e^{2x+3}\times(2x+3)'=2e^{2x+3}$
(2) $y=3^{x^2-2x}$에서
$y'=3^{x^2-2x}\times\ln3\times(x^2-2x)'=3^{x^2-2x}(2x-2)\ln3$
(3) $y=\dfrac{x}{e^{3x}}$에서
$$y'=\frac{1\times e^{3x}-x\times3e^{3x}}{(e^{3x})^2}=\frac{1-3x}{e^{3x}}$$

다른 풀이
(3) $y=\dfrac{x}{e^{3x}}=xe^{-3x}$이므로
$y'=e^{-3x}+x\times(-3e^{-3x})=(1-3x)e^{-3x}$
$=\dfrac{1-3x}{e^{3x}}$

0530

답 ②

$h(x)=g(f(x))$라 하면 $h(x)=e^{x^2+3x+2}$이므로
$h(-2)=e^0=1$
$$\therefore\lim_{x\to-2}\frac{g(f(x))-1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{h(x)-h(-2)}{x-(-2)}=h'(-2)$$
이때 $h'(x)=(2x+3)e^{x^2+3x+2}$이므로
$$\lim_{x\to-2}\frac{g(f(x))-1}{x+2}=h'(-2)=-e^0=-1$$

0531

답 ⑤

$f(x)=(3^{x+1}-1)^3$에서
$f'(x)=3(3^{x+1}-1)^2\times3^{x+1}\times\ln3\times1$
$=\ln3\times3^{x+2}(3^{x+1}-1)^2$
따라서 구하는 접선의 기울기는
$f'(0)=\ln3\times9\times4=36\ln3$

0532

답 ②

$g(x)=\dfrac{f(x)}{(e^{x^2+2x}+1)^5}$에서
$$g'(x)$$
$$=\frac{f'(x)(e^{x^2+2x}+1)^5-f(x)\times5(e^{x^2+2x}+1)^4\times e^{x^2+2x}\times(2x+2)}{\{(e^{x^2+2x}+1)^5\}^2}$$
$$=\frac{(e^{x^2+2x}+1)^4\{(e^{x^2+2x}+1)f'(x)-10(x+1)e^{x^2+2x}f(x)\}}{(e^{x^2+2x}+1)^{10}}$$
$$=\frac{(e^{x^2+2x}+1)f'(x)-10(x+1)e^{x^2+2x}f(x)}{(e^{x^2+2x}+1)^6}$$
$$\therefore g'(0)=\frac{2f'(0)-10f(0)}{2^6}=\frac{f'(0)-5f(0)}{2^5}$$
$$=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$$

0533

답 15

이차함수 $f(x)$를 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)이라 하자. ❶

조건 (가)에서 $f(0)=6$이므로
$c=6$ …… ㉠
조건 (나)에서 $g(2)=1$이므로
$e^{f(2)}=1$ $\therefore f(2)=0$
$\therefore 4a+2b+c=0$ …… ㉡
$g(x)=\dfrac{e^{f(x)}}{x-1}$에서
$$g'(x)=\frac{f'(x)e^{f(x)}\times(x-1)-e^{f(x)}\times1}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{e^{f(x)}\{f'(x)(x-1)-1\}}{(x-1)^2}$$
조건 (나)에서 $g'(2)=0$이므로
$e^{f(2)}\{f'(2)-1\}=0$ $\therefore f'(2)=1$
$f'(x)=2ax+b$이므로 $f'(2)=1$에서
$4a+b=1$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=-7$, $c=6$
$\therefore f(x)=2x^2-7x+6$ ❷
$\therefore f(-1)=2+7+6=15$ ❸

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

채점 기준	배점
❶ 이차함수 $f(x)$를 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓기	20%
❷ 조건 (가), (나)를 이용하여 $f(x)$ 구하기	70%
❸ $f(-1)$의 값 구하기	10%

유형 08 합성함수의 미분법 - 삼각함수

확인 문제 (1) $y'=e^x\cos e^x$
(2) $y'=-\sin x\cos(\cos x)$

(1) $y=\sin e^x$에서
$y'=\cos e^x\times(e^x)'=e^x\cos e^x$
(2) $y=\sin(\cos x)$에서
$y'=\cos(\cos x)\times(\cos x)'=-\sin x\cos(\cos x)$

0534 답 ②

$g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$이므로
$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$
$f(x)=\frac{x}{2}+\sin 2x$에서 $f'(x)=\frac{1}{2}+2\cos 2x$이므로
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\sin\pi=\frac{\pi}{4}$
$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+2\cos\pi=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$
$\therefore g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$
$=\left(\frac{1}{2}+2\cos\frac{\pi}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$
$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$

0535 답 ①

$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)-f(\pi-h)+f(\pi)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$
$=f'(\pi)+f'(\pi)=2f'(\pi)$
이때 $f(x)=\tan 2x+3\sin x$에서
$f'(x)=2\sec^2 2x+3\cos x$이므로
$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}=2f'(\pi)$
$=2(2\sec^2 2\pi+3\cos\pi)$
$=2\{2\times1^2+3\times(-1)\}$
$=-2$

0536 답 $\sqrt{3}$

$f(x)=-\cos^4\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$에서
$f'(x)=-4\cos^3\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\times\left\{\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}'$
$=-4\cos^3\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\times\left\{-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\times2$
$=8\cos^3\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$
$\therefore 2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\times8\cos^3\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}$
$=2\times8\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

0537 답 36

$g(x)=\frac{\sin f(x)}{\sin f(x)+1}$에서
$g'(x)=\frac{\{\sin f(x)\}'\{\sin f(x)+1\}-\sin f(x)\{\sin f(x)+1\}'}{\{\sin f(x)+1\}^2}$
$=\frac{\cos f(x)\times f'(x)\{\sin f(x)+1\}-\sin f(x)\cos f(x)\times f'(x)}{\{\sin f(x)+1\}^2}$
$=\frac{\cos f(x)\times f'(x)}{\{\sin f(x)+1\}^2}$
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$에서의 접선의 기울기는
$g'(0)=\frac{\cos f(0)\times f'(0)}{\{\sin f(0)+1\}^2}$
$=\frac{\cos\frac{\pi}{6}\times2}{\left(\sin\frac{\pi}{6}+1\right)^2}$
$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times2}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}$
$=\frac{4\sqrt{3}}{9}$
따라서 $p=9$, $q=4$이므로
$pq=9\times4=36$

유형 09 합성함수의 미분법 $f(g(x))=h(x)$ 꼴

0538 답 ③

$f(3x+2)=x^3-3x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(3x+2)\times3=3x^2-3$
$\therefore f'(3x+2)=x^2-1$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$3x+2=-1$에서 $x=-1$이므로
위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$f'(-1)=1-1=0$

0539

답 2

$f(2x-3)=g(x^2)$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(2x-3)\times 2=g'(x^2)\times 2x$
$\therefore f'(2x-3)=xg'(x^2)$
$2x-3=1$에서 $x=2$이므로
위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$f'(1)=2g'(4)$
이때 $f'(1)=4$이므로 $4=2g'(4)$
$\therefore g'(4)=2$

0540

답 ④

$f(x^3+x)=e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=e^x$
$\therefore f'(x^3+x)=\dfrac{e^x}{3x^2+1}$ …… ㉠
$x^3+x=2$에서 $(x-1)(x^2+x+2)=0$
이때 x는 실수이므로 $x=1$
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f'(2)=\dfrac{e}{4}$

0541

답 $-\sqrt{3}$

$f(\cos x)=\sin 3x+\tan x$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(\cos x)\times(-\sin x)=3\cos 3x+\sec^2 x$ …… ㉠ ❶

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos x=\dfrac{1}{2}$이면 $x=\dfrac{\pi}{3}$이다. ❷

㉠의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{3}$를 대입하면
$f'\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)\times\left(-\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=3\cos\pi+\sec^2\dfrac{\pi}{3}$
$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\times(-1)+4=1$
$\therefore \dfrac{3}{2}f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\times 1\times\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\sqrt{3}$ ❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 식 미분하기	30%
❷ $\cos x=\frac{1}{2}$인 x의 값 구하기	30%
❸ $\frac{3}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값 구하기	40%

유형 10 로그함수의 도함수

확인 문제 (1) $y'=\dfrac{1}{x}$ (2) $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

(1) $y=\ln 2x$에서 $y'=\dfrac{(2x)'}{2x}=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$

(2) $y=\log_2 3x$에서 $y'=\dfrac{(3x)'}{3x\ln 2}=\dfrac{3}{3x\ln 2}=\dfrac{1}{x\ln 2}$

0542

답 5

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4h)-f(-h)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4h)-f(0)-f(-h)+f(0)}{h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4h)-f(0)}{4h}\times 4+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-h)-f(0)}{-h}$
$=4f'(0)+f'(0)=5f'(0)$
$f(x)=\ln|\tan x+\sec x|$에서
$f'(x)=\dfrac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\tan x+\sec x}$
$=\dfrac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}$
$=\sec x$
$\therefore \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4h)-f(-h)}{h}=5f'(0)=5\sec 0=5$

0543

답 ③

$f(x)=\log_3(x^2+2x)$에서 $f'(x)=\dfrac{2x+2}{(x^2+2x)\ln 3}$
따라서 $x=1$에서의 미분계수는
$f'(1)=\dfrac{2+2}{(1+2)\ln 3}=\dfrac{4}{3\ln 3}$

0544

답 ③

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때,
(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$
$\ln b=0$ $\therefore b=e^0=1$
한편, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$이므로
$f'(0)=2$ …… ㉠
이때 $f(x)=\ln(ax+1)$에서 $f'(x)=\dfrac{a}{ax+1}$이므로
$f'(0)=a$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a=2$
따라서 $f(x)=\ln(2x+1)$이므로
$f(2)=\ln(2\times 2+1)=\ln 5$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0545

답 ⑤

$f(x)=\ln(\cos^2 3x)-\ln(\sin 3x)$에서

$$f'(x)=\frac{2\cos 3x\times(-3\sin 3x)}{\cos^2 3x}-\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}$$

$$=\frac{-6\sin 3x}{\cos 3x}-\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}$$

$$=-6\tan 3x-3\cot 3x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-6\tan\frac{3}{4}\pi-3\cot\frac{3}{4}\pi$$

$$=-6\times(-1)-3\times(-1)=9$$

0546

답 199

$f(x)=\ln(x^2+x)$에서 $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$이므로

$$f'(n)=\frac{2n+1}{n^2+n}$$

..... ❶

$$\sum_{n=1}^{99}\frac{f'(n)}{2n+1}=\sum_{n=1}^{99}\frac{\frac{2n+1}{n^2+n}}{2n+1}=\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{n^2+n}$$

$$=\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{99}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

$\therefore p=100,\ q=99$

..... ❷

$\therefore p+q=100+99=199$

..... ❸

채점 기준	배점
❶ $f'(n)$ 구하기	40%
❷ 부분분수의 합을 이용하여 정리한 후 p, q의 값 구하기	50%
❸ $p+q$의 값 구하기	10%

0547

답 ③

$f(x)=\ln(2^x+4^x+8^x+16^x)$이라 하면

$f(0)=\ln(1+1+1+1)=\ln 4$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{2^x+4^x+8^x+16^x}{4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2^x+4^x+8^x+16^x)-\ln 4}{x}$$

$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

한편, $f'(x)=\frac{2^x\ln 2+4^x\ln 4+8^x\ln 8+16^x\ln 16}{2^x+4^x+8^x+16^x}$이므로

$$f'(0)=\frac{\ln 2+\ln 4+\ln 8+\ln 16}{1+1+1+1}$$

$$=\frac{\ln 2+2\ln 2+3\ln 2+4\ln 2}{4}$$

$$=\frac{10\ln 2}{4}=\frac{5}{2}\ln 2$$

$\therefore a=\frac{5}{2}$

유형 11 로그함수의 도함수의 활용 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

0548

답 −20

$f(x)=\frac{(x+1)^5}{x^2(x-1)^4}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x+1)^5}{x^2(x-1)^4}\right|$$

$$=\ln|(x+1)^5|-\ln|x^2|-\ln|(x-1)^4|$$

$$=5\ln|x+1|-2\ln|x|-4\ln|x-1|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{5}{x+1}-\frac{2}{x}-\frac{4}{x-1}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\left(\frac{5}{x+1}-\frac{2}{x}-\frac{4}{x-1}\right)$$

이때 $f(2)=\frac{3^5}{2^2\times 1^4}=\frac{3^5}{2^2}$이므로

$$f'(2)=f(2)\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{2}-\frac{4}{1}\right)=\frac{3^5}{2^2}\times\left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$=\frac{3^4\times(-5)}{2}$$

따라서 $a=4$, $b=-5$이므로

$ab=4\times(-5)=-20$

0549

답 ①

$$f(x)=\frac{(x^2+2x-3)^2}{(x^2-1)^3}=\frac{(x-1)^2(x+3)^2}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

$$=\frac{(x+3)^2}{(x-1)(x+1)^3}$$

위의 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x+3)^2}{(x-1)(x+1)^3}\right|$$

$$=\ln|(x+3)^2|-\ln|x-1|-\ln|(x+1)^3|$$

$$=2\ln|x+3|-\ln|x-1|-3\ln|x+1|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+1}$$

$$f'(x)=f(x)\left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+1}\right)$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $g(x)=\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+1}$이므로

$g(-2)=\frac{2}{1}-\frac{1}{-3}-\frac{3}{-1}=\frac{16}{3}$

0550

답 14

$f(x)=\frac{(1-\cos x)^4}{(1+\cos x)^3}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(1-\cos x)^4}{(1+\cos x)^3}\right|$

$=\ln|(1-\cos x)^4|-\ln|(1+\cos x)^3|$

$=4\ln|1-\cos x|-3\ln|1+\cos x|$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{4\sin x}{1-\cos x}-\frac{3\times(-\sin x)}{1+\cos x}$

$=\frac{4\sin x}{1-\cos x}+\frac{3\sin x}{1+\cos x}$ ……❶

즉, $g(x)=\frac{4\sin x}{1-\cos x}+\frac{3\sin x}{1+\cos x}$이므로

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sin\frac{\pi}{6}}{1-\cos\frac{\pi}{6}}+\frac{3\sin\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{4\times\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{3\times\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{4}{2-\sqrt{3}}+\frac{3}{2+\sqrt{3}}$

$=\frac{4(2+\sqrt{3})+3(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$=8+4\sqrt{3}+6-3\sqrt{3}=14+\sqrt{3}$

$\therefore a=14,\ b=1$ ……❷

$\therefore ab=14\times1=14$ ……❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한 후 미분하여 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 구하기	60%
❷ $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구하여 a, b의 값 구하기	30%
❸ ab의 값 구하기	10%

0551

답 39

$f(x)=(1+e^x)(1+e^{2x})(1+e^{3x})\cdots(1+e^{12x})$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|$

$=\ln|(1+e^x)(1+e^{2x})(1+e^{3x})\cdots(1+e^{12x})|$

$=\ln(1+e^x)+\ln(1+e^{2x})+\ln(1+e^{3x})+\cdots+\ln(1+e^{12x})$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}+\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}+\cdots+\frac{12e^{12x}}{1+e^{12x}}$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{1+1}+\frac{2}{1+1}+\frac{3}{1+1}+\cdots+\frac{12}{1+1}$

$=\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+12)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{12\times13}{2}=39$

유형 12 로그함수의 도함수의 활용 $y=\{f(x)\}^{g(x)}$ 꼴

0552

답 ⑤

$f(x)=x^x$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^x=x\ln x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$\therefore f'(x)=f(x)(\ln x+1)$

이때 $f(e)=e^e$이므로

$f'(e)=f(e)(\ln e+1)=2e^e$

0553

답 ②

$f(x)=x^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\ln x}=(\ln x)^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$

$\therefore f'(x)=\frac{2\ln x}{x}f(x)$

이때 $f(e)=e^{\ln e}=e$이므로

$f'(e)=\frac{2\ln e}{e}f(e)=\frac{2}{e}\times e=2$

0554

답 ③

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$f(x)=x^{\tan x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\tan x}=\tan x\ln x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sec^2x\ln x+\tan x\times\frac{1}{x}=\sec^2x\ln x+\frac{\tan x}{x}$

이므로 $f'(x)=f(x)\left(\sec^2x\ln x+\frac{\tan x}{x}\right)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=f\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\sec^2\frac{\pi}{4}\ln\frac{\pi}{4}+\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(2\ln\frac{\pi}{4}+\frac{4}{\pi}\right)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{4}+1$$

유형 13 $y=x^a$ (a는 실수)의 도함수

확인 문제 (1) $y'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$ (2) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(1) $y=x^{\sqrt{2}}$에서 $y'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

(2) $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\frac{1}{2}\times x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\times x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

0555

답 1

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$g(x)=\sqrt{(2x+1)^3}=(2x+1)^{\frac{3}{2}}$이므로

$g'(x)=\frac{3}{2}\times(2x+1)^{\frac{1}{2}}\times 2=3(2x+1)^{\frac{1}{2}}$

이때 $g(0)=1$, $g'(0)=3$이고, $h'(0)=3$이므로

$f'(g(0))g'(0)=3$

$f'(1)\times 3=3$

$\therefore f'(1)=1$

0556

답 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(2)=2$

$y=f(\sqrt{x})$에서 $y'=f'(\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$이므로

함수 $y=f(\sqrt{x})$의 $x=4$에서의 미분계수는

$\frac{f'(\sqrt{4})}{2\sqrt{4}}=\frac{f'(2)}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

0557

답 ③

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)-f(2-3h)+f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{-h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times 3+\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\times 3$

$=3f'(2)+3f'(2)=6f'(2)$

$f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2-2x}=(x^3+x^2-2x)^{\frac{1}{3}}$이므로

$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3+x^2-2x)^{-\frac{2}{3}}\times(3x^2+2x-2)$

$=\frac{1}{3}(3x^2+2x-2)(x^3+x^2-2x)^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2-3h)}{h}=6f'(2)$

$=6\times\frac{1}{3}\times 14\times(2^3)^{-\frac{2}{3}}$

$=2\times 14\times\frac{1}{4}=7$

0558

답 4

$f(x)=(x-\sqrt{x^3+a})^4$에서

$f'(x)=4(x-\sqrt{x^3+a})^3\times\left(1-\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+a}}\right)$

$f'(0)=-4$이므로

$4\times(-\sqrt{a})^3\times 1=-4$, $(-\sqrt{a})^3=-1$

$\therefore a=1$ ❶

따라서 $f'(x)=4(x-\sqrt{x^3+1})^3\times\left(1-\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}\right)$이므로 ❷

$f'(2)=4\times(2-\sqrt{9})^3\times\left(1-\frac{12}{2\sqrt{9}}\right)$

$=4\times(-1)\times(-1)=4$ ❸

채점 기준	배점
❶ a의 값 구하기	60%
❷ $f'(x)$의 식 구하기	20%
❸ $f'(2)$의 값 구하기	20%

유형 14 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

확인 문제 $\frac{dy}{dx}=2t$

$x=t+1$, $y=t^2$에서 $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{1}=2t$

0559

답 ③

$x=2\tan\theta$, $y=2\sec\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=2\sec^2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=2\sec\theta\tan\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\sec\theta\tan\theta}{2\sec^2\theta}=\frac{\tan\theta}{\sec\theta}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때 점 $(2\sqrt{3}, 4)$가 곡선 위의 점이므로

$2\tan\theta=2\sqrt{3}$에서 $\tan\theta=\sqrt{3}$

$2\sec\theta=4$에서 $\sec\theta=2$

따라서 점 $(2\sqrt{3}, 4)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0560

답 ②

$x=e^t+\cos t$, $y=\sin t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=e^t-\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=\cos t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{e^t-\sin t}$

따라서 $t=0$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{\cos 0}{e^0-\sin 0}=\dfrac{1}{1}=1$

0561

답 4

$x=2\sqrt{t}+1$, $y=\ln\sqrt{t}$에서

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2t}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\sqrt{t}}{2t}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

이때 $t=k$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 $\dfrac{1}{4}$이므로

$\dfrac{1}{2\sqrt{k}}=\dfrac{1}{4}$, $2\sqrt{k}=4$

$\sqrt{k}=2$ $\quad\therefore k=4$

다른 풀이

$x=2\sqrt{t}+1$, $y=\ln\sqrt{t}$에서

$x-1=2\sqrt{t}$, $\sqrt{t}=\dfrac{x-1}{2}$이므로

$y=\ln\dfrac{x-1}{2}$

$=\ln(x-1)-\ln 2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x-1}$

$t=k$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 $\dfrac{1}{4}$이므로

$\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore x=5$

이를 $x-1=2\sqrt{k}$에 대입하면

$4=2\sqrt{k}$, $2=\sqrt{k}$

$\therefore k=4$

0562

답 ⑤

$x=\ln t+t$, $y=-t^3+3t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}+1$, $\dfrac{dy}{dt}=-3t^2+3$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{-3t^2+3}{\dfrac{1}{t}+1}=\dfrac{-3t(t+1)(t-1)}{1+t}$

$=-3t(t-1)=-3t^2+3t=-3\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

이때 $t>0$이므로 $t=\dfrac{1}{2}$에서 최댓값을 갖는다.

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$

0563

답 ②

$x=-t^2-2at$, $y=t^3+2at^2-3at$에서

$\dfrac{dx}{dt}=-2t-2a$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2+4at-3a$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2+4at-3a}{-2t-2a}$

이때 $t=1$일 때의 점 P에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{3+4a-3a}{-2-2a}=\dfrac{a+3}{-2a-2}$

이 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\dfrac{a+3}{-2a-2}=\tan\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{a+3}{-2a-2}=1$

$a+3=-2a-2$

$3a=-5$ $\quad\therefore a=-\dfrac{5}{3}$

0564

답 2

$x=3\ln t$, $y=\ln(2t^a-1)$에서

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2at^{a-1}}{2t^a-1}$이므로 ❶

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{2at^{a-1}}{2t^a-1}}{\dfrac{3}{t}}=\dfrac{2at^a}{6t^a-3}$ ❷

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{3}$에서 0이 아닌 극한값이 존재하므로 $a\neq 0$이고,

a가 음의 정수이면 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{0}{-3}=0$이 되어 모순이다.

따라서 a는 양의 정수이고

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2a}{6}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore a=2$ ❸

채점 기준	배점
❶ $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ 구하기	30%
❷ $\dfrac{dy}{dx}$ 구하기	20%
❸ a의 값 구하기	50%

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 15 음함수의 미분법

확인 문제 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ (단, $y\neq0$)

$x^2+y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ $\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ (단, $y\neq0$)

0565

답 ⑤

$e^{-2x}\ln y=3$에서 $\ln y=3e^{2x}$이고, 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=6e^{2x}$ $\therefore \frac{dy}{dx}=6e^{2x}y$

위의 식에 $x=0$, $y=e^3$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}=6e^0e^3=6e^3$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $6e^3$이다.

0566

답 -1

$3x^2-xy+y^3=3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x-y-x\times\frac{dy}{dx}+3y^2\times\frac{dy}{dx}=3$

$(-x+3y^2)\frac{dy}{dx}=3-6x+y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3-6x+y}{-x+3y^2}$ (단, $-x+3y^2\neq0$) …… ㉠

한편, $3x^2-xy+y^3=3x$에서 $x=1$일 때 $3-y+y^3=3$

$y(y+1)(y-1)=0$

$\therefore y=1$ ($\because y>0$)

㉠에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{3-6+1}{-1+3}=-1$

따라서 $x=1$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 -1이다.

0567

답 ④

$\pi x=\cos y+x\sin y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\pi=-\sin y\times\frac{dy}{dx}+\sin y+x\cos y\times\frac{dy}{dx}$

$(\sin y-x\cos y)\frac{dy}{dx}=\sin y-\pi$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sin y-\pi}{\sin y-x\cos y}$ (단, $\sin y-x\cos y\neq0$)

위의 식에 $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\pi}{\sin\frac{\pi}{2}-0\times\cos\frac{\pi}{2}}=1-\pi$

따라서 곡선 위의 점 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $1-\pi$이다.

0568

답 3

곡선 $ae^x+bxe^y=y$가 점 $(0,1)$을 지나므로

$ae^0=1$ $\therefore a=1$ ❶

$e^x+bxe^y=y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x+be^y+bxe^y\times\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}$

$(1-bxe^y)\frac{dy}{dx}=e^x+be^y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{e^x+be^y}{1-bxe^y}$ (단, $1-bxe^y\neq0$) ❷

위의 식에 $x=0$, $y=1$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{e^0+be^1}{1}=1+be$

이때 $1+be=1+2e$이므로 $b=2$ ❸

$\therefore a+b=1+2=3$ ❹

채점 기준	배점
❶ a의 값 구하기	20%
❷ $\frac{dy}{dx}$ 구하기	40%
❸ b의 값 구하기	30%
❹ $a+b$의 값 구하기	10%

0569

답 4

점 $(a,0)$이 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점이므로

$a^3=e^0$, $a^3=1$ $\therefore a=1$

$x^3-y^3=e^{xy}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3y^2\times\frac{dy}{dx}=e^{xy}\left(y+x\times\frac{dy}{dx}\right)$

$(xe^{xy}+3y^2)\frac{dy}{dx}=3x^2-ye^{xy}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}$ (단, $xe^{xy}+3y^2\neq0$)

주어진 곡선 위의 점 $(a,0)$에서의 접선의 기울기가 b이므로 위의 식에 $x=a=1$, $y=0$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{e^0}=b$ $\therefore b=3$

$\therefore a+b=1+3=4$

유형 16 역함수의 미분법

확인 문제 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y-3}$

$x=y^2-3y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=2y-3$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y-3}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0570

답 ①

$x=y^3+y+1$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=3y^2+1$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2+1}$ ····· ㉠

$x=y^3+y+1$에서 $x=-1$일 때 $-1=y^3+y+1$

$y^3+y+2=0$, $(y+1)(y^2-y+2)=0$

$\therefore y=-1$

㉠에 $y=-1$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\times(-1)^2+1}=\frac{1}{4}$

따라서 $x=-1$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{1}{4}$이다.

0571

답 ②

점 $(1, a)$가 곡선 $x=\ln y^2+1$ 위의 점이므로 $1=2\ln a+1$

$2\ln a=0$ $\therefore a=1$

$x=\ln y^2+1$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{y}{2}$

즉, 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$

따라서 $m=\frac{1}{2}$이므로

$a+m=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

0572

답 $\frac{1}{6}$

$x=\tan^3 y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=3\tan^2 y\sec^2 y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3\tan^2 y\sec^2 y}$ ····· ㉠ ❶

$x=\tan^3 y$에서 $x=1$일 때 $1=\tan^3 y$

$\tan y=1$ $\therefore y=\frac{\pi}{4}$ ❷

㉠에 $y=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\tan^2\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3\left(\tan\frac{\pi}{4}\sec\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{1}{3\times2}=\frac{1}{6}$

따라서 $x=1$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{1}{6}$이다. ❸

채점 기준	배점
❶ $\frac{dy}{dx}$ 구하기	40%
❷ $x=1$일 때의 y의 값 구하기	30%
❸ $x=1$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값 구하기	30%

유형 17 역함수의 미분법의 활용

0573

답 ①

$h(x)=\{g(x)\}^2$에서 $h'(x)=2g(x)g'(x)$이므로

$h'(3)=2g(3)g'(3)$

$g(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로

$\frac{a^2-4}{a}=3$, $a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$ $\therefore a=4$ $(\because a>0)$

즉, $g(3)=4$이고 $f(x)=\frac{x^2-4}{x}$에서

$f'(x)=\frac{2x\times x-(x^2-4)}{x^2}=\frac{x^2+4}{x^2}$이므로

$f'(4)=\frac{4^2+4}{4^2}=\frac{5}{4}$

따라서 $g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(4)}=\frac{4}{5}$이므로

$h'(3)=2g(3)g'(3)$

$=2\times4\times\frac{4}{5}=\frac{32}{5}$

0574

답 2

$g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$a^3+4a+2=2$, $a^3+4a=0$

$a(a^2+4)=0$ $\therefore a=0$

즉, $g(2)=0$이고

$f(x)=x^3+4x+2$에서 $f'(x)=3x^2+4$이므로

$f'(0)=4$

따라서 $g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{4}$이므로

$8g'(2)=8\times\frac{1}{4}=2$

0575

답 ①

$\lim_{h\to0}\frac{g(3e+h)-g(3e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{g(3e+h)-g(3e)-g(3e-h)+g(3e)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{g(3e+h)-g(3e)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(3e-h)-g(3e)}{-h}$

$=g'(3e)+g'(3e)=2g'(3e)$

함수 $f(x)=3x\ln x$의 그래프가 점 $(e, 3e)$를 지나므로

$f(e)=3e$에서 $g(3e)=e$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

한편, $g'(3e)=\frac{1}{f'(g(3e))}=\frac{1}{f'(e)}$이고

$f(x)=3x\ln x$에서

$f'(x)=3\ln x+3x\times\frac{1}{x}=3\ln x+3$이므로

$f'(e)=3\ln e+3=6$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{g(3e+h)-g(3e-h)}{h}=2g'(3e)=\frac{2}{f'(e)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

0576

답 ②

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(f(x))=x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$

$\therefore g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$

곡선 $y=g(x)$가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$g(2)=0$에서 $f(0)=2$

$e^0+k\cos0=2,\ 1+k=2 \qquad \therefore k=1$

$\therefore f(x)=e^{4x}+x+\cos x$

따라서 $f'(x)=4e^{4x}+1-\sin x$이므로

$f'(0)=4e^0+1-\sin0=5$

$\therefore g'(f(0))=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{5}$

0577

답 ②

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\frac{1}{3}$에서 극한값이 존재하고 $x\to2$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(2)=2$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

이므로 $f'(2)=\frac{1}{3}$

이때 $f(2)=2$에서 $g(2)=2$이므로

$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(2)}=3$

한편, $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$에서

$h'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$이므로

$h'(2)=\frac{g'(2)f(2)-g(2)f'(2)}{\{f(2)\}^2}=\frac{3\times2-2\times\frac{1}{3}}{2^2}=\frac{4}{3}$

유형 18 이계도함수

확인 문제 (1) $y''=6x$ (2) $y''=-\frac{1}{x^2}$

(1) $y=x^3-2x$에서 $y'=3x^2-2$이므로 $y''=6x$

(2) $y=\ln2x$에서 $y'=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$이므로 $y''=-\frac{1}{x^2}$

0578

답 ①

$f(x)=6x\ln x-x^3$에서

$f'(x)=6\ln x+6x\times\frac{1}{x}-3x^2$

$=6\ln x-3x^2+6$

$f''(x)=\frac{6}{x}-6x$

이때 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=0$에서 $f''(a)=0$이므로

$\frac{6}{a}-6a=0,\ 6a^2=6$

$a^2=1 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

0579

답 ①

$f(x)=e^{2x}\sin x$에서

$f'(x)=2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x=e^{2x}(2\sin x+\cos x)$

$f''(x)=2e^{2x}(2\sin x+\cos x)+e^{2x}(2\cos x-\sin x)$

$=e^{2x}(3\sin x+4\cos x)$

방정식 $f(x)=f''(x)$의 해가 α이므로

$e^{2\alpha}\sin\alpha=e^{2\alpha}(3\sin\alpha+4\cos\alpha)$

이때 $e^{2\alpha}>0$이므로 양변을 $e^{2\alpha}$으로 나누면

$\sin\alpha=3\sin\alpha+4\cos\alpha$

$2\sin\alpha=-4\cos\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2 \qquad \therefore \tan\alpha=-2$

0580

답 -2

$f(x)=(ax^2+bx)e^x$에서

$f'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx)e^x$

$=\{ax^2+(2a+b)x+b\}e^x$

$f'(0)=2$이므로 $b=2$ ❶

$f''(x)=(2ax+2a+b)e^x+\{ax^2+(2a+b)x+b\}e^x$

$=\{ax^2+(4a+b)x+2a+2b\}e^x$

$f''(0)=2$이므로 $2a+2b=2$

$2a+4=2\ (\because b=2) \qquad \therefore a=-1$ ❷

$\therefore ab=(-1)\times2=-2$ ❸

채점 기준	배점
❶ b의 값 구하기	45%
❷ a의 값 구하기	45%
❸ ab의 값 구하기	10%

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0581

답 1

조건 (가)의 $g(x)=f'(f(x))$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f''(f(x))f'(x)$

위의 식에 $x=1$을 대입하면

$g'(1)=f''(f(1))f'(1)$ ····· ㉠

조건 (나)의 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=4$에서 극한값이 존재하고 $x\to1$일 때,

(분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(1)=2$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$

조건 (다)의 $g'(1)=4$에서

$4=f''(2)\times4$ ($\because$ ㉠) $\therefore f''(2)=1$

PART B 내신 잡는 종합 문제

0582

답 ④

$g(x)=\frac{1}{xf(x)-f(x)+x}$에서

$g'(x)=-\frac{f(x)+xf'(x)-f'(x)+1}{\{xf(x)-f(x)+x\}^2}$이므로

$g'(1)=-\frac{f(1)+f'(1)-f'(1)+1}{\{f(1)-f(1)+1\}^2}$

$=-f(1)-1=-(-3)-1$

$=2$

0583

답 ④

점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 e이므로

$f'(1)=e$

$g(x)=f(\ln x)$라 하면

$g'(x)=f'(\ln x)\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x}f'(\ln x)$

함수 $y=f(\ln x)$의 $x=e$에서의 미분계수는 $g'(e)$이므로

$g'(e)=\frac{1}{e}f'(\ln e)=\frac{1}{e}f'(1)=\frac{1}{e}\times e=1$

0584

답 ③

$f(g(x))=3^{3x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=3^{3x}\times\ln3\times3=3^{3x+1}\ln3$

$g(x)=3^{x+1}$에서 $g'(x)=3^{x+1}\ln3$이므로

$f'(g(x))=\frac{3^{3x+1}\ln3}{g'(x)}=\frac{3^{3x+1}\ln3}{3^{x+1}\ln3}=3^{2x}$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(g(1))=3^2=9$

$\therefore f'(9)=9$ ($\because g(1)=9$)

0585

답 4

$f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\sum_{k=1}^{n}x^k$이고

함수 $f(x)$의 정의역이 $\{x|0<x<1\}$이므로

$g(x)=\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x^k=\frac{x}{1-x}$

이때 $g'(x)=\frac{(1-x)-x\times(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$이므로

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4$

0586

답 ①

$y^3-xy-\ln(5-x^2)=-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3y^2\times\frac{dy}{dx}-y-x\times\frac{dy}{dx}-\frac{-2x}{5-x^2}=0$

$(3y^2-x)\frac{dy}{dx}=y-\frac{2x}{5-x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\left(y-\frac{2x}{5-x^2}\right)\times\frac{1}{3y^2-x}$ (단, $3y^2-x\neq0$, $x^2<5$)

위의 식에 $x=2$, $y=1$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\left(1-\frac{4}{5-4}\right)\times\frac{1}{3-2}=-3$

따라서 구하는 접선의 기울기는 -3이다.

0587

답 ③

$f(x)=e^x\tan x$에서

$f'(x)=e^x\tan x+e^x\sec^2x$

$=e^x\tan x+e^x(1+\tan^2x)$

$=e^x(\tan^2x+\tan x+1)$

이때 $f(a)=\frac{2}{7}f'(a)$이므로

$e^a\tan a=\frac{2}{7}e^a(\tan^2a+\tan a+1)$

$e^a>0$이므로 양변을 e^a으로 나누면

$\tan a=\frac{2}{7}(\tan^2a+\tan a+1)$

$2\tan^2a-5\tan a+2=0$

$(2\tan a-1)(\tan a-2)=0$

$\therefore \tan a=\frac{1}{2}$ 또는 $\tan a=2$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\tan a=\frac{1}{2}$일 때, $\cot a=2$

$\tan a=2$일 때, $\cot a=\frac{1}{2}$

따라서 모든 $\cot a$의 값의 합은

$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

0588

답 8

$h(x)=f(g(x))$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$f'(1)=2$, $g(1)=1$, $h'(1)=-6$이므로

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(1)g'(1)=2g'(1)=-6$

$\therefore g'(1)=-3$

$y=f\left(\frac{x}{g(x)}\right)$에서

$y'=f'\left(\frac{x}{g(x)}\right)\times\left\{\frac{x}{g(x)}\right\}'$

$=f'\left(\frac{x}{g(x)}\right)\times\frac{g(x)-xg'(x)}{\{g(x)\}^2}$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{1}{g(1)}\right)\times\frac{g(1)-g'(1)}{\{g(1)\}^2}=f'(1)\times\frac{1-(-3)}{1^2}$

$=2\times4=8$

0589

답 ②

$g(x)=\frac{f(x)}{e^{x-2}}$에서

$g'(x)=\frac{f'(x)e^{x-2}-f(x)e^{x-2}}{(e^{x-2})^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^{x-2}}$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 극한값이 존재하고 $x\to2$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(2)=3$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=5$

$\therefore g'(2)=\frac{f'(2)-f(2)}{e^0}=5-3=2$

0590

답 33

$x=t+2\ln t$, $y=t^3-12t$에서

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-12$이므로

$m(t)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-12}{1+\frac{2}{t}}=\frac{3(t+2)(t-2)}{\frac{t+2}{t}}$

$=3t(t-2)=3(t-1)^2-3$

이때 $t>0$이므로 $t=1$일 때, $m(t)$의 최솟값은 -3이다.

$\therefore c=-3$

$t=1$일 때, $x=1+2\ln1=1$, $y=1^3-12\times1=-11$이므로

$a=1$, $b=-11$

$\therefore abc=1\times(-11)\times(-3)=33$

0591

답 ③

$g(x)=x^{\ln f(x)}=x^{\ln x^{\ln x}}=x^{(\ln x)^2}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln g(x)=\ln x^{(\ln x)^2}=(\ln x)^2\ln x=(\ln x)^3$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{g'(x)}{g(x)}=3(\ln x)^2\times\frac{1}{x}=\frac{3(\ln x)^2}{x}$

$\therefore g'(x)=\frac{3(\ln x)^2}{x}\times g(x)$

이때 $g(e)=e^{(\ln e)^2}=e$이므로

$g'(e)=\frac{3(\ln e)^2}{e}\times g(e)=\frac{3}{e}\times e=3$

0592

답 12

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=3$에서 극한값이 존재하고 $x\to-1$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$이므로

$f'(-1)=3$

한편, $g(x)=f(f(x))$라 하면 $g'(x)=f'(f(x))f'(x)$이고

$g(-1)=f(f(-1))=f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{f(f(x))}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$

$=g'(-1)=f'(f(-1))f'(-1)$

$=f'(0)\times3=4\times3$ ($\because f'(0)=4$)

$=12$

0593

답 ④

조건 (가)에서

$\lim_{h\to0}\frac{g(2+4h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(2+4h)-g(2)}{4h}\times4=4g'(2)$

이고, $4g'(2)=8$이므로 $g'(2)=2$

$\{(f\circ g)(x)\}'=\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$이고

조건 (나)에서 $f'(g(2))g'(2)=10$이므로

$f'(g(2))\times2=10$

$\therefore f'(g(2))=5$

이때 $f(x)=\frac{2^x}{\ln2}$에서 $f'(x)=\frac{2^x\ln2}{\ln2}=2^x$이므로

$f'(g(2))=2^{g(2)}=5$

$\therefore g(2)=\log_2 5$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0594

답 ②

$x=\sqrt{y^3+1}+y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{3y^2}{2\sqrt{y^3+1}}+1=\dfrac{3y^2+2\sqrt{y^3+1}}{2\sqrt{y^3+1}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sqrt{y^3+1}}{3y^2+2\sqrt{y^3+1}}$ ····· ㉠

$x=\sqrt{y^3+1}+y$에 $x=5$를 대입하면

$5=\sqrt{y^3+1}+y$

$5-y=\sqrt{y^3+1}$, $y^3-y^2+10y-24=0$

$(y-2)(y^2+y+12)=0$

$\therefore y=2$

㉠에 $y=2$를 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sqrt{2^3+1}}{3\times2^2+2\sqrt{2^3+1}}=\dfrac{6}{12+6}=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이다.

0595

답 ③

$f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})$이라 하면

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{n}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$=f'(0)=5$

$f'(x)=\dfrac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}$이므로

$f'(0)=\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}=\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\dfrac{n+1}{2}$

따라서 $\dfrac{n+1}{2}=5$이므로

$n+1=10$ $\therefore n=9$

0596

답 ④

$f(x)=\sin(x+\alpha)+2\cos(x+\alpha)$에서

$f'(x)=\cos(x+\alpha)-2\sin(x+\alpha)$이고, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$이므로

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=0$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$\therefore \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$

이므로

$\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\dfrac{1}{2}$

$2+2\tan\alpha=1-\tan\alpha$, $3\tan\alpha=-1$

$\therefore \tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$

Bible Says 삼각함수의 덧셈정리

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(2) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

0597

답 ⑤

$g(x)=\{f(x)\}^2$에서

$g'(x)=2f(x)f'(x)$

$=2\times\ln(x+2)\times\dfrac{1}{x+2}$

$=\dfrac{2\ln(x+2)}{x+2}$

이므로 $g'(-1)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g'(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g'(x)-g'(-1)}{x-(-1)}=g''(-1)$

이때

$g''(x)=\dfrac{\frac{2}{x+2}\times(x+2)-2\ln(x+2)\times1}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{2-2\ln(x+2)}{(x+2)^2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g'(x)}{x+1}=g''(-1)=\dfrac{2-2\ln(-1+2)}{(-1+2)^2}=2$

0598

답 $\dfrac{1}{4}$

$g'(n^3+3n^2+5)=g'(f(n))$이고, 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$에서

$g'(f(n))=\dfrac{1}{f'(g(f(n)))}=\dfrac{1}{f'(n)}$

$f(x)=x^3+3x^2+5$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}g'(n^3+3n^2+5)$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{f'(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n(n+2)}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$

$=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

$=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{4}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0599

답 3

조건 (나)의 $\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-2}{x-2}=6$에서 극한값이 존재하고

$x\to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f'(f(x))-2\}=0$이므로 $f'(f(2))=2$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-f'(f(2))}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(2))}{f(x)-f(2)}\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}$$

$$=f''(f(2))\times f'(2)$$

$$=f''(4)\times 2\ (\because \text{조건 (가)에서 } f(2)=4,\ f'(2)=2)$$

$$=2f''(4)$$

이때 $2f''(4)=6$이므로

$f''(4)=3$

0600

답 2

$$g(x)=\frac{f(x)+1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1}\text{에서}$$

$$g'(x)=\frac{f'(x)\left\{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1\right\}-\{f(x)+1\}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left\{-\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}}{\left\{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1\right\}^2}$$

…… ㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-g'(-x)=-g'(x)$, 즉 $g'(-x)=g'(x)$ …… ㉡

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=-g(-x)$이므로

$$\frac{f(x)+1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1}=-\frac{f(-x)+1}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}x\right)+1}$$

$f(x)+1=-f(-x)-1$

즉, $f(x)+f(-x)=-2$ …… ㉢

㉢의 좌변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f(0)=-2$에서

$f(0)=-1$

조건 (나)에서

$f(-1)=f(0)+2=-1+2=1$

㉢의 좌변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+f(-1)=-2$에서

$f(1)=-3$

㉡에서 $g'(1)=g'(-1)$이고 ㉠에서 $g'(-1)=f'(-1)$이므로

$g'(1)=f'(-1)$

조건 (다)에서

$f'(-1)=f(1)+5=-3+5=2$

이므로

$g'(1)=2$

0601

답 ②

$x=y^2$을 $4x^2-3xy+y^2-2=0$에 대입하면

$4y^4-3y^3+y^2-2=0$

$(y-1)(4y^3+y^2+2y+2)=0$

이때 $y>0$이므로 $y=1$

$y=1$을 $x=y^2$에 대입하면 $x=1$

즉, 제1사분면에서의 두 곡선의 교점 P의 좌표는 (1, 1)이다.

$x-y^2=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1-2y\times\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$ (단, $y\neq 0$)

곡선 $x-y^2=0$ 위의 점 P(1, 1)에서의 접선 l_1이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$

$4x^2-3xy+y^2=2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x-3y-3x\times\frac{dy}{dx}+2y\times\frac{dy}{dx}=0,\ (3x-2y)\frac{dy}{dx}=8x-3y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{8x-3y}{3x-2y}$ (단, $3x-2y\neq 0$)

곡선 $4x^2-3xy+y^2=2$ 위의 점 P(1, 1)에서의 접선 l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β라 하면

$\tan\beta=\frac{8-3}{3-2}=5$

이때 $\theta=\beta-\alpha$이므로

$$\tan\theta=|\tan(\beta-\alpha)|=\left|\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\right|$$

$$=\left|\frac{5-\frac{1}{2}}{1+5\times\frac{1}{2}}\right|=\frac{9}{7}$$

참고

$4y^4-3y^3+y^2-2=0$에서

$(y-1)(4y^3+y^2+2y+2)=0$

$g(y)=4y^3+y^2+2y+2$라 하면

$g'(y)=12y^2+2y+2>0$이므로 함수 $g(y)$는 증가함수이고,

$g(0)=2$이다.

따라서 방정식 $4y^3+y^2+2y+2=0$은 $y<0$인 한 실근을 갖는다.

0602

답 51

$x=t+t^3+t^5+\cdots+t^{99}$, $y=t^2+t^4+t^6+\cdots+t^{100}$에서

$\frac{dx}{dt}=1+3t^2+5t^4+\cdots+99t^{98}$

$\frac{dy}{dt}=2t+4t^3+6t^5+\cdots+100t^{99}$

이므로

…… ❶

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+4t^3+6t^5+\cdots+100t^{99}}{1+3t^2+5t^4+\cdots+99t^{98}}$$

…… ❷

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \lim_{t\to1}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to1}\frac{2t+4t^3+6t^5+\cdots+100t^{99}}{1+3t^2+5t^4+\cdots+99t^{98}}$$

$$=\frac{2+4+6+\cdots+100}{1+3+5+\cdots+99}$$

$$=\frac{\frac{50(2+100)}{2}}{\frac{50(1+99)}{2}}=\frac{51}{50}$$

$\therefore 50\lim_{t\to1}\frac{dy}{dx}=50\times\frac{51}{50}=51$

❸

채점 기준	배점
❶ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ 구하기	30%
❷ $\frac{dy}{dx}$ 구하기	20%
❸ $50\lim_{t\to1}\frac{dy}{dx}$의 값 구하기	50%

0603

답 5

곡선 $y=f(x)$가 점 $(4, 1)$을 지나므로 $f(4)=1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, 1)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(4)=1$

함수 $f(2x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(f(2x))=x$ ····· ㉠

㉠에 $x=2$를 대입하면

$g(f(4))=2$ $\therefore g(1)=2$

즉, 곡선 $y=g(x)$는 점 $(1, 2)$를 지나므로

$a=2$

❶

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(2x))f'(2x)\times2=1$

위의 식에 $x=2$를 대입하면

$g'(f(4))f'(4)\times2=1$

$g'(1)\times1\times2=1$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{2}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로

$b=\frac{1}{2}$

❷

$\therefore 5ab=5\times2\times\frac{1}{2}=5$

❸

채점 기준	배점
❶ a의 값 구하기	50%
❷ b의 값 구하기	40%
❸ $5ab$의 값 구하기	10%

다른 풀이

곡선 $y=f(x)$가 점 $(4, 1)$을 지나므로 $f(4)=1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, 1)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(4)=1$

곡선 $y=g(x)$가 점 $(1, a)$를 지나고, $g(x)$는 함수 $f(2x)$의 역함수이므로

$g(1)=a$, $f(2a)=1$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하므로

$f(2a)=1\iff f(4)=1$

즉, $2a=4$이므로 $a=2$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기 b는

$b=g'(1)=\frac{1}{(2x)'f'(2\times2)}=\frac{1}{2f'(4)}=\frac{1}{2\times1}=\frac{1}{2}$

$\therefore 5ab=5\times2\times\frac{1}{2}=5$

Bible Says 합성함수의 미분법 – 역함수

함수 $f(h(x))$의 역함수가 $g(x)$이고 $g(b)=a$이면

$g'(b)=\frac{1}{h'(a)f'(h(a))}$ (단, $f'(h(a))\neq0$, $h'(a)\neq0$)

참고

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $g(b)=a$이면

$g'(b)=\frac{1}{f'(a)}$ (단, $f'(a)\neq0$)

이다. 그런데 문제에서와 같이 합성함수 $f(h(x))$의 역함수가 $g(x)$이고 $g(b)=a$이면

$g'(b)=\frac{1}{h'(a)f'(h(a))}$ (단, $f'(h(a))\neq0$, $h'(a)\neq0$)

으로 합성함수의 미분을 하면 된다.

PART C 수능 녹인 변별력 문제

0604

답 ①

$f(x)=\frac{(\ln x+1)^3}{(\ln x)^2(\ln x-2)}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(\ln x+1)^3}{(\ln x)^2(\ln x-2)}\right|$$

$$=\ln|(\ln x+1)^3|-\ln|(\ln x)^2|-\ln|\ln x-2|$$

$$=3\ln|\ln x+1|-2\ln|\ln x|-\ln|\ln x-2|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3\times\frac{1}{x}}{\ln x+1}-\frac{2\times\frac{1}{x}}{\ln x}-\frac{\frac{1}{x}}{\ln x-2}$$

$$=\frac{1}{x}\left(\frac{3}{\ln x+1}-\frac{2}{\ln x}-\frac{1}{\ln x-2}\right)$$

$$\therefore \frac{f'(e)}{f(e)}=\frac{1}{e}\left(\frac{3}{\ln e+1}-\frac{2}{\ln e}-\frac{1}{\ln e-2}\right)$$

$$=\frac{1}{e}\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{1}-\frac{1}{-1}\right)=\frac{1}{e}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0605

답 ②

$e^{f(x)}=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$의 양변에 자연로그를 취하면

$f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$=\dfrac{1}{2}\{\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)\}$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x}-\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sin x}{1-\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\sin^2 x}$

$=\dfrac{1}{\sin x}=\csc x$

$f''(x)=-\csc x\cot x$이므로

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\csc\dfrac{\pi}{4}\cot\dfrac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\times1=-\sqrt{2}$

0606

답 ②

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(e+2h)-\ln2-4}{h}=\dfrac{2}{e}$에서 극한값이 존재하고 $h\to0$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{h\to0}\{f(e+2h)-\ln2-4\}=0$이므로

$f(e)=\ln2+4$ ····· ㉠

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(e+2h)-\ln2-4}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(e+2h)-f(e)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(e+2h)-f(e)}{2h}\times2$

$=2f'(e)$

이므로 $2f'(e)=\dfrac{2}{e}$

$\therefore f'(e)=\dfrac{1}{e}$

$f(x)=\ln(ax+b)+c$에서 $f'(x)=\dfrac{a}{ax+b}$이므로

$f'(e)=\dfrac{1}{e}$에서

$\dfrac{a}{ae+b}=\dfrac{1}{e}$, $ae=ae+b$

$\therefore b=0$ $\therefore f(x)=\ln ax+c$

$f(e)=\ln ae+c=\ln a+\ln e+c$

$=\ln a+c+1=\ln2+4$ ($\because$ ㉠)

즉, $\ln a=\ln2$, $c+1=4$이므로

$a=2$, $c=3$ ($\because$ a, c는 정수)

따라서 $f(x)=\ln2x+3$이므로

$f(1)=\ln2+3$

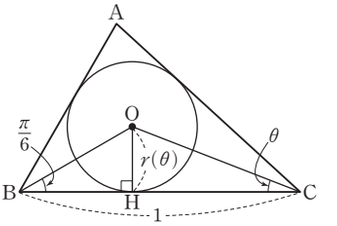
0607

답 ②

삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 O는 삼각형 ABC의 내심이므로

$\angle OBH=\dfrac{1}{2}\angle ABH=\dfrac{\pi}{6}$

$\angle OCH=\dfrac{1}{2}\angle ACH=\theta$



직각삼각형 OBH에서 $\dfrac{\overline{OH}}{\overline{BH}}=\tan\dfrac{\pi}{6}$, 즉 $\dfrac{r(\theta)}{\overline{BH}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$\overline{BH}=\sqrt{3}r(\theta)$

직각삼각형 OHC에서 $\dfrac{\overline{OH}}{\overline{CH}}=\tan\theta$, 즉 $\dfrac{r(\theta)}{\overline{CH}}=\tan\theta$이므로

$\overline{CH}=\dfrac{r(\theta)}{\tan\theta}$

이때 $\overline{BH}+\overline{CH}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{3}r(\theta)+\dfrac{r(\theta)}{\tan\theta}=1$

$r(\theta)\times\dfrac{\sqrt{3}\tan\theta+1}{\tan\theta}=1$

$\therefore r(\theta)=\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{3}\tan\theta+1}$

$h(\theta)=\dfrac{r(\theta)}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\tan\theta+1}$에서

$h'(\theta)=-\dfrac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{(\sqrt{3}\tan\theta+1)^2}$

$\therefore h'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

0608

답 7

$\dfrac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left\{g\left(1+\dfrac{2}{n}\right)-g\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(1+2h)-g(1-2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(1+2h)-g(1)-g(1-2h)+g(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(1+2h)-g(1)}{2h}\times2+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}\times2$

$=2g'(1)+2g'(1)=4g'(1)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$k^3-k^2+2k-7=1$

$k^3-k^2+2k-8=0,\ (k-2)(k^2+k+4)=0$

즉, $k=2$이므로 $g(1)=2$

$\therefore g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'(2)}$

$f(x)=x^3-x^2+2x-7$에서 $f'(x)=3x^2-2x+2$이므로

$f'(2)=12-4+2=10$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} n\left\{g\left(1+\dfrac{2}{n}\right)-g\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\right\}=4g'(1)$

$=\dfrac{4}{f'(2)}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

따라서 $p=5,\ q=2$이므로

$p+q=5+2=7$

0609

답 ⑤

$x=\cos^2\theta\sin\theta,\ y=\sin^3\theta$에서

$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta\times(-\sin\theta)\times\sin\theta+\cos^2\theta\times\cos\theta$

$=-2\cos\theta\sin^2\theta+\cos^3\theta$

$=-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)+\cos^3\theta$

$=3\cos^3\theta-2\cos\theta$

$=\cos\theta(3\cos^2\theta-2)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta=3(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$=3\cos\theta(1-\cos^2\theta)$

이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{3\cos\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta(3\cos^2\theta-2)}=\dfrac{3(1-\cos^2\theta)}{3\cos^2\theta-2}$

이때 곡선 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 $-\dfrac{9}{5}$이므로

$\dfrac{3(1-\cos^2\theta)}{3\cos^2\theta-2}=-\dfrac{9}{5}$에서

$5-5\cos^2\theta=6-9\cos^2\theta,\ 4\cos^2\theta=1 \qquad \therefore \cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

이때 $0<\theta<\pi$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$a=\cos^2\theta\sin\theta=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

$b=\sin^3\theta=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

$\therefore a+b=\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0610

답 ②

두 점 $(\alpha,\ k),\ (\beta,\ k)$가 곡선 $x^2+xy+3y^2=11$ 위의 점이므로

$\alpha^2+\alpha k+3k^2-11=0,\ \beta^2+\beta k+3k^2-11=0$

즉, $\alpha,\ \beta$는 x에 대한 이차방정식 $x^2+kx+3k^2-11=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=3k^2-11 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+xy+3y^2=11$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+y+x\times\dfrac{dy}{dx}+6y\times\dfrac{dy}{dx}=0$

$(x+6y)\dfrac{dy}{dx}=-2x-y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+6y}$ (단, $x+6y\neq0$)

따라서 곡선 $x^2+xy+3y^2=11$ 위의 두 점 $(\alpha,\ k),\ (\beta,\ k)$에서의 접선의 기울기는 각각 $-\dfrac{2\alpha+k}{\alpha+6k},\ -\dfrac{2\beta+k}{\beta+6k}$이고,

두 접선이 서로 수직이므로

$\left(-\dfrac{2\alpha+k}{\alpha+6k}\right)\times\left(-\dfrac{2\beta+k}{\beta+6k}\right)=-1$

$(2\alpha+k)(2\beta+k)=-(\alpha+6k)(\beta+6k)$

$5\alpha\beta+8(\alpha+\beta)k+37k^2=0$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$5(3k^2-11)+8\times(-k)\times k+37k^2=0$

$44k^2=55,\ k^2=\dfrac{5}{4} \qquad \therefore k=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\ (\because\ 0\le k<2)$

$\therefore \alpha+\beta=-k=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

0611

답 ③

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{g(x)}{x+2}=b$에서 극한값이 존재하고 $x\to-2$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to-2}g(x)=0$이므로 $g(-2)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{g(x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=g'(-2)$이므로

$g'(-2)=b \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $g(-2)=0$이면 $f(0)=-2$이므로

$f(0)=\ln\left(\dfrac{\sec0+\tan0}{a}\right)=-2$

$\ln\dfrac{1}{a}=-2,\ \ln a=2$

$\therefore a=e^2$

한편,

$f(x)=\ln\left(\dfrac{\sec x+\tan x}{e^2}\right)$

$=\ln(\sec x+\tan x)-\ln e^2$

$=\ln(\sec x+\tan x)-2$

이므로

$f'(x)=\dfrac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}=\sec x$

㉡에서 $g'(-2)=b$이므로

$b=g'(-2)=\dfrac{1}{f'(g(-2))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{\sec0}=1$

$\therefore ab=e^2\times1=e^2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0612

답 ②

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, 함수 $g(x)$가 $x=b$에서 연속이므로

$\lim_{x\to b-} g(x)=\lim_{x\to b+} g(x)=g(b)$에서

$\lim_{x\to b+}\{f(x)-a\}=0$, $f(b)-a=0$

$\therefore f(b)=a$

또한 $g'(x)=\begin{cases}0 & (x<b)\\ f'(x) & (x>b)\end{cases}$이고 함수 $g(x)$가 $x=b$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to b-} g'(x)=\lim_{x\to b+} g'(x)$에서

$\lim_{x\to b+} f'(x)=0$

$\therefore f'(b)=0$ ····· ㉠

한편, $f(x)=xe^{-x^2+1}$에서

$f'(x)=e^{-x^2+1}+x\times e^{-x^2+1}\times(-2x)$

$=(1-2x^2)e^{-x^2+1}$

이므로 $(1-2b^2)e^{-b^2+1}=0$ ($\because$ ㉠)

이때 $e^{-b^2+1}>0$이므로 $1-2b^2=0$

$\therefore b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because b>0$)

$\therefore a=f(b)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2}}$

$\therefore ab=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{e}}{2}$

0613

답 ④

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

조건 ㈎에서 $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(axe^{2x}+bx^2)=0$

$\therefore f(0)=0$ ····· ㉠

조건 ㈏에서 $x_1<x_2<0$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=3$이므로

$f'(x_1)=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\lim_{x_2\to x_1} 3=3$

즉, $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3$이므로

$f(x)=\int 3\,dx=3x+C$ (C는 적분상수)

이때 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 ㉠에 의하여

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(3x+C)=C=0$

따라서 $x<0$일 때 $f(x)=3x$이므로

$f(x)=\begin{cases}3x & (x<0)\\ axe^{2x}+bx^2 & (x\geq 0)\end{cases}$

$\therefore f'(x)=\begin{cases}3 & (x<0)\\ ae^{2x}+2axe^{2x}+2bx & (x>0)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0+} f'(x)=\lim_{x\to 0+}(ae^{2x}+2axe^{2x}+2bx)=a$

$\lim_{x\to 0-} f'(x)=\lim_{x\to 0-} 3=3$

$\therefore a=3$

한편, $x\geq 0$일 때 $f(x)=3xe^{2x}+bx^2$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}e+\frac{1}{4}b=2e$에서 $\frac{1}{4}b=\frac{1}{2}e$

$\therefore b=2e$

$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=3e+3e+2e=8e$

참고

미분계수의 정의를 이용하여 a, b의 값을 구할 수도 있다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{axe^{2x}+bx^2}{x}$

$=\lim_{x\to 0+}(ae^{2x}+bx)=a$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{3x}{x}=3$

에서 $a=3$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{2}a+\frac{1}{4}b=2e$에서 $b=2e$

0614

답 5

조건 ㈏의 $g(x)=\left(\sin\frac{\pi}{2}x+\ln x+3\right)f(x)$에서

$g'(x)=\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{x}\right)f(x)+\left(\sin\frac{\pi}{2}x+\ln x+3\right)f'(x)$

이므로

$g'(1)=f(1)+4f'(1)$ ····· ㉠

조건 ㈎에서 $\ln x+1\leq f(x)\leq e^{x-1}$ ····· ㉡

㉡에 $x=1$을 대입하면

$1\leq f(1)\leq 1$ $\therefore f(1)=1$

㉡에서 $\ln x\leq f(x)-1\leq e^{x-1}-1$

$\therefore \ln x\leq f(x)-f(1)\leq e^{x-1}-1$ ····· ㉢

(i) $0<x<1$일 때

$x-1<0$이므로 ㉢에서

$\frac{\ln x}{x-1}\geq\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\geq\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$

$\lim_{x\to 1-}\frac{\ln x}{x-1}\geq\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\geq\lim_{x\to 1-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to 1-$일 때 $t\to 0-$이므로

$\lim_{x\to 1-}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{t\to 0-}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

$\lim_{x\to 1-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{t\to 0-}\frac{e^t-1}{t}=1$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(ii) $x>1$일 때

$x-1>0$이므로 ㉢에서

$$\frac{\ln x}{x-1}\le\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{\ln x}{x-1}\le\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\lim_{x\to1+}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{t\to0+}\frac{e^{t}-1}{t}=1$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$$

(i), (ii)에서 $f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

㉠에서 $g'(1)=f(1)+4f'(1)=1+4\times1=5$

0615

답 ④

조건 ㈎에서 $f(1)=e$이므로

$f(x)=(x^2+ax+b)e^x$에서

$f(1)=(1+a+b)e=e$

$1+a+b=1$ $\quad\therefore a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또한 $f'(1)=e$이므로

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

$\quad=\{x^2+(a+2)x+(a+b)\}e^x$

에서 $f'(1)=\{1+(a+2)+(a+b)\}e=e$

$1+(a+2)+(a+b)=1$

$\therefore 2a+b=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=2$

$\therefore f(x)=(x^2-2x+2)e^x$

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x+2)e^x$

$\quad=x^2e^x$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이므로 함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다.

$f(1)=e$에서 $f^{-1}(e)=1$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$(f^{-1})'(e)=\frac{1}{f'(f^{-1}(e))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{e}$$

조건 ㈏에서 $g(f(x))=f'(x)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(f(1))=f'(1)$

$\therefore g(e)=e$

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$

위의 식에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$에서

$g'(e)\times e=f''(1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

이때 $f'(x)=x^2e^x$에서

$f''(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$이므로

$f''(1)=3e$

이를 ㉣에 대입하면 $g'(e)\times e=3e$이므로

$g'(e)=3$

$h(x)=f^{-1}(x)g(x)$에서

$h'(x)=(f^{-1})'(x)g(x)+f^{-1}(x)g'(x)$이므로

$h'(e)=(f^{-1})'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)$

$\quad=\frac{1}{e}\times e+1\times3$

$\quad=1+3=4$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형별 문제

PART A

06 도함수의 활용(1)

유형 01 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

확인 문제 (1) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ (2) $y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{3}{2}}$이라 하면

$f'(x)=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

이때 $f'(1)=-\frac{3}{2}$이므로

곡선 $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{3}{2}(x-1)$ $\therefore y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

(2) $f(x)=\sin 2x$라 하면 $f'(x)=2\cos 2x$

이때 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$이므로

곡선 $y=\sin 2x$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\frac{\pi}{6}$ $\therefore y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

0616 답 ④

$f(x)=e^{x^2-3x}$이라 하면

$f'(x)=e^{x^2-3x}\times(2x-3)=(2x-3)e^{x^2-3x}$

이때 $f'(3)=(6-3)\times e^0=3$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=3(x-3)$ $\therefore y=3x-8$

따라서 $m=3$, $n=-8$이므로

$mn=3\times(-8)=-24$

0617 답 ③

$f(x)=\frac{3x-1}{x^2+1}$이라 하면

$f'(x)=\frac{3(x^2+1)-(3x-1)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}$

이때 $f'(1)=\frac{-3+2+3}{(1+1)^2}=\frac{1}{2}$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

0618 답 ①

$f(x)=\tan 2x+\frac{\pi}{2}$에서

$f'(x)=2\sec^2 2x$

이때 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\tan\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=1+\frac{\pi}{2}$이고,

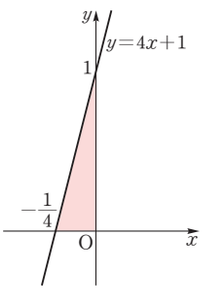
$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sec^2\frac{\pi}{4}=2\times(\sqrt{2})^2=4$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\left(\frac{\pi}{8}, f\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ $\therefore y=4x+1$

따라서 접선의 x절편은 $-\frac{1}{4}$, y절편은 1이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left|-\frac{1}{4}\right|\times|1|=\frac{1}{8}$



0619 답 ①

$f(x)=e^{\sin 2x}-x\cos x$에서

$f'(x)=e^{\sin 2x}\times 2\cos 2x-\cos x+x\sin x$

$=2e^{\sin 2x}\cos 2x-\cos x+x\sin x$

이때 $f(\pi)=e^{\sin 2\pi}-\pi\cos\pi=\pi+1$이고,

$f'(\pi)=2e^{\sin 2\pi}\cos 2\pi-\cos\pi+\pi\sin\pi=2-(-1)+0=3$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\pi, f(\pi))$에서의 접선의 방정식은

$y-(\pi+1)=3(x-\pi)$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$-\pi-1=3(x-\pi)$ $\therefore x=\frac{2\pi-1}{3}$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $\frac{2\pi-1}{3}$이다.

0620 답 72

$f(x)=\sqrt{x^2+sx+t}$라 하면 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$에서 $y=f'(1)x-f'(1)+f(1)$

이때 $2x+y-3=0$, 즉 $y=-2x+3$이므로 ← 두 방정식이 같다.

$f'(1)=-2$, $-f'(1)+f(1)=3$

$\therefore f(1)=3+f'(1)=3+(-2)=1$

$f(1)=1$에서 $\sqrt{1+s+t}=1$, $1+s+t=1$

$\therefore t=-s$ …… ㉠

…… ❶

㉠에 의하여 $f(x)=\sqrt{x^2+sx-s}$이므로

$f'(x)=\frac{2x+s}{2\sqrt{x^2+sx-s}}$

$f'(1)=\frac{2+s}{2}=-2$에서 $s+2=-4$

$\therefore s=-6$

이를 ㉠에 대입하면 $t=6$

…… ❷

$\therefore s^2+t^2=(-6)^2+6^2=72$

…… ❸

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

채점 기준	배점
❶ $f(1)$을 이용하여 s와 t 사이의 관계식 구하기	45%
❷ $f'(1)$을 이용하여 s와 t의 값 구하기	45%
❸ s^2+t^2의 값 구하기	10%

0621

답 9

$f(x)=\ln x$라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

점 $(t, \ln t)$에서의 접선 l의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{t}$

점 $\left(\frac{4}{5}, \ln\frac{4}{5}\right)$에서의 접선 m의 기울기는 $f'\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{5}{4}$

두 접선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면

$\tan\theta_1=\frac{1}{t}$, $\tan\theta_2=\frac{5}{4}$

이때 두 접선 l과 m이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\theta_2-\theta_1=\frac{\pi}{4}\left(\because t>\frac{4}{5}\right)$

따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan(\theta_2-\theta_1)=\tan\frac{\pi}{4}$에서

$$\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}=1,\ \frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{t}}{1+\frac{5}{4}\times\frac{1}{t}}=1$$

$$\frac{5t-4}{4t+5}=1,\ 5t-4=4t+5$$

$\therefore t=9$

Bible Says 삼각함수의 덧셈정리 – 탄젠트함수

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

유형 02 접선에 수직인 직선의 방정식

확인 문제 $y=-2x+6+\ln 2$

$f(x)=\ln(x-1)$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x-1}$이므로

$f'(3)=\frac{1}{2}$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, \ln 2)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-\ln 2=-2(x-3)$ $\therefore y=-2x+6+\ln 2$

0622

답 ④

$f(x)=x+\frac{2x}{x^3-2x}$에서

$f'(x)=1+\frac{2(x^3-2x)-2x(3x^2-2)}{(x^3-2x)^2}$이므로

$f'(2)=1+\frac{2\times(8-4)-4\times(12-2)}{(8-4)^2}=-1$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 1이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-3=x-2$ $\therefore y=x+1$

즉, $m=1$, $n=1$이므로

$m+n=1+1=2$

0623

답 2

$f(x)=e^{2x}$이라 하면 $f'(x)=2e^{2x}$이므로

$f'(0)=2$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

이때 이 직선이 점 $(4, 0)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}(x-4)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+2$

따라서 구하는 직선의 y절편은 2이다.

0624

답 ④

$f(x)=\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2}x}$라 하면 점 $(1, p)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$p=f(1)=\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2}}=1$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2}x}}\times\left(-\sin\frac{\pi}{2}x\right)\times\frac{\pi}{2}=\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}{2\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2}x}}$$

이므로 $f'(1)=\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2}}}=-\frac{\pi}{4}$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{\pi}{4}$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4}{\pi}$이다.

따라서 직선의 방정식은 $y-1=\frac{4}{\pi}(x-1)$이므로

$y=\frac{4}{\pi}x-\frac{4}{\pi}+1$

이때 이 직선이 점 $(q, 0)$을 지나므로

$0=\frac{4}{\pi}q-\frac{4}{\pi}+1$, $\frac{4}{\pi}q=\frac{4}{\pi}-1$

$\therefore q=1-\frac{\pi}{4}$

$\therefore p-q=1-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0625

답 10

$g(x)=\sin 3x$라 하면 $g'(x)=3\cos 3x$이므로
$g'(\theta)=3\cos 3\theta$
즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\theta, \sin 3\theta)$에서의 접선의 기울기가 $3\cos 3\theta$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3\cos 3\theta}$이다.

따라서 직선의 방정식은 $y-\sin 3\theta=-\frac{1}{3\cos 3\theta}(x-\theta)$

위의 식에 $y=0$을 대입하면 $-\sin 3\theta=-\frac{1}{3\cos 3\theta}(x-\theta)$

$\therefore x=3\sin 3\theta\cos 3\theta+\theta$

즉, $f(\theta)=3\sin 3\theta\cos 3\theta+\theta$이므로

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{3\sin 3\theta\cos 3\theta+\theta}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\times\cos 3\theta\times 9+1\right)$$
$$=1\times 1\times 9+1=10$$

유형 03 기울기가 주어진 접선의 방정식

확인 문제 $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{x-2}{x+2}$라 하면 $f'(x)=\frac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$

이때 곡선 $y=f(x)$와 기울기가 $\frac{1}{4}$인 직선이 접하는 접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면 $f'(t)=\frac{1}{4}$에서

$\frac{4}{(t+2)^2}=\frac{1}{4}$, $(t+2)^2=16$
$t+2=\pm 4$ $\therefore t=2$ ($\because t>-2$)
$\therefore f(2)=0$
따라서 접점의 좌표가 $(2, 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y=\frac{1}{4}(x-2)$
$\therefore y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

0626

답 ②

$f(x)=x+e^x$이라 하면 $f'(x)=1+e^x$
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x+3$에 평행한 직선이 접하는 접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면 $f'(t)=2$에서
$1+e^t=2$, $e^t=1$
$\therefore t=0$, $f(0)=1$
즉, 접점의 좌표가 $(0, 1)$이므로 접선의 방정식은
$y=2x+1$
위의 식에 $y=0$을 대입하면
$2x+1=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$
따라서 구하는 직선의 x절편은 $-\frac{1}{2}$이다.

0627

답 ⑤

$f(x)=2\sqrt{x+2}$라 하면 $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{x+2}}=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+2$에 평행한 직선이 접하는 접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면 $f'(t)=1$에서

$\frac{1}{\sqrt{t+2}}=1$, $\sqrt{t+2}=1$, $t+2=1$
$\therefore t=-1$, $f(-1)=2\sqrt{-1+2}=2$
따라서 접점의 좌표가 $(-1, 2)$이므로 접선의 방정식은
$y-2=x-(-1)$ $\therefore y=x+3$
이 직선이 점 $(2, k)$를 지나므로
$k=2+3=5$ $\therefore 3k=15$

0628

답 ①

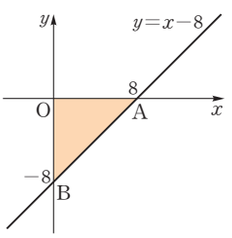
$f(x)=3x\ln x-bx$라 하면 $f'(x)=3\ln x+3-b$
직선 $y=3x+a$가 곡선 $y=f(x)$에 접하는 접점의 x좌표가 e이므로 $f'(e)=3$에서
$3\ln e+3-b=3$ $\therefore b=3$
즉, $f(x)=3x\ln x-3x$이므로 접점의 y좌표는
$f(e)=3e\ln e-3e=0$
따라서 직선 $y=3x+a$가 점 $(e, 0)$을 지나므로
$0=3e+a$ $\therefore a=-3e$
$\therefore ab=-3e\times 3=-9e$

0629

답 32

$f(x)=\ln(x-7)$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x-7}$
이때 곡선 $y=f(x)$와 기울기가 1인 직선이 $x=k$인 점에서 접한다고 하면 $f'(k)=1$에서

$\frac{1}{k-7}=1$
$\therefore k=8$, $f(8)=\ln(8-7)=0$
즉, 접점의 좌표가 $(8, 0)$이므로 접선의 방정식은
$y=x-8$
따라서 A(8, 0), B(0, −8)이므로 구하는 삼각형 AOB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times 8\times 8=32$



0630

답 ④

$f(x)=-x^2+6x-2\ln x$에서
$f'(x)=-2x+6-\frac{2}{x}=-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+6$
$x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2$

이때 등호는 $x=\frac{1}{x}$일 때 성립하므로

$x=1$ ($\because x>0$)

즉, $f'(x)$가 $x=1$일 때 최댓값 2를 갖고

$f(1)=-1+6=5$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=2(x-1)$ $\therefore y=2x+3$

따라서 $g(x)=2x+3$이므로

$g(2)=2\times 2+3=7$

유형 04 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

확인 문제 $y=-x+3$

$f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}=2x^{-\frac{1}{2}}$이라 하면

$f'(x)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{x\sqrt{x}}$

점 $(0, 3)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t, \frac{2}{\sqrt{t}}\right)$라 하면 접선의 방정식은

$y-\frac{2}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{t\sqrt{t}}(x-t)$에서

$y=-\frac{1}{t\sqrt{t}}x+\frac{3}{\sqrt{t}}$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=\frac{3}{\sqrt{t}}$, $\sqrt{t}=1$

$\therefore t=1$

이를 ㉠에 대입하면

$y=-x+3$

0631

답 ①

$f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$이라 하면

$f'(x)=\frac{-e^{-x}\times x-e^{-x}}{x^2}=\frac{(-x-1)e^{-x}}{x^2}$

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t, \frac{e^{-t}}{t}\right)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-\frac{e^{-t}}{t}=\frac{(-t-1)e^{-t}}{t^2}(x-t)$에서

$y=\frac{(-t-1)e^{-t}}{t^2}x+\frac{(t+2)e^{-t}}{t}$ …… ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로 $\frac{(t+2)e^{-t}}{t}=0$

$\therefore t=-2$ ($\because e^{-t}>0$)

이를 ㉠에 대입하면 $y=\frac{e^2}{4}x$

이 직선이 점 $(-4, k)$를 지나므로

$k=\frac{e^2}{4}\times(-4)=-e^2$

0632

답 ②

$f(x)=x\ln x$라 하면 $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

점 $(0, -2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, t\ln t)$라 하면 접선의 방정식은

$y-t\ln t=(\ln t+1)(x-t)$에서

$y=(\ln t+1)x-t$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=-t$ $\therefore t=2$

이를 ㉠에 대입하면

$y=(\ln 2+1)x-2$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$(\ln 2+1)x-2=0$ $\therefore x=\frac{2}{\ln 2+1}=\frac{2}{\ln 2e}$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $\frac{2}{\ln 2e}$이다.

0633

답 ④

$y=e^{x+2}$에서 $x+2=\ln y$이므로 $x=\ln y-2$

즉, 두 곡선 $y=e^{x+2}$, $y=\ln x-2$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

한편, $f(x)=e^{x+2}$이라 하면 $f'(x)=e^{x+2}$

이때 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, e^{t+2})이라 하면 접선의 방정식은

$y-e^{t+2}=e^{t+2}(x-t)$에서

$y=e^{t+2}x+(1-t)e^{t+2}$ …… ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로 $(1-t)e^{t+2}=0$

$\therefore t=1$ ($\because e^{t+2}>0$)

따라서 $A(1, e^3)$, $B(e^3, 1)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(e^3-1)^2+(1-e^3)^2}=\sqrt{2}(e^3-1)$

0634

답 ①

$f(x)=e^{x-k}$이라 하면 $f'(x)=e^{x-k}$

점 $(1, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, e^{t-k})이라 하면 접선의 방정식은

$y-e^{t-k}=e^{t-k}(x-t)$에서

$y=e^{t-k}x+(1-t)e^{t-k}$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$e^{t-k}+(1-t)e^{t-k}=0$, $(2-t)e^{t-k}=0$

$\therefore t=2$ ($\because e^{t-k}>0$)

이를 ㉠에 대입하면 $y=e^{2-k}x-e^{2-k}$

이 직선이 점 $(4, 6)$을 지나므로

$4e^{2-k}-e^{2-k}=6$, $e^{2-k}=2$

$2-k=\ln 2$ $\therefore k=2-\ln 2$

0635

답 31

$f(x)=\sqrt{x^2-5}$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-5}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

점 $\left(0,\ -\frac{5}{2}\right)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t^2-5})$라 하면 접선의 방정식은

$y-\sqrt{t^2-5}=\frac{t}{\sqrt{t^2-5}}(x-t)$에서

$y=\frac{t}{\sqrt{t^2-5}}x-\frac{t^2}{\sqrt{t^2-5}}+\sqrt{t^2-5}$

$\therefore\ y=\frac{t}{\sqrt{t^2-5}}x-\frac{5}{\sqrt{t^2-5}}$ ····· ㉠

❶

직선 ㉠이 점 $\left(0,\ -\frac{5}{2}\right)$를 지나므로

$-\frac{5}{\sqrt{t^2-5}}=-\frac{5}{2},\ \sqrt{t^2-5}=2$

$t^2-5=4,\ t^2=9$

$\therefore\ t=-3$ 또는 $t=3$

❷

$t=-3$을 ㉠에 대입하면 $y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

이 직선의 x절편은 $-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}=0$에서 $x=-\frac{5}{3}$

$t=3$을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

이 직선의 x절편은 $\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}=0$에서 $x=\frac{5}{3}$

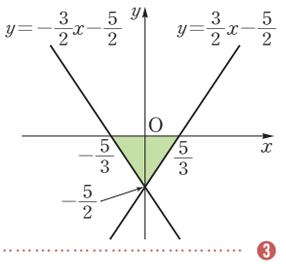
따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{5}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}\times\left|-\frac{5}{2}\right|$

$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{25}{6}$

이므로 $p=6,\ q=25$

$\therefore\ p+q=6+25=31$



❸

채점 기준	배점
❶ 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 방정식 세우기	30%
❷ 접선이 지나는 점의 좌표를 대입하여 t의 값 구하기	30%
❸ 도형의 넓이를 구하고 $p+q$의 값 구하기	40%

유형 05 접선의 개수

0636

답 ①

$f(x)=xe^x$이라 하면 $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

점 $(k,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ te^t)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-te^t=(t+1)e^t(x-t)$에서

$y=(t+1)e^tx-t^2e^t$

이 직선이 점 $(k,\ 0)$을 지나므로 $0=(t+1)e^tk-t^2e^t$

$t^2-kt-k=0$ $(\because\ e^t>0)$ ····· ㉠

이때 점 $(k,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 하므로

$D=(-k)^2-4\times1\times(-k)=0,\ k(k+4)=0$

$\therefore\ k=-4$ $(\because\ k\neq0)$

0637

답 2

$f(x)=\frac{2}{x^2+1}$라 하면 $f'(x)=-\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

점 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2}{t^2+1}\right)$라 하면 접선의 방정식은

$y-\frac{2}{t^2+1}=-\frac{4t}{(t^2+1)^2}(x-t)$에서

$y=-\frac{4t}{(t^2+1)^2}x+\frac{6t^2+2}{(t^2+1)^2}$

이 직선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $\frac{6t^2+2}{(t^2+1)^2}=1$

$(t^2+1)^2-6(t^2+1)+4=0$ ····· ㉠

이때 $t^2+1=X$라 하면 $X^2-6X+4=0$

$\therefore\ X=3+\sqrt{5}$ $(\because\ X\geq1)$

즉, $t^2+1=3+\sqrt{5},\ t^2=2+\sqrt{5}$

위의 식을 만족시키는 실수 t의 값이 2개이므로 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 구하는 접선의 개수는 2이다.

0638

답 3

$f(x)=(x+k)e^{-2x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-2x}-(x+k)\times2e^{-2x}=(1-2x-2k)e^{-2x}$

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ (t+k)e^{-2t})$이라 하면 접선의 방정식은

$y-(t+k)e^{-2t}=(1-2t-2k)e^{-2t}(x-t)$에서

$y=(1-2t-2k)e^{-2t}x+(2t^2+2kt+k)e^{-2t}$

이 직선이 원점을 지나므로

$(2t^2+2kt+k)e^{-2t}=0$

$\therefore\ 2t^2+2kt+k=0$ $(\because\ e^{-2t}>0)$ ····· ㉠

이때 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-2k>0,\ k(k-2)>0$

$\therefore\ k<0$ 또는 $k>2$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 3이다.

유형 06 공통인 접선

0639

답 ①

$f(x)=x\ln x,\ g(x)=a\sqrt{x}$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1,\ g'(x)=\frac{a}{2\sqrt{x}}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 접한다고 하면 이 점에서의 접선이 일치하므로

$f(t)=g(t)$에서 $t\ln t=a\sqrt{t}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\therefore a=\sqrt{t}\ln t$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\ln t+1=\dfrac{a}{2\sqrt{t}}$

$\ln t+1=\dfrac{\sqrt{t}\ln t}{2\sqrt{t}}$ ($\because$ ㉠), $\ln t+1=\dfrac{1}{2}\ln t$

$\ln t=-2$ $\therefore t=e^{-2}$

이를 ㉠에 대입하면

$a=\sqrt{e^{-2}}\ln e^{-2}=-2e^{-1}=-\dfrac{2}{e}$

0640

답 ①

$f(x)=\dfrac{k}{x^2}$, $g(x)=xe^x$이라 하면

$f'(x)=-\dfrac{2k}{x^3}$, $g'(x)=(x+1)e^x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 t라 하면 이 점에서의 접선이 서로 일치하므로

$f(t)=g(t)$에서 $\dfrac{k}{t^2}=te^t$

$\therefore k=t^3e^t$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-\dfrac{2k}{t^3}=(t+1)e^t$

$-\dfrac{2t^3e^t}{t^3}=(t+1)e^t$ ($\because$ ㉠)

$t+1=-2$ ($\because e^t>0$) $\therefore t=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$k=(-3)^3e^{-3}=-\dfrac{27}{e^3}$

0641

답 2

$f(x)=\dfrac{px^2+q}{x}$, $g(x)=\ln x$라 하면

$f'(x)=\dfrac{2px^2-px^2-q}{x^2}=\dfrac{px^2-q}{x^2}$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=e^3$인 점에서 만나고 이 점에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$f(e^3)=g(e^3)$에서 $\dfrac{pe^6+q}{e^3}=\ln e^3$

$\therefore pe^6+q=3e^3$ ····· ㉠

$f'(e^3)=g'(e^3)$에서 $\dfrac{pe^6-q}{e^6}=\dfrac{1}{e^3}$

$\therefore pe^6-q=e^3$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면 $2pe^6=4e^3$ $\therefore p=2e^{-3}$

$p=2e^{-3}$을 ㉠에 대입하면

$2e^{-3}\times e^6+q=3e^3$ $\therefore q=e^3$

$\therefore pq=2e^{-3}\times e^3=2$

0642

답 23

$f(x)=7\cos x$, $g(x)=a-\sin 2x$라 하면

$f'(x)=-7\sin x$, $g'(x)=-2\cos 2x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $7\cos t=a-\sin 2t$

$\therefore a=7\cos t+\sin 2t$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-7\sin t=-2\cos 2t$

$7\sin t=2\cos 2t$, $7\sin t=2-4\sin^2 t$

$4\sin^2 t+7\sin t-2=0$, $(4\sin t-1)(\sin t+2)=0$

$\sin t=\dfrac{1}{4}$ ($\because -1\le\sin t\le 1$)

$\therefore \cos t=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

이때 ㉠에서 $a=7\cos t+\sin 2t=7\cos t+2\sin t\cos t$이고, $a>0$이므로

$\cos t=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

즉, $\sin t=\dfrac{1}{4}$, $\cos t=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$를 대입하면

$a=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}+2\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{15\sqrt{15}}{8}$

따라서 $p=8$, $q=15$이므로

$p+q=8+15=23$

유형 07 역함수의 그래프의 접선의 방정식

0643

답 ③

$g(e^2)=k$라 하면 $f(k)=e^2$이므로

$(k-1)e^k=e^2$ $\therefore k=2$

$f(x)=(x-1)e^x$에서 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$이므로

$g'(e^2)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{2e^2}$

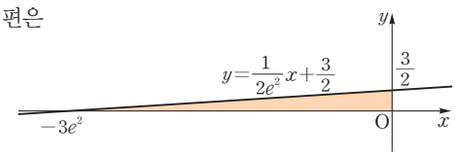
즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e^2, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=\dfrac{1}{2e^2}(x-e^2)$에서 $y=\dfrac{1}{2e^2}x+\dfrac{3}{2}$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$\dfrac{1}{2e^2}x+\dfrac{3}{2}=0$ $\therefore x=-3e^2$

따라서 접선의 x절편은 $-3e^2$, y절편은 $\dfrac{3}{2}$이므로 구하는 도형의 넓이는



$\dfrac{1}{2}\times|-3e^2|\times\left|\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{9}{4}e^2$

0644

답 ③

$g(4)=k$에서 $f(k)=4$이므로

$2\sin k+3=4$, $\sin k=\dfrac{1}{2}$

$\therefore k=\dfrac{\pi}{6}$ $\left(\because 0\le k\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f(x)=2\sin x+3$에서 $f'(x)=2\cos x$이므로

$g'(4)=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$에서 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}$

즉, $k=\frac{\pi}{6}$, $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b=-\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}$이므로

$k+a-b=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

0645

답 2

$f(x)=\frac{x+\ln x}{x}=1+\frac{\ln x}{x}$에서

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 역함수 관계이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접하므로 접점 (a, b)에서의 접선은 직선 $y=x$이다.

즉, 점 (a, b)가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $a=b$ ❶

$f(a)=a$에서 $1+\frac{\ln a}{a}=a$

$\therefore \ln a=a(a-1)$ ····· ㉠

$f'(a)=1$에서 $\frac{1-\ln a}{a^2}=1$

$1-a(a-1)=a^2$ ($\because$ ㉠)

$1-a^2+a=a^2$, $2a^2-a-1=0$ ❷

$(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

이때 $a>0$이므로 $a=1$, $b=1$

$\therefore a+b=1+1=2$ ❸

채점 기준	배점
❶ a와 b 사이의 관계식 구하기	40%
❷ a에 대한 이차방정식 세우기	30%
❸ $a+b$의 값 구하기	30%

0646

답 8

조건 (나)의 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2}{\sin 2x}=\frac{1}{4}$에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+2\}=0$이므로 $f(0)=-2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\sin 2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=f'(0)\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

이므로 $f'(0)=\frac{1}{2}$

이때 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$g(-2)=0$, $g'(-2)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-2, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=2(x+2)$ $\therefore y=2x+4$

즉, $m=2$, $n=4$이므로 $mn=2\times 4=8$

유형 08 매개변수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

0647

답 ②

$x=\theta+\sin\theta$, $y=\theta-\cos\theta$를 각각 θ에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{d\theta}=1+\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=1+\sin\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 $x=\frac{\pi}{2}+1$, $y=\frac{\pi}{2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1+1}{1}=2$

이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{\pi}{2}=2\left(x-\frac{\pi}{2}-1\right)$ $\therefore y=2x-\frac{\pi}{2}-2$

따라서 $a=2$, $b=-\frac{\pi}{2}-2$이므로

$a+b=2+\left(-\frac{\pi}{2}-2\right)=-\frac{\pi}{2}$

0648

답 ②

$x=e^t+2t$, $y=e^{-t}+3t$를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=e^t+2$, $\frac{dy}{dt}=-e^{-t}+3$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-e^{-t}+3}{e^t+2}$

$t=0$일 때 $x=e^0=1$, $y=e^0=1$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-e^0+3}{e^0+2}=\frac{2}{3}$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=\frac{2}{3}(x-1)$ $\therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

이 직선이 점 $(10, a)$를 지나므로

$a=\frac{2}{3}\times 10+\frac{1}{3}=\frac{21}{3}=7$

0649

답 -1

$x=2t^2-2$, $y=2t^3+1$을 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=4t$, $\frac{dy}{dt}=6t^2$이므로

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{6t^2}{4t}=\dfrac{3}{2}t$ (단, $t\neq0$)

❶

$t=a$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 3이므로

$\dfrac{3}{2}a=3$에서 $a=2$

❷

즉, $t=2$일 때

$x=6$, $y=17$이므로 접선의 방정식은

$y-17=3(x-6)$ $\therefore y=3x-1$

따라서 구하는 접선의 y절편은 -1이다.

❸

채점 기준	배점
❶ $\dfrac{dy}{dx}$를 t에 대한 식으로 나타내기	40%
❷ 접선의 기울기가 3이 되도록 하는 a의 값 구하기	30%
❸ 접선의 방정식을 구하고 이를 이용하여 y절편 구하기	30%

0650

답 ④

$x=e^t+t\ln t$, $y=e^{3t}-3t$를 각각 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dt}=e^t+\ln t+1$, $\dfrac{dy}{dt}=3e^{3t}-3$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{3e^{3t}-3}{e^t+\ln t+1}$

$t=1$일 때 $x=e$, $y=e^3-3$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3e^3-3}{e+1}$

이므로 접선의 방정식은

$y-(e^3-3)=\dfrac{3e^3-3}{e+1}(x-e)$

$\therefore y=\dfrac{3e^3-3}{e+1}x-\dfrac{(3e^3-3)e}{e+1}+e^3-3$

따라서 $a=\dfrac{3e^3-3}{e+1}$, $b=-\dfrac{(3e^3-3)e}{e+1}+e^3-3$이므로

$a-b=\dfrac{3e^3-3}{e+1}+\dfrac{(3e^3-3)e}{e+1}-e^3+3$

$=\dfrac{(3e^3-3)(1+e)}{e+1}-e^3+3$

$=3e^3-3-e^3+3=2e^3$

0651

답 ②

$x=2\sin t$, $y=\cos t$를 각각 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dt}=2\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=-\sin t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{-\sin t}{2\cos t}=-\dfrac{1}{2}\tan t$ (단, $\cos t\neq0$)

점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이므로

$-\dfrac{1}{2}\tan t=-\dfrac{1}{2}$, $\tan t=1$

이때 점 $(a,\ b)$는 제1사분면 위의 점이므로 $t=\dfrac{\pi}{4}$

즉, $t=\dfrac{\pi}{4}$일 때

$a=2\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$, $b=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

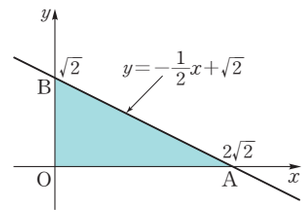
점 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{2}(x-\sqrt{2})$ $\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{2}$

따라서 $A(2\sqrt{2},\ 0)$, $B(0,\ \sqrt{2})$이므로 구하는 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}$

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$



유형 09 음함수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

0652

답 ③

$x^3-y^3-4xy-8=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3y^2\times\dfrac{dy}{dx}-4y-4x\times\dfrac{dy}{dx}=0$

$(4x+3y^2)\times\dfrac{dy}{dx}=3x^2-4y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-4y}{4x+3y^2}$ (단, $4x+3y^2\neq0$)

주어진 곡선 위의 점 $(0,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{3\times0^2-4\times(-2)}{4\times0+3\times(-2)^2}=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-(-2)=\dfrac{2}{3}(x-0)$ $\therefore y=\dfrac{2}{3}x-2$

따라서 구하는 접선의 x절편은

$\dfrac{2}{3}x-2=0$에서 $x=3$

0653

답 ⑤

$e^y\ln x=2y+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^y\times\ln x\times\dfrac{dy}{dx}+e^y\times\dfrac{1}{x}=2\times\dfrac{dy}{dx}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^y}{x(e^y\ln x-2)}$ (단, $x(e^y\ln x-2)\neq0$)

주어진 곡선 위의 점 $(e,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$-\dfrac{1}{e(1-2)}=\dfrac{1}{e}$이므로 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{e}(x-e)$ $\therefore y=\dfrac{1}{e}x-1$

따라서 $a=\dfrac{1}{e}$, $b=-1$이므로

$ab=-\dfrac{1}{e}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0654

답 14

곡선 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=6$이 점 $(p, 16)$을 지나므로

$\sqrt{p}+\sqrt{16}=6$, $\sqrt{p}=2$ $\therefore p=4$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=6$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\times\frac{dy}{dx}=0$ $\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (단, $x\neq0$)

주어진 곡선 위의 점 $(4, 16)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}=-2$이므로 접선의 방정식은

$y-16=-2(x-4)$ $\therefore y=-2x+24$

이 직선이 점 $(7, q)$를 지나므로

$q=-2\times7+24=10$

$\therefore p+q=4+10=14$

0655

답 41

$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{9}{2}$에서 $2x^3+2y^3-9xy=0$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^2+6y^2\times\frac{dy}{dx}-9y-9x\times\frac{dy}{dx}=0$

$(9x-6y^2)\times\frac{dy}{dx}=6x^2-9y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-9y}{9x-6y^2}=\frac{2x^2-3y}{3x-2y^2}$ (단, $3x-2y^2\neq0$)

주어진 곡선 위의 점 P$(2, 1)$에서의 접선 l_1의 기울기는

$\frac{2\times2^2-3\times1}{3\times2-2\times1^2}=\frac{5}{4}$

이므로 직선 l_1의 방정식은

$y-1=\frac{5}{4}(x-2)$ $\therefore y=\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}$

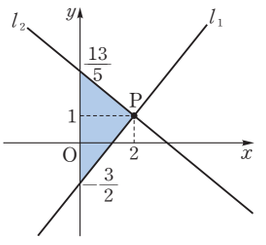
또한 직선 l_1에 수직인 직선 l_2의 기울기는 $-\frac{4}{5}$이므로 직선 l_2의 방정식은

$y-1=-\frac{4}{5}(x-2)$ $\therefore y=-\frac{4}{5}x+\frac{13}{5}$

두 직선 l_1, l_2가 y축과 만나는 점의 좌표가 각각 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(0, \frac{13}{5}\right)$이므로 구하는 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{13}{5}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\times2=\frac{41}{10}$

$\therefore 10S=41$



0656

답 1

$x^2+2ye^x-y^2=-n^2+2n$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2e^x\times\frac{dy}{dx}+2ye^x-2y\times\frac{dy}{dx}=0$

$(2e^x-2y)\times\frac{dy}{dx}=-(2x+2ye^x)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+2ye^x}{2e^x-2y}=-\frac{x+ye^x}{e^x-y}$ (단, $e^x-y\neq0$)

❶

주어진 곡선 위의 점 $(0, n)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{0+n\times e^0}{e^0-n}=-\frac{n}{1-n}=\frac{n}{n-1}$이므로 접선의 방정식은

$y=\frac{n}{n-1}x+n$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$\frac{n}{n-1}x+n=0$에서 $x=1-n$

$\therefore f(n)=1-n$

❷

$\lim_{n\to\infty}\{1-f(n)\}\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}$

이때 $\frac{1}{n}=h$라 하면 $n\to\infty$일 때 $h\to0+$이므로

$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=\lim_{h\to0+}\frac{\sin h}{h}=1$

❸

채점 기준	배점
❶ 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 구하기	30%
❷ 점 $(0, n)$에서의 접선의 x절편 $f(n)$ 구하기	40%
❸ $f(n)$의 식을 이용하여 주어진 극한값 구하기	30%

유형 10 접선의 방정식의 활용

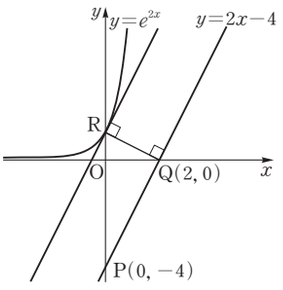
0657

답 ④

직선 PQ의 방정식은

$y=\frac{-4-0}{0-2}x-4$, 즉 $y=2x-4$

이므로 오른쪽 그림과 같이 점 R가 곡선 $y=e^{2x}$에 접하는 기울기가 2인 직선의 접점일 때, 삼각형 PQR의 높이가 최소가 되어 넓이가 최소가 된다.



$y=e^{2x}$에서 $y'=2e^{2x}$이므로

$2e^{2x}=2$에서 $x=0$, $y=e^0=1$

즉, 점 R$(0, 1)$과 직선 $y=2x-4$, 즉 $2x-y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

이때 $\overline{PQ}=\sqrt{(0-2)^2+(-4-0)^2}=2\sqrt{5}$이므로

구하는 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$

0658

답 ③

삼각형 PQR의 넓이는 점 R에서의 접선이 직선 PQ와 평행할 때 최대가 된다.

$f(x)=2\ln x$라 하면 $f'(x)=\frac{2}{x}$이므로

점 R에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{2}{t}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

두 점 $P(1, 0)$, $Q(e, 2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2}{e-1}$이므로

$\frac{2}{t}=\frac{2}{e-1}$ $\therefore t=e-1$

0659

답 4

$y=e^{x-3}$에서 $x-3=\ln y$

$x=\ln y+3$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\ln x+3$

즉, 두 함수 $y=\ln x+3$, $y=e^{x-3}$은 서로 역함수 관계이므로 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 직선 $y=-x+k$는 직선 $y=x$와 수직이므로 직선 $y=-x+k$가 두 곡선 $y=\ln x+3$, $y=e^{x-3}$과 각각 만나는 두 점 사이의 거리가 최대가 되려면 이 두 점에서의 각 곡선의 접선의 기울기가 1이어야 한다.

$y=e^{x-3}$에서 $y'=e^{x-3}$이므로 $e^{x-3}=1$에서 $x=3$

따라서 직선 $y=-x+k$와 곡선 $y=e^{x-3}$의 교점의 좌표는 $(3, 1)$

직선 $y=-x+k$가 점 $(3, 1)$을 지나므로

$1=-3+k$ $\therefore k=4$

Bible Says 역함수 구하기

함수 $y=f(x)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

❶ 주어진 함수 $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.

❷ $y=f(x)$를 x에 대하여 정리한 후, $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.

❸ x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

0660

답 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$

$f(x)=\sin x$라 하면 $f'(x)=\cos x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, \sin t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\sin t=\cos t(x-t)$에서

$y=x\cos t-t\cos t+\sin t$

$y=0$일 때 $x\cos t=t\cos t-\sin t$에서

$x=t-\tan t$ $\therefore A(t-\tan t, 0)$ ❶

$C(a, 0)$이라 하면 직선 PC의 기울기는 $\frac{\sin t}{t-a}$이고, 직선 PA의 기울기는 $\cos t$이므로 $\frac{\sin t}{t-a}\times\cos t=-1$에서

$a=t+\sin t\cos t$ $\therefore C(t+\sin t\cos t, 0)$

$\overline{BC}=\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$이고, $0<2t<\pi$이므로

$\overline{BC}$는 $2t=\frac{\pi}{2}$, 즉 $t=\frac{\pi}{4}$일 때 최대가 된다. ❷

이때 $\overline{AC}=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{3}{2}$,

$\overline{PB}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 구하는 삼각형 PAC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$ ❸

채점 기준	배점
❶ 점 A의 좌표를 t로 나타내기	30%
❷ $\overline{BC}$가 최대가 되도록 하는 t의 값 구하기	40%
❸ 삼각형 PAC의 넓이 구하기	30%

유형 11 함수의 증가와 감소

0661

답 ②

$f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$이라 하면

$f'(x)=\frac{x^2+3-(x-1)\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$

$=\frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 3]$에서 증가하므로 구하는 x의 값의 범위는

$-1\le x\le 3$

0662

답 ⑤

$f(x)=x^2-3x-\ln x^2$이라 하면 진수의 조건에 의하여 $x\neq 0$이고,

$f'(x)=2x-3-\frac{2x}{x^2}=\frac{2x^2-3x-2}{x}=\frac{(2x+1)(x-2)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, $(0, 2]$에서 감소하므로 감소하는 구간에 속하는 x의 값이 아닌 것은 ⑤이다.

0663

답 ④

$f(x)=x+2\cos x$에서

$f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$에서 감소하므로

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

0664

답 2

$f(x)=\frac{e^x}{2x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{e^x(2x^2+1)-4xe^x}{(2x^2+1)^2}=\frac{(2x^2-4x+1)e^x}{(2x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $2x^2-4x+1=0$ ($\because e^x>0$)

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$이므로 α, β는 이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{4}{2}=2$

유형 12 실수 전체의 집합에서 함수가 증가 또는 감소할 조건

0665

답 1

$f(x)=x-\ln(x^2+a)$에서 진수의 조건에 의하여 $x^2+a>0$

위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a>0$ ····· ㉠

$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+a}=\frac{x^2-2x+a}{x^2+a}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로

$x^2-2x+a\ge0$ ($\because x^2+a>0$)

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\le0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a\le0$에서 $a\ge1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge1$

따라서 구하는 양수 a의 최솟값은 1이다.

0666

답 ①

$f(x)=(x^2+2ax+11)e^x$에서

$f'(x)=(2x+2a)e^x+(x^2+2ax+11)e^x$

$=\{x^2+2(a+1)x+2a+11\}e^x$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로

$x^2+2(a+1)x+2a+11\ge0$ ($\because e^x>0$)

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+2a+11=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\le0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(2a+11)\le0$에서 $a^2-10\le0$

$\therefore -\sqrt{10}\le a\le\sqrt{10}$

따라서 구하는 자연수 a의 최댓값은 3이다.

0667

답 5

$f(x)=a\cos x-2x$에서 $f'(x)=-a\sin x-2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 하므로

$a\sin x\ge-2$ ····· ㉠

이때 $-1\le\sin x\le1$에서 $-|a|\le a\sin x\le|a|$이므로

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$|a|\le2$ $\therefore -2\le a\le2$

따라서 구하는 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

0668

답 3

$f(x)=(x+a)e^{x^2}$에서

$f'(x)=e^{x^2}+(x+a)e^{x^2}\times2x=(2x^2+2ax+1)e^{x^2}$

함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$ 또는 $f'(x)\le0$이어야 하는데

$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$이므로 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

$(2x^2+2ax+1)e^{x^2}\ge0$에서 $2x^2+2ax+1\ge0$ ($\because e^{x^2}>0$)

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $2x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\le0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-2\le0$ $\therefore -\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$

따라서 구하는 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다.

유형 13 주어진 구간에서 함수가 증가 또는 감소할 조건

0669

답 ①

$f(x)=(ax^2-3)e^x$에서

$f'(x)=2axe^x+(ax^2-3)e^x=(ax^2+2ax-3)e^x$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 1)$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le0$이어야 하므로

$ax^2+2ax-3\le0$ ($\because e^x>0$)

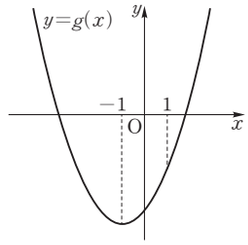
이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때 $g(x)=ax^2+2ax-3$ $(a>0)$이라 하면

$g(x)=a(x+1)^2-a-3$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $g(-1)\le 0$에서 $-a-3\le 0$

$\therefore a\ge -3$

(ii) $g(1)\le 0$에서 $4a-a-3\le 0$

$\therefore a\le 1$

(i), (ii)에서 $-3\le a\le 1$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\le 1$

0670

답 6

$f(x)=\dfrac{x^2+3x+a}{x^2+2}$에서

$f'(x)=\dfrac{(2x+3)(x^2+2)-(x^2+3x+a)\times 2x}{(x^2+2)^2}$

$=\dfrac{-3x^2+2(2-a)x+6}{(x^2+2)^2}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 1)$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$-3x^2+2(2-a)x+6\ge 0$ ($\because x^2+2>0$)

이때 $g(x)=-3x^2+2(2-a)x+6$이라 하면

$g(-1)=-3-2(2-a)+6\ge 0$에서

$-1+2a\ge 0$ $\therefore a\ge \dfrac{1}{2}$ ····· ㉠

$g(1)=-3+2(2-a)+6\ge 0$에서

$7-2a\ge 0$ $\therefore a\le \dfrac{7}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{2}\le a\le \dfrac{7}{2}$

따라서 정수 a는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$

0671

답 $-7e^3$

$f(x)=x^2\ln x+ax$에서 진수의 조건에 의하여 $x>0$이고

$f'(x)=2x\ln x+x+a$

····· ❶

함수 $f(x)$가 구간 (e, e^3)에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

····· ❷

$2x\ln x+x+a\le 0$에서 $g(x)=2x\ln x+x+a$라 하면

$g'(x)=2\ln x+3$

이때 구간 (e, e^3)에서 $g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 이 구간에서 증가한다.

즉, 구간 (e, e^3)에서 $g(x)\le 0$이려면 $g(e^3)\le 0$이어야 하므로

$2e^3\ln e^3+e^3+a\le 0$ $\therefore a\le -7e^3$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 $-7e^3$이다.

····· ❸

채점 기준	배점
❶ $f'(x)$ 구하기	20%
❷ 구간 (e, e^3)에서 함수 $f(x)$가 감소할 조건 구하기	30%
❸ 실수 a의 최댓값 구하기	50%

0672

답 -2

$f(x)=\dfrac{a+2\sin x}{x^2}$에서

$f'(x)=\dfrac{2x^2\cos x-(a+2\sin x)\times 2x}{x^4}$

$=\dfrac{2x(x\cos x-a-2\sin x)}{x^4}$

함수 $f(x)$가 $0<x\le \dfrac{\pi}{2}$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$x\cos x-a-2\sin x\ge 0$ $\left(\because 0<x\le \dfrac{\pi}{2}\right)$

$x\cos x-2\sin x\ge a$

$g(x)=x\cos x-2\sin x$라 하면

$g'(x)=\cos x-x\sin x-2\cos x=-x\sin x-\cos x$

$0<x\le \dfrac{\pi}{2}$에서 $g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 이 구간에서 감소한다.

즉, $0<x\le \dfrac{\pi}{2}$에서 $g(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 최솟값을 가지므로

$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\ge a$에서 $\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}-2\sin\dfrac{\pi}{2}\ge a$ $\therefore a\le -2$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 -2이다.

유형 14 유리함수의 극대 · 극소

0673

답 ⑤

$f(x)=ax+1+\dfrac{b}{x-2}$에서 $f'(x)=a-\dfrac{b}{(x-2)^2}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값 -1을 가지므로

$f(0)=-1$에서 $1-\dfrac{b}{2}=-1$

$\therefore b=4$

$f'(0)=0$에서 $a-\dfrac{b}{4}=0$

$\therefore a=1$ ($\because b=4$)

$\therefore f(x)=x+1+\dfrac{4}{x-2}$, $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $(x-2)^2=4$

$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	0	⋯	(2)	⋯	4	⋯
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$f(4)=4+1+\frac{4}{4-2}=7$

0674

답 ⑤

$f(x)=x+\frac{1}{x}$에서 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x^2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로

$a=f(-1)=-1+\frac{1}{-1}=-2$

$b=f(1)=1+\frac{1}{1}=2$

$\therefore a-b=-2-2=-4$

0675

답 ③

$f(x)=\frac{x-1}{x^2-x+1}$에서

$f'(x)=\frac{1\times(x^2-x+1)-(x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$=\frac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2}=\frac{-x(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대, $x=0$에서 극소이므로

극댓값은 $f(2)=\frac{2-1}{4-2+1}=\frac{1}{3}$

극솟값은 $f(0)=\frac{0-1}{0-0+1}=-1$

따라서 구하는 극댓값과 극솟값의 합은

$\frac{1}{3}+(-1)=-\frac{2}{3}$

0676

답 -20

$f(x)=\frac{ax^2+bx+6}{x+3}$에서

$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x+3)-(ax^2+bx+6)}{(x+3)^2}$

$=\frac{ax^2+6ax+3b-6}{(x+3)^2}$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값 10을 가지므로

$f(-2)=10$에서 $4a-2b+6=10$

$\therefore 2a-b=2$ ····· ㉠

$f'(-2)=0$에서 $4a-12a+3b-6=0$

$\therefore 8a-3b=-6$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=-14$

$\therefore a+b=-6+(-14)=-20$

유형 15 무리함수의 극대 · 극소

0677

답 ④

$f(x)=1+x\sqrt{4-x^2}$에서 $4-x^2\geq0$이므로

$-2\leq x\leq2$

$f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $x^2=2$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$-2\leq x\leq2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극대, $x=-\sqrt{2}$에서 극소이므로

$M=f(\sqrt{2})=1+\sqrt{2}\times\sqrt{4-2}=3$

$m=f(-\sqrt{2})=1-\sqrt{2}\times\sqrt{4-2}=-1$

$\therefore M^2+m^2=3^2+(-1)^2=10$

0678

답 5

$f(x)=x+1+\frac{2}{\sqrt{x}}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1-\frac{1}{x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$에서 $x\sqrt{x}=1$

$(\sqrt{x})^3=1$ $\therefore x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값

$f(1)=1+1+2=4$

를 가지므로 $a=1$, $b=4$

$\therefore a+b=1+4=5$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0679

답 4

$f(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}$에서 $x+3\geq 0$, $5-x\geq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 5$

❶

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}=\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+3}}{2\sqrt{(x+3)(5-x)}}$

$f'(x)=0$에서 $5-x=x+3$

$2x=2 \quad \therefore x=1$

❷

$-3\leq x\leq 5$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$f(1)=\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$

❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$의 정의역 구하기	20%
❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 구하기	40%
❸ 함수 $f(x)$의 극댓값 구하기	40%

0680

답 ④

$f(x)=\dfrac{x-1}{x\sqrt{x+2}}=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$에서

$x+2>0$이고 $x\neq 0$이므로

$-2<x<0$ 또는 $x>0$

$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{x-1}{x}\times\left\{-\dfrac{1}{2(x+2)\sqrt{x+2}}\right\}$

$=\dfrac{1}{x^2\sqrt{x+2}}-\dfrac{x-1}{2x(x+2)\sqrt{x+2}}$

$=\dfrac{2(x+2)-x(x-1)}{2x^2(x+2)\sqrt{x+2}}$

$=\dfrac{-x^2+3x+4}{2x^2(x+2)\sqrt{x+2}}=\dfrac{-(x+1)(x-4)}{2x^2(x+2)\sqrt{x+2}}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=4$

$-2<x<0$ 또는 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-2)	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극대, $x=-1$에서 극소이므로

$M=f(4)=\dfrac{4-1}{4\sqrt{4+2}}=\dfrac{3}{4\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$

$m=f(-1)=\dfrac{-1-1}{-\sqrt{-1+2}}=2$

$\therefore Mm=\dfrac{\sqrt{6}}{8}\times 2=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

유형 16 지수함수의 극대 · 극소

0681

답 ⑤

$f(x)=(x^2-x+1)e^x$에서

$f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x+1)e^x=(x^2+x)e^x$

$=x(x+1)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ ($\because e^x>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=0$에서 극소이므로

극댓값은 $f(-1)=(1+1+1)e^{-1}=3e^{-1}$

극솟값은 $f(0)=e^0=1$

따라서 구하는 모든 극값의 합은

$3e^{-1}+1=\dfrac{e+3}{e}$

0682

답 ④

$f(x)=(x^2-3)e^{-x}$에서

$f'(x)=2xe^{-x}-(x^2-3)e^{-x}=-(x^2-2x-3)e^{-x}$

$=-(x+1)(x-3)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$ ($\because e^{-x}>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대, $x=-1$에서 극소이므로

$a=f(3)=6e^{-3}$, $b=f(-1)=-2e$

$\therefore a\times b=6e^{-3}\times(-2e)=-\dfrac{12}{e^2}$

0683

답 1

$f(x)=xe^{2x}-(2x+a)e^x$에서

$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-2e^x-(2x+a)e^x$

$=(2x+1)e^{2x}-(2x+a+2)e^x$

함수 $f(x)$가 $x=-\dfrac{1}{2}$에서 극댓값을 가지므로

$f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$에서 $(-1+1)e^{-1}-(-1+a+2)e^{-\frac{1}{2}}=0$

$(a+1)e^{-\frac{1}{2}}=0 \quad \therefore a=-1$

❶

즉, $f(x)=xe^{2x}-(2x-1)e^x$이므로

$f'(x)=(2x+1)e^{2x}-(2x+1)e^x$

$=(2x+1)(e^{2x}-e^x)=(2x+1)e^x(e^x-1)$

$f'(x)=0$에서 $2x=-1$ 또는 $e^x=1$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=0$

❷

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$f(0)=0\times e^0-(0-1)\times e^0=1$ ❸

채점 기준	배점
❶ 극댓값을 이용하여 a의 값 구하기	40%
❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 구하기	30%
❸ 극솟값 구하기	30%

0684

답 -6

$f(x)=e^{2x}+ae^x+2x$에서

$f'(x)=2e^{2x}+ae^x+2$

함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 가지므로 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

방정식 $2e^{2x}+ae^x+2=0$의 두 실근을 α, β라 하자.

$e^x=t$ $(t>0)$으로 놓으면 이차방정식 $2t^2+at+2=0$의 두 근은 e^α, e^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$e^\alpha+e^\beta=-\frac{a}{2}$

$e^\alpha\times e^\beta=1$

즉, $e^{\alpha+\beta}=1$이므로 $\alpha+\beta=0$

한편, 극댓값과 극솟값의 합이 -11이므로

$f(\alpha)+f(\beta)=-11$에서

$(e^{2\alpha}+ae^\alpha+2\alpha)+(e^{2\beta}+ae^\beta+2\beta)=-11$

$(e^{2\alpha}+e^{2\beta})+a(e^\alpha+e^\beta)+2(\alpha+\beta)=-11$

$(e^\alpha+e^\beta)^2-2e^{\alpha+\beta}+a(e^\alpha+e^\beta)+2(\alpha+\beta)=-11$

$\left(-\frac{a}{2}\right)^2-2\times1+a\times\left(-\frac{a}{2}\right)+2\times0=-11$

$-\frac{a^2}{4}=-9$, $a^2=36$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=6$

그런데 $e^\alpha+e^\beta>0$에서 $-\frac{a}{2}>0$, 즉 $a<0$이므로

$a=-6$

0685

답 ①

$f(x)=(x^2+x)e^x$에서

$f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x)e^x=(x^2+3x+1)e^x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, t^2e^t+te^t)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^2e^t+te^t)=(t^2+3t+1)e^t(x-t)$에서

$y=(t^2+3t+1)e^tx-(t^3+2t^2)e^t$

이 직선의 y절편은 $(-t^3-2t^2)e^t$이므로

$g(t)=(-t^3-2t^2)e^t$

$g'(t)=(-3t^2-4t)e^t+(-t^3-2t^2)e^t=(-t^3-5t^2-4t)e^t$

$=-t(t+1)(t+4)e^t$

$g'(t)=0$에서 $t=-4$ 또는 $t=-1$ 또는 $t=0$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	−	0	+	0	−
$g(t)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(t)$는 $t=-1$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$g(-1)=\{-(-1)^3-2\times(-1)^2\}e^{-1}=-e^{-1}$

유형 17 로그함수의 극대 · 극소

0686

답 ③

$f(x)=\frac{(e\ln x)^2}{x}$에서 로그의 진수의 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=\frac{2e^2\ln x\times\frac{1}{x}\times x-e^2(\ln x)^2}{x^2}=\frac{e^2\ln x(2-\ln x)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=0$ 또는 $\ln x=2$

$\therefore x=1$ 또는 $x=e^2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+	0	−
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로

극댓값은 $f(e^2)=\frac{(e\ln e^2)^2}{e^2}=\frac{e^2(\ln e^2)^2}{e^2}=4$

극솟값은 $f(1)=\frac{(e\ln1)^2}{1}=0$

따라서 구하는 모든 극값의 합은

$4+0=4$

0687

답 ④

$f(x)=\frac{x}{\ln x}$에서 로그의 진수의 조건에 의하여

$x>0$, $x\neq1$ ····· ㉠

$f'(x)=\frac{\ln x-x\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$

$\therefore x=e$

㉠의 구간에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		−		−	0	+
$f(x)$		↘		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$f(e)=\frac{e}{\ln e}=e$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0688

답 ④

$f(x)=ax\ln x$에서 로그의 진수의 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=a\ln x+ax\times\frac{1}{x}=a(\ln x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-1$ ($\because a\neq0$) $\therefore x=e^{-1}$

$a<0$이면 함수 $f(x)$는

$x<e^{-1}$에서 $f'(x)>0$, $x>e^{-1}$에서 $f'(x)<0$이므로

$x=e^{-1}$에서 극대이고, 극솟값을 갖지 않으므로 모순이다.

$a>0$이면 함수 $f(x)$는

$x<e^{-1}$에서 $f'(x)<0$, $x>e^{-1}$에서 $f'(x)>0$이므로

$x=e^{-1}$에서 극소이고, 그 값이 -1이므로

$f(e^{-1})=-1$에서 $ae^{-1}\ln e^{-1}=-1$

$-\frac{1}{e}a=-1$ $\therefore a=e$

0689

답 10

$f(x)=\ln x^4+\frac{a}{x}+bx$에서 로그의 진수의 조건에 의하여 $x\neq0$

$f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{a}{x^2}+b=\frac{bx^2+4x-a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(1)=2$에서 $a+b=2$ ····· ㉠

$f'(1)=0$에서 $b+4-a=0$

$\therefore a-b=4$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore a^2+b^2=3^2+(-1)^2=10$

유형 18 삼각함수의 극대 · 극소

0690

답 ④

$f(x)=a\cos x+b\sin x+x$에서

$f'(x)=-a\sin x+b\cos x+1$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{3}$와 $x=\pi$에서 극값을 가지므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$에서 $-a\sin\frac{\pi}{3}+b\cos\frac{\pi}{3}+1=0$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b+1=0$

$\therefore \sqrt{3}a-b=2$ ····· ㉠

$f'(\pi)=0$에서 $-a\sin\pi+b\cos\pi+1=0$

$-b+1=0$ $\therefore b=1$

이를 ㉠에 대입하면 $a=\sqrt{3}$

$\therefore f(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x+x$, $f'(x)=-\sqrt{3}\sin x+\cos x+1$

구간 $(0, 2\pi)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	···	$\frac{\pi}{3}$	···	π	···	(2π)
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극대, $x=\pi$에서 극소이므로

$M=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$

$m=f(\pi)=-\sqrt{3}+\pi$

$\therefore 3M-m=3\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)-(-\sqrt{3}+\pi)=4\sqrt{3}$

0691

답 2π

$f(x)=x+2\sin x$에서 $f'(x)=1+2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ ($\because 0\leq x\leq2\pi$)

$0\leq x\leq2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	···	$\frac{2}{3}\pi$	···	$\frac{4}{3}\pi$	···	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 극대, $x=\frac{4}{3}\pi$에서 극소이므로

극댓값은 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi+2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

극솟값은 $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}\pi+2\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

따라서 구하는 극댓값과 극솟값의 합은

$\left(\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\right)+\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)=2\pi$

0692

답 ②

$f(x)=e^{-x}\sin x$에서

$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$=(\cos x-\sin x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$ ($\because e^{-x}>0$)

$\tan x=1$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ ($\because 0\leq x\leq2\pi$)

$0\leq x\leq2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	···	$\frac{\pi}{4}$	···	$\frac{5}{4}\pi$	···	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극대, $x=\frac{5}{4}\pi$에서 극소이므로

$M=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

$m=f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=e^{-\frac{5}{4}\pi}\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}$

$\therefore \frac{m}{M}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}}{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}=-e^{-\pi}=-\frac{1}{e^{\pi}}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0693

답 ③

$f(x)=a\sin^2 x\cos x$에서

$f'(x)=2a\sin x\cos^2 x-a\sin^3 x$

$=a\sin x(2\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=a\sin x(2-3\sin^2 x)$ ($\because \sin^2 x+\cos^2 x=1$)

이때 $0<x<\pi$에서 $\sin x>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $\sin^2 x=\frac{2}{3}$ ($\because a>0$)

$\therefore \sin x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ($\because 0<x<\pi$에서 $\sin x>0$)

구간 $(0, \pi)$에 속하는 α, β ($\alpha<\beta$)에 대하여

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}$이라 하면

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

곡선 $y=\sin x$는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다. ($\because a>0$)

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$의 극솟값이 $-\frac{2}{3}$이므로

$f(\beta)=-\frac{2}{3}$에서 $a\sin^2\beta\cos\beta=-\frac{2}{3}$

$a\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

$\therefore a=\sqrt{3}$

따라서 함수 $f(x)=\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(\alpha)=\sqrt{3}\sin^2\alpha\cos\alpha$

$=\sqrt{3}\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}$

유형 19 극값을 가질 조건 - 판별식을 이용하는 경우

0694

답 -3

$f(x)=\frac{x+a}{x^2-3x+2}$에서 $x^2-3x+2\neq0$이므로

$(x-1)(x-2)\neq0$

$\therefore x\neq1$, $x\neq2$

$f'(x)=\frac{x^2-3x+2-(x+a)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}=-\frac{x^2+2ax-2-3a}{(x^2-3x+2)^2}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$g(x)=x^2+2ax-2-3a$라 할 때, 이차방정식 $g(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖거나 이차방정식 $x^2-3x+2=0$과 일치해야 한다.

(i) 이차방정식 $g(x)=0$이 중근 또는 허근을 가질 때

판별식을 D라 하면 $D\leq0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-(-2-3a)\leq0$, $a^2+3a+2\leq0$

$(a+2)(a+1)\leq0$

$\therefore -2\leq a\leq-1$

(ii) 이차방정식 $g(x)=0$이 이차방정식 $x^2-3x+2=0$과 일치할 때

$2a=-3$, $-2-3a=2$

위의 두 식을 동시에 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $-2\leq a\leq-1$

따라서 정수 a는 -2, -1이므로 구하는 합은

$(-2)+(-1)=-3$

0695

답 3

$f(x)=(x^2+ax+3)e^x$에서

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+3)e^x=\{x^2+(a+2)x+a+3\}e^x$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식

$x^2+(a+2)x+a+3=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이어야 한다.

$D=(a+2)^2-4(a+3)>0$, $a^2-8>0$

$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})>0$

$\therefore a<-2\sqrt{2}$ 또는 $a>2\sqrt{2}$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 3이다.

0696

답 ②

$f(x)=\ln(x^2+1)-2ax$에서

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-2a=\frac{-2ax^2+2x-2a}{x^2+1}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$-2ax^2+2x-2a=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D\leq0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=1-(-2a)\times(-2a)\leq0$, $4a^2-1\geq0$

$(2a+1)(2a-1)\geq0$

$\therefore a\geq\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

따라서 구하는 양수 a의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

0697

답 ②

$f(x)=\sin^3 x-a\cos^2 x+a\sin x+a$에서

$\sin x=t$, $f(x)=g(t)$라 하면 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $-1<t<1$이고,

$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-t^2$이므로

$g(t)=t^3-a(1-t^2)+at+a$

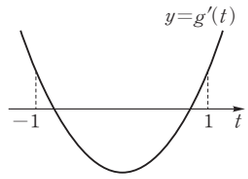
$=t^3+at^2+at$ ····· ㉠

$g'(t)=3t^2+2at+a$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

㉠이 $-1<t<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면
이차방정식 $g'(t)=0$이 이 구간에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
즉, 함수 $y=g'(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $g'(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0$, $a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$

(ii) 함수 $y=g'(t)$의 그래프의 축의 방정식은 $t=-\frac{a}{3}$이므로

$-1<-\frac{a}{3}<1$

$\therefore -3<a<3$

(iii) $g'(-1)=3-a>0$에서

$a<3$

(iv) $g'(1)=3+3a>0$에서

$a>-1$

(i)~(iv)에서 $-1<a<0$

유형 20 극값을 가질 조건 - 판별식을 이용하지 않는 경우

0698

답 ④

$f(x)=ax-2\sin x+1$에서 $f'(x)=a-2\cos x$
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여
$f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$이어야 한다. 즉,

$\cos x\ge\frac{a}{2}$ 또는 $\cos x\le\frac{a}{2}$ ····· ㉠

이때 $-1\le\cos x\le 1$이므로 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$\frac{a}{2}\le -1$ 또는 $\frac{a}{2}\ge 1$

$\therefore a\le -2$ 또는 $a\ge 2$

0699

답 3

$f(x)=(x^3+a)e^{-x}$에서
$f'(x)=3x^2e^{-x}-(x^3+a)e^{-x}=(-x^3+3x^2-a)e^{-x}$
함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식
$-x^3+3x^2-a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. ····· ❶

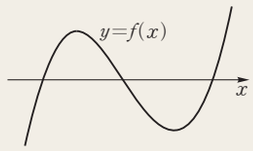
$g(x)=-x^3+3x^2-a$라 하면
$g'(x)=-3x^2+6x$
$g'(x)=0$에서 $-3x(x-2)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$
방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $g(0)g(2)<0$이어야 하므로
$-a(-8+12-a)<0$
$a(a-4)<0$
$\therefore 0<a<4$ ····· ❷

따라서 구하는 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다. ····· ❸

채점 기준	배점
❶ $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건 알기	30%
❷ a의 값의 범위 구하기	50%
❸ 정수 a의 개수 구하기	20%

Bible Says 삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, (극댓값)×(극솟값)<0이면 다음 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 삼차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



0700

답 ③

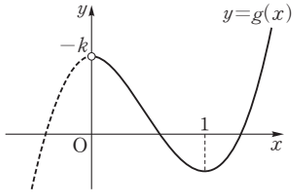
$f(x)=x^2-3x+\frac{k}{x}$에서

$f'(x)=2x-3-\frac{k}{x^2}=\frac{2x^3-3x^2-k}{x^2}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 $x>0$에서 방정식 $2x^3-3x^2-k=0$이 서로 다른 두 개 이상의 실근을 갖고 그 실근 x의 값의 좌우에서 $2x^3-3x^2-k$의 부호가 바뀌어야 한다.
$g(x)=2x^3-3x^2-k$라 하면
$g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$
$g'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)
$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	1	…
$g'(x)$		−	0	+
$g(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $x>0$에서 $g(x)$의 부호가 바뀌는 x의 값이 2개 존재하려면
$g(0)>0$, $g(1)<0$이어야 한다.
$g(0)>0$에서 $-k>0$
$\therefore k<0$ ····· ㉠
$g(1)<0$에서 $2-3-k<0$
$\therefore k>-1$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서
$-1<k<0$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART B 내신 잡는 종합 문제

0701

답 ①

$f(x)=\ln(x-3)+1$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x-3}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(4)=\frac{1}{4-3}=1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=1\times(x-4)$ $\therefore y=x-3$

따라서 $a=1$, $b=-3$이므로

$a+b=1+(-3)=-2$

0702

답 ①

$f(x)=\frac{x^2-6}{6x}-\frac{5}{6}\ln x=\frac{x}{6}-\frac{1}{x}-\frac{5}{6}\ln x$에서

$f'(x)=\frac{1}{6}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{6x}=\frac{x^2-5x+6}{6x^2}=\frac{(x-2)(x-3)}{6x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=3$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로

$M=f(2)=\frac{4-6}{12}-\frac{5}{6}\ln 2=-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\ln 2$

$m=f(3)=\frac{9-6}{18}-\frac{5}{6}\ln 3=\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\ln 3$

$\therefore M+m=\left(-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\ln 2\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\ln 3\right)$

$=-\frac{5}{6}(\ln 2+\ln 3)=-\frac{5}{6}\ln 6$

0703

답 ④

$f(x)=x^2-2a\ln x$에서 로그의 진수의 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=2x-\frac{2a}{x}=\frac{2x^2-2a}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x^2=a$

$\therefore x=\sqrt{a}$ $(\because x>0)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극솟값 0을 가지므로

$f(\sqrt{a})=0$에서 $(\sqrt{a})^2-2a\ln\sqrt{a}=0$

$2a\ln\sqrt{a}=a$, $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{a}=e^{\frac{1}{2}}$

$\therefore a=e$

0704

답 10

$f(x)=3x+\frac{2x}{x^2-x}$에서

$f'(x)=3+\frac{2(x^2-x)-2x(2x-1)}{(x^2-x)^2}$

$f'(2)=3+\frac{2\times(4-2)-4\times(4-1)}{(4-2)^2}=1$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 8)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-8=-(x-2)$ $\therefore y=-x+10$

즉, 구하는 직선의 y절편은 10이다.

0705

답 ④

$f(x)=ax+\ln(x^2+1)$에서

$f'(x)=a+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{ax^2+2x+a}{x^2+1}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$ax^2+2x+a\geq 0$ $(\because x^2+1>0)$

$\therefore a>0$ ····· ㉠

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=1-a^2\leq 0$, $(a+1)(a-1)\geq 0$

$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a\geq 1$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 1이다.

0706

답 ②

$f(x)=\tan(\pi x^2+ax)$에서

$f'(x)=(2\pi x+a)\sec^2(\pi x^2+ax)$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 극솟값을 가지므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서 $(\pi+a)\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)=0$

이때 $\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\neq 0$이므로 $a=-\pi$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값 k는

$k=f\left(\frac{1}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

0707

답 130

곡선 $3\sqrt{x}+\sqrt{y}=11$이 점 $(a, 4)$를 지나므로

$3\sqrt{a}+\sqrt{4}=11$, $3\sqrt{a}=11-2=9$ $\therefore a=9$

$3\sqrt{x}+\sqrt{y}=11$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\times\frac{dy}{dx}=0$ $\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (단, $x\neq 0$)

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

주어진 곡선 위의 점 $(9, 4)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{3\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=-2$

이므로 접선의 방정식은

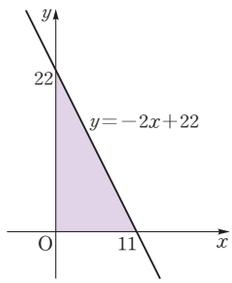
$y-4=-2(x-9)$ $\therefore y=-2x+22$

따라서 접선의 x절편은 11, y절편은 22

이므로 구하는 도형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times 11\times 22=121$

$\therefore a+S=9+121=130$



0708

답 ③

$f(x)=e^{x+1}(x^2+3x+1)$에서

$f'(x)=e^{x+1}(x^2+3x+1)+e^{x+1}(2x+3)$

$=e^{x+1}(x^2+5x+4)$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위는

$f'(x)\le 0$에서 $x^2+5x+4\le 0$ ($\because e^{x+1}>0$)

$(x+4)(x+1)\le 0$ $\therefore -4\le x\le -1$

함수 $f(x)$는 구간 $[-4, -1]$에서 감소하므로 $-4\le a<b\le -1$

따라서 $b-a\le -1-(-4)=3$이므로 $b-a$의 최댓값은 3이다.

0709

답 ③

$f(x)=\ln(4x+6)$, $g(x)=a-\ln x$라 하면

로그의 진수의 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=\frac{4}{4x+6}=\frac{2}{2x+3}$, $g'(x)=-\frac{1}{x}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 P의 x좌표를 p라 하면

$f(p)=g(p)$에서 $\ln(4p+6)=a-\ln p$ …… ㉠

두 곡선에 접하는 두 직선이 서로 수직이므로

$f'(p)\times g'(p)=-1$에서

$\frac{2}{2p+3}\times\left(-\frac{1}{p}\right)=-1$

$2p^2+3p-2=0$, $(p+2)(2p-1)=0$

$\therefore p=\frac{1}{2}$ ($\because p>0$) …… ㉡

㉠에서 $a=\ln\{p(4p+6)\}$이므로 ㉡을 대입하면

$a=\ln\{p(4p+6)\}=\ln\left\{\frac{1}{2}\times\left(4\times\frac{1}{2}+6\right)\right\}=\ln 4=2\ln 2$

0710

답 ④

$f(x)=\frac{a}{x+\sqrt{2-x}}$에서

$f'(x)=-\frac{a\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\right)}{(x+\sqrt{2-x})^2}=-\frac{a(2\sqrt{2-x}-1)}{2\sqrt{2-x}(x+\sqrt{2-x})^2}$

$f'(x)=0$에서 $2\sqrt{2-x}=1$ ($\because a>0$)

$2-x=\frac{1}{4}$ $\therefore x=\frac{7}{4}$

$a>0$이므로 $0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{7}{4}$	…	2
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{7}{4}$에서 극솟값 4를 가지므로

$f\left(\frac{7}{4}\right)=4$에서 $\frac{a}{\frac{7}{4}+\frac{1}{2}}=4$

$\frac{4}{9}a=4$ $\therefore a=9$

따라서 $f(x)=\frac{9}{x+\sqrt{2-x}}$이므로 $f(1)=\frac{9}{1+1}=\frac{9}{2}$

0711

답 ②

$f(x)=\ln(1+4x^2)+ax$에서

$f'(x)=\frac{8x}{1+4x^2}+a=\frac{4ax^2+8x+a}{1+4x^2}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $4ax^2+8x+a=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=4^2-4a\times a\le 0$

$16-4a^2\le 0$, $a^2-4\ge 0$

$(a+2)(a-2)\ge 0$ $\therefore a\ge 2$ ($\because a>0$)

따라서 구하는 양수 a의 최솟값은 2이다.

0712

답 ②

$f(x)=e^x$, $g(x)=2\sqrt{x-k}$라 하면

$f'(x)=e^x$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, e)$에서의 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1)$ $\therefore y=ex$

한편, $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-k}}$이므로 직선 $y=ex$가 곡선 $y=g(x)$와 접하는 점의 좌표를 (a, ea)라 하면

$g(a)=ea$에서 $2\sqrt{a-k}=ea$

$\therefore \sqrt{a-k}=\frac{ea}{2}$ …… ㉠

$g'(a)=e$에서 $\frac{1}{\sqrt{a-k}}=e$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{2}{ea}=e$ $\therefore a=\frac{2}{e^2}$

이를 ㉠에 대입하면 $\sqrt{\frac{2}{e^2}-k}=\frac{e}{2}\times\frac{2}{e^2}$

$\frac{2}{e^2}-k=\frac{1}{e^2}$ $\therefore k=\frac{1}{e^2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0713

답 ①

$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+a}$에서

$f'(x)=\dfrac{1\times(x^2+a)-(x+1)\times 2x}{(x^2+a)^2}=\dfrac{-x^2-2x+a}{(x^2+a)^2}$

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-3)=0$에서 $\dfrac{-(-3)^2-2\times(-3)+a}{(9+a)^2}=0$

$-9+6+a=0 \quad \therefore a=3$

$f'(x)=-\dfrac{x^2+2x-3}{(x^2+3)^2}=-\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-3	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$f(1)=\dfrac{1+1}{1+3}=\dfrac{1}{2}$

0714

답 1

$f(x)=e^{x-1}$이라 하면 $f'(x)=e^{x-1}$

점 $(n\ln 2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ e^{t-1})$이라 하면 접선의 방정식은

$y-e^{t-1}=e^{t-1}(x-t) \quad \therefore y=e^{t-1}(x-t+1)$

이 직선이 점 $(n\ln 2,\ 0)$을 지나므로

$0=e^{t-1}(n\ln 2-t+1)$

$n\ln 2-t+1=0$ ($\because e^{t-1}>0$)

$\therefore t=1+n\ln 2$

따라서 점 $(n\ln 2,\ 0)$에서 곡선 $y=e^{x-1}$에 그은 접선의 접점의 y좌표는

$a_n=e^{1+n\ln 2-1}=e^{n\ln 2}=2^n$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

0715

답 ②

$x=t^2+t+2$, $y=-6t$를 각각 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dt}=2t+1$, $\dfrac{dy}{dt}=-6$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\dfrac{6}{2t+1}\left(\text{단, } t\neq-\dfrac{1}{2}\right)$

$t=a$에 대응하는 점에서의 접선이 직선 $y=-2x+7$과 평행하므로

$t=a$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=-2$에서 $-\dfrac{6}{2a+1}=-2$

$2a+1=3 \quad \therefore a=1$

$t=1$일 때 $x=4$, $y=-6$

따라서 점 $(4,\ -6)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y+6=-2(x-4) \quad \therefore y=-2x+2$

이 직선이 점 $(2,\ b)$를 지나므로

$b=-4+2=-2$

$\therefore a+b=1+(-2)=-1$

0716

답 ①

$f(x)=(x+2)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-(x+2)e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$

점 $(k,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ (t+2)e^{-t})$이라 하면 접선의 방정식은

$y-(t+2)e^{-t}=-(t+1)e^{-t}(x-t)$에서

$y=-(t+1)e^{-t}x+(t^2+2t+2)e^{-t}$

이 직선이 점 $(k,\ 0)$을 지나므로

$-(t+1)e^{-t}k+(t^2+2t+2)e^{-t}=0$

$\therefore k=\dfrac{t^2+2t+2}{t+1}$ ……㉠

점 $(k,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{t+1}$라 하면

$g'(t)=\dfrac{(2t+2)(t+1)-(t^2+2t+2)}{(t+1)^2}$

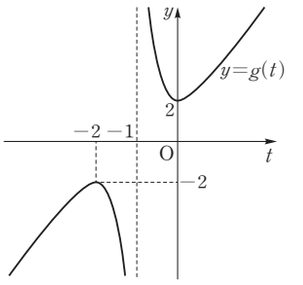
$=\dfrac{t^2+2t}{(t+1)^2}=\dfrac{t(t+2)}{(t+1)^2}$

$g'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=0$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	…	-2	…	(-1)	…	0	…
$g'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $g(t)$가 $t=-2$에서 극댓값 $g(-2)=-2$, $t=0$에서 극솟값 $g(0)=2$를 가지므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=g(t)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2이어야 하므로 구하는 k의 값의 범위는

$k<-2$ 또는 $k>2$

참고

함수의 그래프를 이용한 방정식의 실근의 개수는 07. 도함수의 활용(2)에서 상세히 다룬다.

0717

답 3

$f(x)=\dfrac{x^2-2x+a}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x+a)\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2x^2+2(1-a)x-2}{(x^2+1)^2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

함수 $f(x)$가 구간 $(1, 2)$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$2x^2+2(1-a)x-2\le 0$ ($\because (x^2+1)^2>0$)

이때 $g(x)=2x^2+2(1-a)x-2$라 하면

$g(1)=2+2(1-a)-2\le 0$에서

$2-2a\le 0$ $\therefore a\ge 1$ ····· ㉠

$g(2)=8+4(1-a)-2\le 0$에서

$10-4a\le 0$ $\therefore a\ge\frac{5}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge\frac{5}{2}$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 3이다.

0718

답 9

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\frac{1}{2}$에서 극한값이 존재하고 $x\to 2$일 때,

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(2)=3$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{2}$

함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g(3)=2$

이때 곡선 $y=g(x)$가 점 $(a, 2)$를 지나고 함수 $g(x)$는 일대일대응이므로

$a=3$

$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(2)}=2$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=2(x-3)$ $\therefore y=2x-4$

이 직선이 점 $(5, b)$를 지나므로

$b=2\times 5-4=6$

$\therefore a+b=3+6=9$

참고

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$일 때

$f(a)=b$, $f'(a)=c$

0719

답 ①

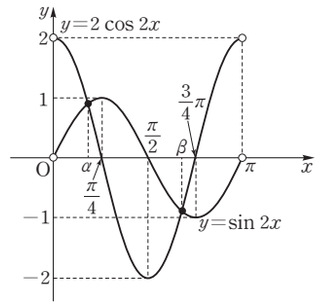
$f(x)=\frac{\sin 2x}{e^x}$에서

$f'(x)=\frac{2e^x\cos 2x-e^x\sin 2x}{(e^x)^2}$

$=\frac{2\cos 2x-\sin 2x}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $2\cos 2x-\sin 2x=0$

$\therefore 2\cos 2x=\sin 2x$ ····· ㉠



위의 그림에서 방정식 ㉠의 두 실근을 α, β $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$라 하고 $0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이므로 $k=\alpha$

$2\cos 2k=\sin 2k$에서 $2(\cos^2 k-\sin^2 k)=2\sin k\cos k$

$\sin^2 k+\sin k\cos k-\cos^2 k=0$

$\left(\frac{\sin k}{\cos k}\right)^2+\frac{\sin k}{\cos k}-1=0$, $\tan^2 k+\tan k-1=0$

$\therefore \tan k=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\because 0<k<\frac{\pi}{2}\right)$

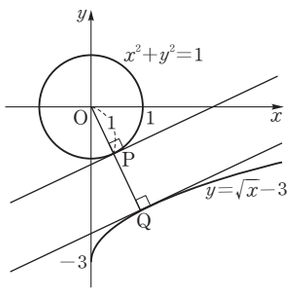
0720

답 26

원 $x^2+y^2=1$의 중심을 O라 하자.

선분 OP의 길이는 원 $x^2+y^2=1$의 반지름의 길이 1로 일정하므로 선분 PQ의 길이가 최소가 되려면 다음 그림과 같이 점 P는 원 $x^2+y^2=1$과 선분 OQ의 교점이고 원 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기가 같아야 한다.

따라서 곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 점 Q에서의 접선과 직선 OQ는 서로 수직이어야 한다.



점 Q의 좌표를 $(t, \sqrt{t}-3)$이라 하면

$y=\sqrt{x}-3$에서 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로

점 Q에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2\sqrt{t}}$이고

직선 OQ의 기울기는 $\frac{\sqrt{t}-3}{t}$이므로

$\frac{1}{2\sqrt{t}}\times\frac{\sqrt{t}-3}{t}=-1$에서

$2(\sqrt{t})^3+\sqrt{t}-3=0$, $(\sqrt{t}-1)(2t+2\sqrt{t}+3)=0$

$\sqrt{t}=1$ ($\because 2t+2\sqrt{t}+3>0$) $\therefore t=1$

즉, Q$(1, -2)$이므로

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\overline{PQ} \geq \overline{OQ} - 1 = \sqrt{1^2 + (-2)^2} - 1 = \sqrt{5} - 1$

따라서 $a=5$, $b=1$이므로

$a^2 + b^2 = 5^2 + 1^2 = 26$

0721

답 ⑤

$f(x) = x - k\sin x$에서 $f'(x) = 1 - k\cos x$

ㄱ. $k=1$일 때 $f'(x) = 1 - \cos x$

$0 < x < 2\pi$에서 $-1 \leq \cos x < 1$

$\therefore\ 0 < 1 - \cos x \leq 2$

즉, $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가하는 함수이다. (참)

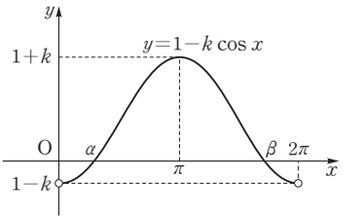
ㄴ. $0 < x < 2\pi$에서 $-k < -k\cos x \leq k$이므로

$1 - k < f'(x) \leq 1 + k$

이때 $k > 1$이면

$1 - k < 0$, $1 + k > 0$

이므로 함수 $y = f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값이 모두 존재한다. (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 가지려면

$1 - k < 0 < 1 + k$, 즉 $k > 1$이고

$f'(x) = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하면

함수 $y = f'(x)$의 그래프는 직선 $x = \pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi$에서 $\beta = 2\pi - \alpha$

함수 $f(x)$는 $x = \alpha$에서 극소이므로

$f(\alpha) = \alpha - k\sin\alpha = 2$에서 $k = \frac{\alpha - 2}{\sin\alpha}$

함수 $f(x)$는 $x = \beta$에서 극대이므로

$$f(\beta) = \beta - k\sin\beta = 2\pi - \alpha - \frac{\alpha - 2}{\sin\alpha} \times \sin(2\pi - \alpha)$$

$$= 2\pi - \alpha + \frac{\alpha - 2}{\sin\alpha} \times \sin\alpha$$

$$= 2\pi - \alpha + \alpha - 2 = 2\pi - 2 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0722

답 770

$f(x) = \frac{1}{n^2}\ln x$라 하고, 접점의 좌표를 $A_n\left(t, \frac{1}{n^2}\ln t\right)$라 하면

$f'(x) = \frac{1}{n^2 x}$이므로 접선의 방정식은

$y - \frac{1}{n^2}\ln t = \frac{1}{n^2 t}(x - t)$에서

$y = \frac{1}{n^2 t}x + \frac{\ln t - 1}{n^2}$

❶

이 직선이 원점을 지나므로

$\frac{\ln t - 1}{n^2} = 0$에서 $\ln t = 1$

$\therefore\ t = e$

즉, $A_n\left(e, \frac{1}{n^2}\right)$, $B_n(e, 0)$이므로

$\overline{OB_n} = e$, $\overline{A_nB_n} = \frac{1}{n^2}$

❷

따라서 삼각형 OB_nA_n의 넓이 S_n은

$S_n = \frac{1}{2} \times \overline{OB_n} \times \overline{A_nB_n} = \frac{1}{2} \times e \times \frac{1}{n^2} = \frac{e}{2n^2}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10} \frac{e}{S_n} = \sum_{n=1}^{10} 2n^2 = 2\sum_{n=1}^{10} n^2$$

$$= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 770$$

❸

채점 기준	배점
❶ 점 A_n에서의 접선의 방정식 구하기	30%
❷ $\overline{OB_n}$, $\overline{A_nB_n}$을 n에 대한 식으로 나타내기	40%
❸ $\sum_{n=1}^{10} \frac{e}{S_n}$의 값 구하기	30%

0723

답 35

$2x^2 - y = 0$에서 $y = 2x^2$을 $3xy + y^2 = 2x + 2y + 4$에 대입하면

$3x \times 2x^2 + (2x^2)^2 = 2x + 2 \times 2x^2 + 4$

$4x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 2x - 4 = 0$

$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1)(2x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore\ x = -2$ 또는 $x = 1$ $\left(\because\ 2x^2 + x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0\right)$

즉, 제1사분면 위의 점 P의 좌표는 $(1, 2)$이다.

❶

$2x^2 - y = 0$에서 $4x - \frac{dy}{dx} = 0$ $\quad\therefore\ \frac{dy}{dx} = 4x$

이 곡선 위의 점 $P(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 4이다.

$3xy + y^2 = 2x + 2y + 4$에서 $3y + 3x \times \frac{dy}{dx} + 2y \times \frac{dy}{dx} = 2 + 2 \times \frac{dy}{dx}$

$(3x + 2y - 2)\frac{dy}{dx} = 2 - 3y$ $\quad\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{2 - 3y}{3x + 2y - 2}$

이 곡선 위의 점 $P(1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{2 - 6}{3 + 4 - 2} = -\frac{4}{5}$

한편, 두 직선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\tan\alpha = 4$, $\tan\beta = -\frac{4}{5}$

❷

$$\therefore\ \tan\theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left|\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$= \left|\frac{4 + \frac{4}{5}}{1 + 4 \times \left(-\frac{4}{5}\right)}\right| = \frac{24}{11}$$

따라서 $p = 11$, $q = 24$이므로

$p + q = 11 + 24 = 35$

❸

채점 기준	배점
❶ 점 P의 좌표 구하기	30%
❷ 두 직선 l_1, l_2의 기울기 구하기	40%
❸ $\tan\theta$의 값을 구하여 $p+q$의 값 구하기	30%

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART C 수능 녹인 변별력 문제

0724

답 ③

$f(x)=\ln x$, $g(x)=ax^3$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g'(x)=3ax^2$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 한 점에서만 만나려면 두 곡선이 접해야 한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면

$f(t)=g(t)$에서

$\ln t=at^3$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$\frac{1}{t}=3at^2$ ····· ㉡

㉡에서 $3at^3=1$이므로 ㉠에서

$\ln t=\frac{1}{3}$ $\therefore t=e^{\frac{1}{3}}$

$\therefore a=\frac{1}{3t^3}=\frac{1}{3e}$

0725

답 6

$f(x)=\sin \pi x$에서 $f'(x)=\pi \cos \pi x$이므로

$g(x)=f(f(x))$에서

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$

$=\pi \cos(\pi \sin \pi x)\times(\pi \cos \pi x)$

$=\pi^2 \cos(\pi \sin \pi x)\times \cos \pi x$

$g'(x)=0$에서 $\cos(\pi \sin \pi x)=0$ 또는 $\cos \pi x=0$

(i) $\cos \pi x=0$일 때

$0<x<2$이므로 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

(ii) $\cos(\pi \sin \pi x)=0$일 때

$-1\le \sin \pi x\le 1$이므로 $\pi \sin \pi x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi \sin \pi x=\frac{\pi}{2}$

$\sin \pi x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin \pi x=\frac{1}{2}$

$0<x<2$이므로 $x=\frac{1}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}$

$0<x<2$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	$\frac{1}{6}$	…	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{5}{6}$	…	$\frac{7}{6}$	…	$\frac{3}{2}$	…	$\frac{11}{6}$	…	(2)
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 $g'(x)=0$을 만족시키는 x는 6개이고 이 모든 x의 값의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $g(x)$가 구간 $(0, 2)$에서 극값을 갖는 x의 값의 개수는 6이다.

0726

답 ③

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, \sin t)$에서의 접선의 기울기는 $\cos t$이다.

이때 점 P에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$\tan \theta=\left|\frac{\cos t-(-1)}{1+\cos t\times(-1)}\right|=\left|\frac{\cos t+1}{1-\cos t}\right|$

$=\frac{\cos t+1}{1-\cos t}$ $(\because 0<t<\pi)$

따라서

$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan \theta}{(\pi-t)^2}=\lim_{t\to\pi-}\frac{\frac{\cos t+1}{1-\cos t}}{(\pi-t)^2}=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$

에서 $\pi-t=x$라 하면 $t\to\pi-$일 때 $x\to 0+$이므로

$\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$

$=\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)}$ $(\because \cos t=\cos(\pi-x)=-\cos x)$

$=\lim_{x\to 0+}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$

$=\lim_{x\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{(1+\cos x)^2}\right\}$

$=1^2\times\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

0727

답 11

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=5-a \sin ax\ge 0$ 또는 $f'(x)=5-a \sin ax\le 0$

이어야 한다.

(i) a가 음의 정수일 때

$5+a\le 5-a \sin ax\le 5-a$이므로

$5+a\le f'(x)\le 5-a$

$f'(x)\ge 0$이려면 $5+a\ge 0$이어야 하므로 $a\ge -5$

$f'(x)\le 0$이려면 $5-a\le 0$이어야 하므로 $a\ge 5$

이때 a는 음의 정수이므로 -5, -4, -3, -2, -1의 5개이다.

(ii) $a=0$일 때

$f'(x)=5>0$이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

(iii) a가 양의 정수일 때

$5-a\le 5-a \sin ax\le 5+a$이므로

$5-a\le f'(x)\le 5+a$

$f'(x)\ge 0$이려면 $5-a\ge 0$이어야 하므로 $a\le 5$

$f'(x)\le 0$이려면 $5+a\le 0$이어야 하므로 $a\le -5$

이때 a는 양의 정수이므로 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

(i)~(iii)에서 구하는 정수 a의 개수는

$5+1+5=11$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0728

답 ②

$g(x)=e^{2x}$이라 하면 $g'(x)=2e^{2x}$

점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, e^{2t}) $(t>0)$이라 하자.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 (t, e^{2t})에서의 접선의 기울기는

$f(k)=2e^{2t}$ ····· ㉠

이때 $f(k)$는 두 점 $(0, k)$, (t, e^{2t})을 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$2e^{2t}=\dfrac{e^{2t}-k}{t}$

$\therefore k=e^{2t}-2te^{2t}$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(e^{2t}-2te^{2t})=2e^{2t}$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(e^{2t}-2te^{2t})\times(2e^{2t}-2e^{2t}-4te^{2t})=4e^{2t}$

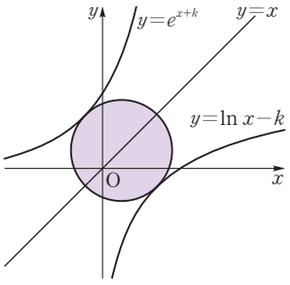
$f'(e^{2t}-2te^{2t})=-\dfrac{1}{t}$

위의 식의 양변에 $t=1$을 대입하면

$f'(-e^2)=-1$

0729

답 45



위의 그림과 같이 두 함수 $y=e^{x+k}$, $y=\ln x-k$는 서로 역함수 관계이므로 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 두 곡선 $y=e^{x+k}$, $y=\ln x-k$에 동시에 접하는 원의 넓이가 최소가 되려면 원과 각각의 곡선이 접하는 접점에서의 접선이 직선 $y=x$와 평행해야 한다.

즉, 접점에서의 접선의 기울기가 1이어야 한다.

$f(x)=e^{x+k}$이라 하면 $f'(x)=e^{x+k}$

접점의 좌표를 (t, e^{t+k})이라 하면 $f'(t)=1$에서 $t=-k$이므로

접점의 좌표는 $(-k, 1)$

원의 반지름의 길이는 접점 $(-k, 1)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|-k-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{k+1}{\sqrt{2}}$

따라서 구하는 원의 넓이의 최솟값은

$f(k)=\dfrac{(k+1)^2}{2}\pi$

$\therefore \dfrac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{5}f(k)=\sum_{k=1}^{5}\dfrac{(k+1)^2}{2}=\sum_{k=1}^{6}\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6\times7\times13}{6}-\dfrac{1}{2}=45$

0730

답 ①

$a=-1$일 때 구간 $[0, 2)$에서 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x+1}=x+1$이므로

$x=0$에서 극댓값을 갖지 않는다.

즉, 조건을 만족시키지 않으므로 $a\neq-1$이다.

$f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{2(x-a)(x+1)-(x-a)^2}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{(x-a)\{2(x+1)-(x-a)\}}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{(x-a)(x+2+a)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=-a-2$

(i) $a<-a-2$일 때

$a<-a-2$에서 $a<-1$이고,

$x=-a-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-a-2$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0, 2)$에서 극솟값을 갖는다.

즉, $0<-a-2<2$, $-4<a<-2$이므로

$a=-3$ ($\because a$는 정수)

(ii) $a>-a-2$일 때

$a>-a-2$에서 $a>-1$이고,

$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0, 2)$에서 극솟값을 갖는다.

즉, $0<a<2$이므로

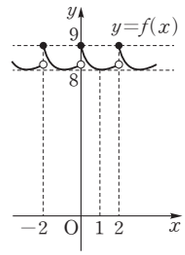
$a=1$ ($\because a$는 정수)

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 -3, 1이므로 구하는 모든 정수 a의 값의 곱은 $(-3)\times1=-3$

참고

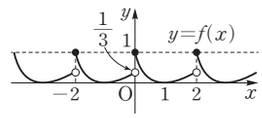
$a=-3$, $a=1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려서 $f(x)$가 문제의 조건을 만족시키는지 확인한다.

$a=-3$일 때, $0\le x<2$에서 $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{x+1}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 9, $x=1$에서 극솟값 8을 갖는다.

$a=1$일 때, $0\le x<2$에서 $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1, $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

이투스북

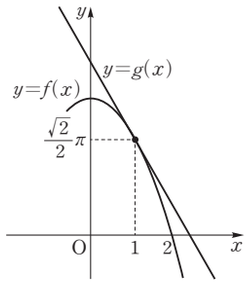
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0731

답 ③

조건 (나)에서 $0\le x\le 2$일 때, 부등식 $f(x)\le g(x)$가 성립하려면 $0\le x\le 2$에서 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$의 위쪽에 위치해야 한다.

이때 조건 (가)에서 $f(1)=g(1)$이므로 다음 그림과 같이 직선 $y=g(x)$는 점 $\left(1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접해야 한다.



$f(x)=\pi\cos\frac{\pi}{4}x$에서 $f'(x)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{4}x$이므로

$g'(1)=f'(1)=-\frac{\pi^2}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2$

기울기가 $-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2$이고 점 $\left(1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)$를 지나는 직선의 방정식은

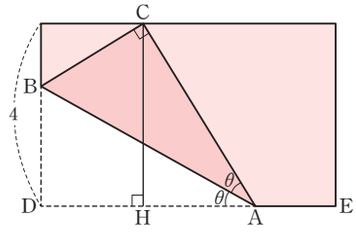
$y-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2(x-1)$에서 $y=-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2(x-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

따라서 $g(x)=-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2(x-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$이므로

$g(2)=-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

0732

답 41



위의 그림과 같이 점 C에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 ACH에서 $\sin 2\theta=\frac{4}{\overline{AC}}$

$\overline{AC}=\frac{4}{\sin 2\theta}$

$\overline{BC}=\overline{AC}\tan\theta=\frac{4\tan\theta}{\sin 2\theta}$

즉, 삼각형 ACB의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sin 2\theta}\times\frac{4\tan\theta}{\sin 2\theta}=\frac{8\tan\theta}{(\sin 2\theta)^2}$

$\therefore\ \frac{1}{f(\theta)}=\frac{(\sin 2\theta)^2}{8\tan\theta}=\frac{1}{8}\times\frac{\cos\theta\,(\sin 2\theta)^2}{\sin\theta}$

$=\frac{1}{8}\times\frac{\cos\theta\times(2\sin\theta\cos\theta)^2}{\sin\theta}=\frac{1}{2}\cos^3\theta\sin\theta$

위의 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\left\{\frac{1}{f(\theta)}\right\}'=-\frac{3}{2}\cos^2\theta\sin^2\theta+\frac{1}{2}\cos^4\theta$

$=-\frac{1}{2}\cos^2\theta(3\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=-\frac{1}{2}\cos^2\theta(4\sin^2\theta-1)$

$\left\{\frac{1}{f(\theta)}\right\}'=0$에서 $\cos\theta=0$ 또는 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{2}$에서 $\theta=\frac{\pi}{6}$

θ	(0)	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$\left\{\frac{1}{f(\theta)}\right\}'$		+	0	−	
$\frac{1}{f(\theta)}$		↗	극대	↘	

함수 $\frac{1}{f(\theta)}$은 $\theta=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값을 가지므로

$f(a)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=8\tan\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2}=8\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$=\frac{32}{3\sqrt{3}}=\frac{32\sqrt{3}}{9}$

따라서 $p=9$, $q=32$이므로

$p+q=9+32=41$

0733

답 9

이차함수 $f(x)$가 최솟값 0을 가지므로 $f(x)=a(x-b)^2$ $(a>0)$이라 하자.

$g(x)=e^xf(x)=ae^x(x-b)^2$이라 하면

$g'(x)=ae^x(x-b)^2+2ae^x(x-b)$

$=ae^x(x-b)(x-b+2)$

$g'(x)=0$에서 $x=b-2$ 또는 $x=b$ ($\because a>0$)

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로

$b-2=0$ $\therefore\ b=2$

$h(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{a(x-2)^2}{x}$이라 하면

$h'(x)=\frac{2ax(x-2)-a(x-2)^2}{x^2}=\frac{a(x+2)(x-2)}{x^2}$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	−2	…	(0)	…	2	…
$h'(x)$	+	0	−		−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $h(x)$가 $x=-2$에서 극대이므로 극댓값은

$h(-2)=\frac{16a}{-2}=-8$ $\therefore\ a=1$

따라서 $f(x)=(x-2)^2$이므로

$f(5)=3^2=9$

참고

$b=0$이면 $f(x)=ax^2$이므로

$h(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{ax^2}{x}=ax$ $(x\neq 0)$이다.

이때 조건 (나)에 모순이므로 $b=2$이다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

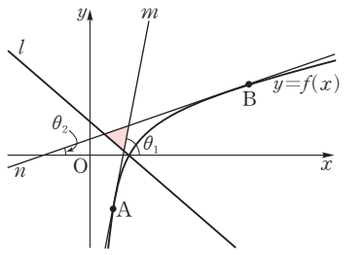
0734

답 ②

$f(x)=\sqrt{3}\ln x$에서 $f'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{x}$

다음 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ $(\alpha<\beta)$에서의 접선 m, n이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2 $(0<\theta_2<\theta_1)$이라 하면

$\tan\theta_1=\dfrac{\sqrt{3}}{\alpha}$, $\tan\theta_2=\dfrac{\sqrt{3}}{\beta}$



직선 l의 방정식은 $\sqrt{3}x+2y-\sqrt{3}=0$에서 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

한편, 세 직선 l, m, n으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형이므로 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기는 60°이다.

즉, $\tan(60^\circ+\theta_1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서

$$\tan(60^\circ+\theta_1)=\frac{\tan 60^\circ+\tan\theta_1}{1-\tan 60^\circ\times\tan\theta_1}=\frac{\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{\alpha}}{1-\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\alpha}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{\alpha}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2\alpha}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2\alpha}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{1}{3}$

두 직선 m, n이 이루는 각의 크기는 60°이므로 $\theta_1-\theta_2=60^\circ$

$$\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\times\tan\theta_2}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{\alpha}-\dfrac{\sqrt{3}}{\beta}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{\alpha}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\beta}}=\sqrt{3}$$

$3\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{\beta}=\sqrt{3}+\dfrac{9\sqrt{3}}{\beta}\left(\because\ \alpha=\dfrac{1}{3}\right)$

$\dfrac{10\sqrt{3}}{\beta}=2\sqrt{3}$ $\therefore\ \beta=5$

$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{5}{\frac{1}{3}}=15$

0735

답 17

$f(x)=t(\ln x)^2-x^2$에서

$f'(x)=\dfrac{2t\ln x}{x}-2x=\dfrac{2t\ln x-2x^2}{x}$

이때 함수 $f(x)$가 $x=k$, 즉 $x=g(t)$에서 극대이므로

$f'(g(t))=\dfrac{2t\ln g(t)-2\{g(t)\}^2}{g(t)}=0$에서

$2t\ln g(t)-2\{g(t)\}^2=0$

$\therefore\ t\ln g(t)=\{g(t)\}^2$ ····· ㉠

또한 $g(t)$는 미분가능한 함수이므로 ㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\ln g(t)+t\times\dfrac{g'(t)}{g(t)}=2g(t)g'(t)$ ····· ㉡

$g(\alpha)=e^2$이므로 ㉠에 $t=\alpha$를 대입하면

$\alpha\ln e^2=(e^2)^2$, $2\alpha=e^4$ $\therefore\ \alpha=\dfrac{e^4}{2}$

㉡에 $t=\alpha$를 대입하면

$\ln e^2+\dfrac{e^4}{2}\times\dfrac{g'(\alpha)}{e^2}=2e^2g'(\alpha)$, $2+\dfrac{e^2g'(\alpha)}{2}=2e^2g'(\alpha)$

$\dfrac{3e^2g'(\alpha)}{2}=2$ $\therefore\ g'(\alpha)=\dfrac{4}{3e^2}$

$\therefore\ \alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{e^4}{2}\times\dfrac{16}{9e^4}=\dfrac{8}{9}$

따라서 $p=9$, $q=8$이므로

$p+q=9+8=17$

0736

답 ③

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-n)e^x$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ (t-n)e^t)$이라 하자.

$y=(x-n)e^x$에서 $y'=(x-n+1)e^x$이므로

곡선 위의 점 $(t,\ (t-n)e^t)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t-n)e^t=(t-n+1)e^t(x-t)$에서

$y=(t-n+1)e^t(x-t)+(t-n)e^t$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$0=(t-n+1)e^t(a-t)+(t-n)e^t$

$(t-n+1)(a-t)+(t-n)=0$

$\therefore\ t^2-(n+a)t+an+n-a=0$ ····· ㉠

t에 대한 이차방정식 ㉠을 만족시키는 실수 t의 개수는 곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 접점의 개수, 즉 접선의 개수 $f(n)$이므로

t에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(n+a)^2-4(an+n-a)$

$=n^2+2an+a^2-4an-4n+4a$

$=(n-a)^2-4(n-a)$

$=(n-a)(n-a-4)$

에서

$D>0$, 즉 $n<a$ 또는 $n>a+4$일 때

$f(n)=2$

$D=0$, 즉 $n=a$ 또는 $n=a+4$일 때

$f(n)=1$

$D<0$, 즉 $a<n<a+4$일 때

$f(n)=0$

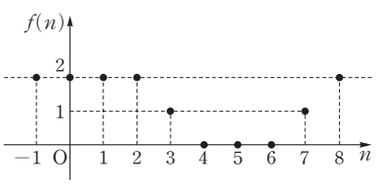
ㄱ. $a=0$, $n=4$이면 $n=a+4$이므로 $f(4)=1$ (참)

ㄴ. 정수 a의 값에 관계없이 $f(n)=1$인 정수 n의 개수는 2이다. (거짓)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{5}f(n)=5$인 경우는 다음과 같이 두 가지이다.

(i) $f(1)=f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=f(5)=0$인 경우

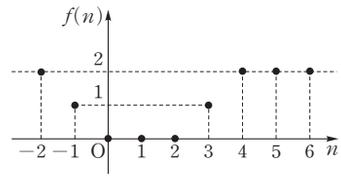
$a=3$



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(ii) $f(1)=f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=f(5)=2$인 경우

$3=a+4$ $\therefore a=-1$



(i), (ii)에서 $a=-1$ 또는 $a=3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0737

답 ⑤

$g(x)=f(e(\ln x)^4)$에서

$g'(x)=f'(e(\ln x)^4)\times 4e(\ln x)^3\times\frac{1}{x}$

또한 $g(e)=f(e(\ln e)^4)=f(e)$이므로

$g(e)=f(e)=k$라 하면 ····· ㉠

$g'(e)=f'(e(\ln e)^4)\times 4e(\ln e)^3\times\frac{1}{e}=4f'(e)$

즉, $m_1=f'(e)$, $m_2=4f'(e)$이므로 $m_1m_2=1$에서

$4\{f'(e)\}^2=1$

$\therefore f'(e)=-\frac{1}{2}$, $g'(e)=-2$ 또는 $f'(e)=\frac{1}{2}$, $g'(e)=2$

(i) $f'(e)=\frac{1}{2}$, $g'(e)=2$일 때

두 직선 l_1, l_2의 방정식은

$l_1: y-k=\frac{1}{2}(x-e)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{e}{2}+k$

$l_2: y-k=2(x-e)$ $\therefore y=2x-2e+k$

㉠에 의하여 두 직선 l_1, l_2의 교점의 좌표는 (e, k)이고,

y절편은 각각 $-\frac{e}{2}+k$, $-2e+k$이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times e\times\left|\left(-\frac{e}{2}+k\right)-(-2e+k)\right|=\frac{3}{4}e^2$

(ii) $f'(e)=-\frac{1}{2}$, $g'(e)=-2$일 때

두 직선 l_1, l_2의 방정식은

$l_1: y-k=-\frac{1}{2}(x-e)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}+k$

$l_2: y-k=-2(x-e)$ $\therefore y=-2x+2e+k$

㉠에 의하여 두 직선 l_1, l_2의 교점의 좌표는 (e, k)이고,

y절편은 각각 $\frac{e}{2}+k$, $2e+k$이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times e\times\left|(2e+k)-\left(\frac{e}{2}+k\right)\right|=\frac{3}{4}e^2$

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{3}{4}e^2$이다.

0738

답 ⑤

ㄱ. $f(x)=e^x\cos x$라 하면 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$

$0<x<\frac{\pi}{4}$일 때 $f'(x)>0$, 즉 함수 $f(x)$는 증가하므로

$e^a\cos a<e^b\cos b$ $\therefore \frac{e^a}{\cos b}<\frac{e^b}{\cos a}$ (참)

ㄴ. $g(x)=\tan x-x$라 하면 $g'(x)=\sec^2 x-1=\tan^2 x$

$0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $g'(x)>0$, 즉 함수 $g(x)$는 증가하므로

$\tan a-a<\tan b-b$ (참)

ㄷ. $h(x)=\frac{\sin x}{x}$라 하면 $h'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$0<x<\pi$에서 $h'(x)>0$이라 하면

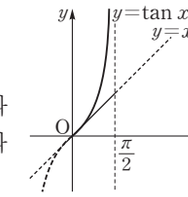
$x\cos x>\sin x$ ($\because x^2>0$)

(i) $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때

$\cos x>0$, $\sin x>0$이므로

$x>\frac{\sin x}{\cos x}$ $\therefore x>\tan x$

이때 주어진 범위에서 두 함수 $y=x$와 $y=\tan x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모순이다.

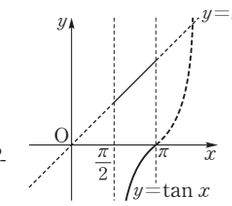


(ii) $\frac{\pi}{2}<x<\pi$일 때

$\cos x<0$, $\sin x>0$이므로

$x<\frac{\sin x}{\cos x}$ $\therefore x<\tan x$

이때 주어진 범위에서 두 함수 $y=x$와 $y=\tan x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모순이다.



(iii) $x=\frac{\pi}{2}$일 때

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{0-1}{\frac{\pi^2}{4}}=-\frac{4}{\pi^2}<0$$

(i)~(iii)에서 $0<x<\pi$일 때 $h'(x)<0$이므로

함수 $h(x)$는 감소한다.

즉, $\frac{\sin a}{a}>\frac{\sin b}{b}$이므로

$b\sin a>a\sin b$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0739

답 ②

$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$에서

$g'(x)=3f'(x)-4f'(x)\sin f(x)$

$=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}$

$g'(x)=0$에서 $f'(x)=0$ 또는 $3-4\sin f(x)=0$ ····· ㉠

즉, ㉠을 만족시키면서 $g'(x)$의 값의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 x의 값에서 $g(x)$는 극소이다.

(i) $f'(x)=0$인 경우

$f(x)=6\pi(x-1)^2$에서 $f'(x)=12\pi(x-1)$이므로

$x=1$일 때 $f'(x)=0$이다.

이때 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀌고, $x\to 1$일 때 $f(x)\to 0+$이므로 $3-4\sin f(x)$의 값의 부호는 양이다.

즉, $g'(x)=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(ii) $3-4\sin f(x)=0$인 경우

$3-4\sin f(x)=0$, 즉 $\sin f(x)=\frac{3}{4}$을 만족시키는 x의 값은

곡선 $y=\sin f(x)$와 직선 $y=\frac{3}{4}$의 교점의 x좌표이다.

$f(x)=t$라 하면 $0<x<2$에서 $0\le t<6\pi$이고,

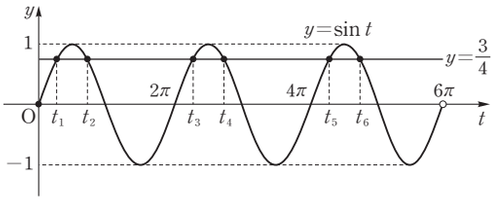
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

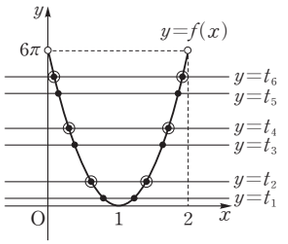
곡선 $y=\sin t$와 직선 $y=\frac{3}{4}$의 교점의 t좌표를 작은 수부터 차례대로

t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6

이라 하면 이 값에 대응하는 x의 값은 직선 $x=1$에 대하여 대칭인 위치에 2개씩 존재한다.

즉, $\sin f(x)=\frac{3}{4}$을 만족시키는 x의 값의 개수는 12이다.





이때 곡선 $y=\sin t$가 직선 $y=\frac{3}{4}$보다 위쪽에 있는 범위에서

$3-4\sin t$의 값의 부호는 음이고, 아래쪽에 있는 범위에서

$3-4\sin t$의 값의 부호는 양이므로

ⓐ구간 $(1, 2)$에서 $f(x)=t_2$, t_4, t_6을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $3-4\sin f(x)$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀌고, 이 구간에서 $f'(x)$의 값의 부호는 양이다.

즉, $g'(x)=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 $g(x)$는 이 3개의 값에서 극소이다.

ⓑ구간 $(0, 1)$에서는 ⓐ와는 반대로 $f(x)=t_2$, t_4, t_6을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $3-4\sin f(x)$의 값의 부호는 양에서 음으로 바뀌고, 이 구간에서 $f'(x)$의 값의 부호는 음이다.

즉, $g'(x)=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 $g(x)$는 이 3개의 값에서 극소이다.

따라서 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는 6이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$가 $0<x<2$에서 극소가 되는 x의 개수는

$1+6=7$

참고

(ii)에서 x의 값이 $0\to1\to2$로 변할 때 t의 값은 $6\pi\to0\to6\pi$로 변하는 것에 주의한다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A 07 도함수의 활용(2)

유형 01 곡선의 오목과 볼록

확인 문제 구간 $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$에서 위로 볼록, 구간 $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$에서 아래로 볼록

$f(x)=x^3-2x^2$이라 하면
$f'(x)=3x^2-4x$, $f''(x)=6x-4$
$f''(x)=0$에서 $x=\frac{2}{3}$
이때 $x<\frac{2}{3}$에서 $f''(x)<0$, $x>\frac{2}{3}$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$에서 위로 볼록하고, 구간 $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$에서 아래로 볼록하다.

0740 답 ④

$f(x)=\frac{x^2-x}{e^x}=(x^2-x)e^{-x}$에서
$f'(x)=(2x-1)e^{-x}-(x^2-x)e^{-x}=(-x^2+3x-1)e^{-x}$
$f''(x)=(-2x+3)e^{-x}-(-x^2+3x-1)e^{-x}$
$=(x^2-5x+4)e^{-x}$
곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로
$x^2-5x+4<0$ ($\because e^{-x}>0$)
$(x-1)(x-4)<0$ $\therefore 1<x<4$
따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $(1, 4)$이다.

0741 답 ②

$f(x)=x+2\cos x$라 하면
$f'(x)=1-2\sin x$
$f''(x)=-2\cos x$
곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로
$\cos x<0$
$\therefore \frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)
따라서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$이다.

0742 답 ④

$f(x)=x^4-2x^3-36x^2+6x+12$라 하면
$f'(x)=4x^3-6x^2-72x+6$
$f''(x)=12x^2-12x-72=12(x+2)(x-3)$
곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로
$-2<x<3$
따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $(-2, 3)$이다.

0743 답 ①

$f(x)=x^2(\ln x-1)$이라 하면 로그의 진수 조건에 의하여
$x>0$ ····· ㉠
$f'(x)=2x(\ln x-1)+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x-x$
$f''(x)=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}-1=2\ln x+1$
곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로
$\ln x<-\frac{1}{2}$
$\therefore x<\frac{\sqrt{e}}{e}$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 $0<x<\frac{\sqrt{e}}{e}$

0744 답 0

$f(x)=\frac{-2}{x^2+3}$라 하면
$f'(x)=\frac{-2x\times(-2)}{(x^2+3)^2}=\frac{4x}{(x^2+3)^2}$
$f''(x)=\frac{4(x^2+3)^2-4x\times2(x^2+3)\times2x}{(x^2+3)^4}$
$=\frac{-12x^2+12}{(x^2+3)^3}=\frac{-12(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$ ····· ❶
곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로
$(x+1)(x-1)<0$ ($\because x^2+3>0$)
$\therefore -1<x<1$ ····· ❷
따라서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간에 속하는 정수 x의 값은 0이다. ····· ❸

채점 기준	배점
❶ $f''(x)$ 구하기	40%
❷ $f''(x)>0$인 x의 값의 범위 구하기	40%
❸ 아래로 볼록한 구간에 속하는 정수 x의 값 구하기	20%

0745 답 2

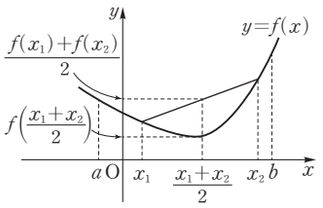
$f(x)=\ln(x^2+2x+2)$에서 $f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$
$f''(x)=\frac{2(x^2+2x+2)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$
$=\frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$
함수 $f(x)$가 구간 (a, b)에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대하여 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$를 만족시키려면
$a<x_1<x_2<b$일 때 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록해야 한다.
즉, $f''(x)>0$이어야 하므로
$x(x+2)<0$ ($\because (x^2+2x+2)^2>0$) $\therefore -2<x<0$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-2, 0)$에서 아래로 볼록하므로
$b-a$의 최댓값은
$0-(-2)=2$

참고

함수 $f(x)$가 구간 (a, b)에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대하여
$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$
를 만족시키면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.



유형 02 변곡점

확인 문제 $-3, 1$

$f(x)=x^4+4x^3-18x^2+1$이라 하면
$f'(x)=4x^3+12x^2-36x$
$f''(x)=12x^2+24x-36=12(x+3)(x-1)$
$f''(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
이때 $x<-3$에서 $f''(x)>0$, $-3<x<1$에서 $f''(x)<0$, $x>1$에서 $f''(x)>0$이므로 변곡점의 x좌표는 -3, 1이다.

0746

답 ①

$f(x)=x(\ln x)^2$에서 로그의 진수 조건에 의하여
$x>0$
$f'(x)=(\ln x)^2+x\times 2\ln x\times\frac{1}{x}$
$=(\ln x)^2+2\ln x$
$f''(x)=2\ln x\times\frac{1}{x}+2\times\frac{1}{x}$
$=\frac{2\ln x+2}{x}=\frac{2(\ln x+1)}{x}$
$f''(x)=0$에서 $\ln x=-1$
$\therefore x=e^{-1}$
이때 $x=e^{-1}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=e^{-1}$에서 변곡점을 갖는다.
따라서 구하는 접선의 기울기는
$f'(e^{-1})=(\ln e^{-1})^2+2\ln e^{-1}=1-2=-1$

0747

답 5

$f(x)=x^3-3x^2+6$이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$
$f''(x)=6x-6=6(x-1)$
$f''(x)=0$에서 $x=1$
이때 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1, 4)$
따라서 $a=1$, $b=4$이므로
$a+b=1+4=5$

0748

답 ④

$f(x)=2x^2e^x$에서
$f'(x)=4xe^x+2x^2e^x=(4x+2x^2)e^x$
$f''(x)=(4+4x)e^x+(4x+2x^2)e^x$
$=(2x^2+8x+4)e^x=2(x^2+4x+2)e^x$
$f''(x)=0$에서 $x^2+4x+2=0$ $(\because e^x>0)$
$\therefore x=-2-\sqrt{2}$ 또는 $x=-2+\sqrt{2}$
이때 $x=-2-\sqrt{2}$, $x=-2+\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의 x좌표의 곱은
$(-2-\sqrt{2})(-2+\sqrt{2})=4-2=2$

0749

답 ③

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2\sin x$라 하면 $f'(x)=x+2\cos x$
$f''(x)=1-2\sin x$
$f''(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$
$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ $(\because 0<x<2\pi)$
이때 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5}{6}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5}{6}\pi$에서 변곡점을 갖는다.
$\therefore |\alpha-\beta|=\left|\frac{\pi}{6}-\frac{5}{6}\pi\right|=\frac{2}{3}\pi$

0750

답 7

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$이라 하면
$f'(x)=\frac{2x(x^2+3)-(x^2-1)\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$
$f''(x)=\frac{8(x^2+3)^2-8x\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}$
$=\frac{-24x^2+24}{(x^2+3)^3}=\frac{-24(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$ ❶
$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ $(\because x^2+3>0)$
이때 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1, 0)$, $(1, 0)$ ❷
변곡점에서의 두 접선의 기울기는 각각 $f'(-1)=-\frac{1}{2}$, $f'(1)=\frac{1}{2}$
이므로 이 두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면
$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$
$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$
$=\left|\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}}\right|=\frac{4}{3}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $p=3$, $q=4$이므로

$p+q=3+4=7$ ❸

채점 기준	배점
❶ $f''(x)$ 구하기	20%
❷ 변곡점의 좌표 구하기	40%
❸ $\tan\theta$의 값을 구한 후 $p+q$의 값 구하기	40%

Bible Says 삼각함수의 덧셈정리 – 탄젠트

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(2) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

0751

답 ②

$f(x)=\ln(x^2+1)^2=2\ln(x^2+1)$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{2}{x^2+1}\times 2x=\dfrac{4x}{x^2+1}$

$f''(x)=\dfrac{4(x^2+1)-4x\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 변곡점을 갖는다.

한편, $f'(1)=\dfrac{4\times 1}{1^2+1}=2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2\ln 2)$에서의 접선 l의 방정식은

$y-2\ln 2=2(x-1)$

$\therefore y=2x-2+2\ln 2$

따라서 접선 l의 y절편은 $-2+2\ln 2$이므로

$k=2$

0752

답 41

$f(x)=\sin^n x$라 하면

$f'(x)=n\sin^{n-1}x\cos x$

$f''(x)=n(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x+n\sin^{n-1}x\times(-\sin x)$

$=n(n-1)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)-n\sin^n x$

$=\{(n^2-n)-n^2\sin^2 x\}\sin^{n-2}x$

$f''(x)=0$에서

$(n^2-n)-n^2\sin^2 x=0$ $\left(\because 0<x<\dfrac{\pi}{2}\text{에서 } 0<\sin x<1\right)$

$\sin^2 x=\dfrac{n^2-n}{n^2}$

$\therefore \sin x=\sqrt{\dfrac{n^2-n}{n^2}}=\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$

위의 식을 만족시키는 실수 x의 값을 a_n이라 하면 $\sin a_n=\dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$

이고, 이때 $x=a_n$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(a_n, f(a_n))$

$\therefore a_n=f(a_n)=\sin^n a_n=\left(\dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^n$

$\therefore a_2\times a_4=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{16}=\dfrac{9}{32}$

따라서 $p=32$, $q=9$이므로

$p+q=32+9=41$

유형 03 변곡점을 이용한 미정계수의 결정

0753

답 ④

$f(x)=xe^x+ax^2+bx$에서

$f'(x)=e^x+xe^x+2ax+b=(x+1)e^x+2ax+b$

$f''(x)=e^x+(x+1)e^x+2a=(x+2)e^x+2a$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극소이므로

$f'(0)=0$에서 $1+b=0$ $\therefore b=-1$

또한 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 -2이므로

$f''(-2)=0$에서 $a=0$

$\therefore a+b=0+(-1)=-1$

0754

답 3

$f(x)=a\cos x+b\sin x+cx$에서

$f'(x)=-a\sin x+b\cos x+c$

$f''(x)=-a\cos x-b\sin x$

함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{2}{3}\pi$에서 극대이므로

$f'\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=0$에서 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{1}{2}b+c=0$ …… ㉠

또한 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표가 (π, π)이므로

$f(\pi)=\pi$에서 $-a+\pi c=\pi$ …… ㉡

$f''(\pi)=0$에서 $a=0$

이를 ㉠, ㉡에 대입하여 풀면

$b=2$, $c=1$

$\therefore a+b+c=0+2+1=3$

0755

답 96

$f(x)=\dfrac{2}{x^2+b}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{-2\times 2x}{(x^2+b)^2}=\dfrac{-4x}{(x^2+b)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-4(x^2+b)^2-(-4x)\times 2(x^2+b)\times 2x}{(x^2+b)^4}=\dfrac{12x^2-4b}{(x^2+b)^3}$

점 $(2, a)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로

$f(2)=a$에서 $\dfrac{2}{4+b}=a$ …… ㉠

$f''(2)=0$에서 $\dfrac{48-4b}{(4+b)^3}=0$ $\therefore b=12$

이를 ㉠에 대입하면 $a=\dfrac{1}{8}$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{12}{\frac{1}{8}}=96$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 04 변곡점을 가질 조건

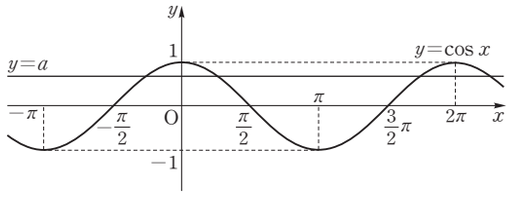
0756

답 ④

$f(x)=ax^2+x+2\cos x$에서
$f'(x)=2ax+1-2\sin x$
$f''(x)=2a-2\cos x$
곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.
$f''(x)=0$에서 $\cos x=a$
이때 $-1\le\cos x\le1$이므로 $-1\le a\le1$이다.
$a=-1$이면 $f''(x)=-2-2\cos x\le0$
$a=1$이면 $f''(x)=2-2\cos x\ge0$
즉, $a=-1$ 또는 $a=1$이면 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.
따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는
$-1<a<1$

다른 풀이

$f(x)=ax^2+x+2\cos x$에서
$f'(x)=2ax+1-2\sin x$
$f''(x)=2a-2\cos x$
$f''(x)=0$에서 $\cos x=a$
곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 다음 그림과 같이 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=a$가 접하지 않고 만나야 하므로
$-1<a<1$



0757

답 -8

$f(x)=x^4+ax^3-3ax^2-5$라 하면
$f'(x)=4x^3+3ax^2-6ax$
$f''(x)=12x^2+6ax-6a$
곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\ge0$이어야 한다.
즉, 이차방정식 $f''(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(3a)^2-12\times(-6a)\le0$, $9a^2+72a\le0$

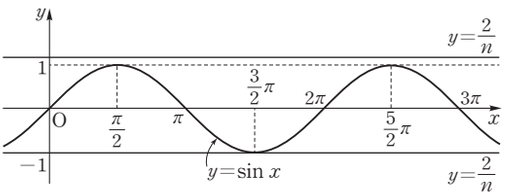
$9a(a+8)\le0$ $\therefore -8\le a\le0$
따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 -8이다.

0758

답 5

$f(x)=x^2+n\sin x$에서
$f'(x)=2x+n\cos x$
$f''(x)=2-n\sin x$ ❶

(i) $n=0$일 때
$f''(x)=2>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 변곡점을 갖지 않는다.
(ii) $n\ne0$일 때
$f''(x)=0$에서 $n\sin x=2$ $\therefore \sin x=\frac{2}{n}$
곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{2}{n}$가 접하거나 만나지 않아야 한다.



즉, $\left|\frac{2}{n}\right|\ge1$에서 $|n|\le2$
$\therefore -2\le n<0$ 또는 $0<n\le2$ ❷

(i), (ii)에서 구하는 정수 n은 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다. ❸

채점 기준	배점
❶ $f''(x)$ 구하기	30%
❷ 변곡점을 갖지 않는 n의 값의 범위 구하기	50%
❸ 정수 n의 개수 구하기	20%

참고

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.
(ii)에서 방정식 $f''(x)=0$, 즉 $\sin x=\frac{2}{n}$가 실근을 갖지 않으려면 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{2}{n}$가 만나지 않으면 된다.
특히, $n=-2$ 또는 $n=2$일 때 $f''(x)\ge0$이다.
즉, $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않음을 알 수 있다.

유형 05 도함수의 그래프를 이용한 함수의 이해

0759

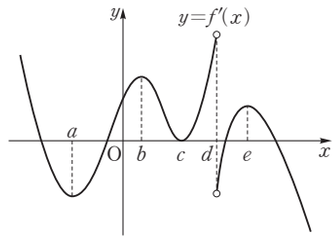
답 ⑤

ㄱ. $f'(c)=0$이고 $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극댓값을 갖는다. (참)
ㄴ. $f''(b)=f''(d)=0$이고 $x=b$, $x=d$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=b$, $x=d$에서 변곡점을 갖는다. 즉, 변곡점의 개수는 2이다. (참)
ㄷ. 함수 $f'(x)$는 구간 (b, d)에서 감소하므로 이 구간에서 $f''(x)<0$
즉, 구간 (b, d)에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0760 답 ④

오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d, e를 정하고 $f''(x)$의 부호를 조사하여 표로 나타내면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 4이다.

0761 답 ③

$f''(x)$의 부호를 조사하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$f''(x)<0$인 구간에서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하므로 구하는 구간은 ③ (b, c)이다.

0762 답 ④

$h(x)=f(x)-g(x)$에서

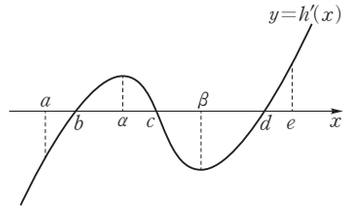
$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h''(x)=f''(x)-g''(x)$

주어진 그림에서 $h'(x)$의 부호를 조사하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$

따라서 곡선 $y=h'(x)$는 다음 그림과 같다.



$h''(x)$의 값은 곡선 $y=h'(x)$ 위의 점에서의 접선의 기울기이므로

$x<\alpha$에서 $h''(x)>0$

$\alpha<x<\beta$에서 $h''(x)<0$

$x>\beta$에서 $h''(x)>0$

즉, 곡선 $y=h(x)$가 위로 볼록한 구간은 (α, β)이므로 이 구간에 속하는 x의 값은 c이다.

0763 답 ②

ㄱ. $x=-1$, $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 극값을 갖는다.
즉, 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값은 2개이다. (참)

ㄴ. $f''(0)=f''(1)=f''(3)=0$이고 $x=0$, $x=1$, $x=3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=0$, $x=1$, $x=3$에서 변곡점을 갖는다. 즉, 변곡점은 3개이다. (참)

ㄷ. $-1<x<0$일 때 $f''(x)>0$이므로 구간 $(-1, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

유형 06 함수의 그래프

0764 답 ④

$f(x)=x\ln x$에서 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

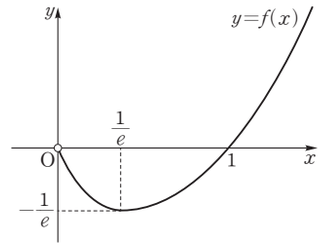
$f''(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-1$ $\quad\therefore x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

또한 $\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



① $x>0$이므로 정의역은 $\{x|x>0\}$이다. (거짓)

② $x=\frac{1}{e}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e}$에서 극솟값 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$을 갖는다. (거짓)

③ $f''(x)=\frac{1}{x}$이므로 $x>0$에서 $f''(x)>0$
즉, 곡선 $y=f(x)$는 변곡점을 갖지 않는다. (거짓)

④ ③에서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(1, \infty)$에서 아래로 볼록하다. (참)

⑤ $\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ④이다.

0765 답 ⑤

$f(x)=xe^{-x^2}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x^2}+x\times e^{-x^2}\times(-2x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$

$=(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)e^{-x^2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f''(x)=-4x\times e^{-x^2}+(1-2x^2)\times e^{-x^2}\times(-2x)$

$=(4x^3-6x)e^{-x^2}=2x(\sqrt{2}x+\sqrt{3})(\sqrt{2}x-\sqrt{3})e^{-x^2}$

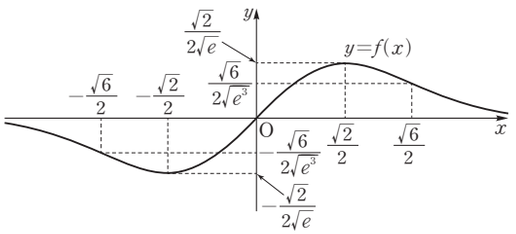
$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because e^{-x^2}>0$)

$f''(x)=0$에서 $x=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{e^3}}$	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$	↗	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$	↘	$\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{e^3}}$	↗

또한 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



① $\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}=0$이므로 점근선은 직선 $y=0$이다. (거짓)

② 구간 $(0, 1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다. (거짓)

③ 구간 $\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다. (거짓)

④ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 극대이다. (거짓)

⑤ 변곡점은 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{e^3}}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{e^3}}\right)$의 3개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

0766

답 ⑤

$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{(x^2+1)-x\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

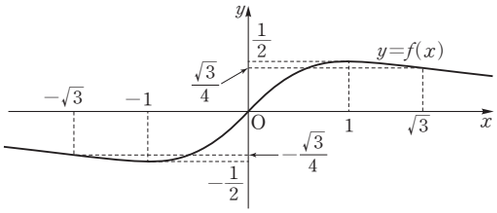
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↗

또한 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=\frac{1}{2}$을 갖는다. (참)

ㄴ. $-1<x<0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-1, 0)$에서 아래로 볼록하다. (참)

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$의 3개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0767

답 ②

$f(x)=x-2\sin x$에서

$f'(x)=1-2\cos x$

$f''(x)=2\sin x$

$0<x<2\pi$일 때, $f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

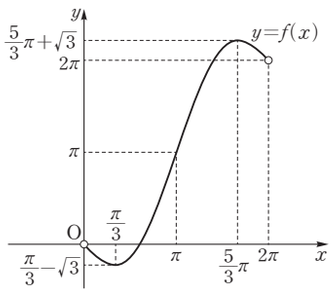
$f''(x)=0$에서 $\sin x=0$

$\therefore x=\pi$

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$		↘	$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	↗	π	↗	$\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$	↘	

또한 $\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to2\pi-}f(x)=2\pi$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<\pi$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, \pi)$에서 아래로 볼록하다. (참)

ㄴ. 점 (π, π)는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{3}\pi$에서 극대, $x=\frac{\pi}{3}$에서 극소이므로 극댓값과 극솟값의 차는

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f\left(\frac{5}{3}\pi\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0768

답 ④

$f(x)=(\ln x)^2$에서 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=2\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$

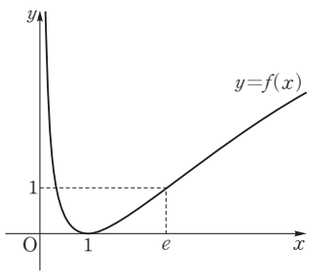
$f'(x)=0$에서 $\ln x=0$ $\therefore x=1$

$f''(x)=0$에서 $1-\ln x=0$ $\therefore x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	1	…	e	…
$f'(x)$		−	0	+	+	+
$f''(x)$		+	+	+	0	−
$f(x)$		↘	0	↗	1	↱

또한 $\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<1$일 때 $f'(x)<0$이므로 구간 $(0, 1)$에서 함수 $f(x)$는 감소한다. (참)

ㄴ. $x>e$일 때 $f''(x)<0$이므로 구간 (e, ∞)에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(1)=0$이므로 A$(1, 0)$이다.
곡선 $y=f(x)$는 $x=e$에서 변곡점을 가지므로 $f(e)=1$에서 B$(e, 1)$이다.
즉, 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

유형 07 유리함수의 최대 · 최소

0769

답 1

$f(x)=\frac{2x+3}{x^2+4}$에서

$f'(x)=\frac{2(x^2+4)-(2x+3)\times2x}{(x^2+4)^2}$

$=\frac{-2x^2-6x+8}{(x^2+4)^2}=\frac{-2(x+4)(x-1)}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	1	…
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 1을 갖는다.

0770

답 2

$f(x)=\frac{3x}{x^2-x+1}$라 하면

$f'(x)=\frac{3(x^2-x+1)-3x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$=\frac{-3x^2+3}{(x^2-x+1)^2}=\frac{-3(x+1)(x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	−1	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−1	↗	3	↘

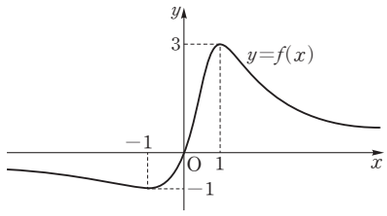
또한 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 3, $x=-1$에서 최솟값 -1을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$3+(-1)=2$

참고

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



0771

답 4

$f(x)=\frac{4x-k}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{4(x^2+1)-(4x-k)\times2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-4x^2+2kx+4}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(2x^2-kx-2)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서

$2x^2-kx-2=0$ …… ㉠

이때 함수 $f(x)$가 극솟값을 가지므로 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값 -1을 가지므로

$f'(\alpha)=0$에서 $2\alpha^2-k\alpha-2=0$ …… ㉡

$f(\alpha)=-1$에서 $\frac{4\alpha-k}{\alpha^2+1}=-1$, $4\alpha-k=-\alpha^2-1$

$\therefore k=\alpha^2+4\alpha+1$ …… ㉢

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

㉢을 ㉡에 대입하면 $2a^2-(a^2+4a+1)a-2=0$

$a^3+2a^2+a+2=0$, $(a+2)(a^2+1)=0$ $\therefore a=-2$

이를 ㉢에 대입하면 $k=-3$

따라서 $f(x)=\frac{4x+3}{x^2+1}$, $f'(x)=\frac{-4x^2-6x+4}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $2x^2+3x-2=0$, $(x+2)(2x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

❷

구간 $[-3, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{9}{10}$	↘	-1	↗	4	↘	$\frac{3}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최댓값 4를 갖는다.

❸

채점 기준	배점
❶ k에 대한 식 세우기	40%
❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 구하기	30%
❸ 함수 $f(x)$의 최댓값 구하기	30%

유형 08 무리함수의 최대 · 최소

0772

답 ⑤

$f(x)=x^3\sqrt{12-x^2}$이라 하면

$12-x^2\geq 0$에서 $-2\sqrt{3}\leq x\leq 2\sqrt{3}$

$$f'(x)=3x^2\sqrt{12-x^2}+x^3\times\frac{-x}{\sqrt{12-x^2}}$$
$$=\frac{3x^2(12-x^2)-x^4}{\sqrt{12-x^2}}=\frac{-4x^4+36x^2}{\sqrt{12-x^2}}$$
$$=\frac{-4x^2(x+3)(x-3)}{\sqrt{12-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

$-2\sqrt{3}\leq x\leq 2\sqrt{3}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-27\sqrt{3}$	↗	0	↗	$27\sqrt{3}$	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $M=27\sqrt{3}$, $x=-3$에서 최솟값 $m=-27\sqrt{3}$을 가지므로

$M-m=27\sqrt{3}-(-27\sqrt{3})=54\sqrt{3}$

0773

답 2

$f(x)=x+\sqrt{2-x^2}$이라 하면

$2-x^2\geq 0$에서 $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$

$$f'(x)=1+\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{\sqrt{2-x^2}-x}{\sqrt{2-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{2-x^2}=x$

$x^2-1=0$, $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=1$ ($\because \sqrt{2-x^2}\geq 0$이므로 $x\geq 0$)

$-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	↗	2	↘	$\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 2를 갖는다.

0774

답 ④

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$에서

$$f'(x)=-\frac{2x}{(1+2x^2)\sqrt{1+2x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{19}}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 $M=1$, $x=3$에서 최솟값 $m=\frac{1}{\sqrt{19}}$을 가지므로

$M^2+m^2=1+\frac{1}{19}=\frac{20}{19}$

0775

답 ③

$f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{2x+6}$이라 하면

$3-x\geq 0$, $2x+6\geq 0$에서 $x\leq 3$, $x\geq -3$이므로

$-3\leq x\leq 3$

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}+\frac{1}{\sqrt{2x+6}}=\frac{-\sqrt{2x+6}+2\sqrt{3-x}}{2\sqrt{3-x}\sqrt{2x+6}}$$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{2x+6}=2\sqrt{3-x}$

$2x+6=4(3-x)$, $6x=6$

$\therefore x=1$

$-3\leq x\leq 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{6}$	↗	$3\sqrt{2}$	↘	$2\sqrt{3}$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $3\sqrt{2}$, $x=-3$에서 최솟값 $\sqrt{6}$을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$3\sqrt{2}\times\sqrt{6}=6\sqrt{3}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0776

답 ④

$f(x)=x\sqrt{2x+a}$에서

$f'(x)=\sqrt{2x+a}+x\times\dfrac{1}{\sqrt{2x+a}}=\dfrac{3x+a}{\sqrt{2x+a}}$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{a}{3}$

$-\dfrac{a}{2}\le x\le\dfrac{a}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$	$\frac{a}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$	↗	$\frac{a\sqrt{2a}}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{a}{3}$에서 최솟값 $-\dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}$를 가지므로

$-\dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}=-8$에서 $\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)^3=2^3$

$\sqrt{\dfrac{a}{3}}=2$, $\dfrac{a}{3}=4$ $\quad\therefore a=12$

따라서 함수 $f(x)=x\sqrt{2x+12}$의 최댓값은

$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=f(6)=6\times\sqrt{12+12}=12\sqrt{6}$

유형 09 지수함수의 최대 · 최소

0777

답 51

$f(x)=e^{2x}-4e^x-6x$에서

$f'(x)=2e^{2x}-4e^x-6=2(e^x+1)(e^x-3)$

$f'(x)=0$에서 $e^x=3$ ($\because e^x>0$) $\quad\therefore x=\ln 3$

구간 $[0,\ 2\ln 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\ln 3$	$\cdots$	$2\ln 3$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↘	$-3-6\ln 3$	↗	$45-12\ln 3$

함수 $f(x)$는 $x=2\ln 3$에서 최댓값 $M=45-12\ln 3$, $x=\ln 3$에서 최솟값 $m=-3-6\ln 3$을 가지므로

$M-2m=45-12\ln 3-2(-3-6\ln 3)=51$

0778

답 ④

$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$에서

$f'(x)=\dfrac{e^x\times x^2-e^x\times 2x}{x^4}=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\frac{e^2}{4}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $\dfrac{e^2}{4}$을 갖는다.

0779

답 10

$f(x)=(x^2+1)e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2+1)e^x=(x^2+2x+1)e^x=(x+1)^2e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because e^x>0$)

❶

구간 $[-2,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$5e^{-2}$	↗	$2e^{-1}$	↗	$2e$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $M=2e$, $x=-2$에서 최솟값 $m=5e^{-2}$을 가지므로

$eMm=e\times 2e\times 5e^{-2}=10$

❷

채점 기준	배점
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 구하기	40%
❷ eMm의 값 구하기	60%

0780

답 ①

$f(x)=x^2e^{-x}+k$에서

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=-x(x-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{4}{e^2}+k$	↘

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $\dfrac{4}{e^2}+k$를 가지므로

$\dfrac{4}{e^2}+k=0$에서 $k=-\dfrac{4}{e^2}$

유형 10 로그함수의 최대 · 최소

0781

답 ③

$f(x)=x\ln x-2x$에서

$f'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-2=\ln x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

$1\le x\le e^2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↘	$-e$	↗	0

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 최댓값 $M=0$, $x=e$에서 최솟값 $m=-e$를 가지므로

$M-m=0-(-e)=e$

0782

답 ②

$f(x)=\frac{\ln x^2}{x^2}=\frac{2\ln x}{x^2}$에서

$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x^2-2\ln x\times 2x}{x^4}=\frac{2-4\ln x}{x^3}=\frac{2(1-2\ln x)}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\sqrt{e}$

구간 $[1, e]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{e}$에서 최댓값 $M=\frac{1}{e}$, $x=1$에서 최솟값 $m=0$을 가지므로

$M+m=\frac{1}{e}+0=\frac{1}{e}$

0783

답 16

$f(x)=\ln x+\ln(8-x)$에서 로그의 진수 조건에 의하여

$0<x<8$

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{8-x}=\frac{8-2x}{x(8-x)}=\frac{-2(x-4)}{x(8-x)}$

$f'(x)=0$에서 $x=4$

$0<x<8$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(8)
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$\ln 16$	↘	

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $\ln 16$을 가지므로

$M=16$

0784

답 4

$f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$에서 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=a$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$\ln a+1$	↗

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이면서 최소이므로

$a=4$

이때 $f(1)=\ln 1+a$이므로

$f(1)=4$

0785

답 ④

$f(x)=x(\ln ax)^2$에서

$f'(x)=(\ln ax)^2+x\times 2\ln ax\times\frac{a}{ax}=(\ln ax)^2+2\ln ax$

$f''(x)=2\ln ax\times\frac{a}{ax}+2\times\frac{a}{ax}=\frac{2(\ln ax+1)}{x}$

이때 $0<x_1<1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$을 만족시키므로 방정식 $f''(x)=0$은 $x=1$을 근으로 갖는다.

즉, $f''(1)=0$에서 $2(\ln a+1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{e}$

따라서 $f'(x)=\left(\ln\frac{x}{e}\right)^2+2\ln\frac{x}{e}=\left(\ln\frac{x}{e}\right)\left(\ln\frac{x}{e}+2\right)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{e}$ 또는 $x=e$ $\left(\because \frac{1}{e^3}\le x\le e\right)$

구간 $\left[\frac{1}{e^3}, e\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{1}{e^3}$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$\frac{16}{e^3}$	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e}$에서 최댓값 $\frac{4}{e}$, $x=e$에서 최솟값 0을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{4}{e}+0=\frac{4}{e}$

유형 11 삼각함수의 최대 · 최소

0786

답 ③

$f(x)=\sin x-x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	π	↘	-2π

함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 최댓값 $M=\pi$, $x=2\pi$에서 최솟값 $m=-2\pi$를 가지므로

$M-m=\pi-(-2\pi)=3\pi$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0787

답 ④

$f(x)=\sin x+\sin 2x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x+2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x+2(1-2\sin^2 x)\cos x-2\sin^2 x\cos x$

$=3\cos x(1-2\sin^2 x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	$\frac{\pi}{4}$	⋯	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 최댓값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

0788

답 $-e^{-\pi}$

$f(x)=e^x\sin x$에서

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=-\cos x$ $(\because e^x>0)$

$\tan x=-1$

$\therefore x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

❶

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	$\frac{3}{4}\pi$	⋯	$\frac{7}{4}\pi$	⋯	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7}{4}\pi}$	↗	0

함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 최댓값 $M=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$, $x=\frac{7}{4}\pi$에서 최솟값 $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7}{4}\pi}$을 가지므로

$$\frac{M}{m}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7}{4}\pi}}=-e^{\frac{3}{4}\pi-\frac{7}{4}\pi}=-e^{-\pi}$$

❷

채점 기준	배점
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 구하기	50%
❷ $\frac{M}{m}$의 값 구하기	50%

0789

답 2

$f(x)=\frac{\cos x}{2+\sin x}$에서

$f'(x)=\frac{-\sin x(2+\sin x)-\cos^2 x}{(2+\sin x)^2}=\frac{-2\sin x-1}{(2+\sin x)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	$\frac{7}{6}\pi$	⋯	$\frac{11}{6}\pi$	⋯	2π
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	$\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{11}{6}\pi$에서 최댓값 $M=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\frac{7}{6}\pi$에서 최솟값 $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$을 가지므로

$3(M^2+m^2)=3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=2$

유형 12 치환을 이용한 함수의 최대 · 최소

0790

답 ③

$f(x)=(\ln x)^3+3(\ln x)^2-\ln x^9$

$=(\ln x)^3+3(\ln x)^2-9\ln x$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{e^4}\le x\le e^2$에서 $-4\le t\le 2$이고, $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+3t^2-9t$

$g'(t)=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=-3$ 또는 $t=1$

$-4\le t\le 2$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	−4	⋯	−3	⋯	1	⋯	2
$g'(t)$		+	0	−	0	+	
$g(t)$	20	↗	27	↘	−5	↗	2

함수 $g(t)$는 $t=-3$에서 최댓값 27을 갖는다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=e^{-3}$에서 최댓값 27을 가지므로

$p=e^{-3}$, $q=27$

$\therefore \frac{q}{p}=27e^3$

0791

답 ②

$f(x)=e^{3x}+e^{2x}-e^x$에서 $e^x=t$로 놓으면 $t>0$이고, $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+t^2-t$

$g'(t)=3t^2+2t-1=(t+1)(3t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{3}$ $(\because t>0)$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$t>0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{3}$에서 최솟값 $-\frac{5}{27}$를 갖는다.

0792

답 0

$f(x)=2\sin^3 x+2\cos^2 x+a$
$=2\sin^3 x+2(1-\sin^2 x)+a$
$=2\sin^3 x-2\sin^2 x+a+2$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le \sin x\le 1$이므로 $-1\le t\le 1$이고, $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=2t^3-2t^2+a+2$

$g'(t)=6t^2-4t=2t(3t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\frac{2}{3}$

$-1\le t\le 1$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$a-2$	$\nearrow$	$a+2$	$\searrow$	$a+\frac{46}{27}$	$\nearrow$	$a+2$

함수 $g(t)$는 $t=0$ 또는 $t=1$일 때 최댓값 $a+2$를 가지므로
$a+2=4$에서 $a=2$
따라서 함수 $g(t)$의 최솟값은
$g(-1)=a-2=2-2=0$

0793

답 -112

$g(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$이므로

$g(x)=t$로 놓으면 $-2\le t\le 2$이고
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=2t^3-3t^2$
$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$
$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$
$-2\le t\le 2$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-28	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4

함수 $f(t)$는 $t=2$에서 최댓값 4, $t=-2$에서 최솟값 -28을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은
$4\times(-28)=-112$

Bible Says 삼각함수의 합성

(1) $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$
$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

(2) $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$
$\left(\text{단, }\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

참고

$g(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$에서 $g'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$
$g'(x)=0$에서 $\sqrt{3}\cos x=\sin x$
$\tan x=\sqrt{3}$ ····· ㉠
이때 $\sin x$, $\cos x$는 주기가 2π인 주기함수이므로 $0\le x\le 2\pi$라 하면 ㉠을 만족시키는 x의 값은
$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1

즉, $g(x)=t$로 놓으면 모든 실수 x에 대하여 $-2\le t\le 2$이다.

유형 13 함수의 최대·최소의 활용

0794

답 $\sqrt{2}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A의 좌표를 $\left(t,\ \frac{4}{t^2+2}\right)(t>0)$이라 하고 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=t$, $\overline{AH}=\frac{4}{t^2+2}$

삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{AB}$인 이등변삼각형이므로
$\overline{OB}=2\overline{OH}=2t$

삼각형 AOB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times 2t\times\frac{4}{t^2+2}=\frac{4t}{t^2+2}$

$S'(t)=\frac{4(t^2+2)-4t\times 2t}{(t^2+2)^2}=\frac{-4t^2+8}{(t^2+2)^2}=\frac{-4(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})}{(t^2+2)^2}$

$S'(t)=0$에서 $t=\sqrt{2}$ ($\because t>0$)

$t>0$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$

함수 $S(t)$는 $t=\sqrt{2}$에서 최댓값 $\sqrt{2}$를 가지므로 구하는 넓이의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

0795

답 $\frac{1}{e}$

$f(x)=e^{-2x}$에서 $f'(x)=-2e^{-2x}$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P의 좌표를 $(t,\ e^{-2t})$ $(t>0)$이라 하면
점 P에서의 접선의 방정식은 $y-e^{-2t}=-2e^{-2t}(x-t)$이므로

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\therefore y=-2e^{-2t}x+(2t+1)e^{-2t}$

이 직선의 x절편은 $\frac{2t+1}{2}$, y절편은 $(2t+1)e^{-2t}$이므로 삼각형 OQR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times\frac{2t+1}{2}\times(2t+1)e^{-2t}$

$=\frac{1}{4}(2t+1)^2e^{-2t}=\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)e^{-2t}$

$S'(t)=(2t+1)e^{-2t}-2\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)e^{-2t}$

$=\left(-2t^2+\frac{1}{2}\right)e^{-2t}$

$S'(t)=0$에서 $2t^2-\frac{1}{2}=0$, $t^2=\frac{1}{4}$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ ($\because t>0$)

$t>0$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

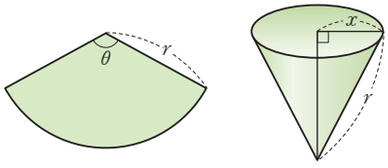
t	(0)	…	$\frac{1}{2}$	…
$S'(t)$		+	0	−
$S(t)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

함수 $S(t)$는 $t=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$을 가지므로 구하는 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{e}$이다.

0796

답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 원뿔 모양의 그릇의 밑면의 반지름의 길이를 x라 하면



부채꼴의 넓이가 6이므로 $\frac{1}{2}r^2\theta=6$ $\therefore r=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\theta}}$

부채꼴의 호의 길이 $r\theta$는 원뿔 모양의 그릇의 밑면의 둘레의 길이 $2\pi x$와 같으므로

$r\theta=2\pi x$ $\therefore x=\frac{r\theta}{2\pi}=\frac{\sqrt{3\theta}}{\pi}$

원뿔 모양의 그릇의 높이는

$\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\theta}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3\theta}}{\pi}\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{\theta}-\frac{3\theta}{\pi^2}}$

따라서 원뿔 모양의 그릇의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi x^2\times\sqrt{\frac{12}{\theta}-\frac{3\theta}{\pi^2}}=\frac{\theta}{\pi}\sqrt{\frac{12}{\theta}-\frac{3\theta}{\pi^2}}=\frac{1}{\pi}\sqrt{12\theta-\frac{3\theta^3}{\pi^2}}$

이때 $f(\theta)=12\theta-\frac{3\theta^3}{\pi^2}$이라 하면 그릇의 부피는 $f(\theta)$가 최대일 때 최대가 된다.

$f'(\theta)=12-\frac{9\theta^2}{\pi^2}$이므로

$f'(\theta)=0$에서 $\theta^2=\frac{4}{3}\pi^2$

$\therefore \theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

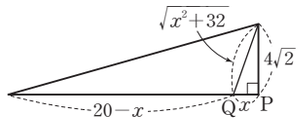
$0<\theta<2\pi$에서 함수 $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	…	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$	…	(2π)
$f'(\theta)$		+	0	−	
$f(\theta)$		↗	극대	↘	

함수 $f(\theta)$는 $\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 θ의 값은 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$이다.

0797

답 72억 원



$\overline{PQ}=x$ km, 건설 비용을 $A(x)$(억 원)이라 하면

$A(x)=6\sqrt{x^2+32}+2(20-x)$ ❶

$A'(x)=\frac{6x}{\sqrt{x^2+32}}-2$

$A'(x)=0$에서

$\frac{6x}{\sqrt{x^2+32}}=2$, $6x=2\sqrt{x^2+32}$

$9x^2=x^2+32$, $x^2=4$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $A(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	2	…
$A'(x)$		−	0	+
$A(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $A(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 건설 비용의 최솟값은

$6\sqrt{2^2+32}+2(20-2)=72$(억 원) ❷

채점 기준	배점
❶ $\overline{PQ}=x$ km로 놓고 건설 비용에 대한 함수식 $A(x)$ 구하기	40%
❷ 함수 $A(x)$가 최소가 되는 x의 값을 구하여 건설 비용의 최솟값 구하기	60%

0798

답 $\sqrt{3}$

$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 $\angle ODC=\theta$이고, $\overline{OC}=\overline{OD}$이므로

$\angle OCD=\angle ODC=\theta$

즉, $\angle COD=\pi-2\theta$, $\angle BOC=\theta$이므로 사각형 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=$(삼각형 OAD의 넓이)+(삼각형 OCD의 넓이)

+(삼각형 OBC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin(\pi-2\theta)+\frac{1}{2}\sin\theta$

$=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta=\sin\theta+\sin\theta\cos\theta$

$=\sin\theta(1+\cos\theta)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$S'(\theta)=\cos\theta(1+\cos\theta)-\sin^2\theta$
$=\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta$
$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1\ (\because \sin^2\theta=1-\cos^2\theta)$
$=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{에서 } 0<\cos\theta<1\right)$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $S(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	

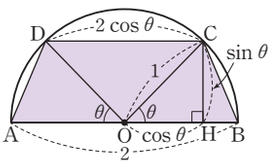
함수 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 가지므로

$k=\frac{1}{3}$, $M=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\therefore 4kM=4\times\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$

참고

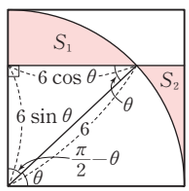
오른쪽 그림과 같이 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{CH}=\sin\theta$, $\overline{OH}=\cos\theta$이므로
$\overline{DC}=2\cos\theta$
따라서 사각형 ABCD의 넓이 $S(\theta)$는
$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(2+2\cos\theta)\times\sin\theta$
$=(1+\cos\theta)\sin\theta$
로도 구할 수 있다.



0799

답 ②

오른쪽 그림과 같이 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$를 정하고 두 부분의 넓이를 S_1, S_2라 하면



$S_1=\frac{1}{2}\times6^2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\times6\sin\theta\times6\cos\theta$
$=9\pi-18\theta-18\sin\theta\cos\theta$
$=9\pi-18\theta-9\sin2\theta$

$S_2=6\times6\sin\theta-\frac{1}{2}\times6\sin\theta\times6\cos\theta-\frac{1}{2}\times6^2\times\theta$
$=36\sin\theta-18\sin\theta\cos\theta-18\theta$
$=36\sin\theta-9\sin2\theta-18\theta$

$f(\theta)=S_1+S_2$라 하면
$f(\theta)=9\pi-18\sin2\theta+36\sin\theta-36\theta$
$f'(\theta)=-36\cos2\theta+36\cos\theta-36$
$=-72\cos^2\theta+36+36\cos\theta-36$
$=-72\cos^2\theta+36\cos\theta$
$=-36\cos\theta(2\cos\theta-1)$

$f'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	극소	↗	

함수 $f(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 넓이의 최솟값은

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=9\pi-18\sin\frac{2}{3}\pi+36\sin\frac{\pi}{3}-12\pi=9\sqrt{3}-3\pi$

유형 14 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수

0800

답 8

$\ln x-x+10=n$에서 $\ln x-x=n-10$
$f(x)=\ln x-x$라 하면 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$

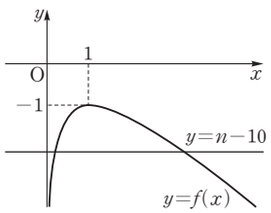
$f'(x)=\frac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	-1	↘

또한 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$,
$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=n-10$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=n-10$이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로
$n-10<-1$ $\therefore n<9$
따라서 구하는 자연수 n은 1, 2, 3, …, 8의 8개이다.

0801

답 1

$f(x)=2\sqrt{x+1}-x$라 하면 $x\geq-1$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1=\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$

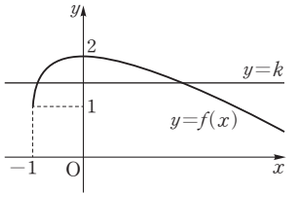
$f'(x)=0$에서 $\sqrt{x+1}=1$ $\therefore x=0$

$x\geq-1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	↗	2	↘

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

또한 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $1\le k<2$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 1이다.

0802

답 ②

$\frac{(\ln x)^2}{x^2}-k=0$에서 $\frac{(\ln x)^2}{x^2}=k$

$f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x^2}$이라 하면 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$

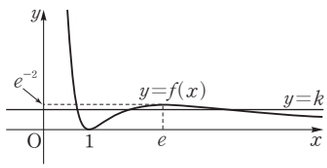
$$f'(x)=\frac{2\ln x\times\frac{1}{x}\times x^2-(\ln x)^2\times 2x}{x^4}=\frac{2\ln x(1-\ln x)}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=0$ 또는 $\ln x=1$ $\therefore x=1$ 또는 $x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	1	…	e	…
$f'(x)$		−	0	+	0	−
$f(x)$		↘	0	↗	e^{-2}	↘

또한 $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$0<k<e^{-2}$

0803

답 3

$g(x)=e^x(\sin x-\cos x)$ $(0\le x\le 2\pi)$라 하면

$g'(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)=2e^x\sin x$

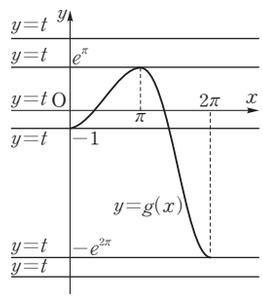
$g'(x)=0$에서 $\sin x=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	π	…	2π
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	−1	↗	e^{π}	↘	$-e^{2\pi}$

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



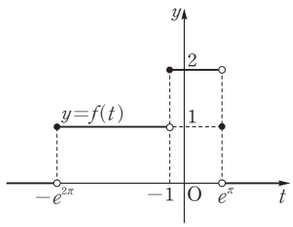
방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=t$의 서로 다른 교점의 개수와 같으므로

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<-e^{2\pi}\text{ 또는 }t>e^{\pi})\\ 1 & (-e^{2\pi}\le t<-1\text{ 또는 }t=e^{\pi})\\ 2 & (-1\le t<e^{\pi})\end{cases}$$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=-e^{2\pi}$, $t=-1$, $t=e^{\pi}$에서 불연속이므로 구하는 실수 t의 개수는 3이다.

참고

함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

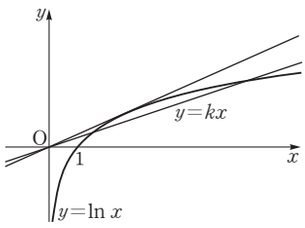


유형 15 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수

0804

답 ①

방정식 $\ln x=kx$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



$f(x)=\ln x$, $g(x)=kx$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g'(x)=k$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\ln t=kt$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\frac{1}{t}=k$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\ln t=1$ $\therefore t=e$

이를 ㉡에 대입하면 $k=\frac{1}{e}$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$0<k<\frac{1}{e}$

다른 풀이

$\ln x=kx$에서 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$이므로 $\frac{\ln x}{x}=k$

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

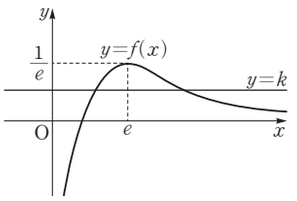
$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

또한 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 함수
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



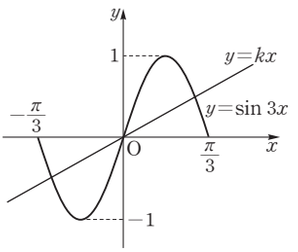
방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$0<k<\frac{1}{e}$

0805

답 ⑤

$-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$에서 방정식
$\sin 3x=kx$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sin 3x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

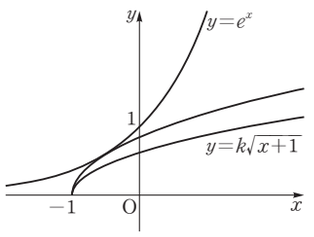


$f(x)=\sin 3x$라 하면
$f'(x)=3\cos 3x$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=3$이므로 접선의 방정식은 $y=3x$
따라서 곡선 $y=\sin 3x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $0\le k<3$이므로 k의 값이 될 수 없는 것은 3이다.

0806

답 ③

방정식 $e^x=k\sqrt{x+1}$이 실근을 갖지 않으려면 곡선 $y=e^x$과 곡선 $y=k\sqrt{x+1}$이 만나지 않아야 한다.



$f(x)=e^x$, $g(x)=k\sqrt{x+1}$이라 하면

$f'(x)=e^x$, $g'(x)=\frac{k}{2\sqrt{x+1}}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^t=k\sqrt{t+1}$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $e^t=\frac{k}{2\sqrt{t+1}}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $k\sqrt{t+1}=\frac{k}{2\sqrt{t+1}}$

$2(t+1)=1$, $t+1=\frac{1}{2}$

$\therefore t=-\frac{1}{2}$

$t=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{k}{\sqrt{2}}$ $\therefore k=\sqrt{\frac{2}{e}}$

따라서 곡선 $y=e^x$과 곡선 $y=k\sqrt{x+1}$이 만나지 않으려면

$k<\sqrt{\frac{2}{e}}$ $\therefore a=\sqrt{\frac{2}{e}}$

유형 16 주어진 구간에서 성립하는 부등식 $f(x)\ge a$ 꼴

0807

답 $k\le 1$

$e^x-x\ge k$에서 $e^x-x-k\ge 0$
$f(x)=e^x-x-k$라 하면
$f'(x)=e^x-1$
$f'(x)=0$에서 $x=0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$1-k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $1-k$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이 성립하려면
$1-k\ge 0$ $\therefore k\le 1$

0808

답 -2

$(\ln x)^2-2\ln x>a$에서 $(\ln x)^2-2\ln x-a>0$
$f(x)=(\ln x)^2-2\ln x-a$라 하면
$f'(x)=2\ln x\times\frac{1}{x}-\frac{2}{x}=\frac{2\ln x-2}{x}=\frac{2(\ln x-1)}{x}$
$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-1-a$	↗

함수 $f(x)$는 $x=e$에서 최솟값 $-1-a$를 가지므로 $x>0$일 때 $f(x)>0$이 성립하려면
$-1-a>0$ $\therefore a<-1$
따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 -2이다.

0809

답 ②

$2\ln(x-1)-x\le k$에서 $2\ln(x-1)-x-k\le 0$
$f(x)=2\ln(x-1)-x-k$라 하면
$f'(x)=\frac{2}{x-1}-1=\frac{-x+3}{x-1}$
$f'(x)=0$에서 $x=3$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$x>1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	$2\ln 2-3-k$	↘

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $2\ln 2-3-k$를 가지므로 $x>1$일 때 $f(x)\le 0$이 성립하려면

$2\ln 2-3-k\le 0$ $\therefore k\ge 2\ln 2-3$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 $2\ln 2-3$이다.

0810

답 ②

$2\sin 2x+4\sin x\le a$에서 $2\sin 2x+4\sin x-a\le 0$

$f(x)=2\sin 2x+4\sin x-a$라 하면

$f'(x)=4\cos 2x+4\cos x$

$=8\cos^2 x+4\cos x-4$

$=4(\cos x+1)(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\pi$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$	$-a$	↗	$3\sqrt{3}-a$	↘	$-a$	↘	$-3\sqrt{3}-a$	↗	$-a$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 $3\sqrt{3}-a$를 가지므로 $0\le x\le 2\pi$에서 $f(x)\le 0$이 성립하려면

$3\sqrt{3}-a\le 0$ $\therefore a\ge 3\sqrt{3}$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 $3\sqrt{3}$이다.

0811

답 2

$x+2-2e^{2x}\le k$에서 $x+2-2e^{2x}-k\le 0$

$f(x)=x+2-2e^{2x}-k$라 하면

$f'(x)=1-4e^{2x}$

$f'(x)=0$에서 $e^{2x}=\frac{1}{4}$, $e^x=\frac{1}{2}$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=-\ln 2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$\frac{3}{2}-\ln 2-k$	↘

함수 $f(x)$는 $x=-\ln 2$에서 최댓값 $\frac{3}{2}-\ln 2-k$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 0$이 성립하려면

$\frac{3}{2}-\ln 2-k\le 0$ $\therefore k\ge\frac{3}{2}-\ln 2$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{3}{2}-\ln 2$이므로

$a=\frac{3}{2}$, $b=-1$

$\therefore 2a+b=3+(-1)=2$

0812

답 2

$2e^x-x^2-2x\ge k$에서 $2e^x-x^2-2x-k\ge 0$

$f(x)=2e^x-x^2-2x-k$라 하면

$f'(x)=2e^x-2x-2$

$f''(x)=2e^x-2$

$x\ge 0$에서 $f''(x)\ge 0$이므로 $f'(x)$는 $x\ge 0$에서 증가하는 함수이다. ❶

이때 $f'(0)=0$이므로 $x\ge 0$에서 $f'(x)\ge 0$이다.

즉, $f(x)$는 $x\ge 0$에서 증가하는 함수이다. ❷

$x\ge 0$일 때 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$f(0)=2-k\ge 0$ $\therefore k\le 2$

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 2이다. ❸

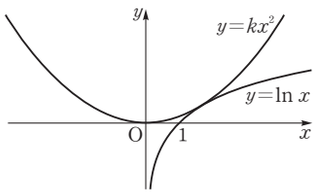
채점 기준	배점
❶ $x\ge 0$에서 $f'(x)$가 증가하는 함수임을 알기	40%
❷ $x\ge 0$에서 $f(x)$가 증가하는 함수임을 알기	30%
❸ 실수 k의 최댓값 구하기	30%

유형 17 주어진 구간에서 성립하는 부등식 $f(x)\ge g(x)$ 꼴

0813

답 ④

$x>0$에서 $kx^2>\ln x$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=kx^2$이 곡선 $y=\ln x$보다 항상 위쪽에 있어야 한다.



$f(x)=kx^2$, $g(x)=\ln x$라 하면

$f'(x)=2kx$, $g'(x)=\frac{1}{x}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $kt^2=\ln t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $2kt=\frac{1}{t}$ $\therefore k=\frac{1}{2t^2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}=\ln t$ $\therefore t=\sqrt{e}$

이를 ㉡에 대입하면 $k=\frac{1}{2e}$

이때 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으려면

$k>\frac{1}{2e}$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 1이다.

다른 풀이

$kx^2>\ln x$에서 $\frac{\ln x}{x^2}<k$ ($\because x>0$)

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=\dfrac{1}{2}$ $\therefore x=\sqrt{e}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{e}$에서 최댓값 $\dfrac{1}{2e}$을 가지므로 $x>0$일 때

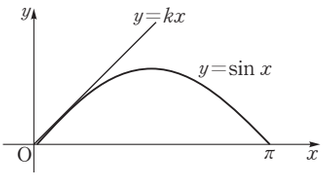
$f(x)<k$가 성립하려면 $k>\dfrac{1}{2e}$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 1이다.

0814

답 1

$0<x<\pi$에서 $\sin x<kx$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sin x$가 직선 $y=kx$보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.



$f(x)=\sin x$라 하면

$f'(x)=\cos x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$이므로 접선의 방정식은

$y=x$

따라서 $0<x<\pi$에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=kx$보다 항상 아래쪽에 있으려면

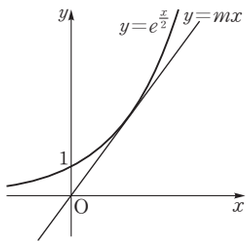
$k\geq 1$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 1이다.

0815

답 ①

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접해야 한다.



$f(x)=e^{\frac{x}{2}}$, $g(x)=mx$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $g'(x)=m$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^{\frac{t}{2}}=mt$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}=m$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2m=mt$ $\therefore t=2$

이를 ㉡에 대입하면 $m=\dfrac{e}{2}$

이때 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접하려면

$0<m\leq\dfrac{e}{2}$ ($\because m>0$)

따라서 구하는 양수 m의 최댓값은 $\dfrac{e}{2}$이다.

다른 풀이

$f(x)\geq g(x)$에서 $f(x)-g(x)\geq 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=e^{\frac{x}{2}}-mx$

$h'(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-m$

$h'(x)=0$에서 $\dfrac{x}{2}=\ln 2m$ $\therefore x=2\ln 2m$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$2\ln 2m$	$\cdots$
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘	$2m-2m\ln 2m$	↗

함수 $h(x)$는 $x=2\ln 2m$에서 최솟값 $2m-2m\ln 2m$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\geq 0$이 성립하려면

$2m-2m\ln 2m\geq 0$, $\ln 2m\leq 1$ ($\because m>0$)

$\therefore 0<m\leq\dfrac{e}{2}$

따라서 구하는 양수 m의 최댓값은 $\dfrac{e}{2}$이다.

유형 18 직선 운동에서의 속도와 가속도

확인 문제 (1) $3e^{-3}$ (2) $-9e^{-3}$

$f(t)=1-e^{-3t}$이라 하고, 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=f'(t)=3e^{-3t}$, $a=f''(t)=-9e^{-3t}$

(1) $t=1$에서의 점 P의 속도는

$f'(1)=3e^{-3}$

(2) $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$f''(1)=-9e^{-3}$

0816

답 3

$f(t)=p\sin\pi t+q\cos\pi t$라 하고, 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=f'(t)=p\pi\cos\pi t-q\pi\sin\pi t$

$a=f''(t)=-p\pi^2\sin\pi t-q\pi^2\cos\pi t$

점 P의 $t=3$에서의 속도가 $-\pi$, 가속도가 $2\pi^2$이므로

$f'(3)=-\pi$에서 $-p\pi=-\pi$

$\therefore p=1$

$f''(3)=2\pi^2$에서 $q\pi^2=2\pi^2$

$\therefore q=2$

$\therefore p+q=1+2=3$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0817

답 ②

$x(t)=\ln(t^2+4)-1$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=x'(t)=\dfrac{2t}{t^2+4}$

$a=x''(t)=\dfrac{2(t^2+4)-2t\times 2t}{(t^2+4)^2}$

$=\dfrac{-2t^2+8}{(t^2+4)^2}=\dfrac{-2(t+2)(t-2)}{(t^2+4)^2}$

이때 가속도가 0이 되는 시각은

$x''(t)=0$에서 $t=2$ ($\because t\geq 0$)

따라서 점 P의 가속도가 0인 시각 $t=2$에서의 점 P의 속도는

$x'(2)=\dfrac{2\times 2}{2^2+4}=\dfrac{1}{2}$

0818

답 $-e^2$

$x(t)=(t^2-3t+1)e^t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=x'(t)=(2t-3)e^t+(t^2-3t+1)e^t$

$=(t^2-t-2)e^t=(t+1)(t-2)e^t$ ····· ❶

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$x'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because t\geq 0$, $e^t>0$) ····· ❷

따라서 점 P는 $t=2$일 때 운동 방향이 바뀌므로 구하는 점 P의 위치는

$x(2)=(4-6+1)e^2=-e^2$ ····· ❸

채점 기준	배점
❶ 점 P의 시각 t에서의 속도 v 구하기	30%
❷ 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각 t 구하기	40%
❸ 점 P의 위치 구하기	30%

0819

답 ③

$x_1(t)=e^t$, $x_2(t)=kt^2$이므로 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도는

$x_1'(t)=e^t$, $x_2'(t)=2kt$

두 점 P, Q의 속도가 같아지려면 $x_1'(t)=x_2'(t)$에서

$e^t=2kt$ $\therefore \dfrac{e^t}{t}=2k$ ($\because t>0$) ····· ㉠

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 두 번 존재하려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$f(t)=\dfrac{e^t}{t}$이라 하면

$f'(t)=\dfrac{e^t t-e^t}{t^2}=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because e^t>0$)

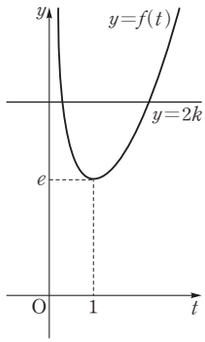
$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	···	1	···
$f'(t)$		−	0	+
$f(t)$		↘	e	↗

또한 $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)=\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\infty$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 $t>0$일 때, 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=2k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$2k>e$ $\therefore k>\dfrac{e}{2}$



유형 19 평면 운동에서의 속도

확인 문제 (1) $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (2) 1

$x=\sin t$, $y=\cos t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=-\sin t$

(1) $t=\dfrac{\pi}{3}$에서의 점 P의 속도는

$\left(\cos\dfrac{\pi}{3}, -\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $t=\dfrac{\pi}{3}$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

0820

답 ⑤

$x=2(t-1)$, $y=t^2$에서

$\dfrac{dx}{dt}=2$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$

시각 $t=2\sqrt{2}$에서의 점 P의 속도는

$(2, 4\sqrt{2})$

따라서 시각 $t=2\sqrt{2}$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{36}=6$

0821

답 ③

$x=e^{at}$, $y=e^{bt}$에서

$\dfrac{dx}{dt}=ae^{at}$, $\dfrac{dy}{dt}=be^{bt}$

시각 t에서의 점 P의 속도는

(ae^{at}, be^{bt})

시각 $t=\ln\sqrt{2}$에서의 점 P의 속도가 $(\sqrt{2}, 4)$이므로

$ae^{a\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, $be^{b\ln\sqrt{2}}=4$

$a\times(\sqrt{2})^a=\sqrt{2}$, $b\times(\sqrt{2})^b=4$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=1+2=3$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0822

답 ③

$x=t+\sin t\cos t$, $y=\tan t$에서

$\frac{dx}{dt}=1+\cos^2 t-\sin^2 t=2\cos^2 t$ ($\because \sin^2 t=1-\cos^2 t$)

$\frac{dy}{dt}=\sec^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(2\cos^2 t)^2+\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2}$

$=\sqrt{4\cos^4 t+\frac{1}{\cos^4 t}}$

이때 $\cos^4 t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4\cos^4 t+\frac{1}{\cos^4 t}\geq 2\sqrt{4\cos^4 t\times\frac{1}{\cos^4 t}}=4$

$\left(\text{단, 등호는 } 4\cos^4 t=\frac{1}{\cos^4 t}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 점 P의 속력의 최솟값은 $\sqrt{4}=2$이다.

0823

답 1

$x=4t$, $y=\frac{1}{2}(t+1)^2-4\ln(t+1)$에서

$\frac{dx}{dt}=4$, $\frac{dy}{dt}=(t+1)-\frac{4}{t+1}$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{4^2+\left\{(t+1)-\frac{4}{t+1}\right\}^2}$

$=\sqrt{(t+1)^2+\frac{16}{(t+1)^2}+8}$

이때 $(t+1)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\sqrt{(t+1)^2+\frac{16}{(t+1)^2}+8}\geq\sqrt{2\sqrt{(t+1)^2\times\frac{16}{(t+1)^2}}+8}$

$=\sqrt{16}=4$

단, 등호는 $(t+1)^2=\frac{16}{(t+1)^2}$일 때 성립하므로

$(t+1)^4=16$에서 $t+1=2$ ($\because t+1>0$)

$\therefore t=1$

따라서 점 P의 속력이 최소가 되는 시각은 $t=1$이다.

유형 20 평면 운동에서의 가속도

확인 문제 (1) $(-e, e)$ (2) $\sqrt{2}e$

$x=1-e^t$, $y=1+e^t$에서

$\frac{dx}{dt}=-e^t$, $\frac{dy}{dt}=e^t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-e^t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=e^t$

(1) $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$(-e^1, e^1)=(-e, e)$

(2) $t=1$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-e)^2+e^2}=\sqrt{2}e$

0824

답 ②

$x=t^2+at$, $y=at^2-4t$에서

$\frac{dx}{dt}=2t+a$, $\frac{dy}{dt}=2at-4$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(2t+a)^2+(2at-4)^2}$

$=\sqrt{(4a^2+4)t^2-12at+a^2+16}$

시각 $t=2$에서의 점 P의 속력이 $2\sqrt{13}$이므로

$\sqrt{4(4a^2+4)-24a+a^2+16}=2\sqrt{13}$

$17a^2-24a+32=52$, $17a^2-24a-20=0$

$(17a+10)(a-2)=0$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$\frac{dx}{dt}=2t+2$, $\frac{dy}{dt}=4t-4$이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=2$, $\frac{d^2y}{dt^2}=4$

따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$

0825

답 ④

$x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$에서

$\frac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t)=-2e^t\sin t$

$\frac{d^2y}{dt^2}=e^t(\sin t+\cos t)+e^t(\cos t-\sin t)=2e^t\cos t$

시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{(-2e^t\sin t)^2+(2e^t\cos t)^2}$

$=\sqrt{4e^{2t}(\sin^2 t+\cos^2 t)}$

$=2e^t$ ($\because 2e^t>0$)

따라서 시각 $t=3$에서의 점 P의 가속도의 크기는 $2e^3$이다.

0826

답 3

$x=at^2+a\sin t$, $y=a\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=2at+a\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-a\sin t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=2a-a\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-a\cos t$ ..... ❶

시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{(2a-a\sin t)^2+(-a\cos t)^2}$

$=\sqrt{4a^2-4a^2\sin t+a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}$

$=\sqrt{5a^2-4a^2\sin t}$ ..... ❷

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

시각 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 가속도의 크기가 $3\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{3a^2}=3\sqrt{3}$ $\therefore a=3\ (\because a>0)$ ❸

채점 기준	배점
❶ $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ 구하기	30%
❷ 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기 구하기	40%
❸ 양수 a의 값 구하기	30%

0827

답 4

$x=1-\cos 4t$, $y=\frac{1}{4}\sin 4t$에서

$\frac{dx}{dt}=4\sin 4t$, $\frac{dy}{dt}=\cos 4t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=16\cos 4t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-4\sin 4t$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(4\sin 4t)^2+(\cos 4t)^2}$

$=\sqrt{16\sin^2 4t+\cos^2 4t}$

$=\sqrt{15\sin^2 4t+1}$

즉, $\sin^2 4t=1$일 때 점 P의 속력이 최대이고, 이때 $\cos^2 4t=0$이다.

시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{(16\cos 4t)^2+(-4\sin 4t)^2}$

$=\sqrt{256\cos^2 4t+16\sin^2 4t}$

따라서 점 P의 속력이 최대인 시각에서의 가속도의 크기는

$\sqrt{0+16}=4$

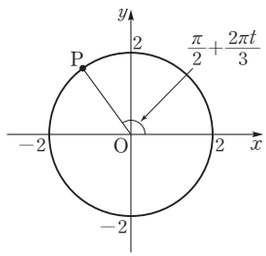
0828

답 ③

점 P가 3초 동안 반지름의 길이가 2인 원 위를 1회전하므로

t초 후 점 P의 동경과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는

$\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{3}$



출발한 지 t초 후의 점 P의 좌표는

$\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{3}\right),\ 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi t}{3}\right)\right)$

즉, $x=-2\sin\frac{2\pi t}{3}$, $y=2\cos\frac{2\pi t}{3}$이므로

$\frac{dx}{dt}=-\frac{4}{3}\pi\cos\frac{2\pi t}{3}$, $\frac{dy}{dt}=-\frac{4}{3}\pi\sin\frac{2\pi t}{3}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{8}{9}\pi^2\sin\frac{2\pi t}{3}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{8}{9}\pi^2\cos\frac{2\pi t}{3}$

시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\pi^2\sin\frac{2\pi t}{3}\right)^2+\left(-\frac{8}{9}\pi^2\cos\frac{2\pi t}{3}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{64}{81}\pi^4\left(\sin^2\frac{2\pi t}{3}+\cos^2\frac{2\pi t}{3}\right)}=\frac{8}{9}\pi^2$

따라서 점 P가 출발한 지 1초 후의 가속도의 크기는 $\frac{8}{9}\pi^2$이다.

1 권

PART B 내신 잡는 종합 문제

0829

답 ③

$f(x)=\ln x-4x$라 하면 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=\frac{1}{x}-4$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{4}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

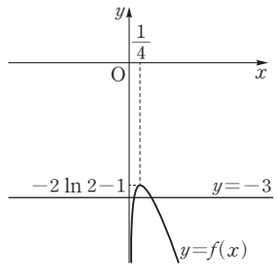
x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	$-2\ln 2-1$	↘

또한 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

방정식 $f(x)=-3$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-3$의 서로 다른 교점의 개수와 같으므로 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



0830

답 ②

$f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+k$에서 $x>0$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{x^4}$, $x^3=1$ $\therefore x=1\ (\because x>0)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$3+k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $3+k$를 가지므로

$3+k=5$ $\therefore k=2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0831

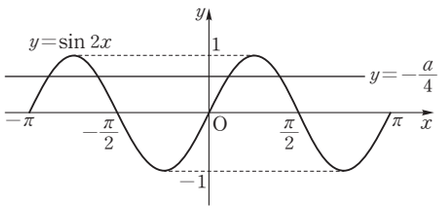
답 ④

$f(x)=ax^2-2\sin 2x$라 하면

$f'(x)=2ax-4\cos 2x$

$f''(x)=2a+8\sin 2x$

$f''(x)=0$에서 $\sin 2x=-\frac{a}{4}$



곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 위의 그림과 같이 곡선 $y=\sin 2x$와 직선 $y=-\frac{a}{4}$가 접하지 않으면서 만나야 하므로

$-1<-\frac{a}{4}<1$에서 $-4<a<4$

따라서 구하는 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이다.

0832

답 -3

$x(t)=2\cos t-\cos^2 t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=x'(t)=-2\sin t+2\cos t\sin t=2\sin t(\cos t-1)$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$x'(t)=0$에서 $\sin t=0$ 또는 $\cos t=1$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\pi$ $\left(\because 0\le t\le\frac{3}{2}\pi\right)$

따라서 점 P는 $t=\pi$일 때 운동 방향이 바뀌므로 구하는 점 P의 위치는

$x(\pi)=2\cos\pi-\cos^2\pi=-2-1=-3$

0833

답 ⑤

$f(x)=ax^2-bx+\ln x$에서

$f'(x)=2ax-b+\frac{1}{x}$, $f''(x)=2a-\frac{1}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$에서 $2a-b+1=0$ ····· ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 2이므로

$f''(2)=0$에서 $2a-\frac{1}{4}=0$ $\therefore a=\frac{1}{8}$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{4}-b+1=0$ $\therefore b=\frac{5}{4}$

$\therefore \frac{b}{a}=8\times\frac{5}{4}=10$

0834

답 11

$f(x)=x^4+ax^3+12x^2-16x-10$이라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+24x-16$

$f''(x)=12x^2+6ax+24$

구간 $(-\infty, \infty)$에서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이어야 한다.

즉, 이차방정식 $f''(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(3a)^2-12\times 24<0$, $a^2-32<0$

$\therefore -4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$

따라서 구하는 정수 a는 -5, -4, -3, ⋯, 4, 5의 11개이다.

0835

답 ④

$f(x)=\sin x(\cos x+1)$에서

$f'(x)=\cos x(\cos x+1)+\sin x\times(-\sin x)$

$=2\cos^2 x+\cos x-1$ ($\because \sin^2 x=1-\cos^2 x$)

$=(\cos x+1)(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	$\frac{\pi}{3}$	⋯	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x=0$ 또는 $x=\pi$에서 최솟값 0을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{3\sqrt{3}}{4}+0=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

0836

답 ①

$f(x)=xe^{-2x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-2x}-2xe^{-2x}=(1-2x)e^{-2x}$

$f''(x)=-2e^{-2x}-2(1-2x)e^{-2x}=(4x-4)e^{-2x}$

$f''(x)=0$에서 $x=1$

이때 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $\mathrm{A}(1, e^{-2})$이다.

$f'(1)=-e^{-2}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y-e^{-2}=-e^{-2}(x-1)$

$\therefore y=-e^{-2}(x-2)$

따라서 $\mathrm{B}(2, 0)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times e^{-2}=e^{-2}$

0837

답 $2\sqrt{65}$

$e^t=2$에서 $t=\ln 2$

즉, 점 P의 위치가 $(2, 4+8\ln 2)$일 때의 시각은 $\ln 2$이다.

$\frac{dx}{dt}=e^t$, $\frac{dy}{dt}=2e^{2t}+8$에서

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=4e^{2t}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(e^t,\ 4e^{2t})$

따라서 $t=\ln 2$에서의 점 P의 가속도는 $(2,\ 16)$이므로 가속도의 크기는

$\sqrt{2^2+16^2}=\sqrt{260}=2\sqrt{65}$

0838

답 ②

$\ln x=t$로 놓으면 $1\le x\le e^3$에서 $0\le t\le 3$

함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-3t^2+3$

$g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$ ($\because\ 0\le t\le 3$)

$0\le t\le 3$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	3	↘	-1	↗	3

함수 $g(t)$는 $t=0$ 또는 $t=3$에서 최댓값 3, $t=2$에서 최솟값 -1을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$3+(-1)=2$

0839

답 ⑤

직사각형이 곡선 $y=e^{-x^2}$과 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 t ($t>0$), 직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=2te^{-t^2}$

$S'(t)=2e^{-t^2}-4t^2e^{-t^2}=2(1-2t^2)e^{-t^2}$

$S'(t)=0$에서 $1=2t^2$ ($\because\ e^{-t^2}>0$)

$\therefore\ t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because\ t>0$)

$t>0$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	$\frac{\sqrt{2e}}{e}$	↘

함수 $S(t)$는 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{\sqrt{2e}}{e}$를 가지므로 구하는 넓이의 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{2e}}{e}$이다.

0840

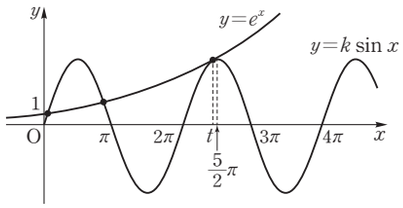
답 ④

$f(x)=e^x$, $g(x)=k\sin x$에서

$f'(x)=e^x$, $g'(x)=k\cos x$

방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이려면 $x>0$일 때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

따라서 다음 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접해야 하고, 이때의 접점의 x좌표를 t라 하면 $2\pi<t<\dfrac{5\pi}{2}$이어야 한다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$일 때 접하므로

$f(t)=g(t)$에서 $e^t=k\sin t$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $e^t=k\cos t$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\cos t=\sin t$

$\therefore\ t=\dfrac{9\pi}{4}$ $\left(\because\ 2\pi<t<\dfrac{5\pi}{2}\right)$

이를 ㉠에 대입하면

$k=\dfrac{e^{\frac{9\pi}{4}}}{\sin\frac{9\pi}{4}}=\dfrac{e^{\frac{9\pi}{4}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$

다른 풀이

$f(x)=g(x)$에서 $e^x=k\sin x$

$\dfrac{\sin x}{e^x}=\dfrac{1}{k}$ ($\because\ k>0$)

$h(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$라 하면

$h'(x)=\dfrac{\cos x\times e^x-\sin x\times e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$

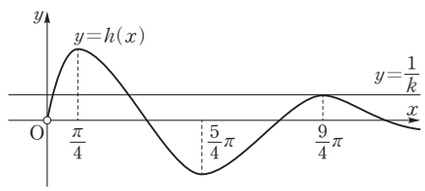
$h'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$, $\tan x=1$

$\therefore\ x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi,\ \cdots$

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{9}{4}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$		↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$	↘

따라서 곡선 $y=h(x)$는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이려면 위의 그림과 같이 직선 $y=\dfrac{1}{k}$이 $x=\dfrac{9}{4}\pi$에서 곡선 $y=h(x)$와 접해야 한다.

즉, $\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$에서 $k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

0841

답 ①

$f(x)\ge g(x)$에서 $e^x-1\ge ax^2-x$

$e^x+x-1\ge ax^2$, $\dfrac{e^x+x-1}{x^2}\ge a$ ($\because\ x^2>0$)

$h(x)=\dfrac{e^x+x-1}{x^2}$이라 하면

$h'(x)=\dfrac{(e^x+1)x^2-(e^x+x-1)\times 2x}{(x^2)^2}=\dfrac{(e^x-1)(x-2)}{x^3}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$h'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	$\frac{e^2+1}{4}$	$\nearrow$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $\frac{e^2+1}{4}$을 가지므로 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\geq a$가 성립하려면 $a\leq\frac{e^2+1}{4}$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 $\frac{e^2+1}{4}$이다.

0842

답 ②

$f(x)=e^x\sin x+e^{-x}\cos x$에서

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

$=(e^x-e^{-x})\sin x+(e^x-e^{-x})\cos x$

$=(e^x-e^{-x})(\sin x+\cos x)$

$f'(x)=0$에서 $e^x=e^{-x}$ 또는 $\sin x=-\cos x$이므로

$e^{2x}=1$ 또는 $\tan x=-1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$ ($\because 0\leq x\leq\pi$)

구간 $[0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	극대	$\searrow$	$-e^{-\pi}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{\frac{3}{4}\pi}-e^{-\frac{3}{4}\pi})$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{4}$이므로

$ab=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

0843

답 ③

$f(x)=x^ne^{-x}$에서

$f'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^ne^{-\frac{n}{2}}$

$f'\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}e^{-\frac{n}{2}}\times\frac{n}{2}=\left(\frac{n}{2}\right)^ne^{-\frac{n}{2}}$

$\therefore f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$ (참)

ㄴ. $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=n$ ($\because e^{-x}>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) n이 홀수일 때

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

(ii) n이 짝수일 때

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(x)=x^{n-1}e^{-x}(n-x)=(nx^{n-1}-x^n)e^{-x}$에서

$f''(x)=\{n(n-1)x^{n-2}-nx^{n-1}\}e^{-x}-(nx^{n-1}-x^n)e^{-x}$

$=e^{-x}x^{n-2}\{x^2-2nx+n(n-1)\}$

(i) n이 홀수일 때

$x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

(ii) n이 짝수일 때

$x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

(i), (ii)에서 점 $(0,\ 0)$이 항상 곡선 $y=f(x)$의 변곡점인 것은 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0844

답 ③

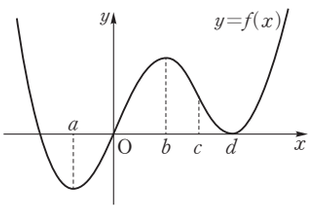
주어진 그래프로부터 $f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=d$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=c$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	변곡점	$\nearrow$	극대	$\searrow$	변곡점	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f(0)=f(d)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 개형은 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=d$에서 극소이므로 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는 x의 개수는 2이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ c)$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

즉, $0<x_1<x_2<c$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$이다. (거짓)

ㄷ. 점 $(c,\ f(c))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이고 위의 그림에서 $f(c)>0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0845

답 ④

$f(x)=2e^{-x}$이라 하면 $f'(x)=-2e^{-x}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$에서의 접선의 방정식은

$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$ $\therefore y=-2e^{-t}(x-t)+2e^{-t}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이 직선의 y절편은 위의 식에 $x=0$을 대입하면
$y=2te^{-t}+2e^{-t}=2e^{-t}(t+1)$
$\therefore$ B$(0,\ 2e^{-t}(t+1))$
점 A는 점 P에서 y축에 내린 수선의 발이므로
A$(0,\ 2e^{-t})$
$\therefore \overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=2e^{-t}(t+1)-2e^{-t}=2te^{-t}$
$\overline{AP}=t$이므로 삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$라 하면
$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AP}=\frac{1}{2}\times 2te^{-t}\times t=t^2e^{-t}$
$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=(2t-t^2)e^{-t}=-t(t-2)e^{-t}$
$S'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because t>0$)
$t>0$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(t)$		+	0	−
$S(t)$		↗	극대	↘

함수 $S(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값은 2이다.

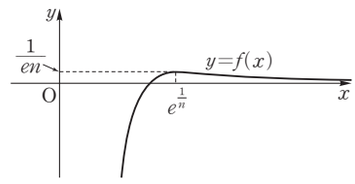
0846

답 ⑤

$f(x)=\frac{\ln x}{x^n}=x^{-n}\ln x$에서
$f'(x)=-nx^{-n-1}\ln x+x^{-n-1}=x^{-n-1}(-n\ln x+1)$
$f''(x)=(-n-1)x^{-n-2}(-n\ln x+1)-nx^{-n-2}$
$=x^{-n-2}\{(n^2+n)\ln x-2n-1\}$
$f'(x)=0$에서 $-n\ln x+1=0$ ($\because x>0$에서 $x^{-n-1}>0$)
$\ln x=\frac{1}{n}$ $\therefore x=e^{\frac{1}{n}}$
$f''(x)=0$에서 $(n^2+n)\ln x-2n-1=0$ ($\because x>0$에서 $x^{-n-2}>0$)
$\ln x=\frac{2n+1}{n^2+n}$ $\therefore x=e^{\frac{2n+1}{n^2+n}}$
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$	$e^{\frac{2n+1}{n^2+n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	−	−
$f''(x)$		−	−	−	0	+
$f(x)$		↱	극대	↘	변곡점	↳

또한 $\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=e^{\frac{1}{n}}$에서 최댓값을 갖는다. (참)
ㄴ. $n=2$일 때 $0<x<e^{\frac{5}{6}}$에서 $f''(x)<0$이므로
곡선 $y=f(x)$는 $0<x<\sqrt{e}$에서 위로 볼록하다. (참)
ㄷ. 위의 그래프에서 모든 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$의 치역은
$\left\{y\middle|y\le\frac{1}{en}\right\}$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

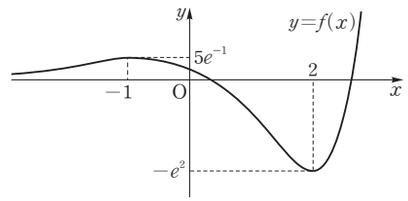
0847

답 ①

$f(x)=(x^2-3x+1)e^x$에서
$f'(x)=(2x-3)e^x+(x^2-3x+1)e^x$
$=(x^2-x-2)e^x=(x+1)(x-2)e^x$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ ($\because e^x>0$)
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$5e^{-1}$	↘	$-e^2$	↗

또한 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(x)=|f(x)-k|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-k\ge 0$, 즉 $f(x)\ge k$이어야 한다.
이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 $-e^2$이므로 $k\le -e^2$
따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 $-e^2$이다.

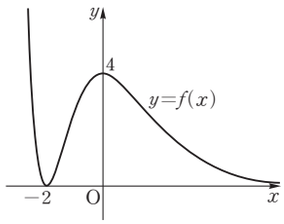
0848

답 12

$(x+2)^2e^{-x}=k$에서
$f(x)=(x+2)^2e^{-x}$이라 하면
$f'(x)=2(x+2)e^{-x}-(x+2)^2e^{-x}$
$=(-x^2-2x)e^{-x}=-x(x+2)e^{-x}$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ ($\because e^{-x}>0$)
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	−2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘

또한 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



❶
방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 서로 다른 교점의 개수와 같으므로

$$a_k=\begin{cases}3 & (1\le k\le 3)\\ 2 & (k=4)\\ 1 & (k\ge 5)\end{cases}$$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=3+3+3+2+1=12$

❷

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

채점 기준	배점
❶ $f(x)=(x+2)^2e^{-x}$으로 놓고 함수 $y=f(x)$의 그래프 그리기	50%
❷ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구하고 $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값 구하기	50%

0849

답 105

$\frac{\ln x^n}{x^2}\le k$에서 $\frac{n\ln x}{x^2}\le k$

$g(x)=\frac{n\ln x}{x^2}$라 하면

$g'(x)=\frac{\frac{n}{x}\times x^2-n\ln x\times 2x}{(x^2)^2}=\frac{n-2n\ln x}{x^3}=\frac{n(1-2\ln x)}{x^3}$

$g'(x)=0$에서 $1=2\ln x$

$\ln x=\frac{1}{2}$ $\therefore x=\sqrt{e}$

❶

$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$g'(x)$		+	0	−
$g(x)$		↗	$\frac{n}{2e}$	↘

함수 $g(x)$는 $x=\sqrt{e}$에서 최댓값 $\frac{n}{2e}$을 가지므로 $x>0$일 때

$g(x)\le k$가 성립하려면 $k\ge\frac{n}{2e}$

따라서 양수 k의 최솟값은

$f(n)=\frac{n}{2e}$

❷

$\therefore e\sum_{n=1}^{20}f(n)=e\sum_{n=1}^{20}\frac{n}{2e}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{20}n=\frac{1}{2}\times\frac{20\times 21}{2}=105$

❸

채점 기준	배점
❶ $g(x)=\frac{n\ln x}{x^2}$로 놓고 $g'(x)=0$의 근 구하기	30%
❷ 양수 k의 최솟값 $f(n)$ 구하기	40%
❸ $e\sum_{n=1}^{20}f(n)$의 값 구하기	30%

PART C 수능 녹인 변별력 문제

0850

답 ②

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\le g(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$의 최댓값이 $g(x)$의 최솟값보다 작거나 같아야 한다. …… ㉠

$-1\le\sin x\le 1$이므로 함수 $f(x)=\sin x+k$의 최댓값은 $k+1$이다.

$g(x)=xe^{2x}$에서

$g'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=e^{2x}(2x+1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2e}$

따라서 ㉠을 만족시키려면 $k+1\le-\frac{1}{2e}$

$\therefore k\le-\frac{1}{2e}-1$

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 $-\frac{1}{2e}-1$이다.

0851

답 107

$f(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)$

$=-2e^{-x}\cos x$

$f''(x)=2e^{-x}(\cos x+\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \cdots$

이때 자연수 n에 대하여 $x=\frac{4n-3}{2}\pi$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고, $x=\frac{4n-1}{2}\pi$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{4n-1}{2}\pi$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore a_n=\frac{4n-1}{2}\pi$

$f''(x)=0$에서 $\cos x=-\sin x$, $\tan x=-1$

$\therefore x=\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi, \cdots$

이때 $x=\frac{4n-1}{4}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=\frac{4n-1}{4}\pi$에서 변곡점을 갖는다.

$\therefore b_n=\frac{4n-1}{4}\pi$

$\therefore \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{10}(a_n-b_n)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{10}\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi$

$=\sum_{n=1}^{10}\left(n-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{10\times 11}{2}-\frac{1}{4}\times 10=\frac{105}{2}$

따라서 $p=2$, $q=105$이므로

$p+q=2+105=107$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0852

답 ④

$x_1(t)=t\ln t$, $x_2(t)=kt^3$이므로
시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도는
$x_1'(t)=\ln t+1$, $x_2'(t)=3kt^2$
두 점 P, Q의 속도가 같아지려면 $x_1'(t)=x_2'(t)$에서

$\ln t+1=3kt^2$ $\therefore \dfrac{\ln t+1}{3t^2}=k\ (\because t>0)$ ····· ㉠

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 두 번 존재하려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$f(t)=\dfrac{\ln t+1}{3t^2}$이라 하면

$f'(t)=\dfrac{\frac{1}{t}\times 3t^2-(\ln t+1)\times 6t}{(3t^2)^2}=\dfrac{-1-2\ln t}{3t^3}$

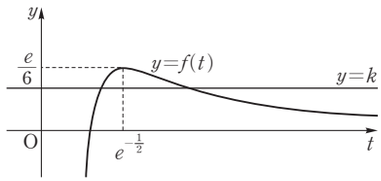
$f'(t)=0$에서 $-2\ln t=1$, $\ln t=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore t=e^{-\frac{1}{2}}$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	···	$e^{-\frac{1}{2}}$	···
$f'(t)$		+	0	−
$f(t)$		↗	$\frac{e}{6}$	↘

또한 $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)=-\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 $t>0$에서 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$0<k<\dfrac{e}{6}$

0853

답 ③

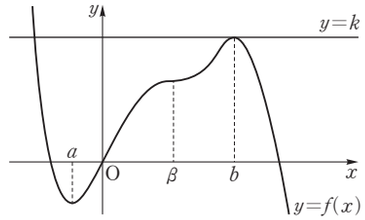
$f'(x)=0$이 되는 x의 값을 a, b $(a<0<b)$라 하고 함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	a	···	α	···	β	···	γ	···	b	···
$f'(x)$	−	0	+	+	+	0	+	+	+	0	−
$f''(x)$	+	+	+	0	−	0	+	0	−	−	−
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↱	변곡점	↗	변곡점	↱	극대	↘

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$에서 변곡점을 가지므로 변곡점의 개수는 3이다. (참)

ㄴ. $\alpha<x<\beta$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.
즉, $\alpha<x_1<x_2<\beta$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$이다. (거짓)

ㄷ. $f(0)=0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



양의 실수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 k이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0854

답 3

주어진 두 방정식이 모두 실근을 갖지 않으려면 직선 $y=kx$가 두 곡선 $y=\ln 3x$, $y=e^x$과 모두 만나지 않아야 한다.

(i) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=\ln 3x$와 접할 때

$y=\ln 3x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln 3x$ 위의 점 $(t, \ln 3t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln 3t=\dfrac{1}{t}(x-t)$ ····· ㉠

이 직선이 원점을 지나므로

$-\ln 3t=\dfrac{1}{t}\times(-t)$, $\ln 3t=1$ $\therefore t=\dfrac{e}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{3}{e}x$

(ii) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=e^x$과 접할 때

$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 $y=e^x$ 위의 점 (p, e^p)에서의 접선의 방정식은

$y-e^p=e^p(x-p)$ ····· ㉡

이 직선이 원점을 지나므로

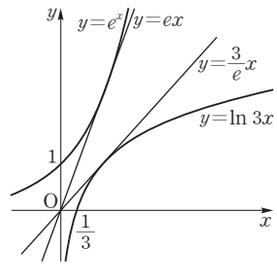
$-e^p=e^p\times(-p)$ $\therefore p=1$

이를 ㉡에 대입하면 $y=ex$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $\dfrac{3}{e}<k<e$

따라서 $a=\dfrac{3}{e}$, $b=e$이므로

$ab=\dfrac{3}{e}\times e=3$



0855

답 1

$f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x}$에서

$f'(x)=\dfrac{\frac{2}{x}\times x-(1+2\ln x)}{x^2}=\dfrac{1-2\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=\dfrac{1}{2}$

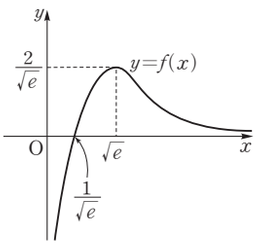
$\therefore x=\sqrt{e}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘

또한 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)$의 서로 다른 교점의 개수와 같으므로



$$g(t)=\begin{cases}1 & \left(0<t\le\frac{1}{\sqrt{e}} \text{ 또는 } t=\sqrt{e}\right)\\ 2 & \left(\frac{1}{\sqrt{e}}<t<\sqrt{e} \text{ 또는 } t>\sqrt{e}\right)\end{cases}$$

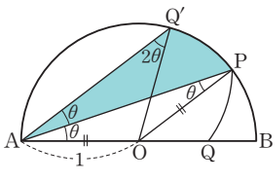
따라서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{\sqrt{e}}$과 $t=\sqrt{e}$에서 불연속이므로 구하는 모든 양수 t의 값의 곱은

$\frac{1}{\sqrt{e}}\times\sqrt{e}=1$

0856

답 ④

반원의 중심을 O라 하고 다음 그림과 같이 색종이를 접었을 때 호 AP와 선분 AB의 교점을 Q, 접힌 색종이를 다시 폈을 때 점 Q가 호 AB 위에 있게 되는 점을 Q′이라 하자.



도형 APQ와 도형 APQ′은 합동이므로 $S(\theta)$는 호 AP와 현 AP로 둘러싸인 도형의 넓이에서 호 AQ′과 현 AQ′으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것과 같다.

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\{1^2\times(\pi-2\theta)-1^2\times\sin(\pi-2\theta)\}$$
$$-\frac{1}{2}\{1^2\times(\pi-4\theta)-1^2\times\sin(\pi-4\theta)\}$$
$$=\frac{1}{2}(\pi-2\theta-\sin 2\theta)-\frac{1}{2}(\pi-4\theta-\sin 4\theta)$$
$$=\frac{1}{2}(2\theta-\sin 2\theta+\sin 4\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\sin 4\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta$$

$$S'(\theta)=2\cos 4\theta-\cos 2\theta+1$$
$$=2(2\cos^2 2\theta-1)-\cos 2\theta+1$$
$$=4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1$$

$\cos 2\theta=t$로 놓으면 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<\cos 2\theta<1$이므로 $0<t<1$이고, $S'(\theta)$를 t에 대한 함수로 나타내면

$S'(\theta)=4t^2-t-1$

$S'(\theta)=0$에서 $t=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ ($\because 0<t<1$)

즉, $\cos 2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$인 θ에서 $S'(\theta)=0$이다.

$\cos 2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$을 만족시키는 θ를 θ_1이라 하면 $\theta<\theta_1$일 때 $S'(\theta)>0$이고, $\theta>\theta_1$일 때 $S'(\theta)<0$이므로 $S(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 극대이면서 최댓값을 갖는다.

따라서 $\alpha=\theta_1$이고 $\cos 2\alpha=\cos 2\theta_1=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$

참고

호 AP와 현 AP로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 OPA의 넓이에서 삼각형 OPA의 넓이를 뺀 것과 같고, 호 AQ′과 현 AQ′으로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 OQ′A의 넓이에서 삼각형 OQ′A의 넓이를 뺀 것과 같다.

0857

답 ①

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x & (x\le 0)\\ 2xe^{-x} & (x>0)\end{cases}$$에서

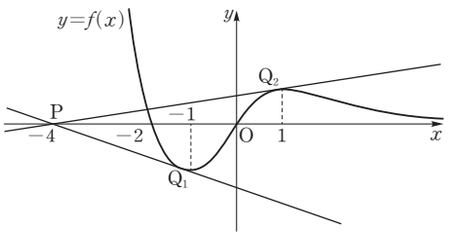
$$f'(x)=\begin{cases}2x+2 & (x\le 0)\\ 2(1-x)e^{-x} & (x>0)\end{cases}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	$2e^{-1}$	↘

또한 $\lim_{x\to\infty} 2xe^{-x}=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, 점 $P(-4, 0)$과 곡선 $y=f(x)$ $(x\ge -2)$ 위의 한 점을 이은 직선의 기울기는 곡선 $y=x^2+2x$와 접할 때 기울기가 최소가 되고, 곡선 $y=2xe^{-x}$과 접할 때 기울기가 최대가 된다.

(i) 곡선 $y=x^2+2x$와 점 Q_1에서 접할 때

접점의 좌표를 $Q_1(t, t^2+2t)$라 하면 접선의 방정식은

$y-t^2-2t=(2t+2)(x-t)$

이 직선이 점 $P(-4, 0)$을 지나므로

$-t^2-2t=(2t+2)(-4-t)$, $t^2+8t+8=0$

$\therefore t=-4\pm 2\sqrt{2}$

이때 $t>-2$이므로 $t=-4+2\sqrt{2}$

$\therefore m=f'(-4+2\sqrt{2})=-6+4\sqrt{2}$

(ii) 곡선 $y=2xe^{-x}$과 점 Q_2에서 접할 때

접점의 좌표를 $Q_2(t, 2te^{-t})$이라 하면 접선의 방정식은

$y-2te^{-t}=2(1-t)e^{-t}(x-t)$

이 직선이 점 $P(-4, 0)$을 지나므로

$-2te^{-t}=2(1-t)e^{-t}(-4-t)$, $(t^2+4t-4)e^{-t}=0$

$\therefore t=-2\pm 2\sqrt{2}$ ($\because e^{-t}>0$)

이때 $t>-2$이므로 $t=-2+2\sqrt{2}$

$\therefore M=f'(-2+2\sqrt{2})=2(3-2\sqrt{2})e^{2-2\sqrt{2}}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(i), (ii)에서 $\frac{M}{m}=-e^{2-2\sqrt{2}}$이므로

$\ln\left|\frac{M}{m}\right|=2-2\sqrt{2}$

0858

답 ④

$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$에서

$f'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+e^{x+1}(2x+n-2)+a$

$=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$

함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

$f''(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+e^{x+1}(2x+n)$

$=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+n+1\}$

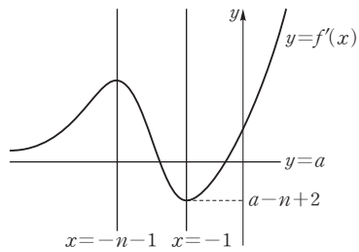
$=e^{x+1}(x+n+1)(x+1)$

$f''(x)=0$에서 $x=-n-1$ 또는 $x=-1$

함수 $f'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-n-1$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

또한 $\lim_{x\to-\infty}f'(x)=a$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f'(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최솟값 $f'(-1)=a-n+2$를 갖는다.

이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이려면

$a-n+2\geq0$ $\therefore a\geq n-2$

따라서 $g(n)=n-2$이므로 $1\leq g(n)\leq8$에서

$1\leq n-2\leq8$ $\therefore 3\leq n\leq10$

즉, 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+4+5+\cdots+10=52$

Bible Says 역함수의 존재 조건

미분가능한 함수 $f(x)$가 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.
즉, 모든 실수 x에서 $f'(x)\geq0$이거나 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

0859

답 ②

$f(x)=(\ln x)^n$에서 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=n(\ln x)^{n-1}\times\frac{1}{x}$

(i) $n=1$일 때

$f'(x)=\frac{1}{x}$이므로 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$

(ii) $n\neq1$일 때

$f''(x)=n(n-1)(\ln x)^{n-2}\times\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}+n(\ln x)^{n-1}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$=\frac{n(\ln x)^{n-2}(n-1-\ln x)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=0$ $\therefore x=1$

$f''(x)=0$에서 $\ln x=0$ 또는 $\ln x=n-1$

$\therefore x=1$ 또는 $x=e^{n-1}$

ㄱ. $n=2m$ (m은 자연수)일 때

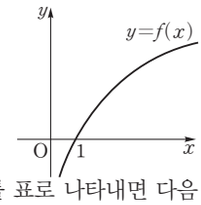
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 n이 짝수이면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. (i) $n=1$일 때

$x>0$에서 $f'(x)=\frac{1}{x}>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가하고 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

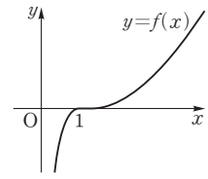


(ii) $n=2m+1$ (m은 자연수)일 때

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	+
$f(x)$		↗		↗

또한 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i), (ii)에서 방정식 $f(x)=f(k)$의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(k)$의 교점의 개수와 같으므로 모든 양의 실수 k에 대하여 주어진 방정식의 실근의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $n=2m$ (m은 자연수)일 때

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않고 $x=e^{n-1}$의 좌우에서만 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0860

답 $-2e$

$f(x)=(ax^3-2ax^2)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=(3ax^2-4ax)e^{-x}-(ax^3-2ax^2)e^{-x}$

$=(-ax^3+5ax^2-4ax)e^{-x}$

$=-ax(x-1)(x-4)e^{-x}$

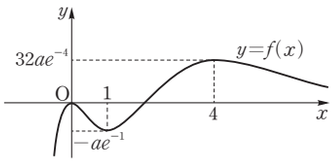
이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$ ($\because e^{-x}>0$)

(i) $a>0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	0	↘	$-ae^{-1}$	↗	$32ae^{-4}$	↘

또한 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

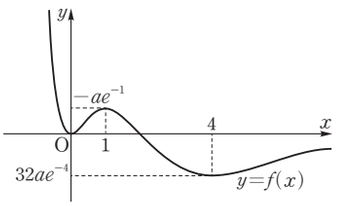
$-ae^{-1}<k<0$

이 범위가 $0<k<2$와 일치할 수 없으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	0	↗	$-ae^{-1}$	↘	$32ae^{-4}$	↗

또한 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$0<k<-ae^{-1}$

이 범위가 $0<k<2$와 일치해야 하므로

$-ae^{-1}=2 \quad \therefore a=-2e$

(i), (ii)에서 $a=-2e$

0861

답 ⑤

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수이므로 $f(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 적어도 하나 존재한다.

$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$에서 $g(k)=1$이고,

$\lim_{x\to k}g(x)=-\infty$이므로 함수 $g(x)$는 $x=k$에서 불연속이다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이므로

$f(k)=0$을 만족시키는 실수 k는 1로 유일하게 존재한다.

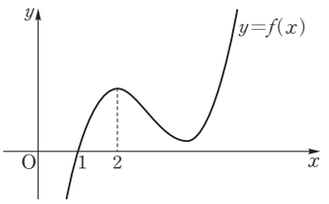
즉, 방정식 $f(x)=0$의 실근은 1뿐이다. …… ㉠

이때 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수이므로 ㉠에서

$f(2)>0$

한편, $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ ($f(x)\neq0$)이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극대이므로 함수 $f(x)$도 $x=2$에서 극대이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



조건 (나)에서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고 함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이므로 $g(2)\leq0$이다.

$\ln|f(2)|\leq0$에서 $0<|f(2)|\leq1$ …… ㉢

조건 (다)에서 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 방정식 $\ln|f(x)|=0$, 즉 $|f(x)|=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다.

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 1이어야 한다.

이때 ㉢에서 함수 $f(x)$의 극댓값이 1이어야 하므로

$f(2)=1$ …… ㉣

㉠에서 $f(1)=0$, ㉡에서 $f'(2)=0$, ㉣에서 $f(2)=1$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+ax+b)+\frac{1}{2}(x-1)(2x+a)$

$f'(2)=\frac{1}{2}(3a+b+8)=0$에서 $b=-3a-8$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2+ax-3a-8)$

또한 $f(2)=-\frac{1}{2}a-2=1$에서 $a=-6$이므로

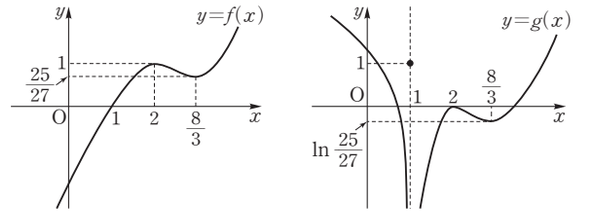
$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2-6x+10)$, $f'(x)=\frac{1}{2}(3x-8)(x-2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{8}{3}$에서 극솟값을 갖고, 마찬가지로 함수 $g(x)$도 $x=\frac{8}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore g\left(\frac{8}{3}\right)=\ln\left|f\left(\frac{8}{3}\right)\right|=\ln\frac{25}{27}$

참고

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Ⅲ 적분법

유형별 문제

PART A

08 여러 가지 적분법

유형 01 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

확인 문제 (1) $\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$ (2) $x+2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+C$ (3) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-6\sqrt{x}+C$

(1) $\int \sqrt[4]{x^3}\,dx=\int x^{\frac{3}{4}}\,dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+C=\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$

(2) $\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^3}\,dx=\int\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx$
$=\int\left(1+\frac{2}{x}+x^{-3}\right)dx$
$=x+2\ln|x|-\frac{1}{2}x^{-2}+C$
$=x+2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+C$

(3) $\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x}}\,dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$
$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}+C$
$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-6\sqrt{x}+C$

0862 답 ②

$f(x)=\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx=\int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}\,dx$
$=\int\left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx=x-2\times 2x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C$
$=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$
$f(1)=1$이므로 $1-4+C=1$
$\therefore C=4$
따라서 $f(x)=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+4$이므로
$f(4)=4-8+\ln 4+4=2\ln 2$

0863 답 ②

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\,dx=\int \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2}\,dx$
$=\int(\sqrt{x}-2)\,dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)dx$
$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+C$
$\therefore F(9)-F(1)=\left(\frac{2}{3}\times 9\sqrt{9}-18+C\right)-\left(\frac{2}{3}\times 1\sqrt{1}-2+C\right)$
$=\frac{4}{3}$

0864 답 ⑤

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{(x-1)^2-5}{x^2}\,dx$
$=\int \frac{x^2-2x-4}{x^2}\,dx=\int\left(1-\frac{2}{x}-4x^{-2}\right)dx$
$=x-2\ln|x|+4x^{-1}+C$
$=x-2\ln|x|+\frac{4}{x}+C$
$f(2)=4$이므로 $2-2\ln 2+2+C=4$
$\therefore C=2\ln 2$
따라서 $f(x)=x-2\ln|x|+\frac{4}{x}+2\ln 2$이므로
$f(1)=1+4+2\ln 2=5+2\ln 2$

0865 답 8

$f(x)=\int \frac{2x^5+1}{x^2}\,dx=\int(2x^3+x^{-2})\,dx$
$=\frac{1}{2}x^4-x^{-1}+C=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{x}+C$
곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 0)$을 지나므로
$f(1)=0$에서 $\frac{1}{2}-1+C=0$
$\therefore C=\frac{1}{2}$
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$이므로
$f(2)=8-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=8$

0866 답 ③

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & (x<-1)\\ 3x^2+1 & (x>-1)\end{cases}$에서
$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}+C_1 & (x<-1)\\ x^3+x+C_2 & (x>-1)\end{cases}$
$f(-2)=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}+C_1=\frac{1}{2}$
$\therefore C_1=0$
한편, 함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $x=-1$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)=f(-1)$이어야 하므로
$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-}\left(-\frac{1}{x}\right)=1$
$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+}(x^3+x+C_2)=-2+C_2$
에서
$-2+C_2=1 \quad \therefore C_2=3$
따라서 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & (x<-1)\\ x^3+x+3 & (x\geq -1)\end{cases}$이므로
$f(0)=3$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Bible Says 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $x=a$에서 연속이다.

(1) 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

(2) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

(3) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

유형 02 밑이 e인 지수함수의 부정적분

0867

답 ③

$$f(x)=\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\,dx=\int \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}\,dx$$
$$=\int (e^x-1)\,dx=e^x-x+C$$

$f(0)=4$이므로 $1+C=4$

$\therefore C=3$

따라서 $f(x)=e^x-x+3$이므로

$f(2)=e^2-2+3=e^2+1$

0868

답 ⑤

$$f(x)=\int (e^x+2)^2\,dx-\int (e^x-2)^2\,dx$$
$$=\int (e^{2x}+4e^x+4)\,dx-\int (e^{2x}-4e^x+4)\,dx$$
$$=\int 8e^x\,dx=8e^x+C$$

$f(0)=10$이므로 $8+C=10$

$\therefore C=2$

따라서 $f(x)=8e^x+2$이므로

$f(1)=8e+2$

0869

답 ②

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (e^x-4x)\,dx=e^x-2x^2+C_1$$

$f(0)=2$이므로 $1+C_1=2$

$\therefore C_1=1$

따라서 $f(x)=e^x-2x^2+1$이므로

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int (e^x-2x^2+1)\,dx$$
$$=e^x-\frac{2}{3}x^3+x+C$$

$$\therefore F(1)-F(0)=\left(e-\frac{2}{3}+1+C\right)-(1+C)$$
$$=e-\frac{2}{3}$$

0870

답 1

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=e^{x+1}+2x$이므로

$f'(x)=e^{x+1}+2x$ ····· ❶

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (e^{x+1}+2x)\,dx$$
$$=e\int e^x\,dx+\int 2x\,dx=e^{x+1}+x^2+C$$ ····· ❷

$f(0)=e-e^2$이므로 $e+C=e-e^2$

$\therefore C=-e^2$

따라서 $f(x)=e^{x+1}+x^2-e^2$이므로

$f(1)=e^2+1-e^2=1$ ····· ❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$의 도함수 구하기	20%
❷ $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	40%
❸ $f(x)$의 식을 이용하여 $f(1)$의 값 구하기	40%

0871

답 ①

$y=\ln x+2$로 놓으면

$y-2=\ln x$ $\quad\therefore x=e^{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=e^{x-2}$

따라서 $g(x)=e^{x-2}$이므로

$$\int g(x)\,dx=\int e^{x-2}\,dx=e^{-2}\int e^x\,dx=e^{-2}\times e^x+C$$

$\therefore a=e^{-2}$

다른 풀이

$\int g(x)\,dx=ae^x+C$의 양변을 미분하면

$g(x)=ae^x$

$y=ae^x$으로 놓으면

$e^x=\frac{y}{a}$ $\quad\therefore x=\ln\frac{y}{a}=\ln y-\ln a$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\ln x-\ln a$

함수 $\ln x+2=\ln x-\ln a$이므로

$-\ln a=2$ $\quad\therefore a=e^{-2}$

Bible Says 역함수 구하기

함수 $y=f(x)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

❶ 주어진 함수 $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.

❷ $y=f(x)$를 x에 대하여 정리한 후, $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.

❸ x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 03 밑이 e가 아닌 지수함수의 부정적분

0872 답 ③

$$\int \frac{8^x+1}{2^x+1}dx=\int \frac{(2^x+1)(2^{2x}-2^x+1)}{2^x+1}dx$$
$$=\int (4^x-2^x+1)\,dx$$
$$=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$$
$$=\frac{4^x}{2\ln 2}-\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$$

따라서 $a=2\ln 2$, $b=-\ln 2$이므로

$a+b=2\ln 2+(-\ln 2)=\ln 2$

0873 답 3

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 4^x\ln 4\,dx=4^x+C$

$f(0)=1$이므로 $1+C=1$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=4^x$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{4^n}=\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{1}{4}}=3$$

0874 답 ④

$f(x)=\int 3^x(3^x+2)\,dx=\int (9^x+2\times 3^x)\,dx$

$=\int 9^x dx+2\int 3^x dx$

$=\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2\times 3^x}{\ln 3}+C=\frac{9^x}{2\ln 3}+\frac{2\times 3^x}{\ln 3}+C$

$f(0)=\frac{5}{2\ln 3}$이므로

$\frac{1}{2\ln 3}+\frac{2}{\ln 3}+C=\frac{5}{2\ln 3}$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{9^x}{2\ln 3}+\frac{2\times 3^x}{\ln 3}$이므로

$f(1)=\frac{9}{2\ln 3}+\frac{6}{\ln 3}=\frac{21}{2\ln 3}$

0875 답 ④

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3k$에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때,

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=3k$

$f'(x)=2^{x+1}+k$에서 $f'(0)=2+k$이므로

$2+k=3k$, $2k=2$

$\therefore k=1$

즉, $f'(x)=2^{x+1}+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (2^{x+1}+1)\,dx$

$=2\int 2^x dx+\int 1\,dx$

$=\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C$

이때 $f(0)=0$이므로 $\frac{2}{\ln 2}+C=0$

$\therefore C=-\frac{2}{\ln 2}$

따라서 $f(x)=\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x-\frac{2}{\ln 2}$이므로

$f(3)=\frac{2^4}{\ln 2}+3-\frac{2}{\ln 2}=3+\frac{14}{\ln 2}$

참고

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$이면

$f(a)=b$, $f'(a)=c$이다.

유형 04 삼각함수의 부정적분

확인 문제 (1) $-\cos x-\sin x+C$ (2) $-\cot x-2x+C$

(1) $\int (1-\cot x)\sin x\,dx=\int\left(\sin x-\frac{\cos x}{\sin x}\times\sin x\right)dx$

$=\int (\sin x-\cos x)\,dx$

$=-\cos x-\sin x+C$

(2) $1+\cot^2 x=\csc^2 x$이므로 $\cot^2 x=\csc^2 x-1$

$\therefore \int (\cot^2 x-1)\,dx=\int (\csc^2 x-2)\,dx$

$=-\cot x-2x+C$

0876 답 ④

$f(x)=\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$

$=\int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}dx$

$=\int \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}dx$

$=\int (1-\sin x)\,dx$

$=x+\cos x+C$

$f(0)=5$이므로 $1+C=5$

$\therefore C=4$

따라서 $f(x)=x+\cos x+4$이므로

$f(\pi)=\pi+\cos\pi+4=\pi+3$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0877

답 ③

$f(x)=\int(\tan x+\cot x)^2dx$

$=\int(\tan^2 x+2+\cot^2 x)\,dx$

$=\int\{(\sec^2 x-1)+2+(\csc^2 x-1)\}\,dx$

$=\int(\sec^2 x+\csc^2 x)\,dx$

$=\tan x-\cot x+C$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}+C\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}+C\right)$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

0878

답 ⑤

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$이므로

$f'(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$

$=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$=1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$=1+\sin x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(1+\sin x)\,dx=x-\cos x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$f(0)=2$에서 $-1+C=2$

$\therefore C=3$

$\therefore f(x)=x-\cos x+3$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(\pi,\ a)$를 지나므로

$a=f(\pi)=\pi-\cos\pi+3=\pi+4$

Bible Says 배각의 공식

(1) $\sin 2x=2\sin x\cos x$

(2) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

(3) $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

0879

답 -4

$f(x)=\int\frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx=\int\frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$

$=\int\frac{1-2\sin x+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}dx$

$=\int\frac{1-2\sin x+1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

$=\int(\sec^2 x-2\sec x\tan x+\sec^2 x-1)\,dx$

$=\int(2\sec^2 x-2\sec x\tan x-1)\,dx$

$=2\tan x-2\sec x-x+C$

$f(\pi)=-\pi$이므로 $2-\pi+C=-\pi$

$\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=2\tan x-2\sec x-x-2$이므로

$f(0)=-2-2=-4$

0880

답 2

$f'(x)=\int f''(x)\,dx=\int(e^x+3\cos x)\,dx$

$=e^x+3\sin x+C_1$

$f'(0)=1$이므로 $1+C_1=1$

$\therefore C_1=0$

즉, $f'(x)=e^x+3\sin x$이므로 ❶

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(e^x+3\sin x)\,dx$

$=e^x-3\cos x+C_2$ ❷

$f(0)=2$이므로 $1-3+C_2=2$

$\therefore C_2=4$

따라서 $f(x)=e^x-3\cos x+4$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}+4$

$\therefore a=\frac{1}{2},\ b=4$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\times 4=2$ ❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$의 도함수 구하기	30%
❷ $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	30%
❸ $f(x)$의 식을 이용하여 ab의 값 구하기	40%

유형 05 치환적분법 – 유리함수

0881

답 63

$x^2+2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int 2x(x^2+2)^3dx$

$=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C$

$=\frac{1}{4}(x^2+2)^4+C$

$f(0)=3$이므로 $4+C=3$

$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x^2+2)^4-1$이므로

$f(\sqrt{2})=4^3-1=63$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0882

답 ③

$2x+3=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int(2x+3)^5dx=\int\frac{1}{2}t^5dt=\frac{1}{12}t^6+C$$
$$=\frac{1}{12}(2x+3)^6+C$$

따라서 $a=12$, $b=6$이므로

$a+b=12+6=18$

0883

답 ②

$-2x+6=t$로 놓으면 $-2=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{(-2x+6)^2}dx$$
$$=\int\frac{1}{t^2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}\int t^{-2}dt$$
$$=\frac{1}{2}t^{-1}+C=\frac{1}{2t}+C$$
$$=\frac{1}{-4x+12}+C$$

$f(2)=1$이므로 $\frac{1}{4}+C=1$

$\therefore C=\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{-4x+12}+\frac{3}{4}$이므로

$f(4)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

0884

답 ①

$x-2=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{x-1}{(x-2)^3}dx=\int\frac{t+1}{t^3}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt=-\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+C$$
$$=-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2(x-2)^2}+C$$

$f(1)=1$이므로 $1-\frac{1}{2}+C=1$

$\therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2(x-2)^2}+\frac{1}{2}$이므로

$f(3)=-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-1$

유형 06 치환적분법 – 무리함수

0885

답 ①

$x^2+2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int2x\sqrt{x^2+2}dx=\int\sqrt{t}dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}+C$$

0886

답 ③

$1-x^2=t$로 놓으면 $-2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\times(-2)dt$$
$$=-2\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-2\times2t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=-4\sqrt{t}+C=-4\sqrt{1-x^2}+C$$

$f(0)=-2$이므로 $-4+C=-2$

$\therefore C=2$

따라서 $f(x)=-4\sqrt{1-x^2}+2$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-4\sqrt{1-\frac{1}{4}}+2=-2\sqrt{3}+2$

0887

답 ⑤

$\sqrt{x-1}f'(x)=3x-4$에서 $f'(x)=\frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}$

$x-1=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}dx$$
$$=\int\frac{3t-1}{\sqrt{t}}dt=\int\left(3t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$
$$=2t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C=2(x-1)^{\frac{3}{2}}-2(x-1)^{\frac{1}{2}}+C$$

$f(5)=2\times4^{\frac{3}{2}}-2\times4^{\frac{1}{2}}+C=16-4+C=12+C$

$f(2)=2-2+C=C$

$\therefore f(5)-f(2)=(12+C)-C=12$

0888

답 ②

$x^2-4x+6=t$로 놓으면 $2x-4=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\times\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\times2t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C$$
$$=\sqrt{x^2-4x+6}+C=\sqrt{(x-2)^2+2}+C$$

따라서 $1\le x\le4$에서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값, $x=2$일 때 최솟값을 가지므로

$M-m=f(4)-f(2)=\sqrt{6}+C-(\sqrt{2}+C)$
$=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Bible Says 제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소

$m \le x \le n$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$는

(1) $m \le p \le n$일 때

$f(m)$, $f(n)$, q 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

(2) $p<m$ 또는 $p>n$일 때

$f(m)$, $f(n)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

유형 07 치환적분법 - 지수함수

0889

답 68

$e^x+2=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int (e^x+2)^2 e^x\,dx=\int t^2\,dt$$

$$=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}(e^x+2)^3+C$$

$f(0)=5$이므로 $9+C=5$

$\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(e^x+2)^3-4$이므로

$$f(\ln 4)=\frac{1}{3}\times 6^3-4$$

$$=72-4=68$$

0890

답 ④

$x^2-3x=t$로 놓으면 $2x-3=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (2x-3)e^{x^2-3x}\,dx$$

$$=\int e^t\,dt=e^t+C$$

$$=e^{x^2-3x}+C$$

$f(0)=2$이므로 $1+C=2$

$\therefore C=1$

따라서 $f(x)=e^{x^2-3x}+1$이므로

$f(4)=e^4+1$

0891

답 10

$e^x+3=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int \frac{2e^x}{\sqrt{e^x+3}}\,dx=\int \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$=2\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=4t^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=4\sqrt{e^x+3}+C$$

$f(0)=6$이므로 $8+C=6$

$\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=4\sqrt{e^x+3}-2$이므로

$f(\ln 6)=4\sqrt{6+3}-2=10$

0892

답 ④

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)=8xe^{x^2}$

이므로

$f'(x)=4xe^{x^2}$

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 4xe^{x^2}\,dx$$

$$=\int 2e^t\,dt=2\int e^t\,dt$$

$$=2e^t+C=2e^{x^2}+C$$

$\therefore f(1)-f(0)=(2e+C)-(2+C)=2(e-1)$

유형 08 치환적분법 - 로그함수

0893

답 ②

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int \frac{(\ln x)^2}{2x}\,dx=\int \frac{1}{2}t^2\,dt$$

$$=\frac{1}{6}t^3+C=\frac{1}{6}(\ln x)^3+C$$

$f(1)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{6}(\ln x)^3+2$이므로

$f(e)=\frac{1}{6}+2=\frac{13}{6}$

0894

답 6

$\ln x+3=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+3}}\,dx$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{\ln x+3}+C$$

$f(e)=4$이므로 $4+C=4$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=2\sqrt{\ln x+3}$이므로

$f(e^6)=2\sqrt{6+3}=6$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0895

답 6

$(x^2+1)f'(x)=12x\ln(x^2+1)$에서

$f'(x)=\dfrac{12x\ln(x^2+1)}{x^2+1}$

❶

$\ln(x^2+1)=t$로 놓으면 $\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\dfrac{12x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx=\int 6t\,dt$

$=3t^2+C=3\{\ln(x^2+1)\}^2+C$

❷

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=3\{\ln(x^2+1)\}^2+3$이므로

$f(\sqrt{e-1})=3\times1^2+3=6$

❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$의 도함수 구하기	30%
❷ $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	30%
❸ $f(x)$의 식을 이용하여 $f(\sqrt{e-1})$의 값 구하기	40%

참고

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $y=\ln|f(x)|$이면

$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq0$)

0896

답 ②

$F(x)=xf(x)-4x\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4\ln x-4$

$xf'(x)=4\ln x+4$

$\therefore f'(x)=\dfrac{4\ln x+4}{x}$

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\dfrac{4\ln x+4}{x}\,dx=\int(4t+4)\,dt$

$=2t^2+4t+C=2(\ln x)^2+4\ln x+C$

$f(e^2)=10$이므로 $8+8+C=10$

$\therefore C=-6$

따라서 $f(x)=2(\ln x)^2+4\ln x-6$이므로

$f(x)=0$에서 $2(\ln x)^2+4\ln x-6=0$

$2(\ln x+3)(\ln x-1)=0$

$\ln x=-3$ 또는 $\ln x=1$

$\therefore x=e^{-3}$ 또는 $x=e$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은

$e^{-3}\times e=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

Bible Says **곱의 미분법**

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

참고

$f'(x)=\dfrac{4\ln x+4}{x}$에서 $\ln x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\dfrac{4\ln x+4}{x}\,dx=\int 4t\,dt$

$=2t^2+C=2(\ln x+1)^2+C$

유형 09 치환적분법 – $\sin ax$, $\cos ax$ 꼴

0897

답 ②

$f(x)=\int(2\cos^2x-2)\,dx=\int\{(2\cos^2x-1)-1\}\,dx$

$=\int(\cos2x-1)\,dx=\dfrac{1}{2}\sin2x-x+C$

$f(\pi)=-\pi$이므로 $-\pi+C=-\pi$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin2x-x$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

0898

답 3

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\dfrac{\sin(\ln x)}{x}\,dx=\int\sin t\,dt$

$=-\cos t+C=-\cos(\ln x)+C$

$f(1)=1$이므로 $-1+C=1$

$\therefore C=2$

따라서 $f(x)=-\cos(\ln x)+2$이므로

$f(e^\pi)=-\cos\pi+2=1+2=3$

0899

답 ②

$f(x)=\int\sin2x\sin^2x\,dx+\int2\cos^3x\sin x\,dx$

$=\int\sin2x\sin^2x\,dx+\int\sin2x\cos^2x\,dx$

$=\int\sin2x(\sin^2x+\cos^2x)\,dx$

$=\int\sin2x\,dx=-\dfrac{1}{2}\cos2x+C$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{1}{2}+C=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos2x-1$이므로

$f(\pi)=-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0900

답 ⑤

$f'(x)=\sin 2x-\cos x=2\sin x\cos x-\cos x$

$=\cos x(2\sin x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(\sin 2x-\cos x)\,dx$

$=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+C$

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 1이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$에서 $\frac{1}{2}-1+C=1$

$\therefore C=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+\frac{3}{2}$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

Bible Says 함수의 극대 · 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때 $x=a$의 좌우에서

(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$이다.

(2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$이다.

유형 10 치환적분법 – 삼각함수

0901

답 ⑤

$f(x)=\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}\,dx=\int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{1+\sin x}\,dx$

$=\int\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)\cos x}{1+\sin x}\,dx$

$=\int(1-\sin x)\cos x\,dx$

$1-\sin x=t$로 놓으면 $-\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int(1-\sin x)\cos x\,dx=\int t\times(-1)\,dt$

$=-\frac{1}{2}t^2+C=-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+C$

$f(0)=0$이므로 $-\frac{1}{2}+C=0$

$\therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+\frac{1}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

0902

답 ②

$1+\tan x=t$로 놓으면 $\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int(1+\tan x)^2\sec^2 x\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C$

$=\frac{1}{3}(1+\tan x)^3+C$

0903

답 ④

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\cos^3 x\,dx$

$=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$=\int(1-t^2)\,dt=t-\frac{1}{3}t^3+C$

$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

$f(\pi)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{1}{3}+1=\frac{5}{3}$

0904

답 29

$f(x)=\int\cos 2x\sin x\,dx=\int(2\cos^2 x-1)\sin x\,dx$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int(2\cos^2 x-1)\sin x\,dx=\int(2t^2-1)\times(-1)\,dt$

$=-\frac{2}{3}t^3+t+C=-\frac{2}{3}\cos^3 x+\cos x+C$ ····· ❶

$f(0)=\frac{4}{3}$이므로 $-\frac{2}{3}+1+C=\frac{4}{3}$

$\therefore C=1$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

즉, $f(x)=-\frac{2}{3}\cos^3 x+\cos x+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{12}+\frac{3}{2}=\frac{17}{12}$

따라서 $p=12$, $q=17$이므로

$p+q=12+17=29$ ❷

채점 기준	배점
❶ $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	50%
❷ $f(x)$의 식을 이용하여 $p+q$의 값 구하기	50%

유형 11 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴의 치환적분법

0905 답 ⑤

$(x^4+x^2+1)'=4x^3+2x$이므로

$f(x)=\int\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{(x^4+x^2+1)'}{x^4+x^2+1}dx$

$=\ln(x^4+x^2+1)+C$ ($\because x^4+x^2+1>0$)

$f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=\ln(x^4+x^2+1)+2$이므로

$f(1)=\ln 3+2$

0906 답 ③

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int\frac{2}{x\ln x}dx=\int\frac{2(\ln x)'}{\ln x}dx=2\ln|\ln x|+C$

$f(e)=1$이므로 $2\ln 1+C=1$

$\therefore C=1$

따라서 $f(x)=2\ln|\ln x|+1$이므로

$f(e^2)=2\ln 2+1$

0907 답 ③

$f'(x)=f(x)-2$에서 $f(x)>2$이므로

$\frac{f'(x)}{f(x)-2}=1$

$\int\frac{f'(x)}{f(x)-2}dx=\int 1\,dx$

$\ln\{f(x)-2\}=x+C$ ($\because f(x)>2$)

$f(x)-2=e^{x+C}$

$\therefore f(x)=e^{x+C}+2$

$f(1)=3$이므로 $e^{1+C}+2=3$

$e^{1+C}=1$, $1+C=0$

$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=e^{x-1}+2$이므로

$f(2)=e+2$

0908 답 ②

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-(\cos x)'}{\cos x}$이므로

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$

$\ln|f(x)|=-\ln|\cos x|+C$

$f(0)=e$이므로

$\ln|f(0)|=-\ln|\cos 0|+C$

$\ln e=-\ln 1+C$

$\therefore C=1$

$\therefore \ln|f(x)|=-\ln|\cos x|+1=\ln\frac{e}{|\cos x|}$

이때 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x>0$이므로

$|f(x)|=\frac{e}{|\cos x|}=\frac{e}{\cos x}$

이고, $\frac{e}{\cos x}>0$이므로 $f(x)>0$

따라서 $f(x)=\frac{e}{\cos x}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{e}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}e$

0909 답 ④

모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고 $F(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)f(x)$이므로

$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x^2+1}$

$F'(x)=f(x)$이므로

$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{x}{x^2+1}$

이때 $(x^2+1)'=2x$이므로

$\int\frac{F'(x)}{F(x)}dx=\int\frac{x}{x^2+1}dx$

$\ln|F(x)|=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ ($\because x^2+1>0$)

$=\ln\sqrt{x^2+1}+\ln e^C$

$=\ln\{\sqrt{x^2+1}\times e^C\}$

한편, $x>0$이므로 $\frac{1}{x}>0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2>0$

$f(x)>0$이고 $x+\frac{1}{x}>0$이므로 $F(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)f(x)>0$

즉, $|F(x)|=F(x)=\sqrt{x^2+1}\times e^C$이므로

$f(x)=F'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times e^C=\frac{e^C x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(1)=\sqrt{2}$이므로 $\frac{e^C}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore e^C=2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$이므로

$f(2)=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

유형 12 유리함수의 부정적분 – (분자의 차수)≥(분모의 차수)

0910

답 12

$f(x)=\int\frac{2x^2+x+1}{x-1}dx$

$=\int\frac{2x(x-1)+3(x-1)+4}{x-1}dx$

$=\int\left(2x+3+\frac{4}{x-1}\right)dx$

$=x^2+3x+4\ln|x-1|+C$

$f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x^2+3x+4\ln|x-1|+2$이므로

$f(2)=4+6+2=12$

0911

답 ④

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{6-x}{x+2}dx$

$=\int\frac{-(x+2)+8}{x+2}dx=\int\left(-1+\frac{8}{x+2}\right)dx$

$=-x+8\ln|x+2|+C$

$f(-1)=1$이므로 $1+C=1$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=-x+8\ln|x+2|$이므로

$f(0)=8\ln 2$

0912

답 ③

$y=\frac{-x-3}{x-2}$으로 놓으면 $xy-2y=-x-3$

$x(y+1)=2y-3$

$\therefore x=\frac{2y-3}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{2x-3}{x+1}$

따라서 $g(x)=\frac{2x-3}{x+1}$이므로

$h(x)=\int g(x)\,dx=\int\frac{2x-3}{x+1}dx$

$=\int\frac{2(x+1)-5}{x+1}dx=\int\left(2-\frac{5}{x+1}\right)dx$

$=2x-5\ln|x+1|+C$

$\therefore h(3)-h(1)=(6-5\ln 4+C)-(2-5\ln 2+C)$

$=4-5\ln 2$

유형 13 유리함수의 부정적분 – (분자의 차수)<(분모의 차수)

0913

답 3

$\frac{x-3}{x^2-3x+2}=\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$로 놓으면

$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)}$이므로

$x-3=(A+B)x-2A-B$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$A+B=1,\ -2A-B=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$A=2,\ B=-1$

$\therefore\int\frac{x-3}{x^2-3x+2}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right)dx$

$=2\ln|x-1|-\ln|x-2|+C$

$=\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x-2}\right|+C$

따라서 $a=1,\ b=2$이므로

$a+b=1+2=3$

0914

답 ①

$\int\frac{2}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{2}{(x-4)(x-2)}dx$

$=\int\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2}\right)dx$

$=\ln|x-4|-\ln|x-2|+C$

$=\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|+C$

0915

답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $\frac{4}{x^2-4}$이므로 $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{4}{x^2-4}dx$

$=\int\frac{4}{(x-2)(x+2)}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\ln|x-2|-\ln|x+2|+C=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0$에서 $C=0$

$\therefore f(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(4,\ a)$를 지나므로

$a=f(4)=\ln\frac{1}{3}=-\ln 3$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0916

답 $3\ln 3$

$\frac{3x-5}{x^2-2x-3}=\frac{3x-5}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$로 놓으면

$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+B)x-3A+B}{(x+1)(x-3)}$이므로

$3x-5=(A+B)x-3A+B$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$A+B=3,\ -3A+B=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$A=2,\ B=1$

$\therefore f(x)=\int\frac{3x-5}{x^2-2x-3}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-3}\right)dx$

$=2\ln|x+1|+\ln|x-3|+C$

$f(0)=2\ln 3$이므로 $\ln 3+C=2\ln 3$

$\therefore C=\ln 3$

따라서 $f(x)=2\ln|x+1|+\ln|x-3|+\ln 3$이므로

$f(2)=2\ln 3+\ln 3=3\ln 3$

유형 14 부분적분법

0917

답 $3e^2$

$u(x)=x+2,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$이므로

$f(x)=\int(x+2)e^x dx=(x+2)e^x-\int e^x dx$

$=(x+2)e^x-e^x+C$

$=(x+1)e^x+C$

$f(0)=1$이므로

$1+C=1$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=(x+1)e^x$이므로

$f(2)=3e^2$

0918

답 $-\frac{\pi}{2}$

$u(x)=x,\ v'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$f(x)=\int x\sin 2x\,dx$

$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\int\frac{1}{2}\cos 2x\,dx$

$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$이므로

$f(\pi)=-\frac{1}{2}\pi\cos 2\pi+\frac{1}{4}\sin 2\pi=-\frac{\pi}{2}$

0919

답 ③

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int x^2\ln x\,dx$

$u(x)=\ln x,\ v'(x)=x^2$으로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=\frac{1}{3}x^3$이므로

$F(x)=\int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^2dx$

$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$

$F(e)=\frac{2}{9}e^3$이므로 $\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{9}e^3+C=\frac{2}{9}e^3$

$\therefore C=0$

따라서 $F(x)=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3$이므로

$F(e^2)=\frac{2}{3}e^6-\frac{1}{9}e^6=\frac{5}{9}e^6$

0920

답 ④

$\int f(x)\,dx=xf(x)+2x^2e^{-x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+4xe^{-x}-2x^2e^{-x}$

$xf'(x)=(2x^2-4x)e^{-x}$

$\therefore f'(x)=(2x-4)e^{-x}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x-4)e^{-x}dx$

$u(x)=2x-4,\ v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=2,\ v(x)=-e^{-x}$이므로

$f(x)=\int(2x-4)e^{-x}dx=(4-2x)e^{-x}+\int 2e^{-x}dx$

$=(4-2x)e^{-x}-2e^{-x}+C$

$=2(1-x)e^{-x}+C$

$f(1)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=2(1-x)e^{-x}$이므로

$f(-2)=2\times 3\times e^2=6e^2$

0921

답 1

$y=e^{2x}-2$로 놓으면

$y+2=e^{2x},\ 2x=\ln(y+2)$

$x=\frac{1}{2}\ln(y+2)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}\ln(x+2)$

즉, $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln(x+2)$이므로 ❶

$g(x)=\int f^{-1}(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\ln(x+2)\,dx$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$u(x)=\ln(x+2)$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x+2}$, $v(x)=x+2$이므로

$g(x)=\frac{1}{2}\int \ln(x+2)\,dx=\frac{1}{2}(x+2)\ln(x+2)-\frac{1}{2}\int 1\,dx$

$=\frac{1}{2}(x+2)\ln(x+2)-\frac{1}{2}x+C$

..... ❷

$g(-1)=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}$

$\therefore C=0$

따라서 $g(x)=\frac{1}{2}(x+2)\ln(x+2)-\frac{1}{2}x$이므로

$g(e-2)=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}(e-2)=1$

..... ❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$의 역함수 구하기	30%
❷ $g(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	40%
❸ $g(x)$의 식을 이용하여 $g(e-2)$의 값 구하기	30%

0922

답 ②

모든 양수 x에 대하여 $f(x)>0$에서 $f(2x)>0$이고

$f'(2x)=\frac{f(2x)\ln x}{x^2}$이므로 $\frac{f'(2x)}{f(2x)}=\frac{\ln x}{x^2}$

$\int \frac{f'(2x)}{f(2x)}\,dx=\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$\int \frac{f'(2x)}{f(2x)}\,dx=-\frac{1}{x}\ln x+\int \frac{1}{x^2}\,dx$

$\frac{1}{2}\ln|f(2x)|=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$

$\ln f(2x)=-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+2C$

$f(2)=1$에서 $\ln f(2)=0$이므로 위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-2+2C=0$ $\therefore C=1$

따라서 $\ln f(2x)=-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+2$이므로

$\ln f(4)=-\ln 2-1+2=1-\ln 2$

유형 15 부분적분법 - 여러 번 적용하는 경우

0923

답 7π

$u_1(x)=x^2$, $v_1'(x)=\cos x$로 놓으면

$u_1'(x)=2x$, $v_1(x)=\sin x$이므로

$f(x)=\int x^2\cos x\,dx$

$=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx$ ..... ㉠

$\int x\sin x\,dx$에서 $u_2(x)=x$, $v_2'(x)=\sin x$로 놓으면

$u_2'(x)=1$, $v_2(x)=-\cos x$이므로

$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int \cos x\,dx$

$=-x\cos x+\sin x+C_1$ ..... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x+C_1)$

$=(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$

$f(\pi)=\pi$이므로 $-2\pi+C=\pi$

$\therefore C=3\pi$

따라서 $f(x)=(x^2-2)\sin x+2x\cos x+3\pi$이므로

$f(2\pi)=4\pi+3\pi=7\pi$

0924

답 ①

$u_1(x)=(\ln x)^2$, $v_1'(x)=4x$로 놓으면

$u_1'(x)=\frac{2}{x}\ln x$, $v_1(x)=2x^2$이므로

$f(x)=\int 4x(\ln x)^2\,dx$

$=2x^2(\ln x)^2-\int 4x\ln x\,dx$ ..... ㉠

$\int x\ln x\,dx$에서 $u_2(x)=\ln x$, $v_2'(x)=x$로 놓으면

$u_2'(x)=\frac{1}{x}$, $v_2(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int \frac{1}{2}x\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_1$ ..... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=2x^2(\ln x)^2-2x^2\ln x+x^2+C$

$\therefore f(e)-f(1)=(2e^2-2e^2+e^2+C)-(1+C)$

$=e^2-1$

0925

답 1

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $e^x\sin 2x$이므로

$f'(x)=e^x\sin 2x$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int e^x\sin 2x\,dx$

$u_1(x)=\sin 2x$, $v_1'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_1'(x)=2\cos 2x$, $v_1(x)=e^x$이므로

$f(x)=\int e^x\sin 2x\,dx$

$=e^x\sin 2x-2\int e^x\cos 2x\,dx$ ..... ㉠

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\int e^x \cos 2x\,dx$에서 $u_2(x)=\cos 2x$, $v_2'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_2'(x)=-2\sin 2x$, $v_2(x)=e^x$이므로

$$\int e^x \cos 2x\,dx = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x\,dx$$

$$= e^x \cos 2x + 2f(x) + C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=e^x \sin 2x - 2\{e^x \cos 2x + 2f(x) + C_1\}$

$5f(x)=e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) - 2C_1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + C$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$f(0)=1$에서 $-\frac{2}{5}+C=1$

$\therefore C=\frac{7}{5}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x)+\frac{7}{5}$이므로

$f(\pi)=\frac{1}{5}e^{\pi}\times(-2)+\frac{7}{5}=-\frac{2}{5}e^{\pi}+\frac{7}{5}$

즉, $a=-\frac{2}{5}$, $b=\frac{7}{5}$이므로

$a+b=-\frac{2}{5}+\frac{7}{5}=1$

PART B 내신 잡는 종합 문제

0926

답 3

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2^x \ln 2 - 2$이므로

$f'(x)=2^x \ln 2 - 2$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (2^x \ln 2 - 2)\,dx$$

$$= 2^x - 2x + C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 4)$를 지나므로

$f(0)=4$에서 $1+C=4$

$\therefore C=3$

따라서 $f(x)=2^x-2x+3$이므로

$f(1)=2-2+3=3$

0927

답 4

$2x+5=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int \frac{4x-2}{(2x+5)^3}\,dx=\int \frac{2x-1}{(2x+5)^3}\times 2\,dx$$

$$=\int \frac{t-6}{t^3}\,dt=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{6}{t^3}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}+C$$

$$=-\frac{1}{2x+5}+\frac{3}{(2x+5)^2}+C$$

$f(-2)=2$이므로 $-1+3+C=2$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2x+5}+\frac{3}{(2x+5)^2}$이므로

$f(-3)=1+3=4$

0928

답 2

$$f(x)=\int \sin^3 x\,dx=\int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$$=\int (1-t^2)\times(-1)\,dt=-t+\frac{1}{3}t^3+C$$

$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

$f(0)=\frac{2}{3}$이므로 $-1+\frac{1}{3}+C=\frac{2}{3}$

$\therefore C=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{4}{3}$이므로

$f(\pi)=1-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=2$

0929

답 ①

$$f(x)=\int \frac{4}{4x^2-1}\,dx=\int \frac{4}{(2x-1)(2x+1)}\,dx$$

$$=\int\left(\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}\right)dx$$

$$=\ln|2x-1|-\ln|2x+1|+C$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\ln|2x-1|-\ln|2x+1|$이므로

$$\sum_{k=1}^{5} f(k)=(\ln 1-\ln 3)+(\ln 3-\ln 5)+\cdots+(\ln 9-\ln 11)$$

$$=\ln 1-\ln 11=-\ln 11$$

참고

$f(x)=\ln|2x-1|-\ln|2x+1|=\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|$이므로

$$\sum_{k=1}^{5} f(k)=\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{5}+\cdots+\ln\frac{9}{11}$$

$$=\ln\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{9}{11}\right)=\ln\frac{1}{11}$$

$$=-\ln 11$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0930 답 ⑤

$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & (x\le 1) \\ \dfrac{1}{x} & (x>1) \end{cases}$ 이므로

$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+C_1 & (x\le 1) \\ \ln x+C_2 & (x>1) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(e^{x-1}+C_1)=1+C_1$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(\ln x+C_2)=C_2$

$f(1)=e^{1-1}+C_1=1+C_1$

에서 $C_2=1+C_1$ ····· ㉠

또한 $f(-1)=e+\dfrac{1}{e^2}$이므로

$e^{-2}+C_1=e+\dfrac{1}{e^2}$에서 $C_1=e$

이를 ㉠에 대입하면 $C_2=e+1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+e & (x\le 1) \\ \ln x+e+1 & (x>1) \end{cases}$ 이므로

$f(e)=\ln e+e+1=e+2$

Bible Says 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $x=a$에서 연속이다.

(1) 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

(2) 극한값 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

0931 답 ②

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\dfrac{x-4}{2\sqrt{x+2}}$

$\sqrt{x+2}=t$로 놓으면 $x+2=t^2$에서 $x=t^2-2$이고

$1=2t\times\dfrac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\dfrac{x-4}{2\sqrt{x+2}}\,dx$

$=\int\dfrac{t^2-6}{2t}\times 2t\,dt=\int(t^2-6)\,dt$

$=\dfrac{1}{3}t^3-6t+C$

$=\dfrac{1}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-6\sqrt{x+2}+C$

$f(-1)=1$이므로 $\dfrac{1}{3}-6+C=1$

$\therefore C=\dfrac{20}{3}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-6\sqrt{x+2}+\dfrac{20}{3}$이므로

$f(2)=\dfrac{1}{3}\times 4\times 2-6\times 2+\dfrac{20}{3}=\dfrac{8}{3}-12+\dfrac{20}{3}=-\dfrac{8}{3}$

0932 답 10

$xf'(x)=2\ln\sqrt{x}$에서 $f'(x)=\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{x}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$

$=\int\dfrac{\ln x}{x}\,dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\dfrac{\ln x}{x}\,dx=\int t\,dt=\dfrac{1}{2}t^2+C$

$=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$

$f(1)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+2$이므로

$f(e^4)=\dfrac{1}{2}\times 4^2+2=8+2=10$

0933 답 9

$\dfrac{f(x)}{x}+f'(x)=\dfrac{x-4}{x\sqrt{x}+2x}$에서

$f(x)+xf'(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=\sqrt{x}-2$

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이므로

$xf(x)=\int\{xf(x)\}'\,dx=\int(\sqrt{x}-2)\,dx$

$=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+C$

$f(1)=-\dfrac{4}{3}$이므로 $\dfrac{2}{3}-2+C=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore C=0$

따라서 $xf(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-2x$이므로

$f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x}-2$

$f(x)=0$에서 $\dfrac{2}{3}\sqrt{x}-2=0$

$\sqrt{x}=3$ $\therefore x=9$

0934 답 ⑤

$f(x)=\int\dfrac{2\sin^2 x}{1-\cos x}\,dx=\int\dfrac{2(1-\cos^2 x)}{1-\cos x}\,dx$

$=\int 2(1+\cos x)\,dx$

$=2x+2\sin x+C$

$f(x)\le 2x$에서 $2\sin x+C\le 0$

$2\sin x\le -C$

위의 부등식을 만족시키는 실수 x가 존재하려면

$-C\ge -2$ $\therefore C\le 2$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+2+C$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\le\pi+4$

따라서 구하는 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 최댓값은 $\pi+4$이다.

0935

답 ⑤

$f(x)=\int e^x\,dx=e^x+C_1$

$f(0)=0$이므로 $1+C_1=0$에서 $C_1=-1$

$\therefore f(x)=e^x-1$

$g(x)=\int xe^{x^2}\,dx$에서 $x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$g(x)=\int xe^{x^2}\,dx=\int\frac{1}{2}e^t\,dt=\frac{1}{2}e^t+C_2$

$=\frac{1}{2}e^{x^2}+C_2$

$g(0)=0$이므로 $\frac{1}{2}+C_2=0$에서 $C_2=-\frac{1}{2}$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{1}{2}$

$h(x)=\int x^2e^{x^3}\,dx$에서 $x^3=s$로 놓으면 $3x^2=\frac{ds}{dx}$이므로

$h(x)=\int x^2e^{x^3}\,dx=\int\frac{1}{3}e^s\,ds=\frac{1}{3}e^s+C_3$

$=\frac{1}{3}e^{x^3}+C_3$

$h(0)=0$이므로 $\frac{1}{3}+C_3=0$에서 $C_3=-\frac{1}{3}$

$\therefore h(x)=\frac{1}{3}e^{x^3}-\frac{1}{3}$

따라서 $f(1)=e-1$, $g(1)=\frac{1}{2}(e-1)$, $h(1)=\frac{1}{3}(e-1)$이므로 세 값의 대소 관계는 $h(1)<g(1)<f(1)$이다.

0936

답 ③

$f(x)=\int x\cos x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$f(x)=\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=x\sin x+\cos x+C_1$

$f(0)=1$이므로 $1+C_1=1$

$\therefore C_1=0$

따라서

$f(x)=x\sin x+\cos x$, $f'(x)=x\cos x$

이므로

$g(x)=\int e^{f(x)}x\cos x\,dx=\int e^{f(x)}f'(x)\,dx$

$f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로

$g(x)=\int e^{f(x)}f'(x)\,dx=\int e^t\,dt=e^t+C=e^{f(x)}+C$

$g(0)=0$이므로 $e+C=0$

$\therefore C=-e$

따라서 $g(x)=e^{f(x)}-e$이므로

$g(2\pi)=e^{f(2\pi)}-e$

$=e^{2\pi\sin 2\pi+\cos 2\pi}-e$

$=e-e=0$

다른 풀이

합성함수의 미분법을 이용하여 $g(x)$를 구할 수도 있다.

$\{e^{f(x)}\}'=e^{f(x)}f'(x)$이므로

$g(x)=\int e^{f(x)}f'(x)\,dx=\int\{e^{f(x)}\}'\,dx$

$=e^{f(x)}+C$

$g(0)=0$이므로 $e+C=0$

$\therefore C=-e$

따라서 $g(x)=e^{f(x)}-e$이므로

$g(2\pi)=e^{f(2\pi)}-e$

$=e^{2\pi\sin 2\pi+\cos 2\pi}-e$

$=e-e=0$

0937

답 ④

$f(g(x))=g(f(x))=x$이므로 $g(x)=f^{-1}(x)$

$y=\frac{3x-5}{x-1}$로 놓으면 $xy-y=3x-5$

$x(y-3)=y-5$

$\therefore x=\frac{y-5}{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x-5}{x-3}$

따라서 $g(x)=\frac{x-5}{x-3}$이므로

$h(x)=\int g(x)\,dx=\int\frac{x-5}{x-3}\,dx$

$=\int\left(1-\frac{2}{x-3}\right)dx$

$=x-2\ln|x-3|+C$

$\therefore h(7)-h(1)=(7-2\ln 4+C)-(1-2\ln 2+C)$

$=6-2\ln 2$

0938

답 ⑤

$u_1(x)=(\ln x)^2$, $v_1'(x)=3x^2$으로 놓으면

$u_1'(x)=\frac{2}{x}\ln x$, $v_1(x)=x^3$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 3x^2(\ln x)^2\,dx$

$=x^3(\ln x)^2-\int 2x^2\ln x\,dx$ ····· ㉠

$\int x^2\ln x\,dx$에서 $u_2(x)=\ln x$, $v_2'(x)=x^2$으로 놓으면

$u_2'(x)=\frac{1}{x}$, $v_2(x)=\frac{1}{3}x^3$이므로

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\int x^2 \ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^2dx$

$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C_1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=x^3(\ln x)^2-\frac{2}{3}x^3\ln x+\frac{2}{9}x^3+C$

$f(1)=\frac{2}{9}$이므로 $\frac{2}{9}+C=\frac{2}{9}$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x^3(\ln x)^2-\frac{2}{3}x^3\ln x+\frac{2}{9}x^3$이므로

$f(e)=e^3-\frac{2}{3}e^3+\frac{2}{9}e^3=\frac{5}{9}e^3$

0939

답 ①

$T(t)-20=x$로 놓으면 $T'(t)=\frac{dx}{dt}$이므로

$\int\frac{T'(t)}{T(t)-20}dt=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C_1$

$=\ln|T(t)-20|+C_1$

$\therefore \ln|T(t)-20|=kt+C_2$ …… ㉠

㉠의 양변에 $t=0$을 대입하면

$\ln|T(0)-20|=C_2$

이때 $T(0)=100$이므로 $C_2=\ln 80$ …… ㉡

㉠의 양변에 $t=3$을 대입하면

$\ln|T(3)-20|=3k+C_2$

이때 $T(3)=60$이므로 $3k+C_2=\ln 40$

㉡을 위의 식에 대입하면

$3k=\ln 40-\ln 80=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

$\therefore k=-\frac{\ln 2}{3}$

0940

답 ③

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고

조건 ㈎에서 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=h(x)$이므로

$f(x)g(x)=\int\{f(x)g(x)\}'dx=\int h(x)\,dx$

$f(x)=x$, $h(x)=\ln x$를 위의 식에 대입하면

$xg(x)=\int\ln x\,dx$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$xg(x)=\int\ln x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx$

$=x\ln x-x+C$

조건 ㈏에서 $g(1)=-1$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-1=-1+C$ $\therefore C=0$

따라서 $xg(x)=x\ln x-x$이므로

$g(x)=\ln x-1$ ($\because x>0$)

$\therefore g(e)=\ln e-1=1-1=0$

0941

답 ③

$f'(x)=\frac{1}{1-e^x}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{1}{1-e^x}dx$

$1-e^x=t$로 놓으면 $-e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\frac{1}{1-e^x}dx=\int\frac{1}{t}\times\frac{1}{t-1}dt$

$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln|t-1|-\ln|t|+C$

$=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C=\ln\left|\frac{-e^x}{1-e^x}\right|+C$

$=\ln\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right|+C$

$f(1)=0$이므로 $\ln\left|\frac{e}{e-1}\right|+C=0$

$\therefore C=\ln\frac{e-1}{e}$

따라서 $f(x)=\ln\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right|+\ln\frac{e-1}{e}$이므로

$f(2)=\ln\left|\frac{e^2}{e^2-1}\right|+\ln\frac{e-1}{e}$

$=\ln\left\{\frac{e^2}{(e+1)(e-1)}\times\frac{e-1}{e}\right\}=\ln\frac{e}{e+1}$

0942

답 ②

조건 ㈏의 $f(x)+xf'(x)=x\cos x$에서

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이므로

$\{xf(x)\}'=x\cos x$

$xf(x)=\int\{xf(x)\}'dx=\int x\cos x\,dx$

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$xf(x)=\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=x\sin x+\cos x+C$

조건 ㈎에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로 위의 식의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+C$에서

$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+C$ $\therefore C=0$

따라서 $xf(x)=x\sin x+\cos x$이므로

$f(x)=\sin x+\frac{\cos x}{x}$ ($\because x>0$)

$\therefore f(\pi)=\sin\pi+\frac{\cos\pi}{\pi}=-\frac{1}{\pi}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0943

답 17

조건 (가)에서 $\frac{d}{dx}\int f'(x)\,dx=\cos 2x+2a$이므로

$f'(x)=\cos 2x+2a$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(\cos 2x+2a)\,dx$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+2ax+C$

조건 (나)의 $\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)}{x-\pi}=-1$에서 극한값이 존재하고 $x\to\pi$일 때, (분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\pi}f(x)=0$이므로 $f(\pi)=0$에서

$2a\pi+C=0 \quad \therefore C=-2a\pi \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)=-1$

$f'(x)=\cos 2x+2a$에서 $f'(\pi)=1+2a$이므로

$1+2a=-1,\ 2a=-2 \quad \therefore a=-1$

이를 ㉠에 대입하면 $C=2\pi$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-2x+2\pi$이므로

$f(a\pi)=f(-\pi)=2\pi+2\pi=4\pi$

$\therefore b=4$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+4^2=17$

참고

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$이면 $f(a)=b,\ f'(a)=c$이다.

0944

답 $2\sqrt{3}$

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$

$=\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=2t^{\frac{1}{2}}+C$

$=2\sqrt{x^2+1}+C$

❶

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$f(0)=2$에서 $2+C=2$

$\therefore C=0$

$\therefore f(x)=2\sqrt{x^2+1}$

❷

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$가 만나는 점의 x좌표는

$f(x)=4$에서

$2\sqrt{x^2+1}=4,\ \sqrt{x^2+1}=2$

$x^2+1=4,\ x^2=3$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(-\sqrt{3},\ 4),\ (\sqrt{3},\ 4)$이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{3}$

❸

채점 기준	배점
❶ $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	30%
❷ 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$ 구하기	30%
❸ 선분 AB의 길이 구하기	40%

0945

답 3

함수 $f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $\frac{1}{x}>0$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{x}-h\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{x}-h\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)}{-h}$

$=-f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln x}{x}$

$\frac{1}{x}=t\ (t>0)$으로 놓으면

$-f'(t)=t\ln\frac{1}{t}=-t\ln t$

$f'(t)=t\ln t$

❶

$f(t)=\int f'(t)\,dt=\int t\ln t\,dt$

$u(t)=\ln t,\ v'(t)=t$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t},\ v(t)=\frac{1}{2}t^2$이므로

$f(t)=\int t\ln t\,dt$

$=\frac{1}{2}t^2\ln t-\int\frac{1}{2}t\,dt$

$=\frac{1}{2}t^2\ln t-\frac{1}{4}t^2+C$

❷

$f(1)=1$이므로 $-\frac{1}{4}+C=1$

$\therefore C=\frac{5}{4}$

따라서 $f(t)=\frac{1}{2}t^2\ln t-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{4}$이므로

$f(e)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{5}{4}$

$=\frac{1}{4}e^2+\frac{5}{4}$

즉, $p=\frac{1}{4},\ q=\frac{5}{4}$이므로

$2(p+q)=2\times\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)=3$

❸

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$의 도함수 구하기	30%
❷ 부분적분법을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	40%
❸ $f(x)$의 식을 이용하여 $2(p+q)$의 값 구하기	30%

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART C 수능 녹인 변별력 문제

0946 답 ⑤

주어진 식의 좌변에서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

주어진 식의 우변에서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{k-1}$의 값은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{x+1}$인 등비급수의 합과 같다.

또한 $x>0$일 때, $0<\frac{1}{x+1}<1$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=x+\ln x+C$$

$f(1)=3$이므로 $1+C=3$

$\therefore C=2$

따라서 $f(x)=x+\ln x+2$이므로

$f(9)=9+\ln 9+2=11+2\ln 3$

0947 답 ④

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(\cos x-2\sin x\cos x)\,dx$$
$$=\int\cos x(1-2\sin x)\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

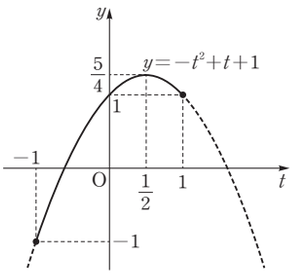
$$f(x)=\int\cos x(1-2\sin x)\,dx$$
$$=\int(1-2t)\,dt=-t^2+t+C$$
$$=-\sin^2 x+\sin x+C$$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=-\sin^2 x+\sin x+1$

즉, 함수 $f(x)$는

$y=-t^2+t+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$ (단, $-1\le t\le 1$)



따라서 함수 $f(x)$는 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $M=\frac{5}{4}$, $t=-1$일 때 최솟값 $m=-1$을 가지므로

$M+m=\frac{5}{4}+(-1)=\frac{1}{4}$

Bible Says 제한된 범위에서 이차함수의 최대 · 최소

$m\le x\le n$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$는

(1) $m\le p\le n$일 때

$f(m)$, $f(n)$, q 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

(2) $p<m$ 또는 $p>n$일 때

$f(m)$, $f(n)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

0948 답 ④

$$g(x)=\int f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $-\frac{1}{x^2}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$g(x)=\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx=-\int te^t\,dt$$

$u(t)=t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^t$이므로

$$g(x)=-\int te^t\,dt=-te^t+\int e^t\,dt$$
$$=-te^t+e^t+C$$
$$=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}+C$$

$g(1)=1$이므로 $-e+e+C=1$

$\therefore C=1$

따라서 $g(x)=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}+1$이므로

$g(2)=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{2}}+1=1+\frac{1}{2}\sqrt{e}$

0949 답 ②

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx$$
$$=2x+\frac{3}{x}+C_1$$

$f(1)=5$이므로 $5+C_1=5$

$\therefore C_1=0$

$\therefore f(x)=2x+\frac{3}{x}$

조건 (가)에서 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)=f'(-x)=2-\frac{3}{x^2}$이므로

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx$$
$$=2x+\frac{3}{x}+C_2$$

조건 (나)에서 $f(2)+g(-2)=9$이므로

$\left(4+\frac{3}{2}\right)+\left(-4-\frac{3}{2}+C_2\right)=9$

$\therefore C_2=9$

따라서 $g(x)=2x+\frac{3}{x}+9$이므로

$g(-3)=-6-1+9=2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0950

답 3

조건 (가)의 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\to 2$일 때,
(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(2)=4$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=2$$

한편, $g(x)=\int xf''(x)\,dx$에서
$u(x)=x$, $v'(x)=f''(x)$로 놓으면
$u'(x)=1$, $v(x)=f'(x)$이므로

$$\begin{aligned}g(x)&=\int xf''(x)\,dx\\&=xf'(x)-\int f'(x)\,dx\\&=xf'(x)-f(x)+C\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $g(2)=8$이므로
$2f'(2)-f(2)+C=8$
$4-4+C=8$
$\therefore C=8$
따라서 $g(x)=xf'(x)-f(x)+8$이므로
$g(4)=4f'(4)-f(4)+8$
$4f'(4)=f(4)+g(4)-8=20-8=12$
$\therefore f'(4)=3$

0951

답 ④

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로
$g(f(x))=x$
위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(f(x))f'(x)=1$ …… ㉠
조건 (나)에서 $g'(f(x))\neq 0$이므로
㉠에서 $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$
위의 식을 조건 (나)의 식에 대입하면

$$f(x)g'(f(x))=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{1}{x^2+1}$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=x^2+1$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$\ln|f(x)|=\frac{1}{3}x^3+x+C$$

$$\therefore |f(x)|=e^{\frac{1}{3}x^3+x+C}$$

조건 (가)에서 $f(0)=1>0$이고, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x+C}$$

위의 식에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=e^C=1$ ($\because$ 조건 (가))
$\therefore C=0$
따라서 $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x}$이므로

$$f(3)=e^{\frac{1}{3}\times 3^3+3}=e^{12}$$

0952

답 2

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{1-2f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $-\frac{1}{x^2}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{1-2f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx\\&=\int\{2f'(t)-1\}\,dt\\&=2f(t)-t+C\\&=2f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}+C\end{aligned}$$

$f(-1)=0$이므로 $2f(-1)+1+C=0$
$\therefore C=-1$
따라서 $f(x)=2f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}-1$이므로
$f(1)=2f(1)-1-1$
$\therefore f(1)=2$

다른 풀이

$$f'(x)=\frac{1-2f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$에서

$$x^2f'(x)+2f'\left(\frac{1}{x}\right)=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 x에 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$$\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)+2f'(x)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$2\times$㉡$-\frac{1}{x^2}\times$㉠을 하면

$$3f'(x)=2-\frac{1}{x^2} \qquad \therefore f'(x)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3x^2}$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3x^2}\right)dx=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3x}+C$$

$f(-1)=0$이므로 $-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+C=0$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3x}+1$이므로

$$f(1)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+1=2$$

0953

답 ⑤

$f(x)-xf'(x)=x-x\ln x$ …… ㉠
㉠의 양변을 x^2으로 나누면

$$\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=\frac{x-x\ln x}{x^2}$$

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$$이므로

$$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$$

$$\therefore \frac{f(x)}{x}=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int \frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C_1$$
$$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C_1$$

$$\therefore \frac{f(x)}{x}=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx$$
$$=-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

$f(1)=2$이므로 $\frac{f(1)}{1}=C$

$\therefore C=2$

따라서 $\frac{f(x)}{x}=-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+2$에서

$f(x)=-x\ln x+\frac{1}{2}x(\ln x)^2+2x$이므로

$f(e)=-e\ln e+\frac{1}{2}e(\ln e)^2+2e$

$=-e+\frac{e}{2}+2e=\frac{3}{2}e$

㉠의 양변에 $x=e$를 대입하면

$f(e)-ef'(e)=e-e\ln e$

$f(e)-ef'(e)=0$

이때 $f(e)=\frac{3}{2}e$이므로

$f'(e)=\frac{f(e)}{e}=\frac{3}{2}$

$\therefore f(e)f'(e)=\frac{3}{2}e\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}e$

Bible Says 몫의 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq0)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

0954

답 ①

조건 (가)에서 $g(x)>0$이므로 조건 (나)의 식의 양변에 $\frac{1}{\{g(x)\}^2}$을 곱하면

$$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f(x)}{g(x)}$$

조건 (가)에서 $\frac{f(x)}{g(x)}>0$이므로

$$\frac{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'}{\frac{f(x)}{g(x)}}=1$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$\ln\frac{f(x)}{g(x)}=x+C \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\frac{f(1)}{g(1)}=1$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\ln\frac{f(1)}{g(1)}=1+C$$

따라서 $\ln 1=1+C$이므로

$C=-1$

즉, $\ln\frac{f(x)}{g(x)}=x-1$에서

$$\frac{f(x)}{g(x)}=e^{x-1}$$

따라서 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{e^{x-1}}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{g(k)}{f(k)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e^{k-1}}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{e}{e-1}$$

첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{e}$인 등비급수이다.

0955

답 ③

$$f(x)=\int(a^2-1)3^x dx=\frac{(a^2-1)3^x}{\ln 3}+C$$

$f(1)=0$이므로 $\frac{3(a^2-1)}{\ln 3}+C=0$

$$\therefore C=-\frac{3(a^2-1)}{\ln 3}$$

$$\therefore f(x)=\frac{(3^x-3)(a^2-1)}{\ln 3}$$

(i) $a^2-1=0$, 즉 $a=-1$ 또는 $a=1$일 때

$f(x)=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a^2-1>0$, 즉 $a<-1$ 또는 $a>1$일 때

함수 $f(x)$가 증가함수이므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=\frac{1}{\ln 3}$에서

$$\frac{6(a^2-1)}{\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}$$

$$a^2-1=\frac{1}{6},\ a^2=\frac{7}{6} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)$의 최솟값은 $f(0)=-\frac{3}{\ln 3}$에서

$$-\frac{2(a^2-1)}{\ln 3}=-\frac{3}{\ln 3}$$

$$a^2-1=\frac{3}{2},\ a^2=\frac{5}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $a^2-1<0$, 즉 $-1<a<1$일 때

함수 $f(x)$가 감소함수이므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=\frac{1}{\ln 3}$에서

$$-\frac{2(a^2-1)}{\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}$$

$$a^2-1=-\frac{1}{2},\ a^2=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$$

$f(x)$의 최솟값은 $f(2)=-\frac{3}{\ln 3}$에서

$$\frac{6(a^2-1)}{\ln 3}=-\frac{3}{\ln 3}$$

$$a^2-1=-\frac{1}{2},\ a^2=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣에서 $a^2=\frac{1}{2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(i)~(iii)에서 $a^2=\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=-\frac{3^x-3}{2\ln 3}$

$\therefore f(3)=-\frac{3^3-3}{2\ln 3}=-\frac{12}{\ln 3}$

0956

답 ④

조건 (가)의 $2\{f(x)\}^2f'(x)=\{f(2x+1)\}^2f'(2x+1)$에서

$\int 2\{f(x)\}^2f'(x)\,dx=\int \{f(2x+1)\}^2f'(2x+1)\,dx$ …… ㉠

㉠의 좌변에서 $f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int 2\{f(x)\}^2f'(x)\,dx=\int 2t^2\,dt=\frac{2}{3}t^3+C_1$

$=\frac{2}{3}\{f(x)\}^3+C_1$

㉠의 우변에서 $2x+1=s$로 놓으면 $2=\frac{ds}{dx}$이므로

$\int \{f(2x+1)\}^2f'(2x+1)\,dx=\frac{1}{2}\int \{f(s)\}^2f'(s)ds$

$=\frac{1}{6}\{f(s)\}^3+C_2$

$=\frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3+C_2$

즉, $\frac{2}{3}\{f(x)\}^3=\frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3+C$이므로

$4\{f(x)\}^3=\{f(2x+1)\}^3+6C$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=-\frac{1}{8}$을 대입하면

$4\times 1^3=\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3+6C$ ($\because$ 조건 (나)에서 $f\left(-\frac{1}{8}\right)=1$)

$\therefore \left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3=4-6C$

㉡의 양변에 $x=\frac{3}{4}$을 대입하면

$4(4-6C)=\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3+6C$

$\therefore \left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3=16-30C$

㉡의 양변에 $x=\frac{5}{2}$를 대입하면

$4(16-30C)=2^3+6C$ ($\because$ 조건 (나)에서 $f(6)=2$)

$\therefore C=\frac{4}{9}$

따라서 $4\{f(x)\}^3=\{f(2x+1)\}^3+\frac{8}{3}$이므로 이 식의 양변에

$x=-1$을 대입하면

$4\{f(-1)\}^3=\{f(-1)\}^3+\frac{8}{3}$

$\{f(-1)\}^3=\frac{8}{9}$

$\therefore f(-1)=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

참고

미분과 적분의 관계를 이용하여 관계식을 구할 수도 있다.

$\left[\frac{2}{3}\{f(x)\}^3\right]'=2\{f(x)\}^2\times f'(x)$,

$\left[\frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3\right]'=\frac{1}{2}\{f(2x+1)\}^2\times 2f'(2x+1)$

$=\{f(2x+1)\}^2\times f'(2x+1)$

이때 적분은 미분의 역연산이므로

$\frac{2}{3}\{f(x)\}^3=\frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3+C$

$\therefore 4\{f(x)\}^3=\{f(2x+1)\}^3+6C$

0957

답 13

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int e^x\sin x\,dx$

$u_1(x)=\sin x$, $v_1'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_1'(x)=\cos x$, $v_1(x)=e^x$이므로

$f(x)=\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$ …… ㉠

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $u_2(x)=\cos x$, $v_2'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_2'(x)=-\sin x$, $v_2(x)=e^x$이므로

$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$ …… ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$2\int e^x\sin x\,dx=e^x(\sin x-\cos x)$

즉, $\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

이때 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+1$이므로

$f(x)=1$에서 $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+1=1$

$\sin x-\cos x=0$, $\tan x=1$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \cdots$

$\therefore a_n=n\pi-\frac{3}{4}\pi$ (단, n은 자연수)

$\sum_{n=1}^{2p}a_n=\sum_{n=1}^{2p}\left(n\pi-\frac{3}{4}\pi\right)$

$=\frac{2p(2p+1)}{2}\pi-\frac{3}{4}\pi\times 2p$

$=\left(2p^2-\frac{1}{2}p\right)\pi=30\pi$

에서 $2p^2-\frac{1}{2}p-30=0$

$4p^2-p-60=0$, $(4p+15)(p-4)=0$

p는 자연수이므로 $p=4$

따라서 $a_p=a_4=4\pi-\frac{3}{4}\pi=\frac{13}{4}\pi$이므로

$\frac{p\times a_p}{\pi}=\frac{4\times\frac{13}{4}\pi}{\pi}=13$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A

09 정적분

유형 01 유리함수, 무리함수의 정적분

확인 문제 (1) 38 (2) 4

(1) $\int_4^9 3\sqrt{x}\,dx=\int_4^9 3x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[2x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9=54-16=38$

(2) $\int_1^{e^2}\frac{2}{x}\,dx=\left[2\ln|x|\right]_1^{e^2}=2\ln e^2-2\ln 1=4$

Bible Says 부정적분

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $f(x)$의 모든 부정적분을
$F(x)+C$ (C는 상수)
꼴로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로 $\int f(x)\,dx$와 같이 나타낸다.
즉, $F'(x)=f(x)$일 때,
$\int f(x)\,dx=F(x)+C$ (C는 상수)
이때 C를 적분상수라 한다.

0958 답 ③

$$\begin{aligned}\int_2^8\frac{x-1}{x+1}\,dx&=\int_2^8\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx\\&=\left[x-2\ln|x+1|\right]_2^8\\&=8-2\ln 9-(2-2\ln 3)\\&=8-4\ln 3-2+2\ln 3\\&=6-2\ln 3\end{aligned}$$

0959 답 ⑤

$$\begin{aligned}\int_1^4\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x}\,dx&=\int_1^4\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x}\,dx\\&=\int_1^4\left(1+\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}\right)dx\\&=\left[x+8\sqrt{x}+4\ln|x|\right]_1^4\\&=4+16+4\ln 4-(1+8)\\&=11+8\ln 2\end{aligned}$$

0960 답 0

$f'(x)=\frac{2}{x^3}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{2}{x^3}\,dx=\int 2x^{-3}\,dx=-x^{-2}+C$

$f(1)=-\frac{1}{2}$이므로 $-1+C=-\frac{1}{2}$

$\therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-x^{-2}+\frac{1}{2}$이므로 ❶

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)\,dx&=\int_1^2\left(-x^{-2}+\frac{1}{2}\right)dx=\left[x^{-1}+\frac{1}{2}x\right]_1^2\\&=\frac{1}{2}+1-\left(1+\frac{1}{2}\right)=0\end{aligned}$$ ❷

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$ 구하기	50%
❷ $\int_1^2 f(x)\,dx$의 값 구하기	50%

0961 답 $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{2}{x^2+4x+3}\,dx&=\int_0^1\frac{2}{(x+1)(x+3)}\,dx\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx\\&=\left[\ln|x+1|-\ln|x+3|\right]_0^1\\&=\ln 2-\ln 4-(-\ln 3)\\&=-\ln 2+\ln 3=\ln\frac{3}{2}=\ln k\end{aligned}$$

$\therefore k=\frac{3}{2}$

0962 답 ③

$$\begin{aligned}&\int_2^3\frac{4x^2-2x+1}{x-1}\,dx+\int_2^3\frac{2x}{1-x}\,dx\\&=\int_2^3\frac{4x^2-2x+1}{x-1}\,dx-\int_2^3\frac{2x}{x-1}\,dx\\&=\int_2^3\frac{4x^2-4x+1}{x-1}\,dx=\int_2^3\frac{4x(x-1)+1}{x-1}\,dx\\&=\int_2^3\left(4x+\frac{1}{x-1}\right)dx=\left[2x^2+\ln|x-1|\right]_2^3\\&=18+\ln 2-8=10+\ln 2\end{aligned}$$

0963 답 ⑤

$F(x)=xf(x)-4x+\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4+\frac{1}{x}$

$xf'(x)=4-\frac{1}{x}$

$\therefore f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned}\therefore\int_1^2 f'(x)\,dx&=\int_1^2\left(\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx\\&=\left[4\ln|x|+\frac{1}{x}\right]_1^2\\&=4\ln 2+\frac{1}{2}-1=4\ln 2-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 02 지수함수의 정적분

확인 문제 (1) 4 (2) $\frac{2}{\ln 2}$

(1) $\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 3}=\frac{1}{2}e^{2\ln 3}-\frac{1}{2}e^0=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$

(2) $\int_1^2 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_1^2=\frac{4}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}=\frac{2}{\ln 2}$

0964 답 ③

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x+1)^2-2e^x}{e^x}\,dx&=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}+1}{e^x}\,dx\\&=\int_0^{\ln 2}(e^x+e^{-x})\,dx\\&=\left[e^x-e^{-x}\right]_0^{\ln 2}\\&=2-\frac{1}{2}-(1-1)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

0965 답 ③

$$\begin{aligned}\int_0^2\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}\,dx&=\int_0^2\sqrt{(2^x-1)^2}\,dx\\&=\int_0^2(2^x-1)\,dx\\&=\left[\frac{2^x}{\ln 2}-x\right]_0^2\\&=\frac{4}{\ln 2}-2-\frac{1}{\ln 2}=\frac{3}{\ln 2}-2\end{aligned}$$

0966 답 $\ln 2-1$

$$\begin{aligned}&\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}\,dx+\int_{\ln 2}^0\frac{e^{2t}}{e^t+1}\,dt\\&=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}\,dx-\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx\\&=\int_0^{\ln 2}\frac{1-e^{2x}}{e^x+1}\,dx=\int_0^{\ln 2}\frac{(1+e^x)(1-e^x)}{e^x+1}\,dx\\&=\int_0^{\ln 2}(1-e^x)\,dx=\left[x-e^x\right]_0^{\ln 2}\\&=(\ln 2-2)-(-1)=\ln 2-1\end{aligned}$$

0967 답 ③

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{8^x}{2^x+1}\,dx-\int_1^0\frac{1}{2^x+1}\,dx\\&=\int_0^1\frac{8^x}{2^x+1}\,dx+\int_0^1\frac{1}{2^x+1}\,dx\\&=\int_0^1\frac{8^x+1}{2^x+1}\,dx=\int_0^1\frac{(2^x+1)(4^x-2^x+1)}{2^x+1}\,dx\\&=\int_0^1(4^x-2^x+1)\,dx=\left[\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+x\right]_0^1\\&=\frac{4}{\ln 4}-\frac{2}{\ln 2}+1-\left(\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 2}\right)\\&=\frac{1}{2\ln 2}+1\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$이므로

$a+b=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

유형 03 삼각함수의 정적분

확인 문제 (1) 1 (2) 1

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx=\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-0=1$

0968 답 ①

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(1-\cos^2 x)}{1+\cos x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(1-\cos x)\,dx\\&=\left[2x-2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2\end{aligned}$$

0969 답 ④

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\cos x\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}\times\cos x\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

0970 답 ①

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^4 x}{1+\tan^2 x}\,dx&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 x(1+\tan^2 x)}{\sec^2 x}\,dx\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 x\,dx=\left[\tan x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\\&=\sqrt{3}-1\end{aligned}$$

0971 답 -2

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^2dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx\\&\qquad-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}\right)dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2\sin x)\,dx\\&=\left[2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-2\end{aligned}$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Bible Says 배각의 공식

(1) $\sin 2x=2\sin x\cos x$

(2) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

(3) $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

0972

답 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)\,dx$$
$$=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$$

따라서 $a=1$, $b=-\dfrac{1}{4}$이므로

$4(a+b)=4\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=3$

유형 04 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분

0973

답 ②

$|e^x-1|=\begin{cases}-e^x+1 & (x<0)\\ e^x-1 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-\ln 3}^{\ln 3}|e^x-1|\,dx=\int_{-\ln 3}^{0}(-e^x+1)\,dx+\int_0^{\ln 3}(e^x-1)\,dx$$
$$=\Big[-e^x+x\Big]_{-\ln 3}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_0^{\ln 3}$$
$$=\left(-1+\frac{1}{3}+\ln 3\right)+(3-\ln 3-1)=\frac{4}{3}$$

0974

답 ③

$$\int_{-1}^{2\pi}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(e^{-x}+1)\,dx+\int_0^{2\pi}2\cos x\,dx$$
$$=\Big[-e^{-x}+x\Big]_{-1}^{0}+\Big[2\sin x\Big]_0^{2\pi}$$
$$=-1-(-e-1)=e$$

0975

답 $2\sqrt{2}-2$

$\sin x-\cos x=0$에서 $\sin x=\cos x$

$\tan x=1$ $\quad\therefore x=\dfrac{\pi}{4}\left(\because 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $|\sin x-\cos x|=\begin{cases}\cos x-\sin x & \left(0\le x<\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \sin x-\cos x & \left(\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\sqrt{2}-1+(-1)-(-\sqrt{2})$$
$$=2\sqrt{2}-2$$

0976

답 6

$\sqrt{|2-x|}=\begin{cases}\sqrt{2-x} & (x<2)\\ \sqrt{x-2} & (x\ge 2)\end{cases}$이므로

$$\int_1^6\sqrt{|2-x|}\,dx=\int_1^2\sqrt{2-x}\,dx+\int_2^6\sqrt{x-2}\,dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2+\Big[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\Big]_2^6$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{16}{3}=6$$

0977

답 $2\pi+4$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f(0)$이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}2\cos x=2$

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(2\sin x+k)=k$

$f(0)=k$

에서 $k=2$ ❶

따라서 $f(x)=\begin{cases}2\cos x & (x<0)\\ 2\sin x+2 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{0}2\cos x\,dx+\int_0^{\pi}(2\sin x+2)\,dx$$
$$=\Big[2\sin x\Big]_{-\pi}^{0}+\Big[-2\cos x+2x\Big]_0^{\pi}$$
$$=2+2\pi-(-2)=2\pi+4$$ ❷

채점 기준	배점
❶ $f(x)$가 연속임을 이용하여 상수 k의 값 구하기	40%
❷ $f(x)$의 식을 이용하여 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$의 값 구하기	60%

Bible Says 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $x=a$에서 연속이다.

(1) 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

(2) 극한값 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0978

답 ⑤

$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & (x\le 1) \\ 2x-1 & (x>1) \end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+C_1 & (x\le 1) \\ x^2-x+C_2 & (x>1) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이고, $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(e^{x-1}+C_1)=1+C_1$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x^2-x+C_2)=C_2$

$f(1)=1+C_1$

에서 $1+C_1=C_2$ ····· ㉠

이때 $f(2)=2$이므로 $C_2=0$

이를 ㉠에 대입하면 $C_1=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}-1 & (x\le 1) \\ x^2-x & (x>1) \end{cases}$이므로

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 (e^{x-1}-1)\,dx+\int_1^2 (x^2-x)\,dx$$
$$=\left[e^{x-1}-x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=-e^{-1}+\frac{8}{3}-2-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{e}+\frac{5}{6}$$

유형 05 우함수와 기함수의 정적분

0979

답 2

$f(x)=x^2\sin x$, $g(x)=\cos x$, $h(x)=2x$라 하면

$f(-x)=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-f(x)$

$g(-x)=\cos(-x)=\cos x=g(x)$

$h(-x)=-2x=-h(x)$

에서 $g(x)$는 우함수, $f(x)$와 $h(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2\sin x+\cos x+2x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\times 1=2$$

0980

답 ③

$f(x)=2^x+2^{-x}$, $g(x)=5^x-5^{-x}$이라 하면

$f(-x)=2^{-x}+2^x=f(x)$

$g(-x)=5^{-x}-5^x=-(5^x-5^{-x})=-g(x)$

에서 $f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-1}^1 (2^x+5^x+2^{-x}-5^{-x})\,dx=2\int_0^1 (2^x+2^{-x})\,dx$$
$$=2\left[\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^1$$
$$=2\times\frac{3}{2\ln 2}=\frac{3}{\ln 2}$$

0981

답 32

$f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이고,

$g(x)=f(x)\tan x$라 하면

$g(-x)=f(-x)\tan(-x)=-f(x)\tan x=-g(x)$

에서 $g(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x+2)f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\tan x\,dx+2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$
$$=0+4\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$
$$=4\times 8=32$$

0982

답 ①

ㄱ. $\sin f(-x)=\sin\{-f(x)\}=-\sin f(x)$에서

$\sin f(x)$는 기함수이므로 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin f(x)\,dx=0$

ㄴ. $\cos f(-x)=\cos\{-f(x)\}=\cos f(x)$에서

$\cos f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos f(x)\,dx=2\int_0^{\pi}\cos f(x)\,dx$

즉, 정적분의 값이 0이 아닐 수도 있다.

ㄷ. $f(-x)\sin(-x)=-f(x)\times(-\sin x)=f(x)\sin x$에서

$f(x)\sin x$는 우함수이므로

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx$

즉, 정적분의 값이 0이 아닐 수도 있다.

따라서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄱ이다.

참고

함수 $f(x)$가 우함수일 때, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$인 경우도 존재한다.

유형 06 주기함수의 정적분

0983

답 6

$y=|\sin 2x|$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 주기함수이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin 2x|\,dx$$
$$=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin 2x|\,dx=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}|\sin 2x|\,dx$$
$$=\int_{2\pi}^{\frac{5}{2}\pi}|\sin 2x|\,dx=\int_{\frac{5}{2}\pi}^{3\pi}|\sin 2x|\,dx$$

$$\therefore \int_0^{3\pi}|\sin 2x|\,dx=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|\,dx$$
$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$$
$$=6\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=6$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0984

답 ③

$y=|\cos \pi x|$는 주기가 1인 주기함수이고

$|\cos(-\pi x)|=|\cos \pi x|$에서 $y=|\cos \pi x|$는 우함수이므로

$$\int_a^{a+1}|\cos \pi x|\,dx=\int_0^1|\cos \pi x|\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\cos \pi x|\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\cos \pi x\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{\pi}\sin \pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=2\times\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

0985

답 5

조건 (가)에서 $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$일 때, $f(x)=\sec^2 x$이므로

$f(-x)=\sec^2(-x)=\sec^2 x=f(x)$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 주기함수이므로

$$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-\pi}^{-\frac{3}{4}\pi}f(x)\,dx+\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx+4\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx\ (\because f(x)\text{는 우함수})$$
$$=5\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx=5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx$$
$$=5\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=5$$

유형 07 치환적분법을 이용한 정적분 - 유리함수, 무리함수

0986

답 ②

$x^2+2x+3=t$로 놓으면 $2x+2=\frac{dt}{dx}$이고

$x=-1$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=6$이므로

$$\int_{-1}^1\frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx=\int_2^6\frac{1}{t}\times\frac{1}{2}\,dt=\int_2^6\frac{1}{2t}\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}\ln|t|\right]_2^6=\frac{1}{2}(\ln 6-\ln 2)$$
$$=\frac{1}{2}\ln 3$$

다른 풀이

$$\int_{-1}^1\frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+2x+3)\right]_{-1}^1$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 6-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln 3$$

0987

답 20

$2x^2+1=t$로 놓으면 $4x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^1 4x(2x^2+1)^3\,dx=\int_1^3 t^3\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_1^3=\frac{1}{4}\times(81-1)=20$$

0988

답 ②

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^{\sqrt{2}}x^3\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_0^1(t+1)\sqrt{t}\times\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{16}{15}=\frac{8}{15}$$

다른 풀이

$\sqrt{x^2-1}=t$로 놓으면 $x^2-1=t^2$에서 $2x=2t\times\frac{dt}{dx}$, 즉 $x=t\times\frac{dt}{dx}$

이고 $x=1$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^{\sqrt{2}}x^3\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_0^1(t^2+1)\times t\times t\,dt$$
$$=\int_0^1(t^4+t^2)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$$

0989

답 37

$x+1=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^3\frac{x^2-x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int_1^4\frac{(t-1)^2-(t-1)+2}{\sqrt{t}}\,dt$$
$$=\int_1^4\frac{t^2-3t+4}{\sqrt{t}}\,dt$$
$$=\int_1^4\left(t^{\frac{3}{2}}-3t^{\frac{1}{2}}+4t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{3}{2}}+8t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{64}{5}-16+16-\left(\frac{2}{5}-2+8\right)=\frac{32}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=32$이므로

$p+q=5+32=37$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0990

답 ③

$\sqrt{x-3}=t$로 놓으면 $x-3=t^2$에서 $x=t^2+3$이므로

$1=2t\times\dfrac{dt}{dx}$

또한 $x=7$일 때 $t=2$, $x=19$일 때 $t=4$이므로

$$\begin{aligned}\int_7^{19}\frac{1}{(x-4)\sqrt{x-3}}dx&=\int_2^4\frac{1}{t^2-1}\times\frac{1}{t}\times2t\,dt\\&=\int_2^4\frac{2}{t^2-1}dt\\&=\int_2^4\frac{2}{(t-1)(t+1)}dt\\&=\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt\\&=\Big[\ln|t-1|-\ln|t+1|\Big]_2^4\\&=\ln3-\ln5+\ln3\\&=\ln\frac{9}{5}\end{aligned}$$

0994

답 1

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{e^x}{e^{-x}+e^x}dx+\int_0^1\frac{e^x}{e^{-x}+e^x}dx&=\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{e^{-x}+e^x}dx\\&=\int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx\end{aligned}$$

$e^{2x}+1=t$로 놓으면 $2e^{2x}=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=-1$일 때 $t=e^{-2}+1$, $x=1$일 때 $t=e^2+1$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx&=\int_{e^{-2}+1}^{e^2+1}\frac{1}{t}\times\frac{1}{2}dt\\&=\Big[\frac{1}{2}\ln|t|\Big]_{e^{-2}+1}^{e^2+1}\\&=\frac{1}{2}\ln(e^2+1)-\frac{1}{2}\ln(e^{-2}+1)\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{e^{-2}+1}\\&=\frac{1}{2}\ln e^2\\&=\frac{1}{2}\times2=1\end{aligned}$$

유형 08 치환적분법을 이용한 정적분 – 지수함수, 로그함수

0991

답 ③

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_1^2\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_1^2=\ln2$$

0992

답 ①

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1xe^{x^2-1}dx&=\int_{-1}^{0}e^t\times\frac{1}{2}dt\\&=\Big[\frac{1}{2}e^t\Big]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

0993

답 ③

$$\int_1^e\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx-\int_1^e\frac{2}{x^2}\ln x\,dx=\int_1^e\frac{3}{x}\ln x\,dx$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e\frac{3}{x}\ln x\,dx=\int_0^1 3t\,dt=\Big[\frac{3}{2}t^2\Big]_0^1=\frac{3}{2}$$

0995

답 3

$a_n=\displaystyle\int_e^{e^n}\frac{\ln x}{x}dx$에서

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^n$일 때 $t=n$이므로

$$\begin{aligned}a_n&=\int_e^{e^n}\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^n t\,dt\\&=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_1^n=\frac{1}{2}(n^2-1)\\&=\frac{1}{2}(n-1)(n+1)\end{aligned}$$ ❶

$$\begin{aligned}\therefore\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{a_k}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{4}{(k-1)(k+1)}\\&=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=2\times\frac{3}{2}=3\end{aligned}$$ ❷

채점 기준	배점
❶ 치환적분법을 이용하여 a_n 구하기	50%
❷ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{a_n}$의 값 구하기	50%

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 09 치환적분법을 이용한 정적분 - 삼각함수

0996

답 $2\ln 2$

$1+\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=2$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x}{1+\cos x}\,dx=\int_2^1\frac{1}{t}\times(-2)\,dt$$
$$=\int_1^2\frac{2}{t}\,dt$$
$$=\Big[2\ln|t|\Big]_1^2=2\ln 2$$

0997

답 ③

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x(\sin x-2)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos x(\sin x-2)\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos x(\sin x-2)\,dx=\int_0^1 2t(t-2)\,dt$$
$$=\int_0^1(2t^2-4t)\,dt$$
$$=\Big[\frac{2}{3}t^3-2t^2\Big]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$$

0998

답 6

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f'(\sin x)\cos x\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 f'(t)\,dt=\Big[f(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=f(1)-f\Big(\frac{1}{2}\Big)$$
$$=9-3=6$$

0999

답 230

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin x\,dx=\int_1^0 t^n\times(-1)\,dt=\int_0^1 t^n\,dt$$
$$=\Big[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\Big]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{20}(n+1)=\frac{20\times 21}{2}+20=230$$

유형 10 치환적분법을 이용한 정적분 $f(ax+b)$ 꼴

1000

답 5

$3x+4=t$로 놓으면 $3=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=-1$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=7$이므로

$$\int_{-1}^1 f(3x+4)\,dx=\int_1^7\frac{1}{3}f(t)\,dt=\frac{1}{3}\times 15=5$$

1001

답 4

$f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=f(0)=1$, $x=3$일 때 $t=f(3)$이므로

$$\int_0^3\{f(x)\}^2f'(x)\,dx=\int_1^{f(3)}t^2\,dt=\Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_1^{f(3)}$$
$$=\frac{1}{3}\{f(3)\}^3-\frac{1}{3}=21$$

에서 $\{f(3)\}^3=64$ $\quad\therefore f(3)=4$

1002

답 ⑤

$$\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f(1-x)\,dx$$

$\displaystyle\int_0^1 f(1-x)\,dx$에서 $1-x=t$로 놓으면 $-1=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1 f(1-x)\,dx=\int_1^0 f(t)\times(-1)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\therefore\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=2\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=2(e-1)$$

유형 11 삼각함수를 이용한 치환적분법

1003

답 ③

$x=2\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $1=2\cos\theta\times\dfrac{d\theta}{dx}$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\times 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}4\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1004

답 ③

$x=\frac{1}{4}\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $1=\frac{1}{4}\cos\theta\times\frac{d\theta}{dx}$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{8}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\times\frac{1}{4}\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{4}\,d\theta=\left[\frac{1}{4}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{24}$$

1005

답 2

$x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $1=a\sec^2\theta\times\frac{d\theta}{dx}$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^a\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}\,d\theta=\left[\frac{1}{a}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4a}=\frac{\pi}{8}$$

$\therefore a=2$

유형 12 부분적분법을 이용한 정적분

1006

답 ③

$u(x)=x-1$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_1^2(x-1)e^x\,dx=\left[(x-1)e^x\right]_1^2-\int_1^2e^x\,dx$$
$$=e^2-\left[e^x\right]_1^2=e^2-(e^2-e)=e$$

1007

답 2

$$\int_0^\pi x\cos(\pi-x)\,dx=\int_0^\pi x\times(-\cos x)\,dx$$
$$=-\int_0^\pi x\cos x\,dx$$

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx=\left[x\sin x\right]_0^\pi-\int_0^\pi\sin x\,dx$$
$$=-\left[-\cos x\right]_0^\pi=-1-1=-2$$

$$\therefore\int_0^\pi x\cos(\pi-x)\,dx=-\int_0^\pi x\cos x\,dx=2$$

1008

답 ②

$$\int_1^{e^2}\frac{\ln x-2}{x^2}\,dx=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}\,dx-\int_1^{e^2}\frac{2}{x^2}\,dx$$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=-\frac{2}{e^2}+\int_1^{e^2}\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\therefore\int_1^{e^2}\frac{\ln x-2}{x^2}\,dx=-\frac{2}{e^2}+\int_1^{e^2}\frac{1}{x^2}\,dx-\int_1^{e^2}\frac{2}{x^2}\,dx$$
$$=-\frac{2}{e^2}-\int_1^{e^2}\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{2}{e^2}+\left[\frac{1}{x}\right]_1^{e^2}$$
$$=-\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e^2}-1=-\frac{1}{e^2}-1$$

1009

답 ④

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^4$일 때 $t=4$이므로

$$\int_e^{e^4}\frac{\ln(\ln x)}{x(\ln x)^2}\,dx=\int_1^4\frac{\ln t}{t^2}\,dt$$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=\frac{1}{t^2}$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=-\frac{1}{t}$이므로

$$\int_1^4\frac{\ln t}{t^2}\,dt=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^4-\int_1^4\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=-\frac{\ln 4}{4}-\left[\frac{1}{t}\right]_1^4=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

1010

답 ①

$f(x)=\begin{cases}1 & (0\le x\le 1)\\ -x+2 & (1<x\le 2)\end{cases}$이므로

$$\int_0^2e^xf(x)\,dx=\int_0^1e^x\,dx+\int_1^2(-x+2)e^x\,dx$$
$$=\left[e^x\right]_0^1+\left[2e^x\right]_1^2-\int_1^2xe^x\,dx$$
$$=e-1+2e^2-2e-\int_1^2xe^x\,dx\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

$\int_1^2xe^x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_1^2xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_1^2-\int_1^2e^x\,dx$$
$$=2e^2-e-\left[e^x\right]_1^2$$
$$=2e^2-e-(e^2-e)=e^2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^2e^xf(x)\,dx=e^2-e-1$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1011

답 ⑤

조건 (가)에서 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이므로 $f(x)$는 감소하는 함수이다.

조건 (나)에서 $-1\le x\le 3$일 때 함수 $f(x)$의 최댓값이 1, 최솟값이 -2이므로

$f(-1)=1$, $f(3)=-2$

$\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)\,dx$에서 $f^{-1}(x)=t$로 놓으면

$x=f(t)$에서 $1=f'(t)\times\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=-2$일 때 $t=3$, $x=1$일 때 $t=-1$이므로

$\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)\,dx=\int_{3}^{-1} tf'(t)\,dt$

$u(t)=t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=f(t)$이므로

$$\int_{3}^{-1} tf'(t)\,dt=\Big[tf(t)\Big]_{3}^{-1}-\int_{3}^{-1} f(t)\,dt$$
$$=-f(-1)-3f(3)+\int_{-1}^{3} f(t)\,dt$$
$$=-1-3\times(-2)+3=8$$

Bible Says 함수의 최대, 최소

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

유형 13 부분적분법을 이용한 정적분 – 여러 번 적용하는 경우

1012

답 1

$u_1(x)=\sin x$, $v_1'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_1'(x)=\cos x$, $v_1(x)=e^x$이므로

$$\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx=\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$$
$$=-\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$에서 $u_2(x)=\cos x$, $v_2'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_2'(x)=-\sin x$, $v_2(x)=e^x$이므로

$$\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx=\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^x\sin x)\,dx$$
$$=-e^{\pi}-1+\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$$

이를 ㉠에 대입하면

$2\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx=e^{\pi}+1$

$\therefore \int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx=\dfrac{1}{2}e^{\pi}+\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$이므로

$a+b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

1013

답 ①

$u_1(x)=x^2$, $v_1'(x)=\cos x$로 놓으면

$u_1'(x)=2x$, $v_1(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx=\Big[x^2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\,dx$$
$$=\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$에서 $u_2(x)=x$, $v_2'(x)=\sin x$로 놓으면

$u_2'(x)=1$, $v_2(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\,dx$$
$$=-\Big[-\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx=\dfrac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\dfrac{\pi^2}{4}-2$

1014

답 -24

$\int_0^1 (x+1)^2e^x\,dx+\int_0^1 (x-1)^2e^x\,dx=\int_0^1 (2x^2+2)e^x\,dx$

$u_1(x)=2x^2+2$, $v_1'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_1'(x)=4x$, $v_1(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 (2x^2+2)e^x\,dx=\Big[(2x^2+2)e^x\Big]_0^1-\int_0^1 4xe^x\,dx$$
$$=4e-2-4\int_0^1 xe^x\,dx$$

$\int_0^1 xe^x\,dx$에서 $u_2(x)=x$, $v_2'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_2'(x)=1$, $v_2(x)=e^x$이므로

$\int_0^1 xe^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-\Big[e^x\Big]_0^1=e-(e-1)=1$

$\therefore \int_0^1 (2x^2+2)e^x\,dx=4e-2-4\int_0^1 xe^x\,dx=4e-2-4=4e-6$

따라서 $a=4$, $b=-6$이므로

$ab=4\times(-6)=-24$

유형 14 아래끝, 위끝이 상수인 정적분을 포함한 등식

1015

답 1

$f(x)=e^x+\int_0^2 f(t)\,dt$에서

$\int_0^2 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots ㉠$

로 놓으면 $f(x)=e^x+k$

이를 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (e^t+k)\,dt=\Big[e^t+kt\Big]_0^2=e^2+2k-1=k$

$\therefore k=-e^2+1$

따라서 $f(x)=e^x-e^2+1$이므로

$f(2)=e^2-e^2+1=1$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1016

답 ②

$f(x)=x+\frac{2}{x}+\int_1^3 f(t)\,dt$에서

$\int_1^3 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x+\frac{2}{x}+k$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_1^3\left(t+\frac{2}{t}+k\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+2\ln|t|+kt\right]_1^3$$
$$=\frac{9}{2}+2\ln 3+3k-\left(\frac{1}{2}+k\right)$$
$$=4+2\ln 3+2k=k$$

$\therefore k=-4-2\ln 3$

따라서 $f(x)=x+\frac{2}{x}-4-2\ln 3$이므로

$f(1)=1+2-4-2\ln 3=-1-2\ln 3$

1017

답 $2\ln 2$

$f(x)=\ln x+\int_1^e f'(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{1}{x}$

$\therefore \int_1^e f'(t)\,dt=\int_1^e \frac{1}{t}\,dt=\left[\ln|t|\right]_1^e=1$

❶

따라서 $f(x)=\ln x+1$이므로

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2(\ln x+1)\,dx=\int_1^2 \ln x\,dx+\int_1^2 1\,dx$$
$$=\int_1^2 \ln x\,dx+\left[x\right]_1^2=\int_1^2 \ln x\,dx+1$$

$\int_1^2 \ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int_1^2 \ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_1^2-\int_1^2 1\,dx$$
$$=2\ln 2-\left[x\right]_1^2=2\ln 2-1$$

$\therefore \int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 \ln x\,dx+1=2\ln 2$

❷

채점 기준	배점
❶ 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$의 식을 구한 후 $\int_1^e f'(t)\,dt$의 값 구하기	40%
❷ 부분적분법을 이용하여 $\int_1^2 f(x)\,dx$의 값 구하기	60%

1018

답 ②

$f(x)=\cos x+\int_0^\pi tf(t)\,dt$에서

$\int_0^\pi tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=\cos x+k$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^\pi t(\cos t+k)\,dt=\int_0^\pi t\cos t\,dt+\int_0^\pi kt\,dt$$
$$=\int_0^\pi t\cos t\,dt+\left[\frac{1}{2}kt^2\right]_0^\pi$$
$$=\int_0^\pi t\cos t\,dt+\frac{1}{2}k\pi^2=k$$ …… ㉡

$\int_0^\pi t\cos t\,dt$에서 $u(t)=t$, $v'(t)=\cos t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\sin t$이므로

$$\int_0^\pi t\cos t\,dt=\left[t\sin t\right]_0^\pi-\int_0^\pi \sin t\,dt$$
$$=-\left[-\cos t\right]_0^\pi=-2$$

이를 ㉡에 대입하면

$\int_0^\pi t(\cos t+k)\,dt=\frac{1}{2}k\pi^2-2=k$

에서 $k\left(\frac{\pi^2}{2}-1\right)=2$, $k=\frac{4}{\pi^2-2}$

$\therefore \int_0^\pi xf(x)\,dx=k=\frac{4}{\pi^2-2}$

1019

답 $\frac{1}{2}$

$f(x)=\ln\frac{x}{e}+\int_1^e tf(t)\,dt$에서

$\int_1^e tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=\ln\frac{x}{e}+k$

이를 ㉠에 대입하면

$\int_1^e t\left(\ln\frac{t}{e}+k\right)dt=k$

$u(t)=\ln\frac{t}{e}+k$, $v'(t)=t$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=\frac{1}{2}t^2$이므로

$$\int_1^e t\left(\ln\frac{t}{e}+k\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2\left(\ln\frac{t}{e}+k\right)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}ke^2-\frac{1}{2}(k-1)-\left[\frac{1}{4}t^2\right]_1^e$$
$$=\left\{\frac{1}{2}k(e^2-1)+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{4}(e^2-1)=k$$

에서 $\frac{1}{2}k(e^2-3)=\frac{1}{4}(e^2-3)$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\ln\frac{x}{e}+\frac{1}{2}$이므로

$f(e)=\ln 1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

유형 15 아래끝 또는 위끝에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식

1020

답 3

$\int_\pi^x f(t)\,dt=x\sin x+kx-2\pi$ …… ㉠

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

㉠의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$0=k\pi-2\pi$ $\therefore k=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\sin x+x\cos x+2$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+2=3$

1021

답 ②

$\int_1^x f(t)\,dt=x^2-a\sqrt{x}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a$ $\therefore a=1$

㉠에 $a=1$을 대입하면

$\int_1^x f(t)\,dt=x^2-\sqrt{x}$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore f(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

1022

답 4

$f(x)=e^{2x}-2x-\int_0^x f'(t)e^t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2e^{2x}-2-f'(x)e^x$

$f'(x)(1+e^x)=2(e^x+1)(e^x-1)$

$\therefore f'(x)=2(e^x-1)$

$\therefore f'(\ln 3)=2(e^{\ln 3}-1)=2\times(3-1)=4$

1023

답 ②

$\int_1^x ef(t)\,dt=\frac{1}{2}e^{2x-2}-ax$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=\frac{1}{2}-a$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$ef(x)=e^{2x-2}-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=e^{2x-3}-\frac{1}{2e}$이므로

$f(2a)=f(1)=\frac{1}{e}-\frac{1}{2e}=\frac{1}{2e}$

1024

답 3

$xf(x)=2x\ln x+\int_1^x f(t)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2\ln x+2+f(x)$

$f'(x)=\frac{2(\ln x+1)}{x}$

❶

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{2(\ln x+1)}{x}\,dx$

$\ln x+1=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\frac{2(\ln x+1)}{x}\,dx=\int 2t\,dt=t^2+C=(\ln x+1)^2+C$

$f(1)=0$이므로 $1+C=0$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=(\ln x+1)^2-1$이므로

$f(e)=4-1=3$

❷

채점 기준	배점
❶ $f(1)$의 값과 $f'(x)$ 구하기	40%
❷ 치환적분법을 이용하여 $f(x)$를 구하고 $f(e)$의 값 구하기	60%

Bible Says 곱의 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

유형 16 아래끝 또는 위끝, 피적분함수에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식

1025

답 2

$\int_1^x(x-t)f(t)\,dt=2x\ln x+ax+2$에서

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=2x\ln x+ax+2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=2\ln x+2+a$

$\int_1^x f(t)\,dt=2\ln x+2+a$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{2}{x}$ $\therefore f(1)=2$

1026

답 -2

$\int_0^x(x-t)f(t)\,dt=x\sin x$에서

$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=x\sin x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\sin x+x\cos x$

$\int_0^x f(t)\,dt=\sin x+x\cos x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$

$\therefore f(\pi)=-2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1027

답 ②

$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=\ln(x^2+x+1)+ax+b$에서

$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=\ln(x^2+x+1)+ax+b$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $b=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}+a$

$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{2x+1}{x^2+x+1}+a$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1+a$ $\therefore a=-1$

$\therefore a+b=-1+0=-1$

1028

답 ②

$\int_1^x (x+t)f(t)\,dt=e^x\ln x$에서

$x\int_1^x f(t)\,dt+\int_1^x tf(t)\,dt=e^x\ln x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)+xf(x)=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$

$\int_1^x f(t)\,dt+2xf(x)=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)=e$ $\therefore f(1)=\frac{e}{2}$

1029

답 8

$x-t=s$로 놓으면 $-1=\frac{ds}{dt}$이고

$t=0$일 때 $s=x$, $t=x$일 때 $s=0$이므로

$\int_0^x tf(x-t)\,dt=\int_x^0 (x-s)f(s)\times(-1)\,ds$

$=\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$

$=x\int_0^x f(s)\,ds-\int_0^x sf(s)\,ds$

$\therefore x\int_0^x f(s)\,ds-\int_0^x sf(s)\,ds=-2\sin 2x+ax$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(s)\,ds+xf(x)-xf(x)=-4\cos 2x+a$

$\int_0^x f(s)\,ds=-4\cos 2x+a$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-4+a$ $\therefore a=4$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=8\sin 2x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{a}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=8\sin\frac{\pi}{2}=8$

유형 17 정적분으로 정의된 함수의 극대, 극소

1030

답 ⑤

$f(x)=\int_0^x (2\sin t-1)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2\sin x-1$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극대, $x=\frac{\pi}{6}$에서 극소이므로

$M=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\int_0^{\frac{5}{6}\pi}(2\sin t-1)\,dt=\left[-2\cos t-t\right]_0^{\frac{5}{6}\pi}$

$=-2\cos\frac{5}{6}\pi-\frac{5}{6}\pi-(-2)$

$=\sqrt{3}-\frac{5}{6}\pi+2$

$m=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\sin t-1)\,dt=\left[-2\cos t-t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=-2\cos\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}-(-2)$

$=-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}+2$

$\therefore M+m=\sqrt{3}-\frac{5}{6}\pi+2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}+2=4-\pi$

1031

답 ②

$f(x)=\int_1^x \frac{t^2-4}{t}\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{x^2-4}{x}=\frac{(x+2)(x-2)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$f(2)=\int_1^2 \frac{t^2-4}{t}\,dt=\int_1^2\left(t-\frac{4}{t}\right)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2-4\ln|t|\right]_1^2=\frac{3}{2}-4\ln 2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1032

답 10

$f(x)=\int_1^x (2-\ln t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=2$

$\therefore x=e^2$

$x>1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	…	e^2	…
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극대이므로 극댓값은

$f(e^2)=\int_1^{e^2} (2-\ln t)\,dt$

…… ❶

$u(t)=2-\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=-\frac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$$f(e^2)=\int_1^{e^2} (2-\ln t)\,dt$$
$$=\Big[t(2-\ln t)\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}(-1)\,dt$$
$$=-2-\Big[-t\Big]_1^{e^2}=-2-(-e^2+1)$$
$$=e^2-3$$

따라서 $a=1$, $b=-3$이므로

$a^2+b^2=1+9=10$

…… ❷

채점 기준	배점
❶ 함수 $f(x)$의 극댓값을 정적분으로 나타내기	50%
❷ 부분적분법을 이용하여 극댓값을 구하고 a^2+b^2의 값 구하기	50%

유형 18 정적분으로 정의된 함수의 최대, 최소

1033

답 ②

$f(x)=\int_0^x \cos t(2\sin t-1)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\cos x(2\sin x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{5}{6}\pi$	…	(π)
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

즉, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극소이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t(2\sin t-1)\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin t\cos t-\cos t)\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2t-\cos t)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{2}\cos 2t-\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\int_0^{\frac{5}{6}\pi} \cos t(2\sin t-1)\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{5}{6}\pi} (2\sin t\cos t-\cos t)\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{5}{6}\pi} (\sin 2t-\cos t)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{2}\cos 2t-\sin t\Big]_0^{\frac{5}{6}\pi}$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\frac{5}{3}\pi-\sin\frac{5}{6}\pi-\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$일 때 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 갖는다.

1034

답 ③

$f(x)=\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$

$f'(x)=0$에서 $2x=1$ ($\because x^2-x+1>0$)

$\therefore x=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$\frac{1}{2}$	…
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1}\,dt$$
$$=\Big[\ln|t^2-t+1|\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\ln\frac{3}{4}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1035

답 −48

$f(x)=\int_0^x t(1-\sqrt{t})\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x(1-\sqrt{x})$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$0\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	1	…	4
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

$f(0)=\int_0^0 t(1-\sqrt{t})\,dt=0$

$f(1)=\int_0^1 t(1-\sqrt{t})\,dt=\int_0^1\left(t-t^{\frac{3}{2}}\right)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$

$f(4)=\int_0^4 t(1-\sqrt{t})\,dt=\int_0^4\left(t-t^{\frac{3}{2}}\right)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=8-\frac{64}{5}=-\frac{24}{5}$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $M=f(1)=\frac{1}{10}$, 최솟값은

$m=f(4)=-\frac{24}{5}$이므로

$\frac{m}{M}=-\frac{24}{5}\times 10=-48$

유형 19 정적분으로 정의된 함수의 극한

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)\,dt$ 꼴

1036

답 ②

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_\pi^{x+\pi} f(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+\pi)-F(\pi)}{x}$

$=F'(\pi)=f(\pi)$

$=\pi\cos\pi+1=1-\pi$

1037

답 $4e$

$f(x)=2x\ln x$라 하고 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{e-h}^{e+h} 2x\ln x\,dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{e-h}^{e+h} f(x)\,dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(e+h)-F(e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(e+h)-F(e)-\{F(e-h)-F(e)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(e+h)-F(e)}{h}+\frac{F(e-h)-F(e)}{-h}\right\}$

$=F'(e)+F'(e)=2F'(e)$

$=2f(e)=2\times 2e=4e$

1038

답 ⑤

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1} f(t)\,dt\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+1}{x}\{F(x+1)-F(1)\}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\left\{(x^2+1)\times\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\right\}$

$=1\times F'(1)=f(1)=3$

이때 $f(1)=a\cos\pi=-a$이므로

$-a=3 \quad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-3\cos(\pi x^2)$이므로

$f(a)=f(-3)=-3\cos 9\pi=3$

유형 20 정적분으로 정의된 함수의 극한

$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$ 꼴

1039

답 ①

$f(t)=\left(\sin\frac{\pi}{2}t+\cos 2\pi t\right)^2$이라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x\left(\sin\frac{\pi}{2}t+\cos 2\pi t\right)^2 dt=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$=F'(2)=f(2)$

$=(0+1)^2=1$

1040

답 ①

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_x^2 f(t)\,dt=-\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$

$=-\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$=-F'(2)=-f(2)$

$=-e^2\cos 2\pi=-e^2$

1041

답 14

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2} f(t)\,dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=2F'(1)=2f(1)$

$=2\times(5+2)=14$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART B 내신 잡는 종합 문제

1042

답 4

$$\int_2^a \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx=\Big[2\ln|x|+\ln|x-1|\Big]_2^a$$
$$=\Big[\ln x^2(x-1)\Big]_2^a$$
$$=\ln a^2(a-1)-\ln 4$$
$$=\ln\frac{a^2(a-1)}{4}=\ln 12$$

에서 $a^2(a-1)=48$

$a^3-a^2-48=0$, $(a-4)(a^2+3a+12)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a^2+3a+12>0$)

1043

답 ③

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\sqrt{3}$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^4 \sqrt{t}\,dt=\Big[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big]_1^4$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$$

1044

답 ③

$\sqrt{x}+1=t$로 놓으면 $\sqrt{x}=t-1$에서 $x=t^2-2t+1$이고

$1=(2t-2)\times\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx=\int_1^3 \frac{2t-2}{t}\,dt=\int_1^3\left(2-\frac{2}{t}\right)dt$$
$$=\Big[2t-2\ln|t|\Big]_1^3=6-2\ln 3-2$$
$$=4-2\ln 3$$

1045

답 π

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^0(\cos t-\sin t)^2\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)^2\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\,dx=\Big[2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

1046

답 ④

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(x-3t)f'(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}\int_1^x f'(t)\,dt-\lim_{x\to1}\frac{3}{x-1}\int_1^x tf'(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}x\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f'(t)\,dt-3\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x tf'(t)\,dt$$
$$=f'(1)-3f'(1)=-2f'(1)$$

$f(x)=2\sin\pi x$에서 $f'(x)=2\pi\cos\pi x$이므로

$f'(1)=2\pi\cos\pi=-2\pi$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(x-3t)f'(t)\,dt=-2f'(1)=4\pi$$

1047

답 ②

$u_1(x)=x^2$, $v_1'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$u_1'(x)=2x$, $v_1(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin 2x\,dx=\Big[-\frac{1}{2}x^2\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x\cos 2x)\,dx$$
$$=\frac{\pi^2}{8}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x\,dx$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x\,dx$에서 $u_2(x)=x$, $v_2'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$u_2'(x)=1$, $v_2(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x\,dx=\Big[\frac{1}{2}x\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin 2x\,dx=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$$

1048

답 ③

$f(x)=x\sin x$, $g(x)=x^2\tan x$라 하면

$f(-x)=-x\sin(-x)$
$=x\sin x=f(x)$

$g(-x)=(-x)^2\tan(-x)$
$=-x^2\tan x=-g(x)$

에서 $f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(x\sin x+x^2\tan x)\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x\sin x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x^2\tan x\,dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\sin x\,dx$$

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$2\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\sin x\,dx=2\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\cos x)\,dx$$
$$=2\Big(-\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\Big)-2\Big[-\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=-\frac{\pi}{3}-2\times\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)=-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1049

답 ②

$x+2=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$\int_0^2 e^x f(x+2)\,dx=\int_2^4 e^{t-2}f(t)\,dt$

이때 $2\le t\le 4$에서 $f(t)=2$이므로

$\int_2^4 e^{t-2}f(t)\,dt=\int_2^4 2e^{t-2}\,dt=\left[2e^{t-2}\right]_2^4=2(e^2-1)$

다른 풀이

$f(x)=\begin{cases}-x+4 & (0\le x\le 2)\\ 2 & (2\le x\le 4)\end{cases}$에서

$f(x+2)=\begin{cases}-x+2 & (-2\le x\le 0)\\ 2 & (0\le x\le 2)\end{cases}$이므로

$\int_0^2 e^x f(x+2)\,dx=\int_0^2 2e^x\,dx=\left[2e^x\right]_0^2=2(e^2-1)$

1050

답 ④

$f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)\,dt$에서

$\int_0^1 tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) ····· ㉠

로 놓으면 $f(x)=e^{x^2}+k$

이를 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 t(e^{t^2}+k)\,dt=\int_0^1 te^{t^2}\,dt+\int_0^1 kt\,dt$

$=\int_0^1 te^{t^2}\,dt+\left[\frac{1}{2}kt^2\right]_0^1$

$=\int_0^1 te^{t^2}\,dt+\frac{1}{2}k=k$ ····· ㉡

$\int_0^1 te^{t^2}\,dt$에서 $t^2=s$로 놓으면 $2t=\frac{ds}{dt}$이고

$t=0$일 때 $s=0$, $t=1$일 때 $s=1$이므로

$\int_0^1 te^{t^2}\,dt=\int_0^1 \frac{1}{2}e^s\,ds=\left[\frac{1}{2}e^s\right]_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$

이를 ㉡에 대입하면

$\int_0^1 t(e^{t^2}+k)\,dt=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k=k$

에서 $k=e-1$

$\therefore \int_0^1 xf(x)\,dx=k=e-1$

1051

답 ③

조건 ㈎에서 $-2\le x\le 2$일 때, $f(x)=e^x+e^{-x}$이므로

$f(-x)=e^{-x}+e^{-(-x)}=e^x+e^{-x}=f(x)$

조건 ㈏에서 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로

$\int_{-1}^7 f(x)\,dx=\int_{-1}^2 f(x)\,dx+\int_2^6 f(x)\,dx+\int_6^7 f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^2 f(x)\,dx+\int_{-2}^2 f(x)\,dx+\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$

$=2\int_{-2}^2 f(x)\,dx=4\int_0^2 f(x)\,dx$ ($\because f(x)$는 우함수)

$=4\int_0^2 (e^x+e^{-x})\,dx=4\left[e^x-e^{-x}\right]_0^2=4\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$

1052

답 ④

$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^1 (-\ln x)\,dx+\int_1^e \ln x\,dx$

$=-\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x\,dx+\int_1^e \ln x\,dx$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$-\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x\,dx+\int_1^e \ln x\,dx$

$=-\left(\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^1-\int_{\frac{1}{e}}^1 1\,dx\right)+\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1\,dx\right)$

$=-\left[x\ln x-x\right]_{\frac{1}{e}}^1+\left[x\ln x-x\right]_1^e$

$=-\left(-1-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right)+(e\ln e-e+1)$

$=-\left(-1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right)+(e-e+1)$

$=2-\frac{2}{e}$

1053

답 ③

$\int_{e^2}^e f(x)\,dx-\int_{e^3}^e f(x)\,dx+\int_1^{e^2} f(x)\,dx$

$=\int_{e^2}^e f(x)\,dx+\int_e^{e^3} f(x)\,dx+\int_1^{e^2} f(x)\,dx$

$=\int_{e^2}^{e^3} f(x)\,dx+\int_1^{e^2} f(x)\,dx$

$=\int_1^{e^3} f(x)\,dx=\int_1^{e^3}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^3$일 때 $t=3$이므로

$\int_1^{e^3}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx=\int_0^3 \sqrt{t}\,dt=\int_0^3 t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=2\sqrt{3}$

1054

답 ④

$\frac{d}{dx}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(x+h)-f(x)$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{d}{dx}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

즉, $f'(x)=\tan x$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$=-\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx$

$=-\ln|\cos x|+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=-\ln(\cos x)\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1055

답 2

$\int_0^1 xf'(x)\,dx=2$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=f'(x)$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=f(x)$이므로

$$\int_0^1 xf'(x)\,dx=\Big[xf(x)\Big]_0^1-\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=f(1)-\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=3-\int_0^1 f(x)\,dx=2$$

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx=1$

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$\therefore \int_{-1}^1 f(x)\,dx=2\int_0^1 f(x)\,dx=2\times1=2$

1056

답 ②

$\int_{e^2}^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}\,dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=e^2$일 때 $t=2$, $x=e^3$일 때 $t=3$이므로

$$\int_{e^2}^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}\,dx=\int_2^3(a+t)\,dt$$
$$=\Big[at+\frac{1}{2}t^2\Big]_2^3$$
$$=\Big(3a+\frac{9}{2}\Big)-(2a+2)$$
$$=a+\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x\,dx$에서 $\sin x=s$로 놓으면

$\cos x=\frac{ds}{dx}$이고 $x=0$일 때 $s=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $s=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x\,dx=\int_0^1(1+s)\,ds$$
$$=\Big[s+\frac{1}{2}s^2\Big]_0^1=\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$a+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=-1$

1057

답 30

$\int_0^4 xf(x)f'(x)\,dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=f(x)f'(x)$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2$이므로

$$\int_0^4 xf(x)f'(x)\,dx=\Big[\frac{1}{2}x\{f(x)\}^2\Big]_0^4-\frac{1}{2}\int_0^4\{f(x)\}^2\,dx$$
$$=2\{f(4)\}^2-\frac{1}{2}\int_0^4\{f(x)\}^2\,dx$$
$$=50-\frac{1}{2}\int_0^4\{f(x)\}^2\,dx\ (\because f(4)=5)$$

한편, $\int_0^2 x\{f(x^2)\}^2\,dx=20$에서

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^2 x\{f(x^2)\}^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^4\{f(t)\}^2\,dt=20$$

$\therefore \int_0^4\{f(t)\}^2\,dt=40$

$$\therefore \int_0^4 xf(x)f'(x)\,dx=50-\frac{1}{2}\int_0^4\{f(x)\}^2\,dx$$
$$=50-20=30$$

참고

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 도함수가 $y'=2f(x)f'(x)$이므로

$\int f(x)f'(x)\,dx=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2+C$ (C는 적분상수)이다.

1058

답 3

$x-t=s$로 놓으면 $-1=\frac{ds}{dt}$이고

$t=0$일 때 $s=x$, $t=x$일 때 $s=0$이므로

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt$$
$$=\int_x^0(x-s)f(s)\times(-1)\,ds$$
$$=\int_0^x(x-s)f(s)\,ds$$
$$=x\int_0^x f(s)\,ds-\int_0^x sf(s)\,ds$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=\int_0^x f(s)\,ds+xf(x)-xf(x)$$
$$=\int_0^x f(s)\,ds=\int_0^x 2e^{2s}\,ds$$
$$=\Big[e^{2s}\Big]_0^x=e^{2x}-1$$

$\therefore F'(\ln 2)=e^{2\ln 2}-1=4-1=3$

1059

답 ③

$f(x)=\int_0^x(a-t)e^t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(a-x)e^x$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=0$에서 $(a-2)e^2=0$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=\int_0^x(2-t)e^t\,dt$이므로

$b=f(2)=\int_0^2(2-t)e^t\,dt$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$u(t)=2-t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=-1$, $v(t)=e^t$이므로

$$\int_0^2 (2-t)e^t\,dt=\Big[(2-t)e^t\Big]_0^2-\int_0^2(-e^t)\,dt=-2-\Big[-e^t\Big]_0^2$$

$$=-2-(-e^2+1)=e^2-3$$

$\therefore a+b=2+e^2-3=e^2-1$

1060

답 4

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$$

$\int_{-1}^0 f(x)\,dx$에서 $-x=t$로 놓으면 $-1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=-1$일 때 $t=1$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\int_1^0 f(-t)\times(-1)\,dt$$

$$=\int_0^1 f(-t)\,dt$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(-x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 \{f(x)+f(-x)\}\,dx$$

$$=\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\,dx=\Big[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\Big]_0^1$$

$$=\frac{2}{\pi}=\frac{a}{\pi}$$

따라서 $a=2$이므로

$a^2=4$

1061

답 ③

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^4}\,dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^4}$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0$

$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^4}\,dx=\int_0^a e^{f(x)}f'(x)\,dx$에서

$f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=f(0)=0$, $x=a$일 때 $t=f(a)=3$이므로

$$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^4}\,dx=\int_0^3 e^t\,dt=\Big[e^t\Big]_0^3=e^3-1$$

1062

답 π^2+4

$$f(x)=\int_0^x (x^2-t^2)\sin t\,dt$$

$$=x^2\int_0^x \sin t\,dt-\int_0^x t^2\sin t\,dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2x\int_0^x \sin t\,dt+x^2\sin x-x^2\sin x$$

$$=2x\int_0^x \sin t\,dt=2x\Big[-\cos t\Big]_0^x=-2x\cos x+2x$$

❶

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-2x\cos x+2x)\,dx$$

$$=-2\int x\cos x\,dx+x^2+C_1$$

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int \sin x\,dx$$

$$=x\sin x+\cos x+C_2$$

$$\therefore f(x)=-2\int x\cos x\,dx+x^2+C_1$$

$$=-2x\sin x-2\cos x+x^2+C$$

❷

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로 $-2+C=0$

$\therefore C=2$

따라서 $f(x)=-2x\sin x-2\cos x+x^2+2$이므로

$f(\pi)=-2\pi\sin\pi-2\cos\pi+\pi^2+2=\pi^2+4$

❸

채점 기준	배점
❶ 주어진 식을 미분하여 $f'(x)$ 구하기	30%
❷ 부분적분법을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	40%
❸ $f(0)=0$임을 이용하여 $f(x)$를 구하고 $f(\pi)$의 값 구하기	30%

1063

답 $\ln 2$

$f(x)=\ln x-x\int_1^e \frac{f(t)}{t}\,dt$에서

$$\int_1^e \frac{f(t)}{t}\,dt=k\ (k\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면 $f(x)=\ln x-kx$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e \frac{f(t)}{t}\,dt=\int_1^e\Big(\frac{\ln t}{t}-k\Big)\,dt=\int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt-\Big[kt\Big]_1^e$$

$$=\int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt-k(e-1)=k$$

❶

$\int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt$에서 $\ln t=s$로 놓으면 $\frac{1}{t}=\frac{ds}{dt}$이고

$t=1$일 때 $s=0$, $t=e$일 때 $s=1$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt=\int_0^1 s\,ds=\Big[\frac{1}{2}s^2\Big]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_1^e \frac{f(t)}{t}\,dt=\frac{1}{2}-k(e-1)=k$$

$$ke=\frac{1}{2} \qquad \therefore k=\frac{1}{2e}$$

❷

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $f(x)=\ln x-\frac{x}{2e}$이므로

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2e}$

$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2e}$

$\therefore x=2e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$2e$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2e$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(2e)=\ln 2e-\frac{2e}{2e}=\ln 2+1-1=\ln 2$ ❸

채점 기준	배점
❶ $\int_1^e \frac{f(t)}{t}dt=k$로 놓고 식 세우기	30%
❷ 치환적분법을 이용하여 상수 k의 값 구하기	40%
❸ 함수 $f(x)$의 최댓값 구하기	30%

PART C 수능 녹인 변별력 문제

1064

답 ①

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}dx=\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x^2}\times x\,dx=\int_1^4 \frac{f(t)}{2t}dt$$
$$=\int_1^2 \frac{4-2t}{2t}dt+\int_2^4 \frac{t-2}{2t}dt$$
$$=\int_1^2 \left(\frac{2}{t}-1\right)dt+\int_2^4 \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\left[2\ln|t|-t\right]_1^2+\left[\frac{1}{2}t-\ln|t|\right]_2^4$$
$$=2\ln 2-2-(-1)+(2-\ln 4)-(1-\ln 2)$$
$$=\ln 2$$

1065

답 ②

$$f(t)=\int_0^1 (e^x-tx)^2dx=\int_0^1 (e^{2x}-2te^x x+t^2x^2)dx$$
$$=\int_0^1 e^{2x}dx-2t\int_0^1 xe^x dx+t^2\int_0^1 x^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1+t^2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-2t\int_0^1 xe^x dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}t^2-2t\int_0^1 xe^x dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^1 xe^x dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx$$
$$=e-\left[e^x\right]_0^1=e-(e-1)=1$$

이를 ㉠에 대입하면

$f(t)=\frac{1}{3}t^2-2t+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(t-3)^2+\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{2}$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=3$에서 최소이므로 구하는 최솟값은

$f(3)=\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{2}$

참고

$f(t)=\int_0^1 (e^x-tx)^2dx$에서 적분변수가 t가 아닌 x임에 주의하여 정적분으로 정의된 식을 정리한다.

1066

답 ③

$$g(x)=\int_1^x (e^x-e^t)f(t)\,dt$$
$$=e^x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x e^t f(t)\,dt$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=e^x\int_1^x f(t)\,dt+e^x f(x)-e^x f(x)$$
$$=e^x\int_1^x f(t)\,dt$$

함수 $g(x)$의 역함수가 존재하려면 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하거나 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$ 또는 $g'(x)\ge 0$이어야 하므로

$h(x)=\int_1^x f(t)\,dt$라 하면

$e^x h(x)\le 0$ 또는 $e^x h(x)\ge 0$

$\therefore h(x)\le 0$ 또는 $h(x)\ge 0$

이때 $h(1)=0$이고 $h(x)$는 이차함수이므로

$h(x)=k(x-1)^2$ ($k\neq 0$인 상수)라 하면

$h'(x)=f(x)=2k(x-1)$

$\therefore \frac{f(7)}{f(3)}=\frac{12k}{4k}=3$

1067

답 ②

$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left\{2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx=\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x|-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^2$$
$$=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)-(-\ln 2-2)$$
$$=2\ln 2+\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx$에서 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $-\frac{1}{x^2}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=\frac{1}{2}$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{2}^{\frac{1}{2}}f(t)\times(-1)\,dt$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)\,dx \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠에 ㉡, ㉢을 대입하면

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}2f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)\,dx=2\ln 2+\frac{3}{2}$$
$$3\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)\,dx=2\ln 2+\frac{3}{2}$$
$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)\,dx=\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$$

1068

답 9

$f(x)+3=\int_{x}^{x+1}f(t)\,dt$ $\cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=f(x+1)-f(x)$

$$\int_{0}^{1}xf(x+1)\,dx=\int_{0}^{1}x\{f(x)+f'(x)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}xf(x)\,dx+\int_{0}^{1}xf'(x)\,dx$$

$\int_{0}^{1}xf'(x)\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=f'(x)$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=f(x)$이므로

$$\int_{0}^{1}xf'(x)\,dx=\Big[xf(x)\Big]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}f(x)\,dx$$
$$=f(1)-\int_{0}^{1}f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_{0}^{1}xf(x+1)\,dx=\int_{0}^{1}xf(x)\,dx+f(1)-\int_{0}^{1}f(x)\,dx$$
$$=f(1)+\int_{0}^{1}(x-1)f(x)\,dx$$

이때 $\int_{0}^{1}(x-1)f(x)\,dx=-1$, $\int_{0}^{1}xf(x+1)\,dx=5$이므로

$5=f(1)-1$ $\therefore f(1)=6$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\int_{1}^{2}f(t)\,dt=\int_{1}^{2}f(x)\,dx=f(1)+3=6+3=9$$

1069

답 ④

조건 (가)에서 $e^x=t$로 놓으면

$e^x=\frac{dt}{dx}$이고 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=e$이므로

$$\int_{0}^{1}f'(e^x)\,dx=\int_{1}^{e}\frac{f'(t)}{t}\,dt=2$$

조건 (나)에서 $u(x)=f(x)$, $v'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$u'(x)=f'(x)$, $v(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$$\int_{1}^{e}\frac{f(x)}{x^2}\,dx=\Big[-\frac{f(x)}{x}\Big]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\Big\{-\frac{1}{x}\times f'(x)\Big\}\,dx$$
$$=-\frac{f(e)}{e}+f(1)+\int_{1}^{e}\frac{f'(x)}{x}\,dx$$
$$=-\frac{f(e)}{e}+e+2=e$$

$\therefore f(e)=2e$

1070

답 ④

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $0\le f(x)\le 1$이므로

$1\le x\le e$일 때

$-\ln x\le f(x)-\ln x\le 1-\ln x$

이때 $\ln x=1-\ln x$에서 $2\ln x=1$

$\therefore x=\sqrt{e}$

즉, $1\le x\le\sqrt{e}$일 때 $\ln x\le 1-\ln x$이고

$\sqrt{e}\le x\le e$일 때 $\ln x\ge 1-\ln x$이므로

$\int_{1}^{e}g(x)\,dx$가 최대가 되도록 하는 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}1-\ln x & (1\le x<\sqrt{e})\\ \ln x & (\sqrt{e}\le x\le e)\end{cases}$$

따라서 구하는 최댓값은

$$\int_{1}^{e}g(x)\,dx=\int_{1}^{\sqrt{e}}(1-\ln x)\,dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\ln x\,dx$$
$$=\Big[x-x\ln x\Big]_{1}^{\sqrt{e}}+\int_{1}^{\sqrt{e}}1\,dx+\Big[x\ln x\Big]_{\sqrt{e}}^{e}-\int_{\sqrt{e}}^{e}1\,dx$$
$$=\sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{2}-1+\Big[x\Big]_{1}^{\sqrt{e}}+e-\frac{\sqrt{e}}{2}-\Big[x\Big]_{\sqrt{e}}^{e}$$
$$=\frac{\sqrt{e}}{2}-1+\sqrt{e}-1+e-\frac{\sqrt{e}}{2}-e+\sqrt{e}$$
$$=2\sqrt{e}-2$$

1071

답 ①

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)\,dt$ $\cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$이므로

$f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$

$$\therefore \pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)\,dx=\pi^2\int_{0}^{1}\Big\{x\times\frac{2}{\pi}f'(x)\Big\}\,dx$$
$$=2\pi\int_{0}^{1}xf'(x)\,dx$$
$$=2\pi\Big\{\Big[xf(x)\Big]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}f(x)\,dx\Big\}$$
$$=2\pi\Big\{f(1)-\int_{0}^{1}f(x)\,dx\Big\}$$

한편, ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{0}f(t)\,dt=-\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}f(t)\,dt$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$f(-1)=-f(1)=-1$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

즉, $-\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)\,dt=-1$이므로

$\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{2}{\pi}$

$\therefore \pi^2\int_0^1 xf(x+1)\,dx=2\pi\left\{f(1)-\int_0^1 f(x)\,dx\right\}$

$=2\pi\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=2(\pi-2)$

1072

답 ③

조건 (가)에서 $f(x)>0$, $g(x)>0$이므로

$f(x)g(x)>0$

따라서 조건 (나)의 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=f(x)g(x)$의 양변에 $\frac{1}{f(x)g(x)}$을 곱하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}=1$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$\ln|f(x)|-\ln|g(x)|=x+C$

$\ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=x+C$

$\frac{f(1)}{g(1)}=1$이므로 $0=1+C$에서 $C=-1$

따라서 $\ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=x-1$이므로

$\frac{f(x)}{g(x)}=e^{x-1}$

$\therefore \int_0^2\frac{f(x)}{g(x)}\,dx=\int_0^2 e^{x-1}\,dx=\left[e^{x-1}\right]_0^2=e-\frac{1}{e}$

1073

답 ①

$f(x)=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2}$

$=\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}$

이므로 $f'(x)=0$에서

$\sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}$

$1-x^2=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}x^2\right)$, $x^2=\frac{3}{4}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because 0\le x\le 1$)

$0\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	…	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

즉, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt$

$t=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $1=\cos\theta\times\frac{d\theta}{dt}$이고

$t=\frac{1}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\times\cos\theta\,d\theta$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$

$=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{\pi}{12}$

1074

답 ⑤

$\cos x\le 0$일 때 $f(x)=\cos x-\cos x=0$이므로 방정식 $f(x)=1$을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않는다.

따라서 $\cos x>0$일 때 $f(x)=\cos x+\cos x=2\cos x$이므로

$f(x)=1$에서 $2\cos x=1$, $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \cdots$

즉, $\alpha_1=\frac{\pi}{3}$, $\alpha_3=\frac{7}{3}\pi$이므로

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_3}f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7}{3}\pi}(\cos x+|\cos x|)\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}0\,dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{3}\pi}2\cos x\,dx$

$=\left[2\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}+0+\left[2\sin x\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{3}\pi}$

$=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-(-2)$

$=4$

1075

답 ③

조건 (나)의 $g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2}f(t)\,dt$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=\frac{4}{e^4}\int_1^2 e^{t^2}f(t)\,dt=\frac{2}{e^4}\int_1^2\left\{2te^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}\right\}dt$

이때 조건 (가)에서 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=x^2e^{-x^2}$이고 $(e^{t^2})'=2te^{t^2}$이므로

$\int_1^2\left\{2te^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}\right\}dt=\left[e^{t^2}\times\frac{f(t)}{t}\right]_1^2-\int_1^2(e^{t^2}\times t^2e^{-t^2})\,dt$

$=\left\{\frac{e^4f(2)}{2}-1\right\}-\int_1^2 t^2\,dt\left(\because f(1)=\frac{1}{e}\right)$

$=\frac{e^4f(2)}{2}-1-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^2$

$=\frac{e^4f(2)}{2}-\frac{10}{3}$

따라서 $g(2)=\frac{2}{e^4}\left\{\frac{e^4f(2)}{2}-\frac{10}{3}\right\}=f(2)-\frac{20}{3e^4}$이므로

$f(2)-g(2)=\frac{20}{3e^4}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1076

답 ②

$f(x)=\int_1^x \frac{1}{e^t}\,dt$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{1}{e^x}$

$\int_1^a \frac{\ln\{1+f(x)\}}{e^x}\,dx=1$에서 $1+f(x)=t$로 놓으면

$f'(x)=\frac{dt}{dx}$, 즉 $\frac{1}{e^x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=1+f(1)=1$, $x=a$일 때 $t=1+f(a)$이므로

$\int_1^a \frac{\ln\{1+f(x)\}}{e^x}\,dx=\int_1^{1+f(a)} \ln t\,dt$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$$\int_1^{1+f(a)} \ln t\,dt=\Big[t\ln t\Big]_1^{1+f(a)}-\int_1^{1+f(a)} 1\,dt$$
$$=\{1+f(a)\}\ln\{1+f(a)\}-\Big[t\Big]_1^{1+f(a)}$$
$$=\{1+f(a)\}\ln\{1+f(a)\}-f(a)=1$$

에서

$\{1+f(a)\}[\ln\{1+f(a)\}-1]=0$

이때 ㉠에서 $f(a)>0$, 즉 $1+f(a)>0$이므로

$\ln\{1+f(a)\}-1=0$, $1+f(a)=e$

$\therefore f(a)=e-1$

1077

답 4

$\int_{-a}^a \ln f(x)\,dx=\int_{-a}^0 \ln f(x)\,dx+\int_0^a \ln f(x)\,dx$ ····· ㉠

$\int_{-a}^0 \ln f(x)\,dx$에서 $-x=t$로 놓으면 $-1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=-a$일 때 $t=a$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$\int_{-a}^0 \ln f(x)\,dx=\int_a^0 \ln f(-t)\times(-1)\,dt=\int_0^a \ln f(-t)\,dt$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_{-a}^a \ln f(x)\,dx=\int_0^a \ln f(-x)\,dx+\int_0^a \ln f(x)\,dx$$
$$=\int_0^a \{\ln f(-x)+\ln f(x)\}\,dx$$
$$=\int_0^a \ln f(-x)f(x)\,dx$$
$$=\int_0^a \ln e^{2x}\,dx$$
$$=\int_0^a 2x\,dx$$
$$=\Big[x^2\Big]_0^a=a^2=16$$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

1078

답 14

조건 ㈎에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin(ax)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{a}\cos(ax)\Big]_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{2}{a}\ge\frac{1}{2}$$

이므로

$0<a\le 4$ ····· ㉠

조건 ㈏에서

$\int_0^{3\pi} \{|f(x)+t|-|f(x)-t|\}\,dx=0$

이므로

$g(x)=|f(x)+t|-|f(x)-t|$

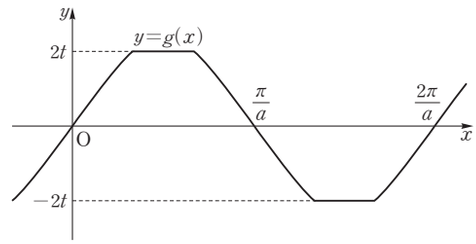
라 하면

$\int_0^{3\pi} g(x)\,dx=0$ ····· ㉡

또한

$$g(x)=\begin{cases} -2t & (-1\le\sin(ax)<-t) \\ 2\sin(ax) & (-t\le\sin(ax)<t) \\ 2t & (t\le\sin(ax)\le 1) \end{cases}$$

이고 함수 $f(x)=\sin(ax)$의 주기가 $\frac{2\pi}{a}$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{a}$이고 $\int_0^{\frac{2\pi}{a}} g(x)\,dx=0$이므로 ㉡에 의하여 $3\pi=\frac{2\pi}{a}\times n$ (n은 자연수), 즉 $a=\frac{2}{3}n$이어야 한다.

㉠에서 $0<\frac{2}{3}n\le 4$이므로

$0<n\le 6$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 이에 대응하는 실수 a의 값은 각각 $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, 2, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$, 4이므로 그 합은

$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+2+\frac{8}{3}+\frac{10}{3}+4=14$

1079

답 49

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 증가하고

$\int_0^1 f(x)\,dx<\int_0^1 |f(x)|\,dx$이므로 $f(x)=0$을 만족시키는 실수 x가 구간 $(0, 1)$에 단 하나 존재한다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이를 만족시키는 실수 x의 값을 α $(0<\alpha<1)$이라 하면

$\int_0^1 f(x)\,dx=8$

에서

$\int_0^\alpha f(x)\,dx+\int_\alpha^1 f(x)\,dx=8$ ····· ㉠

$\int_0^1 |f(x)|\,dx=10$

에서

$-\int_0^\alpha f(x)\,dx+\int_\alpha^1 f(x)\,dx=10$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\int_0^\alpha f(x)\,dx=-1,\ \int_\alpha^1 f(x)\,dx=9$

한편, $F(x)=\int_0^x |f(t)|\,dt$에서 $0\le x<\alpha$일 때

$F(x)=-\int_0^x f(t)\,dt$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=-f(x)$

$\alpha\le x\le 1$일 때

$F(x)=-\int_0^\alpha f(t)\,dt+\int_\alpha^x f(t)\,dt=1+\int_\alpha^x f(t)\,dt$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

따라서 $0\le x\le 1$에서

$F'(x)=\begin{cases} -f(x) & (0\le x<\alpha) \\ f(x) & (\alpha\le x\le 1) \end{cases}$

$\int_0^1 f(x)F(x)\,dx=\int_0^\alpha f(x)F(x)\,dx+\int_\alpha^1 f(x)F(x)\,dx$

$F(x)=s$로 놓으면 $F'(x)=\frac{ds}{dx}$이고

$x=0$일 때, $s=F(0)=-\int_0^0 f(t)\,dt=0$

$x=\alpha$일 때, $s=F(\alpha)=1+\int_\alpha^\alpha f(t)\,dt=1$

$x=1$일 때, $s=F(1)=1+\int_\alpha^1 f(t)\,dt=10$

이므로

$\int_0^\alpha f(x)F(x)\,dx+\int_\alpha^1 f(x)F(x)\,dx$

$=-\int_0^\alpha F'(x)F(x)\,dx+\int_\alpha^1 F'(x)F(x)\,dx$

$=-\int_0^1 s\,ds+\int_1^{10} s\,ds$

$=-\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}s^2\right]_1^{10}$

$=-\frac{1}{2}+\frac{99}{2}=49$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A 10 정적분의 활용

유형 01 정적분과 급수의 관계(1)

확인 문제 $\frac{1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1 x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$

1080 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{2}{n}$$
$$=2\int_1^3 x^3\,dx=2\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^3$$ $a=1, b=3$으로 놓으면 $\Delta x=\frac{2}{n}, x_k=1+\frac{2k}{n}$
$$=2\left(\frac{81}{4}-\frac{1}{4}\right)=2\times 20=40$$

1081 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f\left(3+\frac{k}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(3+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=2\int_3^4 f(x)\,dx$$

참고

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f\left(3+\frac{k}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(3+\frac{k}{n}\right)$$
$$=2\int_0^1 f(3+x)\,dx=2\int_3^4 f(x)\,dx$$

1082 답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$$
$$=\frac{1}{3}\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{16}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{14}{3}=\frac{14}{9}$$

1083 답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}f\left(\frac{3k\pi}{2n}\right)=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3\pi}{2n}f\left(\frac{3k\pi}{2n}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}$$
$$=\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{2}{3}$$

1084 답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{4x^4+4x^3}{1+x}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{4x^3(x+1)}{1+x}\,dx$$
$$=\int_0^1 4x^3\,dx=\left[x^4\right]_0^1=1$$

1085 답 $-e^2+e$

$a=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$라 하면 $f(x)=e^x+a$이고

$$a=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{2}{n}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=2\int_1^2 f(x)\,dx=2\int_1^2(e^x+a)\,dx$$
$$=2\left[e^x+ax\right]_1^2=2(e^2-e+a)$$

이므로

$0=2(e^2-e)+a \quad \therefore a=-2e^2+2e$ ❶

이때 $\int_0^1 f(x+1)\,dx$에서 $x+1=t$로 놓으면

$1=\frac{dt}{dx}$이고 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 f(x+1)\,dx=\int_1^2 f(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}a=-e^2+e$$ ❷

채점 기준	배점
❶ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$의 값 구하기	50%
❷ $\int_0^1 f(x+1)\,dx$의 값 구하기	50%

참고

$f(x)=e^x+a$에서 $f(t)=e^t+a$이므로

$a=2\int_1^2 f(x)\,dx=2\int_1^2 f(t)\,dt$

$\therefore \int_1^2 f(t)\,dt=\frac{1}{2}a$

다른 풀이

$f(x)=e^x+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$에서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=2\int_0^1 f(1+x)\,dx$$

이므로 $f(x)=e^x+2\int_0^1 f(x+1)\,dx$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

이때 $\int_0^1 f(x+1)\,dx=k$라 하면 $f(x)=e^x+2k$이고

$f(x+1)=e^{x+1}+2k$이므로

$\int_0^1 f(x+1)\,dx=\int_0^1 (e^{x+1}+2k)\,dx=\left[e^{x+1}+2kx\right]_0^1$

$=e^2+2k-e=k$

$\therefore k=-e^2+e$

유형 02 정적분과 급수의 관계(2)

확인 문제 $e-1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\sqrt[n]{e^3}+\cdots+\sqrt[n]{e^n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}$

$=\int_0^1 e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$

1086

답 ④

$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{4}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{2n}{n}\right)^2\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2$

$=3\int_1^3 x^2\,dx=3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$

$=3\left(9-\frac{1}{3}\right)=26$

1087

답 2

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+2^2f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+n^2f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\int_0^1 x^2f(x)\,dx=\int_0^1 x^2(4x+3)\,dx$

$=\int_0^1 (4x^3+3x^2)\,dx=\left[x^4+x^3\right]_0^1=2$

1088

답 ④

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}+\sqrt{\frac{2n}{2n+2}}+\cdots+\sqrt{\frac{2n}{2n+n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2n}{2n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{k}{2n}}}$

$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{k}{2n}}}$

$=2\int_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{x}}\,dx=2\int_1^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$=2\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{\frac{3}{2}}=2(\sqrt{6}-2)$

1089

답 ③

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\frac{k\pi}{n}$

$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left[\sin x\right]_0^{\pi}$

$=\frac{1}{\pi}(0-0)=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+3k}{n}\right)^2\frac{6}{n}$

$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{3}{n}$

$=2\int_1^4 x^2\,dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4$

$=2\left(\frac{64}{3}-\frac{1}{3}\right)=42$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

$=\int_1^2\frac{1}{x}\,dx$

$=\left[\ln|x|\right]_1^2$

$=\ln 2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

유형 03 정적분과 급수의 활용

1090

답 ②

점 A_1, A_2, …, A_{n-1}이 x축 위의 구간 $[0, 2]$를 n등분하므로

$A_k\left(\frac{2k}{n}, 0\right)$

점 B_k는 x좌표가 $\frac{2k}{n}$이고 곡선 $y=e^x$ 위의 점이므로

$B_k\left(\frac{2k}{n}, e^{\frac{2k}{n}}\right)$

$\therefore \overline{A_kB_k}=e^{\frac{2k}{n}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{A_kB_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}e^{\frac{2k}{n}}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}e^{\frac{2k}{n}}\times\frac{2}{n}$

$=\frac{1}{2}\int_0^2 e^x\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^2=\frac{1}{2}(e^2-1)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1091

답 ①

호 AB를 $2n$등분하므로 $1\le k\le n$인 자연수 k에 대하여

$\angle P_kOP_{k+1}=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2n}=\frac{\pi}{4n}$

따라서 삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$에서

$\angle P_{n-k}OP_{n+k}=\frac{\pi}{4n}\times 2k=\frac{k\pi}{2n}$이므로

$S_k=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$

$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{\pi}\{0-(-1)\}=\frac{1}{\pi}$

1092

답 ①

반원의 중심을 O라 하면 $\angle AOC_k=\frac{k\pi}{n}$이므로

삼각형 AOC_k의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\frac{k\pi}{n}=2\sin\frac{k\pi}{n}$

부채꼴 AOC_k의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{k\pi}{n}=\frac{2k\pi}{n}$ — 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$

$\therefore S_k=$(부채꼴 AOC_k의 넓이)$-$(삼각형 AOC_k의 넓이)

$=\frac{2k\pi}{n}-2\sin\frac{k\pi}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2k\pi}{n}-2\sin\frac{k\pi}{n}\right)$

$=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k\pi}{n}-\sin\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\sin x)\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{2}x^2+\cos x\Big]_0^{\pi}$

$=\frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{\pi^2}{2}-1\right)-1\right\}=\pi-\frac{4}{\pi}$

유형 04 곡선과 x축 사이의 넓이

1093

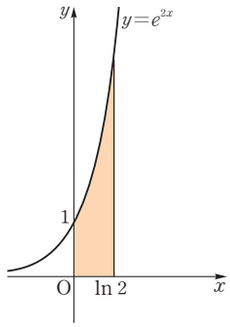
답 ③

구하는 부분의 넓이는

$\int_0^{\ln 2}e^{2x}\,dx=\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^{\ln 2}$

$=\frac{1}{2}(e^{2\ln 2}-e^0)$

$=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$



1094

답 2

곡선 $y=a\sqrt{x+4}$와 x축의 교점의 x좌표는

$a\sqrt{x+4}=0$에서 $x=-4$

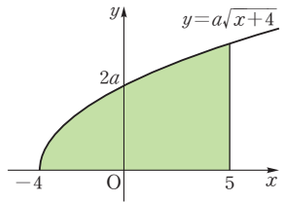
따라서 구하는 부분의 넓이는

$\int_{-4}^{5}a\sqrt{x+4}\,dx$

$=\Big[\frac{2}{3}a(x+4)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-4}^{5}$

$=\frac{2}{3}a\times 9^{\frac{3}{2}}=18a=36$

$\therefore a=2$



1095

답 182

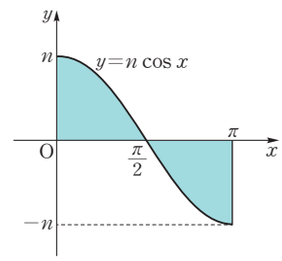
$0\le x\le\pi$에서 함수 $y=n\cos x$의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로 구하는 부분의 넓이 a_n은

$a_n=\int_0^{\pi}|n\cos x|\,dx$

$=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

$=2n\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2n(1-0)=2n$

$\therefore \sum_{k=1}^{6}ka_k=\sum_{k=1}^{6}2k^2=2\times\frac{6\times 7\times 13}{6}=182$ — $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$



참고

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 값이 양수인 경우와 음수인 경우가 모두 있을 때에는 $f(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 다음과 같이 넓이를 구할 수 있다.

$\int_0^{\pi}|n\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}n\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-n\cos x)\,dx$

$=n\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-n\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=n(1-0)-n(0-1)$

$=2n$

하지만 이 문제의 경우 함수 $y=n\cos x$의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로 본풀이와 같이 구하는 것이 훨씬 효율적이다.

1096

답 ②

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 $f(2x+1)>0$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$\int_1^2 f(2x+1)\,dx$

$2x+1=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$\int_1^2 f(2x+1)\,dx=\frac{1}{2}\int_3^5 f(t)\,dt=\frac{1}{2}\times 36=18$

참고

$f(ax+b)$ 꼴을 포함한 함수의 정적분은 $ax+b=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 구한다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1097

답 -12

조건 (가)에서

$\int_0^x e^t f(t)\,dt = 2x^2+ax+b$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $b=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $e^x f(x)=4x+a$

$f(x)=\frac{4x+a}{e^x}$ ($\because e^x>0$)

$f'(x)=\frac{4e^x-(4x+a)e^x}{e^{2x}}=-\frac{4x+a-4}{e^x}$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=0$에서 $-a+4=0$

$\therefore a=4$ $\therefore f(x)=(4x+4)e^{-x}$

❶

$-1\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이므로 구하는 부분의 넓이는

$\int_{-1}^{2}(4x+4)e^{-x}\,dx$

$u(x)=4x+4$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=4$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$\int_{-1}^{2}(4x+4)e^{-x}\,dx=\left[-(4x+4)e^{-x}\right]_{-1}^{2}-\int_{-1}^{2}(-4e^{-x})\,dx$

$=-12e^{-2}-\left[4e^{-x}\right]_{-1}^{2}=-12e^{-2}-4e^{-2}+4e$

$=-\frac{16}{e^2}+4e$

❷

따라서 $m=-16$, $n=4$이므로

$m+n=-16+4=-12$

❸

채점 기준	배점
❶ $f(x)$의 식 구하기	50%
❷ 부분적분법을 이용하여 도형의 넓이 구하기	40%
❸ $m+n$의 값 구하기	10%

Bible Says 몫의 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ ($g(x)\neq 0$)에 대하여

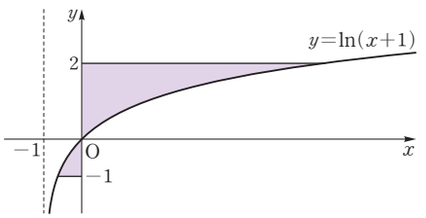
(1) $y=\frac{1}{g(x)}$이면 $y'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) $y=\frac{f(x)}{g(x)}$이면 $y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

유형 05 곡선과 y축 사이의 넓이

1098

답 ②



$y=\ln(x+1)$에서 $e^y=x+1$

$\therefore x=e^y-1$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$\int_{-1}^{2}|x|\,dy=\int_{-1}^{2}|e^y-1|\,dy$

$=\int_{-1}^{0}(-e^y+1)\,dy+\int_{0}^{2}(e^y-1)\,dy$

$=\left[-e^y+y\right]_{-1}^{0}+\left[e^y-y\right]_{0}^{2}$

$=-1-(-e^{-1}-1)+(e^2-2)-1$

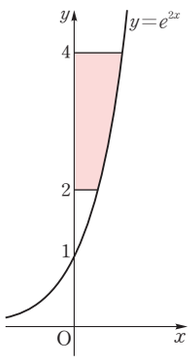
$=\frac{1}{e}+e^2-3$

참고

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 e^y-1의 값이 양수인 경우와 음수인 경우가 모두 존재하므로 e^y-1의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 넓이를 구한다.

1099

답 ③



$y=e^{2x}$에서 $x=\frac{1}{2}\ln y$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$\int_2^4 \frac{1}{2}\ln y\,dy$

$u(y)=\ln y$, $v'(y)=\frac{1}{2}$로 놓으면

$u'(y)=\frac{1}{y}$, $v(y)=\frac{1}{2}y$이므로

$\int_2^4 \frac{1}{2}\ln y\,dy=\left[\frac{1}{2}y\ln y\right]_2^4-\int_2^4\frac{1}{2}\,dy$

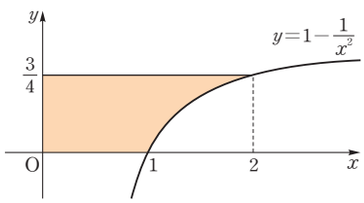
$=2\ln 4-\ln 2-\left[\frac{1}{2}y\right]_2^4$

$=4\ln 2-\ln 2-\frac{1}{2}(4-2)$

$=3\ln 2-1$

1100

답 1



곡선 $y=1-\frac{1}{x^2}$과 x축의 교점의 x좌표는

$1-\frac{1}{x^2}=0$에서 $x^2=1$

$\therefore x=1$ ($\because x>0$)

곡선 $y=1-\frac{1}{x^2}$과 직선 $y=\frac{3}{4}$의 교점의 x좌표는

$1-\frac{1}{x^2}=\frac{3}{4}$에서 $x^2=4$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$)

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 구하는 부분의 넓이는 가로, 세로의 길이가 각각 2, $\frac{3}{4}$인 직사각형의 넓이에서 곡선 $y=1-\frac{1}{x^2}$과 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$2\times\frac{3}{4}-\int_1^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{3}{2}-\left[x+\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$$

다른 풀이

$y=1-\frac{1}{x^2}$에서 $x^2=\frac{1}{1-y}$

$\therefore x=\frac{1}{\sqrt{1-y}}$ ($\because x>0$)

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{1-y}}dy=\left[-2\sqrt{1-y}\right]_0^{\frac{3}{4}}=-2\times\sqrt{\frac{1}{4}}+2\times1=1$$

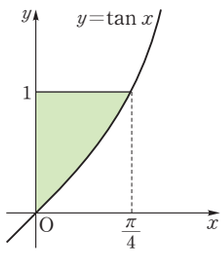
1101

답 -5

곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$\tan x=1$에서 $x=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 구하는 부분의 넓이 S는 가로, 세로의 길이가 각각 $\frac{\pi}{4}$, 1인 직사각형의 넓이에서 곡선 $y=\tan x$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 것과 같으므로



$$S=\frac{\pi}{4}\times1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln2$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$$40ab=40\times\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$$

1102

답 ⑤

구하는 부분의 넓이는 가로, 세로의 길이가 각각 1, e인 직사각형의 넓이에서 곡선 $y=xe^x$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$e-\int_0^1 xe^x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$$

$$=e-\left[e^x\right]_0^1=e-(e-1)=1$$

이를 ㉠에 대입하면 $e-1$

따라서 구하는 부분의 넓이는 $e-1$이다.

유형 06 곡선과 직선 사이의 넓이

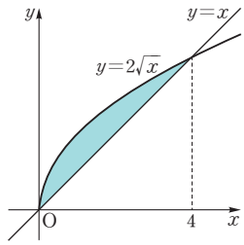
1103

답 ⑤

곡선 $y=2\sqrt{x}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$2\sqrt{x}=x$에서 $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^4(2\sqrt{x}-x)\,dx=\int_0^4(2x^{\frac{1}{2}}-x)\,dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

$$=\frac{4}{3}\times8-\frac{1}{2}\times16=\frac{32}{3}-8=\frac{8}{3}$$

1104

답 18

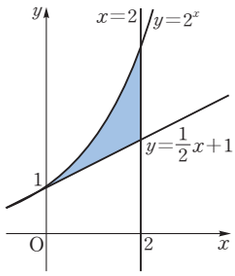
구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^2\left\{2^x-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{2^x}{\ln2}-\frac{1}{4}x^2-x\right]_0^2$$

$$=\left(\frac{4}{\ln2}-1-2\right)-\frac{1}{\ln2}$$

$$=\frac{3}{\ln2}-3$$



따라서 $p=3$, $q=-3$이므로

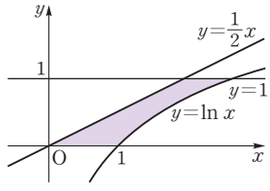
$p^2+q^2=9+9=18$

1105

답 ①

$y=\ln x$에서 $x=e^y$

$y=\frac{1}{2}x$에서 $x=2y$



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^1(e^y-2y)\,dy=\left[e^y-y^2\right]_0^1$$

$$=e-1-1=e-2$$

참고

y에 대하여 적분하므로 {(오른쪽의 식)−(왼쪽의 식)}을 세워서 정적분의 값을 계산하였다.

다른 풀이

곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

$\ln x=1$에서 $x=e$

두 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 $y=1$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{2}x=1$에서 $x=2$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\{e+(e-2)\}\times1-\int_1^e\ln x\,dx$$

$$=(e-1)-\left[x\ln x-x\right]_1^e$$

$$=(e-1)-\{e-e-(-1)\}=e-2$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1106

답 ①

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 직선 $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{x}=2x$에서 $x^2=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because x>0$)

$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}x$에서 $x^2=2$

$\therefore x=\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x\,dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\,dx-\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}x\,dx$$

$$=\left[x^2\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\left[\ln|x|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}=\ln 2$$

유형 07 두 곡선 사이의 넓이

1107

답 ⑤

두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin\frac{x}{2}$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\sin\frac{x}{2}$에서

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}$

$\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)=0$ $\therefore \sin\frac{x}{2}=0$ 또는 $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(\sin x-\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\sin x\right)dx$$

$$=\left[-\cos x+2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[-2\cos\frac{x}{2}+\cos x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}+1-1+\left\{-1-\left(-1-\frac{1}{2}\right)\right\}=1$$

1108

답 ②

두 곡선 $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표는 $x^2=\sqrt{x}$에서 $x^4=x$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ ($\because x$는 실수)

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

1109

답 ④

$y=\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x$에서

$\ln x=2y$

$\therefore x=e^{2y}$

$y=\ln x$에서

$x=e^y$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^{\ln 2}(e^{2y}-e^y)\,dy=\left[\frac{1}{2}e^{2y}-e^y\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-e^{\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=(2-2)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

다른 풀이

두 곡선 $y=\ln\sqrt{x}$, $y=\ln x$와 직선 $y=\ln 2$의 교점의 x좌표는

$\ln\sqrt{x}=\ln 2$에서

$x=4$

$\ln x=\ln 2$에서

$x=2$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_1^2(\ln x-\ln\sqrt{x})\,dx+\int_2^4(\ln 2-\ln\sqrt{x})\,dx$$

$$=\int_1^2\frac{1}{2}\ln x\,dx+\int_2^4\ln 2\,dx-\int_2^4\frac{1}{2}\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{2}x\right]_1^2+\left[\ln 2\times x\right]_2^4-\left[\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{2}x\right]_2^4$$

$$=\ln 2-1-\left(-\frac{1}{2}\right)+2\ln 2-\{2\ln 4-2-(\ln 2-1)\}$$

$$=3\ln 2-\frac{1}{2}-3\ln 2+1=\frac{1}{2}$$

참고

두 연속함수 $f(y)$, $g(y)$에 대하여 두 곡선 $x=f(y)$, $x=g(y)$ 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_c^d|f(y)-g(y)|\,dy$

1110

답 ②

구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^1\left\{\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|-(2^x-1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x-2^x+1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{2^x}{\ln 2}+x\right]_0^1$$

$$=\left(-\frac{2}{\ln 2}+1\right)-\left(-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}+1$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1111

답 5

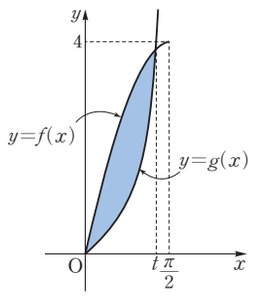
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 t라 하면

$4\sin t=\tan t$에서

$4\sin t=\dfrac{\sin t}{\cos t}$

$\sin t\left(4-\dfrac{1}{\cos t}\right)=0$

$\therefore \cos t=\dfrac{1}{4}$ $(\because t\neq 0)$ ····· ㉠



❶

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_0^t(4\sin x-\tan x)\,dx$

$\displaystyle=4\int_0^t\sin x\,dx-\int_0^t\tan x\,dx$

$\displaystyle=4\int_0^t\sin x\,dx-\int_0^t\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$\displaystyle=4\int_0^t\sin x\,dx+\int_0^t\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx$

$=4\Big[-\cos x\Big]_0^t+\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^t$

$=4(-\cos t+1)+\ln|\cos t|$

$=4\left(-\dfrac{1}{4}+1\right)+\ln\dfrac{1}{4}$ $(\because$ ㉠$)$

$=3-2\ln 2$

❷

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로

$a-b=3-(-2)=5$

❸

채점 기준	배점
❶ 두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하고 t에 대한 식으로 나타내기	50%
❷ 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기	40%
❸ $a-b$의 값 구하기	10%

1113

답 ①

$y=e^x+1$에서 $y'=e^x$

곡선 $y=e^x+1$과 기울기가 e인 직선이 접하는 접점의 좌표를 $(t,\ e^t+1)$이라 하면

$e^t=e$에서 $t=1$

따라서 접선의 방정식은

$y-(e+1)=e(x-1)$

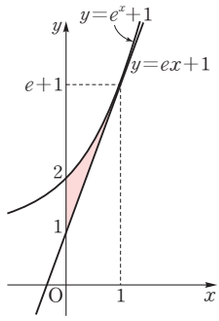
$\therefore y=ex+1$

즉, 구하는 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_0^1\{(e^x+1)-(ex+1)\}\,dx$

$\displaystyle=\int_0^1(e^x-ex)\,dx$

$\displaystyle=\Big[e^x-\frac{e}{2}x^2\Big]_0^1=\frac{1}{2}e-1$



1114

답 ②

$y=\ln x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)$라 하면 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{t}(x-t)+\ln t$ ····· ㉠

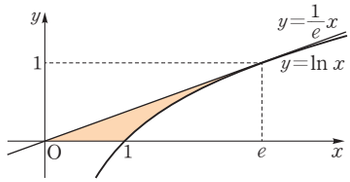
이 직선이 원점을 지나므로

$0=-1+\ln t$에서 $t=e$

이를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{1}{e}(x-e)+1$

$\therefore y=\dfrac{1}{e}x$



이때 $y=\ln x$에서 $x=e^y$

$y=\dfrac{1}{e}x$에서 $x=ey$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_0^1(e^y-ey)\,dy=\Big[e^y-\frac{e}{2}y^2\Big]_0^1$

$\displaystyle=e-\frac{e}{2}-1=\frac{1}{2}e-1$

즉, $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-1$이므로

$a+b=\dfrac{1}{2}+(-1)=-\dfrac{1}{2}$

다른 풀이

주어진 범위의 직각삼각형의 넓이에서 x의 값의 범위를 정하여 x에 대하여 적분한 값을 빼는 방법을 이용해 보자.

구하는 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times e\times 1-\displaystyle\int_1^e\ln x\,dx$ ····· ㉠

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

유형 08 곡선과 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이

1112

답 ②

$y=2\sqrt{x}+1$에서

$y'=\dfrac{2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

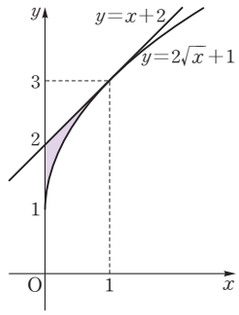
$\dfrac{1}{\sqrt{1}}=1$이므로 접선의 방정식은

$y-3=x-1$ $\therefore y=x+2$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_0^1\{(x+2)-(2\sqrt{x}+1)\}\,dx$

$\displaystyle=\Big[\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\Big]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+1=\frac{1}{6}$



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\int_1^e \ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1\,dx$

$=e-\left[x\right]_1^e=e-(e-1)=1$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}e-1$

즉, $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$이므로

$a+b=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$

유형 09 두 부분의 넓이가 같을 조건

1115 답 ④

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x-a)\,dx=0$이므로

$\left[-2\cos x-ax\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$

$-\frac{\pi}{2}a-(-2)=0$

$\therefore a=\frac{4}{\pi}$

1116 답 ⑤

$\int_0^a(\sqrt{x}-x)\,dx=0$이므로

$\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^a=0$, $\frac{2}{3}a\sqrt{a}-\frac{1}{2}a^2=0$

$\frac{2}{3}a\sqrt{a}=\frac{1}{2}a^2$, $\frac{4}{9}a^3=\frac{1}{4}a^4$

$16a^3=9a^4$, $a^3(9a-16)=0$

$\therefore a=\frac{16}{9}$ ($\because a>1$)

1117 답 7

$0\le x\le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_0^2 f(x)\,dx=0$

$\int_0^2(2x+3)f'(x)\,dx$에서

$u(x)=2x+3$, $v'(x)=f'(x)$로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=f(x)$이므로

$\int_0^2(2x+3)f'(x)\,dx=\left[(2x+3)f(x)\right]_0^2-\int_0^2 2f(x)\,dx$

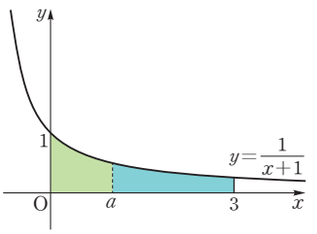
$=\{7f(2)-3f(0)\}-0$

$=7\times 1-3\times 0=7$

유형 10 두 곡선 사이의 넓이의 활용 – 이등분

1118 답 ⑤

곡선 $y=\frac{1}{x+1}$과 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1=\int_0^3\frac{1}{x+1}\,dx$

$=\left[\ln|x+1|\right]_0^3$

$=\ln 4=2\ln 2$

곡선 $y=\frac{1}{x+1}$과 x축, y축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_0^a\frac{1}{x+1}\,dx=\left[\ln|x+1|\right]_0^a$

$=\ln(a+1)$

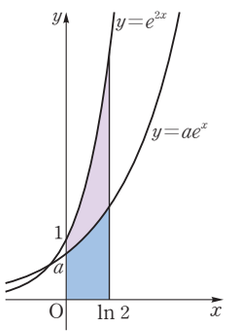
이때 $S_1=2S_2$이므로

$2\ln 2=2\ln(a+1)$, $a+1=2$

$\therefore a=1$

1119 답 ⑤

곡선 $y=e^{2x}$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\ln 2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1=\int_0^{\ln 2}e^{2x}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2}$

$=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$

곡선 $y=ae^x$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=\ln 2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_0^{\ln 2}ae^x\,dx=\left[ae^x\right]_0^{\ln 2}=2a-a=a$

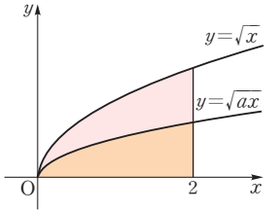
이때 $S_1=2S_2$이므로

$\frac{3}{2}=2a$

$\therefore a=\frac{3}{4}$

1120 답 ②

곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1=\int_0^2\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

곡선 $y=\sqrt{ax}$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$S_2=\int_0^2 \sqrt{ax}\,dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{4\sqrt{2a}}{3}$

이때 $S_1=2S_2$이므로

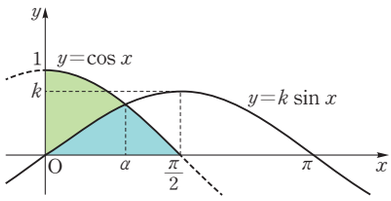
$\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2a}}{3}$, $2\sqrt{a}=1$

$4a=1$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

1121

답 3



두 곡선 $y=\cos x$, $y=k\sin x$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$\cos\alpha=k\sin\alpha$에서 $\tan\alpha=\frac{1}{k}$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$, $\cos\alpha=\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ …… ㉠

곡선 $y=\cos x$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

…… ❶

두 곡선 $y=\cos x$, $y=k\sin x$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_0^{\alpha}(\cos x-k\sin x)\,dx=\left[\sin x+k\cos x\right]_0^{\alpha}$

$=\sin\alpha+k\cos\alpha-k$

…… ❷

이때 $S_1=2S_2$이므로

$1=2(\sin\alpha+k\cos\alpha-k)$

$2\sin\alpha+2k\cos\alpha=2k+1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{2k^2}{\sqrt{k^2+1}}=2k+1$

$\frac{2(k^2+1)}{\sqrt{k^2+1}}=2k+1$, $2\sqrt{k^2+1}=2k+1$

$4(k^2+1)=4k^2+4k+1$, $4k+1=4$

$\therefore 4k=3$

…… ❸

채점 기준	배점
❶ 곡선 $y=\cos x$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기	40%
❷ 두 곡선 $y=\cos x$, $y=k\sin x$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 k에 대한 식으로 나타내기	30%
❸ $4k$의 값 구하기	30%

유형 11 함수와 그 역함수의 정적분

1122

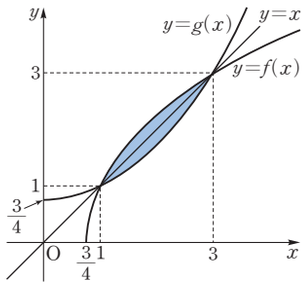
답 ④

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

즉, $\sqrt{4x-3}=x$에서 $4x-3=x^2$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 부분의 넓이는



$2\int_1^3(\sqrt{4x-3}-x)\,dx$

$=2\left[\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$

$=2\left\{\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\right\}=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

참고

$\int\sqrt{4x-3}\,dx$에서 $4x-3=t$로 치환하면 $4=\frac{dt}{dx}$이므로

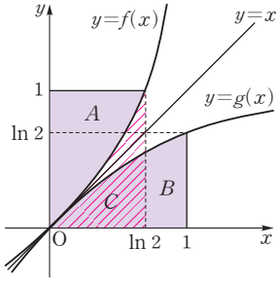
$\int\sqrt{4x-3}\,dx=\int\frac{1}{4}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}}+C$

1123

답 ln 2

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $A=B$이므로



$\int_0^{\ln 2}f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx$

$=C+B=C+A$

$=\ln 2\times 1=\ln 2$

다른 풀이

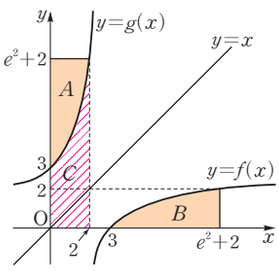
$\int_0^{\ln 2}f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx=\ln 2\times 1-0\times 0=\ln 2$

1124

답 6

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $A=B$이므로



$\int_3^{e^2+2}f(x)\,dx+\int_0^2 g(x)\,dx$

$=B+C=A+C$

$=2\times(e^2+2)=2e^2+4$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

즉, $a=2$, $b=4$이므로

$a+b=2+4=6$

다른 풀이

$\int_3^{e^2+2} f(x)\,dx+\int_0^2 g(x)\,dx=(e^2+2)\times 2-3\times 0$

$=2e^2+4=ae^2+b$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로

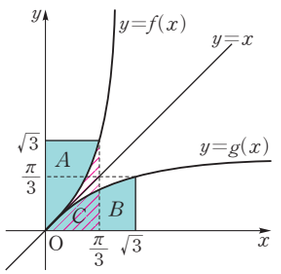
$a+b=2+4=6$

1125

답 ④

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $A=B$이므로



$\int_0^{\sqrt{3}} g(x)\,dx=B=A$

$=\frac{\pi}{3}\times\sqrt{3}-C$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$

$\frac{-\sin x}{\cos x}=\frac{(\cos x)'}{\cos x}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2$

유형 12 입체도형의 부피 - 단면이 밑면과 평행한 경우

1126

답 ④

구하는 입체도형의 부피는

$\int_0^{12}\sqrt{2x+1}\,dx=\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{12}=\frac{125}{3}-\frac{1}{3}=\frac{124}{3}$

1127

답 ③

구하는 입체도형의 부피는

$\int_0^4 \ln(x+1)\,dx$

$u(x)=\ln(x+1)$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x+1}$, $v(x)=x+1$이므로

$\int_0^4 \ln(x+1)\,dx=\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^4-\int_0^4 1\,dx$

$=5\ln 5-\left[x\right]_0^4=5\ln 5-4$

참고

$v(x)=x$로 놓고 계산하는 것이 일반적이지만 $u'(x)v(x)=1$이 될 수 있도록 $v(x)=x+1$로 놓으면 보다 빠르게 계산할 수 있다.

1128

답 12π

높이가 x일 때 단면의 넓이는 $(e^x)^2\pi=\pi e^{2x}$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_0^{\ln 5}\pi e^{2x}\,dx=\left[\frac{\pi}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 5}=\frac{\pi}{2}e^{2\ln 5}-\frac{\pi}{2}=\frac{25}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=12\pi$

1129

답 8

깊이가 x일 때 수면의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\sqrt{x\sin\frac{\pi}{4}x}\right)^2=\frac{1}{2}\pi x\sin\frac{\pi}{4}x$

따라서 구하는 물의 부피는

$\int_0^4 \frac{1}{2}\pi x\sin\frac{\pi}{4}x\,dx$ ❶

$u(x)=\frac{1}{2}\pi x$, $v'(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{2}\pi$, $v(x)=-\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x$이므로

$\int_0^4 \frac{1}{2}\pi x\sin\frac{\pi}{4}x\,dx$

$=\left[-2x\cos\frac{\pi}{4}x\right]_0^4-\int_0^4\left(-2\cos\frac{\pi}{4}x\right)dx$

$=-8\cos\pi-\left[-\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}x\right]_0^4=8$ ❷

채점 기준	배점
❶ 물의 부피를 정적분으로 나타내기	50%
❷ 부분적분법을 이용하여 부피 구하기	50%

유형 13 입체도형의 부피 - 단면이 밑면과 수직인 경우

1130

답 ⑤

점 $(x, 0)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{\sin x})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_0^{\pi} S(x)\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x\,dx$

$=\left[-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos x\right]_0^{\pi}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

1131

답 π

곡선 $y=e^x$ 위의 점 P의 좌표가 (x, e^x)이므로

$\overline{PH}=e^x$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

선분 PH를 지름으로 하는 반원의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}\right)^2=\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{1}{2}e^x\right)^2=\frac{\pi}{8}e^{2x}$

따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$V=\int_0^{\ln 3}S(x)\,dx=\int_0^{\ln 3}\frac{\pi}{8}e^{2x}\,dx$

$=\frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 3}=\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 3}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\pi}{8}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2V=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$

1132

답 ③

입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\left(\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}\right)^2=\frac{kx}{2x^2+1}$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_1^2 S(x)\,dx=\int_1^2\frac{kx}{2x^2+1}\,dx$

$2x^2+1=t$로 놓으면 $4x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=9$이므로

$\int_1^2\frac{kx}{2x^2+1}\,dx=\frac{k}{4}\int_3^9\frac{1}{t}\,dt$

$=\frac{k}{4}\left[\ln|t|\right]_3^9$

$=\frac{k}{4}(\ln 9-\ln 3)$

$=\frac{k}{4}\ln 3=2\ln 3$

에서 $\frac{k}{4}=2\qquad\therefore\ k=8$

1133

답 ⑤

x좌표가 t일 때 단면인 정사각형의 넓이는 $t\ln t$이므로

구하는 입체도형의 부피는

$\int_1^e t\ln t\,dt$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=t$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=\frac{1}{2}t^2$이므로

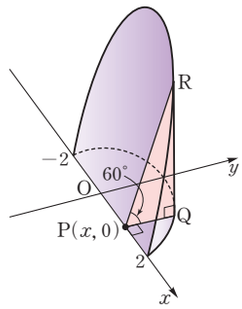
$\int_1^e t\ln t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^e-\int_1^e\frac{t}{2}\,dt$

$=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2+1}{4}$

1134

답 19

오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 x축으로 잡고, x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\,0)$을 지나면서 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 삼각형 PQR라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{4-x^2}$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\tan 60^\circ=\sqrt{4-x^2}\times\sqrt{3}$

삼각형 PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{4-x^2}\times\sqrt{4-x^2}\times\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)$ ❶

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_{-2}^2 S(x)\,dx=\int_{-2}^2\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)\,dx$

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2(4-x^2)\,dx$

$=\sqrt{3}\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{3}\sqrt{3}$

즉, $p=3$, $q=16$이므로

$p+q=3+16=19$ ❷

채점 기준	배점
❶ 입체도형의 단면의 넓이를 식으로 나타내기	50%
❷ 입체도형의 부피를 구하여 $p+q$의 값 구하기	50%

유형 14 직선 위에서 점이 움직인 거리

확인 문제 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{28}{3}$ (3) $\frac{28}{3}$

(1) $t=0$에서의 위치가 0이므로

$\int_0^1 2\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}$

(2) $\int_1^4 2\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{4}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{28}{3}$

(3) $\int_1^4|2\sqrt{t}|\,dt=\int_1^4 2\sqrt{t}\,dt=\frac{28}{3}$

1135

답 ④

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_1^3|v(t)|\,dt=\int_1^3\left|\frac{2t}{t^2+1}\right|dt=\int_1^3\frac{2t}{t^2+1}\,dt$

$=\left[\ln|t^2+1|\right]_1^3$

$=\ln 10-\ln 2=\ln 5$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

참고

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C$

1136

답 3

$t=a$ $(0<a<8)$일 때 점 P의 위치는

$0+\int_0^a v(t)\,dt=\int_0^a \sin \pi t\,dt$

$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi t\right]_0^a$

$=-\frac{1}{\pi}\cos a\pi+\frac{1}{\pi}$

점 P가 원점을 지나려면

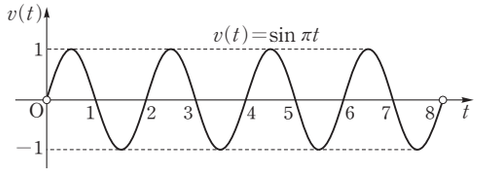
$-\frac{1}{\pi}\cos a\pi+\frac{1}{\pi}=0$에서 $\cos a\pi=1$

$\therefore a=2,\ 4,\ 6$

따라서 점 P는 원점을 3번 지나므로 구하는 횟수는 3이다.

참고

다음 그림과 같이 $v(t)=\sin \pi t$는 $\int_0^1 v(t)\,dt=-\int_1^2 v(t)\,dt$이므로 점 P는 2초마다 원점을 지난다.



1137

답 ①

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $\sin 2t-\cos t=0$

$2\sin t\cos t-\cos t=0,\ \cos t(2\sin t-1)=0$

$\therefore \cos t=0$ 또는 $\sin t=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\frac{\pi}{6}$ 또는 $t=\frac{\pi}{2}$ 또는 $t=\frac{5}{6}\pi$ …

따라서 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=\frac{\pi}{6}$이므로 구하는 거리는

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}|v(t)|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}|\sin 2t-\cos t|\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(-\sin 2t+\cos t)\,dt$

$=\left[\frac{1}{2}\cos 2t+\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

1138

답 ⑤

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치를 a라 하자.

$t=\ln 2$에서 점 P의 위치가 5이므로

$a+\int_0^{\ln 2}v(t)\,dt=a+\int_0^{\ln 2}(e^t-e^{-t})\,dt$

$=a+\left[e^t+e^{-t}\right]_0^{\ln 2}=a+\frac{1}{2}=5$

$\therefore a=\frac{9}{2}$

1139

답 π

시각 t $(t\geq 0)$에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_1, x_2라 하면

$x_1=0+\int_0^t v_1(t)\,dt=\int_0^t \cos t\,dt=\left[\sin t\right]_0^t=\sin t$

$x_2=0+\int_0^t v_2(t)\,dt=\int_0^t 2\cos 2t\,dt=\left[\sin 2t\right]_0^t=\sin 2t$

두 점 P, Q가 출발 후 다시 만나려면 $x_1=x_2$이어야 하므로

$\sin t=\sin 2t$에서 $2\sin t\cos t-\sin t=0$

$\sin t(2\cos t-1)=0$ $\therefore \sin t=0$ 또는 $\cos t=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ 2\pi,\ \cdots$

따라서 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 다시 만나는 시각은

$t=\frac{\pi}{3}$이므로 $a=\frac{\pi}{3}$

$\therefore 3a=3\times\frac{\pi}{3}=\pi$

유형 15 좌표평면 위에서 점이 움직인 거리

확인 문제 $\sqrt{5}$

$\frac{dx}{dt}=4t$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(4t)^2+(2t)^2}=2\sqrt{5}t$

따라서 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^1 2\sqrt{5}t\,dt=\left[\sqrt{5}t^2\right]_0^1=\sqrt{5}$

1140

답 ⑤

$\frac{dx}{dt}=-2\sin t-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=2\cos t-\sin t$이므로 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(-2\sin t-\cos t)^2+(2\cos t-\sin t)^2}$

$=\sqrt{5\sin^2 t+5\cos^2 t}=\sqrt{5}$

따라서 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4 \sqrt{5}\,dt=\left[\sqrt{5}t\right]_0^4=4\sqrt{5}$

1141

답 ④

$\frac{dx}{dt}=e^t-k$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{k}e^{\frac{t}{2}}$이므로 점 P의 속력은

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(e^t-k)^2+(2\sqrt{k}e^{\frac{t}{2}})^2}$$
$$=\sqrt{e^{2t}+2ke^t+k^2}=\sqrt{(e^t+k)^2}$$
$$=|e^t+k|=e^t+k\ (\because\ k>0)$$

$t=2$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 e^3이므로

$$\int_2^3(e^t+k)\,dt=\Big[e^t+kt\Big]_2^3=(e^3+3k)-(e^2+2k)$$
$$=e^3-e^2+k=e^3$$

$\therefore\ k=e^2$

1142

답 40

$\frac{dx}{dt}=5(1-\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=5\sin t$이므로 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{5(1-\cos t)\}^2+(5\sin t)^2}$$
$$=\sqrt{25-50\cos t+25\cos^2 t+25\sin^2 t}$$
$$=\sqrt{50(1-\cos t)}$$

점 P가 출발 후 처음으로 속력이 0이 되는 때는

$\sqrt{50(1-\cos t)}=0$에서 $\cos t=1$

$\therefore\ t=2\pi$

따라서 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{50(1-\cos t)}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{50\left\{1-\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right)\right\}}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{50\left(1-\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}\right)}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{100\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\left|10\sin\frac{t}{2}\right|dt$$
$$=\int_0^{2\pi}10\sin\frac{t}{2}\,dt\ \left(\because\ \sin\frac{t}{2}\ge0\right)$$
$$=\Big[-20\cos\frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi}=20-(-20)=40$$

1143

답 ①

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha^2)$, $(\beta,\ \beta^2)$이라 하면 점 P의 위치는 두 점을 잇는 선분의 중점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$$

이때 α, β는 방정식 $x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8}$, 즉 이차방정식

$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=t^2$, $\alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=t^4-\frac{\ln t}{4}$

즉, 시각 $t\ (t>0)$에서의 점 P의 위치는 $\left(\frac{t^2}{2},\ \frac{t^4}{2}-\frac{\ln t}{8}\right)$이므로

$\frac{dx}{dt}=t$, $\frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^e\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^e\sqrt{4t^6+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}\,dt$$
$$=\int_1^e\sqrt{\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^e\left|2t^3+\frac{1}{8t}\right|dt$$
$$=\int_1^e\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt\ \left(\because\ 2t^3+\frac{1}{8t}>0\right)$$
$$=\Big[\frac{1}{2}t^4+\frac{\ln|t|}{8}\Big]_1^e$$
$$=\frac{e^4}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$$

유형 16 곡선의 길이

확인 문제 (1) $e-\frac{1}{e}$ (2) $9\sqrt{5}$

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})^2}\,dx$$
$$=\int_0^2\sqrt{\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})^2}\,dx$$
$$=\int_0^2\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})dx=\frac{1}{2}\Big[2e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{2}}\Big]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(2e-\frac{2}{e}\right)-(2-2)\right\}=e-\frac{1}{e}$$

(2) $\frac{dx}{dt}=4t$, $\frac{dy}{dt}=-2t$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^3\sqrt{(4t)^2+(-2t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^3\sqrt{20t^2}\,dt=\int_0^3 2\sqrt{5}t\,dt$$
$$=\Big[\sqrt{5}t^2\Big]_0^3=9\sqrt{5}$$

1144

답 ④

$\frac{dx}{dt}=2\sin t$, $\frac{dy}{dt}=2(1+\cos t)$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{(2\sin t)^2+(2+2\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+8\cos t+4}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{8+8\cos t}\,dt=\int_0^\pi\sqrt{16\cos^2\frac{t}{2}}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\left|4\cos\frac{t}{2}\right|dt=\int_0^\pi 4\cos\frac{t}{2}\,dt\ \left(\because\ 4\cos\frac{t}{2}\ge0\right)$$
$$=\Big[8\sin\frac{t}{2}\Big]_0^\pi=8$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1145

답 12

$f(x)=\int_0^x t\sqrt{t^2+2}\,dt$에서 $f'(x)=x\sqrt{x^2+2}$

따라서 $x=0$에서 $x=3$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^3\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx&=\int_0^3\sqrt{1+(x\sqrt{x^2+2})^2}\,dx\\&=\int_0^3\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx\\&=\int_0^3\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx\\&=\int_0^3|x^2+1|\,dx\\&=\int_0^3(x^2+1)\,dx\ (\because x^2+1>0)\\&=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^3=9+3=12\end{aligned}$$

1146

답 ①

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_1^e\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt&=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt\\&=\int_1^e\sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt\\&=\int_1^e\left|\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right|dt\\&=\int_1^e\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\left(\because 1+\frac{1}{t^2}>0\right)\\&=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{t}\right]_1^e=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

1147

답 ⑤

$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx&=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}\right)^2}\,dx\\&=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}\,dx\\&=\int_0^{\ln 2}\left|\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right|dx\\&=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)dx\\&\qquad\left(\because \frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}>0\right)\\&=\left[\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 2}\\&=\left(\frac{1}{8}\times 4-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

1148

답 ③

구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_1^3\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx&=\int_1^3\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx\\&=\int_1^3\sqrt{x^2+\frac{1}{16x^2}+\frac{1}{2}}\,dx\\&=\int_1^3\sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx\\&=\int_1^3\left|x+\frac{1}{4x}\right|dx\\&=\int_1^3\left(x+\frac{1}{4x}\right)dx\left(\because x+\frac{1}{4x}>0\right)\\&=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\ln|x|\right]_1^3\\&=\frac{9}{2}+\frac{1}{4}\ln 3-\frac{1}{2}=4+\frac{1}{4}\ln 3\end{aligned}$$

1149

답 16

조건 (나)에서

$\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2=6f(x)-8$

$\{f'(x)\}^2=\{f(x)\}^2-6f(x)+8$

$x=0$에서 $x=2$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이가 10이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx&=\int_0^2\sqrt{\{f(x)\}^2-6f(x)+9}\,dx\\&=\int_0^2\sqrt{\{f(x)-3\}^2}\,dx=\int_0^2|f(x)-3|\,dx\\&=\int_0^2\{f(x)-3\}\,dx\\&\qquad(\because \text{조건 (가)에서 } f(x)\geq 3)\\&=\int_0^2 f(x)\,dx-\left[3x\right]_0^2\\&=\int_0^2 f(x)\,dx-6=10\end{aligned}$$

$\therefore \int_0^2 f(x)\,dx=16$

PART B 내신 잡는 종합 문제

1150

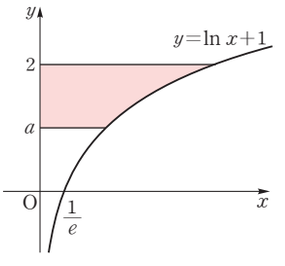
답 ⑤

$y=\ln x+1$에서 $\ln x=y-1$

$\therefore x=e^{y-1}$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_a^2|x|\,dy&=\int_a^2|e^{y-1}|\,dy\\&=\int_a^2 e^{y-1}\,dy=\left[e^{y-1}\right]_a^2\\&=e-e^{a-1}=e-1\end{aligned}$$



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

에서 $e^{a-1}=1$, $a-1=0$

$\therefore a=1$

1151

답 8

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}f\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

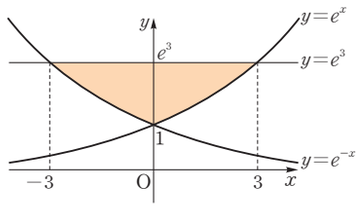
$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\left[a\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2a}{\pi}=\frac{16}{\pi}$

에서 $a=8$

1152

답 ④



두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$과 직선 $y=e^3$의 교점의 x좌표는

$e^x=e^3$에서 $x=3$, $e^{-x}=e^3$에서 $x=-3$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$\int_{-3}^{0}(e^3-e^{-x})\,dx+\int_0^3(e^3-e^x)\,dx=2\int_0^3(e^3-e^x)\,dx$

$=2\left[e^3x-e^x\right]_0^3$

$=2(2e^3+1)=4e^3+2$

1153

답 ②

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $\cos^2 x\sin x\ge 0$이므로

곡선 $y=\cos^2 x\sin x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos^2 x\sin x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x\,dx$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x\,dx=\int_1^0(-t^2)\,dt=\int_0^1 t^2\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

1154

답 3

시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^a|v(t)|\,dt=\int_0^a|\cos\pi t|\,dt=\frac{6}{\pi}$

이때

$\int_0^{\frac{1}{2}}|\cos\pi t|\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi t\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}$

이고 $\frac{6}{\pi}=\frac{1}{\pi}\times 6$이므로

$\int_0^a|\cos\pi t|\,dt$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}|\cos\pi t|\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1|\cos\pi t|\,dt+\cdots+\int_{\frac{5}{2}}^3|\cos\pi t|\,dt$

$=\int_0^3|\cos\pi t|\,dt$

$\therefore a=3$

1155

답 ①

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\theta\sin\theta}{2}$, $\frac{dy}{d\theta}=\frac{\theta\cos\theta}{2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\theta\sin\theta}{2}\right)^2+\left(\frac{\theta\cos\theta}{2}\right)^2}\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4}\theta^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}\theta\right|\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\theta\,d\theta\ \left(\because\frac{1}{2}\theta\ge 0\right)$

$=\left[\frac{1}{4}\theta^2\right]_0^{2\pi}=\pi^2$

1156

답 ④

$\frac{dx}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$이므로 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2+\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2}$

$=\sqrt{e^{2t}(2\sin^2 t+2\cos^2 t)}=\sqrt{2}e^t\ (\because e^t>0)$

따라서 $t=0$에서 $t=2\ln 2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{2\ln 2}\sqrt{2}e^t\,dt=\left[\sqrt{2}e^t\right]_0^{2\ln 2}=\sqrt{2}e^{\ln 4}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

1157

답 $2\ln 2$

구하는 물의 부피는

$\int_0^3\frac{2x}{x^2+3}\,dx=\int_0^3\frac{(x^2+3)'}{x^2+3}\,dx$

$=\left[\ln(x^2+3)\right]_0^3$

$=\ln 12-\ln 3=\ln 4=2\ln 2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1158

답 ④

곡선 $y=a\sqrt{x}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $a\sqrt{x}=x$에서

$x^2-a^2x=0$, $x(x-a^2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a^2$

따라서 구하는 부분의 넓이는

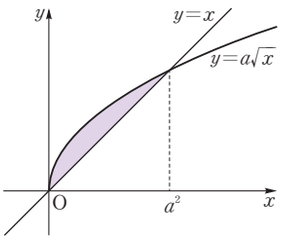
$\int_0^{a^2}(a\sqrt{x}-x)\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{a^2}=\frac{2}{3}a^4-\frac{1}{2}a^4$

$=\frac{1}{6}a^4=\frac{2}{3}$

에서 $a^4=4$, $a^2=2$

$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)



1159

답 ⑤

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)=\int_m^{m+1}f(x)\,dx<0$

이때 $-3\le x\le 0$ 또는 $2\le x\le 6$에서 $f(x)\le 0$

m이 정수이므로 $\int_m^{m+1}f(x)\,dx<0$을 만족시키는 정수 m은

-3, -2, -1, 2, 3, 4, 5의 7개이다.

1160

답 ①

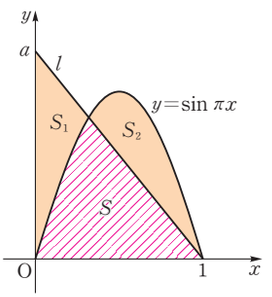
곡선 $y=\sin\pi x$와 직선 l 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S_1=S_2$이므로 $S_1+S=S_2+S$이다.

즉, $\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{1}{2}\times 1\times a$에서

$\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}a$

$\therefore a=\frac{4}{\pi}$



1161

답 ②

입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\frac{1}{\sqrt{x}}+1$인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)^2=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+1$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_1^e S(x)\,dx=\int_1^e\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)dx=\left[\ln|x|+4\sqrt{x}+x\right]_1^e$

$=(\ln e+4\sqrt{e}+e)-(\ln 1+4\sqrt{1}+1)$

$=(1+4\sqrt{e}+e)-(0+4+1)$

$=e+4\sqrt{e}-4$

1162

답 ③

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^3}{n^4}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n}=2\int_0^1 x^3\,dx$

$=2\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{2^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 2^x\,dx$

$=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1=\frac{1}{\ln 2}$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{3n}\right)=3\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{3n}\right)$

$=3\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\sin x\,dx=3\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}$

$=3\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

1163

답 ①

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 g(x)\,dx$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $A=B$이므로

$\int_0^1 g(x)\,dx=C$

$=1\times\frac{\pi}{2}-A$

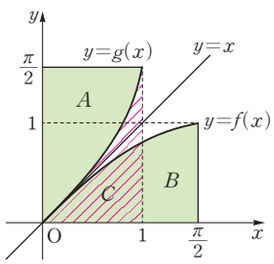
$=\frac{\pi}{2}-B$

$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$

$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}-1$



1164

답 ③

$x_k=1+\frac{k}{n}$이므로 $f(x_k)=e^{1+\frac{k}{n}}$

$\therefore A_k=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{2}\int_1^2 xe^x\,dx$

$u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\frac{1}{2}\int_1^2 xe^x\,dx=\frac{1}{2}\left(\left[xe^x\right]_1^2-\int_1^2 e^x\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(2e^2-e)-\left[e^x\right]_1^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(2e^2-e)-(e^2-e)\}=\frac{1}{2}e^2$$

1165

답 50

$y=k\ln x$에서 $y'=\frac{k}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ k\ln t)$라 하면 곡선 $y=k\ln x$ 위의 점 $(t,\ k\ln t)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{k}{t}$이므로 접선의 방정식은

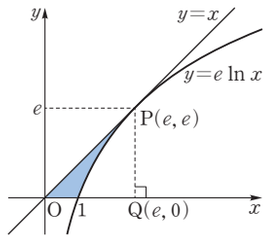
$y=\frac{k}{t}(x-t)+k\ln t$ $\quad\therefore\ y=\frac{k}{t}x-k+k\ln t$

위의 직선이 직선 $y=x$와 일치하므로

$\frac{k}{t}=1,\ -k+k\ln t=0$

$k=k\ln t$에서 $t=e$ $(\because\ k>0)$

$t=e$를 $\frac{k}{t}=1$에 대입하여 정리하면 $k=e$



이때 곡선 $y=e\ln x$와 직선 $y=x$의 접점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면

P$(e,\ e)$, Q$(e,\ 0)$

곡선 $y=e\ln x$와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 부분은 위의 그림의 색칠된 부분과 같으므로 구하는 넓이는

(삼각형 OQP의 넓이)$-\int_1^e e\ln x\,dx$

$=\frac{1}{2}e^2-\int_1^e e\ln x\,dx$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$u(x)=\ln x,\ v'(x)=e$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=ex$이므로

$\int_1^e e\ln x\,dx=\left[ex\ln x\right]_1^e-\int_1^e e\,dx$

$=e^2-\left[ex\right]_1^e$

$=e^2-(e^2-e)=e$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}e^2-e$

따라서 $a=\frac{1}{2},\ b=1$이므로

$100ab=100\times\frac{1}{2}\times1=50$

Bible Says 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

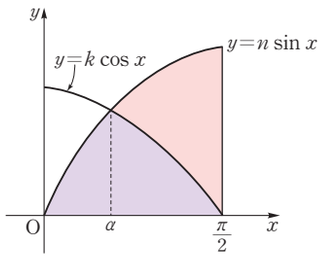
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

1 권

1166

답 ③



두 곡선 $y=n\sin x,\ y=k\cos x$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$n\sin\alpha=k\cos\alpha$에서 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{k}{n}$

$\therefore\ \tan\alpha=\frac{k}{n}$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\alpha=\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}},\ \cos\alpha=\frac{n}{\sqrt{n^2+k^2}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=n\sin x$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin x\,dx=\left[-n\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=n$

두 곡선 $y=n\sin x,\ y=k\cos x$와 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}(n\sin x-k\cos x)\,dx$

$=\left[-n\cos x-k\sin x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}$

$=-k-(-n\cos\alpha-k\sin\alpha)$

$=-k+n\cos\alpha+k\sin\alpha$

이때 $S_1=2S_2$이므로

$n=-2k+2n\cos\alpha+2k\sin\alpha$

$n\cos\alpha+k\sin\alpha=\frac{n}{2}+k$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{n^2+k^2}{\sqrt{n^2+k^2}}=\frac{n}{2}+k$에서 $\sqrt{n^2+k^2}=\frac{n}{2}+k$

$n^2+k^2=\frac{n^2}{4}+nk+k^2$

$nk=\frac{3}{4}n^2$

이때 n은 자연수이므로 $k=\frac{3}{4}n$

따라서 $f(n)=\frac{3}{4}n$이므로

$\sum_{n=1}^{8} f(n)=\sum_{n=1}^{8}\frac{3}{4}n=\frac{3}{4}\times\frac{8\times9}{2}=27$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

1167

답 10

구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{e}x^2\,dx-\int_1^{\sqrt{e}} 2\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3e}x^3\right]_0^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}} 2\ln x\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{3}-\int_1^{\sqrt{e}} 2\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

❶

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=2$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=2x$이므로

$$\int_1^{\sqrt{e}} 2\ln x\,dx=\left[2x\ln x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}} 2\,dx$$

$$=\sqrt{e}-\left[2x\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=\sqrt{e}-(2\sqrt{e}-2)=2-\sqrt{e}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{\sqrt{e}}{3}-(2-\sqrt{e})=\frac{4}{3}\sqrt{e}-2$$

❷

따라서 $a=\frac{4}{3}$, $b=-2$이므로

$$3(a-b)=3\times\frac{10}{3}=10$$

❸

채점 기준	배점
❶ 구하는 부분의 넓이에 대한 식 세우기	20%
❷ 부분적분법을 이용하여 넓이 구하기	70%
❸ $3(a-b)$의 값 구하기	10%

1168

답 2

$\int_0^4 f'(\sqrt{x})\,dx$에서

$\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=4$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^4 f'(\sqrt{x})\,dx=\int_0^2 2tf'(t)\,dt$$

❶

$u(t)=2t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면

$u'(t)=2$, $v(t)=f(t)$이므로

$$\int_0^2 2tf'(t)\,dt=\left[2tf(t)\right]_0^2-\int_0^2 2f(t)\,dt$$

$$=4f(2)-2\int_0^2 f(t)\,dt$$

❷

이때 조건 (가)에서 $f(0)=0$, $f(2)=2$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 조건 (나)에서

$$\int_0^2 f(x)\,dx=3$$

$$\therefore \int_0^4 f'(\sqrt{x})\,dx=4f(2)-2\int_0^2 f(t)\,dt$$

$$=4\times2-2\times3=8-6=2$$

❸

채점 기준	배점
❶ 치환적분법을 이용하여 $\int_0^4 f'(\sqrt{x})\,dx$ 간단히 하기	30%
❷ 부분적분법을 이용하여 식 정리하기	30%
❸ 조건 (가), (나)를 이용하여 $\int_0^4 f'(\sqrt{x})\,dx$의 값 구하기	40%

PART C 수능 녹인 변별력 문제

1169

답 96

$f(x)=\int_0^x (a-t)e^t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(a-x)e^x$

$f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이면서 최대이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값 32를 가지므로

$$f(a)=\int_0^a (a-t)e^t\,dt=32$$

$u(t)=a-t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=-1$, $v(t)=e^t$이므로

$$\int_0^a (a-t)e^t\,dt=\left[(a-t)e^t\right]_0^a-\int_0^a (-e^t)\,dt$$

$$=-a+\left[e^t\right]_0^a=-a+e^a-1=32$$

$\therefore e^a-a=33$ $\cdots\cdots$ ㉠

따라서 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^a |3e^x-3|\,dx=\int_0^a (3e^x-3)\,dx \ (\because 3e^x-3\geq0)$$

$$=\left[3e^x-3x\right]_0^a=3(e^a-a)-3$$

$$=3\times33-3 \ (\because ㉠)$$

$$=96$$

1170

답 ②

$A=B$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x\cos x-ax)\,dx=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 좌변에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos^2 x\,dx$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos^2 x\,dx=\int_1^0(-2t^2)\,dt$$
$$=\int_0^1 2t^2\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

즉, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos x\,dx=\dfrac{2}{3}$이므로 ㉠에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x\cos x-ax)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}ax\,dx$$
$$=\frac{2}{3}-\left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}-\frac{a\pi^2}{8}=0$$
$$\therefore a=\frac{2}{3}\times\frac{8}{\pi^2}=\frac{16}{3\pi^2}$$

1171

답 ①

입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가
$f(x)-\{-f(x)\}=2f(x)$
이고 이때 단면은 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면
$S(x)=\{2f(x)\}^2=(2\sqrt{x\sin x^2})^2=4x\sin x^2$
따라서 입체도형의 부피는

$$\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}}S(x)dx=\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}}4x\sin x^2dx$$

$x^2=t$라 하면 $2x\,dx=dt$이고

$x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$일 때 $t=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{\sqrt{3\pi}}{2}$일 때 $t=\dfrac{3}{4}\pi$이므로

$$\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}}4x\sin x^2dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}2\sin t\,dt=\left[-2\cos t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$=-2\cos\frac{3}{4}\pi+2\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=-2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

1172

답 ③

조건 ㈎에서 $f(x)>0$, $g(x)>0$이므로 조건 ㈏의 식의 양변에

$\dfrac{1}{f(x)g(x)}$을 곱하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}=2$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$\ln|f(x)|-\ln|g(x)|=2x+C$$
$$\ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=2x+C$$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$\ln\left|\frac{f(0)}{g(0)}\right|=C$$

이때 $f(0)=g(0)$에서 $\dfrac{f(0)}{g(0)}=1$이므로 $C=0$

따라서 $\ln\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=2x$에서 $f(x)>0$, $g(x)>0$이므로

$$\frac{f(x)}{g(x)}=e^{2x}$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{f(k)}{g(k)}\right\}^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}\times\frac{2}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2e^x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^2=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

1173

답 4

$x=0$에서 $x=t$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$g(t)=\int_0^t\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$g'(t)=\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}$$

이때 $g'(t)=\sqrt{t^4-2t^3+t^2+1}$이므로

$$\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}=\sqrt{t^4-2t^3+t^2+1}$$
$$\{f'(t)\}^2=t^4-2t^3+t^2,\ \{f'(t)\}^2=\{t(t-1)\}^2$$
$$|f'(t)|=|t(t-1)|$$

이때 $f(0)=3$이고, $f(2)$가 최대이려면 $0\le t\le 2$일 때,
$f'(t)\ge 0$이어야 하므로

$$f'(t)=\begin{cases}-t(t-1) & (0\le t\le 1)\\ t(t-1) & (1\le t\le 2)\end{cases}$$

따라서 $f(2)$의 최댓값은

$$f(2)=f(0)+\int_0^2f'(t)\,dt$$
$$=3+\int_0^1(-t^2+t)\,dt+\int_1^2(t^2-t)\,dt$$
$$=3+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_1^2$$
$$=3+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=4$$

1174

답 ⑤

$x=t+2\cos t$, $y=\sqrt{3}\sin t$에서

$$\frac{dx}{dt}=1-2\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\sqrt{3}\cos t$$

따라서 점 P의 속도는

$(1-2\sin t,\ \sqrt{3}\cos t)$ ····· ㉠

ㄱ. ㉠에 $t=\dfrac{\pi}{2}$를 대입하면 점 P의 속도는

$\left(1-2\sin\dfrac{\pi}{2},\ \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 0)$ (참)

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

ㄴ. 점 P의 시각 t에서의 속도의 크기는 ㉠에 의하여

$\sqrt{(1-2\sin t)^2+(\sqrt{3}\cos t)^2}$

$=\sqrt{4\sin^2 t-4\sin t+1+3\cos^2 t}$

$=\sqrt{3(\sin^2 t+\cos^2 t)+\sin^2 t-4\sin t+1}$

$=\sqrt{\sin^2 t-4\sin t+4}$

$=\sqrt{(\sin t-2)^2}$

$=|\sin t-2|$

$0\le t\le 2\pi$에서 $-1\le\sin t\le 1$이므로

$-3\le\sin t-2\le -1$

$\therefore\ 1\le|\sin t-2|\le 3$

따라서 점 P의 속도의 크기의 최솟값은 1이다. (참)

ㄷ. 점 P가 $t=\pi$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리는 ㄴ에서

$\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{(1-2\sin t)^2+(\sqrt{3}\cos t)^2}\,dt$

$=\int_{\pi}^{2\pi}|\sin t-2|\,dt$

$=\int_{\pi}^{2\pi}(2-\sin t)\,dt\ (\because\ \sin t-2<0)$

$=\Big[2t+\cos t\Big]_{\pi}^{2\pi}$

$=(4\pi+\cos 2\pi)-(2\pi+\cos\pi)$

$=2\pi+2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

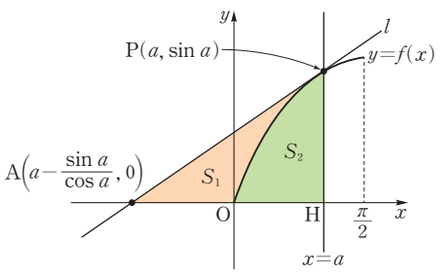
1175

답 ②

$f(x)=\sin x$에서 $f'(x)=\cos x$

함수 $f(x)=\sin x$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ \sin a)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=\cos a$이므로 접선 l의 방정식은

$y=\cos a(x-a)+\sin a$



직선 l이 x축과 만나는 점을 A라 하면 $\mathrm{A}\left(a-\frac{\sin a}{\cos a},\ 0\right)$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(a,\ 0)$

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면 $S_1=S_2$이므로

$S_1+S_2=2S_2$

이때

$S_1+S_2=(\text{삼각형 PAH의 넓이})=\frac{1}{2}\times\frac{\sin a}{\cos a}\times\sin a=\frac{\sin^2 a}{2\cos a}$

$S_2=\int_0^a\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^a=-\cos a+1$

이므로 $\frac{\sin^2 a}{2\cos a}=-2\cos a+2$

$1-\cos^2 a=-4\cos^2 a+4\cos a,\ 3\cos^2 a-4\cos a+1=0$

$(3\cos a-1)(\cos a-1)=0$

$\therefore\ \cos a=\frac{1}{3}$ 또는 $\cos a=1$

이때 $0<a<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos a=\frac{1}{3}$

1176

답 0

$f'(x)=\frac{1}{4}\left(2x-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$이므로

$x=t$에서 $x=t+1$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이를 $l(t)$라 하면

$l(t)=\int_t^{t+1}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

$=\int_t^{t+1}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$

$=\int_t^{t+1}\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=\int_t^{t+1}\left|\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|dx$

$=\int_t^{t+1}\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx\ \left(\because\ x+\frac{1}{x}>0\right)$

$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}x^2+\ln|x|\Big]_t^{t+1}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(t+1)^2+\ln(t+1)-\frac{1}{2}t^2-\ln t\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{t+\frac{1}{2}+\ln(t+1)-\ln t\right\}$

$l'(t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2t(t+1)}=\frac{t^2+t-1}{2t(t+1)}$

$l'(t)=0$에서 $t^2+t-1=0$

$\therefore\ t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (\because\ t>0)$

$t>0$에서 함수 $l(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	…	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	…
$l'(t)$		−	0	+
$l(t)$		↘	극소	↗

함수 $l(t)$는 $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$에서 극소이면서 최소이므로

$m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{2}$

$\therefore\ m+n=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

1177

답 28

$\int_1^{16}f'(\sqrt{x})\,dx$에서

$\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{dt}{dx}$, 즉 $\frac{1}{2t}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=16$일 때 $t=4$이므로

$\int_1^{16}f'(\sqrt{x})\,dx=\int_1^4 2tf'(t)\,dt$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\int_1^4 2tf'(t)\,dt$에서

$u(t)=2t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면

$u'(t)=2$, $v(t)=f(t)$이므로

$$\int_1^4 2tf'(t)\,dt=\Big[2tf(t)\Big]_1^4-\int_1^4 2f(t)\,dt$$

$$=8f(4)-2f(1)-2\int_1^4 f(t)\,dt$$

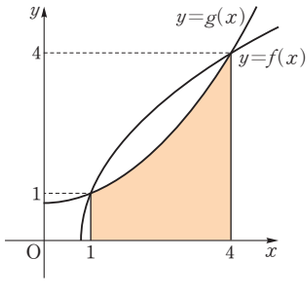
$$=8\times4-2\times1-2\times8=14\ (\because \text{조건 (가), (나)})$$

한편, $\int_1^{16}\frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$에서

$\sqrt{x}=s$로 놓으면 $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{ds}{dx}$이고

$x=1$일 때 $s=1$, $x=16$일 때 $s=4$이므로

$$\int_1^{16}\frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^4 2g(s)\,ds=2\int_1^4 g(s)\,ds$$



이때 위의 그림에서

$$\int_1^4 g(s)\,ds=4\times4-1\times1-\int_1^4 f(s)\,ds$$

$$=15-8=7\ (\because \text{조건 (가), (나)})$$

$$\therefore \int_1^{16}\frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx=2\int_1^4 g(s)\,ds=2\times7=14$$

$$\therefore \int_1^{16}\left\{f'(\sqrt{x})+\frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right\}dx=14+14=28$$

1178

답 ②

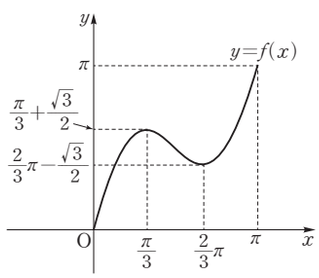
$f(x)=x+\sin 2x$에서 $f'(x)=1+2\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	π

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기가 $1+2\cos 2t$이므로 접선의 방정식은

$y=(1+2\cos 2t)x+\sin 2t-2t\cos 2t$ …… ㉠

$\therefore g(t)=\sin 2t-2t\cos 2t$

$g'(t)=2\cos 2t-2\cos 2t+4t\sin 2t=4t\sin 2t$

$g'(t)=0$에서 $4t\sin 2t=0$

$\therefore t=\frac{\pi}{2}$ $(\because 0<t<\pi)$

$0<t<\pi$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	…	$\frac{\pi}{2}$	…	(π)
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$		↗	극대	↘	

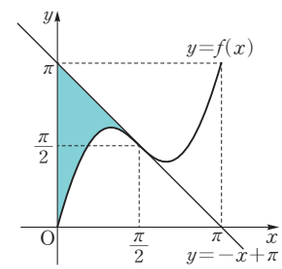
함수 $g(t)$는 $t=\frac{\pi}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 $\alpha=\frac{\pi}{2}$

$t=\frac{\pi}{2}$를 ㉠에 대입하면

$y=(1+2\cos\pi)x+\sin\pi-\pi\cos\pi$

$\therefore y=-x+\pi$

따라서 구하는 부분의 넓이는



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{-x+\pi-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{-x+\pi-(x+\sin 2x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2x-\sin 2x+\pi)dx$$

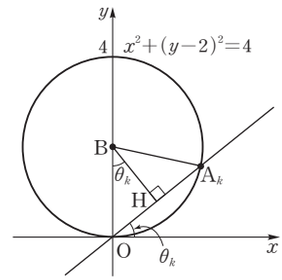
$$=\Big[-x^2+\frac{1}{2}\cos 2x+\pi x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-1$$

1179

답 ④



원 $x^2+(y-2)^2=4$의 중심을 B라 하고 원의 중심에서 직선 OA_k에 내린 수선의 발을 H라 하자.

직각삼각형 OHB에서 $\angle HOB=\frac{\pi}{2}-\theta_k$이므로

$\angle OBH=\theta_k=\frac{k\pi}{2n}$

삼각형 OA_kB는 $\overline{OB}=\overline{A_kB}=2$인 이등변삼각형이므로

$\overline{OH}=2\sin\theta_k=2\sin\frac{k\pi}{2n}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}_k}=2\overline{\mathrm{OH}}=4\sin\dfrac{k\pi}{2n}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{OA}_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$=\frac{8}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=\frac{8}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{8}{\pi}\times1=\frac{8}{\pi}$$

1180

답 6

조건 (가)의 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

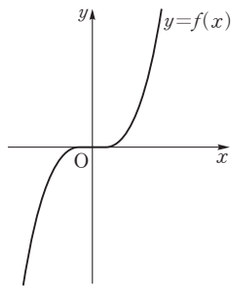
(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$$

즉, $f(0)=0$, $f'(0)=0$이고 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 나누어 생각해 볼 수 있다.

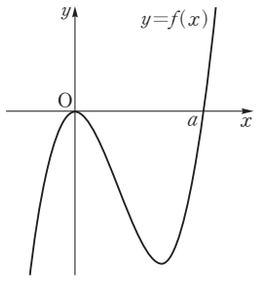
(i) 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우

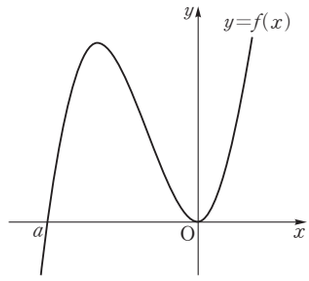


$k\ge0$인 모든 실수 k에 대하여 $\displaystyle\int_0^k|f(x)|\,dx=\left|\int_0^k f(x)\,dx\right|$

가 성립하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 경우





함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 a라 하자.

$\displaystyle\int_0^k|f(x)|\,dx=\left|\int_0^k f(x)\,dx\right|$를 만족시키는 실수 k의 최댓값이 4이려면 위의 왼쪽 그림에서 $a=4$이어야 한다.

한편, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}<0$에서 $\displaystyle\int_m^{m+1}f(x)\,dx<0$이고

(i), (ii)에서 $\displaystyle\int_m^{m+1}f(x)\,dx<0$을 만족시키는 자연수 m은 1, 2, 3

이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

수학의 바이블

유형 ON

2권

정답과 풀이

미적분

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Ⅰ 수열의 극한

유형별 유사문제

PART A 01 수열의 극한

유형 01 수열의 수렴과 발산

0001 답 ③

① n의 값이 한없이 커지면 $\left(-\frac{7}{6}\right)^n$의 값은 음수와 양수가 교대로 되면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\left\{\left(-\frac{7}{6}\right)^n\right\}$은 발산(진동)한다.

② n의 값이 한없이 커지면 $\frac{1}{(-3)^n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{2+\frac{1}{(-3)^n}\right\}$은 2에 수렴한다.

③ $\cos n\pi$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면
$-1, 1, -1, 1, \cdots$
즉, n의 값이 한없이 커지면 $\cos n\pi$의 값은 -1과 1이 교대로 나타나므로 수열 $\{\cos n\pi\}$는 발산(진동)한다.

④ n의 값이 한없이 커지면 $\frac{5n-2}{n}=5-\frac{2}{n}$의 값은 5에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{5n-2}{n}\right\}$는 5에 수렴한다.

⑤ $\log\frac{1}{n}=-\log n$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면
$0, -\log 2, -\log 3, -\log 4, \cdots$
즉, n의 값이 한없이 커지면 $\log\frac{1}{n}$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\left\{\log\frac{1}{n}\right\}$은 음의 무한대로 발산한다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

0002 답 12

n의 값이 한없이 커지면 $\frac{3n}{n+5}$의 값은 3에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{3n}{n+5}\right\}$은 3에 수렴한다.
$\therefore x=3$
$\tan\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면
$\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \cdots$
즉, 수열 $\left\{\tan\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right\}$는 $\sqrt{3}$에 수렴한다.
$\therefore y=\sqrt{3}$
$\therefore x^2+y^2=9+3=12$

0003 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{3}{n^3}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{3-\frac{3}{n^3}\right\}$은 3에 수렴한다.

ㄴ. $\frac{1+(-1)^n}{2}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면
$0, 1, 0, 1, \cdots$
즉, 수열 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$은 발산(진동)한다.

ㄷ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{7-3n^2}{n}=\frac{7}{n}-3n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\left\{\frac{7-3n^2}{n}\right\}$은 음의 무한대로 발산한다.

ㄹ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{(-1)^n}{\log 3n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{1+\frac{(-1)^n}{\log 3n}\right\}$은 1에 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄹ이다.

유형 02 수열의 극한에 대한 기본 성질

0004 답 -3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-b_n}{2a_n^2-3}=\frac{4\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n}{2\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}a_n-3}$$
$$=\frac{4\times(-2)-7}{2\times(-2)\times(-2)-3}=-3$$

0005 답 -4

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)=1$
$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{5}{(n+1)(n+2)}-3\right\}=-3$
$\therefore \lim_{n\to\infty}(3a_n-1)(b_n+1)=\lim_{n\to\infty}(3a_n-1)\times\lim_{n\to\infty}(b_n+1)$
$=\left(3\lim_{n\to\infty}a_n-1\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}b_n+1\right)$
$=(3\times1-1)\times(-3+1)=-4$

0006 답 2

$\lim_{n\to\infty}(5-a_n)=2$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$
$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=7$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n=7$이므로
$3+2\lim_{n\to\infty}b_n=7$, $2\lim_{n\to\infty}b_n=4$ $\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n+1}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{3+1}{2}=2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0007

답 15

$\lim_{n\to\infty}(a_n^2-a_nb_n+b_n^2)$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-3a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-3\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=3\times3-3\times(-2)=15$

0008

답 ①

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$,

$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=8$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=8$이므로

$\alpha-\beta=8$ ····· ㉠

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)=1$에서 $2\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=1$이므로

$2\alpha+\beta=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=3$, $\beta=-5$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=3+(-5)=-2$

유형 03 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$의 이용

0009

답 9

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_{n+1}+3}{a_n-3}=5$에서 $\frac{2\alpha+3}{\alpha-3}=5$

$2\alpha+3=5\alpha-15$, $3\alpha=18$

$\therefore \alpha=6$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+3)=6+3=9$

0010

답 3

수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수에 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha\neq0$)으로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\frac{9}{a_{n+1}}=6-a_n$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{9}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(6-a_n)$이므로

$\frac{9}{\alpha}=6-\alpha$, $9=6\alpha-\alpha^2$

$\alpha^2-6\alpha+9=0$, $(\alpha-3)^2=0$

$\therefore \alpha=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3$

0011

답 ⑤

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}a_{n-1}^2-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}-1=0$에서 $\alpha^2-\alpha-1=0$

$\therefore \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

이때 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\geq0$이므로

$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

0012

답 ⑤

이차방정식 $x^2+a_nx+a_{2n}+15=0$이 중근을 가지므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a_n^2-4(a_{2n}+15)=0$

$\therefore a_n^2-4a_{2n}-60=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2-4a_{2n}-60)=0$이고 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\alpha^2-4\alpha-60=0$, $(\alpha+6)(\alpha-10)=0$

$\therefore \alpha=-6$ 또는 $\alpha=10$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $\alpha=10$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n-1}=\sqrt{9}=3$

유형 04 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한

0013

답 4

조건 ㈎에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n+3)^2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n-8}{2n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4-\frac{8}{n}}{2+\frac{1}{n}}=-2$

$\therefore a=-2$

조건 ㈏에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+5n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+5}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=6$

$\therefore b=6$

$\therefore a+b=-2+6=4$

0014

답 6

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}\right)\times n}{\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)\times n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n}}=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}=2\times3=6$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0015

답 2

$a_n+a_{n+1}=n^2+5$ ····· ㉠

$a_{n+1}+a_{n+2}=(n+1)^2+5$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$a_{n+2}-a_n=(n+1)^2+5-(n^2+5)=2n+1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+2}-a_n}{n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=2$

0016

답 ①

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3n^2+n-\{3(n-1)^2+(n-1)\}$

$=6n-2$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{a_na_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{(6n-2)\{6(n+1)-2\}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{(6n-2)(6n+4)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{36n^2+12n-8}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{1}{n}}{36+\frac{12}{n}-\frac{8}{n^2}}=\dfrac{1}{12}$

0017

답 $\dfrac{16}{5}$

이차방정식 $x^2+4nx+3=0$의 두 실근이 α_n, β_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-4n$, $\alpha_n\beta_n=3$

$\therefore {\alpha_n}^2+{\beta_n}^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n$

$=(-4n)^2-2\times 3=16n^2-6$

이때 $f(n)=n^2+4n\times n+3=5n^2+3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{{\alpha_n}^2+{\beta_n}^2}{f(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16n^2-6}{5n^2+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16-\frac{6}{n^2}}{5+\frac{3}{n^2}}=\dfrac{16}{5}$

유형 05 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 - 합 또는 곱

0018

답 ②

$5+7+9+\cdots+(2n+3)=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+3)$

$=2\times\dfrac{n(n+1)}{2}+3n=n^2+4n$

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+7+9+\cdots+(2n+3)}{1+2+3+\cdots+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4n}{\frac{n^2+n}{2}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+8n}{n^2+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{8}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2$

0019

답 $\dfrac{2}{9}$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n(3+6+9+\cdots+3n)=3n(1+2+3+\cdots+n)$

$=3n\times\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{3n^2(n+1)}{2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(3+6+9+\cdots+3n)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\dfrac{2}{3n^2(n+1)}\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{9n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{n}}{9}=\dfrac{2}{9}$

0020

답 ④

$a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{5}{4}\times\cdots\times\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{n+1}{2}$

$b_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{{a_n}^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\times\dfrac{16}{(n+1)^4}\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{(n+1)^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=4$

0021

답 3

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)$

$=2\times\dfrac{n(n+1)}{2}-n$

$=n^2$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$

$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}nf(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{n(n+1)(n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}=3$

유형 06 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 - 로그를 포함한 식

0022

답 2

$\log_3(3n-1)+\log_3(3n+1)-2\log_3(n+2)$

$=\log_3\frac{(3n-1)(3n+1)}{(n+2)^2}$

$=\log_3\frac{9n^2-1}{n^2+4n+4}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\log_3(3n-1)+\log_3(3n+1)-2\log_3(n+2)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{9n^2-1}{n^2+4n+4}$

$=\log_3\left(\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-1}{n^2+4n+4}\right)$

$=\log_3\left(\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}\right)$

$=\log_3 9=\log_3 3^2=2$

0023

답 ③

$\lim_{n\to\infty}(\log_4\sqrt{6n^2-n+1}-\log_4\sqrt{3n^2+4})$

$=\lim_{n\to\infty}\log_4\frac{\sqrt{6n^2-n+1}}{\sqrt{3n^2+4}}$

$=\log_4\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{6n^2-n+1}}{\sqrt{3n^2+4}}\right)$

$=\log_4\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{6-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{3+\frac{4}{n^2}}}\right)$

$=\log_4\sqrt{2}=\log_{2^2}2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

0024

답 2

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=\log_5\frac{1}{3}+\log_5\frac{2}{4}+\log_5\frac{3}{5}+\cdots+\log_5\frac{n}{n+2}$

$=\log_5\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\cdots\times\frac{n-1}{n+1}\times\frac{n}{n+2}\right)$

$=\log_5\frac{2}{(n+1)(n+2)}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(n^2\times5^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n})$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{n^2\times5^{\log_5\frac{2}{(n+1)(n+2)}}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)(n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}=2$

유형 07 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 - 미정계수의 결정

0025

답 12

$b\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{(an+2)^2}{bn^3+3n^2}=0$이므로 $b=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(an+2)^2}{bn^3+3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2n^2+4an+4}{3n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2+\frac{4a}{n}+\frac{4}{n^2}}{3}=\frac{a^2}{3}$

따라서 $\frac{a^2}{3}=4$이므로 $a^2=12$

$\therefore a^2+b^2=12+0=12$

0026

답 ④

$a-1\neq0$, 즉 $a\neq1$이면

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)n^2+bn+3}{\sqrt{9n^2+1}}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로 $a=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)n^2+bn+3}{\sqrt{9n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+3}{\sqrt{9n^2+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{3}{n}}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}=\frac{b}{3}$

따라서 $\frac{b}{3}=2$이므로 $b=6$

$\therefore a+b=1+6=7$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0027

답 $3\sqrt{3}$

$a\neq 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{36n^2-n+5}}{an^2+2n-3}=0$이므로

$a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{36n^2-n+5}}{an^2+2n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{36n^2-n+5}}{2n-3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{36-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{2-\frac{3}{n}}$

$=\frac{6}{2}=3$

$\therefore b=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(a+9)n+1}{\sqrt{bn^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n+1}{\sqrt{3n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{1}{n}}{\sqrt{3-\frac{1}{n}}}$

$=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$

0028

답 ④

$b\neq 0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a^2-2a-3)n^2+(a-3)n+1}{bn+2}=1$이려면

$a^2-2a-3=0,\ a-3\neq 0$

$a^2-2a-3=(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

이때 $a-3\neq 0$에서 $a\neq 3$이므로

$a=-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(a^2-2a-3)n^2+(a-3)n+1}{bn+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+1}{bn+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{1}{n}}{b+\frac{2}{n}}$

$=-\frac{4}{b}$

따라서 $-\frac{4}{b}=1$이므로

$b=-4$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2an^2-n+3}{(bn+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2-n+3}{(-4n+1)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{\left(-4+\frac{1}{n}\right)^2}$

$=\frac{-2}{16}=-\frac{1}{8}$

유형 08 ∞−∞ 꼴의 극한

0029

답 ③

$\lim_{n\to\infty}(3n-\sqrt{9n^2-5n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-\sqrt{9n^2-5n})(3n+\sqrt{9n^2-5n})}{3n+\sqrt{9n^2-5n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{3n+\sqrt{9n^2-5n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3+\sqrt{9-\frac{5}{n}}}=\frac{5}{3+3}=\frac{5}{6}$

0030

답 $\sqrt{3}$

$a_n=2+(n-1)\times 3=3n-1$이므로

$a_{n+2}=3(n+2)-1=3n+5$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{a_{n+2}}-\sqrt{a_n})$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{3n+5}-\sqrt{3n-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{3n+5}-\sqrt{3n-1})(\sqrt{3n+5}+\sqrt{3n-1})}{\sqrt{3n+5}+\sqrt{3n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{3n+5}+\sqrt{3n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{3+\frac{5}{n}}+\sqrt{3-\frac{1}{n}}}=\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

0031

답 ④

이차방정식 $x^2-2nx+5n-7=0$의 두 실근은

$x=-(-n)\pm\sqrt{(-n)^2-(5n-7)}=n\pm\sqrt{n^2-5n+7}$

이때 $\alpha_n<\beta_n$이므로 $\alpha_n=n-\sqrt{n^2-5n+7}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-5n+7})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2-5n+7})(n+\sqrt{n^2-5n+7})}{n+\sqrt{n^2-5n+7}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n+\sqrt{n^2-5n+7}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{7}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$

0032

답 $\frac{5}{8}$

$\sqrt{(4n)^2}<\sqrt{16n^2+5n+1}<\sqrt{(4n+1)^2}$이므로

$4n<\sqrt{16n^2+5n+1}<4n+1$

$\therefore a_n=4n$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{16n^2+5n+1}-a_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{16n^2+5n+1}-4n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{16n^2+5n+1}-4n)(\sqrt{16n^2+5n+1}+4n)}{\sqrt{16n^2+5n+1}+4n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{\sqrt{16n^2+5n+1}+4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{16+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+4}$$
$$=\frac{5}{4+4}=\frac{5}{8}$$

0033

답 1

$n\geq 2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-2(n-1)^2=4n-2$
이때 $a_1=S_1=2$이므로 $a_n=4n-2\ (n\geq 1)$
$a_{2k}=4\times 2k-2=8k-2$이므로
$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(8k-2)$$
$$=8\times\frac{n(n+1)}{2}-2n$$
$$=4n^2+2n$$
$a_{2k-1}=4\times(2k-1)-2=8k-6$이므로
$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(8k-6)$$
$$=8\times\frac{n(n+1)}{2}-6n$$
$$=4n^2-2n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+2n}-\sqrt{4n^2-2n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+2n}-\sqrt{4n^2-2n})(\sqrt{4n^2+2n}+\sqrt{4n^2-2n})}{\sqrt{4n^2+2n}+\sqrt{4n^2-2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{4n^2+2n}+\sqrt{4n^2-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{4+\frac{2}{n}}+\sqrt{4-\frac{2}{n}}}$$
$$=\frac{4}{2+2}=1$$

유형 09 ∞−∞ 꼴의 극한 - 분수 꼴

0034

답 $4\sqrt{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-1})}{(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-1})(\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-1})}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}\right)}{1+\frac{1}{n}}$$
$$=2(\sqrt{2}+\sqrt{2})=4\sqrt{2}$$

0035

답 ④

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면
$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}-(n+2)}=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-(n+2)}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+(n+2)}{\{\sqrt{n^2+n}-(n+2)\}\{\sqrt{n^2+n}+(n+2)\}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+(n+2)}{-3n-4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\left(1+\frac{2}{n}\right)}{-3-\frac{4}{n}}$$
$$=\frac{1+1}{-3}=-\frac{2}{3}$$

0036

답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha_n+\beta_n=1,\ \alpha_n\beta_n=2n-\sqrt{4n^2+3n}$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-\sqrt{4n^2+3n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\sqrt{4n^2+3n}}{(2n-\sqrt{4n^2+3n})(2n+\sqrt{4n^2+3n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\sqrt{4n^2+3n}}{-3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\sqrt{4+\frac{3}{n}}}{-3}$$
$$=\frac{2+2}{-3}=-\frac{4}{3}$$

0037

답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+53}-n}{n-\sqrt{n^2+52}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+53}-n)(\sqrt{n^2+53}+n)(n+\sqrt{n^2+52})}{(n-\sqrt{n^2+52})(n+\sqrt{n^2+52})(\sqrt{n^2+53}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{53(n+\sqrt{n^2+52})}{-52(\sqrt{n^2+53}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{53\left(1+\sqrt{1+\frac{52}{n^2}}\right)}{-52\left(\sqrt{1+\frac{53}{n^2}}+1\right)}=\frac{53(1+1)}{-52(1+1)}=-\frac{53}{52}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 10 ∞−∞ 꼴의 극한 - 미정계수의 결정

0038

답 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+3an}-2n+a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+3an}+(2n-a)}{\{\sqrt{4n^2+3an}-(2n-a)\}\{\sqrt{4n^2+3an}+(2n-a)\}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+3an}+(2n-a)}{7an-a^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{3a}{n}}+\left(2-\frac{a}{n}\right)}{7a-\frac{a^2}{n}}=\frac{2+2}{7a}=\frac{4}{7a}$$

따라서 $\frac{4}{7a}=\frac{2}{7}$이므로 $a=2$

0039

답 ④

$b\le0$이면 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+an}-(bn-3)\}=\infty$이므로 $b>0$

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+an}-(bn-3)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+an}-(bn-3)\}\{\sqrt{n^2+an}+(bn-3)\}}{\sqrt{n^2+an}+(bn-3)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b^2)n^2+(a+6b)n-9}{\sqrt{n^2+an}+bn-3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b^2)n+(a+6b)-\frac{9}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+b-\frac{3}{n}}$$

위 식의 극한값이 4이므로

$1-b^2=0$, $\frac{a+6b}{1+b}=4$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$ ($\because b>0$)

$\therefore ab=2\times1=2$

0040

답 6

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2+an+2}-\sqrt{bn^2-3n+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{3n^2+an+2}-\sqrt{bn^2-3n+1})(\sqrt{3n^2+an+2}+\sqrt{bn^2-3n+1})}{\sqrt{3n^2+an+2}+\sqrt{bn^2-3n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3-b)n^2+(a+3)n+1}{\sqrt{3n^2+an+2}+\sqrt{bn^2-3n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3-b)n+(a+3)+\frac{1}{n}}{\sqrt{3+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{b-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

위 식의 극한값이 $\sqrt{3}$이므로

$3-b=0$, $\frac{a+3}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}=\sqrt{3}$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=3$

$\therefore a+b=3+3=6$

0041

답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+3}}{an(\sqrt{n+4}-\sqrt{n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+3}(\sqrt{n+4}+\sqrt{n-1})}{an(\sqrt{n+4}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+3}(\sqrt{n+4}+\sqrt{n-1})}{5an}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a+\frac{3}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{5a}=\frac{2\sqrt{a}}{5a}$$

따라서 $\frac{2\sqrt{a}}{5a}=\frac{1}{5}$이므로

$a=2\sqrt{a}$, $a^2-4a=0$

$a(a-4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a\neq0$)

0042

답 2

$k\ge0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $k<0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}+kn\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}+kn\}\{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}-kn\}}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}-kn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-k^2)n^2+8n+3}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}-kn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-k^2)n+8+\frac{3}{n}}{\sqrt{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}-k}$$

이때 극한값이 존재하므로 $4-k^2=0$, $k^2=4$

$\therefore k=-2$ ($\because k<0$)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{3}{n}}{\sqrt{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}+2}$$

$$=\frac{8}{2+2}=2$$

유형 11 일반항 a_n을 포함한 식의 극한값

0043

답 12

$(2n+5)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{2n+5}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(6n-1)a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(6n-1)\times\frac{b_n}{2n+5}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n-1}{2n+5}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=3\times4=12$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0044

답 ③

$\frac{5-3a_n}{a_n+1}=b_n$으로 놓으면

$5-3a_n=a_nb_n+b_n$, $(b_n+3)a_n=5-b_n$

$\therefore a_n=\frac{5-b_n}{b_n+3}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=-1$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5-b_n}{b_n+3}=\frac{5-(-1)}{-1+3}=3$

0045

답 $\frac{1}{3}$

$\frac{a_n}{n}=b_n$으로 놓으면 $a_n=nb_n$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3n}{a_n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2nb_n-3n}{nb_n+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-3}{b_n+1}=\frac{2\times2-3}{2+1}=\frac{1}{3}$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3n}{a_n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{a_n}{n}-3}{\frac{a_n}{n}+1}=\frac{2\times2-3}{2+1}=\frac{1}{3}$

0046

답 $\frac{1}{15}$

$(n^2+n-1)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{n^2+n-1}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(5n^2+2)a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n-1}{5n^2+2}\times\frac{1}{b_n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}$

$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

유형 12 일반항 a_n을 포함한 식의 극한값 - 식의 변형

0047

답 30

$\frac{a_n}{4n-1}=c_n$으로 놓으면 $a_n=(4n-1)c_n$

$\frac{b_n}{3n+4}=d_n$으로 놓으면 $b_n=(3n+4)d_n$

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=5$, $\lim_{n\to\infty} d_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)c_n\times(3n+4)d_n}{(2n+1)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)(3n+4)}{4n^2+4n+1}\times\lim_{n\to\infty} c_n\times\lim_{n\to\infty} d_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n}\right)}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\times\lim_{n\to\infty} c_n\times\lim_{n\to\infty} d_n$

$=\frac{12}{4}\times5\times2=30$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{(2n+1)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{4n-1}\times\frac{b_n}{3n+4}\times\frac{(4n-1)(3n+4)}{(2n+1)^2}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n-1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+4}\times\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+13n-4}{4n^2+4n+1}$

$=5\times2\times\frac{12}{4}=30$

0048

답 ④

$(2n+5)a_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{c_n}{2n+5}$

$(n^3-1)b_n=d_n$으로 놓으면 $b_n=\frac{d_n}{n^3-1}$

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=6$, $\lim_{n\to\infty} d_n=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2-1)b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2-1)(2n+5)d_n}{(n^3-1)c_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4-\frac{1}{n^2}\right)\left(2+\frac{5}{n}\right)}{1-\frac{1}{n^3}}\times\frac{\lim_{n\to\infty} d_n}{\lim_{n\to\infty} c_n}$

$=8\times\frac{3}{6}=4$

0049

답 -4

$a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=-a_n+c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이고, $\lim_{n\to\infty} c_n=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-b_n}{a_n+2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-(-a_n+c_n)}{a_n+2(-a_n+c_n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-c_n}{-a_n+2c_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-c_n\times\frac{1}{a_n}}{-1+2\times c_n\times\frac{1}{a_n}}=-4$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이고, $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{a_n}\times(a_n+b_n)\right\}=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-b_n}{a_n+2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{b_n}{a_n}}{1+2\times\frac{b_n}{a_n}}=\frac{3-(-1)}{1+2\times(-1)}=-4$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 13 수열의 극한의 대소 관계

0050 답 ③

$\frac{3n}{n^2+2}<a_n<\frac{3n+5}{n^2+2}$이므로

$\frac{3n^2}{n^2+2}<na_n<\frac{3n^2+5n}{n^2+2}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n}{n^2+2}=3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=3$

0051 답 2

$\sqrt{4n^2-3n+1}<(n+3)a_n<\sqrt{4n^2+5n}$에서

$\frac{\sqrt{4n^2-3n+1}}{n+3}<a_n<\frac{\sqrt{4n^2+5n}}{n+3}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2-3n+1}}{n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+5n}}{n+3}=2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

0052 답 ⑤

$|a_n-6n|\le5$에서 $-5\le a_n-6n\le5$

$6n-5\le a_n\le6n+5$

$\therefore\ \frac{6n-5}{3n}\le\frac{a_n}{3n}\le\frac{6n+5}{3n}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-5}{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+5}{3n}=2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n}=2$

0053 답 2

$1+2\log_2 n<\log_2 a_n<1+2\log_2(n+1)$에서

$\log_2 2+\log_2 n^2<\log_2 a_n<\log_2 2+\log_2(n+1)^2$이므로

$\log_2 2n^2<\log_2 a_n<\log_2 2(n+1)^2$

$\therefore\ 2n^2<a_n<2n^2+4n+2$

$\therefore\ \frac{2n^2}{n^2+n}<\frac{a_n}{n^2+n}<\frac{2n^2+4n+2}{n^2+n}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+4n+2}{n^2+n}=2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+n}=2$

0054 답 $\frac{1}{2}$

이차방정식 $x^2-2(n+3)x+a_n=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=\{-(n+3)\}^2-a_n>0$

$\therefore\ a_n<(n+3)^2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2nx+a_n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-n)^2-a_n<0$

$\therefore\ a_n>n^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $n^2<a_n<(n+3)^2$

$\therefore\ \frac{n^2}{2n^2+3n}<\frac{a_n}{2n^2+3n}<\frac{n^2+6n+9}{2n^2+3n}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+9}{2n^2+3n}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2+3n}=\frac{1}{2}$

0055 답 2

조건 (가)에서

$7-\frac{1}{n}<3a_n+b_n<7+\frac{1}{n}$ …… ㉠

조건 (나)에서

$3-\frac{1}{n}<2a_n-b_n<3+\frac{1}{n}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$\left(7-\frac{1}{n}\right)+\left(3-\frac{1}{n}\right)<5a_n<\left(7+\frac{1}{n}\right)+\left(3+\frac{1}{n}\right)$이므로

$10-\frac{2}{n}<5a_n<10+\frac{2}{n}$

$\therefore\ 2-\frac{2}{5n}<a_n<2+\frac{2}{5n}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{5n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{5n}\right)=2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

유형 14 수열의 극한의 대소 관계 - 삼각함수를 포함한 수열

0056 답 0

$-1\le\sin n\theta\le1$이므로

$-\frac{1+n}{n^2+1}\le\frac{(1+n)\sin n\theta}{n^2+1}\le\frac{1+n}{n^2+1}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1+n}{n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^2+1}=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+n)\sin n\theta}{n^2+1}=0$

0057 답 ③

$-1\le\cos n\theta\le1$이므로

$-\frac{1}{n^3}\le\frac{\cos n\theta}{n^3}\le\frac{1}{n^3}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{n^3}=0$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta-n^3}{2n^3+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\cos n\theta}{n^3}-1}{2+\frac{1}{n^2}}=-\frac{1}{2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 15 수열의 극한에 대한 진위 판단

0058 답 ③

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha$ (α는 실수)이면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$ (α, β는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}$

$=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$

$=\alpha-\beta$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다. (참)

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^n+2$, $b_n=4$

이면 $0<a_n<b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n=4$이지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0059 답 ②

ㄱ. [반례] $a_n=n^2$, $b_n=\frac{1}{n}$

이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} n=\infty$ (거짓)

ㄴ. [반례] $a_n=(-1)^n$

이면 $\lim_{n\to\infty} a_{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}=-1$

즉, 두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$이 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_{2n}=1$에서 n 대신 $2n$을 대입하면 $\lim_{2n\to\infty} a_{4n}=1$

이때 $2n\to\infty$이면 $n\to\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_{4n}=1$ (참)

ㄹ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$

이면 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} 1=1$이므로 수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴하지만 수열 $\{b_n\}$은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

0060 답 ②

ㄱ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$

이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$이지만 $a_n\neq b_n$이다. (거짓)

ㄴ. [반례] $a_n=(-1)^n$

이면 $\lim_{n\to\infty} a_n^2=1$이지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다. (거짓)

ㄷ. [반례] $a_n=n$, $b_n=-n$

이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(n-n)=0$ (거짓)

ㄹ. 주어진 명제의 대우 '수열 $\{|a_n|\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n^2\}$도 수렴한다.'가 참이면 주어진 명제도 참이다.

수열 $\{|a_n|\}$이 수렴, 즉 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty} a_n^2=\lim_{n\to\infty}|a_n|^2=\lim_{n\to\infty}|a_n|\times\lim_{n\to\infty}|a_n|$

$=\alpha^2$

이므로 수열 $\{a_n^2\}$도 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄹ이다.

유형 16 등비수열의 극한

0061 답 4

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}-3^{n+1}}{4^{n+1}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{16-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{4+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{16}{4}=4$

0062 답 2

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+k}}{3^{n+1}-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^k}{3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}=-5^k$

따라서 $-5^k=-25$이므로 $k=2$

0063 답 6

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\times a_n-2^{n+1}}{3^{n+1}+3^n\times a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+a_n}$

$=\frac{3\alpha}{3+\alpha}$

따라서 $\frac{3\alpha}{3+\alpha}=2$이므로 $3\alpha=6+2\alpha$

$\therefore \alpha=6$

0064 답 ④

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9^n+3^n}-\sqrt{9^n-3^{n+1}})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{9^n+3^n}-\sqrt{9^n-3^{n+1}})(\sqrt{9^n+3^n}+\sqrt{9^n-3^{n+1}})}{\sqrt{9^n+3^n}+\sqrt{9^n-3^{n+1}}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{\sqrt{9^n+3^n}+\sqrt{9^n-3^{n+1}}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}+\sqrt{1-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}}=\frac{4}{1+1}=2$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0065

답 ②

$x^2-6x+7=0$에서 $x=3\pm\sqrt{2}$

$\therefore\ \alpha=3+\sqrt{2},\ \beta=3-\sqrt{2}\ (\because\ \alpha>\beta)$

이때 $0<\beta<\alpha$이므로 $0<\dfrac{\beta}{\alpha}<1$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha^2+\beta^2\times\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}=\alpha^2$

0066

답 ①

$3x^{n+2}-4x+1$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지 a_n은

$a_n=3\times3^{n+2}-4\times3+1=3^{n+3}-11$

$3x^{n+2}-4x+1$을 $x-4$로 나누었을 때의 나머지 b_n은

$b_n=3\times4^{n+2}-4\times4+1=3\times4^{n+2}-15$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{4^{n+1}-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+3}-3\times4^{n+2}+4}{4^{n+1}-3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}-3\times4+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1-3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}$

$=-12$

유형 17 등비수열의 극한 - 수열의 합

0067

답 ④

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n-1)\times5^n-\{2(n-1)-1\}\times5^{n-1}$

$=(10n-5)\times5^{n-1}-(2n-3)\times5^{n-1}$

$=2(4n-1)\times5^{n-1}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(4n-1)\times5^{n-1}}{(2n-1)\times5^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(4n-1)}{(2n-1)\times5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-2}{10n-5}$

$=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$

0068

답 ②

$n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=4^n-2-(4^{n-1}-2)$

$=4\times4^{n-1}-4^{n-1}=3\times4^{n-1}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+S_n}{a_{n+2}+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\times4^{n-1}+4^n-2}{3\times4^{n+1}+3^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{4}+1-2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{3\times4+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$

$=\dfrac{\dfrac{7}{4}}{12}=\dfrac{7}{48}$

0069

답 $\dfrac{1}{3}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r (r는 실수)라 하면

$a_1+a_2+a_3=a_1+a_1r+a_1r^2=9$

$\therefore\ a_1(1+r+r^2)=9$ ····· ㉠

$a_4+a_5+a_6=a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=-72$

$\therefore\ a_1r^3(1+r+r^2)=-72$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-8$ $\therefore\ r=-2\ (\because\ r$는 실수)

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$a_1(1-2+4)=9,\ 3a_1=9$ $\therefore\ a_1=3$

$\therefore\ a_n=3\times(-2)^{n-1}$

$\therefore\ a_{2n+1}=3\times(-2)^{2n}=3\times4^n$

이때 $S_n=\dfrac{3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=1-(-2)^n$이므로

$S_n^{\,2}=\{1-(-2)^n\}^2=4^n-2\times(-2)^n+1$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n^{\,2}}{a_{2n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-2\times(-2)^n+1}{3\times4^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{3}=\dfrac{1}{3}$

유형 18 등비수열의 수렴 조건

0070

답 ①

등비수열 $\{(\log x)^n\}$의 공비는 $\log x$이므로

이 수열이 수렴하려면 $-1<\log x\leq1$

$\therefore\ \dfrac{1}{10}<x\leq10$ ····· ㉠

등비수열 $\left\{\left(\dfrac{x+1}{5}\right)^{n+1}\right\}$의 공비는 $\dfrac{x+1}{5}$이므로

이 수열이 수렴하려면 $-1<\dfrac{x+1}{5}\leq1$

$-5<x+1\leq5$

$\therefore\ -6<x\leq4$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $\dfrac{1}{10}<x\leq4$

따라서 구하는 자연수 x는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

이투스북

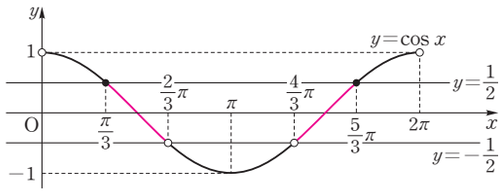
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0071

답 ④

공비가 $2\cos x$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면
$-1<2\cos x\le 1$이어야 한다.

$\therefore -\frac{1}{2}<\cos x\le\frac{1}{2}$



따라서 $\frac{\pi}{3}\le x<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x\le\frac{5}{3}\pi$이므로

$a=3$, $b=2$, $c=4$, $d=5$이다.

$\therefore a+b+c+d=3+2+4+5=14$

0072

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

등비수열 $\{r^{2n}\}$이 수렴하므로 $0\le r^2\le 1$

$\therefore -1\le r\le 1$

ㄱ. $-1\le r\le 1$에서 $-\frac{1}{2}\le\frac{r}{2}\le\frac{1}{2}$이므로 수열 $\left\{\left(\frac{r}{2}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

ㄴ. $-1\le r\le 1$에서 $1\le r+2\le 3$

$\therefore \frac{1}{3}\le\frac{r+2}{3}\le 1$

즉, 수열 $\left\{\left(\frac{r+2}{3}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

ㄷ. $-1\le r\le 1$에서 $0\le 1-r\le 2$

$\therefore 0\le\frac{1-r}{2}\le 1$

즉, 수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

ㄹ. $-1\le r\le 1$에서 $-3\le 3r\le 3$

$-4\le 3r-1\le 2$

$\therefore -1\le\frac{3r-1}{4}\le\frac{1}{2}$

이때 $\frac{3r-1}{4}=-1$, 즉 $r=-1$이면 수열 $\left\{\left(\frac{3r-1}{4}\right)^n\right\}$은 발산(진동)한다.

따라서 항상 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0073

답 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{2n}}{2^n+7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{a^2}{7}\right)^n}{\left(\frac{2}{7}\right)^n+1}$$

이므로 주어진 수열이 수렴하려면 $-1<\frac{a^2}{7}\le 1$이어야 한다.

$-7<a^2\le 7$ $\therefore -\sqrt{7}\le a\le\sqrt{7}$

따라서 주어진 수열이 수렴하도록 하는 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

0074

답 ⑤

공비가 $\frac{x^2-5x-7}{7}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-5x-7}{7}\le 1$이어야 한다.

(i) $-1<\frac{x^2-5x-7}{7}$, 즉 $x^2-5x>0$일 때

$x(x-5)>0$ $\therefore x<0$ 또는 $x>5$

(ii) $\frac{x^2-5x-7}{7}\le 1$, 즉 $x^2-5x-14\le 0$일 때

$(x+2)(x-7)\le 0$ $\therefore -2\le x\le 7$

(i), (ii)에서 $-2\le x<0$ 또는 $5<x\le 7$

따라서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는 -2, -1, 6, 7이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+6+7=10$

0075

답 ④

주어진 수열은 첫째항이 $(x+4)\left(\frac{2-x}{3}\right)^2$, 공비가 $\left(\frac{2-x}{3}\right)^2$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$(x+4)\left(\frac{2-x}{3}\right)^2=0$ 또는 $-1<\left(\frac{2-x}{3}\right)^2\le 1$

$\therefore x+4=0$ 또는 $-1<\left(\frac{2-x}{3}\right)^2\le 1$

$x+4=0$에서 $x=-4$ ····· ㉠

$-1<\left(\frac{2-x}{3}\right)^2\le 1$에서

(i) $-1<\left(\frac{2-x}{3}\right)^2$, 즉 $x^2-4x+13>0$일 때

$(x-2)^2+9>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $\left(\frac{2-x}{3}\right)^2\le 1$, 즉 $x^2-4x-5\le 0$일 때

$(x+1)(x-5)\le 0$ $\therefore -1\le x\le 5$

(i), (ii)에서 $-1\le x\le 5$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는 -4, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5의 8개이다.

유형 19 r^n을 포함한 수열의 극한

0076

답 4

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$a=\lim_{n\to\infty}\frac{2r^{2n}+3}{r^{2n}+r^{n+1}-1}=-3$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$이므로

$b=\lim_{n\to\infty}\frac{2r^{2n}+3}{r^{2n}+r^{n+1}-1}=\frac{2+3}{1+1-1}=5$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=\infty$이므로

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{2r^{2n}+3}{r^{2n}+r^{n+1}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{r^{2n}}}{1+\frac{1}{r^{n-1}}-\frac{1}{r^{2n}}}=2$$

(i)~(iii)에서 $a+b+c=-3+5+2=4$

0077

답 -3

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{n+2}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-r^n+4}{r^n+1}=4\neq 2$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{n+2}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-r^n+4}{r^n+1}=\frac{1-1+4}{1+1}=2$$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-r^n+4}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^2-1+\frac{4}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=r^2-1$$

즉, $r^2-1=2$이므로 $r^2=3$ $\therefore r=\pm\sqrt{3}$

(i)~(iii)에서 구하는 모든 실수 r의 값의 곱은

$1\times\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})=-3$

0078

답 ①

(i) $|r|<6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{6}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6^n-r^n}{6^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{r}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{r}{6}\right)^n}=1$$

(ii) $r=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{6^n-r^n}{6^n+r^n}=0$

(iii) $|r|>6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6^n-r^n}{6^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{6}{r}\right)^n+1}=-1$$

(i)~(iii)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{6^n-r^n}{6^n+r^n}=1$을 만족시키는 r의 값의 범위는

$|r|<6$이므로 구하는 정수 r는 -5, -4, -3, …, 4, 5의 11개이다.

0079

답 4

(i) $0<\frac{m}{4}<1$, 즉 $0<m<4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{4}\right)^{n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{m}{4}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{m}{4}\right)^n+1}=4$$

(ii) $\frac{m}{4}=1$, 즉 $m=4$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{m}{4}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{m}{4}\right)^n+1}=\frac{2+4}{1+1}=3\neq 4$$

(iii) $\frac{m}{4}>1$, 즉 $m>4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{4}\right)^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{m}{4}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{m}{4}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{m}{4}+\frac{4}{\left(\frac{m}{4}\right)^n}}{1+\frac{1}{\left(\frac{m}{4}\right)^n}}=\frac{m}{2}$$

$\frac{m}{2}=4$에서 $m=8$

(i)~(iii)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{m}{4}\right)^{n+1}+4}{\left(\frac{m}{4}\right)^n+1}=4$가 되도록 하는 자연수 m은

1, 2, 3, 8의 4개이다.

유형 20 x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수

0080

답 14

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+5x^{2n}+2}{x^{2n}+1}=2$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+5x^{2n}+2}{x^{2n}+1}=\frac{1+5+2}{1+1}=4$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+5x^{2n}+2}{x^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+5+\frac{2}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x+5$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty} x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+5x^{2n}+2}{x^{2n}+1}=\frac{-1+5+2}{1+1}=3$$

(i)~(iv)에서

$$f(x)=\begin{cases}2 & (|x|<1)\\ 4 & (x=1)\\ x+5 & (|x|>1)\\ 3 & (x=-1)\end{cases}$$

$\therefore f(-1)+f(1)+(f\circ f)\left(\frac{1}{3}\right)=f(-1)+f(1)+f(2)$

$=3+4+(2+5)=14$

0081

답 ⑤

(i) $-\frac{1}{2}\le x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=\lim_{n\to\infty} x^{n+2}=0$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+x+1}{x^n+1}=x+1$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=\lim_{n\to\infty} x^{n+2}=1$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+x+1}{x^n+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

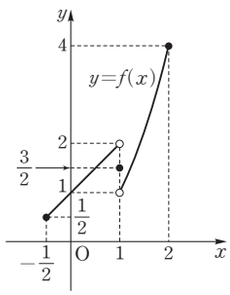
이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

(iii) $1<x\le 2$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=\infty$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+x+1}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=x^2$$

(i)~(iii)에서 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\left\{y\middle|\frac{1}{2}\le y\le 4\right\}$



0082

답 205

(i) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=\lim_{n\to\infty} x^{n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-3}{x^n+1}=-3$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=\lim_{n\to\infty} x^{n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-3}{x^n+1}=\frac{1-3}{1+1}=-1$$

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-3}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{3}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=x$$

(i)~(iii)에서

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$

$=-3+(-1)+2+3+4+\cdots+20$

$=-4+\frac{19\times(2+20)}{2}=205$

유형 21 수열의 극한의 활용 - 그래프

0083

답 9

직선 $y=3nx$와 직선 P_nQ_n이 서로 수직이므로 직선 P_nQ_n의 기울기를 m이라 하면

$3n\times m=-1$ $\therefore m=-\frac{1}{3n}$

즉, 직선 P_nQ_n은 기울기가 $-\frac{1}{3n}$이고 점 $P_n(n, 3n^2)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{3n}(x-n)+3n^2$ ····· ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면 $0=-\frac{1}{3n}(x-n)+3n^2$

$x-n=9n^3$ $\therefore x=9n^3+n$

따라서 점 Q_n의 좌표는 $(9n^3+n, 0)$이므로

$l_n=\overline{OQ_n}=9n^3+n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^3+n}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}=9$

0084

답 2

원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은 $y=a_nx$, 즉 $a_nx-y=0$이다.

원 C_n이 y축에 접하고 중심의 좌표가 (n, n^2)이므로 원 C_n의 반지름의 길이는 n이다.

이때 원 C_n이 직선 $a_nx-y=0$에 접하므로 점 $P_n(n, n^2)$과 직선 $a_nx-y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\frac{|a_nn-n^2|}{\sqrt{a_n^2+1}}=n$이므로

$\frac{|a_n-n|}{\sqrt{a_n^2+1}}=1$, $|a_n-n|=\sqrt{a_n^2+1}$

$a_n^2-2na_n+n^2=a_n^2+1$

$2na_n=n^2-1$ $\therefore a_n=\frac{n^2-1}{2n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4a_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=2$

Bible Says 점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

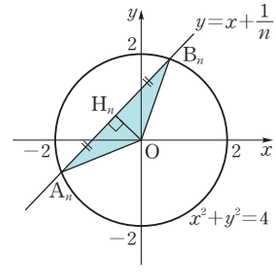
0085

답 $\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 현 A_nB_n에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면

$\overline{A_nH_n}=\overline{B_nH_n}$ ····· ㉠

선분 OH_n의 길이는 원점에서 직선 $y=x+\frac{1}{n}$, 즉 $x-y+\frac{1}{n}=0$까지의 거리와 같으므로



$\overline{OH_n}=\frac{\left|\frac{1}{n}\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n}}$

직각삼각형 A_nOH_n에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{A_nH_n}=\sqrt{\overline{OA_n}^2-\overline{OH_n}^2}=\sqrt{4-\frac{1}{2n^2}}$

$\overline{A_nB_n}=2\overline{A_nH_n}=2\sqrt{4-\frac{1}{2n^2}}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore S_n=\frac{1}{2}\times\overline{A_nB_n}\times\overline{OH_n}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{4-\frac{1}{2n^2}}\times\frac{1}{\sqrt{2n}}$

$=\frac{1}{n}\sqrt{2-\frac{1}{4n^2}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} nS_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{4n^2}}=\sqrt{2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0086

답 18

두 점 P_n, Q_n은 직선 $y=\frac{1}{n}x+3$ 위의 점이므로 두 점 P_n, Q_n의 x좌표를 각각 α_n, β_n이라 하면

$P_n\left(\alpha_n, \frac{\alpha_n}{n}+3\right)$, $Q_n\left(\beta_n, \frac{\beta_n}{n}+3\right)$

이때 α_n, β_n은 방정식 $x^2-\left(3+\frac{2}{n}\right)x+\frac{5}{n}=\frac{1}{n}x+3$, 즉

$x^2-\left(3+\frac{3}{n}\right)x+\frac{5}{n}-3=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=3+\frac{3}{n}$ ····· ㉠

삼각형 OP_nQ_n의 무게중심의 y좌표 a_n은

$a_n=\frac{1}{3}\left\{0+\left(\frac{\alpha_n}{n}+3\right)+\left(\frac{\beta_n}{n}+3\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{n}+6\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3+\frac{3}{n}}{n}+6\right)$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+6\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+2$

$\therefore 9\lim_{n\to\infty} a_n=9\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+2\right)=9\times 2=18$

0087

답 $\frac{1}{5}$

$\log_3 x=n$에서 $x=3^n$이므로

$A_n(3^n, n)$

$\log_5 x-1=n$에서 $x=5^{n+1}$이므로

$B_n(5^{n+1}, n)$

$\therefore \overline{A_nB_n}=5^{n+1}-3^n$

따라서 $a_n=\frac{1}{2}\times\overline{A_nB_n}\times n=\frac{1}{2}n(5^{n+1}-3^n)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(5^{n+1}-3^n)}{\frac{1}{2}(n+1)(5^{n+2}-3^{n+1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-3^n}{5^{n+2}-3^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\times\lim_{n\to\infty}\frac{5-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{25-3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n}=1\times\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$

0088

답 ①

$y=2x^2$에서 $y'=4x$이므로 직선과 곡선의 접점의 좌표를 $(a, 2a^2)$이라 하면 직선의 기울기는 $4a$이다.

이때 $4a=n$에서 $a=\frac{n}{4}$

즉, 기울기가 n일 때 접점의 좌표가 $\left(\frac{n}{4}, \frac{n^2}{8}\right)$이므로 직선의 방정식은

$y=n\left(x-\frac{n}{4}\right)+\frac{n^2}{8}$ $\therefore y=nx-\frac{n^2}{8}$

$P_n\left(\frac{n}{8}, 0\right)$, $Q_n\left(0, -\frac{n^2}{8}\right)$이므로

$l_n=\overline{P_nQ_n}=\sqrt{\frac{n^2}{64}+\frac{n^4}{64}}=\frac{n\sqrt{n^2+1}}{8}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(l_n-\frac{n^2}{8}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n^2+1}-n^2}{8}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2+1)-n^4}{8(n\sqrt{n^2+1}+n^2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{8(\sqrt{n^2+1}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}=\frac{1}{8(1+1)}=\frac{1}{16}$$

유형 22 수열의 극한의 활용 - 도형

0089

답 3

$a_1=1+3$, $a_2=1+3+5$, $a_3=1+3+5+7$, …에서

$a_n=1+3+5+7+\cdots+(2n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)$

$=2\times\frac{(n+1)(n+2)}{2}-(n+1)=n^2+2n+1$

$b_1=2\times(1\times 2)$, $b_2=2\times(2\times 3)$, $b_3=2\times(3\times 4)$, …에서

$b_n=2\times n\times(n+1)=2n^2+2n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1+2n^2+2n}{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1}=3$$

0090

답 4

직사각형 OC_nB_nA의 가로의 길이가 n이므로

$\overline{OC_n}=n$

직각삼각형 OC_nA에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC_n}=\sqrt{24^2+n^2}$

대각선 AC_n과 선분 B_1C_1의 교점이 D_n이고

$\triangle AB_1D_n\backsim\triangle AB_nC_n$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB_1}:\overline{AB_n}=\overline{B_1D_n}:\overline{B_nC_n}$

$1:n=\overline{B_1D_n}:24$ $\therefore \overline{B_1D_n}=\frac{24}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{3\overline{B_1D_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{24^2+n^2}-n}{3\times\frac{24}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{24^2+n^2}-n)(\sqrt{24^2+n^2}+n)}{3\times\frac{24}{n}(\sqrt{24^2+n^2}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{24^2}{3\times\frac{24}{n}(\sqrt{24^2+n^2}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{\sqrt{24^2+n^2}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{\sqrt{\frac{24^2}{n^2}+1}+1}=\frac{8}{1+1}=4$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0091

답 16

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3a_n}{b_n+2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(n^2+3)a_n\times\dfrac{n}{b_n+2}\times\dfrac{2n^2}{n^2+3}\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\{(n^2+3)a_n\}\times\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{b_n+2}\times\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2+3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\{(n^2+3)a_n\}\times\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{b_n+2}{n}}\times\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{n^2}}$

$=2\times4\times2=16$

짝기출

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=5$

를 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}na_n(b_n+2n)$의 값을 구하시오.

답 21

0092

답 ⑤

수열 $\left\{(x^2-4x-5)\left(\dfrac{x^2+2x}{15}\right)^n\right\}$은

첫째항이 $(x^2-4x-5)\dfrac{x^2+2x}{15}$이고, 공비가 $\dfrac{x^2+2x}{15}$이므로

이 등비수열이 수렴하려면

$(x^2-4x-5)\dfrac{x^2+2x}{15}=0$ 또는 $-1<\dfrac{x^2+2x}{15}\le1$

$\therefore x^2-4x-5=0$ 또는 $-1<\dfrac{x^2+2x}{15}\le1$

$x^2-4x-5=0$에서 $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$ ····· ㉠

$-1<\dfrac{x^2+2x}{15}\le1$에서

(i) $-1<\dfrac{x^2+2x}{15}$, 즉 $x^2+2x+15>0$일 때

$(x+1)^2+14>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $\dfrac{x^2+2x}{15}\le1$, 즉 $x^2+2x-15\le0$일 때

$(x+5)(x-3)\le0$ $\therefore -5\le x\le3$

(i), (ii)에서 $-5\le x\le3$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는 -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5의 10개이다.

짝기출

수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_n=\left(\dfrac{x^2-4x}{5}\right)^n$

일 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

답 ①

0093

답 ③

이차방정식 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$의 두 근이 -1, b_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+b_n=-\dfrac{2a_{n+1}}{a_n}$

$\therefore b_n=1-\dfrac{2a_{n+1}}{a_n}$ ····· ㉠

$-1\times b_n=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$

$\therefore b_n=-\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$1-\dfrac{2a_{n+1}}{a_n}=-\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$, $a_n-2a_{n+1}=-a_{n+2}$

$\therefore a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 ㉡에서

$b_n=-\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=-\dfrac{a+(n+1)d}{a+(n-1)d}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{-\dfrac{a+(n+1)d}{a+(n-1)d}\right\}=-\dfrac{d}{d}=-1$

0094

답 ③

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=3$이므로

$a_{n+1}=a_n+3$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

수열 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{b_k}=n^2$이므로

$\dfrac{1}{b_n}=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-(n-1)^2=2n-1$ $(n\ge2)$

이때 $\dfrac{1}{b_1}=S_1=1$이므로

$\dfrac{1}{b_n}=2n-1$ $(n\ge1)$

$\therefore b_n=\dfrac{1}{2n-1}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(3n-2)\times\dfrac{1}{2n-1}\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{2n-1}$

$=\dfrac{3}{2}$

0095

답 240

$b\le0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+5n+1}-bn)=\infty$이므로

$b>0$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+5n+1}-bn)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{an^2+5n+1}-bn)(\sqrt{an^2+5n+1}+bn)}{\sqrt{an^2+5n+1}+bn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+5n+1-b^2n^2}{\sqrt{an^2+5n+1}+bn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+5n+1}{\sqrt{an^2+5n+1}+bn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+5+\frac{1}{n}}{\sqrt{a+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+b}$$

위 식의 극한값이 $\frac{1}{6}$이므로

$a-b^2=0,\ \frac{5}{\sqrt{a}+b}=\frac{1}{6}$

두 식을 연립하여 풀면

$\frac{5}{\sqrt{b^2}+b}=\frac{5}{|b|+b}=\frac{5}{2b}=\frac{1}{6}\ (\because b>0)$

$\therefore b=15$

따라서 $a=b^2=225$, $b=15$이므로

$a+b=225+15=240$

짝기출

양수 a와 실수 b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+4n}-bn)=\frac{1}{5}$$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

답 110

0096

답 ①

$a_n^2<4na_n+n-4n^2$의 양변을 n^2으로 나누면

$\frac{a_n^2}{n^2}<\frac{4na_n+n-4n^2}{n^2}$

$\frac{a_n^2}{n^2}-\frac{4a_n}{n}+4<\frac{1}{n}$

$\left(\frac{a_n}{n}-2\right)^2<\frac{1}{n}$

$-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{a_n}{n}-2<\frac{1}{\sqrt{n}}$

$2-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{a_n}{n}<2+\frac{1}{\sqrt{n}}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}+3}{2+\frac{4}{n}}$$
$$=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$$

0097

답 5

(i) $\left|\frac{x}{3}\right|<1$, 즉 $|x|<3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}+2}=-\frac{1}{2}$$

즉, $f(k)=-\frac{1}{2}$을 만족시키는 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

(ii) $\frac{x}{3}=1$, 즉 $x=3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}+2}$$
$$=\frac{2\times1-1}{1+2}=\frac{1}{3}\neq-\frac{1}{2}$$

(iii) $\left|\frac{x}{3}\right|>1$, 즉 $|x|>3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{x}{3}-\left(\frac{3}{x}\right)^{2n}}{1+2\times\left(\frac{3}{x}\right)^{2n}}$$
$$=\frac{2}{3}x$$

$\frac{2}{3}x=-\frac{1}{2}$에서 $x=-\frac{3}{4}$

그런데 $x=-\frac{3}{4}$은 $|x|>3$인 범위에 속하지 않는다.

(iv) $\frac{x}{3}=-1$, 즉 $x=-3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}+2}$$
$$=\frac{2\times(-1)-1}{1+2}=-1\neq-\frac{1}{2}$$

(i)~(iv)에서 $f(k)=-\frac{1}{2}$을 만족시키는 정수 k는 5개이다.

짝기출

함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}$$

에 대하여 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

답 ④

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0098

답 -160

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
조건 (가)에서 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=2^9$이므로
$a\times ar\times ar^2\times\cdots\times ar^8=a^9r^{36}=(ar^4)^9=2^9$
$\therefore ar^4=2$ ····· ㉠
두 조건 (가), (나)의 두 식을 변끼리 곱하면
$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{19}=2^9\times 2^{105}=2^{114}$이므로
$a\times ar\times ar^2\times\cdots\times ar^{18}=a^{19}r^{171}=(ar^9)^{19}=(2^6)^{19}$
$\therefore ar^9=2^6$ ····· ㉡
㉡÷㉠을 하면 $r^5=2^5$ $\therefore r=2$
㉠에 $r=2$를 대입하면
$16a=2$ $\therefore a=\frac{1}{8}$

$\therefore a_n=ar^{n-1}=\frac{1}{8}\times 2^{n-1}=2^{n-4}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}+3^n a_n}{3^{n+1}-5^n a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}+3^n\times 2^{n-4}}{3^{n+1}-5^n\times 2^{n-4}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}+2^{-4}\times 6^n}{3^{n+1}-2^{-4}\times 10^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{1}{16}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n}{3\times\left(\frac{3}{10}\right)^n-\frac{1}{16}}$$
$$=\frac{10}{-\frac{1}{16}}=-160$$

짝기출

첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-7}{a_n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

답 ③

0099

답 16

점 P_n은 직선 $x=4^n$과 곡선 $y=\sqrt{x}$의 교점이므로
$P_n(4^n,\ 2^n)$
또한 점 P_{n+1}은 직선 $x=4^{n+1}$과 곡선 $y=\sqrt{x}$의 교점이므로
$P_{n+1}(4^{n+1},\ 2^{n+1})$
L_n은 두 점 P_n, P_{n+1} 사이의 거리이므로
$L_n=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}$
$=\sqrt{(3\times 4^n)^2+(2^n)^2}$
$=\sqrt{9\times 16^n+4^n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\times 16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\times 16^n+4^n}}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times 16^{n+1}+4^{n+1}}{9\times 16^n+4^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times 16+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$
$$=\frac{9\times 16}{9}=16$$

0100

답 ⑤

(i) $|x|<1$, 즉 $-1<x<1$일 때
$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax^2+bx-2}{x^{2n}+1}$$
$$=ax^2+bx-2$$
(ii) $x=1$일 때
$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax^2+bx-2}{x^{2n}+1}=\frac{1+a+b-2}{1+1}$$
$$=\frac{a+b-1}{2}$$
(iii) $|x|>1$, 즉 $x<-1$ 또는 $x>1$일 때
$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax^2+bx-2}{x^{2n}+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{a}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}-\frac{2}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x$$
(iv) $x=-1$일 때
$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax^2+bx-2}{x^{2n}+1}=\frac{-1+a-b-2}{1+1}$$
$$=\frac{a-b-3}{2}$$
(i)~(iv)에서
$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx-2 & (|x|<1)\\ \frac{a+b-1}{2} & (x=1)\\ x & (|x|>1)\\ \frac{a-b-3}{2} & (x=-1)\end{cases}$$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서도 연속이어야 한다.
ⓐ $\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)=f(-1)$에서
$$-1=a-b-2=\frac{a-b-3}{2}$$
$\therefore a-b=1$ ····· ㉢
ⓑ $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$에서
$$a+b-2=1=\frac{a+b-1}{2}$$
$\therefore a+b=3$ ····· ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$
$\therefore ab=2\times 1=2$

0101

답 $\frac{12}{5}$

조건 (가)에서
$a_1+a_2+a_3=1+3+4=8$
조건 (나)에서

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$a_4=3a_1$, $a_5=3a_2$, $a_6=3a_3$이므로

$a_4+a_5+a_6=3(a_1+a_2+a_3)=3\times 8$

또한 $a_7=3a_4=3^2a_1$, $a_8=3a_5=3^2a_2$, $a_9=3a_6=3^2a_3$

이므로

$a_7+a_8+a_9=3^2(a_1+a_2+a_3)=3^2\times 8$

$\vdots$

$\therefore a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=3^{n-1}(a_1+a_2+a_3)$

$=3^{n-1}\times 8\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore T_n=\sum_{k=1}^{3n}a_k$

$=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)$

$+\cdots+(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$

$=8+3\times 8+3^2\times 8+\cdots+3^{n-1}\times 8$

$=\frac{8(3^n-1)}{3-1}=4\times 3^n-4$

이때 조건 ㈎에서 $a_1+a_3=1+4=5$

조건 ㈏에서

$a_4+a_6=3(a_1+a_3)=3\times 5$

$a_7+a_9=3(a_4+a_6)=3^2(a_1+a_3)=3^2\times 5$

$\vdots$

$\therefore a_{3n-2}+a_{3n}=3^{n-1}\times 5$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{a_{3n-2}+a_{3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^n-4}{3^{n-1}\times 5}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{12}{5}-\frac{4}{5}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{12}{5}$

짝기출

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=a_1a_n$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=12$일 때, a_1의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

답 ④

0102

답 ①

㈎에서 $A_1(0, 0)$이고,

㈏에서 n이 홀수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점이므로 $A_2(0+a, 0)$, 즉 $A_2(a, 0)$

㈐에서 n이 짝수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 y축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동한 점이므로 $A_3(a, 0+a+1)$, 즉 $A_3(a, a+1)$

㈏에 의하여 점 A_4의 좌표는 $(2a, a+1)$,

㈐에 의하여 점 A_5의 좌표는 $(2a, 2(a+1))$,

㈏에 의하여 점 A_6의 좌표는 $(3a, 2(a+1))$,

㈐에 의하여 점 A_7의 좌표는 $(3a, 3(a+1))$

$\vdots$

자연수 n에 대하여 점 A_{2n}의 좌표는 $(na, (n-1)(a+1))$

$\overline{A_1A_{2n}}=\sqrt{a^2n^2+(n-1)^2(a+1)^2}$

$=\sqrt{(2a^2+2a+1)n^2-(2a^2+4a+2)n+a^2+2a+1}$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_1A_{2n}}}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(2a^2+2a+1)n^2-(2a^2+4a+2)n+a^2+2a+1}}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2a^2+2a+1-\frac{2a^2+4a+2}{n}+\frac{a^2+2a+1}{n^2}}$

$=\sqrt{2a^2+2a+1}$

따라서 $\sqrt{2a^2+2a+1}=\frac{\sqrt{34}}{2}$이므로

$\sqrt{2a^2+2a+1}=\sqrt{\frac{17}{2}}$

$4a^2+4a+2=17$

$4a^2+4a-15=0$

$(2a+5)(2a-3)=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}\ (\because a>0)$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A

02 급수

유형 01 급수의 합

0103 답 ②

$S_n=\dfrac{6n^2+5n-4}{3n^2+2n}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n-4}{3n^2+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\dfrac{5}{n}-\dfrac{4}{n^2}}{3+\dfrac{2}{n}}=\frac{6}{3}=2$$

0104 답 3

$S_n=\dfrac{3n^2-4}{(n-1)(n+2)}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4}{(n-1)(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{n^2}}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}=\frac{3}{1}=3$$

0105 답 4

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

$1+2+3+\cdots+2n=\dfrac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$

이므로

$$S_n=\frac{1+2+3+\cdots+2n}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{n(2n+1)}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\frac{2(2n+1)}{n+1}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{1+\dfrac{1}{n}}=\frac{4}{1}=4$$

유형 02 부분분수를 이용하는 급수

0106 답 9

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{12}{k(k+2)}=6\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=6\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=6\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}6\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=6\times\frac{3}{2}=9$$

0107 답 ②

주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{2+4+6+\cdots+2n}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$$

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

0108 답 ③

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)}=4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=4\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=4$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n'이라 하면

$b_n=\frac{4}{(n+2)(n+3)}$이므로

$$S_n'=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(k+2)(k+3)}=4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=4\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} S_n'$$
$$=\lim_{n\to\infty} 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}=\frac{4}{\frac{4}{3}}=3$$

참고

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}\neq\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\neq 0\right)$임에 주의한다.

급수의 성질과 진위 판단은 유형 07, 유형 08에서 자세히 살펴보도록 한다.

0109

답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_2=5$, $a_5=11$이므로 $a_5=a_2+3d$에서

$11=5+3d$, $3d=6$

$\therefore d=2$

$a_1=a_2-d=5-2=3$이므로

$$S_n=\frac{n\{2\times 3+(n-1)\times 2\}}{2}=n^2+2n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

참고

공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}$이다.

유형 03 로그를 포함한 급수

0110

답 $-\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log_4\left(1-\frac{1}{a_n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\log_4\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log_4\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log_4\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\log_4\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_4\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log_4\left(\frac{k}{k+1}\times\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\log_4\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log_4\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\log_4\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log_4\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_4\left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\times\cdots\times\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\log_4\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\log_4\left(1-\frac{1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_4\frac{n+2}{2(n+1)}\right\}$$
$$=\log_4\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Bible Says 로그의 성질

$a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

0111

답 ③

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_5 a_k$$
$$=\log_5 a_1+\log_5 a_2+\log_5 a_3+\cdots+\log_5 a_n$$
$$=\log_5 a_1a_2a_3\cdots a_n$$
$$=\log_5\frac{pn-2}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_5 a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\log_5\frac{pn-2}{n+1}=\log_5 p$$

따라서 $\log_5 p=2$이므로 $p=5^2=25$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0112

답 ④

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{\log_{2k}\sqrt{2}-\log_{2(k+1)}\sqrt{2}\}$$
$$=(\log_2\sqrt{2}-\log_4\sqrt{2})+(\log_4\sqrt{2}-\log_6\sqrt{2})$$
$$+\cdots+\{\log_{2n}\sqrt{2}-\log_{2(n+1)}\sqrt{2}\}$$
$$=\log_2\sqrt{2}-\log_{2(n+1)}\sqrt{2}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2(n+1)}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\{\log_{2n}\sqrt{2}-\log_{2(n+1)}\sqrt{2}\}=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2(n+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}$$

다른 풀이

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2k}-\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2(k+1)}\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2}-\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}4}\right)+\left(\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}4}-\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}6}\right)$$
$$+\cdots+\left\{\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2n}-\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2(n+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2}-\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2(n+1)}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\{\log_{2n}\sqrt{2}-\log_{2(n+1)}\sqrt{2}\}=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2}-\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2(n+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}2}=\log_2\sqrt{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

참고

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때, $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$이다.

유형 04 항의 부호가 교대로 바뀌는 급수

0113

답 0

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=0$, $S_3=\frac{1}{3}$, $S_4=0$, $S_5=\frac{1}{4}$, …이므로

$S_{2n-1}=\dfrac{1}{n+1}$, $S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$이므로 주어진 급수의 합은 0이다.

0114

답 ④

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

① $S_1=2$, $S_2=0$, $S_3=2$, $S_4=0$, …이므로

$S_{2n-1}=2$, $S_{2n}=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=2$, $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

② $S_{2n-1}=(1^2-3^2)+(5^2-7^2)+(9^2-11^2)$
$$+\cdots+\{(4n-7)^2-(4n-5)^2\}+(4n-3)^2$$
$$=-2(1+3)-2(5+7)-2(9+11)$$
$$-\cdots-2\{(4n-7)+(4n-5)\}+(4n-3)^2$$
$$=-2\times\{1+3+5+\cdots+(4n-5)\}+(4n-3)^2$$
$$=-2\times\frac{(2n-2)\{1+(4n-5)\}}{2}+(4n-3)^2$$
$$=8n^2-8n+1$$

이고 $\lim_{n\to\infty}(8n^2-8n+1)=\infty$이므로 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 발산한다.

즉, 주어진 급수는 발산한다.

③ $S_{2n-1}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)$
$$+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n-1}{n}\right)+\frac{n}{n+1}$$
$$=\frac{n}{n+1}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$

$S_{2n}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n}{n+1}\right)$
$=0$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

④ S_{2n-1}
$$=\left(-\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)+\left(-\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)+\left(-\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)$$
$$+\cdots+\left(-\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}+\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)-\sin\frac{\pi}{2^n}$$
$$=-\sin\frac{\pi}{2^n}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(-\sin\dfrac{\pi}{2^n}\right)=-\sin0=0$

S_{2n}
$$=\left(-\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)+\left(-\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)+\left(-\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)$$
$$+\cdots+\left(-\sin\frac{\pi}{2^n}+\sin\frac{\pi}{2^n}\right)$$
$$=0$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$이므로 주어진 급수는 수렴한다.

⑤ S_{2n-1}
$$=(2-4)+(6-8)+(10-12)$$
$$+\cdots+\{(4n-6)-(4n-4)\}+(4n-2)$$
$$=-2(n-1)+(4n-2)=2n$$

이고 $\lim_{n\to\infty}2n=\infty$이므로 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 발산한다.

즉, 주어진 급수는 발산한다.

따라서 수렴하는 급수는 ④이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0115

답 ④

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=a_1$, $S_2=a_1-a_2$, $S_3=a_1$, $S_4=a_1-a_3$, …이므로

$S_{2n-1}=a_1$, $S_{2n}=a_1-a_{n+1}$

이때 주어진 급수가 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이어야 하므로

$\lim_{n\to\infty}a_1=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})$에서 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0$이어야 한다.

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이어야 한다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3n^2+n}=0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2})$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n^2+n)-2n^2}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\neq0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\log\dfrac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}=\log 1=0$

따라서 주어진 급수가 수렴하도록 하는 수열은 ㄱ, ㄷ이다.

유형 05 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

0116

답 10

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-k)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(2a_n-k)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{2}(2a_n-k)+\dfrac{k}{2}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(2a_n-k)+\lim_{n\to\infty}\dfrac{k}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\times0+\dfrac{k}{2}=\dfrac{k}{2}$

따라서 $\dfrac{k}{2}=5$이므로 $k=10$

Bible Says 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-k)$가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-k)=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=k$이다.

0117

답 ④

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-4n^2+3}{2a_n-n^2-5n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_n}{n^2}-4+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{2a_n}{n^2}-1-\dfrac{5}{n}}$

$=\dfrac{0-4+0}{0-1-0}=4$

0118

답 10

$\lim_{n\to\infty}S_n$, 즉 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(2S_n+3a_n)=2\lim_{n\to\infty}S_n+3\lim_{n\to\infty}a_n$

$=2\times5+3\times0=10$

0119

답 ③

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0$

또한 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=25$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_n=25$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}+15a_{2n}}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+5a_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_{2n}+14a_{2n}}{S_n+4a_n}$

$=\dfrac{25+14\times0}{25+4\times0}=1$

0120

답 3

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+2)=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=-2$이므로

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+7)=2\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}7=2\times(-2)+7=3$

0121

답 14

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2a_n-b_n}{a_n+b_n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-b_n}{a_n+b_n}=0$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-b_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{3b_n}{a_n+b_n}\right)=0$에서 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n+b_n}=\dfrac{2}{3}$

또한 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}+1\right)=\dfrac{3}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=2$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=7$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\times a_n\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}\times\lim_{n\to\infty}a_n$

$=2\times7=14$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 06 급수의 수렴과 발산

0122

답 ③

① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n-2}=\dfrac{1}{3}\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

② $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

이므로 주어진 급수가 수렴하는지 파악하려면 이 급수의 부분합을 살펴야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

③ 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=\log\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\log\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\log 1=0$

이므로 주어진 급수가 수렴하는지 파악하려면 이 급수의 부분합을 살펴야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\log\dfrac{1\times 3}{2^2}+\log\dfrac{2\times 4}{3^2}+\log\dfrac{3\times 5}{4^2}+\cdots+\log\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

$=\log\left\{\dfrac{1\times 3}{2^2}\times\dfrac{2\times 4}{3^2}\times\dfrac{3\times 5}{4^2}\times\cdots\times\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right\}$

$=\log\dfrac{n+2}{2(n+1)}$

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\log\dfrac{n+2}{2(n+1)}=\log\dfrac{1}{2}=-\log 2$

이므로 주어진 급수는 수렴한다.

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\{\log(n+1)-\log n\}=\lim\limits_{n\to\infty}\log\dfrac{n+1}{n}=\log 1=0$

이므로 주어진 급수가 수렴하는지 파악하려면 이 급수의 부분합을 살펴야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\log\dfrac{k+1}{k}$

$=\log\dfrac{2}{1}+\log\dfrac{3}{2}+\log\dfrac{4}{3}+\cdots+\log\dfrac{n+1}{n}$

$=\log\left(\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\cdots\times\dfrac{n+1}{n}\right)$

$=\log(n+1)$

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

⑤ 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=(-1)^{n-1}\times n$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 발산하므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 주어진 급수 중 수렴하는 것은 ③이다.

0123

답 ②

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2}{2n^2+n}=\dfrac{3}{2}\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}=0$이므로 주어진 급수가 수렴하는지 파악하려면 이 급수의 부분합을 살펴야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+2)(k+3)}$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+2}-\dfrac{1}{k+3}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+3}$

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+3}\right)=\dfrac{1}{3}$이므로 주어진 급수는 수렴한다.

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n}}=0$이므로 주어진 급수가 수렴하는지 파악하려면 이 급수의 부분합을 살펴야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})$

$=(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})$

$+\cdots+(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})$

$=\sqrt{2n+2}-\sqrt{2}$

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2})=\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄹ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\dfrac{1}{2}\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 수렴하는 급수의 개수는 1이다.

0124

답 ⑤

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-7)\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\log\dfrac{n-1}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log\dfrac{n}{n+2}$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}\log\dfrac{n}{n+2}=\log 1=0$이므로 주어진 급수가 수렴하는지 파악하려면 이 급수의 부분합을 살펴야 한다.

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\log\dfrac{k}{k+2}$

$=\log\dfrac{1}{3}+\log\dfrac{2}{4}+\log\dfrac{3}{5}+\cdots+\log\dfrac{n-1}{n+1}+\log\dfrac{n}{n+2}$

$=\log\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{3}{5}\times\cdots\times\dfrac{n-1}{n+1}\times\dfrac{n}{n+2}\right)$

$=\log\dfrac{1\times 2}{(n+1)(n+2)}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

즉, $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \log \frac{2}{(n+1)(n+2)}=-\infty$이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 발산하는 급수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유형 07 급수의 성질

0125

답 25

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=9$에서

$2\alpha+3\beta=9$ ····· ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+9b_n)=4\sum_{n=1}^{\infty}a_n+9\sum_{n=1}^{\infty}b_n=20$에서

$4\alpha+9\beta=20$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=\frac{7}{2}$, $\beta=\frac{2}{3}$

$\therefore 6(\alpha+\beta)=6\times\left(\frac{7}{2}+\frac{2}{3}\right)=25$

0126

답 ①

$\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+2b_n)=22$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}4a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(4a_n+2b_n)-2b_n\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+2b_n)-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=22-2\times5=12$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}4a_n=\frac{1}{4}\times12=3$

0127

답 10

$a_n-\frac{4}{n(n+2)}=b_n$으로 놓으면

$a_n=b_n+\frac{4}{n(n+2)}$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=7$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+2)}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+2)}$

$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=2\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=3$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n+\frac{4}{n(n+2)}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+2)}=7+3=10$

0128

답 14

$S_n=\frac{3n}{2n+1}$에서

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}=\frac{3}{2}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$

이때 $S_n=\frac{3n}{2n+1}$의 양변에 $n=2$를 대입하면

$a_1+a_2=S_2=\frac{6}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+2}=\sum_{n=3}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-(a_1+a_2)=\frac{3}{2}-\frac{6}{5}=\frac{3}{10}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$

따라서 $p=5$, $q=9$이므로

$p+q=5+9=14$

유형 08 급수의 성질의 진위 판단

0129

답 ②

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면 ㄱ에 의하여

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}a_n$

$=0-\alpha=-\alpha$

즉, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다. (참)

ㄷ. [반례] $a_n=0$, $b_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$,

$\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

이므로 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0130

답 ④

① [반례] $a_n=b_n=1$

이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$이지만

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=1+1=2\neq0$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 발산한다. (거짓)

② [반례] $a_n=\begin{cases}0 & (n\text{은 홀수})\\ n & (n\text{은 짝수})\end{cases}$, $b_n=\begin{cases}n & (n\text{은 홀수})\\ 0 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 모두 발산한다.

(거짓)

③ [반례] $a_n=0$, $b_n=n$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty\neq0$이다.

(거짓)

④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n{}^2=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n{}^2}=0$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다. (참)

⑤ [반례] $a_n=0$, $b_n=n$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ④이다.

0131

답 ②

ㄱ. [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n-1}$

이면 $a_n+b_n=0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴하지만 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산한다. (거짓)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2-4a_nb_n+4b_n{}^2)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2-4\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n+4\sum_{n=1}^{\infty}b_n{}^2$

$=\alpha-4\beta+4\beta=\alpha$ (참)

ㄷ. [반례] $a_n=n$, $b_n=0$

이면 수열 $\{b_n\}$과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 모두 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$이므로 수열 $\{a_n\}$은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

유형 09 급수의 활용

0132

답 ①

$3x-4y+1=0$에서 $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$

y좌표가 자연수이려면 x좌표가 4로 나누었을 때의 나머지가 1인 자연수이어야 한다.

$x=4(n-1)+1=4n-3$ (n은 자연수)로 놓으면 $y=3n-2$이므로

$a_n=4n-3$, $b_n=3n-2$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a_n+3)(b_n+5)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{12n(n+1)}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{12k(k+1)}$

$=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{12}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a_n+3)(b_n+5)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{12}$

0133

답 ④

점 A_n의 좌표는 $(n, \sqrt{n})$이므로

$\overline{A_nA_{4n}}^2=(4n-n)^2+(2\sqrt{n}-\sqrt{n})^2$

$=9n^2+n$

이때

$\frac{1}{\overline{A_nA_{4n}}^2+8n}=\frac{1}{9n^2+n+8n}=\frac{1}{9(n^2+n)}=\frac{1}{9n(n+1)}$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{A_nA_{4n}}^2+8n}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\overline{A_kA_{4k}}^2+8k}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9k(k+1)}$

$=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{9}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{A_nA_{4n}}^2+8n}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{9}$

0134

답 ③

직선 $nx+(n+2)y=n+1$의 x절편이 $\frac{n+1}{n}$, y절편이 $\frac{n+1}{n+2}$이므로

$a_n=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n+1}{n+2}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\log_2 2a_n$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2 2a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k+1}{k}\times\frac{k+1}{k+2}\right)$

$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\right)+\log_2\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\right)+\log_2\left(\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\right)$

$+\cdots+\log_2\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=\log_2\frac{2(n+1)}{n+2}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\log_2 2a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{2(n+1)}{n+2}=\log_2 2=1$

유형 10 등비급수의 합

0135

답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^{n+2}}{6^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-9\times3^n}{6\times6^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\frac{1}{6}\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\times1=-\frac{17}{12}$

0136

답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$

$=\left(-\frac{1}{3}\right)\sin\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\sin\pi+\left(-\frac{1}{3}\right)^3\sin\frac{3}{2}\pi+\cdots$

$=\left(-\frac{1}{3}\right)+0+\frac{1}{3^3}+0+\left(-\frac{1}{3^5}\right)+\cdots$

$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^5}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3^2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3^2}\right)}=-\frac{3}{10}$

0137

답 1

$f(x)=(x+1)^n$이라 하면 $a_n=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

0138

답 ④

$x^n=(-3)^{n-1}$에서

(i) $n=2k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)일 때

$x^n=(-3)^{2k-1}=-3^{2k-1}<0$

이때 n은 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$\therefore\ a_{2k}=0$

(ii) $n=2k+1$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)일 때

$x^n=(-3)^{2k}=3^{2k}>0$

이때 n은 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$\therefore\ a_{2k+1}=1$

(i), (ii)에서 $a_n=\begin{cases}0 & (n=2k)\\ 1 & (n=2k+1)\end{cases}$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)이므로

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}+\cdots$

$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$

0139

답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$a=0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{6^{n-1}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{6^{n-1}+3^n}=0\neq15$

즉, $a\neq0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{6^{n-1}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{ar^{n-1}}{6^{n-1}+3^n}=15$ ····· ㉠

(i) $|r|<6$일 때 $\left|\frac{r}{6}\right|<1$, $0<\frac{1}{2}<1$이므로 ㉠에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times\left(\frac{r}{6}\right)^{n-1}}{1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\frac{0}{1+0}=0$

즉, ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $r=-6$일 때 $\frac{r}{6}=-1$, $0<\frac{1}{2}<1$이므로 ㉠에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times(-1)^{n-1}}{1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$은 발산(진동)한다.

즉, ㉠을 만족시키지 않는다.

(iii) $r=6$일 때 $\frac{r}{6}=1$, $0<\frac{1}{2}<1$이므로 ㉠에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\frac{a}{1}=a$

즉, ㉠에서 $a=15$

(iv) $|r|>6$일 때 $0<\left|\frac{6}{r}\right|<1$, $0<\left|\frac{3}{r}\right|<1$이므로 ㉠에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(\frac{6}{r}\right)^{n-1}+3\times\left(\frac{3}{r}\right)^{n-1}}=\infty$

즉, ㉠을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $r=6$, $a=15$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 15이고 공비가 6인 등비수열이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $a_n=15\times6^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{15\times6^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{15}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{\frac{1}{15}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{2}{25}$$

유형 11 합이 주어진 등비급수

0140 답 18

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=4$ $\quad\therefore a=\frac{4}{r}$

또한 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하므로 $|r|<1$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{4}{r}}{1-r}=18$이므로

$\frac{4}{r}=18(1-r)$에서 $2=9r(1-r)$

$9r^2-9r+2=0$, $(3r-1)(3r-2)=0$

$\therefore r=\frac{1}{3}$ 또는 $r=\frac{2}{3}$

$a_2=b_2$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이고 $a_1\neq b_1$이므로

수열 $\{a_n\}$의 공비가 $\frac{1}{3}$이면 수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\frac{2}{3}$이고 수열 $\{a_n\}$의 공비가 $\frac{2}{3}$이면 수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\frac{1}{3}$이다.

$a_2=b_2=4$이므로

$a_1=12$이면 $b_1=6$이고 $a_1=6$이면 $b_1=12$

$\therefore a_1+b_1=18$

0141 답 14

$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{8}x^4+\cdots$은 첫째항이 x이고 공비가 $-\frac{1}{2}x$인 등비급수의 합이다.

이때 급수 $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{8}x^4+\cdots$은 수렴하므로 $\left|-\frac{1}{2}x\right|<1$이고

$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{8}x^4+\cdots=\frac{x}{1-\left(-\frac{1}{2}x\right)}=\frac{7}{11}$에서

$11x=7\left(1+\frac{1}{2}x\right)$, $15x=14$

$\therefore x=\frac{14}{15}$

한편, $x+x^2+x^3+\cdots$은 첫째항과 공비가 모두 x인 등비급수의 합이므로

$$x+x^2+x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}=\frac{\frac{14}{15}}{1-\frac{14}{15}}=14$$

0142 답 64

$\sin x+\sin^3x+\sin^5x+\cdots$는 첫째항이 $\sin x$이고 공비가 $\sin^2x$인 등비급수의 합이다.

이때 급수 $\sin x+\sin^3x+\sin^5x+\cdots$가 수렴하므로 $\sin^2x<1$이고

$\sin x+\sin^3x+\sin^5x+\cdots=\frac{\sin x}{1-\sin^2x}=\frac{15}{16}$에서

$16\sin x=15(1-\sin^2x)$, $15\sin^2x+16\sin x-15=0$

$(5\sin x-3)(3\sin x+5)=0$ $\quad\therefore \sin x=\frac{3}{5}$ $(\because |\sin x|<1)$

$\therefore 100\cos^2x=100(1-\sin^2x)=100\left(1-\frac{9}{25}\right)=64$

0143 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_1a_2=1$에서 $a_1{}^2r=1$이므로

$r=\frac{1}{a_1{}^2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $0<r<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{a_1}{1-\frac{1}{a_1{}^2}}=\frac{a_1{}^3}{a_1{}^2-1}=\frac{8}{3}$$

에서 $3a_1{}^3=8(a_1{}^2-1)$, $3a_1{}^3-8a_1{}^2+8=0$

$(a_1-2)(3a_1{}^2-2a_1-4)=0$

$\therefore a_1=2$ 또는 $a_1=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$

이때 a_1은 자연수이므로 $a_1=2$이고 이를 ㉠에 대입하면

$r=\frac{1}{4}$

따라서 수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 $2^2=4$이고 공비가 $\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=\frac{4}{1-\frac{1}{16}}=\frac{64}{15}$$

0144 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_{2n-1}=ar^{2n-2}$, $a_{2n}=ar^{2n-1}$이므로

$a_{2n-1}-a_{2n}=ar^{2n-2}-ar^{2n-1}=ar^{2n-2}(1-r)$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a(1-r)$이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$은 수렴하므로 $|r^2|<1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=\frac{a(1-r)}{1-r^2}$$

$$=\frac{a(1-r)}{(1+r)(1-r)}$$

$$=\frac{a}{1+r}=4 \quad\cdots\cdots ㉡$$

한편, 수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 a^2이고 공비가 r^2인 등비수열이므로 ㉠에 의하여

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 = \frac{a^2}{1-r^2} = \frac{a}{1+r} \times \frac{a}{1-r}$

$= 4 \times \frac{a}{1-r}$ ($\because$ ㉡)

$= 12$

$\therefore \frac{a}{1-r} = 3$ ····· ㉢

㉠에 의하여 $|r| < 1$이므로 ㉢에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r} = 3$

참고

㉡에서 $a = 4 + 4r$이고 ㉢에서 $a = 3 - 3r$이므로 $4 + 4r = 3 - 3r$에서 $r = -\frac{1}{7}$이다. 이를 다시 ㉡에 대입하면 $a = \frac{24}{7}$이다.

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{24}{7}$이고 공비가 $-\frac{1}{7}$인 등비수열이다.

유형 12 등비급수의 수렴 조건

0145

답 6

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-3}{5}\right)^{n-1}$이 수렴하려면 $\left|\frac{2x-3}{5}\right| < 1$이어야 하므로

$-1 < \frac{2x-3}{5} < 1$에서

$-5 < 2x - 3 < 5$, $-2 < 2x < 8$

$\therefore -1 < x < 4$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-3}{5}\right)^{n-1}$이 수렴하도록 하는 정수 x는 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1 + 2 + 3 = 6$

0146

답 ④

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\log_2 x^2 - 3\right)^n$이 수렴하려면 $\left|\frac{1}{4}\log_2 x^2 - 3\right| < 1$이어야 하므로 $-1 < \frac{1}{4}\log_2 x^2 - 3 < 1$에서

$2 < \frac{1}{2}\log_2 |x| < 4$, $4 < \log_2 |x| < 8$

$2^4 < |x| < 2^8$

$\therefore -256 < x < -16$ 또는 $16 < x < 256$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\log_2 x^2 - 3\right)^n$이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는

$2 \times 239 = 478$

주의 x의 값의 범위를 구할 때 사용되지는 않았지만 로그의 정의에 의하여 $x \neq 0$임을 잊지 않도록 한다.

0147

답 $\frac{2}{3}\pi$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^{n+1}$이 수렴하려면 $\left|-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right| < 1$이어야 하므로 $-1 < -\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta < 1$에서

$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$이므로

$\beta - \alpha = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi$

0148

답 ④

수열 $\left\{\left(\frac{3x+1}{5}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{3x+1}{5}$인 등비수열이므로 이 수열이 수렴하려면 $-1 < \frac{3x+1}{5} \leq 1$이어야 한다.

$-1 < \frac{3x+1}{5} \leq 1$에서 $-5 < 3x + 1 \leq 5$

$-6 < 3x \leq 4$ $\therefore -2 < x \leq \frac{4}{3}$ ····· ㉠

한편, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (3x-4)^n$이 수렴하려면 $|3x-4| < 1$이어야 한다.

$-1 < 3x - 4 < 1$에서 $3 < 3x < 5$

$\therefore 1 < x < \frac{5}{3}$ ····· ㉡

수열 $\left\{\left(\frac{3x+1}{5}\right)^n\right\}$과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (3x-4)^n$이 모두 수렴하기 위해서는 ㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 구하는 x의 값의 범위는

$1 < x \leq \frac{4}{3}$

유형 13 등비급수의 수렴 여부 판단

0149

답 ②

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$이 수렴하므로

$-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$ ····· ㉠

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (ab)^n$은 공비가 ab인 등비급수이고 ㉠에서 $-1 < ab < 1$이므로 주어진 급수는 수렴한다.

ㄴ. [반례] $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n$은 공비가 $\frac{b}{a}$인 등비급수이고 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$이면 $\frac{b}{a} = \frac{4}{3} > 1$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a-b)^n$은 공비가 $a-b$인 등비급수이고 ㉠에서 $-2 < a - b < 2$이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} (|a| - |b|)^n$은 공비가 $|a| - |b|$인 등비급수이고 ㉠에서 $0 \leq |a| < 1$, $0 \leq |b| < 1$이므로 $-1 < |a| - |b| < 1$이다.
즉, 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 항상 수렴하는 급수는 ㄱ, ㄹ이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0150

답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 수렴하면 $ar=0$ 또는 $|r^2|<1$

즉, $a=0$ 또는 $|r|<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다. (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 발산하면 $ar\neq 0$이고 $|r^2|\geq 1$

즉, $a\neq 0$이고 $|r|\geq 1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 발산한다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)=0$에서

$\lim_{n\to\infty} a_n=-\frac{1}{2}\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0151

답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r_1이라 하고, 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비를 r_2라 하자.

ㄱ. 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 ab, 공비가 r_1r_2인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$이 수렴하면 $ab=0$ 또는 $|r_1r_2|<1$

(i) $ab=0$일 때, $a=0$ 또는 $b=0$

(ii) $|r_1r_2|<1$일 때

$|r_1|\geq 1$이고 $|r_2|\geq 1$이면 $|r_1r_2|=|r_1|\times|r_2|$에서

$|r_1r_2|<1$을 만족시킬 수 없으므로 $|r_1r_2|<1$이려면

$|r_1|<1$ 또는 $|r_2|<1$이어야 한다.

(i), (ii)에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 중 적어도 하나는 수렴한다. (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 발산하면

$a\neq 0$이고 $|r_1|\geq 1$, $b\neq 0$이고 $|r_2|\geq 1$ ····· ㉠

이때 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 ab, 공비가 r_1r_2인 등비수열이므로 ㉠에서 $ab\neq 0$이고 $|r_1r_2|\geq 1$이다.

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$도 발산한다. (참)

ㄷ. [반례] $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=-2$

$\therefore k=2$

한편, $a_nb_n=-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}=-\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{4}{3}$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n\neq -k^2$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

유형 14 S_n과 a_n 사이의 관계를 이용하는 급수

0152

답 ①

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-2(n-1)^2$

$=4n-2$ ····· ㉠

이때 $a_1=2$는 $n=1$을 ㉠에 대입한 값과 같으므로

$a_n=4n-2\ (n\geq 1)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-2)(4n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-2)(4k+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{14}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}\right)=\frac{1}{8}$

0153

답 ③

$\log_3(S_n-2)=-n+1$에서 $S_n-2=3^{-n+1}$

$\therefore S_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+2$

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+2\right\}-\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+2\right\}$

$=-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ (n\geq 2)$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $-2\times\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$이고 공비가 $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}=\frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=-\frac{3}{4}$

0154

답 ③

$S_n=a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=5n$이라 하자.

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=5$

(ii) $n\geq 2$일 때

$2^{n-1}a_n=S_n-S_{n-1}$

$=5n-5(n-1)=5$

$\therefore a_n=\frac{5}{2^{n-1}}$ ····· ㉠

이때 $a_1=5$는 $n=1$을 ㉠에 대입한 값과 같으므로

$a_n=\frac{5}{2^{n-1}}\ (n\geq 1)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = 10$$

유형 15 순환소수와 등비급수

0155 답 ①

$0.\dot{3}=\frac{1}{3}$, $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$이므로 주어진 등비급수의 공비를 r라 하면

$$r=\frac{0.\dot{2}}{0.\dot{3}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$$

이때 이 급수의 제2항이 $\frac{1}{3}$이므로 첫째항은

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{r}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

0156 답 3

$\frac{17}{99}=0.\dot{1}\dot{7}$이므로

$$a_n=\begin{cases}1 & (n\text{은 홀수})\\ 7 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

$$\therefore \frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{7}{2^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots\right)+\left(\frac{7}{2^2}+\frac{7}{2^4}+\frac{7}{2^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}}+\frac{\frac{7}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{2}{3}+\frac{7}{3}=3$$

0157 답 ④

$$a_n=\frac{2\times10^{2n-1}}{10^{2n}}+\frac{2\times10^{2n-1}}{10^{4n}}+\frac{2\times10^{2n-1}}{10^{6n}}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{2\times10^{2n-1}}{10^{2n}}}{1-\frac{1}{10^{2n}}}=\frac{2\times10^{2n-1}}{10^{2n}-1}$$

이므로

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{10^{2n+2}-1}{2\times10^{2n+1}}-\frac{10^{2n}-1}{2\times10^{2n-1}}$$

$$=\frac{(10^{2n+2}-1)-(10^{2n+2}-100)}{2\times10^{2n+1}}=\frac{99}{2\times10^{2n+1}}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{99}{2000}$이고 공비가 $\frac{1}{100}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{\frac{99}{2000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{20}$$

참고

$$a_1=0.\dot{2}\dot{0}=\frac{20}{99}=\frac{2\times10}{10^2-1}$$

$$a_2=0.\dot{2}00\dot{0}=\frac{2000}{9999}=\frac{2\times10^3}{10^4-1}$$

$$a_3=0.\dot{2}00000\dot{0}=\frac{200000}{999999}=\frac{2\times10^5}{10^6-1}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{2\times10^{2n-1}}{10^{2n}-1}$$

을 이용하여 급수의 합을 구할 수도 있다.

유형 16 등비급수의 활용 - 좌표

0158 답 ②

$y=2^{n-1}x^2$에서 $y'=2^{n-1}\times2x=2^nx$이므로 포물선 $y=2^{n-1}x^2$ 위의 점 $(1,\ 2^{n-1})$에서의 접선의 방정식은

$y=2^n(x-1)+2^{n-1}=2^nx-2^{n-1}$

이 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ -2^{n-1})$이므로

$$a_n=-2^{n-1} \qquad \therefore \frac{1}{a_n}=-\frac{1}{2^{n-1}}$$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$은 $\frac{1}{a_1}=-1$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{-1}{1-\frac{1}{2}}=-2$$

0159 답 4

점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 x좌표와 y좌표를 각각 구하면

$a=\overline{OP_1}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}+\cdots$

$$=3+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots$$

$$=\frac{3}{1-\frac{1}{16}}=\frac{16}{5}$$

$b=\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\cdots$

$$=3\times\frac{1}{4}+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^5+\cdots$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore a+b=\frac{16}{5}+\frac{4}{5}=4$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0160

답 ③

점 P_n이 점 (a, b)에 한없이 가까워지므로

$a=\overline{OP_1}\cos 45^\circ-\overline{P_1P_2}\cos 45^\circ+\overline{P_2P_3}\cos 45^\circ-\cdots$

$=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\cdots$

$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$b=\overline{OP_1}\sin 45^\circ+\overline{P_1P_2}\sin 45^\circ+\overline{P_2P_3}\sin 45^\circ+\cdots$

$=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$

$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore a+b=\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

0161

답 $\frac{10}{7}$

점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 x좌표는

$\overline{OP_1}-\overline{P_1P_2}\cos 60^\circ-\overline{P_2P_3}\cos 60^\circ+\overline{P_3P_4}-\overline{P_4P_5}\cos 60^\circ$

$-\overline{P_5P_6}\cos 60^\circ+\overline{P_6P_7}-\cdots$

$=2-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}$

$-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6-\cdots$

$=\left\{2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots\right\}-\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\right\}$

$-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots\right\}$

$=\frac{2}{1-\frac{1}{8}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{16}{7}-\frac{8}{14}-\frac{8}{28}=\frac{10}{7}$

유형 17 등비급수의 활용 - 선분의 길이

0162

답 6

S_0은 길이가 1인 선분 3개로 만들어진 'ㄴ' 모양의 도형이므로

$l_0=3$

S_1은 도형 S_0에 길이가 $\frac{1}{4}$인 선분 3개로 만들어진 'ㄴ' 모양의 도형 2개를 붙여서 만든 도형이므로

$l_1=l_0+2\times 3\times\frac{1}{4}=l_0+3\times\frac{1}{2}$

S_2는 도형 S_1에 길이가 $\left(\frac{1}{4}\right)^2$인 선분 3개로 만들어진 'ㄴ' 모양의 도형 2^2개를 붙여서 만든 도형이므로

$l_2=l_1+2^2\times 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=l_1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

같은 과정을 반복하므로

$l_n=l_{n-1}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\left\{l_{n-2}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\vdots$

$=l_0+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

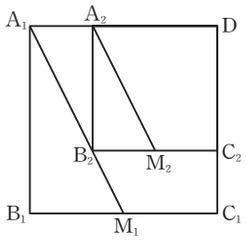
$=3+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\sum_{k=1}^{n+1}\left\{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} l_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\left\{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=6$

0163

답 $3\sqrt{5}$



정사각형 $A_1B_1C_1D$의 한 변의 길이는 2이므로 직각삼각형 $A_1B_1M_1$에서

$\overline{A_1M_1}=\sqrt{\overline{A_1B_1}^2+\overline{B_1M_1}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

한편, 두 선분 A_1B_1과 A_2B_2는 서로 평행하므로 두 직각삼각형 $A_1B_1M_1$과 $B_2A_2A_1$은 서로 닮음이다.

이때 $\overline{A_1B_1}:\overline{B_1M_1}=2:1$이므로 $\overline{A_1A_2}:\overline{A_2B_2}=1:2$

또한 정사각형 $A_2B_2C_2D$에서 $\overline{A_2D}=\overline{A_2B_2}$이므로 점 A_2는 선분 A_1D를 $1:2$로 내분하는 점이다.

즉, 두 정사각형 $A_1B_1C_1D$와 $A_2B_2C_2D$의 닮음비는 $3:2$, 즉 $1:\frac{2}{3}$이다.

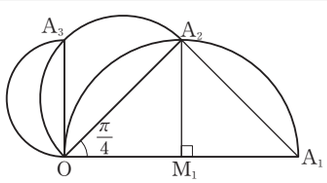
같은 과정을 반복하면 모든 자연수 n에 대하여 두 정사각형 $A_nB_nC_nD$와 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D$의 닮음비는 $1:\frac{2}{3}$이므로 두 선분 A_nM_n과 $A_{n+1}M_{n+1}$의 길이의 비는 $1:\frac{2}{3}$이다.

따라서 수열 $\{\overline{A_nM_n}\}$은 첫째항이 $\sqrt{5}$이고 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nM_n}=\frac{\sqrt{5}}{1-\frac{2}{3}}=3\sqrt{5}$

0164

답 ①



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\angle A_1OA_2=\frac{\pi}{4}$이므로 선분 OA_1의 중점을 M_1이라 하면 원주각과 중심각의 관계에 의하여 $\angle A_1M_1A_2=\frac{\pi}{2}$

이때 $\overline{M_1A_1}=\frac{1}{2}\overline{OA_1}=\frac{1}{2}$이므로

$l_1=\overline{M_1A_1}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

한편, 직각삼각형 A_1A_2O에서

$\overline{OA_2}=\overline{OA_1}\times\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

즉, 선분 OA_1을 지름으로 하는 반원과 선분 OA_2를 지름으로 하는 반원의 닮음비는 $\overline{OA_1}:\overline{OA_2}=1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

같은 과정을 반복하면 모든 자연수 n에 대하여 선분 OA_n을 지름으로 하는 반원과 선분 OA_{n+1}을 지름으로 하는 반원의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $l_n:l_{n+1}=1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{4}$이고 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{2(2-\sqrt{2})}=\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{4}$$

유형 18 등비급수의 활용 - 둘레의 길이

0165

답 12

정삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=4$이고 두 선분 BC와 AC의 중점이 각각 A_1, B_1이므로

$\overline{A_1B_1}=2$ $\therefore l_1=2\times3=6$

정삼각형 B_1A_1C에서 $\overline{A_1B_1}=2$이고 두 선분 A_1C와 B_1C의 중점이 각각 A_2, B_2이므로

$\overline{A_2B_2}=1$

두 삼각형 $B_1A_1C_1$과 $B_2A_2C_2$의 닮음비는 $\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=2:1$, 즉 $1:\frac{1}{2}$이므로 $l_1:l_2=1:\frac{1}{2}$이다.

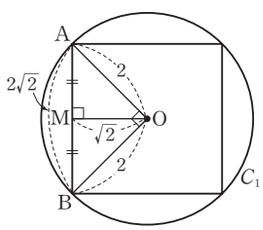
같은 과정을 반복하면 두 삼각형 $A_nB_nC_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는 $1:\frac{1}{2}$이므로 $l_n:l_{n+1}=1:\frac{1}{2}$이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 6이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{6}{1-\frac{1}{2}}=12$$

0166

답 ③



원 C_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자.

원 C_1의 반지름의 길이는 2이므로

$l_1=2\pi\times2=4\pi$

한편, 원 C_1의 중심을 O라 하고 내접하는 정사각형의 이웃하는 두 꼭짓점을 각각 A, B라 하자.

이때 삼각형 OAB는 $\overline{OA}=\overline{OB}=2$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$

또한 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{OM}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}=\sqrt{2}$

따라서 원 C_2의 반지름의 길이는 $\overline{OM}=\sqrt{2}$

두 원 C_1과 C_2의 닮음비는 $2:\sqrt{2}$, 즉 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$l_1:l_2=1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

같은 과정을 반복하면 두 원 C_n과 C_{n+1}의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$l_n:l_{n+1}=1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 4π이고 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{4\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{8\pi}{2-\sqrt{2}}=4(2+\sqrt{2})\pi$$

0167

답 12

$A_1(2,\ 1)$, $B_1(2,\ 0)$이므로 정사각형 T_1의 한 변의 길이는

$\overline{A_1B_1}=1$ $\therefore l_1=4\overline{A_1B_1}=4\times1=4$

$A_n\left(x_n,\ \frac{1}{2}x_n\right)$이라 하자.

$A_2\left(x_2,\ \frac{1}{2}x_2\right)$, $B_2(x_2,\ 0)$에서 $\overline{A_2B_2}=\overline{B_2B_1}$이므로

$\frac{1}{2}x_2=2-x_2$ $\therefore x_2=\frac{4}{3}$

따라서 정사각형 T_2의 한 변의 길이가 $\overline{A_2B_2}=\frac{2}{3}$이므로 두 정사각형 T_1과 T_2의 닮음비는 $1:\frac{2}{3}$이다.

같은 과정을 반복하면 두 정사각형 T_n과 T_{n+1}의 닮음비는 $1:\frac{2}{3}$이므로 $l_n:l_{n+1}=1:\frac{2}{3}$이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{4}{1-\frac{2}{3}}=12$$

유형 19 등비급수의 활용 - 넓이

0168

답 ③

그림 R_1에서 큰 정삼각형의 한 변의 길이는 4이므로 4개로 나누어진 정삼각형의 한 변의 길이는 2이다.

$\therefore S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

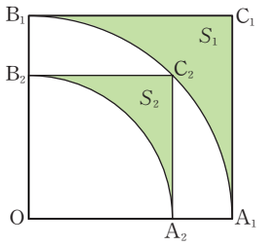
한편, 그림 R_1에서 색칠되지 않은 3개의 정삼각형의 한 변의 길이는 모두 2이므로 이 정삼각형 중 1개를 4개의 정삼각형으로 나누었을 때, 나누어진 정삼각형의 한 변의 길이는 1이다.
따라서 그림 R_1에서 색칠된 정삼각형과 그림 R_2에서 새로 색칠된 정삼각형의 닮음비는 $2:1$, 즉 $1:\frac{1}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{4}$이다.
같은 과정을 반복하면 두 그림 R_n과 R_{n+1}에 각각 새로 색칠된 부분의 넓이의 비는 $1:\frac{1}{4}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

0169

답 ①



$\overline{OA_1}=\overline{A_1C_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 6=3\sqrt{2}$

사각형 $OA_nC_nB_n$에서 이 사각형에 내접하는 사분원을 제외하고 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 하면

$S_1=(3\sqrt{2})^2-\frac{1}{4}\pi\times(3\sqrt{2})^2=18-\frac{9}{2}\pi$

이때 $\overline{OA_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OC_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OA_1}=3$

두 정사각형 $OA_1C_1B_1$과 $OA_2C_2B_2$의 닮음비는

$\overline{OA_1}:\overline{OA_2}=3\sqrt{2}:3$, 즉 $1:\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 1번째와 2번째에 새로 색칠된 부분의 넓이의 비, 즉 $S_1:S_2=1:\frac{1}{2}$이다.

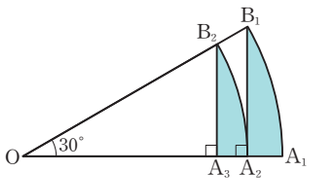
같은 과정을 반복하면 n번째와 $(n+1)$번째에 새로 색칠된 부분의 넓이의 비, 즉 $S_n:S_{n+1}=1:\frac{1}{2}$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $18-\frac{9}{2}\pi$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 구하는 색칠된 부분의 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{18-\frac{9}{2}\pi}{1-\frac{1}{2}}=36-9\pi$$

0170

답 ①



부채꼴 OA_1B_1의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$

또한 직각삼각형 OA_2B_1에서

$\angle A_2OB_1=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{OA_2}=\overline{OB_1}\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{A_2B_1}=\overline{OB_1}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

따라서 삼각형 OA_2B_1의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA_2}\times\overline{B_1A_2}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

$\therefore S_1=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{24}$

한편, 두 부채꼴 OA_1B_1과 OA_2B_2의 닮음비는

$\overline{OA_1}:\overline{OA_2}=1:\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{3}{4}$이다.

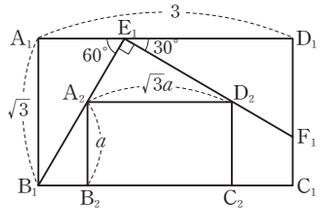
같은 과정을 반복하므로 두 그림 R_n과 R_{n+1}에 각각 새로 색칠된 부분의 넓이의 비도 $1:\frac{3}{4}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{24}$이고 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{24}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{6}$$

0171

답 ①



$\overline{A_1E_1}=1$, $\overline{D_1F_1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1+\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{6}$

한편, $\angle A_1E_1B_1=60^\circ$, $\angle D_1E_1F_1=30^\circ$이므로
$\angle E_1A_2D_2=60^\circ$, $\angle E_1D_2A_2=30^\circ$, $\angle A_2E_1D_2=90^\circ$
직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 $\overline{A_2B_2}=a$라 하면

$\overline{A_2D_2}=\sqrt{3}a$, $\overline{B_1A_2}=\frac{2}{\sqrt{3}}a$, $\overline{A_2E_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

삼각형 $A_1B_1E_1$에서 $\overline{B_1E_1}=2$이므로
$\overline{B_1A_2}+\overline{A_2E_1}=\overline{B_1E_1}$에서

$\frac{2}{\sqrt{3}}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a=2$, $\frac{7\sqrt{3}}{6}a=2$

$\therefore a=\frac{12}{7\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

$\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=\sqrt{3}:\frac{4\sqrt{3}}{7}$, 즉 $1:\frac{4}{7}$이므로 두 그림 R_1과 R_2에 각각 새로 색칠된 도형의 닮음비는 $1:\frac{4}{7}$이고 넓이의 비는 $1:\frac{16}{49}$이다.

같은 과정을 반복하면 두 그림 R_n과 R_{n+1}에 각각 새로 색칠된 부분의 넓이의 비도 $1:\frac{16}{49}$이다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{7\sqrt{3}}{6}$이고 공비가 $\frac{16}{49}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{7\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{16}{49}}=\frac{343\sqrt{3}}{198}$$

유형 20 등비급수의 실생활에의 활용

0172 답 ②

$a_1=100\times1.2\times0.3=36$

$a_2=\{100\times1.2\times(1-0.3)\}\times1.2\times0.3$

$=(100\times1.2\times0.3)\times1.2\times0.7$

$=36\times\frac{84}{100}$

$a_3=[\{100\times1.2\times(1-0.3)\}\times1.2\times(1-0.3)]\times1.2\times0.3$

$=(100\times1.2\times0.3)\times(1.2\times0.7)^2$

$=36\times\left(\frac{84}{100}\right)^2$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 36이고 공비가 $\frac{84}{100}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{36}{1-\frac{84}{100}}=225$$

0173 답 18 m

한 번 튀어 오를 때마다 공이 움직인 거리는

$9,\ \left(9\times\frac{1}{3}\right)\times2,\ \left(9\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times2,\ \cdots$

따라서 공이 멈출 때까지 움직인 거리는

$$9+18\times\frac{1}{3}+18\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots=9+\frac{18\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=18(\text{m})$$

0174 답 ①

새 배터리를 장착한 전기차의 주행 가능한 거리가 600 km이므로 $a_1=600$이라 하고, n번째 완충 시 주행 가능한 거리를 a_{n+1} km라 하면

$a_2=600\times\left(1-\frac{2}{10^3}\right)$

$a_3=600\times\left(1-\frac{2}{10^3}\right)^2$

$\vdots$

$a_n=600\times\left(1-\frac{2}{10^3}\right)^{n-1}$ (단, $n\geq2$) ····· ㉠

이때 $a_1=600$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=600\times\left(1-\frac{2}{10^3}\right)^{n-1}$ (단, $n\geq1$)

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 600이고 공비가 $1-\frac{2}{10^3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{600\times\left(1-\frac{2}{10^3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{600}{1-\left(1-\frac{2}{10^3}\right)}=300000$$

따라서 이 배터리를 장착한 자동차로 완충과 방전을 한없이 반복하여 갈 수 있는 거리는 300000 km이다.

PART B 기출 & 기출변형 문제

0175 답 3

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3n^2+4n}{n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{a_n}{n^2}+3+\frac{4}{n}}{1+\frac{5}{n}}$$

$$=\frac{2\times0+3+0}{1+0}=3$$

짝기출

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+9n}{n}$의 값을 구하시오.

답 9

0176 답 ⑤

$a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $3a_{n+1}=5a_n$이므로

$a_{n+1}=\frac{5}{3}a_n$, 즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{5}{3}$인 등비수열이다.

따라서 수열 $\left\{\frac{8}{a_n}\right\}$은 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{a_n}=\frac{4}{1-\frac{3}{5}}=10$$

짝기출

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고 $2a_{n+1}=7a_n$ $(n\geq1)$을 만족시킬 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

답 ④

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0177

답 ①

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(9a_n-k)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(9a_n-k)=0$

$\therefore r=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{k}{9}$ ····· ㉠

(i) $k<9$일 때 $0<\frac{k}{9}<1$, 즉 $0<r<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\frac{-1}{1}=-1$

이때 주어진 조건에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\frac{10}{9}$이므로 모순이다.

(ii) $k=9$일 때 $\frac{k}{9}=1$, 즉 $r=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$

이때 주어진 조건에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\frac{10}{9}$이므로 모순이다.

(iii) $k>9$일 때 $\frac{k}{9}>1$, 즉 $r>1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=r$

이때 주어진 조건에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\frac{10}{9}$이므로 $r=\frac{10}{9}$

(i)~(iii)에서 $r=\frac{10}{9}$이므로 ㉠에서 $k=10$이다.

짝기출

수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)=2$를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}a_n=r$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-1}{r^n+1}$의 값은?

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

답 ③

0178

답 ①

$a_na_{n+1}+a_{n+1}=ka_n^2+ka_n$에서

$(a_n+1)a_{n+1}=ka_n(a_n+1)$

$a_n+1\neq0$이므로 양변을 a_n+1로 나누면

$a_{n+1}=ka_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=k$이고 공비가 k인 등비수열이므로

$a_n=k\times k^{n-1}=k^n\ (n\geq1)$

이때 $0<k<1$이므로 등비급수는 수렴하고 그 합이 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$이므로

$\frac{k}{1-k}=5$, $5-5k=k$

$\therefore k=\frac{5}{6}$

0179

답 ④

첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=1+(n-1)d$ ····· ㉠

한편, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+5}{n+3}\right)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+5}{n+3}\right)=0$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+5}{n+3}\right)+\frac{2n+5}{n+3}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+5}{n+3}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n+3}$

$=0+2=2$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(n-1)d}{n}=d=2$

이를 다시 ㉠에 대입하면

$a_n=1+2(n-1)=2n-1$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+5}{n+3}\right)$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n}-\frac{2n+5}{n+3}\right)$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{k}-\frac{2k+5}{k+3}\right)$

$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(2-\frac{1}{k}\right)-\left(2-\frac{1}{k+3}\right)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+3}\right)$

$=\left(-1+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\right)$

$+\cdots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+3}\right)$

$=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}$

$\therefore S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n+5}{n+3}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\left(-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)$

$=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{11}{6}$

짝기출

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

답 ③

0180

답 ②

$1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}<a_n<\frac{3^n+1}{2}$에서

$\frac{3^n-1}{3-1}<a_n<\frac{3^n+1}{2}$, $3^n-1<2a_n<3^n+1$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$1-\frac{1}{3^n}<\frac{2a_n}{3^n}<1+\frac{1}{3^n}$

$\therefore \frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 3^n}<\frac{a_n}{3^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3^n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 3^n}\right)=\frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3^n}\right)=\frac{1}{2}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{2}$이다.

한편, $\frac{2n-3}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}b_k<\frac{2n+1}{n}$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n+1}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$이다.

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{9^{n+2}-2}{3^{n+1}a_n+4^nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{81\times 9^n-2}{3\times 9^n\times\frac{a_n}{3^n}+4^nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{81-\frac{2}{9^n}}{3\times\frac{a_n}{3^n}+\left(\frac{4}{9}\right)^n\times b_n}$$

$$=\frac{81-0}{3\times\frac{1}{2}+0\times 0}=54$$

짝기출

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}<a_n<2^n$

$\frac{3n-1}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}b_k<\frac{3n+1}{n}$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{8^n-1}{4^{n-1}a_n+8^{n+1}b_n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

답 ③

0181

답 ⑤

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n$에서 $a_1=2$이고

$n\geq 2$일 때

$$\frac{a_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}$$

$$=\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n\right)-\left\{\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{3}{2}(n-1)\right\}$$

$$=n+1$$

$\therefore a_n=n(n+1)\ (n\geq 2)$ ····· ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=n(n+1)\ (n\geq 1)$

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

짝기출

수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=n^2+3n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

답 ②

0182

답 8

$a_1=\frac{1}{4}$, 즉 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 값이 주어졌으므로

$a_na_{n+1}=4^n$에서 n에 1부터 차례대로 자연수를 대입하면

$n=1$일 때 $a_1a_2=4^1$ $\therefore a_2=4^2$

$n=2$일 때 $a_2a_3=4^2$ $\therefore a_3=1$

$n=3$일 때 $a_3a_4=4^3$ $\therefore a_4=4^3$

$n=4$일 때 $a_4a_5=4^4$ $\therefore a_5=4$

$n=5$일 때 $a_5a_6=4^5$ $\therefore a_6=4^4$

⋮

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $4^2=16$이고 공비가 4인 등비수열이므로 수열 $\left\{\frac{96}{a_{2n}}\right\}$은 첫째항이 6이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{96}{a_{2n}}=\frac{6}{1-\frac{1}{4}}=8$

짝기출

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=\frac{1}{8}$이고,

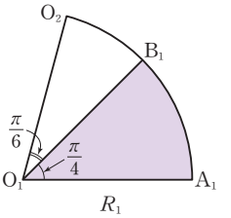
$a_na_{n+1}=2^n\ (n\geq 1)$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n-1}}$의 값을 구하시오.

답 16

0183

답 ③



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

그림 R_1에서 부채꼴 $O_1A_1B_1$의 넓이 S_1은

$S_1=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$

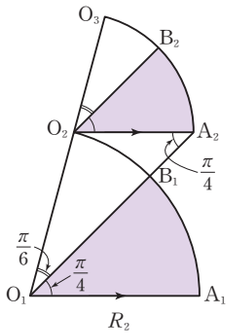


그림 R_2의 삼각형 $O_1A_2O_2$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin(\angle O_1A_2O_2)}=\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin(\angle O_2O_1A_2)}$

$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}}$

$\therefore \overline{O_2A_2}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

그림 R_1에 색칠된 부채꼴과 R_2에 새로 색칠된 부채꼴의 반지름의 길이의 비는 $\overline{O_1A_1}:\overline{O_2A_2}=1:\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{2}$이다.

같은 과정을 반복하면 두 그림 R_n과 R_{n+1}에 새로 색칠된 부채꼴의 넓이의 비도 $1:\frac{1}{2}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{\pi}{8}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$

0184

답 ①

조건 (나)에서 $a_nx^2-a_{n+1}x$가 $x-n$으로 나누어떨어지므로

$a_n\times n^2-a_{n+1}\times n=0$

$na_n-a_{n+1}=0 \quad \therefore a_{n+1}=na_n$

따라서

$a_{n+2}=(n+1)a_{n+1}=n(n+1)a_n$

이므로

$\frac{a_n}{a_{n+2}}=\frac{1}{n(n+1)}$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

짝기출

모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 다음 두 조건을 만족시킨다. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?

(가) $a_n\neq 0$

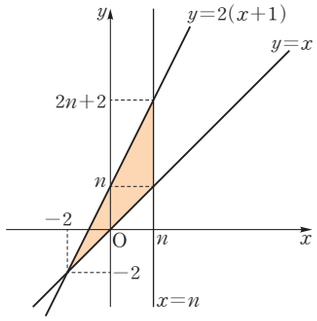
(나) x에 대한 다항식 $a_nx^2+a_nx+2$를 $x-n$으로 나눈 나머지가 20이다.

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

답 ⑤

0185

답 ④



두 직선 $x=n$, $y=x$의 교점의 y좌표는 n이고 두 직선 $x=n$, $y=2(x+1)$의 교점의 y좌표는 $2(n+1)=2n+2$이다.

또한 두 직선 $y=x$, $y=2(x+1)$의 교점의 x좌표는

$x=2(x+1)$에서 $x=2x+2$

$\therefore x=-2$

따라서 두 직선 $y=x$, $y=2(x+1)$의 교점의 좌표는 $(-2,\ -2)$이므로

$S_n=\frac{1}{2}\times(n+2)\times(n+2)=\frac{1}{2}(n+2)^2$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{S_nS_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n+5)}{(n+2)^2(n+3)^2}$의 제$n$항까지의 부분합을 T_n이라 하면

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4(2k+5)}{(k+2)^2(k+3)^2}$

$=4\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+2)^2}-\frac{1}{(k+3)^2}\right\}$

$=4\left[\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left\{\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\right\}\right]$

$=4\left\{\frac{1}{3^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\right\}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{S_nS_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}4\left\{\frac{1}{3^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\right\}=\frac{4}{9}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

짝기출

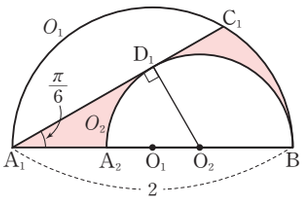
좌표평면에서 자연수 n에 대하여 네 직선 $x=1$, $x=n+1$, $y=x$, $y=2x$로 둘러싸인 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

답 ③

0186

답 ②



반원 O_1, O_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자.

$\angle O_2A_1D_1=\frac{\pi}{6}$이므로 직각삼각형 $O_2A_1D_1$에서

$\overline{A_1O_2}:\overline{O_2D_1}=2:1$

$2-\overline{O_2D_1}=2\overline{O_2D_1}$, $3\overline{O_2D_1}=2$

$\therefore \overline{O_2D_1}=\frac{2}{3}$

따라서 반원 O_2의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{O_2D_1}^2\times\pi=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\pi=\frac{2}{9}\pi$

$\angle A_1O_1C_1=\frac{2}{3}\pi$, $\overline{A_1O_1}=\overline{C_1O_1}=1$이므로 삼각형 $A_1O_1C_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{A_1O_1}\times\overline{C_1O_1}\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

또한 $\angle BO_1C_1=\frac{\pi}{3}$, $\overline{C_1O_1}=\overline{BO_1}=1$이므로 부채꼴 O_1BC_1의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore S_1=$(삼각형 $A_1O_1C_1$의 넓이)+(부채꼴 O_1BC_1의 넓이)
−(반원 O_2의 넓이)

$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}\pi$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}$

한편, 두 반원 O_1과 O_2의 닮음비가 $\overline{A_1O_1}:\overline{O_2D_1}=1:\frac{2}{3}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{4}{9}$이다.

같은 과정을 반복하면 두 그림 R_n과 R_{n+1}에 새로 색칠된 부분의 넓이의 비도 $1:\frac{4}{9}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}$이고 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Ⅱ 미분법

유형별 유사문제

PART A

03 지수함수와 로그함수의 미분

유형 01 지수함수의 극한

0187 답 ⑤

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{3x+1}+5^x}{8^{x-1}-5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\left(\frac{5}{8}\right)^x}{\frac{1}{8}-\left(\frac{5}{8}\right)^x}=\frac{2+0}{\frac{1}{8}-0}=16$$

0188 답 ①

$$\lim_{x\to0+}\frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}}-7^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{1-7^{-\frac{2}{x}}}=\frac{1}{1-0}=1$$

0189 답 8

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\times2^{2x-3}-7}{4^{x-1}+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a}{8}-\frac{7}{4^x}}{\frac{1}{4}+\frac{5}{4^x}}=\frac{\frac{a}{8}-0}{\frac{1}{4}+0}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=4$이므로 $a=8$

0190 답 ②

$-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^{x+1}+2x^2-8}{5^x+x^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{5^{-t+1}+2t^2-8}{5^{-t}+t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{5}{5^t}+2t^2-8}{\frac{1}{5^t}+t^2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{5}{5^t\times t^2}+2-\frac{8}{t^2}}{\frac{1}{5^t\times t^2}+1}=\frac{0+2-0}{0+1}=2$$

유형 02 로그함수의 극한

0191 답 ③

$$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_4(2x^2+7x)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\{\log_4(4x+1)^2-\log_4(2x^2+7x)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_4\frac{16x^2+8x+1}{2x^2+7x}=\log_4\left(\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+8x+1}{2x^2+7x}\right)$$

$$=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$$

0192 답 ①

$$\lim_{x\to-\infty}(\log_3\sqrt{x^2+9x}-\log_3 3|x|)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\log_3\frac{\sqrt{x^2+9x}}{3|x|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\log_3\sqrt{\frac{x^2+9x}{9x^2}}$$

$$=\log_3\left(\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\log_3\sqrt{\frac{1}{9}+0}=-1$$

0193 답 ⑤

$$\lim_{x\to0+}\frac{\log_5\frac{9}{x^2}}{\log_5\left(\frac{6}{x^a}+7\right)}=\lim_{x\to0+}\frac{\log_5 9-\log_5 x^2}{\log_5(6+7x^a)-\log_5 x^a}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\log_5 9-2\log_5 x}{\log_5(6+7x^a)-a\log_5 x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{\log_5 9}{\log_5 x}-2}{\frac{\log_5(6+7x^a)}{\log_5 x}-a}$$

$$=\frac{0-2}{0-a}=\frac{2}{a}$$

따라서 $\frac{2}{a}=6$이므로 $a=\frac{1}{3}$

다른 풀이

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{\log_5\frac{9}{x^2}}{\log_5\left(\frac{6}{x^a}+7\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log_5 9t^2}{\log_5(6t^a+7)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\log_5 9t^2}{\log_5 t^a\left(6+\frac{7}{t^a}\right)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\log_5 t^2+\log_5 9}{\log_5 t^a+\log_5\left(6+\frac{7}{t^a}\right)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2\log_5 t+\log_5 9}{a\log_5 t+\log_5\left(6+\frac{7}{t^a}\right)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2+\frac{\log_5 9}{\log_5 t}}{a+\frac{\log_5\left(6+\frac{7}{t^a}\right)}{\log_5 t}}$$

$$=\frac{2+0}{a+0}=\frac{2}{a}$$

따라서 $\frac{2}{a}=6$이므로 $a=\frac{1}{3}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0194

답 8

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_3(a^x+9^x)=\lim_{x\to\infty}\log_3(a^x+9^x)^{\frac{1}{x}}$에서

(i) $2\le a\le 9$일 때

$$\lim_{x\to\infty}\log_3\left[9^x\left\{\left(\frac{a}{9}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_3 9\left\{\left(\frac{a}{9}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=\log_3\left[\lim_{x\to\infty}9\left\{\left(\frac{a}{9}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}\right]$$
$$=\log_3(9\times 1)=\log_3 3^2=2$$

(ii) $a\ge 10$일 때

$$\lim_{x\to\infty}\log_3\left[a^x\left\{1+\left(\frac{9}{a}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_3 a\left\{1+\left(\frac{9}{a}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=\log_3\left[\lim_{x\to\infty}a\left\{1+\left(\frac{9}{a}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}\right]$$
$$=\log_3(a\times 1)=\log_3 a$$

이때 $a\ge 10$에서 $\log_3 a=2$를 만족시키는 자연수 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 2 이상의 모든 자연수 a는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 8개이다.

유형 03 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 꼴의 극한

0195

답 ①

$$\lim_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{2x}}+\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(1+6x)^{\frac{1}{6x}}\right\}^3+\lim_{x\to 0}\left\{\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{4}{x}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=e^3+e^{-\frac{1}{2}}=e^3+\frac{1}{\sqrt{e}}$$

0196

답 ④

$x+1=t$로 놓으면 $x\to -1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to -1}(x+2)^{\frac{5}{x+1}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{5}{t}}=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^5=e^5$$

0197

답 ③

$$\lim_{x\to 0}(12x^2+8x+1)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+6x)(1+2x)\}^{\frac{1}{3x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(1+6x)^{\frac{1}{3x}}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\left\{(1+6x)^{\frac{1}{6x}}\right\}^2\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^{\frac{2}{3}}\right]$$
$$=e^2\times e^{\frac{2}{3}}=e^{2+\frac{2}{3}}=e^{\frac{8}{3}}$$

따라서 $e^{\frac{8}{3}}=e^a$이므로 $a=\frac{8}{3}$

유형 04 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 꼴의 극한

0198

답 ⑤

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^6\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]$$
$$=e^6\times 1=e^6$$

0199

답 ③

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{7x}\right)^{\frac{x}{a}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{7x}\right)^{-7x}\right\}^{-\frac{1}{7a}}=e^{-\frac{1}{7a}}$$

따라서 $e^{-\frac{1}{7a}}=e^2$이므로 $-\frac{1}{7a}=2$

$\therefore a=-\frac{1}{14}$

0200

답 ①

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{a}{x}}{1+\frac{a}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right\}^{-a}}{\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^a}=\frac{e^{-a}}{e^a}$$
$$=e^{-a-a}=e^{-2a}$$

따라서 $e^{-2a}=e^{20}$이므로 $-2a=20$

$\therefore a=-10$

유형 05 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ 꼴의 극한

0201

답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+8x)+2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+8x)}{5x}+\frac{2}{5}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+8x)}{8x}\times\frac{8}{5}+\frac{2}{5}\right\}$$
$$=1\times\frac{8}{5}+\frac{2}{5}=2$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0202 답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{\ln(1+ax)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+4x)}{4x}\times4}{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times a}$$
$$=\frac{1\times4}{1\times a}=\frac{4}{a}$$

따라서 $\frac{4}{a}=12$이므로 $a=\frac{1}{3}$

0203 답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+16}-4}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x}{\sqrt{x+16}-4}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{x(\sqrt{x+16}+4)}{x+16-16}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times(\sqrt{x+16}+4)\right\}$$
$$=1\times(\sqrt{16}+4)=8$$

0204 답 ③

$y=2-e^{-2x}$으로 놓으면

$e^{-2x}=2-y$

$-2x=\ln(2-y)$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}\ln(2-y)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{2}\ln(2-x)$

따라서 $g(x)=-\frac{1}{2}\ln(2-x)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{-2(x-1)}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{-2(x-1)}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1-t)}{-2t}=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\ln(1-t)}{-t}\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Bible Says 역함수 구하기

함수 $y=f(x)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.
❶ 주어진 함수 $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.
❷ $y=f(x)$를 x에 대하여 정리한 후, $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.
❸ x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

유형 06 $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ 꼴의 극한

0205 답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_9(1+ax)}{x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\log_9(1+ax)}{ax}\times a\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln9}\times a=\frac{a}{2\ln3}$$

따라서 $\frac{a}{2\ln3}=\frac{1}{2}$이므로 $a=\ln3$

0206 답 ④

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{\log_2(2+x)}{x}-\frac{1}{x}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{\log_2(2+x)-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\log_2(2+x)-\log_2 2}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2\ln2}$$

0207 답 ①

$\frac{1}{x^2}=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}x^2\left\{\log_3\left(9+\frac{1}{x^2}\right)-2\right\}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\log_3(9+t)-2}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\log_3(9+t)-\log_3 9}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\log_3\left(1+\frac{t}{9}\right)}{t}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\log_3\left(1+\frac{t}{9}\right)}{\frac{t}{9}}\times\frac{1}{9}\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln3}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{9\ln3}$$

유형 07 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$ 꼴의 극한

0208 답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-\frac{1}{e^x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{-x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1-e^{-x}+1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$$
$$=1\times2+1=3$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0209

답 8

$x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{e^{x+1}+7x+6}{x+1}=\lim_{t\to0}\frac{e^{t}+7t-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{e^{t}-1}{t}+7\right)$$
$$=1+7=8$$

0210

답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^{ax}}{e^{ax}\ln(1+a^2x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-ax}-1}{\ln(1+a^2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{-ax}-1}{-ax}\times\frac{a^2x}{\ln(1+a^2x)}\times\left(-\frac{1}{a}\right)\right\}$$
$$=1\times1\times\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}$$

따라서 $-\frac{1}{a}=8$이므로 $a=-\frac{1}{8}$

유형 08 $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$ 꼴의 극한

0211

답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{4^x+2^x+x^2-2}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{4^x-1+2^x-1}{x}+x\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{4^x-1}{x}+\frac{2^x-1}{x}+x\right)$$
$$=\ln4+\ln2+0$$
$$=3\ln2$$

0212

답 ④

$\frac{1}{2x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}2x(5^{\frac{1}{2x}}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{5^{\frac{1}{2x}}-1}{\frac{1}{2x}}=\lim_{t\to0+}\frac{5^{t}-1}{t}=\ln5$$

0213

답 5

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{2^{ax}-1}{ax}\times\frac{bx}{\ln(1+bx)}\times\frac{a}{b}\right\}$$
$$=\ln2\times1\times\frac{a}{b}$$
$$=\frac{a}{b}\ln2$$

즉, $\frac{a}{b}\ln2=2\ln2$이므로 $\frac{a}{b}=2$

$\therefore a=2b$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 10 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(4, 2)$, $(6, 3)$, $(8, 4)$, $(10, 5)$의 5개이다.

유형 09 지수·로그함수의 극한에서 미정계수의 결정

0214

답 11

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{4x}+b}=3$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때, (분자)$\to$0이므로 (분모)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(e^{4x}+b)=0$이므로 $1+b=0$

$\therefore b=-1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times\frac{4x}{e^{4x}-1}\times\frac{a}{4}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{a}{4}=\frac{a}{4}$$

따라서 $\frac{a}{4}=3$이므로 $a=12$

$\therefore a+b=12+(-1)=11$

0215

답 ③

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때, (분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$에서 $\lim_{x\to0}\ln(ax+b)=0$이므로

$\ln b=0$ $\therefore b=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(ax+1)}{ax}\times a\right\}$$
$$=1\times a=a$$

따라서 $a=3$이므로 $f(x)=\ln(3x+1)$

$\therefore f(5)=\ln16=4\ln2$

0216

답 19

$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}+e^{bx}+e^{7x}+b}{x}=20$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때, (분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(e^{ax}+e^{bx}+e^{7x}+b)=0$이므로

$3+b=0$ $\therefore b=-3$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}+e^{-3x}+e^{7x}-3}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{ax}-1}{x}+\frac{e^{-3x}-1}{x}+\frac{e^{7x}-1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{ax}-1}{ax}\times a+\frac{e^{-3x}-1}{-3x}\times(-3)+\frac{e^{7x}-1}{7x}\times7\right\}$$
$$=1\times a+1\times(-3)+1\times7$$
$$=a+4$$

따라서 $a+4=20$이므로 $a=16$

$\therefore a-b=16-(-3)=19$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0217

답 25

$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-f(x)}{x-2}=6$에서 극한값이 존재하고 $x\to 2$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{e^{x-2}-f(x)\}=0$이므로 $f(2)=1$

$f(x)=(x-2)(x-a)+1$ (a는 상수)라 하자.

$x-2=t$로 놓으면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1-(x-2)(x-a)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{e^{x-2}-1}{x-2}-\frac{(x-2)(x-a)}{x-2}\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}+\lim_{x\to 2}(a-x)$$

$$=1+(a-2)=a-1$$

따라서 $a-1=6$이므로

$a=7$

$f(x)=(x-2)(x-7)+1$이므로

$f(-1)=-3\times(-8)+1=25$

유형 10 지수·로그함수의 극한의 도형에의 활용

0218

답 4

삼각형 OAP의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\frac{1}{2}\times a\times\ln(6t+1)=\frac{a}{2}\ln(6t+1)$

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\ln(6t+1)}{6t}\times 3a\right\}$$

$$=1\times 3a=3a$$

따라서 $3a=12$이므로

$a=4$

0219

답 ①

점 P의 x좌표는 $8^x=t$에서 $x=\log_8 t$

점 Q의 x좌표는 $2^x=t$에서 $x=\log_2 t$

$\therefore \overline{PQ}=\log_2 t-\log_8 t=\log_2 t-\frac{1}{3}\log_2 t=\frac{2}{3}\log_2 t$

$t-1=k$로 놓으면 $t\to 1+$일 때 $k\to 0+$이므로

$$\lim_{t\to 1+}\frac{\overline{PQ}}{t-1}=\lim_{k\to 0+}\frac{\frac{2}{3}\log_2(1+k)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0+}\left\{\frac{\log_2(1+k)}{k}\times\frac{2}{3}\right\}$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3\ln 2}$$

0220

답 65

직선 OP의 기울기가 $\frac{f(t)}{t}$이므로 점 P$(t,\ f(t))$를 지나고 직선 OP에 수직인 직선 AP의 방정식은

$y=-\frac{t}{f(t)}(x-t)+f(t)$

$\therefore y=-\frac{t}{\ln(1+5t)}(x-t)+\ln(1+5t)$

이 직선이 점 A를 지나므로 점 A의 x좌표를 a라 하면

$\frac{t}{\ln(1+5t)}a=\frac{t^2}{\ln(1+5t)}+\ln(1+5t)$에서

$a=t+\frac{\{\ln(1+5t)\}^2}{t}$

따라서 삼각형 OAP의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\frac{1}{2}\times a\times\ln(1+5t)$

$$=\frac{t\ln(1+5t)}{2}+\frac{\{\ln(1+5t)\}^3}{2t}$$

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left[\frac{\ln(1+5t)}{2t}+\frac{\{\ln(1+5t)\}^3}{2t^3}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left[\frac{\ln(1+5t)}{5t}\times\frac{5}{2}+\frac{\{\ln(1+5t)\}^3}{125t^3}\times\frac{125}{2}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left[\frac{\ln(1+5t)}{5t}\times\frac{5}{2}+\left\{\frac{\ln(1+5t)}{5t}\right\}^3\times\frac{125}{2}\right]$$

$$=1\times\frac{5}{2}+1\times\frac{125}{2}$$

$$=\frac{130}{2}=65$$

유형 11 지수·로그함수의 연속

0221

답 ②

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(6x+a)}{x} & (x\neq 0)\\ b & (x=0)\end{cases}$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$, 즉 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(6x+a)}{x}=b$ …… ㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\ln(6x+a)=0$이므로

$\ln a=0$에서 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(6x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(6x+1)}{6x}\times 6\right\}$$

$$=1\times 6=6=b$$

$\therefore a+b=1+6=7$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0222

답 ②

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to0}\dfrac{-2x^2+4x+a}{\ln(1+x)}=f(0)$ …… ㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(-2x^2+4x+a)=0$이므로 $a=0$

$\therefore f(a)=f(0)$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{-2x^2+4x}{\ln(1+x)}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{x\to0}\left\{\dfrac{x}{\ln(1+x)}\times(-2x+4)\right\}$

$=1\times4=4$

0223

답 ①

함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{2x} & (x<0)\\ e^x-5 & (x\geq0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0+} f(x)=f(0)$이어야 하므로

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}\dfrac{e^{ax}-1}{2x}=\lim_{x\to0-}\left(\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\times\dfrac{a}{2}\right)=1\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}(e^x-5)=1-5=-4$

$f(0)=1-5=-4$

에서 $\dfrac{a}{2}=-4$

$\therefore a=-8$

0224

답 ④

$(x-1)f(x)=\ln(8x-7)$에서

$x\neq1$일 때, $f(x)=\dfrac{\ln(8x-7)}{x-1}$

함수 $f(x)$가 구간 $\left(\dfrac{7}{8},\infty\right)$에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이어야 하므로

$f(1)=\lim_{x\to1}\dfrac{\ln(8x-7)}{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}\dfrac{\ln(8x-7)}{x-1}=\lim_{t\to0}\dfrac{\ln(1+8t)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\left\{\dfrac{\ln(1+8t)}{8t}\times8\right\}$

$=1\times8=8$

유형 12 지수함수의 도함수

0225

답 ①

$f(x)=2e^x+x^2-4x$에서

$f'(x)=2e^x+2x-4$

$\therefore f'(0)=2+0-4=-2$

0226

답 ⑤

$f(x)=e^x(5x+7)$에서

$f'(x)=e^x\times(5x+7)+e^x\times5=(5x+12)e^x$

$\therefore f'(1)=17e$

0227

답 ③

$f(x)=(ax-3)e^x$에서

$f'(x)=a\times e^x+(ax-3)\times e^x=(ax+a-3)e^x$

$f'(-2)=(-a-3)e^{-2}=\dfrac{-a-3}{e^2}$

따라서 $\dfrac{-a-3}{e^2}=\dfrac{6}{e^2}$이므로

$-a-3=6$ $\therefore a=-9$

0228

답 ③

$f(x)=2^{x+\log_2 3}=2^x\times2^{\log_2 3}=3\times2^x$에서

$f'(x)=3\times2^x\ln2$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12\ln2$

유형 13 로그함수의 도함수

0229

답 4

$f(x)=9+12\ln x$에서

$f'(x)=\dfrac{12}{x}$

$\therefore f'(3)=4$

0230

답 ③

$f(x)=x^3\ln x$라 하면

$f'(x)=3x^2\times\ln x+x^3\times\dfrac{1}{x}$

$=3x^2\ln x+x^2$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3\times1\times0+1=1$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0231

답 ②

$f(x)=\log_5\frac{1}{x}-\log_{25}\frac{1}{x}$

$=\log_5\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\log_5\frac{1}{x}$

$=\frac{1}{2}\log_5\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}\log_5 x$

에서

$f'(x)=-\frac{1}{2x\ln 5}$

$\therefore f'(2)=-\frac{1}{4\ln 5}$

다른 풀이

$f(x)=\log_5\frac{1}{x}-\log_{25}\frac{1}{x}$

$=-\log_5 x+\log_{25} x$

에서

$f'(x)=-\frac{1}{x\ln 5}+\frac{1}{x\ln 25}$

$\therefore f'(2)=-\frac{1}{2\ln 5}+\frac{1}{2\ln 25}=-\frac{1}{2\ln 5}+\frac{1}{4\ln 5}=-\frac{1}{4\ln 5}$

0232

답 ②

$f(x)=\log_2 x$에서 $f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}$

$\lim_{h\to 0}\frac{h}{f(a+h)-f(a-h)}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(a+h)-f(a)-\{f(a-h)-f(a)\}}{h}}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}}$

$=\frac{1}{f'(a)+f'(a)}=\frac{1}{2f'(a)}$

$=\frac{a}{2}\ln 2=\ln 2^{\frac{a}{2}}$

따라서 $\ln 2^{\frac{a}{2}}=\ln 64$이므로

$2^{\frac{a}{2}}=2^6$

$\frac{a}{2}=6 \quad \therefore a=12$

유형 14 지수·로그함수의 미분가능성

0233

답 ④

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ 5+x\ln x & (x\geq 1) \end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하므로

$x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(ax+b)=a+b$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(5+x\ln x)=5+0=5$

$f(1)=5$

에서 $a+b=5$ ····· ㉠

또한 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 좌미분계수, 우미분계수가 같아야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-}f'(x)=\lim_{x\to 1+}f'(x)$이어야 하므로

$f'(x)=\begin{cases} a & (x<1) \\ \ln x+1 & (x>1) \end{cases}$에서 $a=1$

이를 ㉠에 대입하면 $b=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+4 & (x<1) \\ 5+x\ln x & (x\geq 1) \end{cases}$이므로

$f(-1)=-1+4=3$

참고

미분계수의 정의를 이용하여 a의 값을 구할 수도 있다.

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ 5+x\ln x & (x\geq 1) \end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 좌미분계수, 우미분계수가 같아야 한다.

$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$

$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{5+x\ln x-5}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{x\ln x}{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 1+}\frac{x\ln x}{x-1}=\lim_{t\to 0+}\frac{(t+1)\ln(t+1)}{t}=1\times 1=1$

$\therefore a=1$

Bible Says 구간으로 나누어 정의된 함수의 미분가능성

미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x\geq a) \end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

(1) 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

➡ $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=g(a)$

(2) 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 미분계수가 존재한다.

➡ $f'(a)=g'(a)$

[방법1] 도함수를 이용

$h'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<a) \\ g'(x) & (x>a) \end{cases}$에서 $f'(a)=g'(a)$

임을 보인다.

[방법2] 미분계수의 정의를 이용

$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

임을 보인다.

0234

답 ⑤

$f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)이라 하자.

함수 $g(x)=\begin{cases} ax^2+bx & (x\leq -1) \\ e^{x+1}-7x & (x>-1) \end{cases}$은 $x=-1$에서 미분가능하므로 $x=-1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to -1-}g(x)=\lim_{x\to -1+}g(x)=g(-1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to -1-}g(x)=\lim_{x\to -1-}(ax^2+bx)=a-b$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\lim_{x\to -1+} g(x)=\lim_{x\to -1+}(e^{x+1}-7x)=1+7=8$

$g(-1)=a-b$

에서 $a-b=8$ ····· ㉠

또한 함수 $g(x)$의 $x=-1$에서의 좌미분계수, 우미분계수가 같아야 한다.

즉, $\lim_{x\to -1-} g'(x)=\lim_{x\to -1+} g'(x)$이어야 하므로

$g'(x)=\begin{cases} 2ax+b & (x<-1) \\ e^{x+1}-7 & (x>-1) \end{cases}$에서

$-2a+b=-6$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-10$

따라서 $f(x)=-2x^2-10x$이므로

$f(-3)=-2\times 9+30=12$

0235

답 ①

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+b & (x\le 1) \\ \log_a x & (x>1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(2x+b)=2+b$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\log_a x=0$

$f(1)=2+b$

에서 $2+b=0$ $\therefore b=-2$

또한 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 좌미분계수, 우미분계수가 같아야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f'(x)=\lim_{x\to 1+} f'(x)$이어야 하므로

$f'(x)=\begin{cases} 2 & (x<1) \\ \dfrac{1}{x\ln a} & (x>1) \end{cases}$에서

$\dfrac{1}{\ln a}=2$ $\therefore a=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$\therefore ab=\sqrt{e}\times(-2)=-2\sqrt{e}$

PART B 기출 & 기출변형 문제

0236

답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+12)^x-a^{2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{(a+12)^x-1}{x}-\frac{a^{2x}-1}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{(a+12)^x-1}{x}-\frac{a^{2x}-1}{2x}\times 2\right\}$$
$$=\ln(a+12)-2\ln a$$
$$=\ln\frac{a+12}{a^2}$$

따라서 $\ln\dfrac{a+12}{a^2}=\ln 6$이므로 $\dfrac{a+12}{a^2}=6$

$6a^2-a-12=0$, $(2a-3)(3a+4)=0$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$ ($\because a>0$)

짝기출

양수 a가 $\lim_{x\to 0}\dfrac{(a+12)^x-a^x}{x}=\ln 3$을 만족시킬 때, a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

답 ⑤

0237

답 ①

$y=\log_4(x+5)$로 놓으면

$x+5=4^y$

$\therefore x=4^y-5$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=4^x-5$

따라서 $g(x)=4^x-5$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x-4)}{g(x)+4}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_4(x+1)}{4^x-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log_4(x+1)}{x}\times\frac{x}{4^x-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln 4}\times\frac{1}{\ln 4}=\frac{1}{4(\ln 2)^2}$$

짝기출

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{e^{2x}-1}$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

답 ④

0238

답 ⑤

$g(x)=t$로 놓으면 $x\to 2+$일 때 $t\to 2+$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(g(x))=\lim_{t\to 2+} f(t)=\lim_{t\to 2+} e^t=e^2$

$f(x)=s$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $\ln(x+1)\to 0+$, 즉 $s\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{s\to 0+} g(s)=2$

$\therefore \lim_{x\to 2+} f(g(x))+\lim_{x\to 0+} g(f(x))=e^2+2$

0239

답 ⑤

함수 $f(x)$는 $x\neq 1$인 실수에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이면 된다.

즉, $\lim_{x\to 1-} g(f(x))=\lim_{x\to 1+} g(f(x))=g(f(1))$이어야 한다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to1-$일 때

(i) $a>0$인 경우 $t\to a-$이므로

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=\lim_{t\to a-} g(t)=2^a+2^{-a}$

(ii) $a=0$인 경우 $t=a$이므로

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=g(a)=2^a+2^{-a}$

(iii) $a<0$인 경우 $t\to a+$이므로

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=\lim_{t\to a+} g(t)=2^a+2^{-a}$

(i)~(iii)에서

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=2^a+2^{-a}$

$x\to1+$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)=2^1+2^{-1}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$g(f(1))=g(1)=2^1+2^{-1}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

에서 $2^a+2^{-a}=\frac{5}{2}$

$2^a=s$ $(s>0)$으로 놓으면

$s+\frac{1}{s}=\frac{5}{2}$, $2s^2-5s+2=0$

$(2s-1)(s-2)=0$

$\therefore s=\frac{1}{2}$ 또는 $s=2$

$2^a=\frac{1}{2}$ 또는 $2^a=2$이므로

$a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$(-1)\times1=-1$

참고

위의 문제에서는 $g(x)$가 연속함수이므로 a의 값에 관계없이 $\lim_{x\to1-} g(f(x))$의 값이 존재함을 알 수 있지만 함수 $g(x)$가 불연속인 경우가 출제될 수도 있으므로 평소에도 a의 값의 범위를 나누어 생각하도록 하자.

0240

답 ③

ㄱ. $f(x)=2x^2+3x$이면

$\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}\right]$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(2x+3)}{x}=\lim_{x\to0}(2x+3)=3$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{x}=1\times3=3$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{f(x)}=1$이면

$\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+x)}{f(x)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\log_2(1+x)}{x}\times\frac{\ln(1+x)}{f(x)}\times\frac{x}{\ln(1+x)}\right\}$

$=\frac{1}{\ln2}\times1\times1=\frac{1}{\ln2}$ (참)

ㄷ. [반례] $f(x)=|x|$

이면 $\lim_{x\to0} f(x)=0$이지만

$\lim_{x\to0-}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{\ln(1-x)}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\left\{\frac{\ln(1-x)}{-x}\times(-1)\right\}$

$=1\times(-1)=-1$

$\lim_{x\to0+}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

즉, $\lim_{x\to0-}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{x}\neq\lim_{x\to0+}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{x}$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{x}$가 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

짝기출

함수 $f(x)$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f(x)=x^2$이면 $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=0$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{f(x)}=1$이면 $\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\ln3$이다.

ㄷ. $\lim_{x\to0} f(x)=0$이면 $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

답 ③

0241

답 ②

두 점 A, B는 각각 $A(t, \ln t)$, $B(t, -\ln t)$이므로

$\overline{AB}=2\ln t$

삼각형 AQB의 넓이가 1이 되려면

$\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{AB}=1$, $\frac{1}{2}\times f(t)\times2\ln t=1$

$\therefore f(t)=\frac{1}{\ln t}$

$\lim_{t\to1+}(t-1)f(t)=\lim_{t\to1+}\frac{t-1}{\ln t}$

$t-1=s$로 놓으면 $t\to1+$일 때 $s\to0+$이므로

$\lim_{t\to1+}\frac{t-1}{\ln t}=\lim_{s\to0+}\frac{s}{\ln(s+1)}=1$

0242

답 3

원 C가 y축에 접하는 점을 H라 하면 $r(t)=\overline{PH}=t$

원점 O를 지나고 원 C에 접하는 직선의 방정식은 $y=m(t)x$

점 P에서 이 직선까지의 거리는 원 C의 반지름의 길이와 같으므로

$t=\frac{|t\times m(t)-te^t|}{\sqrt{\{m(t)\}^2+1}}$

$|m(t)-e^t|=\sqrt{\{m(t)\}^2+1}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\{m(t)-e^t\}^2=\{m(t)\}^2+1$

$\{m(t)\}^2-2e^t m(t)+e^{2t}=\{m(t)\}^2+1$

$e^t\times m(t)=\dfrac{e^{2t}-1}{2}$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{4r(t)-e^t\times m(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{4t-\frac{e^{2t}-1}{2}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(4-\frac{e^{2t}-1}{2t}\right)$$
$$=4-1=3$$

0243

답 ④

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3ax+b)=3a+b$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\{(7a+6)x-4\}=7a+2$

$f(1)=7a+2$

에서 $3a+b=7a+2$

$\therefore b=4a+2$ ····· ㉠

또한 함수 $f(x)-g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 0이 되려면

$\lim_{x\to1-}f'(x)=\lim_{x\to1-}g'(x)$ ····· ㉡

$\lim_{x\to1+}f'(x)=\lim_{x\to1+}g'(x)$ ····· ㉢

$f'(x)=\begin{cases}3a & (x<1)\\ 7a+6 & (x>1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to1-}f'(x)=3a$, $\lim_{x\to1+}f'(x)=7a+6$

한편, $x<1$일 때

$g(x)=\dfrac{c}{e}(x^2-3x+2)e^x$이므로

$g'(x)=\dfrac{c}{e}\{(2x-3)e^x+(x^2-3x+2)e^x\}$

$=c(x^2-x-1)e^{x-1}$

$\therefore \lim_{x\to1-}g'(x)=-c$

$1<x<2$일 때

$g(x)=-\dfrac{c}{e}(x^2-3x+2)e^x$이므로

$g'(x)=-\dfrac{c}{e}\{(2x-3)e^x+(x^2-3x+2)e^x\}$

$=c(1+x-x^2)e^{x-1}$

$\therefore \lim_{x\to1+}g'(x)=c$

이를 ㉡에 대입하면 $3a=-c$

이를 ㉢에 대입하면 $7a+6=c$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{3}{5}$, $c=\dfrac{9}{5}$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-\dfrac{2}{5}$

$\therefore a+b+c=-\dfrac{3}{5}+\left(-\dfrac{2}{5}\right)+\dfrac{9}{5}=\dfrac{4}{5}$

짝기출

이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln(x+1)} & (x\neq0)\\ 8 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\infty)$에서 연속일 때, $f(3)$의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

답 ②

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A

04 삼각함수의 미분

유형 01 삼각함수 $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$

0244

답 ⑤

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}=-\frac{3}{\sqrt{5}}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \cot\theta-\csc\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}-\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)=\sqrt{5}$

0245

답 ⑤

$\overline{OP}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$이므로

$\cos\theta=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}$

$\therefore \csc\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\frac{1}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}=\frac{1}{-\cos\theta}$

$=\frac{1}{-\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{5}{3}$

0246

답 제4사분면

(i) $\sin\theta\sec\theta<0$에서 $\sin\theta$와 $\sec\theta$의 부호가 서로 다르므로

$\sin\theta>0$, $\sec\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\sec\theta>0$

즉, θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cot\theta\csc\theta>0$에서 $\cot\theta$와 $\csc\theta$의 부호가 서로 같으므로

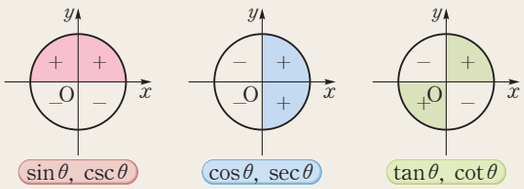
$\cot\theta>0$, $\csc\theta>0$ 또는 $\cot\theta<0$, $\csc\theta<0$

즉, θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제4사분면의 각이다.

Bible Says 삼각함수의 값의 부호

삼각함수의 값의 부호는 각 θ를 나타내는 동경이 위치한 사분면에 따라 다음과 같이 정해진다.



0247

답 4

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{2}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$

0248

답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\csc\theta+\sec\theta=-\frac{a}{3}$에서 $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{a}{3}$ ····· ㉠

$\csc\theta\sec\theta=-\frac{8}{3}$에서 $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{8}{3}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=-\frac{8}{3}(\sin\theta+\cos\theta)=-\frac{a}{3}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{a}{8}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{a^2}{64}$

㉡에서 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$이므로

$1+2\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{a^2}{64}$, $\frac{a^2}{64}=\frac{1}{4}$

$a^2=16$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

유형 02 삼각함수 사이의 관계

0249

답 $\frac{1}{2}$

$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1=\left(-\frac{5}{3}\right)^2-1=\frac{16}{9}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

$\therefore \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{-\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}$

$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\csc\theta=\frac{5}{4}$

$\therefore \cot\theta+\csc\theta=-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1}{2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0250 답 ④

$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{11}{3}$에서

$3+3\tan\theta=11-11\tan\theta$

$14\tan\theta=8 \quad \therefore \tan\theta=\frac{4}{7}$

$\therefore \csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\frac{1}{\tan^2\theta}=1+\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{65}{16}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\csc\theta=\frac{\sqrt{65}}{4}$

0251 답 ⑤

ㄱ. $\tan\theta\sec\theta+\sec^2\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\frac{1}{1-\sin\theta}$ (참)

ㄴ. $\frac{\cot\theta}{1+\csc\theta}+\frac{1+\csc\theta}{\cot\theta}=\frac{\cot^2\theta+(1+\csc\theta)^2}{\cot\theta(1+\csc\theta)}$

$=\frac{\csc^2\theta-1+1+2\csc\theta+\csc^2\theta}{\cot\theta(1+\csc\theta)}$

$=\frac{2\csc^2\theta+2\csc\theta}{\cot\theta(1+\csc\theta)}$

$=\frac{2\csc\theta(1+\csc\theta)}{\cot\theta(1+\csc\theta)}$

$=\frac{2\csc\theta}{\cot\theta}=\frac{\frac{2}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{2}{\cos\theta}$

$=2\sec\theta$ (참)

ㄷ. $\frac{\sin\theta}{\sec\theta+\tan\theta}+\frac{\sin\theta}{\sec\theta-\tan\theta}$

$=\frac{\sin\theta(\sec\theta-\tan\theta)+\sin\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}$

$=\frac{\sin\theta\sec\theta-\sin\theta\tan\theta+\sin\theta\sec\theta+\sin\theta\tan\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$

$=\frac{2\sin\theta\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$

$=\frac{2\sin\theta\sec\theta}{1+\tan^2\theta-\tan^2\theta}$

$=2\sin\theta\sec\theta$

$=2\tan\theta$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유형 03 삼각함수의 덧셈정리

0252 답 ①

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서 $\cos\alpha>0$, $\cos\beta<0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

0253 답 ③

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$에서 $\csc\alpha=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}$이고

$\cot^2\alpha=\csc^2\alpha-1=\left(\frac{5}{3}\right)^2-1=\frac{16}{9}$이다.

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cot\alpha=\frac{4}{3}$

즉, $\tan\alpha=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$

한편, $\cos\beta=\frac{12}{13}$에서 $\sec\beta=\frac{1}{\frac{12}{13}}=\frac{13}{12}$이고

$\tan^2\beta=\sec^2\beta-1=\left(\frac{13}{12}\right)^2-1=\frac{25}{144}$이다.

이때 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\beta=\frac{5}{12}$

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{1+\frac{3}{4}\times\frac{5}{12}}=\frac{16}{63}$

0254 답 ③

$\cot 50^\circ+\tan 25^\circ=\frac{\cos 50^\circ}{\sin 50^\circ}+\frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}$

$=\frac{\cos 50^\circ\cos 25^\circ+\sin 50^\circ\sin 25^\circ}{\sin 50^\circ\cos 25^\circ}$

$=\frac{\cos(50^\circ-25^\circ)}{\sin 50^\circ\cos 25^\circ}$

$=\frac{\cos 25^\circ}{\sin 50^\circ\cos 25^\circ}$

$=\frac{1}{\sin 50^\circ}=\csc 50^\circ$

0255 답 ②

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$ …… ㉠

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$

$\therefore \cos\alpha\cos\beta=-\frac{1}{24}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0256

답 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$에서 $\cos(\alpha+\beta)<0$이므로

$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$

$=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$이므로

$-\frac{2\sqrt{5}}{5}=\cos\alpha\cos\beta-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \cos\alpha\cos\beta=\frac{3\sqrt{5}}{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

0257

답 9

$4\cos\alpha=5\sin\alpha$에서

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{5}$이므로 $\tan\alpha=\frac{4}{5}$

이때 $\tan\beta=x$라 하면

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{4}{5}-x}{1+\frac{4}{5}x}=\frac{\frac{4-5x}{5}}{\frac{5+4x}{5}}$

$=\frac{4-5x}{5+4x}$

즉, $\frac{4-5x}{5+4x}=-1$이므로

$4-5x=-5-4x \quad \therefore x=9$

$\therefore \tan\beta=9$

0258

답 $\frac{56}{65}$

$g\left(\frac{5}{13}\right)=\alpha$, $g\left(\frac{3}{5}\right)=\beta$에서 $f(\alpha)=\frac{5}{13}$, $f(\beta)=\frac{3}{5}$이므로

$\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서

$\cos\alpha>0$, $\cos\beta>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$

$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

$\therefore f(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{56}{65}$

0259

답 ③

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$

$\therefore \cos(x-\alpha)=\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha$

$=\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x$

부등식 $\sin x\le\cos(x-\alpha)\le 3\sin x$에서

$\sin x\le\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x\le 3\sin x$

이때 $\frac{\pi}{2}\le x<\pi$에서 $\sin x>0$이므로 각 변을 $\sin x$로 나누면

$1\le\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\cot x\le 3$, $5\le 3-4\cot x\le 15$

$2\le -4\cot x\le 12$

$\therefore -3\le\cot x\le -\frac{1}{2}$

따라서 $\cot x$의 최댓값은 $-\frac{1}{2}$, 최솟값은 -3이므로 구하는 곱은

$-\frac{1}{2}\times(-3)=\frac{3}{2}$

유형 04 삼각함수의 덧셈정리의 활용 – 방정식

0260

답 7

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{a}{2}$, $\tan\alpha\tan\beta=\frac{3}{2}$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{a}{2}}{1-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{a}{2}}{-\frac{1}{2}}=-a$

즉, $-a=-7$이므로 $a=7$

0261

답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=5$, $\tan\alpha\tan\beta=-1$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5}{1-(-1)}=\frac{5}{2}$

이때 $\cot(\alpha+\beta)=\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$이고

$\csc^2(\alpha+\beta)=1+\cot^2(\alpha+\beta)$이므로

$\csc^2(\alpha+\beta)=1+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{29}{25}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0262

답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=3$, $\tan\alpha\tan\beta=2$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{3}{1-2}=-3$

이때 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\pi<\alpha+\beta<2\pi$이고

$\tan(\alpha+\beta)<0$에서 $\dfrac{3}{2}\pi<\alpha+\beta<2\pi$이므로

$\cos(\alpha+\beta)>0$ ····· ㉠

$\sec^2(\alpha+\beta)=1+\tan^2(\alpha+\beta)=1+(-3)^2=10$이므로

$\cos^2(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{10}$

㉠에서

$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$

$=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

유형 05 삼각함수의 덧셈정리의 활용 - 두 직선이 이루는 각의 크기

0263

답 ③

두 직선 $y=5x-2$, $y=-2x+3$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=5$, $\tan\beta=-2$이므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{5-(-2)}{1+5\times(-2)}\right|=\dfrac{7}{9}$

0264

답 ①

두 직선 $x-3y+5=0$, $2x+y-1=0$에서

$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$, $y=-2x+1$

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\tan\beta=-2$이므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{\frac{1}{3}-(-2)}{1+\frac{1}{3}\times(-2)}\right|=7$

$\therefore \cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{7}$

0265

답 ④

직선 $y=4x$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta=4$이다.

한편, 두 직선 $y=x$, $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\tan\alpha=1$, $\tan\beta=m$이다.

이때 직선 $y=4x$와 x축의 양의 방향이 이루는 예각의 크기가 두 직선 $y=x$, $y=mx$가 이루는 예각의 크기와 같으므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\dfrac{1-m}{1+m}\right|$

즉, $\left|\dfrac{1-m}{1+m}\right|=4$이므로 $\dfrac{1-m}{1+m}=4$ 또는 $\dfrac{1-m}{1+m}=-4$

(i) $\dfrac{1-m}{1+m}=4$인 경우

$1-m=4m+4$, $5m=-3$ $\therefore m=-\dfrac{3}{5}$

이때 $m<-1$이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\dfrac{1-m}{1+m}=-4$인 경우

$1-m=-4m-4$, $3m=-5$ $\therefore m=-\dfrac{5}{3}$

(i), (ii)에서 $m=-\dfrac{5}{3}$

다른 풀이

세 직선 $y=4x$, $y=x$, $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β, γ라 하면

$\tan\alpha=4$, $\tan\beta=1$, $\tan\gamma=m$

이때 $m<-1$이므로 두 직선 $y=x$, $y=mx$가 이루는 예각의 크기는 $\gamma-\beta$

따라서 $\tan\alpha=\tan(\gamma-\beta)=\dfrac{\tan\gamma-\tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta}$이므로 $4=\dfrac{m-1}{1+m}$

$4+4m=m-1$, $3m=-5$

$\therefore m=-\dfrac{5}{3}$

유형 06 삼각함수의 덧셈정리의 도형에의 활용

0266

답 ⑤

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 ACD에서 $\overline{CD}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$

$\angle ACB=\alpha$, $\angle ACD=\beta$라 하면

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

이때 $\theta=\alpha+\beta$이므로

$\cos\theta=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0267

답 $\frac{13}{11}$

$\overline{AD}=3$이고 $\overline{AD}$를 $2:1$로 내분하는 점이 B이므로 $\overline{AB}=2$이다.

직각삼각형 ABC에서 $\angle CAB=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=\frac{5}{2}$

직각삼각형 ADE에서 $\angle EAD=\beta$라 하면 $\tan\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{5}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{13}{11}$

0268

답 ①

$\overline{BD}=x$라 하면 $\overline{CD}=6-x$

직각삼각형 ABD에서 $\overline{AD}^2=25-x^2$,

직각삼각형 ADC에서 $\overline{AD}^2=13-(6-x)^2$이므로

$25-x^2=13-(6-x)^2$

$25-x^2=-23+12x-x^2$

$12x=48 \quad \therefore x=4$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{25-4^2}=\sqrt{9}=3$

직각삼각형 ABD에서 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

$\overline{CD}=6-4=2$이므로 직각삼각형 ADC에서

$\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\times\frac{3\sqrt{13}}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{13}}{13}$

$=\frac{18\sqrt{13}}{65}$

0269

답 10

$\angle APO=\alpha$, $\angle BPO=\beta$라 하면 $\theta=\beta-\alpha$

두 직각삼각형 AOP, BOP에서 $\tan\alpha=\frac{5}{a}$, $\tan\beta=\frac{20}{a}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\frac{\frac{20}{a}-\frac{5}{a}}{1+\frac{20}{a}\times\frac{5}{a}}=\frac{\frac{15}{a}}{1+\frac{100}{a^2}}=\frac{15}{a+\frac{100}{a}}$

즉, $a+\frac{100}{a}$의 값이 최소가 되면 $\tan\theta$의 값이 최대가 된다.

이때 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+\frac{100}{a}\geq 2\sqrt{a\times\frac{100}{a}}=2\times10=20$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{100}{a}, \text{ 즉 } a=10\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 구하는 a의 값은 10이다.

유형 07 배각의 공식

0270

답 $\frac{16}{25}$

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{3}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{9}{25}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{25}$

$\therefore 2\sin\theta\cos\theta=\frac{16}{25}$

$\therefore \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{16}{25}$

0271

답 ⑤

$2\cos\theta-\sin\theta=0$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2 \quad \therefore \tan\theta=2$

$\therefore \tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$

$\therefore \cot2\theta=\frac{1}{\tan2\theta}=\frac{1}{-\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}$

0272

답 3

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{3}$, $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2-1=\frac{7}{9}$

$\therefore \sin2\theta+\cos2\theta=\left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)+\frac{7}{9}=\frac{7-4\sqrt{2}}{9}$

따라서 $a=7$, $b=-4$이므로

$a+b=7+(-4)=3$

유형 08 배각의 공식의 활용

0273

답 ③

직선 $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

직선 $y=\frac{4}{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 2θ이므로

$\tan\theta=m$, $\tan2\theta=\frac{4}{3}$

$\therefore \tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2m}{1-m^2}$

즉, $\frac{2m}{1-m^2}=\frac{4}{3}$에서

$2m^2+3m-2=0$, $(m+2)(2m-1)=0$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\therefore m=-2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

이때 $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이므로 $m>0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$

0274

답 ①

$\angle BAD=\angle ABD=\theta$라 하면

직각삼각형 ABC에서 $\sin\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{5}$

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

삼각형 ABD에서 $\angle BAD=\angle ABD=\theta$이므로

$\angle ADC=\theta+\theta=2\theta$

$\therefore \sin(\angle ADC)=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$=2\times\frac{1}{5}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$=\frac{4\sqrt{6}}{25}$

0275

답 $12\sqrt{2}$ m

나무와 건물 사이의 거리를 x m라 하면

$\overline{BD}=x$ m, $\overline{AD}=\overline{AC}-\overline{CD}=60-12=48$(m)

삼각형 BCD에서 $\tan\theta=\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{12}{x}$

삼각형 ABD에서 $\tan 2\theta=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{48}{x}$

즉, $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$에서 $\frac{48}{x}=\frac{2\times\frac{12}{x}}{1-\left(\frac{12}{x}\right)^2}$

$\frac{1}{2}=1-\frac{144}{x^2}$, $x^2=288$

$\therefore x=\sqrt{288}=12\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

따라서 나무와 건물 사이의 거리는 $12\sqrt{2}$ m이다.

유형 09 삼각함수의 합성

0276

답 $\frac{16}{3}$

$\sqrt{7}\sin\theta+3\cos\theta=4\left(\sin\theta\times\frac{\sqrt{7}}{4}+\cos\theta\times\frac{3}{4}\right)$

$=4\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{3}{4},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$

$\therefore r=4$

이때 $\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$이므로

$r\csc\alpha=4\times\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$

0277

답 ③

$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x-3$

$=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-3$

$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)-3$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-3$

ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 2π이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

ㄷ. $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$이므로

$-5\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-3\le -1$

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값은 -5, 최댓값은 -1이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0278

답 ②

$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos x+2$

$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos x+2$

$=2\left(\sin x\times\frac{1}{2}+\cos x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\cos x+2$

$=\sin x+2\sqrt{3}\cos x+2$

$=\sqrt{13}\left(\sin x\times\frac{1}{\sqrt{13}}+\cos x\times\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)+2$

$=\sqrt{13}\sin(x+\alpha)+2$ $\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$

$-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로

$-\sqrt{13}+2\le\sqrt{13}\sin(x+\alpha)+2\le\sqrt{13}+2$

따라서 $M=\sqrt{13}+2$, $m=-\sqrt{13}+2$이므로

$Mm=(\sqrt{13}+2)(-\sqrt{13}+2)=-13+4=-9$

0279

답 ⑤

$f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x+3$

$=2\left(\frac{1}{2}\times\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin x\right)+3$

$=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)+3$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3$

$-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1$이므로

$1\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3\le 5$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 5이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

함수 $f(x)$는 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$일 때 최댓값을 가지므로

$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$\therefore a=\frac{\pi}{3}$ $\therefore a\times M=\frac{\pi}{3}\times 5=\frac{5}{3}\pi$

다른 풀이

$f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x+3$

$=2\left(\cos x\times\frac{1}{2}+\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3$

$=2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)+3$

$=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+3$

$-1\le\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$이므로

$1\le 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+3\le 5$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 5이다.

함수 $f(x)$는 $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$일 때 최댓값을 가지므로

$x-\frac{\pi}{3}=0$ $\therefore x=\frac{\pi}{3}$

$\therefore a=\frac{\pi}{3}$ $\therefore a\times M=\frac{\pi}{3}\times 5=\frac{5}{3}\pi$

0280

답 $\sqrt{5}$

$\overline{AB}$가 반원의 지름이므로 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 ABP에서 $\angle PBA=\theta$라 하면 $\overline{AB}=2$이므로

$\overline{AP}=2\sin\theta$, $\overline{BP}=2\cos\theta$

$\therefore \overline{AP}+\frac{1}{2}\overline{BP}=2\sin\theta+\cos\theta$

$=\sqrt{5}\left(\sin\theta\times\frac{2}{\sqrt{5}}+\cos\theta\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

이때 $-1\le\sin(\theta+\alpha)\le 1$이므로 구하는 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.

유형 10 삼각함수의 극한

0281

답 ④

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

0282

답 ⑤

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cot^2 x}{\csc x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\csc^2 x-1}{\csc x-1}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(\csc x-1)(\csc x+1)}{\csc x-1}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(\csc x+1)$

$=\csc\frac{\pi}{6}+1=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}+1$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}}+1=2+1=3$

0283

답 ②

$\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\frac{1-\tan^2 x}{\sin x+\cos x}=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x+\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x(\sin x+\cos x)}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x(\sin x+\cos x)}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x}$

$=\frac{\cos\frac{3}{4}\pi-\sin\frac{3}{4}\pi}{\cos^2\frac{3}{4}\pi}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$=\frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$

유형 11 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 꼴의 극한

0284

답 ②

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin 4x)}{\sin 3x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(\sin 4x)}{\sin 4x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{\sin 4x}{4x}\times\frac{4}{3}\right\}$

$=1\times 1\times 1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

0285

답 ④

$\lim_{x\to 0}\frac{x+e^x-1}{\sin 2x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 2x}+\frac{e^x-1}{\sin 2x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{1}{2}+\frac{e^x-1}{x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{1}{2}\right)$

$=1\times\frac{1}{2}+1\times 1\times\frac{1}{2}=1$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0286

답 $\frac{1}{9}$

$$\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{g(x)f(g(x))}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x\sin 3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{9}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\times1\times1=\frac{1}{9}$$

0287

답 ④

$$f(n)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\cdots+\frac{\sin nx}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\times2+\cdots+\frac{\sin nx}{nx}\times n}$$
$$=\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\times1=2$$

유형 12 $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ 꼴의 극한

0288

답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{2x}{\tan x+\tan 3x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\frac{\tan x}{x}+\frac{\tan 3x}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\frac{\tan x}{x}+\frac{\tan 3x}{3x}\times3}$$
$$=\frac{2}{1+1\times3}=\frac{1}{2}$$

0289

답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{k\tan 4x}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan 4x}{4x}\times\frac{2x}{\ln(1+2x)}\times2k\right\}$$
$$=1\times1\times2k=2k$$

즉, $2k=6$이므로 $k=3$

0290

답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(x^2+4x)}{\sin(4x^2+x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(x^2+4x)}{x^2+4x}\times\frac{4x^2+x}{\sin(4x^2+x)}\times\frac{x^2+4x}{4x^2+x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(x^2+4x)}{x^2+4x}\times\frac{4x^2+x}{\sin(4x^2+x)}\times\frac{x+4}{4x+1}\right\}$$
$$=1\times1\times4=4$$

유형 13 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$ 꼴의 극한

0291

답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

0292

답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{3\cos^2 x-\cos x-2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(3\cos x+2)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2}\times\frac{3\cos x+2}{\cos x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{-\sin^2 x}{x^2}\times\frac{3\cos x+2}{\cos x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{(-1)\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{3\cos x+2}{\cos x+1}\right\}$$
$$=(-1)\times1^2\times\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0293

답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x-\sin x}{x^3\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^3\cos x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^3 x}{x^3\cos x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(-1)\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\times\frac{1}{\cos x(\cos x+1)}\right\}$$
$$=(-1)\times 1^3\times\frac{1}{1\times 2}=-\frac{1}{2}$$

0294

답 9

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+\cos 3x)}{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+\cos 3x)}{1-\cos^2 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1+\cos 3x)}{\sin^2 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2\times\frac{f(x)}{x^2}\times\frac{1+\cos 3x}{9}\right\}$$
$$=1^2\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\times\frac{2}{9}=\frac{2}{9}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2$$
$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=9$$

유형 14 치환을 이용한 삼각함수의 극한 – $x\to a$ $(a\neq 0)$일 때 $x-a=t$로 치환

0295

답 ①

$x-3=t$로 놓으면 $x=t+3$이고 $x\to 3$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left\{\cos\frac{\pi}{2}(t+3)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{3}{2}\pi\right)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{\sin\frac{\pi}{2}t}\times\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\times\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$=1\times 1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

0296

답 ①

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=t+\frac{\pi}{2}$이고 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{t\to 0}2t\tan\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(2t\times\frac{1}{-\tan t}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{(-2)\times\frac{t}{\tan t}\right\}$$
$$=(-2)\times 1=-2$$

0297

답 ②

$x+\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=t-\frac{\pi}{2}$이고 $x\to-\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{(2x+\pi)\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{2t\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{2t\sin t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{2t\sin t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{2t\sin t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{2(1+\cos t)}\right\}$$
$$=1\times\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$$

유형 15 치환을 이용한 삼각함수의 극한 – $x\to\infty$일 때 $\frac{1}{x}=t$로 치환

0298

답 ④

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{3}{x}\cot\frac{2}{x}=\lim_{t\to 0}\sin 3t\cot 2t$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{\tan 2t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin 3t}{3t}\times\frac{2t}{\tan 2t}\times\frac{3}{2}\right)$$
$$=1\times 1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0299 답 ②

$x^\circ=\frac{\pi}{180}x$이므로

$\lim_{x\to\infty}x^\circ\tan\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\tan\frac{2}{x}$

이때 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\tan\frac{2}{x}=\lim_{t\to0}\left(\frac{\pi}{180}\times\frac{\tan 2t}{t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\pi}{90}\times\frac{\tan 2t}{2t}\right)$$
$$=\frac{\pi}{90}\times1=\frac{\pi}{90}$$

0300 답 ③

$\frac{1}{2x+1}=t$로 놓으면 $x=\frac{1-t}{2t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{2x+1}=\lim_{t\to0}\left(\frac{1-t}{2t}\times\sin t\right)$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{1-t}{2}\times\frac{\sin t}{t}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

유형 16 삼각함수의 극한에서 미정계수의 결정

0301 답 ④

$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{\tan x}=4$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+a)}{\tan x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x}{\tan x}\times(x+a)\right\}$$
$$=1\times a=a$$

$\therefore\ a=4$

$\therefore\ a+b=4+0=4$

0302 답 ④

$\lim_{x\to a}\frac{3^x-1}{2\sin(x-a)}=b\ln3$에서 극한값이 존재하고 $x\to a$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a}(3^x-1)=0$이므로

$3^a-1=0$ $\therefore\ a=0$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{2\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{3^x-1}{x}\times\frac{x}{\sin x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\ln3\times1=\frac{\ln3}{2}$$

즉, $\frac{\ln3}{2}=b\ln3$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

0303 답 ②

$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{a-b\cos x}=3$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

(분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(a-b\cos x)=0$이므로

$a-b=0$ $\therefore\ a=b$

$b=a$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{a-a\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{a(1-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{a(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{a\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{a}\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times(1+\cos x)\right\}$$
$$=\frac{1}{a}\times1^2\times2=\frac{2}{a}$$

즉, $\frac{2}{a}=3$이므로 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{2}{3}$

$\therefore\ ab=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

0304 답 4

$\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)\cos(x-2)+a}{\tan(x-2)}=b$에서 극한값이 존재하고

$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{(x^2-4)\cos(x-2)+a\}=0$이므로 $a=0$

이때 $x-2=t$로 놓으면 $x=t+2$이고 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)\cos(x-2)}{\tan(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)\cos(x-2)}{\tan(x-2)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t(t+4)\cos t}{\tan t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{t}{\tan t}\times(t+4)\times\cos t\right\}$$
$$=1\times4\times1=4$$

$\therefore\ b=4$

$\therefore\ a+b=0+4=4$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 17 삼각함수의 극한의 도형에의 활용

0305

답 $\frac{1}{3}$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\sin 3\theta}$

$\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

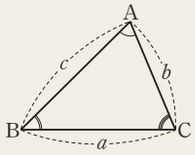
$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{1}{3}\right)$

$=1\times 1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Bible Says 사인법칙

삼각형 ABC에서

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



0306

답 3

$\angle HAC=\angle ABC=\theta$이므로

$\overline{AH}=3\sin\theta$에서

$\overline{CH}=3\sin\theta\tan\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\sin\theta\tan\theta}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\left(3\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right)$

$=3\times 1\times 1=3$

다른 풀이

직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=\frac{3}{\cos\theta}$

직각삼각형 ABH에서 $\overline{BH}=3\cos\theta$

따라서 $\overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=\frac{3}{\cos\theta}-3\cos\theta$이므로

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{3}{\cos\theta}-3\cos\theta}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3-3\cos^2\theta}{\theta^2\times\cos\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3(1-\cos^2\theta)}{\theta^2\times\cos\theta}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\sin^2\theta}{\theta^2\times\cos\theta}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{3}{\cos\theta}\right\}=1^2\times\frac{3}{1}=3$

0307

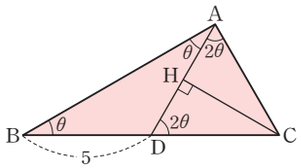
답 ②

$\angle ABD=\angle BAD=\theta$에서 삼각형 ABD는 이등변삼각형이므로

$\overline{AD}=\overline{BD}=5$

삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 5\times 5\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{25}{2}\sin 2\theta$



삼각형 ABD에서 $\angle ADC=\theta+\theta=2\theta$이고

점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle CAD=\angle CDA=2\theta$에서 삼각형 ADC는 이등변삼각형이므로

$\overline{CH}=\frac{5}{2}\tan 2\theta$

삼각형 ADC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 5\times\frac{5}{2}\tan 2\theta=\frac{25}{4}\tan 2\theta$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\frac{25}{2}\sin 2\theta+\frac{25}{4}\tan 2\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{25\sin 2\theta}{2\theta}+\frac{25\tan 2\theta}{4\theta}\right)$

$=\lim_{\theta\to 0+}\left(25\times\frac{\sin 2\theta}{2\theta}+\frac{25}{2}\times\frac{\tan 2\theta}{2\theta}\right)$

$=25\times 1+\frac{25}{2}\times 1=\frac{75}{2}$

0308

답 1

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로 $\angle BAO=\frac{\theta}{2}$이고

직각삼각형 ABO에서 $\overline{OB}=2\sin\frac{\theta}{2}$이다.

이때 $\overline{OB}=\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OC}$이고 세 삼각형 ABC, ODB, OEC는 서로 닮음이므로 $\angle BOD=\angle COE=\theta$이다.

따라서 삼각형 OED의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin(\pi-2\theta)=2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}{\theta^3}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right\}$

$=1^2\times 1=1$

참고

이등변삼각형 ABC에서 $\angle BAC=\theta$이므로

$\angle ABC=\angle ACB=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이다.

이때 삼각형 ODB에서 $\angle OBD=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이고 삼각형 ODB는 이등변삼각형이므로 $\angle ODB=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이다.

따라서 삼각형 ABC와 삼각형 ODB는 AA 닮음이다.

같은 방법으로 삼각형 ABC와 삼각형 OEC도 AA 닮음이므로 세 삼각형 ABC, ODB, OEC는 서로 닮음이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0309

답 ④

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times r^2\times\sin\theta$이고

삼각형 OHB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times r\cos\theta\times r\sin\theta=\frac{1}{2}\times r^2\times\sin\theta\times\cos\theta$이므로

삼각형 BHA의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times r^2\times\sin\theta-\frac{1}{2}\times r^2\times\sin\theta\times\cos\theta$

$=\frac{1}{2}r^2\sin\theta(1-\cos\theta)$

한편, 호 AB의 길이는 $r\theta$이므로 부채꼴 OAB의 둘레의 길이는

$r+r+r\theta=10$

$2r+r\theta=10,\ r(2+\theta)=10 \qquad \therefore r=\frac{10}{2+\theta}$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{r^2\sin\theta(1-\cos\theta)}{2\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{50}{(2+\theta)^2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{50}{(2+\theta)^2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{50}{(2+\theta)^2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{50}{(2+\theta)^2}\times\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$$
$$=\frac{50}{4}\times1^3\times\frac{1}{2}=\frac{25}{4}$$

참고

$\overline{BH}=r\sin\theta,\ \overline{OH}=r\cos\theta,\ \overline{AH}=r-\overline{OH}=r-r\cos\theta=r(1-\cos\theta)$
이므로 삼각형 BHA의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BH}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times r\sin\theta\times r(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}r^2\sin\theta(1-\cos\theta)$

로도 구할 수 있다.

유형 18 삼각함수의 연속

0310

답 ③

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos2x)(1+\cos2x)}{x^2(1+\cos2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2\times\frac{4}{1+\cos2x}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{4}{2}=2$$

$\therefore a=2$

참고

유형 07의 배각의 공식 $\cos2x=1-2\sin^2x$에서 $1-\cos2x=2\sin^2x$
임을 이용하여 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값을 구할 수도 있다.

0311

답 ⑤

$x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{\sin(ax^2-a)}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sin(ax^2-a)}{x-1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin(at^2+2at)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\sin(at^2+2at)}{at^2+2at}\times\frac{at^2+2at}{t}\right\}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\sin(at^2+2at)}{at^2+2at}\times(at+2a)\right\}$$
$$=1\times2a=2a$$

즉, $2a=6$이므로 $a=3$

0312

답 36

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to0-}\frac{(e^{ax}-1)\sin x}{4x^2}=\lim_{x\to0+}(2\cos x+1)=b$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{(e^{ax}-1)\sin x}{4x^2}=\lim_{x\to0-}\left(\frac{a}{4}\times\frac{e^{ax}-1}{ax}\times\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=\frac{a}{4}\times1\times1=\frac{a}{4}$$

$\lim_{x\to0+}(2\cos x+1)=2\times1+1=3$

즉, $\frac{a}{4}=3=b$이므로 $a=12,\ b=3$

$\therefore ab=12\times3=36$

유형 19 삼각함수의 도함수

0313

답 ①

$f(x)=x^2\cos x+\sin x$에서

$f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x+\cos x$이므로

$f'(\pi)=2\pi\cos\pi-\pi^2\sin\pi+\cos\pi$

$=-2\pi-1$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0314

답 ③

$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x-4x$에서

$f'(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x-4$

$=2\left(\cos x\times\frac{1}{2}-\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-4$

$=2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)-4$ ← 삼각함수의 합성을 이용한다.

$=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-4$

$f'(a)=-3$이므로 $2\cos\left(a+\frac{\pi}{3}\right)-4=-3$

즉, $\cos\left(a+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

이때 $\pi\le a\le\frac{3}{2}\pi$이므로 $a+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$에서

$a=\frac{4}{3}\pi$

0315

답 -2

$f(x)=\sin x\cos x$에서

$f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

$x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $x=\frac{\pi}{4}+t$이고 $x\to\frac{\pi}{4}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f'(x)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin 2t}{t}=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\sin 2t}{2t}\times(-2)\right\}$$

$=1\times(-2)=-2$

0316

답 ①

$f(x)=a\sin x+b\cos x+1$에서

$f(\pi)=a\sin\pi+b\cos\pi+1=-b+1$

즉, $-b+1=5$에서 $b=-4$

$f(x)=a\sin x-4\cos x+1$에서 $f'(x)=a\cos x+4\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=a\cos\frac{\pi}{4}+4\sin\frac{\pi}{4}=a\times\frac{\sqrt{2}}{2}+4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(a+4)\sqrt{2}}{2}$

즉, $\frac{(a+4)\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$에서 $a=2$

$\therefore a+b=2+(-4)=-2$

유형 20 삼각함수의 도함수 - 미분계수를 이용한 극한값의 계산

0317

답 ①

$f(x)=x^2\sin x$에서 $f(\pi)=0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$$

이때 $f(x)=x^2\sin x$에서

$f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$이므로

$f'(\pi)=\pi^2\times(-1)=-\pi^2$

0318

답 5

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-3h\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\left\{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}-\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-3h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2h}\times2\right\}$$

$$+\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-3h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-3h}\times3\right\}$$

$=2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+3f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=5f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

이때 $f(x)=2x\sin x+\cos x$에서

$f'(x)=2\sin x+2x\cos x-\sin x=\sin x+2x\cos x$이므로

$5f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=5\times\left(\sin\frac{\pi}{2}+\pi\cos\frac{\pi}{2}\right)=5\times1=5$

0319

답 ②

$f(x)=(1+\cos x)\sin x$에서 $f(\pi)=(1+\cos\pi)\sin\pi=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\pi+\sin x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(\pi+\sin x)-f(\pi)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\pi+\sin x)-f(\pi)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\right\}$$

$=f'(\pi)\times1=f'(\pi)$

이때 $f(x)=(1+\cos x)\sin x$에서

$f'(x)=-\sin^2 x+(1+\cos x)\times\cos x=\cos^2 x-\sin^2 x+\cos x$

이므로

$f'(\pi)=(-1)^2-0^2+(-1)=0$

유형 21 삼각함수의 미분가능성

0320

답 ④

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}(a\sin x+b)=\lim_{x\to0+}(3x+2)=f(0)$

$\therefore b=2$

또한 $f'(x)=\begin{cases}a\cos x & (x<0)\\ 3 & (x>0)\end{cases}$이고 $f'(0)$이 존재하므로

$\lim_{x\to0-}a\cos x=\lim_{x\to0+}3$

$\therefore a=3$

$\therefore a+b=3+2=5$

0321

답 1

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}e^x\cos x=\lim_{x\to0+}(x^2+ax+b)=f(0)$

$\therefore b=1$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

또한 $f'(x)=\begin{cases} e^x\cos x-e^x\sin x & (x<0) \\ 2x+a & (x>0) \end{cases}$이고 $f'(0)$이 존재하므로

$\lim_{x\to 0-}(e^x\cos x-e^x\sin x)=\lim_{x\to 0+}(2x+a)$

$1=0+a \quad \therefore a=1$

$\therefore ab=1\times 1=1$

0322

답 -2

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$, $x=\pi$에서도 미분가능하다.

즉, $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}(e^x+a)=\lim_{x\to 0+}(\sin x+bx)=f(0)$

$1+a=0 \quad \therefore a=-1$

함수 $f(x)$가 $x=\pi$에서 미분가능하면 $x=\pi$에서 연속이므로

$\lim_{x\to \pi-}(\sin x+bx)=\lim_{x\to \pi+}(cx+\pi)=f(\pi)$

$b\pi=c\pi+\pi \quad \therefore b=c+1$

또한 $f'(x)=\begin{cases} e^x & (x<0) \\ \cos x+b & (0<x<\pi) \\ c & (x>\pi) \end{cases}$이고 $f'(0)$이 존재하므로

$\lim_{x\to 0-}e^x=\lim_{x\to 0+}(\cos x+b)$

$1=1+b \quad \therefore b=0$

$\therefore c=b-1=-1$

$\therefore a+b+c=(-1)+0+(-1)=-2$

PART B 기출 & 기출변형 문제

0323

답 ②

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=3$에서 극한값이 존재하고 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$에서

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$

이때 $f(x)=\sin x+a\cos x$에서

$f'(x)=\cos x-a\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-a\sin\frac{\pi}{2}=-a$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=\sin x-3\cos x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}-3\cos\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}-3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

0324

답 ②

$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+k\sin x$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)+k\sin x$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+k\sin x$

$=\sin x+\cos x+k\sin x$

$=(k+1)\sin x+\cos x$

$=\sqrt{(k+1)^2+1}\left\{\frac{k+1}{\sqrt{(k+1)^2+1}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{(k+1)^2+1}}\cos x\right\}$

$=\sqrt{(k+1)^2+1}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{(k+1)^2+1}},\ \cos\alpha=\frac{k+1}{\sqrt{(k+1)^2+1}}\right)$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이고 $f(x)$의 최댓값이 $\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{(k+1)^2+1}=\sqrt{10}$, $(k+1)^2+1=10$

$(k+1)^2=9$, $k+1=\pm 3$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$)

짝기출

함수 $f(x)=a\sin x+\sqrt{11}\cos x$의 최댓값이 6일 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

답 ⑤

0325

답 ①

$\lim_{x\to a}\frac{\log_5(1+x)}{2\tan(x-a)}=\frac{b}{\ln 5}$에서 극한값이 존재하고 $x\to a$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a}\log_5(1+x)=0$이므로

$\log_5(1+a)=0 \quad \therefore a=0$

주어진 식의 좌변에 $a=0$을 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{\log_5(1+x)}{2\tan x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log_5(1+x)}{x}\times\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{2}\right\}$

$=\frac{1}{\ln 5}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2\ln 5}$

즉, $\frac{1}{2\ln 5}=\frac{b}{\ln 5}$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$

짝기출

$\lim_{x\to a}\frac{2^x-1}{3\sin(x-a)}=b\ln 2$를 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

답 ④

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0326

답 ③

$\angle AOB=\theta$라 하면 $\angle AOC=2\theta$

$B(\sqrt{7}, 3)$이므로 $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\sin\theta=\frac{3}{4}$

이때

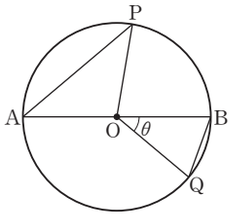
$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

이므로 점 C의 y좌표는

$\overline{OC}\times\sin 2\theta=4\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$

짝기출

그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q가 $\angle POB=2\angle BOQ$, $3\overline{AP}=7\overline{BQ}$를 만족시킨다. $\angle BOQ=\theta$라 할 때, $90\cos\theta$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



답 70

0327

답 ③

$\lim_{x\to0}xf(x)=1$에서 $xf(x)=h(x)$라 하면

$f(x)=\frac{1}{x}h(x)$ $(x\neq0)$, $\lim_{x\to0}h(x)=1$이므로

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)\sin x=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}h(x)\sin x$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin x}{x}\times h(x)\right\}$

$=1\times1=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0}f(x)\tan^2x=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}h(x)\tan^2x$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan x}{x}\times h(x)\times\tan x\right\}$

$=1\times1\times0=0$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to0}f(x)(e^x-1)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}h(x)(e^x-1)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^x-1}{x}\times h(x)\right\}$

$=1\times1=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

짝기출

함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}=1$을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{f(x)}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+x}{\ln(1+x)}=2$

ㄷ. $\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{\ln(1+x)}=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

답 ④

0328

답 ⑤

주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(e^0-1)^2f(0)=a-4\cos0$

$0=a-4$ $\therefore a=4$

$x\neq0$인 모든 실수 x에 대하여 $e^{2x}-1\neq0$이므로

$f(x)=\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$ (단, $x\neq0$)

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$

$=\lim_{x\to0}\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4\left(1-\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4\left(1-\cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4\left\{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(2x)^2}{(e^{2x}-1)^2}\times\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}\right\}$

$=1^2\times1^2\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$

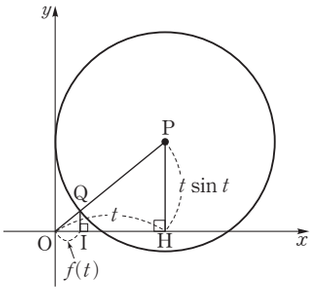
$=\frac{\pi^2}{8}$

$\therefore a\times f(0)=4\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0329

답 ③



두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면

$\overline{OH}=t$, $\overline{OI}=f(t)$

점 P의 좌표가 $(t, t\sin t)$이므로

직각삼각형 OHP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+(t\sin t)^2}=t\sqrt{1+\sin^2 t}$ ($\because t>0$)

이때 점 P를 중심으로 하는 원이 y축에 접하고 이 원이 점 Q를 지나므로 원의 반지름의 길이 $\overline{PQ}$는

$\overline{PQ}=$(점 P의 x좌표)$=t$

$\therefore \overline{OQ}=\overline{OP}-\overline{PQ}$

$=t\sqrt{1+\sin^2 t}-t$

$=t(\sqrt{1+\sin^2 t}-1)$

두 직각삼각형 OHP, OIQ가 서로 닮음이므로

$\overline{OH}:\overline{OI}=\overline{OP}:\overline{OQ}$

즉, $t:f(t)=t\sqrt{1+\sin^2 t}:t(\sqrt{1+\sin^2 t}-1)$에서

$f(t)=\dfrac{t(\sqrt{1+\sin^2 t}-1)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$

$\therefore \lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 t}-1}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{(\sqrt{1+\sin^2 t}-1)(\sqrt{1+\sin^2 t}+1)}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}(\sqrt{1+\sin^2 t}+1)}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin^2 t}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}(\sqrt{1+\sin^2 t}+1)}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\left\{\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2\times\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}(\sqrt{1+\sin^2 t}+1)}\right\}$

$=1^2\times\dfrac{1}{1\times(1+1)}=\dfrac{1}{2}$

0330

답 ②

$\angle OCD=\angle COA=\theta$, $\angle COD=2\theta$이므로

$\angle CDO=\pi-(\theta+2\theta)=\pi-3\theta$

삼각형 OCD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin 2\theta}=\dfrac{\overline{OC}}{\sin(\pi-3\theta)}$, $\dfrac{\overline{CD}}{\sin 2\theta}=\dfrac{1}{\sin 3\theta}$

$\therefore \overline{CD}=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$

$\therefore f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{OC}\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}\times 1\times\sin\theta=\dfrac{\sin 2\theta\sin\theta}{2\sin 3\theta}$

$\therefore \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\sin 2\theta\sin\theta}{2\theta\sin 3\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\left(\dfrac{\sin 2\theta}{2\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\dfrac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\dfrac{1}{3}\right)$

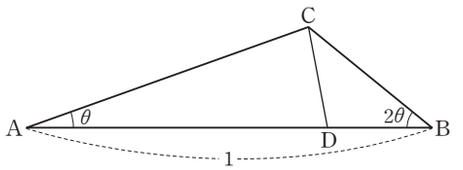
$=1\times 1\times 1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

짝기출

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$이고 $\angle A=\theta$, $\angle B=2\theta$이다.

변 AB 위의 점 D를 $\angle ACD=2\angle BCD$가 되도록 잡는다.

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\overline{CD}}{\theta}=a$일 때, $27a^2$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



답 16

0331

답 16

조건 (나)에서

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{(1-\cos x)^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{f(x^2)}{x^4}\times\dfrac{x^4}{(1-\cos x)^2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{f(x^2)}{x^4}\times\dfrac{x^4(1+\cos x)^2}{(1-\cos x)^2(1+\cos x)^2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{f(x^2)}{x^4}\times\dfrac{x^4(1+\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)^2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{f(x^2)}{x^4}\times\dfrac{x^4(1+\cos x)^2}{\sin^4 x}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{f(x^2)}{x^4}\times\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^4\times(1+\cos x)^2\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^4}\times 1^4\times 2^2=8$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^4}=2$

이때 $x^2=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^4}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t^2}=2$

이차함수 $g(t)$에 대하여 $f(t)=t^2g(t)$라 하면

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{t^2g(t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0+}g(t)=2$

$\therefore g(0)=2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $f(x)=x^2(ax^2+bx+2)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)으로 놓을 수 있다.

한편, 조건 (가)의 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=3$에서

$f(1)=1$, $f'(1)=3$

$f(1)=1$에서

$a+b+2=1$ $\therefore a+b=-1$ …… ㉠

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+4x$이므로 $f'(1)=3$에서

$4a+3b+4=3$ $\therefore 4a+3b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$

따라서 $f(x)=x^2(2x^2-3x+2)=2x^4-3x^3+2x^2$이므로

$f(2)=32-24+8=16$

짝기출

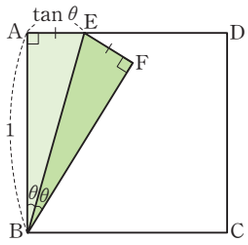
연속함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^p}=q$이다. $p+q$의 값은? (단, $p>0$, $q>0$)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

답 ②

0332

답 ⑤



두 삼각형 ABE, FBE는 서로 합동이고 사각형 ABCD는 정사각형이므로

$\angle EAB=\angle EFB=\frac{\pi}{2}$

조건 (나)에서 사각형 ABFE의 넓이가 $\frac{1}{3}$이고 두 삼각형 ABE, FBE의 넓이가 같으므로 삼각형 ABE의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이다.

이때 $\angle ABE=\angle FBE=\theta$라 하면 직각삼각형 ABE에서

$\tan\theta=\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$

$\therefore \overline{AE}=\overline{AB}\tan\theta=\tan\theta$

삼각형 ABE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AE}=\frac{1}{2}\tan\theta$이므로

$\frac{1}{2}\tan\theta=\frac{1}{6}$

$\therefore \tan\theta=\frac{1}{3}$

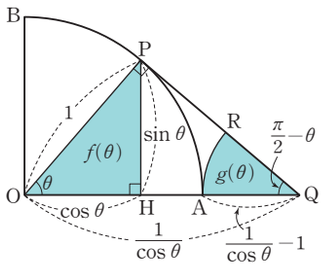
따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan(\angle ABF)=\tan(\theta+\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\frac{3}{4}$

0333

답 ④



직각삼각형 OHP에서

$\overline{PH}=\overline{OP}\sin\theta=\sin\theta$,

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta=\cos\theta$

이므로 삼각형 OHP의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$

직선 PQ는 점 P에서 부채꼴 OAB에 접하므로

$\angle OPQ=\frac{\pi}{2}$

즉, 직각삼각형 OQP에서

$\overline{OQ}=\frac{\overline{OP}}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$

이때 $\overline{AQ}=\overline{OQ}-\overline{OA}=\frac{1}{\cos\theta}-1=\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$이고,

$\angle RQA=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 부채꼴 QRA의 넓이 $g(\theta)$는

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\theta\times\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\times2\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2}}{\theta\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times2\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\theta\cos\theta\sin\theta}$

$=\sqrt{\pi}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta\cos^2\theta\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\sqrt{\pi}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta\cos^2\theta\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\sqrt{\pi}\times\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\cos^2\theta(1+\cos\theta)}\right\}$

$=\sqrt{\pi}\times1\times\frac{1}{1^2\times(1+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0334

답 ②

$\overline{AB}$가 반원의 지름이므로 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$

즉, 삼각형 ABP는 빗변의 길이가 2인 직각삼각형이므로

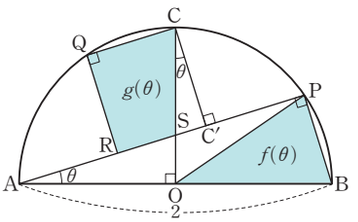
$\overline{AP}=2\cos\theta$, $\overline{BP}=2\sin\theta$

이 직각삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{BP}=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times2\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$

이때 점 O는 선분 AB의 중점이므로 $f(\theta)$는 삼각형 ABP의 넓이의 절반이다.

$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$



한편, 직각삼각형 AOS에서 $\overline{OS}=\tan\theta$이므로

$\overline{CS}=1-\tan\theta$ ····· ㉠

또한 두 삼각형 POB와 QOC는 합동이므로

$\angle OCQ=\angle OBP=\frac{\pi}{2}-\theta$

따라서 점 C에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 C′이라 하면 두 삼각형 ABP와 CSC′은 서로 닮음이다.

㉠에 의하여 사각형 CQRC′의 넓이는

$\overline{CQ}\times\overline{CC'}=\overline{BP}\times(\overline{CS}\times\cos\theta)=2\sin\theta\cos\theta(1-\tan\theta)$

삼각형 CSC′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{CC'}\times\overline{C'S}=\frac{1}{2}\times\cos\theta(1-\tan\theta)\times\sin\theta(1-\tan\theta)$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\tan\theta)^2$

$\therefore g(\theta)=$(사각형 CQRC′의 넓이)$-$(삼각형 CSC′의 넓이)

$=2\sin\theta\cos\theta(1-\tan\theta)-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\tan\theta)^2$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\tan\theta)\{4-(1-\tan\theta)\}$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\tan\theta)(3+\tan\theta)$

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{3\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta(1-\tan\theta)(3+\tan\theta)}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\cos\theta\{3-(3-2\tan\theta-\tan^2\theta)\}}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\cos\theta\tan\theta(2+\tan\theta)}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\cos\theta(2+\tan\theta)\right\}$

$=1\times1\times1\times(2+0)=2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A′

05 여러 가지 미분법

유형 01 함수의 몫의 미분법 $\frac{1}{g(x)}$ 꼴

0335 답 ⑤

$f(x)=\frac{2}{1-\sin x}$에서

$f'(x)=-\frac{2\times(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4\sqrt{3}$

0336 답 ①

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=-\frac{1}{16}$

$f(x)=\frac{1}{x+3}$에서 $f'(x)=-\frac{1}{(x+3)^2}$이므로

$f'(a)=-\frac{1}{(a+3)^2}=-\frac{1}{16}$

$(a+3)^2=16$, $a+3=\pm4$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$)

0337 답 -1

$f(x)=\frac{1}{2x^2-kx}$에서 $f'(x)=-\frac{4x-k}{(2x^2-kx)^2}$

이때 $f'(1)=-1$이므로

$-\frac{4-k}{(2-k)^2}=-1$, $4-k=4-4k+k^2$

$k^2-3k=0$, $k(k-3)=0$ $\therefore k=3$ ($\because k\neq0$)

따라서 $f(x)=\frac{1}{2x^2-3x}$, $f'(x)=-\frac{4x-3}{(2x^2-3x)^2}$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)\times1=-1$

유형 02 함수의 몫의 미분법 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

0338 답 ④

$f(x)=\frac{2x^2-7}{x-2}$에서

$f'(x)=\frac{4x(x-2)-(2x^2-7)\times1}{(x-2)^2}$

$=\frac{2x^2-8x+7}{(x-2)^2}$

$\therefore f'(1)=\frac{1}{(-1)^2}=1$

0339 답 ⑤

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-4h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-4h)+f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-4h)-f(1)}{-4h}\times4$

$=f'(1)+4f'(1)=5f'(1)$

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$에서

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-4h)}{h}=5f'(1)=5\times\frac{1}{1^2}=5$

0340 답 ②

$f(1)=2$이므로 $\frac{a+1}{1-b}=2$

$\therefore a=1-2b$ ····· ㉠

$f(x)=\frac{ax+1}{x^2-b}$에서

$f'(x)=\frac{a(x^2-b)-(ax+1)\times2x}{(x^2-b)^2}$

$=\frac{-ax^2-2x-ab}{(x^2-b)^2}$

이고, $f'(-1)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{-a+2-ab}{(1-b)^2}=\frac{1}{2}$

$-2a+4-2ab=1-2b+b^2$

$-2(1-2b)+4-2(1-2b)b=1-2b+b^2$ ($\because$ ㉠)

$3b^2+4b+1=0$, $(3b+1)(b+1)=0$

$\therefore b=-1$ ($\because b$는 정수)

㉠에서 $a=1+2=3$

$\therefore ab=3\times(-1)=-3$

0341 답 ④

$f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$에서

$f'(x)=\frac{1\times(x^2+3)-(x-1)\times2x}{(x^2+3)^2}$

$=\frac{x^2+3-2x^2+2x}{(x^2+3)^2}$

$=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)\geq0$에서 $-x^2+2x+3\geq0$ ($\because (x^2+3)^2>0$)

$x^2-2x-3\leq0$, $(x+1)(x-3)\leq0$

$\therefore -1\leq x\leq3$

따라서 구하는 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 합은

$-1+0+1+2+3=5$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0342

답 ①

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(0)=1$

이때 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$이므로

$f'(0)=2$

$g(x)=\frac{x^2+1}{f(x)-2}$에서

$$g'(x)=\frac{2x\{f(x)-2\}-(x^2+1)f'(x)}{\{f(x)-2\}^2}$$

$$=\frac{2xf(x)-4x-x^2f'(x)-f'(x)}{\{f(x)-2\}^2}$$

$$\therefore g'(0)=\frac{-f'(0)}{\{f(0)-2\}^2}=\frac{-2}{(1-2)^2}=-2$$

유형 03 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수

0343

답 ③

$f(1)=3$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

$f(x)=\frac{2x^3-2x+3}{x}=2x^2-2+3x^{-1}$이므로

$$f'(x)=4x-3x^{-2}=4x-\frac{3}{x^2}$$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-3}{h}=f'(1)=4-3=1$$

0344

답 ①

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}f'(2)$$

$$f(x)=\frac{x^4-1}{x(x^2-1)}$$

$$=\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^2+1}{x}=x+x^{-1}$$

이므로

$$f'(x)=1-x^{-2}=1-\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$$

0345

답 -385

$$f(x)=\sum_{n=1}^{10}\frac{n}{x^n}$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\cdots+\frac{10}{x^{10}}$$

$$=x^{-1}+2x^{-2}+3x^{-3}+\cdots+10x^{-10}$$

이므로

$$f'(x)=-x^{-2}-2^2x^{-3}-3^2x^{-4}-\cdots-10^2x^{-11}$$

$$\therefore f'(1)=-1^2-2^2-3^2-\cdots-10^2$$

$$=-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$$

$$=-\sum_{k=1}^{10}k^2=-\frac{10\times11\times21}{6}$$

$$=-385$$

유형 04 삼각함수의 도함수

0346

답 ④

$f(x)=\sec x\tan x$에서

$$f'(x)=\sec x\tan x\times\tan x+\sec x\times\sec^2 x$$

$$=\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)$$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec\frac{\pi}{4}\left(\tan^2\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\times\{1^2+(\sqrt{2})^2\}=3\sqrt{2}$$

0347

답 ①

$$f(x)=\frac{\sec x+1}{\tan x}$$

$$=\frac{\sec x}{\tan x}+\frac{1}{\tan x}$$

$$=\csc x+\cot x$$

이므로

$$f'(x)=-\csc x\cot x-\csc^2 x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\csc\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3}-\csc^2\frac{\pi}{3}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-2$$

다른 풀이

$$f'(x)=\frac{\sec x\tan x\times\tan x-(\sec x+1)\times\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$=\sec x-(\sec x+1)\times\csc^2 x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sec\frac{\pi}{3}-\left(\sec\frac{\pi}{3}+1\right)\times\csc^2\frac{\pi}{3}$$

$$=2-(2+1)\times\frac{4}{3}=-2$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0348

답 ③

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}-1}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}-1}$$

$$=-\frac{2}{3}\pi$$

이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3f(x)+2\pi}{3x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3\left\{f(x)+\frac{2}{3}\pi\right\}}{3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$$

$$=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$f(x)=\dfrac{x}{\cos x-1}$에서

$$f'(x)=\frac{1\times(\cos x-1)-x\times(-\sin x)}{(\cos x-1)^2}$$

$$=\frac{\cos x+x\sin x-1}{(\cos x-1)^2}$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3f(x)+2\pi}{3x-\pi}=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{3}-1}{\left(\cos\frac{\pi}{3}-1\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}$$

$$=-2+\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

따라서 $p=-2$, $q=\dfrac{2}{3}$이므로

$$p+q=-2+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

0349

답 ①

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to0-}(\tan x+3)=\lim_{x\to0+}(ae^x+b)=a+b$$

$$\therefore a+b=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한 $f'(x)=\begin{cases}\sec^2 x & (x<0)\\ ae^x & (x>0)\end{cases}$이고 $f'(0)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to0-}\sec^2 x=\lim_{x\to0+}ae^x$$

$$\therefore a=\sec^2 0=1$$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=2$$

$$\therefore ab=1\times2=2$$

유형 05 합성함수의 미분법

0350

답 ③

$f(g(x))=2x^2+3x-5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=4x+3$$

위의 식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$$f'(g(3))g'(3)=15$$

$g(3)=2$이므로 $f'(2)g'(3)=15$

$f'(2)=5$이므로 $5g'(3)=15$

$$\therefore g'(3)=3$$

0351

답 4

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=-2$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$이므로

$$f'(0)=-2$$

$y=f(f(x))$에서 $y'=f'(f(x))f'(x)$이므로

$x=0$에서의 미분계수는

$$f'(f(0))f'(0)=f'(0)\times(-2)=(-2)\times(-2)=4$$

0352

답 ③

$g(x)=-\csc x$에서 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\csc\dfrac{\pi}{6}=-2$

$g'(x)=\csc x\cot x$이므로

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$$h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=f'\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=f'(-2)\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}f'(-2)$$

이때 $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$에서

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x)(x^2-1)-(x^3-x^2+1)\times2x}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}f'(-2)=2\sqrt{3}\times\frac{4}{9}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

0353

답 ①

$h(x)=f(g(x))$라 하면

$h(2)=f(g(2))=f(2)=-1$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(g(x))+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=h'(2)$$

이때 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$$h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(2)\times(-3)=3\times(-3)=-9$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0354

답 15

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=5$에서 극한값이 존재하고 $x\to1$일 때,
(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(1)=1$
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로
$f'(1)=5$
$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-1}{x}=3$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,
(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to0}\{g(x)-1\}=0$이므로 $g(0)=1$
$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$이므로
$g'(0)=3$
$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서 $y'=f'(g(x))g'(x)$이므로
$x=0$에서의 미분계수는
$f'(g(0))g'(0)=f'(1)\times3=5\times3=15$

유형 06 합성함수의 미분법 - 유리함수

0355

답 7

$y=\{f(x)\}^n$에서 $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$이고,
$x=3$에서의 미분계수가 42이므로
$n\{f(3)\}^{n-1}f'(3)=42$
$n(-1)^{n-1}\times6=42$, $n(-1)^{n-1}=7$
$\therefore n=7$

0356

답 ①

$f(x)=\frac{1}{(1-5x)^4}=(1-5x)^{-4}$이므로
$f'(x)=-4(1-5x)^{-5}(1-5x)'=-4(1-5x)^{-5}\times(-5)$
$=\frac{20}{(1-5x)^5}$
$\therefore f'\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{20}{(-1)^5}=-20$

다른 풀이

$f(x)=\frac{1}{(1-5x)^4}=\left(\frac{1}{1-5x}\right)^4$이므로
$f'(x)=4\left(\frac{1}{1-5x}\right)^3\times\left(\frac{1}{1-5x}\right)'$
$=4\left(\frac{1}{1-5x}\right)^3\times\frac{5}{(1-5x)^2}=\frac{20}{(1-5x)^5}$
$\therefore f'\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{20}{(-1)^5}=-20$

0357

답 ②

$f(x)=\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)^3$에서
$f'(x)=3\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)^2\times\frac{2(x+1)-(2x+a)\times1}{(x+1)^2}$
$=3\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)^2\times\frac{2-a}{(x+1)^2}$
이때 $f'(0)=48$이므로
$3\times a^2\times(2-a)=48$, $a^3-2a^2+16=0$
$(a+2)(a^2-4a+8)=0$
$\therefore a=-2$ ($\because a$는 실수)

유형 07 합성함수의 미분법 - 지수함수

0358

답 ⑤

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{4h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)-f(1-2h)+f(1)}{4h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{4h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-4h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times\frac{1}{2}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{2}f'(1)=f'(1)$
$f(x)=2^{2x^3+1}-3$에서
$f'(x)=2^{2x^3+1}\ln2\times6x^2$
$\therefore\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{4h}=f'(1)=48\ln2$

0359

답 $\sqrt{3}e$

$h(x)=g(f(x))$라 하면
$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이고,
$h\left(\frac{\pi}{6}\right)=g\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=e^{2\times\frac{1}{2}}=e$이므로
$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{g(f(x))-e}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=h'\left(\frac{\pi}{6}\right)$
이때 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이고,
$f'(x)=\cos x$, $g'(x)=2e^{2x}$이므로
$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{g(f(x))-e}{x-\frac{\pi}{6}}=h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=g'\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$=g'\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}e$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0360

답 ②

$g(x)=\frac{f(x)}{e^{3x-1}}$에서

$g'(x)=\frac{f'(x)\times e^{3x-1}-f(x)\times 3e^{3x-1}}{(e^{3x-1})^2}=\frac{f'(x)-3f(x)}{e^{3x-1}}$

이므로

$g'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{f'\left(\frac{1}{3}\right)-3f\left(\frac{1}{3}\right)}{e^0}=f'\left(\frac{1}{3}\right)-3f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=17$, $g'\left(\frac{1}{3}\right)=11$이므로

$11=17-3f\left(\frac{1}{3}\right)$

$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)=2$

유형 08 합성함수의 미분법 - 삼각함수

0361

답 ①

$f(x)=4\sin^2 6x$라 하면

$f'(x)=4\times 2\sin 6x\times\cos 6x\times 6=48\sin 6x\cos 6x$

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{8}, 2\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=48\sin\frac{3}{4}\pi\cos\frac{3}{4}\pi$

$=48\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-24$

0362

답 ⑤

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)-f(-h)+f(0)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$

$=f'(0)+f'(0)=2f'(0)$

이때 $f(x)=e^{4x}\cos 2x$에서

$f'(x)=4e^{4x}\times\cos 2x+e^{4x}\times(-2\sin 2x)$

$=2e^{4x}(2\cos 2x-\sin 2x)$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=2f'(0)=2\times 4=8$

0363

답 4

$h(x)=f(g(x))$라 하면 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$이고,

$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=f(1)=\sin(1^2-1)=0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(g(x))}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

이때 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이고,

$f'(x)=2x\cos(x^2-1)$, $g'(x)=\sec^2 x$이므로

$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec^2\frac{\pi}{4}=2$

$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(g(x))}{x-\frac{\pi}{4}}=h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$=f'(1)\times 2=2\times 2=4$

유형 09 합성함수의 미분법 $f(g(x))=h(x)$ 꼴

0364

답 ②

$f(2x-1)=(x^2+x)^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(2x-1)\times 2=2(x^2+x)\times(2x+1)$

$\therefore f'(2x-1)=(x^2+x)(2x+1)$

$2x-1=3$이므로 위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(3)=6\times 5=30$

0365

답 ⑤

$f(2x+1)=f(1-2x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(2x+1)\times 2=f'(1-2x)\times(-2)$

$\therefore f'(2x+1)=-f'(1-2x)$

$2x+1=5$이므로 위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(5)=-f'(-3)$

이때 $f'(5)=-2$이므로

$f'(-3)=-f'(5)=-(-2)=2$

0366

답 ②

$f(3x-1)=e^{x^3-1}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(3x-1)\times 3=e^{x^3-1}\times 3x^2$

$\therefore f'(3x-1)=x^2e^{x^3-1}$

$3x-1=2$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(2)=1$

유형 10 로그함수의 도함수

0367

답 ④

$f(x)=\ln|\sin x|+\ln|\sec x|$에서

$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sec x\tan x}{\sec x}=\cot x+\tan x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cot\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

다른 풀이

$f(x)=\ln|\sin x|+\ln|\sec x|=\ln\left|\sin x\times\frac{1}{\cos x}\right|$

$=\ln|\tan x|$

이므로 $f'(x)=\frac{\sec^2 x}{\tan x}=\frac{1}{\sin x\cos x}$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

0368

답 ④

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}f'(2)$

$f(x)=3\log_2(6x-3)$에서

$f'(x)=3\times\frac{6}{(6x-3)\ln 2}=\frac{6}{(2x-1)\ln 2}$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2h}=\frac{1}{2}f'(2)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\ln 2}$

$=\frac{1}{\ln 2}$

0369

답 2

$f(x)=\tan(\ln 2x)$에서

$f'(x)=\sec^2(\ln 2x)\times(\ln 2x)'$

$=\sec^2(\ln 2x)\times\frac{2}{2x}$

$=\frac{\sec^2(\ln 2x)}{x}$

$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sec^2\left\{\ln\left(2\times\frac{1}{2}\right)\right\}}{\frac{1}{2}}=2\sec^2 0=2$

0370

답 ⑤

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-\ln 3}{x}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\to0$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\{f(x)-\ln 3\}=0$이므로 $f(0)=\ln 3$

$\ln b=\ln 3 \quad \therefore b=3$

한편, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-\ln 3}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$이므로

$f'(0)=2$ ····· ㉠

이때 $f(x)=\ln(ax+3)$에서 $f'(x)=\frac{a}{ax+3}$이므로

$f'(0)=\frac{a}{3}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $2=\frac{a}{3}$이므로 $a=6$

따라서 $f(x)=\ln(6x+3)$이므로

$f(1)=\ln(6+3)=\ln 9=2\ln 3$

0371

답 6

$f(x)=\ln|x^2-1|$에서 $f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$이므로

$f'(n)=\frac{2n}{n^2-1}$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f'(n)}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{2n}{n^2-1}}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n-1)(n+1)}$

$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{3}{2}$

따라서 $p=2$, $q=3$이므로

$pq=2\times3=6$

유형 11 로그함수의 도함수의 활용 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

0372

답 ①

$f(x)=\frac{x^2(x+1)^3}{(x-1)^3}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{x^2(x+1)^3}{(x-1)^3}\right|$

$=\ln|x^2|+\ln|(x+1)^3|-\ln|(x-1)^3|$

$=2\ln|x|+3\ln|x+1|-3\ln|x-1|$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-1}$

$\therefore f'(x)=f(x)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-1}\right)$

이때 $f(2)=\frac{2^2\times3^3}{1^3}=2^2\times3^3$이므로

$f'(2)=f(2)\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{3}-\frac{3}{1}\right)=(2^2\times3^3)\times(-1)$

$=-108$

0373

답 ④

$f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^4(x+2)^2}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\ln|f(x)|=\ln\left|\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^4(x+2)^2}\right|$

$=\ln|(x-1)^3|-\ln|(x+1)^4|-\ln|(x+2)^2|$

$=3\ln|x-1|-4\ln|x+1|-2\ln|x+2|$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}$

$\therefore f'(x)=f(x)\left(\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}\right)$

이때 $f(0)=\dfrac{(-1)^3}{1^4\times2^2}=-\dfrac{1}{4}$이므로

$f'(0)=f(0)\left(\dfrac{3}{-1}-\dfrac{4}{1}-\dfrac{2}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times(-8)=2$

0374

답 ④

$f(x)=\dfrac{(x^3-3x-2)^3}{x^3(x^2-3x+2)^4}=\dfrac{\{(x+1)^2(x-2)\}^3}{x^3(x-1)^4(x-2)^4}$

$=\dfrac{(x+1)^6}{x^3(x-1)^4(x-2)}$

위의 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln\left|\dfrac{(x+1)^6}{x^3(x-1)^4(x-2)}\right|$

$=\ln|(x+1)^6|-\ln|x^3|-\ln|(x-1)^4|-\ln|x-2|$

$=6\ln|x+1|-3\ln|x|-4\ln|x-1|-\ln|x-2|$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{6}{x+1}-\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}$

위의 식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$\dfrac{f'(3)}{f(3)}=\dfrac{6}{4}-\dfrac{3}{3}-\dfrac{4}{2}-\dfrac{1}{1}=\dfrac{3}{2}-1-2-1=-\dfrac{5}{2}$

이때 $f(x)=-f'(x)g(x)$에서 $g(x)=-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$이므로

$g(3)=-\dfrac{f(3)}{f'(3)}=-\dfrac{1}{-\frac{5}{2}}=\dfrac{2}{5}$

유형 12 로그함수의 도함수의 활용 $y=\{f(x)\}^{g(x)}$ 꼴

0375

답 ⑤

$f(x)=(2x+1)^{2x+1}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln(2x+1)^{2x+1}=(2x+1)\ln(2x+1)$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2\times\ln(2x+1)+(2x+1)\times\dfrac{2}{2x+1}$

$=2\ln(2x+1)+2$

$\therefore f'(x)=\{2\ln(2x+1)+2\}f(x)$

이때 $f(1)=3^3=27$이므로

$f'(1)=(2\ln3+2)\times27$

$=54\ln3+54$

따라서 $p=54$, $q=54$이므로

$p+q=54+54=108$

0376

답 ③

$f(e)=e^{\ln e^2}=e^2$이므로

$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-e^2}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)$

$f(x)=x^{\ln x^2}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\ln x^2}=\ln x^{2\ln x}=2(\ln x)^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2\left(2\ln x\times\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{4\ln x}{x}$

$\therefore f'(x)=\dfrac{4\ln x}{x}f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-e^2}{x-e}=f'(e)=\dfrac{4\ln e}{e}f(e)=\dfrac{4}{e}\times e^2=4e$

0377

답 ②

$f(x)=x^{\cos x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\cos x}=\cos x\ln x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\sin x\ln x+\cos x\times\dfrac{1}{x}=-\sin x\ln x+\dfrac{\cos x}{x}$

$\therefore f'(x)=f(x)\left(-\sin x\ln x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$

이때 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\cos\frac{\pi}{2}}=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^0=1$이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(-\sin\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right)=-\ln\dfrac{\pi}{2}$

유형 13 $y=x^\alpha$ (α는 실수)의 도함수

0378

답 ①

$f(x)=(x^4+4\sqrt{x}-4)^4$에서

$f'(x)=4(x^4+4\sqrt{x}-4)^3\times\left(4x^3+\dfrac{4}{2\sqrt{x}}\right)$

$=8(x^4+4\sqrt{x}-4)^3\left(2x^3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$\therefore f'(1)=8\times(1^4+4\sqrt{1}-4)^3\times\left(2\times1^3+\dfrac{1}{\sqrt{1}}\right)$

$=8\times3=24$

0379

답 1

$f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{3}{2}}$이므로

$f'(x)=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{3}{2\sqrt{x^5}}$

이때 $f'(a)=-\dfrac{3}{2}$이므로 $-\dfrac{3}{2\sqrt{a^5}}=-\dfrac{3}{2}$

$\sqrt{a^5}=1$ $\therefore a=1$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0380

답 ⑤

$\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}=-f'(2)$

$f(\sqrt{x})=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로

$f'(\sqrt{x})=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\times2\sqrt{x}=\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}+1$

$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-f'(2)=-f'(\sqrt{4})$

$=-\left(\frac{2\times4\sqrt{4}}{\sqrt{4^2+1}}+1\right)=-\frac{16}{\sqrt{17}}-1$

다른 풀이

$\sqrt{x}=X$로 놓고 다음과 같이 $\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}$의 값을 구할 수도 있다.

$\sqrt{x}=X$로 놓으면 $f(X)=\sqrt{X^4+1}+X$이므로

$f'(X)=\frac{4X^3}{2\sqrt{X^4+1}}+1=\frac{2X^3}{\sqrt{X^4+1}}+1$

$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-f'(2)$

$=-\left(\frac{2\times2^3}{\sqrt{2^4+1}}+1\right)=-\frac{16}{\sqrt{17}}-1$

유형 14 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

0381

답 ①

$x=t^2+2t$, $y=t^3-4t+1$에서

$\frac{dx}{dt}=2t+2$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-4$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-4}{2t+2}$

$\therefore\ \lim_{t\to0}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to0}\frac{3t^2-4}{2t+2}=-\frac{4}{2}=-2$

0382

답 ③

$x=e^t+2t$, $y=e^{-t}+4t$에서

$\frac{dx}{dt}=e^t+2$, $\frac{dy}{dt}=-e^{-t}+4$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-e^{-t}+4}{e^t+2}$

따라서 $t=0$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$\frac{-e^0+4}{e^0+2}=\frac{-1+4}{1+2}=1$

0383

답 ③

$x=\ln t^2=2\ln t$, $y=\ln t^3+6t=3\ln t+6t$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{3}{t}+6$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{t}+6}{\frac{2}{t}}=\frac{3+6t}{2}$

이때 $t=k$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값이 3이므로

$\frac{3+6k}{2}=3$, $6k=3$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}$

0384

답 5

$x=\ln t$, $y=t^2-4t$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2t-4$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-4}{\frac{1}{t}}=2t^2-4t=2(t-1)^2-2$

이때 $t>0$이므로 $t=1$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 $a=1$, $m=-2$이므로

$a^2+m^2=1^2+(-2)^2=5$

0385

답 ③

$x=2\sin\theta-\sqrt{3}$, $y=4\cos\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-4\sin\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-4\sin\theta}{2\cos\theta}=-2\tan\theta$

이때 접선의 기울기가 $-2\sqrt{3}$이므로

$-2\tan\theta=-2\sqrt{3}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

즉, $\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 곡선 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 $-2\sqrt{3}$이므로

$a=2\sin\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=0$

$b=4\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$

$\therefore\ a+b=0+2=2$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 15 음함수의 미분법

0386

답 ①

$2x^2-xy+3y^2=13$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x-y-x\times\dfrac{dy}{dx}+6y\times\dfrac{dy}{dx}=0$

$(x-6y)\dfrac{dy}{dx}=4x-y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x-y}{x-6y}$ (단, $x-6y\neq0$)

위의 식에 $x=-2$, $y=1$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-8-1}{-2-6}=\dfrac{9}{8}$

따라서 $k=\dfrac{9}{8}$이므로 $8k=9$

0387

답 ②

$x^2-y^2-2=y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-2y\times\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$

$(2y+1)\dfrac{dy}{dx}=2x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{2y+1}$ (단, $2y+1\neq0$)

점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{2}{7}a$이므로 위의 식에

$x=a$, $y=b$를 대입하면

$\dfrac{2a}{2b+1}=\dfrac{2}{7}a$

이때 $a\neq0$이므로 $2b+1=7$

$\therefore b=3$

0388

답 0

곡선 $x^3-y^3-axy+b=0$이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$-1+b=0$

$\therefore b=1$

$x^3-y^3-axy+1=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3y^2\times\dfrac{dy}{dx}-ay-ax\times\dfrac{dy}{dx}=0$

$(3y^2+ax)\dfrac{dy}{dx}=3x^2-ay$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-ay}{3y^2+ax}$ (단, $3y^2+ax\neq0$)

위의 식에 $x=-1$, $y=0$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\times1}{-a}=-\dfrac{3}{a}$

이때 $-\dfrac{3}{a}=3$이므로 $a=-1$

$\therefore a+b=-1+1=0$

0389

답 ②

$xy+y^2\ln x=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y+x\times\dfrac{dy}{dx}+2y\ln x\times\dfrac{dy}{dx}+y^2\times\dfrac{1}{x}=1$

$(x+2y\ln x)\dfrac{dy}{dx}=1-y-\dfrac{y^2}{x}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-y-\dfrac{y^2}{x}}{x+2y\ln x}$ (단, $x+2y\ln x\neq0$) …… ㉠

한편, $xy+y^2\ln x=x$에서 $x=1$일 때 $y=1$이므로

㉠에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-1-1}{1}=-1$

0390

답 ⑤

$\dfrac{\pi}{9}x=y+\sin xy$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{\pi}{9}=\dfrac{dy}{dx}+\cos xy\times\left(y+x\times\dfrac{dy}{dx}\right)$

$\dfrac{\pi}{9}=\dfrac{dy}{dx}+y\cos xy+x\cos xy\times\dfrac{dy}{dx}$

$(x\cos xy+1)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\pi}{9}-y\cos xy$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{\pi}{9}-y\cos xy}{x\cos xy+1}$ (단, $x\cos xy+1\neq0$)

위의 식에 $x=3$, $y=\dfrac{\pi}{3}$를 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{\pi}{3}\cos\pi}{3\cos\pi+1}=-\dfrac{2}{9}\pi$

유형 16 역함수의 미분법

0391

답 ②

$x=y^2+3y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=2y+3$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{2y+3}$ …… ㉠

$x=y^2+3y$에 $x=4$를 대입하면

$4=y^2+3y$

$y^2+3y-4=0$, $(y+4)(y-1)=0$

$\therefore y=1$ ($\because y>0$)

㉠에 $y=1$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2+3}=\dfrac{1}{5}$

따라서 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{5}$이다.

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0392 답 ②

$x=\ln(y+1)+y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y+1}+1=\frac{y+2}{y+1}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{y+1}{y+2}$ ····· ㉠

$x=\ln(y+1)+y$에 $x=0$을 대입하면 $0=\ln(y+1)+y$

$\therefore y=0$

㉠에 $y=0$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$

따라서 $x=0$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

0393 답 ④

점 $(1, a)$가 곡선 $x=\tan 2y$ 위의 점이므로

$1=\tan 2a$

$2a=\frac{\pi}{4}$ $\therefore a=\frac{\pi}{8}$

$x=\tan 2y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=2\sec^2 2y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2\sec^2 2y}$

곡선 위의 점 $\left(1, \frac{\pi}{8}\right)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sec^2\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{1}{2\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)^2}=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$

따라서 $m=\frac{1}{4}$이므로

$am=\frac{\pi}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{32}$

유형 17 역함수의 미분법의 활용

0394 답 ③

$g(2)=k$라 하면 $f(k)=2$

$4\cos^2 k+1=2$, $\cos^2 k=\frac{1}{4}$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos k=\frac{1}{2}$ $\therefore k=\frac{\pi}{3}$

즉, $g(2)=\frac{\pi}{3}$이고

$f(x)=4\cos^2 x+1$에서 $f'(x)=-8\sin x\cos x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=-2\sqrt{3}$

$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{-2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

0395 답 ④

$\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)-g(1-h)+g(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}$

$=g'(1)+g'(1)=2g'(1)$

$g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$k^3-5k^2+9k-5=1$

$k^3-5k^2+9k-6=0$, $(k-2)(k^2-3k+3)=0$

즉, $k=2$이므로 $g(1)=2$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(2)}$

$f(x)=x^3-5x^2+9x-5$에서 $f'(x)=3x^2-10x+9$이므로

$f'(2)=12-20+9=1$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}=2g'(1)$

$=\frac{2}{f'(2)}=\frac{2}{1}=2$

0396 답 ③

$g(e)=a$라 하면 $f(a)=e$이므로

$e^{a^3+4a+1}=e$, $a^3+4a+1=1$

$a^3+4a=0$, $a(a^2+4)=0$

$\therefore a=0$

즉, $g(e)=0$이고

$f(x)=e^{x^3+4x+1}$에서 $f'(x)=(3x^2+4)e^{x^3+4x+1}$이므로

$f'(0)=4e$

$\therefore \lim_{x\to e}\frac{g(x)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}=g'(e)$

$=\frac{1}{f'(g(e))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{4e}$

0397 답 ④

함수 $f(x)=(x-1)e^x$ $(x>0)$의 그래프가 점 (k, e^2)을 지나므로

$f(k)=e^2$에서 $(k-1)e^k=e^2$ $\therefore k=2$

즉, $f(2)=e^2$이므로 $g(e^2)=2$

$f(x)=(x-1)e^x$에서 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$이므로

$f'(2)=2e^2$

$\therefore g'(e^2)=\frac{1}{f'(g(e^2))}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2e^2}$

한편, $h(x)=x^2g(x)$에서

$h'(x)=2xg(x)+x^2g'(x)$이므로

$h'(e^2)=2e^2g(e^2)+e^4g'(e^2)$

$=2e^2\times 2+e^4\times\frac{1}{2e^2}$

$=\frac{9}{2}e^2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0398

답 5

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\frac{1}{5}$에서 극한값이 존재하고 $x\to1$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(1)=3$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=\frac{1}{5}$

$f(1)=3$에서 $g(3)=1$이므로

$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(1)}=5$

$\therefore g(3)g'(3)=1\times5=5$

0402

답 ④

조건 (나)의 $\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}=12$에서 극한값이 존재하고

$x\to1$일 때, (분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f'(f(x))-1\}=0$이므로 $f'(f(1))=1$

$\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$

$=f''(f(1))\times f'(1)$

$=f''(2)\times3$ ($\because$ 조건 (가)에서 $f(1)=2$, $f'(1)=3$)

$=3f''(2)$

이때 $3f''(2)=12$이므로

$f''(2)=4$

유형 18 이계도함수

0399

답 ⑤

$f(x)=e^{2x}+\sin2x$에서

$f'(x)=2e^{2x}+2\cos2x$

$f''(x)=4e^{2x}-4\sin2x$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=4$

0400

답 -2

$f(x)=\frac{2}{x+2}$에서 $f'(x)=-\frac{2}{(x+2)^2}$

$f''(x)=\frac{2\times2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{4}{(x+2)^3}$

$f''(a)=4$이므로

$\frac{4}{(a+2)^3}=4$, $(a+2)^3=1$ $\therefore a=-1$

$\therefore f'(a)=f'(-1)=-2$

0401

답 ①

$f(x)=xe^{ax+b}$에서

$f'(x)=e^{ax+b}+axe^{ax+b}=(1+ax)e^{ax+b}$

$f'(0)=2$이므로 $e^b=2$

$\therefore b=\ln2$

$f''(x)=ae^{ax+b}+(1+ax)\times ae^{ax+b}$

$=(2+ax)ae^{ax+b}$

$f''(0)=4$이므로 $2ae^b=4$

$2a\times2=4$ $\therefore a=1$

$\therefore ab=1\times\ln2=\ln2$

PART B 기출 & 기출변형 문제

0403

답 ①

$f(x)=\frac{1}{x+3}$에서 $f'(x)=-\frac{1}{(x+3)^2}$이므로

$f''(x)=\frac{2(x+3)}{(x+3)^4}=\frac{2}{(x+3)^3}$

$\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=f''(a)=2$에서

$\frac{2}{(a+3)^3}=2$, $(a+3)^3=1$

$a+3=1$ $\therefore a=-2$

0404

답 ③

함수 $f(g(x))$의 $x=0$에서의 미분계수가 40이므로

$f'(g(0))g'(0)=40$ …… ㉠

$g(x)=e^{4x}+1$에서 $g'(x)=4e^{4x}$이므로

$g(0)=e^0+1=2$, $g'(0)=4e^0=4$

㉠에서 $f'(2)\times4=40$ $\therefore f'(2)=10$

$f(x)=kx^2-4x$에서 $f'(x)=2kx-4$이므로

$f'(2)=4k-4=10$, $4k=14$

$\therefore k=\frac{7}{2}$

짝기출

두 함수 $f(x)=kx^2-2x$, $g(x)=e^{3x}+1$이 있다. 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$에 대하여 $h'(0)=42$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

답 4

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0405

답 ①

점 (a, b)가 곡선 $e^x-e^y=y$ 위의 점이므로

$e^a-e^b=b$ ····· ㉠

$e^x-e^y=y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x-e^y\times\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$

$(e^y+1)\dfrac{dy}{dx}=e^x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x}{e^y+1}$ ····· ㉡

주어진 곡선 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 1이므로

㉡에 $x=a$, $y=b$를 대입하면

$\dfrac{e^a}{e^b+1}=1$

$\therefore e^a=e^b+1$ ····· ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$(e^b+1)-e^b=b$

$\therefore b=1$

$b=1$을 ㉢에 대입하면

$e^a=e+1$

$\therefore a=\ln(e+1)$

$\therefore a+b=1+\ln(e+1)$

0406

답 7

$f'(x)=\{f(x)\}^2+f(x)+1$에서

$f''(x)=2f(x)f'(x)+f'(x)$

$g(x)=\ln|f'(x)|$에서

$g'(x)=\dfrac{f''(x)}{f'(x)}$

$=\dfrac{2f(x)f'(x)+f'(x)}{f'(x)}$

$=2f(x)+1$

$\therefore g'(2e)=2f(2e)+1=2\times3+1=7$

짝기출

열린구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

㈎ $f'(x)=1+\{f(x)\}^2$

㈏ $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

함수 $g(x)=\ln f'(x)$에 대하여 $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$의 값은?

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

답 ③

0407

답 ②

선분 OP의 길이는 점 P의 x좌표와 같으므로

$\overline{OP}=t+\dfrac{1}{t}$

선분 OQ의 길이는 원 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2t^2}$의 반지름의 길이와 같으므로

$\overline{OQ}=\sqrt{\dfrac{1}{2t^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}t}$

$\therefore f(t)=\overline{OP}\times\overline{OQ}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{2}t}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$

$f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\left(-\dfrac{2}{t^3}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{t^3}$이므로

$f'(\sqrt{2})=-\dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3}=-\dfrac{1}{2}$

0408

답 ①

$x=e^t$, $y=(2t^2+nt+n)e^t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=e^t$

$\dfrac{dy}{dt}=(4t+n)e^t+(2t^2+nt+n)e^t$

$=\{2t^2+(4+n)t+2n\}e^t$

이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$

$=\dfrac{\{2t^2+(4+n)t+2n\}e^t}{e^t}$

$=2t^2+(4+n)t+2n$

$=2\left(t+\dfrac{4+n}{4}\right)^2+2n-2\left(\dfrac{4+n}{4}\right)^2$

이때 $\dfrac{dy}{dx}$가 $t=a_n$에서 최솟값 b_n을 가지므로

$a_n=-\dfrac{4+n}{4}$, $b_n=2n-2\left(\dfrac{4+n}{4}\right)^2$

따라서 $a_4=-\dfrac{4+4}{4}=-2$,

$b_2=4-2\left(\dfrac{4+2}{4}\right)^2=4-\dfrac{9}{2}=-\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{b_2}{a_4}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{-2}=\dfrac{1}{4}$

짝기출

매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 함수

$x=\ln t+t$, $y=-t^3+3t$

에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$가 $t=a$에서 최댓값을 가질 때, a의 값은?

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

답 ⑤

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0409

답 3

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$g(x)=-\cos x$에서 $g'(x)=\sin x$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\dfrac{\pi}{3}}{x-1}=k$에서 극한값이 존재하고 $x\to 1$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1}\left\{f(x)-\dfrac{\pi}{3}\right\}=0$이므로 $f(1)=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\dfrac{\pi}{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=k$

함수 $y=h(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ h(1))$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$h'(1)=\dfrac{1}{2}$

$g'(f(1))f'(1)=\dfrac{1}{2}$

$g'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\times k=\dfrac{1}{2}$

$\sin\dfrac{\pi}{3}\times k=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}k=\dfrac{1}{2}$

$\therefore k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore 9k^2=9\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=3$

짝기출

미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\sin x$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ (g\circ f)(1))$에서의 접선이 원점을 지난다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=k$$

일 때, 상수 k에 대하여 $30k^2$의 값을 구하시오.

답 10

0410

답 ①

$g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$

$\tan^3 k=1$에서 $\tan k=1$

$\therefore k=\dfrac{\pi}{4}\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<k<\dfrac{\pi}{2}\right)$

즉, $g(1)=\dfrac{\pi}{4}$이고

$f(x)=\tan^3 x$에서 $f'(x)=3\tan^2 x\sec^2 x$이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3\times 1^2\times(\sqrt{2})^2=6$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{6}$

0411

답 ③

조건 (가)의 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-4}{x-1}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\to 1$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(1)=4$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=2$

조건 (나)의 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-5}{x-1}=6$에서 극한값이 존재하고 $x\to 1$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1}\{h(x)-5\}=0$이므로 $h(1)=5$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$이므로

$h'(1)=6$

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h(1)=5$에서 $g(f(1))=5$

$\therefore g(4)=5$

$h'(1)=6$에서 $g'(f(1))f'(1)=6$, $g'(4)\times 2=6$

$\therefore g'(4)=3$

$\therefore g(4)+g'(4)=5+3=8$

짝기출

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$h(x)=(g\circ f)(x)$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$, $f'(1)=3$

(나) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-5}{x-1}=12$

$g(2)+g'(2)$의 값은?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

답 ③

0412

답 ④

$g(x)=\dfrac{f(x)\cos x}{e^x}$에서

$g'(x)=\dfrac{\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}e^x-f(x)\cos x\times e^x}{e^{2x}}$

$=\dfrac{f'(x)\cos x-f(x)\sin x-f(x)\cos x}{e^x}$

$g'(\pi)=\dfrac{f'(\pi)\cos\pi-f(\pi)\sin\pi-f(\pi)\cos\pi}{e^\pi}$

$=\dfrac{-f'(\pi)+f(\pi)}{e^\pi}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$g'(\pi)=e^{\pi}g(\pi)$이고

$g(\pi)=\dfrac{f(\pi)\cos\pi}{e^{\pi}}=-\dfrac{f(\pi)}{e^{\pi}}$이므로

$\dfrac{-f'(\pi)+f(\pi)}{e^{\pi}}=e^{\pi}\left\{-\dfrac{f(\pi)}{e^{\pi}}\right\}$

$-f'(\pi)+f(\pi)=-e^{\pi}f(\pi)$

$(e^{\pi}+1)f(\pi)=f'(\pi)$

$\therefore \dfrac{f'(\pi)}{f(\pi)}=e^{\pi}+1$

0413

답 5

함수 $f(x)$의 역함수가 $g\left(\dfrac{x+8}{10}\right)$이므로

$f\left(g\left(\dfrac{x+8}{10}\right)\right)=x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'\left(g\left(\dfrac{x+8}{10}\right)\right)\times g'\left(\dfrac{x+8}{10}\right)\times\dfrac{1}{10}=1$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(g(1))\times g'(1)\times\dfrac{1}{10}=1$이고, $g(1)=0$이므로

$f'(0)\times g'(1)=10$

$\therefore g'(1)=\dfrac{10}{f'(0)}$

이때 $f(x)=(x^2+2)e^{-x}$에서

$f'(x)=2x\times e^{-x}+(x^2+2)\times(-e^{-x})$

$=(-x^2+2x-2)e^{-x}$

이므로 $f'(0)=-2$

$\therefore |g'(1)|=\left|\dfrac{10}{f'(0)}\right|=\left|\dfrac{10}{-2}\right|=5$

다른 풀이

$h(x)=g\left(\dfrac{x+8}{10}\right)$이라 하면 ····· ㉠

$h(2)=g(1)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$h'(x)=g'\left(\dfrac{x+8}{10}\right)\times\dfrac{1}{10}$

$\therefore g'\left(\dfrac{x+8}{10}\right)=10h'(x)$

함수 $h(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$g'(1)=10h'(2)=\dfrac{10}{f'(h(2))}=\dfrac{10}{f'(0)}$

이때 $f(x)=(x^2+2)e^{-x}$에서

$f'(x)=2x\times e^{-x}+(x^2+2)\times(-e^{-x})$

$=(-x^2+2x-2)e^{-x}$

이므로 $f'(0)=-2$

$\therefore |g'(1)|=\left|\dfrac{10}{f'(0)}\right|=\left|\dfrac{10}{-2}\right|=5$

0414

답 ②

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-2)f(x)}=\dfrac{5}{12}$에서 극한값이 존재하고 $x\to2$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로 $f(2)=g(2)$

이때 역함수 관계인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$f(2)=g(2)=2$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-2)f(x)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\left\{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}-\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}\right\}\times\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{f(x)}$

$=\{f'(2)-g'(2)\}\times\dfrac{1}{f(2)}$ $\left[g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}=\dfrac{1}{f'(2)}\right]$

$=\left\{f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}\right\}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{5}{12}$

즉, $f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{5}{6}$이고, $f(x)$는 증가하는 함수이므로

$f'(2)=t$ $(t>0)$으로 놓으면

$t-\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{6}$, $6t^2-5t-6=0$

$(3t+2)(2t-3)=0$

$\therefore t=\dfrac{3}{2}$ $(\because t>0)$

$\therefore f'(2)=\dfrac{3}{2}$

$h(x)=\{f(x)+g(x)\}^2$에서

$h'(x)=2\{f(x)+g(x)\}\{f'(x)+g'(x)\}$이므로

$h'(2)=2\{f(2)+g(2)\}\{f'(2)+g'(2)\}$

$=2\times(2+2)\times\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}\right)$

$=\dfrac{52}{3}$

짝기출

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x)\le\dfrac{1}{3}$이다.

(나) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\dfrac{8}{9}$

$f(1)$의 값은?

① -11 ② -9 ③ -7 ④ -5 ⑤ -3

답 ①

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A

06 도함수의 활용(1)

유형 01 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

0415

답 ④

$f(x)=\sin x-\cos x$에서

$f'(x)=\cos x+\sin x$

이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}=1$이고,

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=1$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=x-\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore y=x+1-\frac{\pi}{2}$

이 직선이 점 $\left(-\frac{\pi}{2}, k\right)$를 지나므로

$k=-\frac{\pi}{2}+1-\frac{\pi}{2}=1-\pi$

0416

답 ③

$f(x)=2\sqrt{x^2+1}$이라 하면 $f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

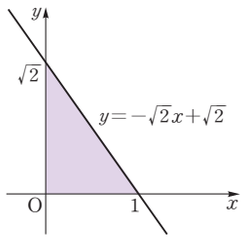
이때 $f'(-1)=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$y-2\sqrt{2}=-\sqrt{2}(x+1)$ $\quad\therefore y=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}$

따라서 접선의 x절편은 1, y절편은 $\sqrt{2}$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|1|\times|\sqrt{2}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$



0417

답 1

$f(x)=ax\ln x+b$라 하면 $f'(x)=a\ln x+a$

이때 $f'(1)=a$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=a(x-1)$ $\quad\therefore y=ax-a+3$

이 직선이 직선 $y=-2x+5$와 일치하므로 $a=-2$

한편, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$f(1)=a\ln 1+b=3$에서 $b=3$

$\therefore a+b=(-2)+3=1$

0418

답 ③

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=k$에서 극한값이 존재하고 $x\to1$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(1)=1$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=k$에서 $f'(1)=k$

$g(x)=xe^x$에서

$g'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

한편, $y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서 $y'=g'(f(x))f'(x)$이므로

곡선 $y=(g\circ f)(x)$ 위의 점 $(1, (g\circ f)(1))$, 즉 $(1, e)$에서의 접선의 기울기는

$g'(f(1))f'(1)=g'(1)\times k=2ke$

따라서 접선의 방정식은

$y-e=2ke(x-1)$ $\quad\therefore y=2kex+(1-2k)e$

이 직선이 원점을 지나므로

$(1-2k)e=0$ $\quad\therefore k=\frac{1}{2}$

참고

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$일 때

$f(a)=b$, $f'(a)=c$

유형 02 접선에 수직인 직선의 방정식

0419

답 ②

$f(x)=x^2\ln x-1$이라 하면

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x$이므로

$f'(1)=2\ln 1+1=1$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x$

0420

답 -8

$f(x)=4x+3\cos x$라 하면 $f(0)=3$

$f'(x)=4-3\sin x$이므로 $f'(0)=4$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 3)$에서의 접선의 기울기가 4이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{4}x+3$ $\quad\therefore x+4y-12=0$

즉, $a=4$, $b=-12$이므로

$a+b=4+(-12)=-8$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0421

답 25

$f(x)=2x+x\ln x$라 하면

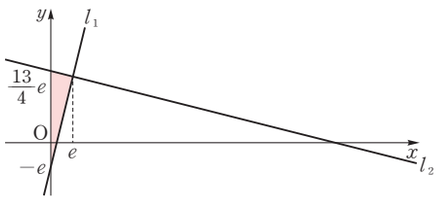
$f'(x)=2+\ln x+1=3+\ln x$에서 $f'(e)=3+\ln e=4$이므로

직선 l_1의 방정식은

$y-3e=4(x-e)$ $\therefore y=4x-e$

직선 l_2는 직선 l_1에 수직이므로 그 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다. 즉, 직선 l_2의 방정식은

$y-3e=-\frac{1}{4}(x-e)$ $\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}e$



이때 직선 l_1의 y절편은 $-e$, 직선 l_2의 y절편은 $\frac{13}{4}e$이므로

두 직선 l_1, l_2와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{13}{4}e-(-e)\right\}\times e=\frac{17}{8}e^2$

따라서 $p=8$, $q=17$이므로

$p+q=8+17=25$

유형 03 기울기가 주어진 접선의 방정식

0422

답 ③

$f(x)=2x-3\ln x$라 하면 $f'(x)=2-\frac{3}{x}$

이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x+y-2=0$, 즉 $y=-x+2$에 평행한 직선이 접하는 접점의 좌표를 $(k,\ f(k))$라 하면 $f'(k)=-1$에서

$2-\frac{3}{k}=-1$, $-\frac{3}{k}=-3$

$\therefore k=1$, $f(1)=2-3\ln 1=2$

즉, 접점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$ $\therefore y=-x+3$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$-x+3=0$ $\therefore x=3$

따라서 구하는 직선의 x절편은 3이다.

0423

답 π

$f(x)=3x+\sin 4x$라 하면 $f'(x)=3+4\cos 4x$

곡선 $y=f(x)$와 기울기가 -1인 직선이 접하는 접점의 좌표를 $(k,\ f(k))$라 하면 $f'(k)=-1$에서

$3+4\cos 4k=-1$, $\cos 4k=-1$

이때 $0<k<\frac{\pi}{2}$에서 $0<4k<2\pi$이므로 $4k=\pi$

$\therefore k=\frac{\pi}{4}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}\pi+\sin\pi=\frac{3}{4}\pi$

즉, 접점의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{3}{4}\pi=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore y=-x+\pi$

따라서 구하는 직선의 y절편은 π이다.

0424

답 ①

$f(x)=\ln\left(x+\frac{1}{e}\right)$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{e}}=\frac{e}{ex+1}$

곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 e인 직선이 $x=k$인 점에서 접한다고 하면 $f'(k)=e$에서

$\frac{e}{ek+1}=e$, $ek+1=1$

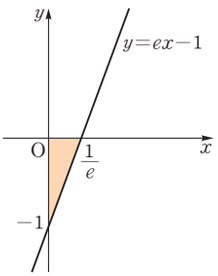
$\therefore k=0$, $f(0)=\ln\frac{1}{e}=-1$

즉, 접점의 좌표가 $(0,\ -1)$이므로 접선의 방정식은

$y=ex-1$

이 직선의 x절편은 $\frac{1}{e}$, y절편은 -1이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left|\frac{1}{e}\right|\times|-1|=\frac{1}{2e}$



0425

답 ①

$f(x)=\frac{1}{x-2}+k$라 하면 $f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-4x+3$의 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 $f'(t)=-4$에서

$-\frac{1}{(t-2)^2}=-4$, $(t-2)^2=\frac{1}{4}$

$t-2=-\frac{1}{2}$ 또는 $t-2=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\frac{3}{2}$ 또는 $t=\frac{5}{2}$

(i) $t=\frac{3}{2}$일 때

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-4\times\frac{3}{2}+3=-3$에서

$\frac{1}{\frac{3}{2}-2}+k=-3$ $\therefore k=-1$

(ii) $t=\frac{5}{2}$일 때

$f\left(\frac{5}{2}\right)=-4\times\frac{5}{2}+3=-7$에서

$\frac{1}{\frac{5}{2}-2}+k=-7$ $\therefore k=-9$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+(-9)=-10$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 04 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

0426 답 ③

$f(x)=e^{x-1}$이라 하면 $f'(x)=e^{x-1}$

점 A(2, 0)에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, e^{t-1})이라 하면 접선의 방정식은

$y-e^{t-1}=e^{t-1}(x-t)$ $\therefore y=e^{t-1}x+(1-t)e^{t-1}$

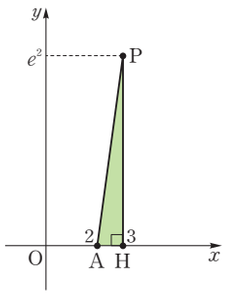
이 직선이 점 A(2, 0)을 지나므로

$2e^{t-1}+(1-t)e^{t-1}=0$에서

$(3-t)e^{t-1}=0$ $\therefore t=3$ ($\because e^{t-1}>0$)

따라서 P(3, e^2), H(3, 0)이므로 구하는 삼각형 APH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times(3-2)\times e^2=\frac{e^2}{2}$



0427 답 ②

$f(x)=2\sqrt{x-1}$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

점 (−1, 0)에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, 2\sqrt{t-1})$이라 하면 접선의 방정식은

$y-2\sqrt{t-1}=\frac{1}{\sqrt{t-1}}(x-t)$ ····· ㉠

직선 ㉠이 점 (−1, 0)을 지나므로

$-2\sqrt{t-1}=\frac{1}{\sqrt{t-1}}(-1-t)$, $-2(t-1)=-1-t$

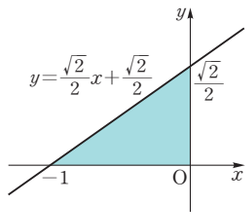
$-t=-3$ $\therefore t=3$

이를 ㉠에 대입하면

$y-2\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-3)$ $\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 접선의 x절편은 −1, y절편은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|-1|\times\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{4}$



0428 답 ③

$f(x)=x\ln\frac{x}{4}$라 하면 $f'(x)=\ln\frac{x}{4}+1$

점 A(0, −4)에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t, t\ln\frac{t}{4}\right)$라 하면 접선의 방정식은

$y-t\ln\frac{t}{4}=\left(\ln\frac{t}{4}+1\right)(x-t)$

이 직선이 점 A(0, −4)를 지나므로

$-4-t\ln\frac{t}{4}=\left(\ln\frac{t}{4}+1\right)\times(-t)$, $-4-t\ln\frac{t}{4}=-t\ln\frac{t}{4}-t$

$\therefore t=4$

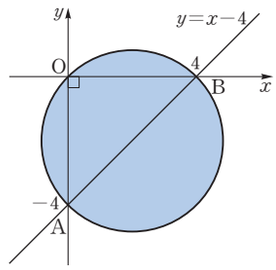
즉, P(4, 0)이므로 B(4, 0)

삼각형 OAB는 $\angle AOB=90^\circ$인 직각삼각형이므로 외접원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{4^2+4^2}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 삼각형 OAB의 외접원의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{2})^2=8\pi$



0429 답 ④

$f(x)=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$

점 (2, 3)에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t, \frac{t}{t+1}\right)$라 하면 접선의 방정식은

$y-\frac{t}{t+1}=\frac{1}{(t+1)^2}(x-t)$

이 직선이 점 (2, 3)을 지나므로

$3-\frac{t}{t+1}=\frac{1}{(t+1)^2}(2-t)$

$3(t+1)^2-t(t+1)=2-t$, $2t^2+6t+1=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

이때 두 접선의 기울기는 $\frac{1}{(\alpha+1)^2}$, $\frac{1}{(\beta+1)^2}$이므로

$m_1m_2=\frac{1}{(\alpha+1)^2}\times\frac{1}{(\beta+1)^2}=\frac{1}{\{(\alpha+1)(\beta+1)\}^2}$

$=\frac{1}{(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-3+1\right)^2}=\frac{4}{9}$

유형 05 접선의 개수

0430 답 ④

$f(x)=x^2e^x+1$이라 하면 $f'(x)=(x^2+2x)e^x$

점 (2, 1)에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2e^t+1)이라 하면 접선의 방정식은

$y-t^2e^t-1=(t^2+2t)e^t(x-t)$

이 직선이 점 (2, 1)을 지나므로

$-t^2e^t=(t^2+2t)e^t(2-t)$, $-t^2=-t^3+4t$ ($\because e^t>0$)

$t^3-t^2-4t=0$, $t(t^2-t-4)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

따라서 접점이 3개이므로 구하는 접선의 개수는 3이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0431

답 ③

$f(x)=(x-2k)e^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+(x-2k)e^x=(x-2k+1)e^x$

점 $(3k, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, (t-2k)e^t)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-(t-2k)e^t=(t-2k+1)e^t(x-t)$

이 직선이 점 $(3k, 0)$을 지나므로

$-(t-2k)e^t=(t-2k+1)e^t(3k-t)$

$-t+2k=3kt-6k^2+3k-t^2+2kt-t$ ($\because e^t>0$)

$\therefore t^2-5kt+6k^2-k=0$ ····· ㉠

점 $(3k, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선이 2개이려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이어야 하므로

$D=(-5k)^2-4(6k^2-k)>0$, $k^2+4k>0$

$k(k+4)>0$ $\therefore k<-4$ 또는 $k>0$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

0432

답 ④

$f(x)=x^2e^{-x}$이라 하면 $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}$

점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2e^{-t})이라 하면 접선의 방정식은

$y-t^2e^{-t}=(2t-t^2)e^{-t}(x-t)$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$-t^2e^{-t}=(2t-t^2)e^{-t}(a-t)$

$-t^2=2at-2t^2-at^2+t^3$ ($\because e^{-t}>0$)

$t^3-(a+1)t^2+2at=0$

$t\{t^2-(a+1)t+2a\}=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t^2-(a+1)t+2a=0$ ····· ㉠

점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 ㉠의 서로 다른 실근은 1개뿐이어야 한다.

따라서 이차방정식 $t^2-(a+1)t+2a=0$이 0을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다.

그런데 $a+1=0$, $2a=0$을 동시에 만족시키는 a의 값은 없으므로 이차방정식 $t^2-(a+1)t+2a=0$은 실근을 갖지 않아야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 하므로

$D=(a+1)^2-8a<0$

$a^2-6a+1<0$, $(a-3)^2<8$

$-2\sqrt{2}<a-3<2\sqrt{2}$

$\therefore 3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}$

Bible Says 하나의 실근이 주어진 삼차방정식

삼차방정식 $f(x)=0$이 $x=a$를 하나의 실근으로 가질 때
주어진 삼차방정식을 $(x-a)(ax^2+bx+c)=0$ ($a\neq0$) 꼴로 변형한 후 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면
(1) 실근만을 갖는다. ➡ $D\geq0$
(2) 중근을 갖는다. ➡ $D=0$ 또는 $a^2+ba+c=0$
(3) 한 개의 실근과 두 개의 허근을 갖는다. ➡ $D<0$

유형 06 공통인 접선

0433

답 ③

$f(x)=2a\ln x$, $g(x)=2x^2$이라 하면

$f'(x)=\frac{2a}{x}$, $g'(x)=4x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 접한다고 하면 이 점에서의 접선이 일치하므로

$f(t)=g(t)$에서 $2a\ln t=2t^2$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\frac{2a}{t}=4t$

$\therefore a=2t^2$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$4t^2\ln t=2t^2$, $\ln t=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\sqrt{e}$

이를 ㉡에 대입하면 $a=2e$

0434

답 -4

$f(x)=\frac{1}{\sin x}$, $g(x)=a(\sin x-1)$이라 하면

$f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $g'(x)=a\cos x$

두 곡선이 만나는 한 점의 x좌표를 t라 하면 이 점에서의 접선이 일치하므로

$f(t)=g(t)$에서 $\frac{1}{\sin t}=a(\sin t-1)$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-\frac{\cos t}{\sin^2 t}=a\cos t$

$\therefore a=-\frac{1}{\sin^2 t}$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{\sin t}=-\frac{1}{\sin^2 t}(\sin t-1)$

$\sin t=-\sin t+1$, $\sin t=\frac{1}{2}$ $\therefore t=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore a=-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{6}}=-4$

0435

답 -1

$f(x)=e^x\cos x$, $g(x)=ae^x$에서

$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$, $g'(x)=ae^x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 t라 하면 이 점에서의 접선이 일치하므로

$f(t)=g(t)$에서 $e^t\cos t=ae^t$

$\therefore \cos t=a$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $e^t(\cos t-\sin t)=ae^t$

$\therefore \cos t-\sin t=a$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\cos t-\sin t=\cos t$, $\sin t=0$

$\therefore t=0$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

즉, 접점의 좌표는 $(0, 1)$, 접선의 기울기는
$f'(0)=e^0(\cos 0-\sin 0)=1$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y=x+1$
따라서 구하는 접선의 x절편은 -1이다.

유형 07 역함수의 그래프의 접선의 방정식

0436

답 ③

$g(6)=k$라 하면 $f(k)=6$이므로
$k^3-2=6$, $k^3=8$
$\therefore k=2$
$f(x)=x^3-2$에서 $f'(x)=3x^2$이므로
$g'(6)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{12}$
즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(6, g(6))$을 지나고, 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은
$y-g(6)=-\dfrac{1}{g'(6)}(x-6)$, $y-2=-12(x-6)$
$\therefore y=-12x+74$
따라서 $a=-12$, $b=74$이므로
$a+b=-12+74=62$

0437

답 2

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-4}{x-1}=4$에서 극한값이 존재하고 $x\to 1$일 때,
(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(1)=4$
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$
함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g(4)=1$
이때 곡선 $y=g(x)$가 점 $(a, 1)$을 지나고 함수 $g(x)$는 일대일대응이므로 $a=4$
$g'(4)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4}$
따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, 1)$에서의 접선의 방정식은
$y-1=\dfrac{1}{4}(x-4)$ $\therefore y=\dfrac{1}{4}x$
즉, $h(x)=\dfrac{1}{4}x$이므로 $h(8)=\dfrac{1}{4}\times 8=2$

0438

답 ①

$g(2\ln 2)=k$라 하면 $f(k)=2\ln 2$이므로
$\ln(e^k+3)=\ln 4$에서 $e^k+3=4$
$e^k=1$ $\therefore k=0$
$f(x)=\ln(e^x+3)$에서 $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$이므로
$g'(\ln 4)=\dfrac{1}{f'(k)}=\dfrac{1}{f'(0)}=4$
즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2\ln 2, 0)$에서의 접선의 방정식은
$y=4(x-2\ln 2)$
$\therefore y=4x-8\ln 2$
따라서 $a=4$, $b=-8\ln 2$이므로
$\dfrac{b}{a}=-2\ln 2$

유형 08 매개변수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

0439

답 ②

$x=2+2t$, $y=at^2+2$를 각각 t에 대하여 미분하면
$\dfrac{dx}{dt}=2$, $\dfrac{dy}{dt}=2at$이므로
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2at}{2}=at$
$t=1$일 때 $x=4$, $y=a+2$
$\dfrac{dy}{dx}=a$
이므로 접선의 방정식은
$y-(a+2)=a(x-4)$
$\therefore ax-y-3a+2=0$
따라서 $a=1$, $b=-1$이므로
$a^2+b^2=1^2+(-1)^2=2$

0440

답 ③

$x=\ln(t+1)+2$, $y=\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{1}{2}t^2+2t+3$을 각각 t에 대하여 미분하면
$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t+1}$, $\dfrac{dy}{dt}=t^2-t+2$이므로
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t^2-t+2}{\frac{1}{t+1}}=(t+1)(t^2-t+2)$
$t=0$일 때 $x=2$, $y=3$
$\dfrac{dy}{dx}=1\times 2=2$
이므로 접선의 방정식은
$y-3=2(x-2)$
$\therefore y=2x-1$
따라서 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}(0, -1)$이므로
$\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

0441

답 9

$x=e^{2t}-e^{-2t}$, $y=e^{2t}+e^{-2t}$을 각각 t에 대하여 미분하면
$\dfrac{dx}{dt}=2e^{2t}+2e^{-2t}=2(e^{2t}+e^{-2t})$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\frac{dy}{dt}=2e^{2t}-2e^{-2t}=2(e^{2t}-e^{-2t})$

이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{e^{2t}+e^{-2t}}$

$t=\frac{1}{2}\ln 3$일 때

$x=e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

$y=e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}}=\frac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}=\frac{4}{5}$

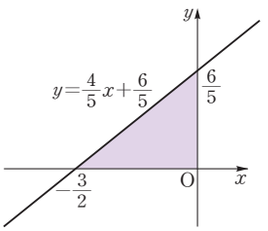
이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{10}{3}=\frac{4}{5}\left(x-\frac{8}{3}\right)$ $\therefore y=\frac{4}{5}x+\frac{6}{5}$

따라서 접선의 x절편은 $-\frac{3}{2}$, y절편은 $\frac{6}{5}$이므로 구하는 도형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\left|-\frac{3}{2}\right|\times\left|\frac{6}{5}\right|=\frac{9}{10}$

$\therefore 10S=9$



유형 09 음함수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

0442 답 ⑤

$2x^2+xy-y^2=2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x+y+x\times\frac{dy}{dx}-2y\times\frac{dy}{dx}=0$, $(x-2y)\frac{dy}{dx}=-(4x+y)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{4x+y}{x-2y}$ (단, $x-2y\neq 0$)

주어진 곡선 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{4+1}{1-2}=5$이므로 접선의 방정식은

$y-1=5(x-1)$ $\therefore 5x-y-4=0$

따라서 $a=5$, $b=-1$이므로

$a-b=5-(-1)=6$

0443 답 8

$\pi x=y+\sin xy$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\pi=\frac{dy}{dx}+\cos xy\times\left(y+x\times\frac{dy}{dx}\right)$

점 $(2, 2\pi)$에서의 접선의 기울기는

$\pi=\frac{dy}{dx}+\cos 4\pi\times\left(2\pi+2\times\frac{dy}{dx}\right)$

$3\times\frac{dy}{dx}=-\pi$ $\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\pi}{3}$

주어진 곡선 위의 점 $(2, 2\pi)$에서의 접선의 방정식은

$y-2\pi=-\frac{\pi}{3}(x-2)$ $\therefore y=-\frac{\pi}{3}x+\frac{8}{3}\pi$

따라서 구하는 접선의 y절편은 $a=\frac{8}{3}\pi$이므로

$\frac{3a}{\pi}=8$

0444 답 ④

$ax^2+bxy+y^2=3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2ax+by+bx\times\frac{dy}{dx}+2y\times\frac{dy}{dx}=0$

$(bx+2y)\frac{dy}{dx}=-(2ax+by)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2ax-by}{bx+2y}$ (단, $bx+2y\neq 0$)

점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{-4a-b}{2b+2}$이므로

접선의 방정식은 $y-1=\frac{-4a-b}{2b+2}(x-2)$

이 직선이 원 $(x-3)^2+(y+3)^2=4$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(3, -3)$을 지나야 한다.

즉, $-3-1=\frac{-4a-b}{2b+2}(3-2)$에서 $-4(2b+2)=-4a-b$

$\therefore 4a-7b=8$ ····· ㉠

한편, 곡선 $ax^2+bxy+y^2=3$이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$4a+2b+1=3$

$\therefore 2a+b=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{6}$, $b=-\frac{2}{3}$

$\therefore a-b=\frac{5}{6}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}$

유형 10 접선의 방정식의 활용

0445 답 ③

$f(x)=\ln x$라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점과 직선 $y=x+2$ 사이의 최소 거리는 기울기가 1인 직선과 곡선 $y=f(x)$가 접하는 접점과 직선 $y=x+2$ 사이의 거리와 같다.

이때 접점의 좌표를 $(t, \ln t)$라 하면

$f'(t)=1$에서 $\frac{1}{t}=1$ $\therefore t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 0)$이므로 구하는 최소 거리는 점 $(1, 0)$과 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \frac{|1-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0446

답 $\frac{3}{2}$

$f(x)=e^{2x-1}+1$이라 하면 $f'(x)=2e^{2x-1}$

삼각형 PAB의 넓이가 최소가 되려면 점 P는 직선 AB와 평행하면서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 접점이어야 한다.

$P(t,\ e^{2t-1}+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 직선 AB의 기울기와 같아야 한다.

이때 직선 AB의 기울기는 $\frac{-2-0}{0-1}=2$이므로

$2e^{2t-1}=2,\ e^{2t-1}=1$

$2t-1=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2} \quad \therefore P\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$

직선 AB의 방정식이 $y=2x-2$, 즉 $2x-y-2=0$이므로

점 P와 직선 $2x-y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1-2-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{2}$

0447

답 ⑤

두 직선 m과 n은 서로 평행하고, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $m\perp\overline{PQ}$, $n\perp\overline{PQ}$

$f(x)=\ln x$에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$

직선 m의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기와 같으므로

$\frac{1}{x}=1$에서 $x=1$, $f(1)=0 \quad \therefore P(1,\ 0)$

접선 n이 직선 m과 평행하고, 두 점 P, Q가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $Q(0,\ 1)$

따라서 구하는 직선 n의 방정식은 $y=x+1$이다.

유형 11 함수의 증가와 감소

0448

답 ①

$f(x)=(\ln 2x)^2$에서 진수의 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=2\ln 2x\times\frac{2}{2x}=\frac{2\ln 2x}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\ln 2x=0$

$2x=1 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$에서 증가하므로 $a=\frac{1}{2}$

0449

답 ④

$f'(x)=3-\frac{27}{x^2}=\frac{3x^2-27}{x^2}=\frac{3(x+3)(x-3)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

$x\neq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-3,\ 0)$ 또는 $(0,\ 3]$에서 감소하므로 구하는 정수 x는 -3, -2, -1, 1, 2, 3의 6개이다.

0450

답 ⑤

$f'(x)=2\cos 2x-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $2\cos 2x-2\sin x=0$

$1-2\sin^2 x-\sin x=0\ (\because \cos 2x=1-2\sin^2 x)$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0,\ (\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi\ (\because 0\le x\le\pi)$

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right]$에서 감소하므로

$m=\frac{\pi}{6},\ M=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore M+m=\pi$

0451

답 ②

$f'(x)=-\frac{2e^x(3x^2+1)-2e^x\times6x}{(3x^2+1)^2}$

$=-\frac{(6x^2-12x+2)e^x}{(3x^2+1)^2}=-\frac{2(3x^2-6x+1)e^x}{(3x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $3x^2-6x+1=0\ (\because e^x>0)$

함수 $f(x)$가 $a\le x\le b$에서 증가한다고 하면 a, b는 이차방정식 $3x^2-6x+1=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=2,\ ab=\frac{1}{3}$

이때 $a\le\alpha<\beta\le b$이므로

$(\beta-\alpha)^2\le(b-a)^2=(a+b)^2-4ab$

$=2^2-4\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

즉, $\beta-\alpha$의 최댓값은 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 12 실수 전체의 집합에서 함수가 증가 또는 감소할 조건

0452 답 ③

$f(x)=(2x-k)e^{x^2}$에서

$f'(x)=2e^{x^2}+(2x-k)e^{x^2}\times 2x=2(2x^2-kx+1)e^{x^2}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$2x^2-kx+1\geq 0$ ($\because e^{x^2}>0$)

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $2x^2-kx+1=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\leq 0$이어야 한다.

$D=(-k)^2-4\times 2\times 1\leq 0$에서 $k^2-8\leq 0$

$\therefore -2\sqrt{2}\leq k\leq 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 음이 아닌 정수 k는 0, 1, 2의 3개이다.

0453 답 ⑤

$f(x)=a\sin x-3x$에서 $f'(x)=a\cos x-3$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로

$a\cos x\leq 3$ ····· ㉠

이때 $-1\leq\cos x\leq 1$에서 $-|a|\leq a\cos x\leq |a|$이므로

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$|a|\leq 3$ $\therefore -3\leq a\leq 3$

따라서 구하는 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이다.

0454 답 1

$f(x)=x+\ln(x^2+n)$에서 진수의 조건에 의하여 $x^2+n>0$

위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$n>0$ ····· ㉠

$f'(x)=1+\dfrac{2x}{x^2+n}=\dfrac{x^2+2x+n}{x^2+n}$

함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 또는 $f'(x)\leq 0$이어야 하는데 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=1$이므로 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$\dfrac{x^2+2x+n}{x^2+n}\geq 0$에서 $x^2+2x+n\geq 0$ ($\because x^2+n>0$)

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2+2x+n=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\leq 0$이어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=1-n\leq 0$ $\therefore n\geq 1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $n\geq 1$

따라서 함수 $f(x)$가 역함수를 갖도록 하는 자연수 n의 최솟값은 1이다.

0455 답 ①

$f(x)=(x^2+kx+6)e^x$에서

$f'(x)=(2x+k)e^x+(x^2+kx+6)e^x$

$=\{x^2+(k+2)x+k+6\}e^x$

함수 $f(x)$에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

즉, $f'(x)\geq 0$ 또는 $f'(x)\leq 0$이어야 하는데 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\infty$이므로 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$\{x^2+(k+2)x+k+6\}e^x\geq 0$에서

$x^2+(k+2)x+k+6\geq 0$ ($\because e^x>0$)

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2+(k+2)x+k+6=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\leq 0$이어야 한다.

$D=(k+2)^2-4(k+6)\leq 0$, $k^2-20\leq 0$

$\therefore -2\sqrt{5}\leq k\leq 2\sqrt{5}$

따라서 구하는 양수 k의 최댓값은 $2\sqrt{5}$이다.

유형 13 주어진 구간에서 함수가 증가 또는 감소할 조건

0456 답 ④

$f(x)=e^{2x}-kx$에서 $f'(x)=2e^{2x}-k$

함수 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 증가하려면 이 구간에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

따라서 $f'(0)\geq 0$이어야 하므로

$2-k\geq 0$ $\therefore k\leq 2$

0457 답 ④

$f(x)=x^2-3x-\dfrac{k}{x}$에서

$f'(x)=2x-3+\dfrac{k}{x^2}=\dfrac{2x^3-3x^2+k}{x^2}$

함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$g(x)=2x^3-3x^2+k$라 하면 $g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	···	1	···
$g'(x)$		−	0	+
$g(x)$		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 $f'(x)\geq 0$이려면 $g(1)\geq 0$이어야 한다.

$2-3+k\geq 0$ $\therefore k\geq 1$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 1이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0458

답 4

$f(x)=a^2\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x^2+8x$에서 $f'(x)=-\frac{a^2}{x}-x+8$

함수 $f(x)$가 $0<x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키려면 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)$는 감소해야 하므로 $x>0$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

즉, $-\frac{a^2}{x}-x+8\le 0$에서 $x^2-8x+a^2\ge 0$

$(x-4)^2+a^2-16\ge 0$

이 이차부등식이 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a^2-16\ge 0$, $(a+4)(a-4)\ge 0$

$\therefore a\ge 4$ ($\because a>0$)

따라서 구하는 양수 a의 최솟값은 4이다.

유형 14 유리함수의 극대 · 극소

0459

답 ②

$f(x)=\frac{4x}{x^2+4}$에서

$f'(x)=\frac{4(x^2+4)-4x\times 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$

$=\frac{-4(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-2	…	2	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대, $x=-2$에서 극소이므로

$M=f(2)=\frac{4\times 2}{2^2+4}=1$

$m=f(-2)=\frac{4\times(-2)}{(-2)^2+4}=-1$

$\therefore M^2+m^2=1^2+(-1)^2=2$

0460

답 ①

$f(x)=\frac{x^2-4x+13}{x-2}=\frac{(x-2)^2+9}{x-2}=x-2+\frac{9}{x-2}$에서

$f'(x)=1-\frac{9}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	(2)	…	5	…
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=5$에서 극소이므로

$M=f(-1)=\frac{1+4+13}{-1-2}=-6$

$m=f(5)=\frac{25-20+13}{5-2}=6$

$\therefore M-m=(-6)-6=-12$

0461

답 7

$f(x)=x+\frac{k}{x+1}$에서

$f'(x)=1-\frac{k}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+1-k}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서

$x^2+2x+1-k=0$ …… ㉠

이 이차방정식의 두 근을 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면

$\alpha^2+2\alpha+1-k=0$, $\beta^2+2\beta+1-k=0$ …… ㉡

이때 이차함수 $y=x^2+2x+1-k=(x+1)^2-k$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이므로 $\alpha<-1<\beta$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	α	…	(-1)	…	β	…
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값 -5를 가지므로

$\alpha+\frac{k}{\alpha+1}=-5$에서 $\alpha^2+\alpha+k=-5\alpha-5$

$\alpha^2+6\alpha+5+k=0$ …… ㉢

㉡에서 $k=\alpha^2+2\alpha+1$을 ㉢에 대입하면

$\alpha^2+6\alpha+5+\alpha^2+2\alpha+1=0$, $\alpha^2+4\alpha+3=0$

$(\alpha+3)(\alpha+1)=0$ $\therefore \alpha=-3$ ($\because \alpha\ne -1$)

$\alpha=-3$을 ㉢에 대입하면 $k=-(9-18+5)=4$

이를 ㉠에 대입하면 $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로

$m=f(1)=1+\frac{4}{1+1}=3$

$\therefore k+m=4+3=7$

유형 15 무리함수의 극대 · 극소

0462

답 ②

$f(x)=x\sqrt{x+4}$에서 $x\ge -4$이고

$f'(x)=\sqrt{x+4}+\frac{x}{2\sqrt{x+4}}$

$f'(x)=0$에서 $2(x+4)+x=0$

$3x+8=0$ $\therefore x=-\frac{8}{3}$

$x\ge -4$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	…	$-\frac{8}{3}$	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{8}{3}$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$f\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{8}{3}\times\sqrt{-\frac{8}{3}+4}=-\frac{16\sqrt{3}}{9}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0463

답 ⑤

$f(x)=2x+\sqrt{9-x^2}$에서 $9-x^2\geq 0$

$\therefore\ -3\leq x\leq 3$

$f'(x)=2-\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $2\sqrt{9-x^2}=x$ ····· ㉠

$36-4x^2=x^2$, $5x^2=36$

$\therefore\ x=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ ($\because$ ㉠에서 $x\geq 0$)

$-3\leq x\leq 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	$\frac{6\sqrt{5}}{5}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$에서 극댓값

$f\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}+\sqrt{9-\dfrac{36}{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}+\dfrac{3\sqrt{5}}{5}=3\sqrt{5}$

를 가지므로 $a=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$, $b=3\sqrt{5}$

$\therefore\ ab=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\times 3\sqrt{5}=18$

0464

답 ③

$f(x)=\dfrac{2}{x+\sqrt{1-x}}$에서

$f'(x)=-\dfrac{2\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{(x+\sqrt{1-x})^2}=-\dfrac{2\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}(x+\sqrt{1-x})^2}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{1-x}=\dfrac{1}{2}$

$1-x=\dfrac{1}{4}$ $\therefore\ x=\dfrac{3}{4}$

$0\leq x\leq 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{3}{4}$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{2}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}=\dfrac{8}{5}$

유형 16 지수함수의 극대 · 극소

0465

답 ②

$f(x)=e^x-2x+1$에서 $f'(x)=e^x-2$

$f'(x)=0$에서 $e^x=2$

$\therefore\ x=\ln 2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=\ln 2$에서 극소이므로 $a=\ln 2$

0466

답 ③

$f(x)=(2x-1)e^{-x^2}+a$에서

$f'(x)=2e^{-x^2}+(2x-1)e^{-x^2}\times(-2x)$

$=(-4x^2+2x+2)e^{-x^2}=-2(2x+1)(x-1)e^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$ ($\because\ e^{-x^2}>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{2}$에서 극솟값 0을 가지므로

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2e^{-\frac{1}{4}}+a=0$ $\therefore\ a=\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(1)=\dfrac{1}{e}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$

0467

답 ③

$f(x)=(x^2+ax+b)e^x$에서

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$

$g(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$에서

$g'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+b)e^{-x}$

$=\{-x^2-(a-2)x+a-b\}e^{-x}$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 각각 $x=-1$, $x=3$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-1)=0$에서 $(1-a-2+a+b)e^{-1}=0$

$\therefore\ b=1$

$g'(3)=0$에서 $(-9-3a+6+a-b)e^{-3}=0$

$-2a-3-b=0$

$-2a=4$ ($\because\ b=1$) $\therefore\ a=-2$

$f(x)=(x^2-2x+1)e^x$, $f'(x)=(x^2-1)e^x$

$g(x)=(x^2-2x+1)e^{-x}$, $g'(x)=(-x^2+4x-3)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x^2-1=0$ ($\because\ e^x>0$)

$(x+1)(x-1)=0$ $\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로

$p=f(1)=0$

$g'(x)=0$에서 $x^2-4x+3=0$ ($\because\ e^{-x}>0$)

$(x-1)(x-3)=0$ $\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

또한 함수 $g(x)$도 $x=1$에서 극소이므로

$q=g(1)=0$

$\therefore\ p+q=0$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0468

답 ③

$f(x)=x^{n+1}e^{-x}$에서

$f'(x)=(n+1)x^ne^{-x}-x^{n+1}e^{-x}=(n+1-x)x^ne^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=n+1$ ($\because e^{-x}>0$)

ㄱ. $n=5$일 때

$f(3)=3^6e^{-3}$, $f'(3)=(6-3)\times3^5e^{-3}=3^6e^{-3}$

$\therefore f(3)=f'(3)$ (참)

ㄴ. n이 짝수이면 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 값이 모두 양수이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $x=n+1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=n+1$에서 극댓값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

유형 17 로그함수의 극대 · 극소

0469

답 ④

$f(x)=\dfrac{\ln x}{2x}$에서 로그의 진수의 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times2x-2\ln x}{(2x)^2}=\dfrac{1-\ln x}{2x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$

$\therefore x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$f(e)=\dfrac{\ln e}{2e}=\dfrac{1}{2e}$

0470

답 ④

$f(x)=-2x^2+a^2\ln 2x$에서 로그의 진수의 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=-4x+\dfrac{a^2}{x}=\dfrac{-4x^2+a^2}{x}=\dfrac{-(2x+a)(2x-a)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{a}{2}$ ($\because x>0$, $a>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{a}{2}$에서 극댓값 $\dfrac{a^2}{2}$을 가지므로

$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{2}+a^2\ln a=\dfrac{a^2}{2}$, $a^2\ln a=a^2$

$\ln a=1$ ($\because a>0$) $\quad\therefore a=e$

0471

답 4

$f(x)=\ln x^3+ax+\dfrac{b}{x}$에서 로그의 진수의 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=\dfrac{3x^2}{x^3}+a-\dfrac{b}{x^2}=\dfrac{ax^2+3x-b}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 5를 가지므로

$f(1)=5$에서 $a+b=5$ ····· ㉠

$f'(1)=0$에서 $a+3-b=0$

$\therefore a-b=-3$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=4$

$\therefore ab=1\times4=4$

유형 18 삼각함수의 극대 · 극소

0472

답 ③

$f(x)=2x+\cos 4x$에서 $f'(x)=2-4\sin 4x$

$f'(x)=0$에서 $\sin 4x=\dfrac{1}{2}$

$4x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $4x=\dfrac{5}{6}\pi$ ($\because 0<4x<2\pi$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{24}$ 또는 $x=\dfrac{5}{24}\pi$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{24}$	$\cdots$	$\frac{5}{24}\pi$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{24}$에서 극대, $x=\dfrac{5}{24}\pi$에서 극소이므로

극댓값은 $f\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=2\times\dfrac{\pi}{24}+\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

극솟값은 $f\left(\dfrac{5}{24}\pi\right)=2\times\dfrac{5}{24}\pi+\cos\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{5}{12}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 구하는 극댓값과 극솟값의 합은

$\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\dfrac{5}{12}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

0473

답 4

$f(x)=2\sin x\cos x+a=\sin 2x+a$에서

$f'(x)=2\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=0$

$2x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $2x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0<2x<2\pi$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 6을 가지므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+a=1+a=6 \quad \therefore a=5$

따라서 $f(x)=\sin 2x+5$이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\sin\frac{3}{2}\pi+5=-1+5=4$

0474

답 ②

$f(x)=a\sin x+b\cos x+2x$에서

$f'(x)=a\cos x-b\sin x+2$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{2}$와 $x=\pi$에서 극값을 가지므로

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$에서 $a\cos\frac{\pi}{2}-b\sin\frac{\pi}{2}+2=0$

$\therefore b=2$

$f'(\pi)=0$에서 $a\cos\pi-b\sin\pi+2=0$

$\therefore a=2$

따라서 $g(x)=2x+2-\ln x$에서 로그의 진수의 조건에 의하여

$x>0$

$g'(x)=2-\frac{1}{x}$

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$

$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$		−	0	+
$g(x)$		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$g\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}+2-\ln\frac{1}{2}=3+\ln 2$

유형 19 극값을 가질 조건 - 판별식을 이용하는 경우

0475

답 ①

$f(x)=(x^2-3kx+5)e^{2x}$에서

$f'(x)=(2x-3k)e^{2x}+2(x^2-3kx+5)e^{2x}$

$=\{2x^2+(2-6k)x+10-3k\}e^{2x}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$2x^2+(2-6k)x+10-3k=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D\le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(1-3k)^2-2(10-3k)\le 0$

$9k^2-6k+1-20+6k\le 0,\ 9k^2\le 19,\ k^2\le\frac{19}{9}$

$\therefore -\frac{\sqrt{19}}{3}\le k\le\frac{\sqrt{19}}{3}$

따라서 $a=\frac{\sqrt{19}}{3}$, $b=-\frac{\sqrt{19}}{3}$이므로

$ab=\frac{\sqrt{19}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{19}}{3}\right)=-\frac{19}{9}$

0476

답 ②

$f(x)=\frac{2a}{x}-x+2\ln x$에서 로그의 진수의 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=-\frac{2a}{x^2}-1+\frac{2}{x}=\frac{-x^2+2x-2a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-2x+2a=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2a>0 \quad \therefore a<\frac{1}{2}$

(ii) 두 근의 합과 곱이 모두 양수이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=2>0$

(두 근의 곱)$=2a>0$

$\therefore a>0$

(i), (ii)에서 $0<a<\frac{1}{2}$

0477

답 64

$f(x)=\frac{1}{4}x-\ln(4x^2+n)$에서

$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{8x}{4x^2+n}=\frac{4x^2-32x+n}{16x^2+4n}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $4x^2-32x+n=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-16)^2-4n\le 0,\ 4n\ge 256$

$\therefore n\ge 64$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 64이다.

유형 20 극값을 가질 조건 - 판별식을 이용하지 않는 경우

0478

답 ④

$f(x)=ax+3\cos x$에서 $f'(x)=a-3\sin x$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f'(x) \le 0$ 또는 $f'(x) \ge 0$이어야 한다. 즉,

$a-3\sin x \le 0$ 또는 $a-3\sin x \ge 0$

$\therefore \sin x \ge \frac{a}{3}$ 또는 $\sin x \le \frac{a}{3}$ ····· ㉠

이때 $-1 \le \sin x \le 1$이므로 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$\frac{a}{3} \le -1$ 또는 $\frac{a}{3} \ge 1$

$\therefore a \le -3$ 또는 $a \ge 3$

0479

답 -5

$f(x)=(x^3-9x+3a)e^x$에서

$f'(x)=(3x^2-9)e^x+(x^3-9x+3a)e^x$

$=(x^3+3x^2-9x-9+3a)e^x$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $x^3+3x^2-9x-9+3a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(x)=x^3+3x^2-9x-9+3a$라 하면

$g'(x)=3x^2+6x-9$

$g'(x)=0$에서 $x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(-3)g(1)<0$이어야 하므로

$(-27+27+27-9+3a)(1+3-9-9+3a)<0$

$(3a+18)(3a-14)<0$

$\therefore -6<a<\frac{14}{3}$

따라서 정수 a는 -5, -4, -3, ⋯, 4이므로 구하는 합은

$(-5)+(-4)+(-3)+\cdots+4=-5$

0480

답 ①

$f(x)=x^2+\frac{k}{x}-24\ln x$에서 로그의 진수의 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=2x-\frac{k}{x^2}-\frac{24}{x}=\frac{2x^3-24x-k}{x^2}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 $x>0$에서 $2x^3-24x-k=0$이 서로 다른 두 개 이상의 실근을 갖고 그 실근 x의 값의 좌우에서 $2x^3-24x-k$의 값의 부호가 바뀌어야 한다.

$g(x)=2x^3-24x-k$라 하면

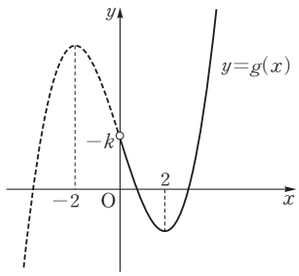
$g'(x)=6x^2-24=6(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $x>0$에서 $g(x)$의 부호가 바뀌는 x의 값이 2개 존재하려면 $g(0)>0$, $g(2)<0$이어야 한다.

$g(0)>0$에서 $-k>0$

$\therefore k<0$ ····· ㉠

$g(2)<0$에서 $16-48-k<0$

$\therefore k>-32$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $-32<k<0$

따라서 구하는 정수 k는 -31, -30, -29, ⋯, -1의 31개이다.

PART B 기출 & 기출변형 문제

0481

답 ①

$f(x)=\ln\sqrt{x}-1$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}$

이때 $f'(e^2)=\frac{1}{2e^2}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e^2, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2e^2}(x-e^2)$ $\therefore y=\frac{1}{2e^2}x-\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2e^2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2e^2}}=-e^2$

짝기출

곡선 $y=\ln(x-3)+1$ 위의 점 $(4, 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

답 ①

0482

답 ④

곡선 $y=e^{|x|}=\begin{cases} e^{-x} & (x<0) \\ e^x & (x\ge 0) \end{cases}$은 y축에 대하여 대칭이고 원점에서 이 곡선에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기가 θ이므로 원점에서

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

곡선 $y=e^x$에 그은 접선과 y축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 $\frac{\theta}{2}$이다.

이때 접선의 접점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면

$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로

점 (t, e^t)에서의 접선의 방정식은

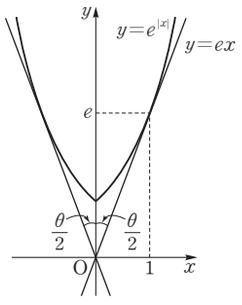
$y-e^t=e^t(x-t)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-e^t=-te^t$, $(t-1)e^t=0$

$\therefore t=1$ $(\because e^t>0)$

따라서 오른쪽 그림과 같이 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{e}$



이므로

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{2}{e}}{1-\frac{1}{e^2}}=\frac{2e}{e^2-1}$$

다른 풀이

원점에서 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$에 그은 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

본 풀이의 그림에서 $\tan\alpha=e$, $\tan\beta=-e$이므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$

$$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{2e}{1-e^2}\right|=\frac{2e}{e^2-1}$$

0483

답 ①

$f(x)=ke^x+1$, $g(x)=x^2-3x+4$라 하면

$f'(x)=ke^x$, $g'(x)=2x-3$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 P의 x좌표를 p라 하면

$f(p)=g(p)$에서

$ke^p+1=p^2-3p+4$ …… ㉠

두 곡선에 접하는 두 직선이 서로 수직이므로

$f'(p)\times g'(p)=-1$에서

$ke^p\times(2p-3)=-1$ …… ㉡

㉡에서 $ke^p=\frac{1}{3-2p}$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{3-2p}+1=p^2-3p+4$$

$4-2p=(p^2-3p+4)(3-2p)$

$4-2p=-2p^3+9p^2-17p+12$

$2p^3-9p^2+15p-8=0$

$(p-1)(2p^2-7p+8)=0$

$\therefore p=1$ $\left(\because 2p^2-7p+8=2\left(p-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0\right)$

㉡에 $p=1$을 대입하면 $-ke=-1$

$\therefore k=\frac{1}{e}$

0484

답 ⑤

$x\cos y+y\cos x+2\pi=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\cos y-x\sin y\times\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}\times\cos x-y\sin x=0$$

$$(\cos x-x\sin y)\frac{dy}{dx}=y\sin x-\cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y\sin x-\cos y}{\cos x-x\sin y}$$ (단, $\cos x-x\sin y\neq0$)

즉, 곡선 위의 점 (π, π)에서의 접선의 기울기는

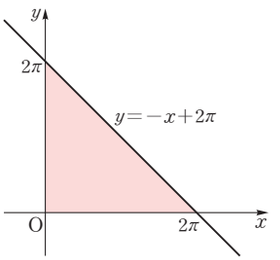
$$\frac{\pi\sin\pi-\cos\pi}{\cos\pi-\pi\sin\pi}=\frac{-(-1)}{-1}=-1$$

이므로 접선의 방정식은

$y-\pi=-(x-\pi)$ $\therefore y=-x+2\pi$

따라서 접선의 x절편은 2π, y절편은 2π이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2\pi)^2=2\pi^2$



참고

곡선 $x\cos y+y\cos x+2\pi=0$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 (π, π)에서의 접선의 기울기는 -1임을 알 수 있다.

짝기출

곡선 $e^y\ln x=2y+1$ 위의 점 $(e, 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=ax+b$라 할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $-2e$ ② $-e$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{e}$ ⑤ $-\frac{1}{e}$

답 ⑤

0485

답 ③

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{k}{x}$에서

$$f'(x)=x-3+\frac{k}{x^2}=\frac{x^3-3x^2+k}{x^2}$$

이때 함수 $f(x)$가 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가하려면 $x>0$일 때

$f'(x)\geq0$이어야 하므로 $x^3-3x^2+k\geq0$ $(\because x^2>0)$

$\therefore k\geq-x^3+3x^2$ …… ㉠

한편, $g(x)=-x^3+3x^2$이라 하면

$g'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=2$ $(\because x>0)$

열린구간 $(0, \infty)$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	2	…
$g'(x)$		+	0	−
$g(x)$		↗	극대	↘

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 열린구간 $(0, \infty)$에서 ㉠을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 $k\geq g(2)=4$

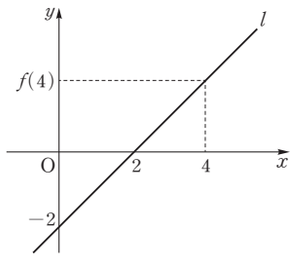
따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 4이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0486

답 ④

조건 (가)에서 직선 l이 제2사분면을 지나지 않고, 조건 (나)에서 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형인 직각이등변삼각형의 넓이가 2이므로 다음 그림과 같이 직선 l의 x절편과 y절편은 각각 2, -2이다.



함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(4, f(4))$에서의 접선 l은 기울기가 1이고, y절편이 -2이므로 직선 l의 방정식은 $y=x-2$

$\therefore f(4)=2, f'(4)=1$

$g(x)=xf(2x)$에서

$g'(x)=f(2x)+2xf'(2x)$이므로

$g'(2)=f(4)+4f'(4)$

$=2+4=6$

0487

답 13

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x^2-4}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\to2$일 때,

(분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(2)=3$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\left\{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\dfrac{1}{x+2}\right\}=\dfrac{1}{4}f'(2)=2$

$\therefore f'(2)=8$

한편, $g(x)=\dfrac{4-x}{x-1}=-1+\dfrac{3}{x-1}$에서

$g'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$

$h(x)=g(f(x))$에서 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이고,

$h(2)=g(f(2))=g(3)=\dfrac{4-3}{3-1}=\dfrac{1}{2}$

$h'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(3)\times8=-\dfrac{3}{(3-1)^2}\times8=-6$

따라서 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(2, h(2))$에서의 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}=-6(x-2)$에서 $12x+2y=25$

즉, $a=12$, $b=25$이므로

$b-a=25-12=13$

짝기출

미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\sin x$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프 위의 점 $(1, (g\circ f)(1))$에서의 접선이 원점을 지난다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=k$$

일 때, 상수 k에 대하여 $30k^2$의 값을 구하시오.

답 10

0488

답 ⑤

ㄱ. $h(3)=f(g(3))=f(1)=5$ (거짓)

ㄴ. $h(x)=f(g(x))$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$h'(2)=f'(g(2))g'(2)$

이때 $f'(g(2))<0$이고 $g'(2)<0$이므로

$h'(2)\geq0$ (참)

ㄷ. 열린구간 $(3, 4)$에서 $0<g(x)<1$이고 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0, 1)$에서 증가하므로

$f'(g(x))>0$

열린구간 $(3, 4)$에서 함수 $g(x)$는 감소하므로

$g'(x)<0$

즉, $h'(x)=f'(g(x))g'(x)<0$이므로 함수 $h(x)$는 열린구간 $(3, 4)$에서 감소한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0489

답 ①

이차함수 $f(x)$가 $x=a$ $(a<0)$에서 극솟값 0을 가지므로

$f(x)=b(x-a)^2$ $(b>0)$, $f'(x)=2b(x-a)$

$e^xf(x)$와 $\dfrac{f(x)}{x}$를 x에 대하여 미분하면 각각

$e^x\{f(x)+f'(x)\}$, $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

$e^x\{f(x)+f'(x)\}=0$에서 $f(x)+f'(x)=0$ ($\because e^x>0$)

이때 $f(x)+f'(x)=b(x-a)^2+2b(x-a)$

$=b(x-a)(x-a+2)$

이므로

$x=a$ 또는 $x=a-2$

함수 $e^xf(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$a-2$	$\cdots$	a	$\cdots$
$\{e^xf(x)\}'$	+	0	−	0	+
$e^xf(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $e^xf(x)$는 $x=a-2$에서 극대이므로 $s=a-2$

또한 $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0$에서 $xf'(x)-f(x)=0$ ($\because x^2>0$)

이때 $xf'(x)-f(x)=2bx(x-a)-b(x-a)^2$

$=b(x-a)(x+a)$

이므로

$x=a$ 또는 $x=-a$

함수 $\dfrac{f(x)}{x}$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}'$	+	0	−		−	0	+
$\dfrac{f(x)}{x}$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $\dfrac{f(x)}{x}$는 $x=-a$에서 극소이므로 $t=-a$

$\therefore s+t=(a-2)+(-a)=-2$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

짝기출

함수 $f(x)=\tan(\pi x^2+ax)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 극솟값 k를 가질 때, k의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 0 ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ②

0490

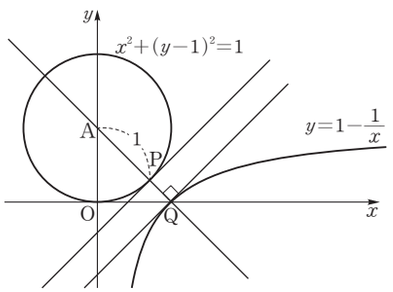
답 ①

중심이 점 A(0, 1)이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=1$

선분 AP의 길이는 원의 반지름의 길이 1로 일정하므로 선분 PQ의 길이가 최소가 되려면 다음 그림과 같이 점 P는 원 $x^2+(y-1)^2=1$과 선분 AQ의 교점이고 원 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=1-\frac{1}{x}$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기가 같아야 한다.

즉, 곡선 $y=1-\frac{1}{x}$ 위의 점 Q에서의 접선과 직선 AQ는 서로 수직이어야 한다.



점 Q의 좌표를 $\left(t,\ 1-\frac{1}{t}\right)$이라 하면

$y=1-\frac{1}{x}$에서 $y'=\frac{1}{x^2}$이므로

점 Q에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t^2}$이고

직선 AQ의 기울기는 $-\frac{1}{t^2}$이므로

$\frac{1}{t^2}\times\left(-\frac{1}{t^2}\right)=-1$에서 $t^4=1$

$\therefore t=1\ (\because t>0)$

따라서 Q(1, 0)이고 두 점 A, Q를 지나는 직선의 기울기는 -1이므로 직선 AQ의 방정식은

$y=-x+1$

이 직선이 원 $x^2+(y-1)^2=1$과 점 P에서 만나므로

$x^2+(-x)^2=1,\ 2x^2=1$

$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because x>0)$

이를 $y=-x+1$에 대입하면

$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

즉, $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$에서 $a=\frac{\sqrt{2}}{2},\ b=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1$이므로

$a+b=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=1$

짝기출

원 $x^2+y^2=1$ 위의 임의의 점 P와 곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 $\sqrt{a}-b$이다. 자연수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

답 26

0491

답 ③

$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$

곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)\qquad \therefore y=\frac{1}{t}x-1+\ln t$

이 직선이 점 $\mathrm{R}(r(t),\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{1}{t}\times r(t)-1+\ln t\qquad \therefore r(t)=t-t\ln t$

곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $\mathrm{Q}(2t,\ \ln 2t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln 2t=\frac{1}{2t}(x-2t)\qquad \therefore y=\frac{1}{2t}x-1+\ln 2t$

이 직선이 점 $\mathrm{S}(s(t),\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{1}{2t}\times s(t)-1+\ln 2t\qquad \therefore s(t)=2t-2t\ln 2t$

$f(t)=r(t)-s(t)$

$=(t-t\ln t)-(2t-2t\ln 2t)$

$=(2\ln 2-1)t+t\ln t$

$f'(t)=2\ln 2-1+\ln t+t\times\frac{1}{t}=2\ln 2+\ln t$

$f'(t)=0$에서 $2\ln 2+\ln t=0,\ \ln t=\ln 2^{-2}$

$\therefore t=\frac{1}{4}$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	극소	↗

함수 $f(t)$는 $t=\frac{1}{4}$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$f\left(\frac{1}{4}\right)=(2\ln 2-1)\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}\ln 4-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\ln 4$

$=-\frac{1}{4}$

0492

답 2

$f(x)=2x^3-3x^2$에서 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

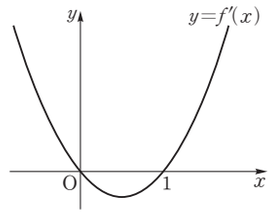
$g(x)=f(2\sin x)$에서

$g'(x)=f'(2\sin x)\times 2\cos x$

$g'(x)=0$에서 $f'(2\sin x)=0$ 또는 $\cos x=0$ ····· ㉠

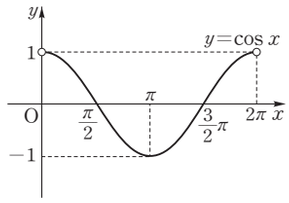
이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 ㉠을 만족시키면서 $g'(x)$의 값의 부호가 양에서 음으로 바뀌는 x의 값에서 $g(x)$는 극대이다.



(i) $\cos x=0$인 경우

$\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$



$x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $\cos x$의 값의 부호는 양에서 음으로 바뀌고,

$x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $f'(2\sin x)$는 양수이므로 $g'(x)$의 값의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극대이다.

또한 $x=\frac{3}{2}\pi$의 좌우에서 $\cos x$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀌고, $x\to\frac{3}{2}\pi$일 때 $f'(2\sin x)$는 양수이므로 $g'(x)$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

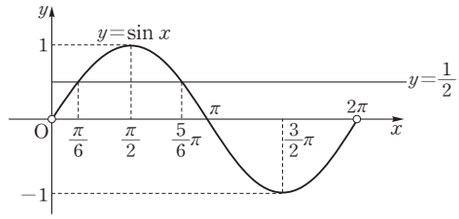
즉, 함수 $g(x)$는 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극소이다.

(ii) $f'(2\sin x)=0$인 경우

$f'(2\sin x)=0$에서 $2\sin x=0$ 또는 $2\sin x=1$

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\pi$



$x=\frac{\pi}{6}$의 좌우에서 $f'(2\sin x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고,

$x\to\frac{\pi}{6}$일 때 $\cos x$는 양수이므로 $g'(x)$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극소이다.

$x=\frac{5}{6}\pi$의 좌우에서 $f'(2\sin x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, $x\to\frac{5}{6}\pi$일 때 $\cos x$는 음수이므로 $g'(x)$의 값의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극소이다.

$x=\pi$의 좌우에서 $f'(2\sin x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌고, $x\to\pi$일 때 $\cos x$는 음수이므로 $g'(x)$의 값의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=\pi$에서 극대이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$에서 극대이므로 구하는 x의 개수는 2이다.

짝기출

함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

답 ②

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A 07 도함수의 활용(2)

유형 01 곡선의 오목과 볼록

0493 답 ⑤

$f(x)=-x^2+4\sin x$라 하면
$f'(x)=-2x+4\cos x$
$f''(x)=-2-4\sin x$
곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로
$-4\sin x>2$에서 $\sin x<-\frac{1}{2}$
$\therefore \frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)
따라서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 $\left(\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right)$이다.

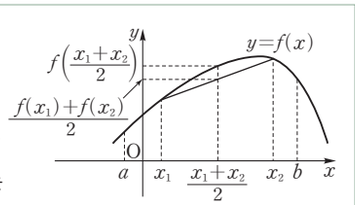
0494 답 ②

$f(x)=x+x^2\ln x$라 하면 로그의 진수 조건에 의하여
$x>0$ ····· ㉠
$f'(x)=1+2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x+1$
$f''(x)=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}+1=2\ln x+3$
곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로
$2\ln x<-3$에서 $\ln x<-\frac{3}{2}$
$\therefore x<e^{-\frac{3}{2}}$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 $0<x<e^{-\frac{3}{2}}$
따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$이다.

0495 답 ①

$f(x)=x^3-3x^2+12x$에서
$f'(x)=3x^2-6x+12$, $f''(x)=6x-6$
함수 $f(x)$가 서로 다른 임의의 두 실수 a, b에 대하여
$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$를 만족시키려면 그 구간에서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록해야 한다.
즉, $f''(x)<0$이어야 하므로
$6x<6$에서 $x<1$

참고
함수 $f(x)$가 구간 (a, b)에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2 ($x_1<x_2$)에 대하여 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$를 만족시키면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.



0496 답 −2

$f(x)=xe^x$에서
$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$
$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$
곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로
$x<-2$ ($\because e^x>0$)
따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 x의 값의 범위가 $x<-2$이므로 구하는 실수 k의 최댓값은 -2이다.

유형 02 변곡점

0497 답 ④

$f(x)=x^3-6x^2+4$라 하면
$f'(x)=3x^2-12x$
$f''(x)=6x-12=6(x-2)$
$f''(x)=0$에서 $x=2$
이때 $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(2, -12)$이다.
따라서 $a=2$, $b=-12$이므로
$a-b=2-(-12)=14$

0498 답 3

$f(x)=\frac{-x}{x^2+3}$에서
$f'(x)=\frac{-(x^2+3)-(-x)\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{x^2-3}{(x^2+3)^2}$
$f''(x)=\frac{2x(x^2+3)^2-(x^2-3)\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}$
$=\frac{-2x^3+18x}{(x^2+3)^3}=\frac{-2x(x+3)(x-3)}{(x^2+3)^3}$
$f''(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$
이때 $x=-3$, $x=0$, $x=3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=-3$, $x=0$, $x=3$에서 변곡점을 갖는다.
따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 3이다.

0499 답 ⑤

$f(x)=x^2+2x+4\cos x$라 하면
$f'(x)=2x+2-4\sin x$
$f''(x)=2-4\cos x$
$f''(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$
$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)
이때 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{5}{3}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{5}{3}\pi$에서 변곡점을 갖는다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

두 변곡점에서의 접선의 기울기는 각각

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi+2-4\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi+2-2\sqrt{3}$

$f'\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{10}{3}\pi+2-4\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{10}{3}\pi+2+2\sqrt{3}$

따라서 구하는 두 변곡점에서의 접선의 기울기의 합은

$\left(\frac{2}{3}\pi+2-2\sqrt{3}\right)+\left(\frac{10}{3}\pi+2+2\sqrt{3}\right)=4\pi+4$

0500

답 -3

$f(x)=(x+3)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-(x+3)e^{-x}=(-x-2)e^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-(-x-2)e^{-x}=(x+1)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because e^{-x}>0$)

$f''(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	변곡점	↘

곡선 $y=f(x)$는 $x=-2$에서 극값을 갖고, $x=-1$에서 변곡점을 가지므로

$\alpha=-2$, $\beta=-1$

$\therefore \alpha+\beta=-2+(-1)=-3$

0501

답 ③

$f(x)=\ln(x^2+2x+5)$에서

$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}=\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+2x+5)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2}$

$=\frac{-2x^2-4x+6}{(x^2+2x+5)^2}=\frac{-2(x+3)(x-1)}{(x^2+2x+5)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

$f''(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f''(x)$	−	0	+	+	+	0	−
$f(x)$	↘	변곡점	↘	극소	↗	변곡점	↗

곡선 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖고, $x=-3$, $x=1$에서 변곡점을 가지므로 다각형의 꼭짓점의 좌표는

$(-1, \ln 4)$, $(-3, \ln 8)$, $(1, \ln 8)$

따라서 다각형은 삼각형이고 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times|1-(-3)|\times|\ln 8-\ln 4|=2\ln 2$

유형 03 변곡점을 이용한 미정계수의 결정

0502

답 26

$f(x)=ax^3+bx^2+c$라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$f''(x)=6ax+2b$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(1)=-3$에서 $3a+2b=-3$ ····· ㉠

또한 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표가 $(1, -6)$이므로

$f''(1)=0$에서 $6a+2b=0$ ····· ㉡

$f(1)=-6$에서 $a+b+c=-6$ ····· ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

이를 ㉢에 대입하면 $c=-4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+(-3)^2+(-4)^2=26$

0503

답 8

$f(x)=\frac{ax}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-ax\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2+a}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\frac{-2ax(x^2+1)^2-(-ax^2+a)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{2ax^3-6ax}{(x^2+1)^3}=\frac{2ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=0$에서 $x=\sqrt{3}$ ($\because x>0$, $a>0$)

이때 $x=\sqrt{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 변곡점을 갖는다.

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(\sqrt{3})=-1$에서 $\frac{-3a+a}{(3+1)^2}=-1$

$-2a=-16$ $\therefore a=8$

0504

답 ④

$f(x)=ae^{2x}-16e^x+3x^2+14x$에서

$f'(x)=2ae^{2x}-16e^x+6x+14$

$f''(x)=4ae^{2x}-16e^x+6$

이때 곡선 $y=f(x)$의 두 변곡점의 x좌표를 각각 α, β라 하면

α, β는 $f''(x)=0$, 즉 $4ae^{2x}-16e^x+6=0$의 두 근이다.

$e^x=t$ ($t>0$)이라 하면 방정식 $4at^2-16t+6=0$의 두 근은 e^α, e^β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$e^\alpha\times e^\beta=\frac{3}{2a}$에서 $e^{\alpha+\beta}=\frac{3}{2a}$

$\therefore a=\frac{3}{2e^{\alpha+\beta}}=\frac{3}{2e^{\ln 3}}=\frac{3}{2\times 3}=\frac{1}{2}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 04 변곡점을 가질 조건

0505 답 2

$f(x)=x^4-2x^3+ax^2$이라 하면
$f'(x)=4x^3-6x^2+2ax$
$f''(x)=12x^2-12x+2a$
곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\geq 0$이어야 한다.
즉, 이차방정식 $f''(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 하므로

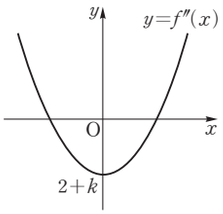
$\frac{D}{4}=(-6)^2-12\times 2a\leq 0$

$36-24a\leq 0 \quad \therefore a\geq \frac{3}{2}$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 2이다.

0506 답 ③

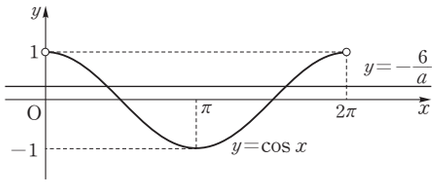
$f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}+\frac{k}{2}x^2=e^x+e^{-x}+\frac{k}{2}x^2$에서
$f'(x)=e^x-e^{-x}+kx$
$f''(x)=e^x+e^{-x}+k$
이때 $e^x>0$, $e^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$e^x+e^{-x}+k\geq 2\sqrt{e^x\times e^{-x}}+k=2+k$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)
곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f''(x)$가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로
$2+k<0 \quad \therefore k<-2$
따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 -3이다.



참고
$f''(x)=f''(-x)$이고 $f''(x)\geq 2+k$이므로 함수 $y=f''(x)$의 그래프의 개형은 위의 그림과 같다.

0507 답 ③

$f(x)=3x^2+2x-a\cos x$라 하면
$f'(x)=6x+2+a\sin x$
$f''(x)=6+a\cos x$
(i) $a=0$일 때
$f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 변곡점을 갖지 않는다.
(ii) $a\neq 0$일 때
$f''(x)=0$에서 $a\cos x=-6 \quad \therefore \cos x=-\frac{6}{a}$
곡선 $y=f(x)$가 두 개의 변곡점을 가지려면 다음 그림과 같이 $0<x<2\pi$에서 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=-\frac{6}{a}$이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



즉, $\left|\frac{6}{a}\right|<1$에서 $a<-6$ 또는 $a>6$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는
$a<-6$ 또는 $a>6$

유형 05 도함수의 그래프를 이용한 함수의 이해

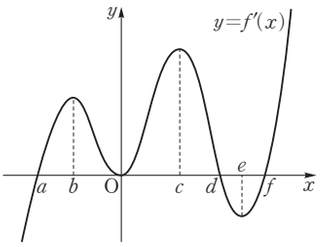
0508 답 ②

$f''(x)$의 부호를 조사하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$f''(x)>0$인 구간에서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하므로 구하는 구간은 ② (b, c)이다.

0509 답 5



위의 그림과 같이 a, b, c, d, e, f를 정하면
$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=d$ 또는 $x=f$
$x=d$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로
함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극대이다.
$\therefore m=1$
$x=a$, $x=f$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로
함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=f$에서 극소이다.
$\therefore n=2$
$f''(b)=f''(0)=f''(c)=f''(e)=0$이고
$x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로
곡선 $y=f(x)$는 $x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=e$에서 변곡점을 갖는다.
$\therefore k=4$
$\therefore k-m+n=4-1+2=5$

0510 답 ⑤

ㄱ. $x=a$, $x=c$, $x=e$, $x=f$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=c$, $x=e$, $x=f$에서 극값을 갖는다. 즉, 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 개수는 4이다. (참)

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

ㄴ. 구간 (e, f)에서 $f'(x)$는 증가하므로 $f''(x)>0$
즉, 구간 (e, f)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다. (참)

ㄷ. $f''(b)=f''(d)=f''(g)=f''(h)=0$이고
$x=b$, $x=d$, $x=g$, $x=h$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=b$, $x=d$, $x=g$, $x=h$에서 변곡점을 갖는다.
즉, 변곡점의 개수는 4이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유형 06 함수의 그래프

0511

답 ④

$f(x)=\dfrac{3x+3}{x^2+2x+2}$에서

$f'(x)=\dfrac{3(x^2+2x+2)-(3x+3)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$

$=\dfrac{-3x^2-6x}{(x^2+2x+2)^2}=\dfrac{-3x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$

$f''(x)=\dfrac{(-6x-6)(x^2+2x+2)^2-(-3x^2-6x)\times 2(x^2+2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^4}$

$=\dfrac{6x^3+18x^2-12}{(x^2+2x+2)^3}=\dfrac{6(x+1)(x^2+2x-2)}{(x^2+2x+2)^3}$

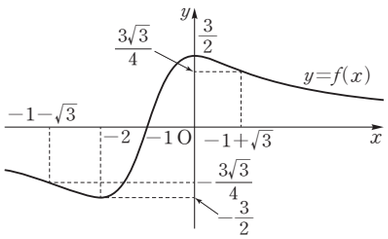
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{3}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\dfrac{3}{2}$	↗	0	↗	$\dfrac{3}{2}$	↘	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↘

또한 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



① $f(x)=\dfrac{3x+3}{x^2+2x+2}$에서 $x^2+2x+2>0$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다. (참)

② 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(-2)=-\dfrac{3}{2}$이다. (참)

③ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$이다. (참)

④ 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(0)=\dfrac{3}{2}$이다. (거짓)

⑤ 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $\left(-1-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $(-1, 0)$, $\left(-1+\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$의 3개이다. (참)

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0512

답 ⑤

$f(x)=e^{-2x^2}$에서

$f'(x)=-4xe^{-2x^2}$

$f''(x)=-4e^{-2x^2}+16x^2e^{-2x^2}$

$=(16x^2-4)e^{-2x^2}$

$=4(2x+1)(2x-1)e^{-2x^2}$

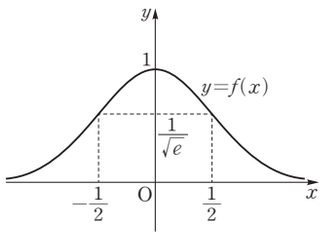
$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^{-2x^2}>0$)

$f''(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↘

또한 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $f(-x)=e^{-2\times(-x)^2}=e^{-2x^2}=f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,0<y\le 1\}$이다. (참)

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0513

답 ③

$f(x)=e^x\sin x$에서

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=-\cos x$ ($\because e^x>0$)

$\tan x=-1$

$\therefore x=\dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\dfrac{7}{4}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$f''(x)=0$에서 $\cos x=0$

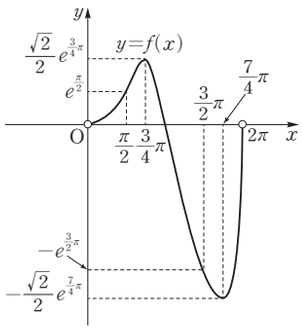
$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		+	+	+	0	−	−	−	0	+	
$f''(x)$		+	0	−	−	−	0	+	+	+	
$f(x)$		↗	$e^{\frac{\pi}{2}}$	↱	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$	↘	$-e^{\frac{3}{2}\pi}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7}{4}\pi}$	↗	

또한 $\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to2\pi-}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 극대이다. (참)

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$는 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 아래로 볼록하고, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 위로 볼록하다. (거짓)

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2},\ e^{\frac{\pi}{2}}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi,\ -e^{\frac{3}{2}\pi}\right)$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

유형 07 유리함수의 최대 · 최소

0514

답 ④

$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$에서

$f'(x)=2x-\frac{2}{x^3}=\frac{2x^4-2}{x^3}=\frac{2(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ $\left(\because \frac{1}{2}\le x\le2\right)$

구간 $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$\frac{17}{4}$	↘	2	↗	$\frac{17}{4}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$에서 최댓값 $\frac{17}{4}$, $x=1$에서 최솟값 2를 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$\frac{17}{4}\times2=\frac{17}{2}$

0515

답 ②

$(x-4)^2+36>0$이므로 정의역은 실수 전체의 집합이고,

$f(x)=\frac{x-4}{(x-4)^2+36}=\frac{x-4}{x^2-8x+52}$에서

$f'(x)=\frac{(x^2-8x+52)-(x-4)(2x-8)}{(x^2-8x+52)^2}$

$=\frac{-x^2+8x+20}{(x^2-8x+52)^2}=\frac{-(x+2)(x-10)}{(x^2-8x+52)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=10$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	10	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{12}$	↗	$\frac{1}{12}$	↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=10$에서 최댓값 $M=\frac{1}{12}$, $x=-2$에서 최솟값 $m=-\frac{1}{12}$을 갖는다.

$\therefore M-m=\frac{1}{12}-\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{6}$

0516

답 3

$f(x)=8-\frac{kx^2}{x^2+2x+4}$에서

$f'(x)=-\frac{2kx(x^2+2x+4)-kx^2(2x+2)}{(x^2+2x+4)^2}$

$=-\frac{2kx^2+8kx}{(x^2+2x+4)^2}=-\frac{2kx(x+4)}{(x^2+2x+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$ ($\because k$는 자연수)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$8-\frac{4}{3}k$	↗	8	↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=8-k$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=8-k$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 최솟값 $8-\frac{4}{3}k$를 갖는다.

즉, $8-\frac{4}{3}k\le4$에서 $4\le\frac{4}{3}k$

$\therefore k\ge3$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 3이다.

유형 08 무리함수의 최대 · 최소

0517

답 32

$f(x)=x\sqrt{8-x^2}$에서 $8-x^2\ge0$이므로

$-2\sqrt{2}\le x\le2\sqrt{2}$

$f'(x)=\sqrt{8-x^2}+x\times\frac{-x}{\sqrt{8-x^2}}=\frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f'(x)=0$에서 $x^2=4$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

$-2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $M=4$, $x=-2$에서 최솟값 $m=-4$를 가지므로

$M^2+m^2=4^2+(-4)^2=32$

0518

답 ④

$f(x)=x-3+\sqrt{9-x^2}$에서 $9-x^2\ge 0$이므로

$-3\le x\le 3$

$f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{\sqrt{9-x^2}-x}{\sqrt{9-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{9-x^2}=x$

$9-x^2=x^2$, $x^2=\dfrac{9}{2}$

$\therefore x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ($\because \sqrt{9-x^2}\ge 0$이므로 $x\ge 0$)

$-3\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-6	$\nearrow$	$3\sqrt{2}-3$	$\searrow$	0

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$에서 최댓값 $M=3\sqrt{2}-3$, $x=-3$에서 최솟값 $m=-6$을 가지므로

$M-m=(3\sqrt{2}-3)-(-6)=3\sqrt{2}+3$

0519

답 2

$f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}-1=(x-1)^{\frac{2}{3}}-1$에서

$f'(x)=\dfrac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$

이때 $x<1$에서 $f'(x)<0$, $x>1$에서 $f'(x)>0$

구간 $[0, 9]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

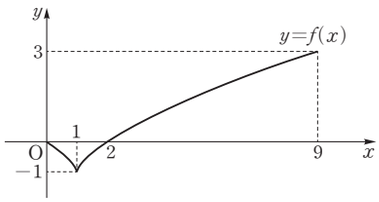
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	9
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

함수 $f(x)$는 $x=9$에서 최댓값 3, $x=1$에서 최솟값 -1을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$3+(-1)=2$

참고

구간 $[0, 9]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



유형 09 지수함수의 최대 · 최소

0520

답 ⑤

$f(x)=e^x-x$에서

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $e^x=1$ $\therefore x=0$

구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$e^{-1}+1$	$\searrow$	1	$\nearrow$	e^2-2

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $M=e^2-2$, $x=0$에서 최솟값 $m=1$을 가지므로

$M+2m=e^2-2+2=e^2$

0521

답 2

$f(x)=kxe^{-x}$에서

$f'(x)=ke^{-x}-kxe^{-x}=k(1-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because k>0$, $e^{-x}>0$)

구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	ke^{-1}	$\searrow$	$3ke^{-3}$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 ke^{-1}, $x=0$에서 최솟값 0을 가지므로

$ke^{-1}=2e^{-1}$에서 $k=2$

0522

답 3

$f(x)=(x^2-2x-2)e^x$에서

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x-2)e^x=(x^2-4)e^x$

$=(x+2)(x-2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$ ($\because e^x>0$)

구간 $[-3, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$13e^{-3}$	$\nearrow$	$6e^{-2}$	$\searrow$	$-2e^2$	$\nearrow$	e^3

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 e^3, $x=2$에서 최솟값 $-2e^2$을 가지므로 구하는 곱은

$e^3\times(-2e^2)=-2e^5$

따라서 $p=-2$, $q=5$이므로

$p+q=(-2)+5=3$

유형 10 로그함수의 최대 · 최소

0523 답 ②

$f(x)=x\ln x-x$에서

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

구간 $(0,\ e^2)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(e^2)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -1을 갖는다.

0524 답 ②

$f(x)=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+k$에서 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}-x=2x\ln x$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{2}+k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-\frac{1}{2}+k$를 가지므로

$-\frac{1}{2}+k=0$에서 $k=\frac{1}{2}$

0525 답 ③

$f(x)=\frac{\ln x+1}{x^2}$에서 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-(\ln x+1)\times 2x}{x^4}=\frac{-2\ln x-1}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-\frac{1}{2}$ $\therefore x=e^{-\frac{1}{2}}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{e}{2}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^{-\frac{1}{2}}$에서 최댓값 $\frac{e}{2}$를 갖는다.

유형 11 삼각함수의 최대 · 최소

0526 답 ③

$f(x)=x+\sin 2x$에서

$f'(x)=1+2\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=-\frac{1}{2}$ $\therefore x=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{\pi}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값, $x=0$에서 최솟값을 가지므로

$a=\frac{\pi}{3}$, $b=0$

$\therefore a+b=\frac{\pi}{3}+0=\frac{\pi}{3}$

0527 답 ①

$f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$에서

$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)-\sin x\times(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$ $\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 최댓값 $M=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x=0$ 또는 $x=\pi$에서 최솟값 $m=0$을 가지므로

$M^2+m^2=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$

0528 답 ①

$f(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)$

$\quad=-2e^{-x}\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-e^{-\frac{\pi}{2}}$	$\nearrow$	$-e^{-\pi}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 1, $x=\frac{\pi}{2}$에서 최솟값 $-e^{-\frac{\pi}{2}}$을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$1\times(-e^{-\frac{\pi}{2}})=-e^{-\frac{\pi}{2}}$

유형 12 치환을 이용한 함수의 최대 · 최소

0529

답 ①

$f(x)=e^{3x}+3e^{2x}-9e^{x}$에서 $e^{x}=t$로 놓으면 $t>0$이고, $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+3t^2-9t$

$g'(t)=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because t>0$)

$t>0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	-5	$\nearrow$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 최솟값 -5를 갖는다.

0530

답 36

$f(x)=(\ln x)^3-(\ln x^3)^2+8\ln x^3$

$\quad=(\ln x)^3-9(\ln x)^2+24\ln x$

$\ln x=t$로 놓으면 $e\le x\le e^5$에서 $1\le t\le 5$이고, $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-9t^2+24t$

$g'(t)=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$

$g'(t)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=4$

$1\le t\le 5$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	16	$\nearrow$	20	$\searrow$	16	$\nearrow$	20

함수 $g(t)$는 $t=2$ 또는 $t=5$에서 최댓값 20, $t=1$ 또는 $t=4$에서 최솟값 16을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$20+16=36$

0531

답 ①

모든 양의 실수 x에 대하여 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$0\le 2\sin x+2\le 4$, $e^0\le e^{2\sin x+2}\le e^4$

$\therefore 1\le g(x)\le e^4$ ····· ㉠

$f(x)=x(\ln x-2)$에서

$f'(x)=\ln x-2+x\times\frac{1}{x}=\ln x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

$g(x)=t$로 놓으면 ㉠에서 $1\le t\le e^4$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)$

$1\le t\le e^4$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	e	$\cdots$	e^4
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-2	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$2e^4$

함수 $f(t)$는 $t=e^4$에서 최댓값 $M=2e^4$, $t=e$에서 최솟값 $m=-e$를 가지므로

$\frac{M}{m}=\frac{2e^4}{-e}=-2e^3$

유형 13 함수의 최대 · 최소의 활용

0532

답 ②

$0<\theta<\pi$에서 $0<\sin\theta\le 1$, $-1<\cos\theta<1$이므로

$\overline{OB}=1-\cos\theta$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=2\sin\theta$

$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\times 2\sin\theta$

$\quad=\sin\theta(1-\cos\theta)$

$S'(\theta)=\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta$

$\quad=-2\cos^2\theta+\cos\theta+1$ ($\because \sin^2\theta=1-\cos^2\theta$)

$\quad=(1+2\cos\theta)(1-\cos\theta)$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ ($\because -1<\cos\theta<1$)

$\therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$ ($\because 0<\theta<\pi$)

$0<\theta<\pi$에서 함수 $S(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	(π)
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

따라서 함수 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$에서 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 갖는다.

0533

답 ③

원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 각각 r, h ($r>0$, $h>0$)이라 하면 원기둥의 부피는

$\pi r^2h=16\pi$ $\quad\therefore r^2h=16$ ····· ㉠

원기둥의 겉넓이를 $f(r)$라 하면

$f(r)=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{32\pi}{r}$ ($\because$ ㉠)

$f'(r)=4\pi r-\frac{32\pi}{r^2}=\frac{4\pi r^3-32\pi}{r^2}=\frac{4\pi(r^3-8)}{r^2}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f'(r)=0$에서 $r^3=8$

$\therefore r=2$ ($\because r>0$)

$r>0$에서 함수 $f(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	(0)	…	2	…
$f'(r)$		−	0	+
$f(r)$		↘	극소	↗

함수 $f(r)$는 $r=2$에서 극소이면서 최소이고 이때의 원기둥의 높이 h는

$h=\frac{16}{r^2}=\frac{16}{4}=4$

따라서 구하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이의 합은

$2+4=6$

0534

답 ⑤

$C(t)=te^{-\frac{1}{3}t}$에서 $C'(t)=e^{-\frac{1}{3}t}\left(1-\frac{1}{3}t\right)$

$C'(t)=0$에서 $t=3$ ($\because e^{-\frac{1}{3}t}>0$)

$t>0$에서 함수 $C(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	…	3	…
$C'(t)$		+	0	−
$C(t)$		↗	극대	↘

함수 $C(t)$는 $t=3$에서 극대이면서 최대이고 이때의 혈액 속의 주사약의 농도는

$C(3)=3e^{-1}$

따라서 $a=3$, $b=3e^{-1}$이므로

$ab=3\times 3e^{-1}=\frac{9}{e}$

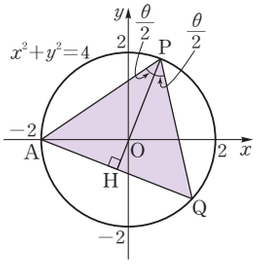
0535

답 $3\sqrt{3}$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

오른쪽 그림과 같이 삼각형 AQP는 $\overline{PA}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이므로 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PH는 원의 중심 O를 지나고 선분 AQ를 수직이등분한다.

이때 두 삼각형 APH, QPH는 서로 합동이다.



즉, $\angle APH=\angle QPH=\frac{\theta}{2}$

삼각형 AOP는 $\overline{OP}=\overline{OA}=2$인 이등변삼각형이므로

$\angle OAP=\angle OPA=\frac{\theta}{2}$

$\therefore \angle AOP=\pi-(\angle OAP+\angle OPA)=\pi-\theta$

삼각형 AOP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PA}^2=\overline{OA}^2+\overline{OP}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OP}\times\cos(\pi-\theta)$

$=4+4+2\times 2\times 2\times\cos\theta$

$=8(1+\cos\theta)$

삼각형 AQP의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{PQ}\times\sin(\angle APQ)=\frac{1}{2}\times\overline{PA}^2\times\sin(\angle APQ)$

$=\frac{1}{2}\times 8(1+\cos\theta)\times\sin\theta=4(1+\cos\theta)\sin\theta$

$S'(\theta)=-4\sin^2\theta+4(1+\cos\theta)\cos\theta$

$=8\cos^2\theta+4\cos\theta-4$ ($\because \sin^2\theta=1-\cos^2\theta$)

$=4(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $S(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		+	0	−	
$S(\theta)$		↗	극대	↘	

함수 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\times\sin\frac{\pi}{3}=4\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

참고

삼각형 AQP의 넓이 $S(\theta)$는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\angle AOP=\angle POQ=\pi-\theta$, $\angle AOQ=2\theta$이므로

$S(\theta)=$(삼각형 AOP의 넓이)+(삼각형 POQ의 넓이)+(삼각형 AOQ의 넓이)

$=2\times\left\{\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin(\pi-\theta)\right\}+\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 2\theta$

$=4\sin\theta+2\sin 2\theta=4\sin\theta+2\times 2\sin\theta\cos\theta$

$=4(1+\cos\theta)\sin\theta$

유형 14 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수

0536

답 2

$f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$라 하면

$f'(x)=\frac{4(x^2+1)-4x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}=\frac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

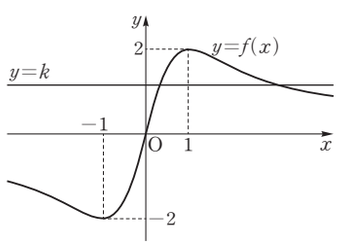
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	−1	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−2	↗	2	↘

또한 $f(-x)=\frac{-4x}{x^2+1}=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이고,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$의 서로 다른

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

실근의 개수가 2이려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-2<k<0$ 또는 $0<k<2$

따라서 구하는 정수 k는 -1, 1의 2개이다.

0537

답 ①

$f(x)=x^2e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}=-x(x-2)e^{-x}$

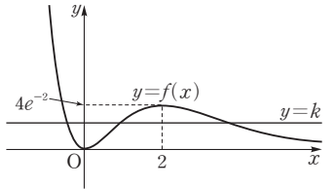
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ ($\because e^{-x}>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘

또한 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$0<k<4e^{-2}$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=4e^{-2}$이므로

$\alpha+\beta=0+\frac{4}{e^2}=\frac{4}{e^2}$

0538

답 ②

$x-\ln(\sin x)-k=0$에서 $x-\ln(\sin x)=k$

$f(x)=x-\ln(\sin x)$라 하면

$f'(x)=1-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x}$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\cos x$, $\tan x=1$

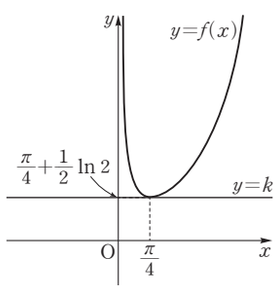
$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$	↗	

또한 $\lim_{x\to0+} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to\pi-} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$가 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나야 하므로 $k\geq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$이다.

0539

답 $\frac{1}{e}$

$g(x)=\frac{x^2}{e^{x^2}}=x^2e^{-x^2}$이라 하면

$g'(x)=2xe^{-x^2}+x^2e^{-x^2}\times(-2x)$

$=(2x-2x^3)e^{-x^2}=-2x(x+1)(x-1)e^{-x^2}$

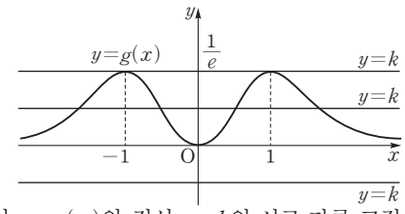
$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$ ($\because e^{-x^2}>0$)

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘

또한 $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$,

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $g(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 서로 다른 교점의 개수와 같으므로

$$f(k)=\begin{cases}0 & (k<0)\\ 1 & (k=0)\\ 4 & \left(0<k<\frac{1}{e}\right)\\ 2 & \left(k=\frac{1}{e}\right)\\ 0 & \left(k>\frac{1}{e}\right)\end{cases}$$

따라서 함수 $f(k)$는 $k=0$, $k=\frac{1}{e}$에서 불연속이므로 구하는 합은

$0+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$

Bible Says 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $x=a$에서 연속이다.

(1) 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

(2) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

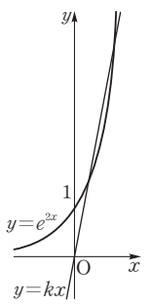
(3) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

유형 15 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수

0540

답 ②

방정식 $e^{2x}=kx$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{2x}$과 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



$f(x)=e^{2x}$, $g(x)=kx$라 하면

$f'(x)=2e^{2x}$, $g'(x)=k$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^{2t}=kt$ ····· ㉠

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f'(t)=g'(t)$에서 $2e^{2t}=k$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{2}k=kt$ $\therefore t=\frac{1}{2}$

이를 ㉡에 대입하면 $k=2e$

따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$k>2e$ $\therefore a=2e$

다른 풀이

$e^{2x}=kx$에서 $\frac{e^{2x}}{x}=k$ (단, $x\neq0$)

$f(x)=\frac{e^{2x}}{x}$이라 하면

$f'(x)=\frac{2e^{2x}\times x-e^{2x}}{x^2}=\frac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ ($\because e^{2x}>0$)

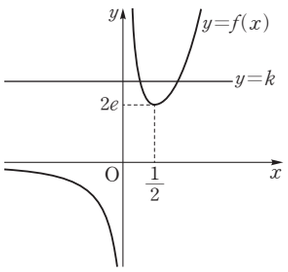
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	(0)	···	$\frac{1}{2}$	···
$f'(x)$	−		−	0	+
$f(x)$	↘		↘	$2e$	↗

또한 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$,

$\lim_{x\to0-}f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



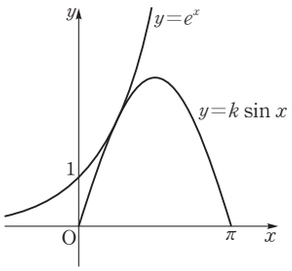
방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k>2e$ $\therefore a=2e$

0541

답 $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

$0<x<\pi$에서 방정식 $e^x=k\sin x$가 단 하나의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^x$과 곡선 $y=k\sin x$가 한 점에서 접해야 한다.



$f(x)=e^x$, $g(x)=k\sin x$라 하면

$f'(x)=e^x$, $g'(x)=k\cos x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t ($0<t<\pi$)라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^t=k\sin t$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $e^t=k\cos t$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\cos t=\sin t$, $\tan t=1$

$\therefore t=\frac{\pi}{4}$ ($\because 0<t<\pi$)

이를 ㉠에 대입하면

$k=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

다른 풀이

$0<x<\pi$에서 $\sin x>0$이므로

$\frac{e^x}{\sin x}=k$

$f(x)=\frac{e^x}{\sin x}$이라 하면

$f'(x)=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{(\sin x)^2}=\frac{(\sin x-\cos x)e^x}{\sin^2 x}$

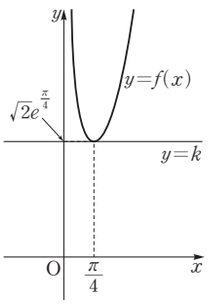
$f'(x)=0$에서 $\sin x=\cos x$, $\tan x=1$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	···	$\frac{\pi}{4}$	···	(π)
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	↗	

또한 $\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\pi-}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$가 단 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 접해야 하므로

$k=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

0542

답 $0<k<\frac{e}{2}$

방정식 $\sqrt{x}=k\ln x$가 실근을 갖지 않으려면 곡선 $y=\sqrt{x}$와 곡선 $y=k\ln x$가 만나지 않아야 한다.



$f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=k\ln x$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x)=\frac{k}{x}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t ($t>0$)이라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\sqrt{t}=k\ln t$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{k}{t}$

$\therefore k=\frac{\sqrt{t}}{2}$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\sqrt{t}=\frac{\sqrt{t}}{2}\ln t$, $2=\ln t$ ($\because t>0$)

$\therefore t=e^2$

이를 ㉡에 대입하면

$k=\frac{\sqrt{e^2}}{2}=\frac{e}{2}$

따라서 곡선 $y=\sqrt{x}$와 곡선 $y=k\ln x$가 만나지 않으려면

$0<k<\frac{e}{2}$ ($\because k>0$)

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 16 주어진 구간에서 성립하는 부등식 $f(x) \geq a$ 꼴

0543

답 -2

$\frac{3x^2-2}{x^2+1} \geq k$에서 $\frac{3x^2-2}{x^2+1}-k \geq 0$

$f(x)=\frac{3x^2-2}{x^2+1}-k$라 하면

$f'(x)=\frac{6x(x^2+1)-(3x^2-2)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{10x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-2-k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $-2-k$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이 성립하려면

$-2-k \geq 0$ $\therefore k \leq -2$

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 -2이다.

0544

답 ②

$x \ln 2x-4x \geq k$에서

$x \ln 2x-4x-k \geq 0$

$f(x)=x \ln 2x-4x-k$라 하면

$f'(x)=\ln 2x+x\times\frac{2}{2x}-4=\ln 2x-3$

$f'(x)=0$에서 $\ln 2x=3$ $\therefore x=\frac{e^3}{2}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{e^3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{e^3}{2}-k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=\frac{e^3}{2}$에서 최솟값 $-\frac{e^3}{2}-k$를 가지므로 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이 성립하려면

$-\frac{e^3}{2}-k \geq 0$ $\therefore k \leq -\frac{e^3}{2}$

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 $-\frac{e^3}{2}$이다.

0545

답 -2

$x \ln x+1-3x \leq k$에서 $x \ln x-3x+1-k \leq 0$

$f(x)=x \ln x-3x+1-k$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-3=\ln x-2$

$1 \leq x \leq e^2$에서 $f'(x) \leq 0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=-2-k$이므로 $1 \leq x \leq e^2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \leq 0$이 성립하려면

$-2-k \leq 0$ $\therefore k \geq -2$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 -2이다.

0546

답 55

$\frac{\ln x^n}{x} \leq k$에서 $\frac{n \ln x}{x}-k \leq 0$

$g(x)=\frac{n \ln x}{x}-k$라 하면

$g'(x)=\frac{\frac{n}{x}\times x-n \ln x}{x^2}=\frac{n(1-\ln x)}{x^2}$

$g'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$

$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	$\frac{n}{e}-k$	↘

함수 $g(x)$는 $x=e$에서 최댓값 $\frac{n}{e}-k$를 가지므로 $x>0$일 때 $g(x) \leq 0$이 성립하려면

$\frac{n}{e}-k \leq 0$ $\therefore k \geq \frac{n}{e}$

따라서 $f(n)=\frac{n}{e}$이므로

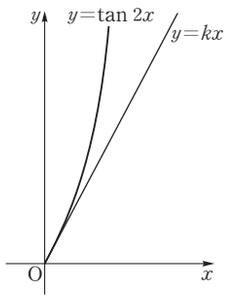
$e\sum_{n=1}^{10} f(n)=\sum_{n=1}^{10} n=\frac{10\times 11}{2}=55$

유형 17 주어진 구간에서 성립하는 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 꼴

0547

답 2

$0<x<\frac{\pi}{4}$에서 $\tan 2x>kx$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\tan 2x$가 직선 $y=kx$보다 항상 위쪽에 있어야 한다.



$f(x)=\tan 2x$라 하면 $f'(x)=2\sec^2 2x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (0, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$이므로 접선의 방정식은 $y=2x$이다.

이때 $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=kx$보다 항상 위쪽에 있으려면

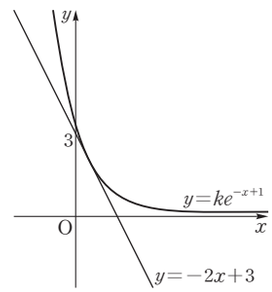
$k \leq 2$

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 2이다.

0548

답 $\frac{2}{\sqrt{e}}$

모든 실수 x에 대하여 $ke^{-x+1} \geq -2x+3$이 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=ke^{-x+1}$이 직선 $y=-2x+3$보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접해야 한다.



$f(x)=ke^{-x+1}$, $g(x)=-2x+3$이라 하면

$f'(x)=-ke^{-x+1}$, $g'(x)=-2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $ke^{-t+1}=-2t+3$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-ke^{-t+1}=-2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $-2t+3=2$, $2t=1$ $\therefore t=\frac{1}{2}$

이를 ㉡에 대입하면

$-ke^{\frac{1}{2}}=-2$ $\therefore k=\frac{2}{\sqrt{e}}$

이때 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접하려면

$k\geq\frac{2}{\sqrt{e}}$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{2}{\sqrt{e}}$이다.

다른 풀이

$ke^{-x+1}\geq-2x+3$에서

$\frac{-2x+3}{e^{-x+1}}\leq k$ ($\because e^{-x+1}>0$)

$f(x)=\frac{-2x+3}{e^{-x+1}}$이라 하면

$f'(x)=\frac{-2e^{-x+1}-(-2x+3)(-e^{-x+1})}{(e^{-x+1})^2}$

$=\frac{-2-2x+3}{e^{-x+1}}=\frac{-2x+1}{e^{-x+1}}$

$f'(x)=0$에서 $2x=1$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	$\frac{1}{2}$	···
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘

함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{2}{\sqrt{e}}$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\leq k$가 성립하려면

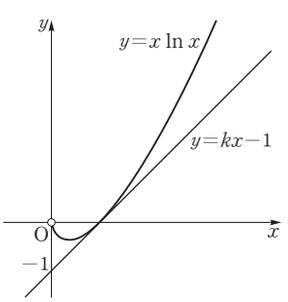
$k\geq\frac{2}{\sqrt{e}}$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{2}{\sqrt{e}}$이다.

0549

답 1

$x>0$에서 $x\ln x\geq kx-1$이 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x\ln x$가 직선 $y=kx-1$보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접해야 한다.



$f(x)=x\ln x$, $g(x)=kx-1$이라 하면

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$g'(x)=k$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t\ln t=kt-1$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\ln t+1=k$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t\ln t=(\ln t+1)t-1$ $\therefore t=1$

이를 ㉡에 대입하면

$k=\ln 1+1=1$

이때 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=g(x)$보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접하려면

$k\leq1$

따라서 구하는 양수 k의 최댓값은 1이다.

유형 18 직선 운동에서의 속도와 가속도

0550

답 ①

$x(t)=a\sin\frac{\pi t}{2}+1$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=x'(t)=\frac{a\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}$

시각 $t=2$에서 점 P의 속도가 2π이므로

$x'(2)=2\pi$에서 $\frac{a\pi}{2}\cos\pi=2\pi$

$-\frac{a\pi}{2}=2\pi$ $\therefore a=-4$

즉, $x'(t)=-2\pi\cos\frac{\pi t}{2}$이므로 시각 $t=4$에서의 점 P의 속도는

$x'(4)=-2\pi\cos2\pi=-2\pi$

0551

답 ④

$x(t)=\sin\frac{t}{2}+\frac{1}{4}t-1$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=x'(t)=\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{4}$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$x'(t)=0$에서 $\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}=-\frac{1}{4}$, $\cos\frac{t}{2}=-\frac{1}{2}$

$\frac{t}{2}=\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{8}{3}\pi$, ···

$\therefore t=\frac{4}{3}\pi$, $\frac{8}{3}\pi$, $\frac{16}{3}\pi$, ··· ($\because t\geq0$)

따라서 구하는 시각은 $\frac{4}{3}\pi$이다.

0552

답 ②

$x(t)=\ln(t^2+2t+5)-2$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=x'(t)=\frac{2t+2}{t^2+2t+5}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$a=x''(t)=\dfrac{2(t^2+2t+5)-(2t+2)^2}{(t^2+2t+5)^2}$

$=\dfrac{-2t^2-4t+6}{(t^2+2t+5)^2}=\dfrac{-2(t+3)(t-1)}{(t^2+2t+5)^2}$

이때 점 P의 가속도가 0이 되는 시각은

$x''(t)=0$에서 $t=1$ ($\because t\geq 0$)

따라서 가속도가 0이 되는 시각 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$x'(1)=\dfrac{2+2}{1+2+5}=\dfrac{1}{2}$

0553

답 ④

$x_1(t)=3e^{t^2}$, $x_2(t)=kt^3$이므로 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도는

$x_1'(t)=6te^{t^2}$, $x_2'(t)=3kt^2$

두 점 P, Q의 속도가 같아지려면 $x_1'(t)=x_2'(t)$에서

$6te^{t^2}=3kt^2$ $\quad\therefore \dfrac{2e^{t^2}}{t}=k$ ($\because t>0$) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 두 번 존재하려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$f(t)=\dfrac{2e^{t^2}}{t}$이라 하면

$f'(t)=\dfrac{4t^2e^{t^2}-2e^{t^2}}{t^2}=\dfrac{2(2t^2-1)e^{t^2}}{t^2}$

$f'(t)=0$에서 $t^2=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because t>0$)

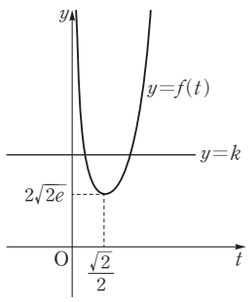
$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	…	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	…
$f'(t)$		−	0	+
$f(t)$		↘	$2\sqrt{2e}$	↗

또한 $\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\infty$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 $t>0$일 때, 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k>2\sqrt{2e}$



유형 19 평면 운동에서의 속도

0554

답 ②

$x=3t+2$, $y=-t^2-t+2$이므로

$\dfrac{dx}{dt}=3$, $\dfrac{dy}{dt}=-2t-1$

시각 $t=2$에서의 점 P의 속도는

$(3,\ -5)$

따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$

0555

답 ④

$x=\dfrac{2}{t^2+1}$, $y=8\sqrt{t^2+1}$에서

$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{4t}{(t^2+1)^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{8t}{\sqrt{t^2+1}}$

시각 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$\left(-\dfrac{4}{2^2},\ \dfrac{8}{\sqrt{2}}\right)$, 즉 $(-1,\ 4\sqrt{2})$

따라서 $a=-1$, $b=4\sqrt{2}$이므로

$a^2+b^2=(-1)^2+(4\sqrt{2})^2=33$

0556

답 ②

$x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+(e^t\cos t-e^t\sin t)^2}$

$=\sqrt{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}(\cos t-\sin t)^2}$

$=\sqrt{2e^{2t}}=\sqrt{2}e^t$ ($\because e^t>0$)

따라서 점 P의 속력이 $\sqrt{2e^2}$일 때의 시각 t는

$\sqrt{2}e^t=\sqrt{2e^2}$에서 $t=2$

0557

답 ③

$x=2(t-\cos t)$, $y=2(2-\sin t)$에서

$\dfrac{dx}{dt}=2(1+\sin t)$, $\dfrac{dy}{dt}=-2\cos t$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{2(1+\sin t)\}^2+(-2\cos t)^2}$

$=\sqrt{4(1+\sin t)^2+4\cos^2 t}$

$=2\sqrt{2(1+\sin t)}$

$-1\leq\sin t\leq 1$이므로 점 P의 속력이 최대일 때는 $t=\dfrac{\pi}{2}$이고,

이때의 점 P의 위치는

$x=2\left(\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$, $y=2\left(2-\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=2$

즉, $(\pi,\ 2)$이다.

유형 20 평면 운동에서의 가속도

0558

답 ④

$x=2t+e^{2t}$, $y=4-e^{2t}$에서

$\dfrac{dx}{dt}=2+2e^{2t}$, $\dfrac{dy}{dt}=-2e^{2t}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=4e^{2t}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-4e^{2t}$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{(4e^{2t})^2+(-4e^{2t})^2}$

$=\sqrt{16e^{4t}+16e^{4t}}=4\sqrt{2}e^{2t}\ (\because e^{2t}>0)$

따라서 시각 $t=1$에서의 점 P의 가속도의 크기는 $4\sqrt{2}e^2$이다.

0559

답 ③

$x=4\sqrt{t}$, $y=t^2+1$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{\sqrt{t}}$, $\frac{dy}{dt}=2t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{t\sqrt{t}}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2$

시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)^2+2^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{t^3}+4}$

따라서 시각 $t=\frac{1}{2}$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$

0560

답 3

$x=t^3$, $y=k\ln t$에서

$\frac{dx}{dt}=3t^2$, $\frac{dy}{dt}=\frac{k}{t}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=6t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{t^2}$

시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{(6t)^2+\left(-\frac{k}{t^2}\right)^2}$

$=\sqrt{36t^2+\frac{k^2}{t^4}}$

시각 $t=1$에서의 점 P의 가속도의 크기가 $3\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{36+k^2}=3\sqrt{5}$, $36+k^2=45$

$k^2=9$ $\quad\therefore k=3\ (\because k>0)$

0561

답 ⑤

$x=2\ln t$, $y=t+\frac{1}{t}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2}{t^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{2}{t^3}$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}}$

$=\sqrt{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}=\left|1+\frac{1}{t^2}\right|$

$=1+\frac{1}{t^2}\left(\because 1+\frac{1}{t^2}>0\right)$

점 P의 속력이 $\frac{5}{4}$인 시각은

$1+\frac{1}{t^2}=\frac{5}{4}$에서 $\frac{1}{t^2}=\frac{1}{4}$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$

0562

답 ⑤

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}t+\sin t$, $y=\sqrt{2}\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sqrt{2}\sin t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\sqrt{2}\cos t$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos t\right)^2+(-\sqrt{2}\sin t)^2}$

$=\sqrt{\cos^2 t+\sqrt{2}\cos t+\frac{1}{2}+2\sin^2 t}$

$=\sqrt{-\cos^2 t+\sqrt{2}\cos t+\frac{5}{2}}$

$=\sqrt{-\left(\cos t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3}$

$0<t<\frac{\pi}{2}$에서 점 P의 속력은 $\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 즉 $t=\frac{\pi}{4}$일 때 최대이다.

따라서 시각 $t=\frac{\pi}{4}$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

PART B 기출 & 기출변형 문제

0563

답 3

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2\ln x$라 하면 로그의 진수의 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=x^2+\frac{2}{x}$

$f''(x)=2x-\frac{2}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $2x=\frac{2}{x^2}$

$x^3=1$ $\quad\therefore x=1\ (\because x>0)$

이때 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 1이다.

따라서 구하는 접선의 기울기는

$f'(1)=1+2=3$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0564

답 4

$x=t-\sin 3t$, $y=5-\cos 3t$에서

$\frac{dx}{dt}=1-3\cos 3t$, $\frac{dy}{dt}=3\sin 3t$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(1-3\cos 3t)^2+(3\sin 3t)^2}$

$=\sqrt{2(5-3\cos 3t)}$

$-1\le\cos 3t\le 1$이므로 점 P의 속력은 $\cos 3t=-1$일 때 최대이다.

따라서 구하는 속력의 최댓값은

$\sqrt{2\times\{5-3\times(-1)\}}=4$

짝기출

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$x=2\sqrt{t+1}$, $y=t-\ln(t+1)$

이다. 점 P의 속력의 최솟값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

0565

답 ②

$x=\ln 2t$, $y=-\frac{1}{t}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t^2}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{t^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{2}{t^3}$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t^2}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}$ $(\because t>0)$

점 P의 속력이 $\frac{2}{3}$인 시각은

$\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}=\frac{2}{3}$에서 $\sqrt{t^2+1}=\frac{2}{3}t^2$

$9t^2+9=4t^4$, $4t^4-9t^2-9=0$

$(4t^2+3)(t^2-3)=0$ $\therefore t=\sqrt{3}$ $(\because t>0)$

따라서 시각 $t=\sqrt{3}$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{27}}=\frac{\sqrt{21}}{9}$

짝기출

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$x=t-\frac{2}{t}$, $y=2t+\frac{1}{t}$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P의 속력은?

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

답 ③

0566

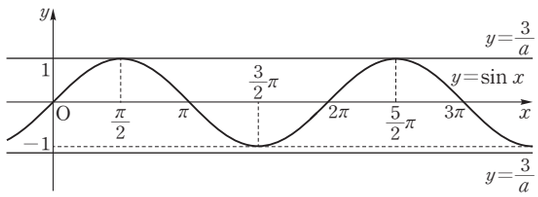
답 6

$f(x)=3x^2+2a\sin x+x$에서 $f'(x)=6x+2a\cos x+1$

$f''(x)=6-2a\sin x$

$f''(x)=0$에서 $6=2a\sin x$ $\therefore \sin x=\frac{3}{a}$ $(\because a\ne 0)$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 변곡점을 갖지 않으려면 다음 그림과 같이 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{3}{a}$이 접하거나 만나지 않아야 한다.



즉, $\left|\frac{3}{a}\right|\ge 1$에서 $|a|\le 3$

$\therefore -3\le a<0$ 또는 $0<a\le 3$

따라서 구하는 정수 a는 -3, -2, -1, 1, 2, 3의 6개이다.

짝기출

함수 $f(x)=3\sin kx+4x^3$의 그래프가 오직 하나의 변곡점을 가지도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오.

답 2

0567

답 ③

$f(x)=x^2\ln x-\frac{5}{2}x^2$에서 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}-5x=2x\ln x-4x$

$f''(x)=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}-4=2\ln x-2=2(\ln x-1)$

$f''(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$

이때 $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=e$에서 변곡점을 갖는다.

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $\left(e, -\frac{3}{2}e^2\right)$이고

$f'(e)=2e\ln e-4e=-2e$이다.

즉, 이 점에서의 접선의 방정식은

$y+\frac{3}{2}e^2=-2e(x-e)$ $\therefore y=-2ex+\frac{e^2}{2}$

따라서 $A\left(\frac{e}{4}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{e^2}{2}\right)$이므로 구하는 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{e}{4}\times\frac{e^2}{2}=\frac{e^3}{16}$

짝기출

곡선 $y=xe^{-2x}$의 변곡점을 A라 하자. 곡선 $y=xe^{-2x}$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① e^{-2} ② $3e^{-2}$ ③ 1 ④ e^2 ⑤ $3e^2$

답 ①

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0568

답 10

$g(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$이므로

$g(x)=t$로 놓으면 $-2\le t\le 2$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-3t^2+15$

$f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

$-2\le t\le 2$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-5	↗	15	↘	11

함수 $f(t)$는 $t=0$에서 최댓값 15, $t=-2$에서 최솟값 -5를 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$15+(-5)=10$

참고

$g(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$에서 $g'(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x$

$g'(x)=0$에서 $\cos x=\sqrt{3}\sin x$

$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ····· ㉠

이때 $\sin x$, $\cos x$는 주기가 2π인 주기함수이므로 $0\le x\le 2\pi$라 하면 ㉠을 만족시키는 x의 값은

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\sqrt{3}$	↗	2	↘	-2	↗	$\sqrt{3}$

즉, $g(x)=t$로 놓으면 모든 실수 x에 대하여 $-2\le t\le 2$이다.

0569

답 ③

$f(x)=x^2e^{-x+2}$에서

$f'(x)=2xe^{-x+2}-x^2e^{-x+2}$

$=(-x^2+2x)e^{-x+2}$

$=-x(x-2)e^{-x+2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ ($\because e^{-x+2}>0$)

$y=(f\circ f)(x)$에서 $y'=f'(f(x))f'(x)$

$f'(f(x))f'(x)=0$에서 $f'(f(x))=0$ 또는 $f'(x)=0$

$f'(f(x))=0$에서 $f(x)=0$일 때 $x=0$

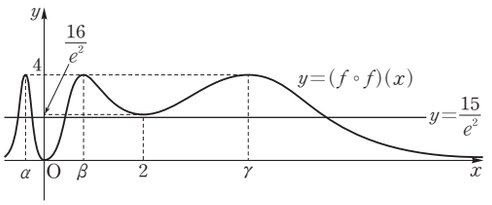
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 만나는 점의 x좌표를 차례대로 α, β, γ라 하면

$\alpha<0<\beta<2<\gamma$

함수 $y=(f\circ f)(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$	2	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f'(f(x))$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(f(x))f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$(f\circ f)(x)$	↗	4	↘	0	↗	4	↘	$\frac{16}{e^2}$	↗	4	↘

함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 교점의 개수는 4이다.

0570

답 ⑤

$\sin x-x\cos x-k=0$에서 $\sin x-x\cos x=k$

$f(x)=\sin x-x\cos x$라 하면

$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

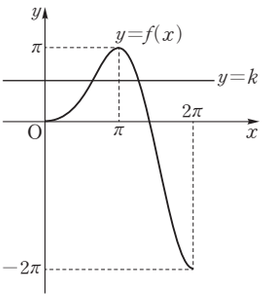
x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	π	↘	-2π

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$0\le k<\pi$

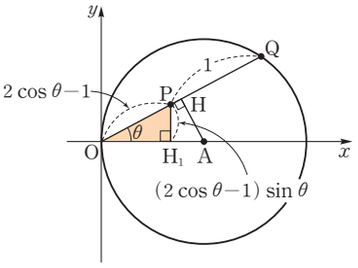
따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$0+1+2+3=6$



0571

답 34



점 A에서 선분 OQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\overline{OA}\cos\theta=\cos\theta$

$\overline{OQ}=2\overline{OH}=2\cos\theta$

$\therefore \overline{OP}=\overline{OQ}-\overline{PQ}=2\cos\theta-1$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H_1이라 하고 점 P의 y좌표를 $f(\theta)$라 하면

$f(\theta)=\overline{PH_1}=(2\cos\theta-1)\sin\theta$

$f'(\theta)=-2\sin^2\theta+(2\cos\theta-1)\cos\theta$

$=4\cos^2\theta-\cos\theta-2$

$f''(\theta)=-8\cos\theta\sin\theta+\sin\theta$

$=\sin\theta(1-8\cos\theta)$

$f'(\theta)=0$에서 $4\cos^2\theta-\cos\theta-2=0$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\therefore \cos\theta=\dfrac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-4\times4\times(-2)}}{2\times4}$

$=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$

또한 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$일 때 $f''(\theta)<0$이므로 $\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$을 만족시키는 θ의 값을 θ_1이라 하면 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 극대이면서 최대이다.

따라서 $a=1$, $b=33$이므로

$a+b=1+33=34$

0572

답 ③

ㄱ. $f''(x)=0$에서 $x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=e$이고, 이 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=e$에서 변곡점을 갖는다.
즉, 구간 $[a, f]$에서 변곡점의 개수는 4이다. (참)

ㄴ. 구간 $[a, e]$에서 $f'(d)=0$이고 $x=d$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극대이다.
즉, 구간 $[a, e]$에서 함수 $f(x)$가 극대가 되는 x의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 구간 $[a, d]$에서 증가하고 구간 $[d, e]$에서 감소하므로 구간 $[a, e]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(d)$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0573

답 ⑤

$f(x)=\dfrac{kx}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{k(x^2+1)-kx\times2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{k(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{k(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-2kx(x^2+1)^2-k(1-x^2)\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{2kx^3-6kx}{(x^2+1)^3}=\dfrac{2kx(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=\dfrac{2kx(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

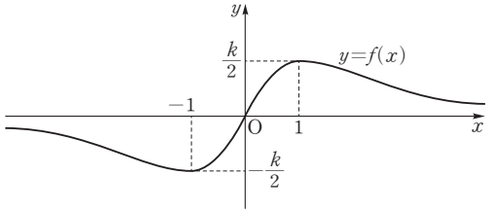
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	$-\dfrac{k}{2}$	↗	변곡점	↗	$\dfrac{k}{2}$	↘	변곡점	↘

또한 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<1$일 때 $f''(x)<0$이므로 구간 $(0, 1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다. (참)

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$에서 변곡점을 가지므로 변곡점의 개수는 3이다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$\dfrac{k}{2}>1 \quad \therefore k>2$

즉, 구하는 자연수 k의 최솟값은 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

짝기출

함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $f'(0)=1$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq-\dfrac{1}{2}$이다.

ㄷ. $0<a<b<1$일 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

답 ③

0574

답 3

$f(x)=e^x(x^2-nx+4)$에서

$f'(x)=e^x(x^2-nx+4)+e^x(2x-n)$

$=e^x\{x^2+(2-n)x+4-n\}$

방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같으므로 함수 $g(t)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이거나 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

이때 $e^x>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2+(2-n)x+4-n\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+(2-n)x+4-n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-n)^2-4(4-n)\leq0$

$n^2-12\leq0$, $(n+2\sqrt{3})(n-2\sqrt{3})\leq0$

$\therefore -2\sqrt{3}\leq n\leq2\sqrt{3}$

따라서 구하는 자연수 n은 1, 2, 3의 3개이다.

짝기출

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자.

$1\leq g(n)\leq8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은?

① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

답 ④

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

Ⅲ 적분법

유형별 유사문제

PART A′

08 여러 가지 적분법

유형 01 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

0575 답 ①

$f(x)=\int\frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2}dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x}-x^{-2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|+\frac{1}{x}+C$

$f(1)=1$이므로 $\frac{1}{2}-2+1+C=1$

$\therefore C=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}$이므로

$f(2)=2-4+\ln 2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\ln 2$

0576 답 108

$F(x)=xf(x)-\frac{4}{3}x^3+\frac{9}{2}x\sqrt[3]{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)-4x^2+6x^{\frac{1}{3}}$

이때 $F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x^2+6x^{\frac{1}{3}}$

$xf'(x)=4x^2-6x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=4x-6x^{-\frac{2}{3}}$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(4x-6x^{-\frac{2}{3}}\right)dx$

$=2x^2-18x^{\frac{1}{3}}+C=2x^2-18\sqrt[3]{x}+C$

$\therefore f(8)-f(1)=(128-36+C)-(2-18+C)=108$

다른 풀이

$x>0$이므로 주어진 식의 양변에 $\frac{1}{x^2}$을 곱하면

$\frac{xf(x)-F(x)}{x^2}=\frac{4}{3}x-\frac{9}{2}x^{-\frac{2}{3}}$

$\left\{\frac{F(x)}{x}\right\}'=\frac{4}{3}x-\frac{9}{2}x^{-\frac{2}{3}}$이므로

$\frac{F(x)}{x}=\int\left\{\frac{F(x)}{x}\right\}'dx=\int\left(\frac{4}{3}x-\frac{9}{2}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx$

$=\frac{2}{3}x^2-\frac{27}{2}x^{\frac{1}{3}}+C$

$F(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{27}{2}x^{\frac{4}{3}}+Cx$

$\therefore f(x)=2x^2-18x^{\frac{1}{3}}+C=2x^2-18\sqrt[3]{x}+C$

$\therefore f(8)-f(1)=(128-36+C)-(2-18+C)=108$

0577 답 ②

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\frac{3-3x}{1+\sqrt{x}}=\frac{3(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}=3-3\sqrt{x}$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3-3\sqrt{x})dx=\int\left(3-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$=3x-2x^{\frac{3}{2}}+C=3x-2\sqrt{x^3}+C$

$f(1)=0$이므로 $3-2+C=0$

$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=3x-2\sqrt{x^3}-1$이므로

$f(4)=12-2\sqrt{4^3}-1=-5$

0578 답 ②

$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & (x<1)\\ 5x\sqrt{x} & (x>1)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}x^3+C_1 & (x<1)\\ 2x^{\frac{5}{2}}+C_2 & (x>1)\end{cases}$

$f(4)=60$이므로 $64+C_2=60$

$\therefore C_2=-4$

한편, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x^3+C_1)=1+C_1$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\left(2x^{\frac{5}{2}}-4\right)=2-4=-2$

에서 $1+C_1=-2$ $\therefore C_1=-3$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^3-3 & (x<1)\\ 2x^{\frac{5}{2}}-4 & (x\geq1)\end{cases}$이므로

$f(-1)=-1-3=-4$

Bible Says **함수의 연속**

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $x=a$에서 연속이다.

(1) 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

(2) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(3) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

유형 02 밑이 e인 지수함수의 부정적분

0579 답 ③

$f(x)=\int\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1}dx=\int\frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^{2x}+e^x+1}dx$

$=\int(e^x-1)dx=e^x-x+C$

$f(0)=2$이므로 $1+C=2$

$\therefore C=1$

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $f(x)=e^x-x+1$이므로
$f(1)=e-1+1=e$

0580 답 ③

$f(g(x))=g(f(x))=x$이므로 $g(x)=f^{-1}(x)$
$y=\ln x-2$로 놓으면
$y+2=\ln x \quad \therefore x=e^{y+2}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=e^{x+2}$
따라서 $g(x)=e^{x+2}$이므로
$$\int g(x)\,dx=\int e^{x+2}\,dx=e^2\int e^x\,dx$$
$$=e^2\times e^x+C=e^{x+2}+C$$

Bible Says 역함수 구하기

함수 $y=f(x)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.
❶ 주어진 함수 $y=f(x)$가 일대일대응인지 확인한다.
❷ $y=f(x)$를 x에 대하여 정리한 후, $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.
❸ x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

0581 답 ⑤

$$f(x)+g(x)=\int(8e^{2x}+2e^x)\,dx=4e^{2x}+2e^x+C_1$$
$$f(x)-g(x)=\int(-2e^x)\,dx=-2e^x+C_2$$
$f(0)=5$, $g(0)=2$이므로
$f(0)+g(0)=4+2+C_1=7$
$\therefore C_1=1$
$f(0)-g(0)=-2+C_2=3$
$\therefore C_2=5$
따라서
$f(x)+g(x)=4e^{2x}+2e^x+1 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f(x)-g(x)=-2e^x+5 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠+㉡을 하면
$2f(x)=4e^{2x}+6 \quad \therefore f(x)=2e^{2x}+3$
㉠−㉡을 하면
$2g(x)=4e^{2x}+4e^x-4 \quad \therefore g(x)=2e^{2x}+2e^x-2$
$\therefore f(1)-g(2)=2e^2+3-(2e^4+2e^2-2)$
$=5-2e^4$

0582 답 ②

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-2e^x\right)dx$$
$$=\ln|x|-2e^x+C$$
함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, e)$를 지나므로
$f(1)=e$에서 $-2e+C=e$
$\therefore C=3e$
따라서 $f(x)=\ln|x|-2e^x+3e$이므로
$f(x)=1-2e^x$에서
$\ln|x|-2e^x+3e=1-2e^x$, $\ln|x|=1-3e$
$\therefore x=e^{-3e+1}$ ($\because x>0$)

유형 03 밑이 e가 아닌 지수함수의 부정적분

0583 답 ④

$$f(x)=\int(\sqrt{2})^{4x}\,dx=\int 4^x\,dx=\frac{4^x}{\ln 4}+C$$
$f(\log_4 6)=\frac{3}{\ln 2}$이므로 $\frac{6}{\ln 4}+C=\frac{3}{\ln 2}$
$\therefore C=0$
따라서 $f(x)=\frac{4^x}{\ln 4}$이므로
$f(1)=\frac{4}{\ln 4}=\frac{2}{\ln 2}$

0584 답 ①

$$f(x)=\int(4^x-1)^2\,dx=\int(16^x-2\times 4^x+1)\,dx$$
$$=\frac{16^x}{\ln 16}-\frac{2\times 4^x}{\ln 4}+x+C$$
$f(0)=\frac{1}{4\ln 2}$이므로
$\frac{1}{4\ln 2}-\frac{2}{2\ln 2}+C=\frac{1}{4\ln 2}$
$\therefore C=\frac{1}{\ln 2}$
따라서 $f(x)=\frac{16^x}{\ln 16}-\frac{2\times 4^x}{\ln 4}+x+\frac{1}{\ln 2}$이므로
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-n}{16^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{16^n}{4\ln 2}-\frac{4^n}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}}{16^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{\ln 2}\times\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{1}{4\ln 2}$$

0585 답 $\frac{3}{\ln 2}-2$

$f'(x)=\begin{cases}2x+1 & (x<0)\\ 2^x & (x>0)\end{cases}$에서
$f(x)=\begin{cases}x^2+x+C_1 & (x<0)\\ \frac{2^x}{\ln 2}+C_2 & (x>0)\end{cases}$
$f(-1)=0$이므로 $1-1+C_1=0$
$\therefore C_1=0$
한편, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

즉, $\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0+} f(x)=f(0)$이어야 하므로

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}(x^2+x)=0$

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{2^x}{\ln 2}+C_2\right)=\frac{1}{\ln 2}+C_2$

에서 $\frac{1}{\ln 2}+C_2=0 \quad \therefore C_2=-\frac{1}{\ln 2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x<0) \\ \frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2} & (x\geq0) \end{cases}$이므로

$f(-2)=4+(-2)=2,\ f(2)=\frac{4}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{3}{\ln 2}$

$\therefore f(2)-f(-2)=\frac{3}{\ln 2}-2$

유형 04 삼각함수의 부정적분

0586

답 2π

$f(x)=\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx$

$=\int\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x}dx$

$=\int(1-\cos x)\,dx=x-\sin x+C$

$f(\pi)=\pi$이므로 $\pi-\sin\pi+C=\pi \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=x-\sin x$이므로

$f(2\pi)=2\pi$

0587

답 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $\tan^2 x$이므로

$f'(x)=\tan^2 x$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\tan^2 x\,dx$

$=\int(\sec^2 x-1)\,dx=\tan x-x+C$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\tan x-x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

0588

답 ⑤

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $-1<\sin x<1$, 즉

$f'(x)=1-\sin x+\sin^2 x-\sin^3 x+\cdots$

$=\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$

$=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x}$

$=\sec^2 x-\sec x\tan x$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)\,dx$

$=\tan x-\sec x+C$

$f(0)=1$이므로 $-1+C=1$

$\therefore C=2$

따라서 $f(x)=\tan x-\sec x+2$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}+2=3-\sqrt{2}$

0589

답 ④

$f'(x)=\begin{cases} k\sin x & (x<0) \\ 1+2\cos x & (x>0) \end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} -k\cos x+C_1 & (x<0) \\ x+2\sin x+C_2 & (x>0) \end{cases}$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로 $C_1=1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$이므로 $\frac{\pi}{2}+2+C_2=3$

$\therefore C_2=1-\frac{\pi}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -k\cos x+1 & (x<0) \\ x+2\sin x+1-\frac{\pi}{2} & (x>0) \end{cases}$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0+} f(x)=f(0)$이어야 하므로

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}(-k\cos x+1)=-k+1$

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}\left(x+2\sin x+1-\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}$

에서 $-k+1=1-\frac{\pi}{2}$

$\therefore k=\frac{\pi}{2}$

유형 05 치환적분법 – 유리함수

0590

답 65

$x^2-x+2=t$로 놓으면 $2x-1=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int(2x-1)(x^2-x+2)^3\,dx$

$=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+C$

$=\frac{1}{4}(x^2-x+2)^4+C$

$f(0)=5$이므로 $4+C=5$

$\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-x+2)^4+1$이므로

$f(2)=\frac{1}{4}\times4^4+1=65$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0591

답 2

$ax+3=t$로 놓으면 $a=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int(ax+3)^7\,dx=\int t^7\times\frac{1}{a}\,dt$

$=\frac{1}{8a}t^8+C=\frac{1}{8a}(ax+3)^8+C$

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 16이므로

$\frac{1}{8a}\times a^8=16,\ a^7=128$

$\therefore a=(2^7)^{\frac{1}{7}}=2$

다른 풀이

$f(x)=\int(ax+3)^7\,dx$는 8차식이고 최고차항의 계수가 16이므로

$f'(x)$의 최고차항의 계수는 128이다.

$f'(x)=(ax+3)^7$이므로

$a^7=128 \quad \therefore a=2$

0592

답 ⑤

$2x+3=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{4x-6}{(2x+3)^3}\,dx$

$=\int\frac{t-6}{t^3}\,dt=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{6}{t^3}\right)dt$

$=-\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}+C$

$=-\frac{1}{2x+3}+\frac{3}{(2x+3)^2}+C$

$f(-1)=1$이므로 $-1+3+C=1$

$\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2x+3}+\frac{3}{(2x+3)^2}-1$이므로

$f(-2)=1+3-1=3$

유형 06 치환적분법 – 무리함수

0593

답 29

$2x^2+1=t$로 놓으면 $4x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int 6x\sqrt{2x^2+1}\,dx=\int\frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt=\frac{3}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$

$=t^{\frac{3}{2}}+C=(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$

$f(0)=3$이므로

$1+C=3$

$\therefore C=2$

따라서 $f(x)=(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}+2$이므로

$f(2)=9^{\frac{3}{2}}+2=3^3+2=29$

0594

답 ③

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

$\sqrt{x+1}=t$로 놓으면 $x+1=t^2$에서 $x=t^2-1$이고

$1=2t\times\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$=\int2(t^2-2)\,dt=\int(2t^2-4)\,dt$

$=\frac{2}{3}t^3-4t+C$

$=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}+C$

$f(0)=-2$이므로 $\frac{2}{3}-4+C=-2$

$\therefore C=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}+\frac{4}{3}$이므로

$f(3)=\frac{2}{3}\times4\times2-4\times2+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}-8+\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}$

0595

답 ③

$g(x)=\int\frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$에서

$\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{dt}{dx}$이므로

$g(x)=\int\frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx=\int\frac{f'(t)}{t}\times2t\,dt=2\int f'(t)\,dt$

$=2f(t)+C=2f(\sqrt{x})+C=\frac{2(4-x)}{4+x}+C$

$g(1)=1$이므로 $\frac{6}{5}+C=1$

$\therefore C=-\frac{1}{5}$

따라서 $g(x)=\frac{2(4-x)}{4+x}-\frac{1}{5}$이므로

$g(6)=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=-\frac{3}{5}$

유형 07 치환적분법 – 지수함수

0596

답 ④

$2x^2+x=t$로 놓으면 $4x+1=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x+1)\times2^{2x^2+x}\,dx$

$=\int2^t\,dt=\frac{2^t}{\ln2}+C=\frac{2^{2x^2+x}}{\ln2}+C$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$f(0)=\frac{2}{\ln 2}$이므로 $\frac{1}{\ln 2}+C=\frac{2}{\ln 2}$

$\therefore C=\frac{1}{\ln 2}$

따라서 $f(x)=\frac{2^{2x^2+x}}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}$이므로

$f(1)=\frac{8}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}=\frac{9}{\ln 2}$

0597

답 ③

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $\frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}$이므로

$f'(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}$

$e^x+2=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}\,dx$

$=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$

$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{e^x+2}+C$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서

$2\sqrt{3}+C=0$

$\therefore C=-2\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=2\sqrt{e^x+2}-2\sqrt{3}$이므로

$f(\ln 7)=2\times 3-2\sqrt{3}=6-2\sqrt{3}$

0598

답 16

$e^x+1=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int 3e^x\sqrt{e^x+1}\,dx=\int 3\sqrt{t}\,dt$

$=3\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=2t^{\frac{3}{2}}+C$

$=2(e^x+1)\sqrt{e^x+1}+C$

$f(0)=4\sqrt{2}$이므로

$4\sqrt{2}+C=4\sqrt{2}$ $\therefore C=0$

$\therefore f(x)=2(e^x+1)\sqrt{e^x+1}$

이때 $0\le x\le \ln 3$에서 $f'(x)=3e^x\sqrt{e^x+1}>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=\ln 3$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(\ln 3)=2\times 4\times 2=16$

유형 08 치환적분법 – 로그함수

0599

답 17

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int \frac{4(\ln x)^3}{x}\,dx=\int 4t^3\,dt$

$=t^4+C=(\ln x)^4+C$

$f(e)=2$이므로 $1+C=2$

$\therefore C=1$

따라서 $f(x)=(\ln x)^4+1$이므로

$f(e^2)=2^4+1=17$

0600

답 26

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)=\frac{6(\ln x)^2}{x}$

이므로

$f'(x)=\frac{3(\ln x)^2}{x}$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{3(\ln x)^2}{x}\,dx$

$=\int 3t^2\,dt=t^3+C=(\ln x)^3+C$

$\therefore f(e^3)-f(e)=(27+C)-(1+C)=26$

0601

답 ⑤

$xf'(x)=4\ln\sqrt{x}$에서

$f'(x)=\frac{4\ln\sqrt{x}}{x}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{4\ln\sqrt{x}}{x}\,dx=\int \frac{2\ln x}{x}\,dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int \frac{2\ln x}{x}\,dx=\int 2t\,dt$

$=t^2+C=(\ln x)^2+C$

$f(1)=-3$이므로 $C=-3$

$\therefore f(x)=(\ln x)^2-3$

$f(x)=2\ln x$에서 $(\ln x)^2-3=2\ln x$

$(\ln x)^2-2\ln x-3=0$

$(\ln x+1)(\ln x-3)=0$

$\ln x=-1$ 또는 $\ln x=3$

$\therefore x=e^{-1}$ 또는 $x=e^3$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 양수 x의 값의 곱은
$e^{-1}\times e^{3}=e^{2}$

유형 09 치환적분법 – $\sin ax$, $\cos ax$ 꼴

0602

답 ⑤

$f(x)=\int(2\sin^2 x+1)\,dx=\int\{(2\sin^2 x-1)+2\}\,dx$

$=\int(-\cos 2x+2)\,dx=-\frac{1}{2}\sin 2x+2x+C$

$f(\pi)=\pi$이므로 $2\pi+C=\pi$

$\therefore C=-\pi$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+2x-\pi$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=3\pi-\pi=2\pi$

0603

답 2

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이므로

$\{xf(x)\}'=2\cos 2x$

$xf(x)=\int\{xf(x)\}'dx=\int 2\cos 2x\,dx=\sin 2x+C$

위의 식의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$\pi f(\pi)=C$

$f(\pi)=0$이므로 $C=0$

따라서 $xf(x)=\sin 2x$이므로

$x\neq 0$일 때, $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)=2$

참고

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\times\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}$ (단, $a\neq 0$, $b\neq 0$)

0604

답 9

$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-3}{x-\pi}=\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}$에서 극한값이 존재하고 $x\to\pi$일 때, (분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\pi}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(\pi)=3$

$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-3}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)=\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}$

$f'(x)=a\sin\frac{x}{2}$에서 $f'(\pi)=a$이므로

$a=\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}$

$\therefore a=3$

따라서 $f'(x)=3\sin\frac{x}{2}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 3\sin\frac{x}{2}\,dx$

$=-6\cos\frac{x}{2}+C$

$f(\pi)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=-6\cos\frac{x}{2}+3$이므로

$f(2\pi)=6+3=9$

유형 10 치환적분법 – 삼각함수

0605

답 ③

$\int(\sin^3 x-\sin x)\,dx=\int\sin x(\sin^2 x-1)\,dx$

$=-\int\sin x\cos^2 x\,dx$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int(\sin^3 x-\sin x)\,dx=-\int\sin x\cos^2 x\,dx$

$=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C$

$=\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

0606

답 4

$f'(x)=\sec^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\sec^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\,dx$

$\tan\frac{x}{2}=t$로 놓으면 $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\sec^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\,dx$

$=\int 2t\,dt=t^2+C=\tan^2\frac{x}{2}+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\tan^2\frac{x}{2}+1$이므로

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=(\sqrt{3})^2+1=4$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0607 답 ③

$f(x)=\int \sec^4 x\,dx=\int (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$

$\tan x=t$로 놓으면 $\sec^2 x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$

$=\int (1+t^2)\,dt=t+\dfrac{1}{3}t^3+C$

$=\tan x+\dfrac{1}{3}\tan^3 x+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\tan x+\dfrac{1}{3}\tan^3 x$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\times 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

유형 11 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴의 치환적분법

0608 답 ④

$(2+\sin x)'=\cos x$이므로

$f(x)=\int \dfrac{2\cos x}{2+\sin x}\,dx=2\int \dfrac{(2+\sin x)'}{2+\sin x}\,dx$

$=2\ln|2+\sin x|+C$

$f(\pi)=\ln 2$이므로 $2\ln 2+C=\ln 2$

$\therefore C=-\ln 2$

따라서 $f(x)=2\ln|2+\sin x|-\ln 2$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\ln 3-\ln 2=\ln\dfrac{9}{2}$

0609 답 e^4

$f'(x)=2f(x)$에서 $f(x)>0$이므로

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int 2\,dx,\ \ln|f(x)|=2x+C$

$\ln f(x)=2x+C\ (\because f(x)>0)$

$\therefore f(x)=e^{2x+C}$

$f'(x)=2e^{2x+C}$

$f'(0)=2$이므로 $2e^C=2$

$e^C=1 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=e^{2x}$이므로

$f(2)=e^4$

0610 답 ③

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가

$\dfrac{2}{1+e^{-x}}$이므로

$f'(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}=\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

이때 $(e^x+1)'=e^x$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \dfrac{2e^x}{e^x+1}\,dx=2\int \dfrac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx$

$=2\ln(e^x+1)+C\ (\because e^x+1>0)$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$f(0)=0$에서 $2\ln 2+C=0$

$\therefore C=-2\ln 2$

$\therefore f(x)=2\ln(e^x+1)-2\ln 2$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(\ln 3,\ a)$를 지나므로

$a=f(\ln 3)=2\ln 4-2\ln 2=2\ln 2$

0611 답 ④

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{f'(x)}{f(x)-1}+1$에서

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int \left\{\dfrac{f'(x)}{f(x)-1}+1\right\}dx$

$\ln|f(x)|=\ln|f(x)-1|+x+C$

$f(0)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\ln\dfrac{1}{2}=\ln\dfrac{1}{2}+C$

$\therefore C=0$

$\ln|f(x)|=\ln|f(x)-1|+x$에서

$\ln|f(x)|-\ln|f(x)-1|=x$

$\therefore \ln\left|\dfrac{f(x)}{f(x)-1}\right|=x$

이때 $0<f(x)<1$이므로 $\ln\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=x$

$\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=e^x,\ f(x)=e^x-e^x f(x)$

$\therefore f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

$\therefore f(\ln 2)=\dfrac{e^{\ln 2}}{1+e^{\ln 2}}=\dfrac{2}{1+2}=\dfrac{2}{3}$

유형 12 유리함수의 부정적분 – (분자의 차수)≥(분모의 차수)

0612 답 5

$f(x)=\int \dfrac{2x^2+3x+3}{x+1}\,dx=\int \dfrac{2x(x+1)+(x+1)+2}{x+1}\,dx$

$=\int\left(2x+1+\dfrac{2}{x+1}\right)dx$

$=x^2+x+2\ln|x+1|+C$

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=x^2+x+2\ln|x+1|+3$이므로

$f(-2)=4-2+3=5$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0613

답 ①

$f(g(x))=g(f(x))=x$이므로

$g(x)=f^{-1}(x)$

$y=\frac{-2x-4}{x-1}$로 놓으면 $xy-y=-2x-4$

$x(y+2)=y-4 \quad \therefore x=\frac{y-4}{y+2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x-4}{x+2}$

따라서 $g(x)=\frac{x-4}{x+2}$이므로

$$h(x)=\int g(x+1)\,dx=\int \frac{x-3}{x+3}\,dx$$
$$=\int \frac{(x+3)-6}{x+3}\,dx=\int\left(1-\frac{6}{x+3}\right)dx$$
$$=x-6\ln|x+3|+C$$

$\therefore h(1)-h(-1)=(1-6\ln 4+C)-(-1-6\ln 2+C)$
$=2-6\ln 2$

유형 13 유리함수의 부정적분 – (분자의 차수)<(분모의 차수)

0614

답 ①

$$f(x)=\int \frac{3}{x^2-3x+2}\,dx$$
$$=\int \frac{3}{(x-1)(x-2)}\,dx$$
$$=3\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=3(\ln|x-2|-\ln|x-1|)+C$$

$f(0)=3\ln 2$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=3(\ln|x-2|-\ln|x-1|)$이므로

$f(3)=-3\ln 2$

0615

답 ⑤

$$f(x)=\int \frac{2x+3}{x^2+4x+3}\,dx-\int \frac{x+4}{x^2+4x+3}\,dx$$
$$=\int \frac{x-1}{x^2+4x+3}\,dx$$

$\frac{x-1}{x^2+4x+3}=\frac{x-1}{(x+3)(x+1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+1}$로 놓으면

$\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+1}=\frac{(A+B)x+A+3B}{(x+3)(x+1)}$이므로

$x-1=(A+B)x+A+3B$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$A+B=1,\ A+3B=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$A=2,\ B=-1$

$$f(x)=\int \frac{x-1}{x^2+4x+3}\,dx$$
$$=\int\left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=2\ln|x+3|-\ln|x+1|+C$$

$f(-2)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=2\ln|x+3|-\ln|x+1|+2$이므로

$f(1)=2\ln 4-\ln 2+2=2+3\ln 2$

0616

답 ①

$F'(x)=f(x)$이므로

$xf(x)=F(x)-2\ln(x+2)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=f(x)-\frac{2}{x+2}$

$xf'(x)=-\frac{2}{x+2}$

$\therefore f'(x)=-\frac{2}{x(x+2)}$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=-\int \frac{2}{x(x+2)}\,dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\ln|x+2|-\ln|x|+C$$

$f(2)=\ln 2$이므로 $\ln 4-\ln 2+C=\ln 2$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln|x+2|-\ln|x|$이므로

$f(4)=\ln 6-\ln 4=\ln\frac{3}{2}$

유형 14 부분적분법

0617

답 ⑤

$u(x)=2x-1,\ v'(x)=e^{x-1}$으로 놓으면

$u'(x)=2,\ v(x)=e^{x-1}$이므로

$$f(x)=\int(2x-1)e^{x-1}\,dx$$
$$=(2x-1)e^{x-1}-\int 2e^{x-1}\,dx$$
$$=(2x-1)e^{x-1}-2e^{x-1}+C$$
$$=(2x-3)e^{x-1}+C$$

$f(1)=1$이므로

$-1+C=1 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=(2x-3)e^{x-1}+2$이므로

$f(2)=e+2$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0618

답 ③

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \ln(x-1)\,dx$

$u(x)=\ln(x-1)$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x-1}$, $v(x)=x$이므로

$f(x)=\int \ln(x-1)\,dx=x\ln(x-1)-\int \frac{x}{x-1}\,dx$

$=x\ln(x-1)-\int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx$

$=x\ln(x-1)-x-\ln(x-1)+C$

$=(x-1)\ln(x-1)-x+C$

$f(2)=1$이므로 $-2+C=1$

$\therefore C=3$

따라서 $f(x)=(x-1)\ln(x-1)-x+3$이므로

$f(3)=2\ln 2$

0619

답 6

$\sqrt{x}=t$로 놓으면 $x=t^2$이고 $1=2t\times\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int \cos\sqrt{x}\,dx$

$=\int \cos t\times 2t\,dt$

$=2\int t\cos t\,dt$

$u(t)=t$, $v'(t)=\cos t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\sin t$이므로

$f(x)=2\int t\cos t\,dt=2t\sin t-2\int \sin t\,dt$

$=2t\sin t+2\cos t+C$

$=2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+C$

$f(0)=10$이므로 $2+C=10$

$\therefore C=8$

따라서 $f(x)=2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+8$이므로

$f(\pi^2)=2\sqrt{\pi^2}\sin\sqrt{\pi^2}+2\cos\sqrt{\pi^2}+8$

$=0+(-2)+8=6$

0620

답 ②

$f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$이므로

$\{xf(x)\}'=\frac{1}{x}-\ln x$

$xf(x)=\int\{xf(x)\}'\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)dx$

$=\ln x-\int \ln x\,dx$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$xf(x)=\ln x-\int \ln x\,dx=\ln x-x\ln x+\int 1\,dx$

$=\ln x-x\ln x+x+C$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1$에서 $1+C=1$

$\therefore C=0$

$\therefore xf(x)=\ln x-x\ln x+x$

따라서 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-\ln x+1$이므로

$f(3)=\frac{\ln 3}{3}-\ln 3+1=1-\frac{2\ln 3}{3}$

참고

밑이 e인 로그함수의 부정적분은 자주 사용되므로 기억해 두자.

$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$

유형 15 부분적분법 - 여러 번 적용하는 경우

0621

답 ③

$u_1(x)=x^2-2x+2$, $v_1'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_1'(x)=2x-2$, $v_1(x)=e^x$이므로

$f(x)=\int (x^2-2x+2)e^x\,dx$

$=(x^2-2x+2)e^x-\int (2x-2)e^x\,dx$ …… ㉠

$\int (2x-2)e^x\,dx$에서 $u_2(x)=2x-2$, $v_2'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_2'(x)=2$, $v_2(x)=e^x$이므로

$\int (2x-2)e^x\,dx=(2x-2)e^x-\int 2e^x\,dx=(2x-2)e^x-2e^x+C_1$

$=(2x-4)e^x+C_1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2-2x+2)e^x-(2x-4)e^x-C_1$

$=(x^2-4x+6)e^x+C$

$\therefore f(2)-f(1)=(2e^2+C)-(3e+C)=2e^2-3e$

0622

답 7

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$u_1(x)=\cos 2x$, $v_1'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u_1'(x)=-2\sin 2x$, $v_1(x)=-e^{-x}$이므로

$f(x)=\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$=-e^{-x}\cos 2x-2\int e^{-x}\sin 2x\,dx$ …… ㉠

$\int e^{-x}\sin 2x\,dx$에서 $u_2(x)=\sin 2x$, $v_2'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u_2'(x)=2\cos 2x$, $v_2(x)=-e^{-x}$이므로

$\int e^{-x}\sin 2x\,dx=-e^{-x}\sin 2x+2\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$=-e^{-x}\sin 2x+2f(x)+C_1$ …… ㉡

이투스북

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-e^{-x}\cos 2x-2\{-e^{-x}\sin 2x+2f(x)+C_1\}$

$5f(x)=e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)-2C_1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)+C$

$f(0)=-\frac{1}{5}$이므로 $-\frac{1}{5}+C=-\frac{1}{5}$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{5}e^{\frac{\pi}{2}}$

즉, $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$10(a+b)=10\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)=7$

PART B 기출 & 기출변형 문제

0623

답 ④

$f'(x)=\begin{cases}2x+3 & (x<1)\\ \ln x & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^2+3x+C_1 & (x<1)\\ x\ln x-x+C_2 & (x>1)\end{cases}$

$f(e)=2$이므로 $e-e+C_2=2$

$\therefore C_2=2$

한편, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(x^2+3x+C_1)=4+C_1$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x\ln x-x+2)=1$

에서 $4+C_1=1$

$\therefore C_1=-3$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+3x-3 & (x\le 1)\\ x\ln x-x+2 & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(-6)=(-6)^2+3\times(-6)-3$

$=36-18-3=15$

Bible Says 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $x=a$에서 연속이다.

(1) 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

(2) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(3) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

0624

답 ③

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고

조건 ㈎에서 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=2x\ln x$이므로

$\{f(x)g(x)\}'=2x\ln x$

$f(x)g(x)=\int\{f(x)g(x)\}'dx=\int 2x\ln x\,dx$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=2x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x^2$이므로

$f(x)g(x)=\int 2x\ln x\,dx=x^2\ln x-\int x\,dx$

$=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+C$

조건 ㈏에서 $f(1)=1$, $g(1)=2$이므로

$f(1)g(1)=2$에서 $-\frac{1}{2}+C=2$

$\therefore C=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)g(x)=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$이므로

$f(2)g(2)=4\ln 2-2+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+4\ln 2$

짝기출

양의 실수를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=x$, $h(x)=\ln x$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $g(x)$가 있다. 이때, $g(e)$의 값은?

㈎ $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=h(x)$

㈏ $g(1)=-1$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

답 ③

0625

답 72

$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$이고

조건 ㈏에서 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=xe^x$이므로

$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=xe^x$

$\frac{f(x)}{x}=\int\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'dx=\int xe^x\,dx$

$u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$\frac{f(x)}{x}=\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx$

$=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C$

조건 ㈎에서 $f(1)=0$이므로 $C=0$

따라서 $\frac{f(x)}{x}=(x-1)e^x$이므로

$f(x)=x(x-1)e^x$

$\therefore f(3)\times f(-3)=6e^3\times 12e^{-3}=72$

Bible Says 몫의 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$에 대하여

$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0626

답 3π

조건 (가)에서 $x>0$일 때, $f'(x)=1+\sin 2x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(1+\sin 2x)\,dx$$
$$=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=0$에서 $-\frac{1}{2}+C=0$

$\therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $x\geq 0$일 때, $f(x)=x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$$f(x)=\begin{cases}-x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2} & (x<0)\\ x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2} & (x\geq 0)\end{cases}$$

$\therefore f(-\pi)+f(2\pi)=\pi-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(2\pi-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=3\pi$

짝기출

$x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2},\ f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은?

(가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다.
(나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

답 ②

0627

답 ②

조건 (가)에서 $x\neq 0$일 때 $\{f(x)\}^2f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$이므로

$$\int\{f(x)\}^2f'(x)\,dx=\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

위의 식의 좌변에서 $f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\{f(x)\}^2f'(x)\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C_1$$
$$=\frac{1}{3}\{f(x)\}^3+C_1$$

$$\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx$$
$$=\ln(x^2+1)+C_2$$

즉, $\frac{1}{3}\{f(x)\}^3+C_1=\ln(x^2+1)+C_2$에서

$\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)+C$

조건 (나)에서 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)$이므로

$\{f(1)\}^3=3\ln 2$

참고

부분적분법을 이용하여 $\int\{f(x)\}^2f'(x)\,dx$를 구할 수도 있다.

$$\int\{f(x)\}^2f'(x)\,dx=\{f(x)\}^3-\int\{2f(x)f'(x)\times f(x)\}\,dx$$
$$=\{f(x)\}^3-2\int\{f(x)\}^2f'(x)\,dx$$

$$\therefore\int\{f(x)\}^2f'(x)\,dx=\frac{1}{3}\{f(x)\}^3+C$$

0628

답 ④

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로 $F'(x)=f(x)$

$\{xF(x)\}'=F(x)+xf(x)$이고

조건 (가)에서 $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$이므로

$$xF(x)=\int\{F(x)+xf(x)\}\,dx=\int(2x+2)e^x\,dx$$

$u(x)=2x+2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$이므로

$$xF(x)=\int(2x+2)e^x\,dx$$
$$=(2x+2)e^x-\int 2e^x\,dx$$
$$=2xe^x+C$$

조건 (나)에서 $F(1)=2e$이므로

$2e+C=2e$

$\therefore C=0$

따라서 $xF(x)=2xe^x$이므로 $F(x)=2e^x$ ($\because x>0$)

$\therefore F(3)=2e^3$

0629

답 ③

$f(x)=t$로 놓으면 $x=g(t)$이므로

$f'(f(x))+\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\{f(x)\}^2}$에서

$$f'(t)+\frac{1}{f'(g(t))}=\frac{1}{t^2}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

$f(g(t))=t$이므로 $f'(g(t))g'(t)=1$에서

$$\frac{1}{f'(g(t))}=g'(t)$$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$$f'(t)+g'(t)=\frac{1}{t^2}$$

$$f(t)+g(t)=\int\{f'(t)+g'(t)\}\,dt=\int\frac{1}{t^2}\,dt$$
$$=\int t^{-2}\,dt=-\frac{1}{t}+C$$

$f(1)+g(1)=2$이므로 $-1+C=2$

$\therefore C=3$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $f(t)+g(t)=-\frac{1}{t}+3$이므로

$f(3)+g(3)=-\frac{1}{3}+3=\frac{8}{3}$

짝기출

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=1$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g'(f(x))=\frac{1}{x^2+1}$이다.

$f(3)$의 값은?

① e^3 ② e^6 ③ e^9 ④ e^{12} ⑤ e^{15}

답 ④

0630

답 93

$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin \pi x+f(3)x+5x^2$이고,

$\{f(x^2+x+1)\}'=(2x+1)f'(x^2+x+1)$이므로

$\{f(x^2+x+1)\}'$

$=\pi f(1)(2x+1)\sin \pi x+f(3)(2x^2+x)+10x^3+5x^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$f(x^2+x+1)$

$=f(1)\int (2x+1)\pi \sin \pi x\,dx+f(3)\int (2x^2+x)\,dx$

$\qquad +\int (10x^3+5x^2)\,dx$

$=f(1)\left[(2x+1)\times(-\cos \pi x)+\int 2\cos \pi x\,dx\right]$

$\qquad +\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)f(3)+\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3$

$=\left\{-(2x+1)\cos \pi x+\frac{2}{\pi}\sin \pi x\right\}f(1)$

$\qquad +\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)f(3)+\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3+C$ …… ㉠

$f(1)$, $f(3)$, C의 값을 구하기 위하여 방정식 $x^2+x+1=1$, $x^2+x+1=3$을 풀면

$x^2+x+1=1$에서 $x=0$ 또는 $x=-1$

$x^2+x+1=3$에서 $x=1$ 또는 $x=-2$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=-f(1)+C$에서 $C=2f(1)$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(1)=-f(1)-\frac{1}{6}f(3)+\frac{5}{6}+2f(1)$에서

$f(3)=5$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(3)=3f(1)+\frac{7}{6}\times 5+\frac{25}{6}+2f(1)$에서

$f(1)=-1$

이를 ㉡에 대입하면

$C=-2$

$\therefore f(x^2+x+1)$

$=(2x+1)\cos \pi x-\frac{2}{\pi}\sin \pi x+\frac{5}{2}x^4+5x^3+\frac{5}{2}x^2-2$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(7)=5\cos 2\pi-\frac{2}{\pi}\sin 2\pi+\frac{5}{2}\times 16+5\times 8+\frac{5}{2}\times 4-2$

$=5+40+40+10-2=93$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A

09 정적분

유형 01 유리함수, 무리함수의 정적분

0631

답 ②

$$\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x}dx=\int_1^2\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[x^2+\ln|x|\right]_1^2$$
$$=4+\ln 2-1$$
$$=3+\ln 2$$

0632

답 ④

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_a^b$$
$$=\ln b-\ln a=k$$

이므로

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_{a^2}^{b^2}$$
$$=\ln b^2-\ln a^2$$
$$=2\ln b-2\ln a$$
$$=2k$$

0633

답 10

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$$

이므로

$$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^4 (2\sqrt{x}+C)\,dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+Cx\right]_1^4$$
$$=\left(\frac{4}{3}\times 8+4C\right)-\left(\frac{4}{3}+C\right)$$
$$=\frac{28}{3}+3C=\frac{10}{3}$$

$\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=2\sqrt{x}-2$이므로

$f(36)=2\sqrt{36}-2=10$

Bible Says 도함수가 주어졌을 때 함수 구하기

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 주어졌을 때,

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낼 수 있다.

0634

답 1

$$\int_0^a \frac{1}{x^2+3x+2}dx=\int_0^a \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$$
$$=\int_0^a\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\left[\ln|x+1|-\ln|x+2|\right]_0^a$$
$$=\ln(a+1)-\ln(a+2)-(-\ln 2)$$
$$=\ln\frac{2(a+1)}{a+2}=\ln\frac{4}{3}$$

에서 $\frac{2(a+1)}{a+2}=\frac{4}{3}$

$3(a+1)=2(a+2)$, $3a+3=2a+4$

$\therefore a=1$

0635

답 ④

$F(x)=xf(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$$F(x)=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$=2\sqrt{x}-\frac{2}{x}+C$$

$F(1)=f(1)=0$이므로 $C=0$

따라서 $F(x)=2\sqrt{x}-\frac{2}{x}$이므로

$$xf(x)=2\sqrt{x}-\frac{2}{x}$$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}$$

$$\therefore \int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^4\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$=\left[4\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right]_1^4$$
$$=8+\frac{1}{2}-(4+2)=\frac{5}{2}$$

유형 02 지수함수의 정적분

0636

답 ①

$$\int_0^1 \sqrt{e^{4x}+2e^{2x}+1}\,dx=\int_0^1 \sqrt{(e^{2x}+1)^2}\,dx$$
$$=\int_0^1 (e^{2x}+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}e^2+1-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0637 답 ③

$$\int_0^1 (4^x+1)^2 dx+\int_1^0 (4^x-1)^2 dx$$
$$=\int_0^1 (4^{2x}+2\times 4^x+1)\,dx-\int_0^1 (4^{2x}-2\times 4^x+1)\,dx$$
$$=\int_0^1 (4\times 4^x)\,dx=4\int_0^1 4^x dx$$
$$=4\Big[\frac{4^x}{\ln 4}\Big]_0^1=4\Big(\frac{4}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 4}\Big)$$
$$=\frac{12}{\ln 4}=\frac{6}{\ln 2}$$

0638 답 ②

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$$f'(x)=\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}=\frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}=e^{2x}-e^x+1$$
$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (e^{2x}-e^x+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$$

$f(0)=2$이므로 $\frac{1}{2}-1+C=2$

$\therefore C=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+\frac{5}{2}$이므로

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \Big(\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+\frac{5}{2}\Big)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}e^2-e+3-\Big(\frac{1}{4}-1\Big)$$
$$=\frac{1}{4}e^2-e+\frac{15}{4}$$

유형 03 삼각함수의 정적분

0639 답 ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\,dx$$
$$=\Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-1$$

0640 답 ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)\,dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$
$$=\sqrt{2}-1$$

0641 답 ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x-\tan x\sec x)\,dx$$
$$=\Big[\tan x-\sec x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=1-\sqrt{2}-(-1)$$
$$=2-\sqrt{2}$$

유형 04 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분

0642 답 ⑤

$|3^x-1|=\begin{cases}-3^x+1 & (x<0)\\ 3^x-1 & (x\geq 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^1 |3^x-1|\,dx=\int_{-1}^0 (-3^x+1)\,dx+\int_0^1 (3^x-1)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{3^x}{\ln 3}+x\Big]_{-1}^0+\Big[\frac{3^x}{\ln 3}-x\Big]_0^1$$
$$=-\frac{1}{\ln 3}-\Big(-\frac{1}{3\ln 3}-1\Big)+\Big(\frac{3}{\ln 3}-1\Big)-\frac{1}{\ln 3}$$
$$=\frac{4}{3\ln 3}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0643

답 2

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |2\cos x\sin x|\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x|\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin 2x)\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$$

Bible Says 배각의 공식

(1) $\sin 2x=2\sin x\cos x$
(2) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$
(3) $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

0644

답 ④

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^1(\sin \pi x+1)\,dx+\int_1^4\frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x+x\right]_0^1+\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^4$$
$$=\frac{1}{\pi}+1-\left(-\frac{1}{\pi}\right)+(-1+2)=2+\frac{2}{\pi}$$

0645

답 ③

$f'(x)=\begin{cases}\sin x & (x<0)\\ e^x-1 & (x\geq 0)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}-\cos x+C_1 & (x<0)\\ e^x-x+C_2 & (x\geq 0)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이고, $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=f(0)$이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(-\cos x+C_1)=-1+C_1$

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(e^x-x+C_2)=1+C_2$

$f(0)=1+C_2$

에서 $-1+C_1=1+C_2$ ····· ㉠

이때 $f(1)=e-1$이므로 $C_2=0$

이를 ㉠에 대입하면 $C_1=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\cos x+2 & (x<0)\\ e^x-x & (x\geq 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1}f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\cos x+2)\,dx+\int_0^1(e^x-x)\,dx$$
$$=\left[-\sin x+2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\left[e^x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=-(1-\pi)+\left(e-\frac{1}{2}\right)-1$$
$$=e+\pi-\frac{5}{2}$$

Bible Says 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $x=a$에서 연속이다.
(1) 함숫값 $f(a)$가 존재한다.
(2) 극한값 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재한다.
(3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

유형 05 우함수와 기함수의 정적분

0646

답 ③

$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$, $g(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$, $h(x)=\tan\frac{\pi}{4}x$라 하면

$f(-x)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=-\sin\frac{\pi}{2}x=-f(x)$

$g(-x)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=\cos\frac{\pi}{2}x=g(x)$

$h(-x)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}x\right)=-\tan\frac{\pi}{4}x=-h(x)$

에서 $g(x)$는 우함수, $f(x)$와 $h(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-1}^{1}\left(\sin\frac{\pi}{2}x+\cos\frac{\pi}{2}x+\tan\frac{\pi}{4}x\right)dx$$
$$=2\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$
$$=2\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$
$$=2\times\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

0647

답 ②

$f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이고,

$g(x)=f(x)\sin x$, $h(x)=x^3f(x)$라 하면

$g(-x)=f(-x)\sin(-x)=-f(x)\sin x=-g(x)$

$h(-x)=(-x)^3f(-x)=-x^3f(x)=-h(x)$

에서 $g(x)$와 $h(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+x^3+2)f(x)\,dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\sin x+x^3f(x)+2f(x)\}\,dx$$
$$=2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$
$$=4\int_0^{\pi}f(x)\,dx$$
$$=4\times 4=16$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0648

답 ④

ㄱ. $\sin f(|-x|)=\sin f(|x|)$에서

$\sin f(|x|)$는 우함수이므로

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin f(|x|)\,dx=2\int_{0}^{\pi}\sin f(|x|)\,dx$

즉, 정적분의 값이 0이 아닐 수도 있다.

ㄴ. $-x\cos f(-x)=-x\cos f(x)$에서

$x\cos f(x)$는 기함수이므로 $\int_{-\pi}^{\pi}x\cos f(x)\,dx=0$

ㄷ. $e^{|-x|}\sin f(-x)=e^{|x|}\sin\{-f(x)\}=-e^{|x|}\sin f(x)$에서

$e^{|x|}\sin f(x)$는 기함수이므로 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{|x|}\sin f(x)\,dx=0$

따라서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고

함수 $f(x)$가 우함수일 때, $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$인 경우도 존재한다.

0651

답 ④

조건 (가)에서 $-1\le x\le 1$일 때, $f(x)=2^{x}+2^{-x}$이므로

$f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{x}+2^{-x}=f(x)$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5}f(x)\,dx&=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{3}f(x)\,dx+\int_{3}^{5}f(x)\,dx\\&=3\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\\&=6\int_{0}^{1}f(x)\,dx\ (\because f(x)\text{는 우함수})\\&=6\int_{0}^{1}(2^{x}+2^{-x})\,dx\\&=6\Big[\frac{2^{x}}{\ln 2}-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\Big]_{0}^{1}\\&=6\Big(\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{2\ln 2}\Big)\\&=6\times\frac{3}{2\ln 2}=\frac{9}{\ln 2}\end{aligned}$$

유형 06 주기함수의 정적분

0649

답 ③

$y=|\cos 2\pi x|$는 주기가 $\frac{1}{2}$인 주기함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{1}{2}}|\cos 2\pi x|\,dx&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\cos 2\pi x|\,dx\\&=\int_{1}^{\frac{3}{2}}|\cos 2\pi x|\,dx=\int_{\frac{3}{2}}^{2}|\cos 2\pi x|\,dx\end{aligned}$$

또한 $|\cos(-2\pi x)|=|\cos 2\pi x|$에서 $y=|\cos 2\pi x|$는 우함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}|\cos 2\pi x|\,dx&=4\int_{0}^{\frac{1}{2}}|\cos 2\pi x|\,dx\\&=4\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}|\cos 2\pi x|\,dx\\&=8\int_{0}^{\frac{1}{4}}\cos 2\pi x\,dx\\&=8\Big[\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\Big]_{0}^{\frac{1}{4}}\\&=8\times\frac{1}{2\pi}=\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

0650

답 2

$y=|\sin 2x|$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 주기함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{a}^{a+\pi}|\sin 2x|\,dx&=\int_{0}^{\pi}|\sin 2x|\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|\,dx\\&=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=2\Big[-\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\\&=2\times\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big)=2\end{aligned}$$

유형 07 치환적분법을 이용한 정적분 – 유리함수, 무리함수

0652

답 ①

$1-2x=t$로 놓으면 $-2=\frac{dt}{dx}$이고

$x=-1$일 때 $t=3$, $x=0$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{1}{(1-2x)^{2}}\,dx&=\int_{3}^{1}\frac{1}{t^{2}}\times\Big(-\frac{1}{2}\Big)\,dt\\&=\int_{1}^{3}\frac{1}{2t^{2}}\,dt=\int_{1}^{3}\frac{1}{2}t^{-2}\,dt\\&=\Big[-\frac{1}{2}t^{-1}\Big]_{1}^{3}=\Big[-\frac{1}{2t}\Big]_{1}^{3}\\&=-\frac{1}{6}-\Big(-\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

0653

답 2

$x^{2}+2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^{2}+2}}\,dx&=\int_{2}^{3}\frac{1}{\sqrt{t}}\times\frac{1}{2}\,dt\\&=\int_{2}^{3}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt\\&=\Big[\sqrt{t}\Big]_{2}^{3}\\&=\sqrt{3}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a^{2}+b^{2}=1+1=2$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0654

답 2

$x^2+2x+4=t$로 놓으면 $2x+2=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=4$, $x=a$일 때 $t=a^2+2a+4$이므로

$$\int_0^a \frac{x+1}{x^2+2x+4}dx=\int_4^{a^2+2a+4}\frac{1}{t}\times\frac{1}{2}dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}\ln|t|\right]_4^{a^2+2a+4}$$
$$=\frac{1}{2}\{\ln(a^2+2a+4)-\ln 4\}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+1\right)$$

따라서 $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+1\right)=\frac{1}{2}\ln 3$이므로

$\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+1=3$, $a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

다른 풀이

$$\int_0^a \frac{x+1}{x^2+2x+4}dx=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{(x^2+2x+4)'}{x^2+2x+4}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x^2+2x+4|\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}\{\ln(a^2+2a+4)-\ln 4\}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+1\right)$$

따라서 $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+1\right)=\frac{1}{2}\ln 3$이므로

$\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+1=3$, $a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

유형 08 치환적분법을 이용한 정적분 - 지수함수, 로그함수

0655

답 $\ln 5$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^3$일 때 $t=3$이므로

$$\int_e^{e^3}\frac{2\ln x}{x+x(\ln x)^2}dx=\int_e^{e^3}\frac{2\ln x}{x\{1+(\ln x)^2\}}dx$$
$$=\int_1^3\frac{2t}{1+t^2}dt$$
$$=\int_1^3\frac{(1+t^2)'}{1+t^2}dt$$
$$=\left[\ln|1+t^2|\right]_1^3$$
$$=\ln 10-\ln 2=\ln 5$$

0656

답 ④

$3^x+1=t$로 놓으면 $3^x\ln 3=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=10$이므로

$$\int_0^2\frac{3^x\ln 3}{3^x+1}dx=\int_2^{10}\frac{1}{t}dt=\left[\ln|t|\right]_2^{10}$$
$$=\ln 10-\ln 2=\ln 5$$

다른 풀이

$$\int_0^2\frac{3^x\ln 3}{3^x+1}dx=\int_0^2\frac{(3^x+1)'}{3^x+1}dx$$
$$=\left[\ln|3^x+1|\right]_0^2$$
$$=\ln 10-\ln 2=\ln 5$$

0657

답 ②

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$a_n=\int_1^e\frac{(\ln x)^n(1-\ln x)}{x}dx$$
$$=\int_0^1 t^n(1-t)dt$$
$$=\int_0^1(t^n-t^{n+1})dt$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}-\frac{1}{n+2}t^{n+2}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

유형 09 치환적분법을 이용한 정적분 - 삼각함수

0658

답 2

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos x\sqrt{\sin x}dx=\int_0^1 3\sqrt{t}dt=\int_0^1 3t^{\frac{1}{2}}dt=\left[2t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=2$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0659

답 ②

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sin^4 x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\csc^4 x\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\csc^2 x(1+\cot^2 x)\,dx$$

$\cot x=t$로 놓으면 $-\csc^2 x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\csc^2 x(1+\cot^2 x)\,dx=2\int_1^0 (t^2+1)\times(-1)\,dt$$

$$=2\int_0^1 (t^2+1)\,dt$$

$$=2\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1=\frac{8}{3}$$

0660

답 ②

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\,dx=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 e^t\,dt=\left[e^t\right]_0^1$$

$$=e-1$$

유형 10 치환적분법을 이용한 정적분 $f(ax+b)$ 꼴

0661

답 ②

$2x-3=t$로 놓으면 $2=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=2$일 때 $t=1$, $x=6$일 때 $t=9$이므로

$$\int_2^6 f(2x-3)\,dx=\int_1^9 \frac{1}{2}f(t)\,dt$$

$$=\frac{k}{2}$$

0662

답 2

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1 xf(x^2)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{2}f(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\times 4=2$$

0663

답 4

$f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=f(0)=1$, $x=2$일 때 $t=f(2)=4$이므로

$$\int_0^2 \frac{2f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx=\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt=\int_1^4 2t^{-\frac{1}{2}}\,dt=\left[4t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

$$=4\times\left(4^{\frac{1}{2}}-1\right)=4$$

유형 11 삼각함수를 이용한 치환적분법

0664

답 ②

$x=3\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $1=3\cos\theta\times\dfrac{d\theta}{dx}$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=3$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-9\sin^2\theta}\times 3\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[\frac{9}{2}\theta+\frac{9}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{4}\pi$$

0665

답 ③

$x=2\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $1=2\cos\theta\times\dfrac{d\theta}{dx}$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\times 2\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\,d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

0666

답 6

$x=a\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $1=a\sec^2\theta\times\dfrac{d\theta}{dx}$이고

$x=-a$일 때 $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$, $x=a$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a}\,d\theta=\left[\frac{1}{a}\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{12}$$

$\therefore a=6$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 12 부분적분법을 이용한 정적분

0667 답 ①

$u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})dx$$
$$=-e^{-1}-\Big[e^{-x}\Big]_0^1=-e^{-1}-(e^{-1}-1)=1-\frac{2}{e}$$

0668 답 20

$\int_2^4 xf'(x)dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=f'(x)$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=f(x)$이므로

$$\int_2^4 xf'(x)dx=\Big[xf(x)\Big]_2^4-\int_2^4 f(x)dx$$
$$=4f(4)-2f(2)-12$$
$$=4\times10-2\times4-12=20$$

0669 답 ④

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^0 x\cos^2 x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^2 x-\cos^2 x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x\cos 2x)\,dx$$

$u(x)=-x$, $v'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$u'(x)=-1$, $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x\cos 2x)\,dx=\Big[-\frac{1}{2}x\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(-\frac{1}{2}\sin 2x\Big)dx$$
$$=-\Big[\frac{1}{4}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\Big(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{2}$$

0670 답 ①

$u(x)=1-\ln x$, $v'(x)=2x$로 놓으면

$u'(x)=-\frac{1}{x}$, $v(x)=x^2$이므로

$$\int_1^e 2x(1-\ln x)\,dx=\Big[x^2(1-\ln x)\Big]_1^e-\int_1^e(-x)\,dx$$
$$=-1-\Big[-\frac{1}{2}x^2\Big]_1^e$$
$$=-1-\Big(-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{2}(e^2-3)$$

0671 답 ②

$f(x)=\begin{cases}x+1 & (0\le x\le 1)\\ 3-x & (1<x\le 2)\end{cases}$에서

$f(x-1)=\begin{cases}x & (1\le x\le 2)\\ 4-x & (2<x\le 3)\end{cases}$이므로

$$\int_1^3 e^x f(x-1)\,dx=\int_1^2 xe^x dx+\int_2^3(4-x)e^x dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$u_1(x)=x$, $v_1'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_1'(x)=1$, $v_1(x)=e^x$이므로

$$\int_1^2 xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_1^2-\int_1^2 e^x dx$$
$$=2e^2-e-\Big[e^x\Big]_1^2$$
$$=2e^2-e-(e^2-e)=e^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$u_2(x)=4-x$, $v_2'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_2'(x)=-1$, $v_2(x)=e^x$이므로

$$\int_2^3(4-x)e^x dx=\Big[(4-x)e^x\Big]_2^3-\int_2^3(-e^x)\,dx$$
$$=e^3-2e^2-\Big[-e^x\Big]_2^3$$
$$=e^3-2e^2-(-e^3+e^2)$$
$$=2e^3-3e^2 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠에 ㉡, ㉢을 대입하면

$$\int_1^3 e^x f(x-1)\,dx=e^2+2e^3-3e^2=2e^3-2e^2$$

0672 답 −1

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이므로 $f(x)$는 증가하는 함수이다.

조건 (나)에서 $-2\le x\le 2$일 때 함수 $f(x)$의 최댓값이 3이므로

$f(2)=3$

이때 $f(2)-f(-2)=5$이므로

$f(-2)=f(2)-5=3-5=-2$

$\int_{-2}^3 f^{-1}(x)\,dx$에서 $f^{-1}(x)=t$로 놓으면

$x=f(t)$에서 $1=f'(t)\times\frac{dt}{dx}$이고

$x=-2$일 때 $t=-2$, $x=3$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{-2}^3 f^{-1}(x)\,dx=\int_{-2}^2 tf'(t)dt$$

$u(t)=t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=f(t)$이므로

$$\int_{-2}^2 tf'(t)\,dt=\Big[tf(t)\Big]_{-2}^2-\int_{-2}^2 f(t)\,dt$$
$$=2f(2)-\{-2f(-2)\}-\int_{-2}^2 f(t)\,dt$$
$$=2\times3-(-2)\times(-2)-3=-1$$

Bible Says 함수의 최대, 최소

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 13 부분적분법을 이용한 정적분 – 여러 번 적용하는 경우

0673

답 1

$u_1(x)=\cos x$, $v_1'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u_1'(x)=-\sin x$, $v_1(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=e^{-\pi}+1-\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$에서 $u_2(x)=\sin x$, $v_2'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u_2'(x)=\cos x$, $v_2(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx=\Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x}\cos x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$$

이를 ㉠에 대입하면

$$2\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx=e^{-\pi}+1$$

$$\therefore \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{-\pi}+\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$$a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

0674

답 $\pi-2$

$u_1(x)=x^2$, $v_1'(x)=\sin x$로 놓으면

$u_1'(x)=2x$, $v_1(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx=\Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2x\cos x)\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$에서 $u_2(x)=x$, $v_2'(x)=\cos x$로 놓으면

$u_2'(x)=1$, $v_2(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=\pi-2$$

0675

답 ①

$u_1(x)=x^2-2x$, $v_1'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_1'(x)=2x-2$, $v_1(x)=e^x$이므로

$$\int_0^2 (x^2-2x)e^x\,dx=\Big[(x^2-2x)e^x\Big]_0^2-\int_0^2(2x-2)e^x\,dx$$

$$=-\int_0^2(2x-2)e^x\,dx$$

$\int_0^2(2x-2)e^x\,dx$에서 $u_2(x)=2x-2$, $v_2'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_2'(x)=2$, $v_2(x)=e^x$이므로

$$\int_0^2(2x-2)e^x\,dx=\Big[(2x-2)e^x\Big]_0^2-\int_0^2 2e^x\,dx$$

$$=2e^2+2-\Big[2e^x\Big]_0^2$$

$$=2e^2+2-(2e^2-2)=4$$

$$\therefore \int_0^2 (x^2-2x)e^x\,dx=-\int_0^2(2x-2)e^x\,dx$$

$$=-4$$

유형 14 아래끝, 위끝이 상수인 정적분을 포함한 등식

0676

답 ③

$f(x)=4-\frac{2}{x}+\int_1^3 f(t)\,dt$에서

$\int_1^3 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=4-\frac{2}{x}+k$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_1^3\Big(4-\frac{2}{t}+k\Big)dt=\Big[4t-2\ln|t|+kt\Big]_1^3$$

$$=12-2\ln 3+3k-(4+k)$$

$$=8-2\ln 3+2k=k$$

$$\therefore k=-8+2\ln 3$$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{x}-4+2\ln 3$이므로

$$f(2)=-1-4+2\ln 3$$

$$=-5+2\ln 3$$

0677

답 ③

$f(x)=e^{2x}+\int_0^1 tf(t)\,dt$에서

$\int_0^1 tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=e^{2x}+k$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 t(e^{2t}+k)\,dt=\int_0^1 te^{2t}\,dt+\int_0^1 kt\,dt$$

$$=\int_0^1 te^{2t}\,dt+\Big[\frac{1}{2}kt^2\Big]_0^1$$

$$=\int_0^1 te^{2t}\,dt+\frac{1}{2}k=k \quad \cdots\cdots ㉡$$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\int_0^1 te^{2t}dt$에서 $u(t)=t$, $v'(t)=e^{2t}$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\frac{1}{2}e^{2t}$이므로

$$\int_0^1 te^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2t}dt$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

이를 ㉡에 대입하면

$\int_0^1 t(e^{2t}+k)dt=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k=k$

에서 $k=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=e^{2x}+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$이므로

$f(1)=\frac{3}{2}e^2+\frac{1}{2}$

0678 답 ⑤

$f(x)=\sin x+\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(t)\cos t\,dt$에서

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(t)\cos t\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=\sin x+k$

이를 ㉠에 대입하면

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin t+k)\cos t\,dt=k$

$\sin t+k=s$로 놓으면 $\cos t=\frac{ds}{dt}$이고

$t=0$일 때 $s=k$, $t=\frac{\pi}{6}$일 때 $s=k+\frac{1}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin t+k)\cos t\,dt=\int_k^{k+\frac{1}{2}}s\,ds$$
$$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_k^{k+\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-k^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{4}\right)=k$$

에서 $k+\frac{1}{4}=2k$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\sin x+\frac{1}{4}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

유형 15 아래끝 또는 위끝에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식

0679 답 0

$\int_\pi^x f(t)dt=2x\cos x+kx$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$0=-2\pi+k\pi$

$\therefore k=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2\cos x-2x\sin x+2$

$\therefore f(\pi)=-2+2=0$

0680 답 ⑤

$\int_1^x f(t)dt=2x-\frac{a}{\sqrt{x}}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=2-a$

$\therefore a=2$

㉠에 $a=2$를 대입하면

$\int_1^x f(t)dt=2x-\frac{2}{\sqrt{x}}$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2+\frac{1}{x\sqrt{x}}$

$\therefore f(1)=2+1=3$

0681 답 ②

$xf(x)=e^x+a(x+1)+\int_0^x tf'(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1+a$

$\therefore a=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=e^x+a+xf'(x)$

따라서 $f(x)=e^x-1$이므로

$$\int_0^1 f(2x)dx=\int_0^1(e^{2x}-1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}e^2-1-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{2}$$

Bible Says 곱의 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 16 아래끝 또는 위끝, 피적분함수에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식

0682

답 -2

$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=e^x+ax+b$에서

$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=e^x+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1+b$

$\therefore b=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=e^x+a$

$\int_0^x f(t)\,dt=e^x+a$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1+a$

$\therefore a=-1$

$\therefore a+b=-1+(-1)=-2$

0683

답 ⑤

$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=x\ln x+ax$에서

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=x\ln x+ax$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\ln x+1\ (\because a=0)$

$\int_1^x f(t)\,dt=\ln x+1$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\dfrac{1}{x}$

$\therefore \int_1^{e^2} f(x)\,dx=\int_1^{e^2}\dfrac{1}{x}\,dx$

$=\Big[\ln|x|\Big]_1^{e^2}$

$=\ln e^2-\ln 1$

$=2$

0684

답 2

$\int_0^x f(t)\,dt=2x+\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$에서

$\int_0^x f(t)\,dt=2x+x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2+\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)$

$f(x)=2+\int_0^x f(t)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=f(x)$에서 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1$이므로

$\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int 1\,dx$

$\ln|f(x)|=x+C,\ |f(x)|=e^{x+C}$

$\therefore f(x)=e^{x+C}\ (\because f(x)>0)$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=2$이므로

$e^C=2$

$\therefore C=\ln 2$

따라서 $f(x)=e^{x+\ln 2}=2e^x$이므로

$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 2xe^x\,dx$

$u(x)=2x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2,\ v(x)=e^x$이므로

$\int_0^1 2xe^x\,dx=\Big[2xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 2e^x\,dx$

$=2e-\Big[2e^x\Big]_0^1$

$=2e-2(e-1)=2$

유형 17 정적분으로 정의된 함수의 극대, 극소

0685

답 ①

$f(x)=\int_0^x (2-t)e^t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2-x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$f(2)=\int_0^2 (2-t)e^t\,dt$

$u(t)=2-t,\ v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=-1,\ v(t)=e^t$이므로

$f(2)=\int_0^2 (2-t)e^t\,dt$

$=\Big[(2-t)e^t\Big]_0^2-\int_0^2 (-e^t)\,dt$

$=-2-\Big[-e^t\Big]_0^2$

$=-2-(-e^2+1)$

$=e^2-3$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0686

답 0

$f(x)=\int_0^x \cos t(1-2\sin t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\cos x(1-2\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because\ 0<x<\pi$)

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{2}\right)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(1-2\sin t)\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t-\sin 2t)\,dt\\&=\left[\sin t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\end{aligned}$$

0687

답 ③

$f(x)=\int_1^x \frac{2t-6}{t+1}\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{2x-6}{x+1}=\frac{2(x-3)}{x+1}$

$f'(x)=0$에서 $x=3$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 $a=3$이고

$b=f(3)$

$$\begin{aligned}&=\int_1^3 \frac{2t-6}{t+1}\,dt\\&=\int_1^3 \left(2-\frac{8}{t+1}\right)dt\\&=\left[2t-8\ln|t+1|\right]_1^3\\&=6-8\ln 4-(2-8\ln 2)\\&=4-8\ln 2\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b=3+4-8\ln 2$

$=7-8\ln 2$

유형 18 정적분으로 정의된 함수의 최대, 최소

0688

답 ②

$f(x)=\int_{\frac{1}{e}}^x \frac{\ln t-2}{t}\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{\ln x-2}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=2$

$\therefore\ x=e^2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$f(e^2)=\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{\ln t-2}{t}\,dt$

$\ln t-2=s$로 놓으면 $\frac{1}{t}=\frac{ds}{dt}$이고

$t=\frac{1}{e}$일 때 $s=-3$, $t=e^2$일 때 $s=0$이므로

$$\begin{aligned}f(e^2)&=\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{\ln t-2}{t}\,dt\\&=\int_{-3}^{0} s\,ds\\&=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{-3}^{0}=-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

0689

답 ④

$f(x)=\int_0^x \frac{2-2t}{t^2-2t+3}\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{2-2x}{x^2-2x+3}=\frac{2(1-x)}{x^2-2x+3}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because\ x^2-2x+3>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$\begin{aligned}f(1)&=\int_0^1 \frac{2-2t}{t^2-2t+3}\,dt\\&=\int_0^1 \frac{-(t^2-2t+3)'}{t^2-2t+3}\,dt\\&=\left[-\ln|t^2-2t+3|\right]_0^1\\&=-\ln 2-(-\ln 3)=\ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0690

답 2

$f(x)=\int_0^x 2t\cos t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 $a=\frac{\pi}{2}$이고

$b=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos t\,dt$

$u(t)=2t$, $v'(t)=\cos t$로 놓으면

$u'(t)=2$, $v(t)=\sin t$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos t\,dt=\left[2t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\,dt$

$=\pi-\left[-2\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$

$\therefore 2a-b=\pi-(\pi-2)=2$

유형 19 정적분으로 정의된 함수의 극한

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)\,dt$ 꼴

0691

답 2

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1} f(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}$

$=F'(1)=f(1)$

$=1+\sin\frac{\pi}{2}=1+1=2$

0692

답 ③

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+2h} f(x)\,dx$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)-\{F(1-h)-F(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\times 2+\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}\right\}$

$=2F'(1)+F'(1)=3F'(1)$

$=3f(1)=3\times 2e=6e$

0693

답 ③

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+2}{x}\int_2^{x+2} f(t)\,dt\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+2}{x}\{F(x+2)-F(2)\}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\left\{(x^2+2)\times\frac{F(x+2)-F(2)}{x}\right\}$

$=2\times F'(2)$

$=2f(2)=4$

$\therefore f(2)=2$

이때 $f(2)=2a$이므로

$2a=2$

$\therefore a=1$

따라서 $f(x)=\ln(x-1)+x$이므로

$f(4)=4+\ln 3$

유형 20 정적분으로 정의된 함수의 극한

$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$ 꼴

0694

답 1

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$

$=\frac{1}{2}F'(1)$

$=\frac{1}{2}f(1)$

$=\frac{1}{2}\times(2+0)=1$

0695

답 ①

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_x^{\pi} f(t)\,dt=-\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_{\pi}^x f(t)\,dt$

$=-\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}$

$=-F'(\pi)$

$=-f(\pi)$

$=-e^{\pi}\sin\frac{\pi}{2}=-e^{\pi}$

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0696

답 $16\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}\int_4^{x^2} f(t)\,dt=\lim_{x\to 2}\left\{(x+2)^2\times\frac{F(x^2)-F(4)}{x^2-4}\right\}$$
$$=16F'(4)=16f(4)$$
$$=16\times\tan\frac{\pi}{3}=16\sqrt{3}$$

PART B 기출 & 기출변형 문제

0697

답 ③

$x^2-3=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=\sqrt{3}$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\sqrt{3}}^{2}2x^3\sqrt{x^2-3}\,dx=\int_0^1\sqrt{t}(t+3)\,dt=\int_0^1\left(t^{\frac{3}{2}}+3t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{5}+2=\frac{12}{5}$$

다른 풀이

$\sqrt{x^2-3}=t$로 놓으면 $x^2-3=t^2$에서 $2x=2t\times\frac{dt}{dx}$이고

$x=\sqrt{3}$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\sqrt{3}}^{2}2x^3\sqrt{x^2-3}\,dx=\int_0^1(t^2+3)\times t\times 2t\,dt=\left[\frac{2}{5}t^5+2t^3\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{5}+2=\frac{12}{5}$$

짝기출

$\int_0^{\sqrt{3}}2x\sqrt{x^2+1}\,dx$의 값은?

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

답 ③

0698

답 ①

직각삼각형 POH에서

$\overline{PH}=\overline{OP}\sin\theta$, $\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{\overline{OH}}{\overline{PH}}=\frac{\overline{OP}\cos\theta}{\overline{OP}\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta$에서 $\sin\theta=t$로 놓으면

$\cos\theta=\frac{dt}{d\theta}$이고 $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{t}\,dt=\left[\ln|t|\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{1}{2}=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$$

0699

답 ⑤

$\int_1^e\frac{a}{x}\ln x\,dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e\frac{a}{x}\ln x\,dx=\int_0^1 at\,dt=\left[\frac{1}{2}at^2\right]_0^1=\frac{1}{2}a \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x(1+\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos x(1+\sin x)\,dx$에서

$\sin x=s$로 놓으면 $\cos x=\frac{ds}{dx}$이고

$x=0$일 때 $s=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $s=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos x(1+\sin x)\,dx=\int_0^1 2s(1+s)\,ds$$
$$=\int_0^1(2s^2+2s)\,ds$$
$$=\left[\frac{2}{3}s^3+s^2\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$\frac{1}{2}a=\frac{5}{3}$

$\therefore a=\frac{10}{3}$

짝기출

$\int_{e^2}^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x\,dx$가 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

답 ②

0700

답 ③

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=n$일 때 $t=n^2$이므로

$$f(n)=\int_1^n x^3e^{x^2}dx=\int_1^{n^2}\frac{1}{2}te^t\,dt$$

$u(t)=\frac{1}{2}t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{2}$, $v(t)=e^t$이므로

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$$\int_1^{n^2}\frac{1}{2}te^t\,dt=\left[\frac{1}{2}te^t\right]_1^{n^2}-\int_1^{n^2}\frac{1}{2}e^t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}n^2e^{n^2}-\frac{1}{2}e-\left[\frac{1}{2}e^t\right]_1^{n^2}$$
$$=\frac{1}{2}n^2e^{n^2}-\frac{1}{2}e-\left(\frac{1}{2}e^{n^2}-\frac{1}{2}e\right)$$
$$=\frac{1}{2}(n^2-1)e^{n^2}$$
$$\therefore\ \frac{f(5)}{f(3)}=\frac{12e^{25}}{4e^9}=3e^{16}$$

짝기출

연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이고, 모든 실수 a에 대하여

$$\int_{a-1}^{a+1}f(a-x)\,dx=24$$

일 때, $\int_0^1 f(x)\,dx$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

답 ①

0701

답 ④

$$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+e^{-t}}dt$$
$$=\int_0^x\frac{e^t}{e^t+1}dt$$
$$=\left[\ln|e^t+1|\right]_0^x$$
$$=\ln(e^x+1)-\ln 2$$
$$=\ln\frac{e^x+1}{2}$$

이때 $(f\circ f)(a)=\ln 5$이므로

$\ln\frac{e^{f(a)}+1}{2}=\ln 5$에서

$\frac{e^{f(a)}+1}{2}=5$, $e^{f(a)}=9$

$\therefore\ f(a)=\ln 9$

따라서 $\ln\frac{e^a+1}{2}=\ln 9$이므로

$\frac{e^a+1}{2}=9$, $e^a=17$

$\therefore\ a=\ln 17$

0702

답 8

$a-2x=t$로 놓으면 $-2=\frac{dt}{dx}$이고

$x=\frac{a+1}{2}$일 때 $t=-1$, $x=\frac{a-1}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{a+1}{2}}^{\frac{a-1}{2}}f(a-2x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(t)\times\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{\frac{a+1}{2}}^{\frac{a-1}{2}}f(a-2x)\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$$
$$=-\int_0^1 f(t)\,dt$$
$$=-8$$
$$\therefore\ \int_0^1 f(x)\,dx=8$$

0703

답 6

조건 (나)에서 $x+1=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1(x-1)f'(x+1)\,dx=\int_1^2(t-2)f'(t)\,dt$$
$$=\left[(t-2)f(t)\right]_1^2-\int_1^2 f(t)\,dt$$
$$=f(1)-\int_1^2 f(t)\,dt$$
$$=2-\int_1^2 f(t)\,dt=-4\ (\because\ \text{조건 (가)})$$
$$\therefore\ \int_1^2 f(x)\,dx=6$$

0704

답 ①

함수 $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$g(f(x))=x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$

$$\therefore\ g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$
$$\int_2^6\frac{\ln f(x)}{g'(f(x))}dx=\int_2^6\{f'(x)\times\ln f(x)\}\,dx$$

$f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이고

$x=2$일 때 $t=f(2)=1$, $x=6$일 때 $t=f(6)=5$이므로

$$\int_2^6\{f'(x)\times\ln f(x)\}\,dx=\int_1^5\ln t\,dt$$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$$\int_1^5\ln t\,dt=\left[t\ln t\right]_1^5-\int_1^5 1\,dt$$
$$=5\ln 5-\left[t\right]_1^5$$
$$=5\ln 5-4$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

짝기출

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이고 $g(2)=1$, $g(5)=5$일 때, $\int_1^5 \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx$의 값을 구하시오.

답 12

0705

답 ④

$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=F(x)$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $F(-1)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=F'(x)$

한편, $\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^{-1} xf(x)\,dx$에서

$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=0$

$u(x)=x$, $v'(x)=f(x)$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=F(x)$이므로

$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=\Big[xF(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} F(x)\,dx$

$=F(1)-\int_{-1}^{1} F(x)\,dx=0$

$\therefore \int_{-1}^{1} F(x)\,dx=F(1)$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$F(1)=\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=12$이므로

$\int_{-1}^{1} F(x)\,dx=12$

0706

답 ①

$\int_{-1}^{1} f\left(\frac{x}{t}\right)dx$에서 $\frac{x}{t}=s$로 놓으면 $\frac{1}{t}=\frac{ds}{dx}$이고

$x=-1$일 때 $s=-\frac{1}{t}$, $x=1$일 때 $s=\frac{1}{t}$이므로

$\int_{-1}^{1} f\left(\frac{x}{t}\right)dx=\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}} tf(s)\,ds=t\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}} f(s)\,ds$

따라서 $t\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}} f(s)\,ds=t\cos\frac{2}{t}$이고 $t\neq 0$이므로

$\int_{-\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t}} f(s)\,ds=\cos\frac{2}{t}$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$-\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t^2}f\left(-\frac{1}{t}\right)=\frac{2}{t^2}\sin\frac{2}{t}$

$\therefore f\left(\frac{1}{t}\right)+f\left(-\frac{1}{t}\right)=-2\sin\frac{2}{t}$

위의 식의 양변에 $t=\frac{4}{\pi}$를 대입하면

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2$

짝기출

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^2 xf(tx)\,dx=4t^2$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

답 ④

0707

답 ④

$h(a)=\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^8 g(x)\,dx$라 하자.

위의 식의 양변을 a에 대하여 미분하면

$h'(a)=f(a)-g(a)$

$h'(a)=0$에서 $f(a)=g(a)$

$\therefore a=1$ 또는 $a=6$

$0\le a\le 8$에서 함수 $h(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	···	1	···	6	···	8
$h'(a)$		+	0	−	0	+	
$h(a)$	$h(0)$	↗	극대	↘	극소	↗	$h(8)$

$h(0)=\int_0^0 f(x)\,dx+\int_0^8 g(x)\,dx$

$=\frac{1}{2}\times 8\times 2=8$

$h(6)=\int_0^6 f(x)\,dx+\int_6^8 g(x)\,dx$

$=\int_0^6\left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}\right)dx+\left(\frac{1}{2}\times 2\times 1\right)$

$=\left[\frac{5}{2}x-5\ln|x^2+4|\right]_0^6+1$

$=16-5\ln 10$

이때 $h(0)-h(6)=8-(16-5\ln 10)=5\ln 10-8>0$이므로

$h(0)>h(6)$

따라서 구하는 최솟값은

$h(6)=16-5\ln 10$

0708

답 ③

$t-x=z$로 놓으면 $1=\frac{dz}{dt}$이고

$t=0$일 때 $z=-x$, $t=x$일 때 $z=0$이므로

$f(x)=\int_0^x t\cos(t-x)\,dt$

$=\int_{-x}^0 (x+z)\cos z\,dz$

$=x\int_{-x}^0 \cos z\,dz+\int_{-x}^0 z\cos z\,dz$

$=x\Big[\sin z\Big]_{-x}^0+\int_{-x}^0 z\cos z\,dz$

$=-x\sin(-x)+\int_{-x}^0 z\cos z\,dz$

$=x\sin x+\int_{-x}^0 z\cos z\,dz$ ····· ㉠

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\int_{-x}^{0} z\cos z\,dz$에서 $u(z)=z$, $v'(z)=\cos z$로 놓으면

$u'(z)=1$, $v(z)=\sin z$이므로

$$\int_{-x}^{0} z\cos z\,dz=\Big[z\sin z\Big]_{-x}^{0}-\int_{-x}^{0}\sin z\,dz$$

$$=x\sin(-x)-\Big[-\cos z\Big]_{-x}^{0}$$

$$=-x\sin x-\{-1+\cos(-x)\}$$

$$=-x\sin x-\cos x+1$$

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=1-\cos x$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}$에서

$1-\cos x=\frac{1}{2}$, $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ (단, n은 정수)

따라서 닫힌구간 $[0,\ 4\pi]$에서 주어진 방정식의 서로 다른 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi+\frac{7}{3}\pi+\frac{11}{3}\pi=8\pi$

짝기출

함수 $f(x)=\frac{1}{1+x}$에 대하여

$$F(x)=\int_{0}^{x} tf(x-t)\,dt\ (x\geq 0)$$

일 때, $F'(a)=\ln 10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

답 9

<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

PART A 10 정적분의 활용

유형 01 정적분과 급수의 관계(1)

0709 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}f\left(\frac{2k\pi}{3n}\right)=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{3n}f\left(\frac{2k\pi}{3n}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}f(x)\,dx$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\cos 2x\,dx$$
$$=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

0710 답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{xf(x)}{1+x^2}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{3x^4+3x^2}{x^2+1}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{3x^2(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$$
$$=\int_0^1 3x^2\,dx$$
$$=\left[x^3\right]_0^1=1$$

0711 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(2k-3n)^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{2k}{n}}{\left(\frac{2k}{n}-3\right)^2}\times\frac{2}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}\frac{x+3}{x^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x|-\frac{3}{x}\right]_{-3}^{-1}$$
$$=\frac{1}{2}\{3-(\ln 3+1)\}$$
$$=1-\frac{1}{2}\ln 3$$

참고

위의 급수를 정적분으로 바꿀 때, $\frac{2k}{n}-3=x$로 바꾸었으므로 $\frac{2k}{n}=x+3$으로 바꿀 수 있다.

0712 답 ⑤

$f(x)=x^3$이라 하자.

ㄱ. $x_k=1+\frac{2k}{n}$로 놓으면 $x_0=1$, $x_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{6}{n}=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{2}{n}$$
$$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$
$$=3\int_1^3 x^3\,dx$$

ㄴ. $x_k=\frac{2k}{n}$로 놓으면 $x_0=0$, $x_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{6}{n}=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{2}{n}$$
$$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(1+x_k)\Delta x$$
$$=3\int_0^2(1+x)^3\,dx$$

ㄷ. $x_k=\frac{k}{n}$로 놓으면 $x_0=0$, $x_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{6}{n}=6\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+2\times\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n}$$
$$=6\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(1+2x_k)\Delta x$$
$$=6\int_0^1(1+2x)^3\,dx$$

따라서 주어진 급수의 값과 같은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유형 02 정적분과 급수의 관계(2)

0713 답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\{f\left(\frac{\pi}{n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\{1-(-1)\}=\frac{4}{\pi}$$

0714 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left\{\left(1-\frac{3}{n}\right)^3+\left(1-\frac{6}{n}\right)^3+\cdots+\left(1-\frac{3n}{n}\right)^3\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}\left(1-\frac{3k}{n}\right)^3=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}\left(-1+\frac{3k}{n}\right)^3$$
$$=-\int_{-1}^{2}x^3\,dx=-\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{2}$$
$$=-\frac{1}{4}(16-1)=-\frac{15}{4}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0715

답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)+2f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+nf\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_1^2(x-1)f(x)\,dx=\int_1^2(x-1)\ln x\,dx$$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x-1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2-x$이므로

$$\int_1^2(x-1)\ln x\,dx=\left[\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)dx$$

$$=-\int_1^2\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^2-x\right]_1^2$$

$$=-\left\{(1-2)-\left(\frac{1}{4}-1\right)\right\}=\frac{1}{4}$$

참고

위의 급수를 정적분으로 바꿀 때, $1+\frac{k}{n}=x$로 바꾸었으므로

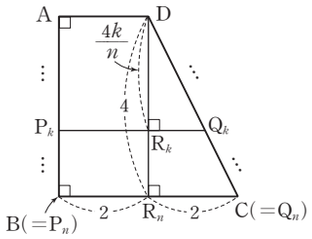
$\frac{k}{n}=x-1$로 바꿀 수 있다.

유형 03 정적분과 급수의 활용

0716

답 120

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D에서 선분 AB와 평행한 직선을 그어 선분 P_kQ_k와 만나는 점을 R_k라 하면 삼각형 DR_kQ_k와 삼각형 DR_nC는 서로 닮음이다.



$\overline{DR_k}:\overline{DR_n}=\overline{R_kQ_k}:\overline{R_nC}$에서

$\frac{4k}{n}:4=\overline{R_kQ_k}:2$

$\overline{R_kQ_k}=\frac{2k}{n}$ $\quad\therefore\ \overline{P_kQ_k}=\overline{P_kR_k}+\overline{R_kQ_k}=2+\frac{2k}{n}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{P_kQ_k}^3=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{2k}{n}\right)^3$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(2+\frac{2k}{n}\right)^3$$

$$=2\int_2^4x^3\,dx=2\left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^4$$

$$=2(64-4)=120$$

0717

답 3

반원의 중심을 O라 하면 $P_0=A$라 할 때, $\angle P_{k-1}OP_k=\frac{\pi}{n}$이므로

$l_k=1\times\frac{k\pi}{n}=\frac{k\pi}{n}$ — 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이는 $r\theta$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}l_k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^\pi$$

$$=\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{a}$$

$\therefore\ a=3$

0718

답 ⑤

$\angle AOP_k=\frac{k\pi}{n}$이므로 삼각형 AOP_k의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{k\pi}{n}=2\sin\frac{k\pi}{n}$

이때 $\overline{AQ_k}=\frac{4}{5}\overline{AP_k}$이므로

$S_k=\frac{4}{5}\times2\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{8}{5}\sin\frac{k\pi}{n}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{8}{5}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{8}{5\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$=\frac{8}{5\pi}\int_0^\pi\sin x\,dx=\frac{8}{5\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi$$

$$=\frac{8}{5\pi}\{1-(-1)\}=\frac{16}{5\pi}$$

유형 04 곡선과 x축 사이의 넓이

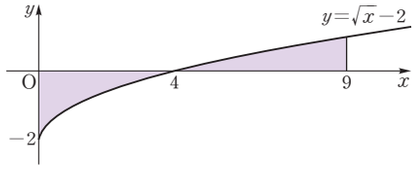
0719

답 ③

곡선 $y=\sqrt{x}-2$와 x축의 교점의 x좌표는

$\sqrt{x}-2=0$에서

$x=4$



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^9|\sqrt{x}-2|\,dx=\int_0^4(-\sqrt{x}+2)\,dx+\int_4^9(\sqrt{x}-2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x\right]_0^4+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x\right]_4^9$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+8\right)+\left\{(18-18)-\left(\frac{16}{3}-8\right)\right\}$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

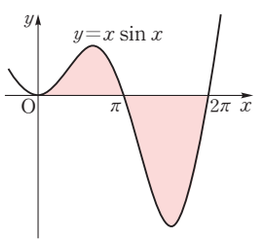
0720

답 4π

곡선 $y=x\sin x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x\sin x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ $\quad(\because\ 0\le x\le2\pi)$



따라서 구하는 부분의 넓이는

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\int_0^{2\pi} |x\sin x|\,dx$

$=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-x\sin x)\,dx$

$=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx$

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx$

$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx$

$-\Big\{\Big[-x\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}-\int_{\pi}^{2\pi}(-\cos x)\,dx\Big\}$

$=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}-\Big(-3\pi+\Big[\sin x\Big]_{\pi}^{2\pi}\Big)$

$=\pi-(-3\pi)=4\pi$

0721

답 15

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 $f(3x+2)>0$

따라서 곡선 $y=f(3x+2)$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^1 f(3x+2)\,dx$

$3x+2=t$로 놓으면 $3=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=5$이므로

$\int_0^1 f(3x+2)\,dx=\frac{1}{3}\int_2^5 f(t)\,dt=5$

$\therefore \int_2^5 f(x)\,dx=15$

참고

$f(ax+b)$ 꼴을 포함한 함수의 정적분은 $ax+b=t$로 놓고 치환적분법을 이용하여 구한다.

0722

답 ②

$f(x)=xe^{x^2}$이라 하면

$f(-x)=-xe^{(-x)^2}=-xe^{x^2}=-f(x)$

이므로 함수 $y=xe^{x^2}$은 기함수이다.

즉, 곡선 $y=xe^{x^2}$은 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=xe^{x^2}$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합은

$\int_{-1}^1 |xe^{x^2}|\,dx=2\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{2}e^t\,dt=\Big[\frac{1}{2}e^t\Big]_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$

$\therefore 2\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=e-1$

유형 05 곡선과 y축 사이의 넓이

0723

답 ②

$y=2\sqrt{x}+1$에서 $\sqrt{x}=\frac{1}{2}(y-1)$이므로

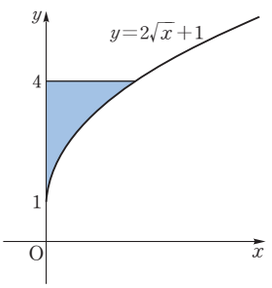
$x=\frac{1}{4}(y-1)^2$ $(x\ge 0)$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$\int_1^4 \frac{1}{4}(y-1)^2\,dy=\Big[\frac{1}{12}(y-1)^3\Big]_1^4$

$=\frac{1}{12}\times 27$

$=\frac{9}{4}$



0724

답 e

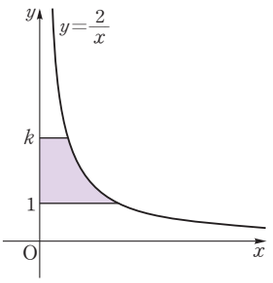
$y=\frac{2}{x}$에서 $x=\frac{2}{y}$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$\int_1^k \frac{2}{y}\,dy=\Big[2\ln|y|\Big]_1^k$

$=2\ln k=2$

에서 $k=e$



0725

답 ②

곡선 $y=2^x-1$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는

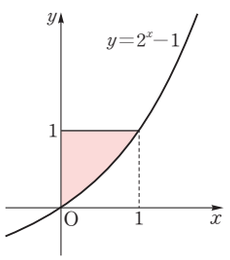
$2^x-1=1$에서 $x=1$

따라서 구하는 부분의 넓이는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이에서 곡선 $y=2^x-1$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$1-\int_0^1 (2^x-1)\,dx=1-\Big[\frac{2^x}{\ln 2}-x\Big]_0^1$

$=1-\Big\{\Big(\frac{2}{\ln 2}-1\Big)-\frac{1}{\ln 2}\Big\}$

$=2-\frac{1}{\ln 2}$



이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 06 곡선과 직선 사이의 넓이

0726

답 ①

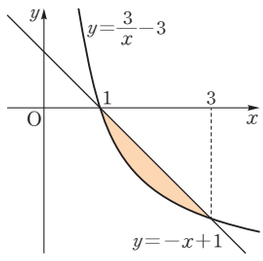
곡선 $y=\frac{3}{x}-3$과 직선 $y=-x+1$의 교점의 x좌표는

$\frac{3}{x}-3=-x+1$에서

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_1^3\left\{(-x+1)-\left(\frac{3}{x}-3\right)\right\}dx=\int_1^3\left(-x-\frac{3}{x}+4\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2-3\ln|x|+4x\right]_1^3$$

$$=-\frac{9}{2}-3\ln 3+12-\left(-\frac{1}{2}+4\right)$$

$$=4-3\ln 3$$

0727

답 $\ln 3$

직선 $y=x$와 곡선 $y=\frac{1}{x}$의 교점의 x좌표는

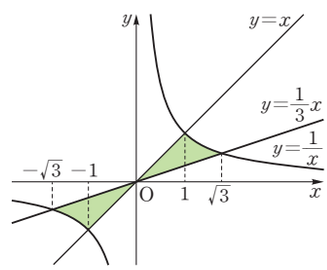
$x=\frac{1}{x}$에서 $x^2-1=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

직선 $y=\frac{1}{3}x$와 곡선 $y=\frac{1}{x}$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{3}x=\frac{1}{x}$에서 $x^2-3=0$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$



곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 직선 $y=x$, $y=\frac{1}{3}x$는 모두 원점에 대하여 대칭이므로 $x\geq 0$일 때의 넓이와 $x\leq 0$일 때의 넓이가 서로 같다.

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$2\left\{\int_0^1\left(x-\frac{1}{3}x\right)dx+\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x\right)dx\right\}$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^2\right]_0^1+2\left[\ln|x|-\frac{1}{6}x^2\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2}{3}+2\left(\ln\sqrt{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=2\ln\sqrt{3}=\ln 3$$

0728

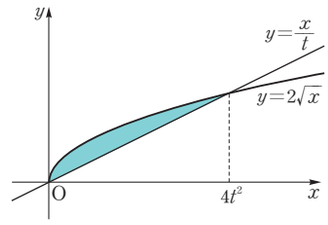
답 32

곡선 $y=2\sqrt{x}$와 직선 $y=\frac{x}{t}$의 교점의 x좌표는

$2\sqrt{x}=\frac{x}{t}$에서 $x=2t\sqrt{x}$

$x(x-4t^2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4t^2$



따라서 구하는 부분의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\int_0^{4t^2}\left(2\sqrt{x}-\frac{x}{t}\right)dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2t}x^2\right]_0^{4t^2}=\frac{8}{3}t^3$$

$S'(t)=8t^2$

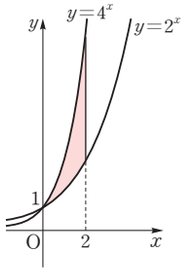
$\therefore S'(2)=8\times 4=32$

유형 07 두 곡선 사이의 넓이

0729

답 ④

두 곡선 $y=2^x$, $y=4^x$은 모두 y축과 점 $(0, 1)$에서 만나므로 구하는 부분의 넓이는



$$\int_0^2(4^x-2^x)\,dx$$

$$=\left[\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2$$

$$=\frac{16}{\ln 4}-\frac{4}{\ln 2}-\left(\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$=\frac{9}{2\ln 2}$$

$$=\frac{a}{\ln 2}$$

$\therefore a=\frac{9}{2}$

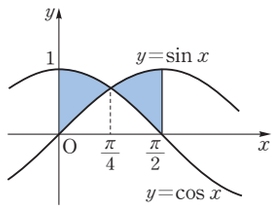
0730

답 ②

두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\cos x$에서

$\tan x=1$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(-1+\sqrt{2})$$

$$=2(\sqrt{2}-1)$$

다른 풀이

구하는 부분의 넓이는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx=2\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2(\sqrt{2}-1)$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0731

답 ③

두 곡선 $y=f(x)$, $y=\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{3}{\pi}$이므로

$$\int_0^2\left\{\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|-f(x)\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left\{\cos\frac{\pi}{2}x-f(x)\right\}dx+\int_1^2\left\{-\cos\frac{\pi}{2}x-f(x)\right\}dx$$
$$=\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx-\int_1^2\cos\frac{\pi}{2}x\,dx-\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$=2\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx-\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$=2\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1-\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$=2\times\frac{2}{\pi}-\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{4}{\pi}-\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{3}{\pi}$$
$$\therefore\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}$$

$\int_0^2=\int_0^1+\int_1^2$, $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

참고

곡선 $y=\cos\frac{\pi}{2}x$는 점 $(1,0)$에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=-\int_1^2\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

참고

y에 대하여 적분하므로 {(오른쪽의 식)−(왼쪽의 식)}을 세워서 정적분의 값을 계산하였다.

0733

답 ②

$y=-\frac{1}{x-2}$에서 $y'=\frac{1}{(x-2)^2}$

곡선 $y=-\frac{1}{x-2}$과 기울기가 1인 직선이 접하는 접점의 좌표를 $\left(t,\ -\frac{1}{t-2}\right)$이라 하면

$\frac{1}{(t-2)^2}=1$에서 $(t-2)^2=1$

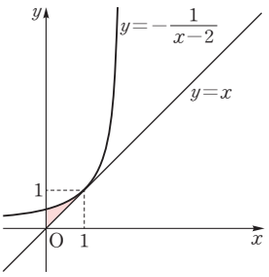
$\therefore t=1\ (\because t<2)$

따라서 접선의 방정식은

$y-1=x-1$ $\quad\therefore y=x$

즉, 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^1\left(-\frac{1}{x-2}-x\right)dx$$
$$=\left[-\ln|x-2|-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{2}+\ln 2$$



0734

답 ③

$y=\frac{\ln x}{x}$에서 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{\ln t}{t}\right)$라 하면 접선의 방정식은

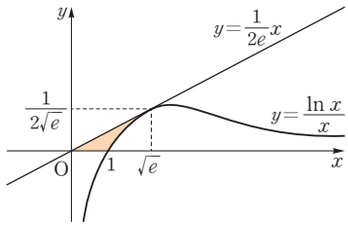
$$y=\frac{1-\ln t}{t^2}(x-t)+\frac{\ln t}{t}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-\frac{1-\ln t}{t}+\frac{\ln t}{t}$, $1-\ln t=\ln t$

$\therefore t=\sqrt{e}$

이를 ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{2e}x$



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{e}\times\frac{1}{2\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{e}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$$

이를 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

유형 08 곡선과 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이

0732

답 ③

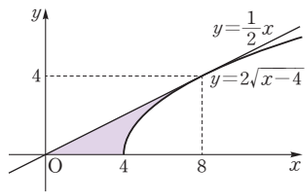
$y=2\sqrt{x-4}$에서

$y'=\frac{2}{2\sqrt{x-4}}=\frac{1}{\sqrt{x-4}}$

곡선 위의 점 $(8,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{8-4}}=\frac{1}{2}$이므로

접선의 방정식은

$y-4=\frac{1}{2}(x-8)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x$



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times8\times4-\int_4^8 2\sqrt{x-4}\,dx=16-\left[\frac{4}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8=16-\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$$

Bible Says 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

다른 풀이

$y=\frac{1}{2}x$에서 $x=2y$

$y=2\sqrt{x-4}$에서 $y^2=4x-16$ $\quad\therefore x=\frac{1}{4}y^2+4$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^4\left(\frac{1}{4}y^2+4-2y\right)dy=\left[\frac{1}{12}y^3+4y-y^2\right]_0^4=\frac{16}{3}+16-16=\frac{16}{3}$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

유형 09 두 부분의 넓이가 같을 조건

0735

답 ③

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(a\cos x-\sin x)\,dx=0$이므로

$\left[a\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=0,\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}\right)-1=0$

$\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

0736

답 ④

$\int_0^a(\sqrt{2x}-2x)\,dx=0$이므로

$\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2\right]_0^a=0$

$\frac{2\sqrt{2}}{3}a^{\frac{3}{2}}-a^2=0,\ a^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-a^{\frac{1}{2}}\right)=0$

이때 $a>\frac{1}{2}$이므로

$a^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\qquad\therefore a=\frac{8}{9}$

0737

답 2

$0\le x\le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_0^2 f(x)\,dx=0$

$\int_0^1 f'(2\sqrt{x})\,dx$에서

$2\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$\int_0^1 f'(2\sqrt{x})\,dx=\int_0^2\frac{1}{2}tf'(t)\,dt$

$u(t)=\frac{1}{2}t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{2}$, $v(t)=f(t)$이므로

$\int_0^2\frac{1}{2}tf'(t)\,dt=\left[\frac{1}{2}tf(t)\right]_0^2-\int_0^2\frac{1}{2}f(t)\,dt=f(2)-0=2$

유형 10 두 곡선 사이의 넓이의 활용 - 이등분

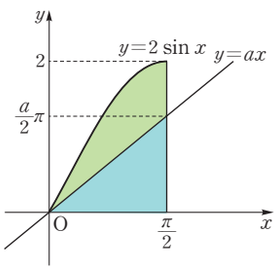
0738

답 ③

곡선 $y=2\sin x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,dx$

$=\left[-2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$



직선 $y=ax$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{a}{2}\pi=\frac{a}{8}\pi^2$

이때 $S_1=2S_2$이므로 $2=2\times\frac{a}{8}\pi^2$

$\frac{a}{8}\pi^2=1\qquad\therefore a=\frac{8}{\pi^2}$

0739

답 ④

곡선 $y=2^x$과 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

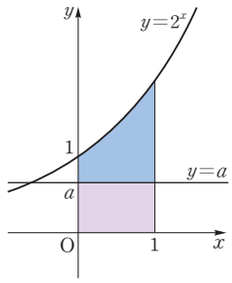
$S_1=\int_0^1 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1=\frac{1}{\ln 2}$

x축, y축 및 두 직선 $x=1$, $y=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=1\times a=a$

이때 $S_1=2S_2$이므로

$\frac{1}{\ln 2}=2a\qquad\therefore a=\frac{1}{2\ln 2}$



0740

답 e

$y=\frac{1}{x}$에서 $y'=-\frac{1}{x^2}$

곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$

$\therefore y=-x+2$

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

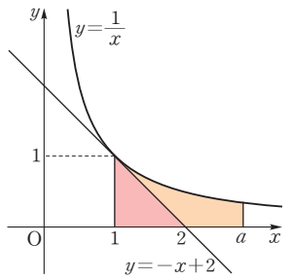
$S_1=\int_1^a\frac{1}{x}\,dx=\left[\ln|x|\right]_1^a=\ln a$

직선 $y=-x+2$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

이때 $S_1=2S_2$이므로

$\ln a=1\qquad\therefore a=e$



유형 11 함수와 그 역함수의 정적분

0741

답 ⑤

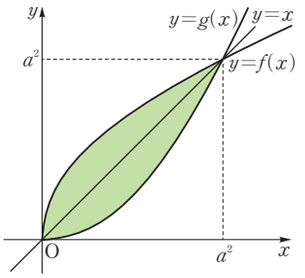
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

즉, $a\sqrt{x}=x$에서 $a^2x=x^2$

$x(x-a^2)=0\qquad\therefore x=0$ 또는 $x=a^2$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 부분의 넓이는



$2\int_0^{a^2}(a\sqrt{x}-x)\,dx$

$=2\left[\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{a^2}=\frac{1}{3}a^4=12$

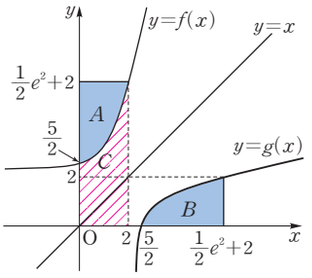
에서 $a^4=36$, $a^2=6$

$\therefore a=\sqrt{6}\ (\because a>0)$

0742

답 ④

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 오른쪽 그림에서 $A=B$이므로



$\int_0^2 f(x)\,dx+\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{1}{2}e^2+2} g(x)\,dx$

$=C+B=C+A$

$=2\times\left(\frac{1}{2}e^2+2\right)=e^2+4$

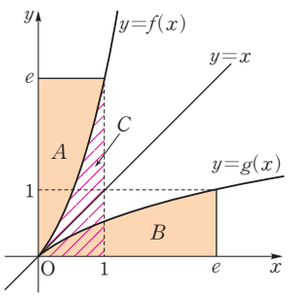
다른 풀이

$\int_0^2 f(x)\,dx+\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{1}{2}e^2+2} g(x)\,dx=2\times\left(\frac{1}{2}e^2+2\right)-0\times\frac{5}{2}=e^2+4$

0743

답 e

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 오른쪽 그림에서 $A=B$이므로



$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^e g(x)\,dx$

$=C+B=C+A$

$=1\times e=e$

다른 풀이

$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^e g(x)\,dx=1\times e-0\times 0=e$

유형 12 입체도형의 부피 - 단면이 밑면과 평행한 경우

0744

답 ④

구하는 물의 부피는

$\int_0^5(\sqrt{3x+1}-1)\,dx=\left[\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}-x\right]_0^5$

$=\frac{128}{9}-5-\frac{2}{9}=9$

0745

답 4

그릇의 부피는

$\int_0^a\frac{4x}{x^2+2}\,dx=\int_0^a\frac{2(x^2+2)'}{x^2+2}\,dx$

$=\left[2\ln(x^2+2)\right]_0^a$

$=2\ln(a^2+2)-2\ln 2$

$=2\ln\frac{a^2+2}{2}$

$=4\ln 3$

에서 $\ln\frac{a^2+2}{2}=\ln 9$

$a^2+2=18$, $a^2=16$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

0746

답 ④

물의 깊이가 x일 때 수면의 넓이는 $\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2\pi=\pi e^{-x}$
따라서 구하는 물의 부피는

$\int_0^{\ln 6}\pi e^{-x}\,dx=\left[-\pi e^{-x}\right]_0^{\ln 6}$

$=-\pi e^{-\ln 6}+\pi$

$=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5}{6}\pi$

유형 13 입체도형의 부피 - 단면이 밑면과 수직인 경우

0747

답 ①

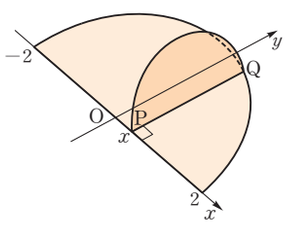
단면인 정사각형의 한 변의 길이가 $\sec x$이므로 단면의 넓이는 $\sec^2 x$
따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx=\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-0=1$

0748

답 7

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 반원을 그리고 x축 위의 점 P의 좌표를 $(x,\ 0)$, 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 반원과 만나는 점을 Q라 하면



$Q(x,\ \sqrt{4-x^2})$

점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{PQ}$인 반원이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}\times\pi\left(\frac{1}{2}\overline{PQ}\right)^2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}(4-x^2)$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{-2}^{2} S(x)\,dx=\int_{-2}^{2}\frac{\pi}{8}(4-x^2)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}\frac{\pi}{8}(4-x^2)\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\int_{0}^{2}(4-x^2)\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{\pi}{4}\times\frac{16}{3}=\frac{4}{3}\pi$$

즉, $p=3$, $q=4$이므로

$p+q=3+4=7$

0749

답 3

입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\frac{4x}{x^2+1}}$인 정삼각형이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{\frac{4x}{x^2+1}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}x}{x^2+1}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{1}^{k} S(x)\,dx=\int_{1}^{k}\frac{\sqrt{3}x}{x^2+1}\,dx$$

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=2$, $x=k$일 때 $t=k^2+1$이므로

$$\int_{1}^{k}\frac{\sqrt{3}x}{x^2+1}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{2}^{k^2+1}\frac{1}{t}\,dt$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\ln|t|\right]_2^{k^2+1}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\{\ln(k^2+1)-\ln 2\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{k^2+1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 5$$

에서 $\frac{k^2+1}{2}=5$, $k^2=9$

$\therefore k=3$ ($\because k>1$)

유형 14 직선 위에서 점이 움직인 거리

0750

답 ④

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt=\int_0^3 |e^t-e^2|\,dt$$
$$=\int_0^2(-e^t+e^2)\,dt+\int_2^3(e^t-e^2)\,dt$$
$$=\left[-e^t+e^2t\right]_0^2+\left[e^t-e^2t\right]_2^3$$
$$=e^2+1+(e^3-3e^2)-(-e^2)$$
$$=e^3-e^2+1$$

0751

답 3

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $\pi\cos\pi t=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots$

따라서 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=\frac{3}{2}$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^{\frac{3}{2}}|v(t)|\,dt=\int_0^{\frac{3}{2}}|\pi\cos\pi t|\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi\cos\pi t\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(-\pi\cos\pi t)\,dt$$
$$=\left[\sin\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[-\sin\pi t\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$
$$=(1-0)+\{1-(-1)\}$$
$$=1+2=3$$

0752

답 π

시각 t ($t\geq 0$)에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^t(\sin 2t-\sin t)\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t+\cos t\right]_0^t$$
$$=-\frac{1}{2}\cos 2t+\cos t-\frac{1}{2}$$
$$=-\cos^2 t+\cos t$$
$$=-\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$0\leq t\leq 2\pi$에서 $-1\leq\cos t\leq 1$이므로

$\cos t=-1$, 즉 $t=\pi$일 때 점 P는 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다.

$\therefore a=\pi$

Bible Says 배각의 공식

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

(2) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

(3) $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

유형 15 좌표평면 위에서 점이 움직인 거리

0753

답 ②

$\frac{dx}{dt}=t-4$, $\frac{dy}{dt}=4\sqrt{t}$이므로 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(t-4)^2+(4\sqrt{t})^2}$$
$$=\sqrt{t^2+8t+16}$$
$$=\sqrt{(t+4)^2}$$
$$=|t+4|$$
$$=t+4\ (\because t+4>0)$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4 (t+4)\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2+4t\right]_0^4$$
$$=8+16=24$$

0754

답 $\ln 2$

$\frac{dx}{dt}=e^t(\sin 2t+2\cos 2t)$, $\frac{dy}{dt}=e^t(\cos 2t-2\sin 2t)$이므로

점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\{e^t(\sin 2t+2\cos 2t)\}^2+\{e^t(\cos 2t-2\sin 2t)\}^2}$$
$$=\sqrt{e^{2t}(5\sin^2 2t+5\cos^2 2t)}=\sqrt{5}e^t\ (\because e^t>0)$$

따라서 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a \sqrt{5}e^t\,dt=\left[\sqrt{5}e^t\right]_0^a=\sqrt{5}e^a-\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

에서 $e^a=2$

$\therefore a=\ln 2$

0755

답 ④

$\frac{dx}{dt}=t-\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2$이므로 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+4}$$
$$=\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}+2}$$
$$=\sqrt{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$
$$=\left|t+\frac{1}{t}\right|$$
$$=t+\frac{1}{t}\left(\because t>0,\ \frac{1}{t}>0\right)$$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t+\frac{1}{t}\ge 2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}=2$ (단, 등호는 $t=\frac{1}{t}$일 때 성립)

즉, $t=1$일 때 점 P의 속력이 최소이므로 구하는 거리는

$$\int_1^3\left(t+\frac{1}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+\ln|t|\right]_1^3$$
$$=\frac{9}{2}+\ln 3-\frac{1}{2}=4+\ln 3$$

유형 16 곡선의 길이

0756

답 ④

$y=\int_1^x \sqrt{t^2+4t+3}\,dt$에서 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+4x+3}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{x^2+4x+4}\,dx$$
$$=\int_0^2\sqrt{(x+2)^2}\,dx$$
$$=\int_0^2|x+2|\,dx$$
$$=\int_0^2(x+2)\,dx\ (\because x+2>0)$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2=2+4=6$$

0757

답 ②

$\frac{dx}{d\theta}=6\sin^2\theta\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-6\cos^2\theta\sin\theta$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(6\sin^2\theta\cos\theta)^2+(-6\cos^2\theta\sin\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{36\sin^4\theta\cos^2\theta+36\cos^4\theta\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{36\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{36\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|6\sin\theta\cos\theta|\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|3\sin 2\theta|\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin 2\theta\,d\theta\ (\because 3\sin 2\theta\ge 0)$$
$$=\left[-\frac{3}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=3$$

0758

답 2

$y=\int_0^x\sqrt{\sec^4 t-1}\,dt$에서 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\sec^4 x-1}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sec^4 x}\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\sec^2 x|\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx\ (\because \sec^2 x>0)$$
$$=\left[\tan x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=1-(-1)=2$$

참고

$\sec^2(-x)=\sec^2 x$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx=2\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=2(1-0)=2$$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

0759

답 ③

$\int_0^2 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$의 값은 $0\le x\le 2$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이를 의미한다.

이때 $f(0)=0$, $f(2)=4$이므로 곡선 $y=f(x)$의 길이의 최솟값은 두 점 $(0, 0)$, $(2, 4)$를 잇는 선분의 길이와 같다.

따라서 구하는 최솟값은

$\sqrt{(2-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

PART B 기출 & 기출변형 문제

0760

답 7

$f(x)=4x^2+ax$에서 $f(1)=4+a$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 xf(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 (4x^3+ax^2)\,dx$$

$$=\left[x^4+\frac{1}{3}ax^3\right]_0^1$$

$$=1+\frac{1}{3}a$$

즉, $4+a=1+\frac{1}{3}a$이므로 $\frac{2}{3}a=-3$

$\therefore a=-\frac{9}{2}$

따라서 $f(x)=4x^2-\frac{9}{2}x$이므로

$f(2)=16-9=7$

짝기출

함수 $f(x)=3x^2-ax$가

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{3k}{n}\right)=f(1)$$

을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오.

답 12

0761

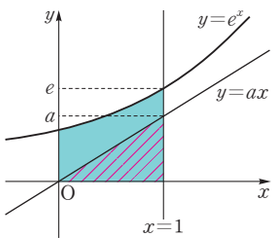
답 ③

함수 $y=e^x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 영역의 넓이는

$\int_0^1 e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$

이 넓이가 직선 $y=ax$에 의하여 이등분되므로 이 넓이는 오른쪽 그림에서 빗금 친 직각삼각형의 넓이의 2배이다.

즉, $e-1=\frac{1}{2}a\times 2$에서 $a=e-1$



0762

답 56

$y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$x=0$에서 $x=12$까지의 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^{12}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^{12}\sqrt{1+\frac{x}{4}}\,dx$$

$\sqrt{1+\frac{x}{4}}=t$로 놓으면

$1+\frac{x}{4}=t^2$에서 $\frac{1}{4}=2t\times\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=12$일 때 $t=\sqrt{1+\frac{12}{4}}=2$이므로

$$l=\int_1^2 8t^2\,dt=\left[\frac{8}{3}t^3\right]_1^2=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$$

$\therefore 3l=3\times\frac{56}{3}=56$

0763

답 4

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_1^4 f(x)\,dx=12$

한편, $\int_1^2 f(3x-2)\,dx$에서

$3x-2=t$로 놓으면 $3=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$\int_1^2 f(3x-2)\,dx=\frac{1}{3}\int_1^4 f(t)\,dt=\frac{1}{3}\times 12=4$

짝기출

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$인 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_3^5 f(x)\,dx=36$일 때, 곡선 $y=f(2x+1)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

답 ②

0764

답 ①

$f(x)=x\ln(x^2+1)$이라 하면

$f'(x)=\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이고 $f(0)=0$이므로

$x\ge 0$일 때 $f(x)\ge 0$이다.

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

따라서 구하는 부분의 넓이는

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x\ln(x^2+1)\,dx$

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$\int_0^1 x\ln(x^2+1)\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln t\,dt$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$\frac{1}{2}\int_1^2 \ln t\,dt=\frac{1}{2}\Big[t\ln t\Big]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 1\,dt$

$=\frac{1}{2}\times 2\ln 2-\frac{1}{2}\Big[t\Big]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}$

0765

답 ②

입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\frac{3x+1}{x^2}}$인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\left(\sqrt{\frac{3x+1}{x^2}}\right)^2=\frac{3x+1}{x^2}$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_1^2 S(x)\,dx=\int_1^2 \frac{3x+1}{x^2}\,dx$

$=\int_1^2\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\Big[3\ln|x|-\frac{1}{x}\Big]_1^2$

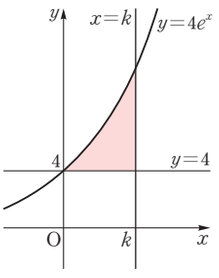
$=3\ln 2-\frac{1}{2}-(0-1)$

$=\frac{1}{2}+3\ln 2$

0766

답 ②

곡선 $y=4e^x$과 두 직선 $x=k$, $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_0^k(4e^x-4)\,dx$

$=\Big[4e^x-4x\Big]_0^k=4(e^k-k)-(4-0)$

$=4(e^k-k-1)=28$

에서 $e^k-k-1=7$

$\therefore e^k-k=8$ ····· ㉠

$f(x)=\int_0^x(t-k)e^t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-k)e^x$

$f'(k)=0$이고 $x=k$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극소이면서 최소이다.

따라서 구하는 최솟값은

$f(k)=\int_0^k(t-k)e^t\,dt$

$u(t)=t-k$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^t$이므로

$\int_0^k(t-k)e^t\,dt=\Big[(t-k)e^t\Big]_0^k-\int_0^k e^t\,dt$

$=k-\Big[e^t\Big]_0^k=k-e^k+1$

$=-8+1$ ($\because$ ㉠)

$=-7$

짝기출

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x(a-t)e^t\,dt$의 최댓값이 32이다. 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

답 96

0767

답 64

$\frac{dx}{dt}=4(-\sin t+\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin 2t=-4\sin t\cos t$이므로 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

$=\sqrt{\{4(-\sin t+\cos t)\}^2+(-4\sin t\cos t)^2}$

$=\sqrt{16(\sin^2 t-2\sin t\cos t+\cos^2 t)+16\sin^2 t\cos^2 t}$

$=\sqrt{(4-4\sin t\cos t)^2}$

$=|4-4\sin t\cos t|$

$=4-4\sin t\cos t$ ($\because 4-4\sin t\cos t>0$)

$=4-2\sin 2t$

따라서 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{2\pi}(4-2\sin 2t)\,dt=\Big[4t+\cos 2t\Big]_0^{2\pi}=8\pi$

즉, $a=8$이므로 $a^2=64$

0768

답 2

$2A=B$이므로

$\int_0^4 f(x)\,dx=-A+B=A$

$\int_0^3 f'(2\sqrt{x+1})\,dx$에서

$2\sqrt{x+1}=t$로 놓으면 $\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=2$, $x=3$일 때 $t=4$이므로

$\int_0^3 f'(2\sqrt{x+1})\,dx=\int_2^4 \frac{1}{2}tf'(t)\,dt$

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$u(t)=\frac{1}{2}t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{2}$, $v(t)=f(t)$이므로

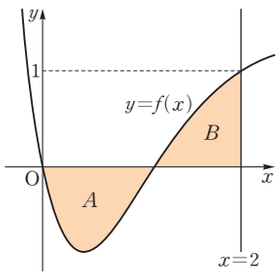
$$\int_2^4 \frac{1}{2}tf'(t)\,dt=\left[\frac{1}{2}tf(t)\right]_2^4-\int_2^4 \frac{1}{2}f(t)\,dt$$
$$=2f(4)-f(2)-\frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\,dt$$
$$=2\times5-\frac{1}{2}B=8$$

에서 $B=4$

$\therefore \int_0^4 f(x)\,dx=A=\frac{1}{2}B=2$

짝기출

실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$, $f(2)=1$이다. 그림과 같이 $0\le x\le2$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 A, B라 하자. $A=B$일 때, $\int_0^2 (2x+3)f'(x)\,dx$의 값을 구하시오.



답 7

0769

답 ①

$f(x)=x\sin x$에서 $f'(x)=\sin x+x\cos x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t,\ t\sin t)$ $(0<t<\pi)$에서의 접선 l의 기울기는

$f'(t)=\sin t+t\cos t$

이때 접선 l의 기울기는 원점과 점 $P(t,\ t\sin t)$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$\sin t+t\cos t=\frac{t\sin t}{t}$에서 $t\cos t=0$

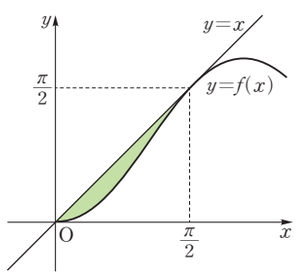
$\therefore t=\frac{\pi}{2}$ $(\because 0<t<\pi)$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선 l의 방정식은

$y-\frac{\pi}{2}=x-\frac{\pi}{2}$ $\therefore y=x$

그런데 $x\ge0$일 때

$x-x\sin x=x(1-\sin x)\ge0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 위치 관계는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 부분의 넓이는



$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-x\sin x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

$=\frac{\pi^2}{8}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ ····· ㉠

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

$=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

이를 ㉠에 대입하면

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-x\sin x)\,dx=\frac{\pi^2}{8}-1=\frac{\pi^2-8}{8}$

짝기출

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin x$의 그래프 위의 한 점 $P(a,\ \sin a)$ $\left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선을 l이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 같을 때, $\cos a$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

답 ②

0770

답 ①

점 $A(t,\ f(t))$를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(t)}$이므로 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$

위의 식에 $y=0$을 대입하여 정리하면

$x=f(t)f'(t)+t$

따라서 점 C의 좌표는 $(f(t)f'(t)+t,\ 0)$

$\overline{AB}=f(t)$, $\overline{BC}=f(t)f'(t)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)=\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)$

$\therefore \{f(t)\}^2f'(t)=e^{3t}-2e^{2t}+e^t$

$\int\{f(t)\}^2f'(t)\,dt=\int(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)\,dt$에서

$f(t)=x$로 놓으면 $f'(t)=\frac{dx}{dt}$이므로

$\int\{f(t)\}^2f'(t)\,dt=\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C_1$

$=\frac{1}{3}\{f(t)\}^3+C_1$ (C_1은 적분상수)

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

$\int(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)\,dt=\frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}+e^t+C_2$ (C_2는 적분상수)

이므로

$\frac{1}{3}\{f(t)\}^3+C_1=\frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}+e^t+C_2$

$\{f(t)\}^3=e^{3t}-3e^{2t}+3e^t+C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0)=0$이므로 $\{f(0)\}^3=e^{3\times0}-3e^{2\times0}+3e^0+C$에서

$C=-1$

즉, $\{f(t)\}^3=e^{3t}-3e^{2t}+3e^t-1=(e^t-1)^3$이므로

$f(t)=e^t-1$

따라서 구하는 부분의 넓이는

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(e^x-1)\,dx$

$=\left[e^x-x\right]_0^1=(e-1)-1=e-2$

Bible Says **부정적분**

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $f(x)$의 모든 부정적분을

$F(x)+C$ (C는 상수)

꼴로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로 $\int f(x)\,dx$와 같이 나타낸다. 즉,

$F'(x)=f(x)$일 때,

$\int f(x)\,dx=F(x)+C$ (C는 상수)

이때 C를 적분상수라 한다.

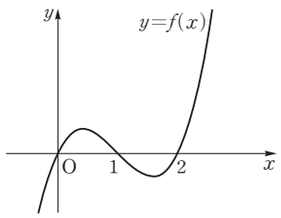
0771

답 42

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)=\int_m^{m+1}f(x)\,dx<0$

(i) $p=1$일 때

$f(x)=x(x-2)(x-1)$



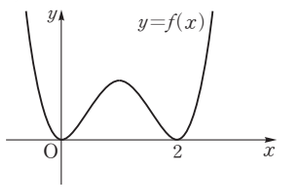
함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

$x\le0$일 때 $f(x)\le0$, $1\le x\le2$일 때 $f(x)\le0$이므로

$\int_m^{m+1}f(x)\,dx<0$을 만족시키는 정수 m은 무수히 많다.

(ii) $p=2$일 때

$f(x)=x^2(x-2)^2$

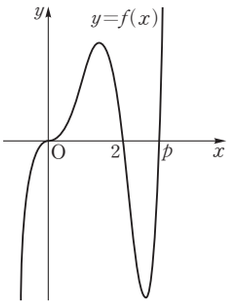


함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이므로 $\int_m^{m+1}f(x)\,dx<0$을 만족시키는 정수 m은 존재하지 않는다.

즉, 정수 m의 개수는 0이므로 $p=2$일 때 조건을 만족시킨다.

(iii) $p>2$인 홀수일 때

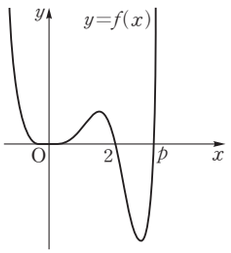


함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

$x\le0$일 때 $f(x)\le0$, $2\le x\le p$일 때 $f(x)\le0$이므로

$\int_m^{m+1}f(x)\,dx<0$을 만족시키는 정수 m은 무수히 많다.

(iv) $p>2$인 짝수일 때



함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

$2\le x\le p$일 때 $f(x)\le0$이므로 $\int_m^{m+1}f(x)\,dx<0$을 만족시키는 정수 m은 2, …, $p-1$의 $(p-2)$개이다.

이때 $p-2\le10$에서 $p\le12$

즉, 자연수 p가 4, 6, 8, 10, 12일 때 주어진 조건을 만족시킨다.

(i)~(iv)에서 정수 m의 개수가 10 이하가 되도록 하는 모든 자연수 p는 2, 4, 6, 8, 10, 12이므로 구하는 합은

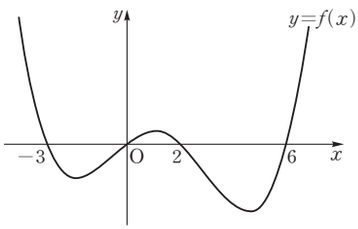
$2+4+6+8+10+12=42$

짝기출

사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)<0$

을 만족시키는 정수 m의 개수는?



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

답 ⑤

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

MEMO

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

MEMO

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

MEMO

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>

MEMO

이투스북
<이 책은 저작권법에 따라 보호받는 저작물이므로 무단전재와 무단복제를 금합니다.>