수매씽 개념

MATHING

정답 및 풀이

공통수학2

Ⅰ. 도형의 방정식

01. 평면좌표

개념 콕콕 **1** 두 점 사이의 거리 17쪽

1 답 (1) 2 (2) 8 (3) 4 (4) 9 (5) 4 (6) 2

(1) $\overline{AB}=|5-3|=2$

(2) $\overline{AB}=|7-(-1)|=8$

(3) $\overline{AB}=|-8-(-4)|=4$

(4) $\overline{AB}=|-3-6|=9$

(5) $\overline{OA}=|4|=4$

(6) $\overline{OA}=|-2|=2$

2 답 -5, 1

$\overline{AB}=3$이므로 $|a-(-2)|=3$

즉, $a+2=-3$ 또는 $a+2=3$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=1$

3 답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{13}$ (3) $2\sqrt{34}$ (4) 5 (5) 3 (6) 5

(1) $\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(5-3)^2}$
$=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(7-4)^2}$
$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

(3) $\overline{AB}=\sqrt{(-8-2)^2+\{2-(-4)\}^2}$
$=\sqrt{100+36}=2\sqrt{34}$

(4) $\overline{AB}=\sqrt{(-1-4)^2+(0-0)^2}=\sqrt{25}=5$

(5) $\overline{AB}=\sqrt{(0-0)^2+(2-5)^2}=\sqrt{9}=3$

(6) $\overline{OA}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$

4 답 10

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-3)^2}$
$=\sqrt{9+16}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{-4-(-1)\}^2}$
$=\sqrt{16+9}=5$

$\therefore \overline{AB}+\overline{BC}=5+5=10$

5 답 1

$\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(a+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(1-3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+2a+2=a^2-4a+8$

$6a=6 \qquad \therefore a=1$

6 답 3

두 점 $A(1,\ a)$, $B(-3,\ 1)$ 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(-3-1)^2+(1-a)^2}=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

예제 01 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 19쪽

01-1 답 $(0,\ -1)$

구하는 y축 위의 점을 $Q(0,\ b)$라고 하면

$\overline{AQ}=\sqrt{(0-2)^2+(b-3)^2}$
$=\sqrt{b^2-6b+13}$

$\overline{BQ}=\sqrt{(0-4)^2+\{b-(-3)\}^2}$
$=\sqrt{b^2+6b+25}$

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$b^2-6b+13=b^2+6b+25$

$12b=-12 \qquad \therefore b=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ -1)$이다.

01-2 답 (1) $(1,\ 2)$ (2) $(1,\ 1)$

(1) 구하는 점을 $P(a,\ b)$라고 하면 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 $b=2a$ …… ㉠

$\overline{AP}=\sqrt{(a-6)^2+\{b-(-3)\}^2}$
$=\sqrt{a^2-12a+b^2+6b+45}$

$\overline{BP}=\sqrt{(a-8)^2+(b-3)^2}$
$=\sqrt{a^2-16a+b^2-6b+73}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$a^2-12a+b^2+6b+45=a^2-16a+b^2-6b+73$

$4a+12b=28$

$\therefore a+3b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

(2) 구하는 점을 $Q(a,\ b)$라고 하면 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로 $b=-a+2$ …… ㉠

$\overline{AQ}=\sqrt{(a-2)^2+(b-3)^2}$
$=\sqrt{a^2-4a+b^2-6b+13}$

$\overline{BQ}=\sqrt{(a-3)^2+(b-2)^2}$

$=\sqrt{a^2-6a+b^2-4b+13}$

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$a^2-4a+b^2-6b+13=a^2-6a+b^2-4b+13$

$2a-2b=0$

$\therefore a-b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1, b=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1, 1)$이다.

01-3 답 $\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2t)^2+\{2t-(-3)\}^2}$이므로

$\overline{AB}^2=(2t+1)^2+(2t+3)^2$

$=8t^2+16t+10$

$=8(t+1)^2+2$

$t=-1$일 때, $\overline{AB}^2$의 최솟값은 2이므로 구하는 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

예제 02 삼각형의 모양 21쪽

02-1 답 (1) $\angle B=90°$인 직각삼각형
(2) $\angle C=90°$이고, $\overline{BC}=\overline{CA}$인 직각이등변삼각형

(1) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-5)^2+(-2-1)^2}$

$=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$

$\overline{BC}=\sqrt{\{-3-(-1)\}^2+\{2-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$\overline{CA}=\sqrt{\{5-(-3)\}^2+(1-2)^2}$

$=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$

$\therefore \overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이다.

(2) 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(-5-1)^2}$

$=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$

$\overline{BC}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{-1-(-5)\}^2}$

$=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-3-1)^2+\{1-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

$\therefore \overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$, $\overline{BC}=\overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle C=90°$이고, $\overline{BC}=\overline{CA}$인 직각이등변삼각형이다.

02-2 답 ②

삼각형 ABC가 $\angle A=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$

이때

$\overline{AB}^2=(-2-2)^2+(-1-3)^2=32$

$\overline{BC}^2=\{4-(-2)\}^2+\{k-(-1)\}^2$

$=k^2+2k+37$

$\overline{CA}^2=(2-4)^2+(3-k)^2$

$=k^2-6k+13$

이므로

$k^2+2k+37=32+(k^2-6k+13)$

$8k=8 \quad \therefore k=1$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 빗변의 길이는

$\overline{BC}=\sqrt{1+2+37}=2\sqrt{10}$

02-3 답 $2(\sqrt{26}+\sqrt{13})$

직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 한 점 P를 $P(2a, a)$라고 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(2a-1)^2+(a-2)^2=(2a-5)^2+(a-8)^2$

$5a^2-8a+5=5a^2-36a+89$

$28a=84 \quad \therefore a=3$

즉, 점 P의 좌표는 $(6, 3)$이므로

$\overline{AP}=\sqrt{26}$, $\overline{BP}=\sqrt{26}$, $\overline{AB}=2\sqrt{13}$

따라서 삼각형 PAB의 둘레의 길이는 $2(\sqrt{26}+\sqrt{13})$이다.

개념 콕콕 2 선분의 내분 27쪽

1 답 (1) 3 (2) 3 (3) 3 (4) D

2 답 (1) P(5) (2) P(1) (3) M(3)

(1) $P\left(\frac{2\times9+1\times(-3)}{2+1}\right) \quad \therefore P(5)$

(2) $P\left(\frac{1\times9+2\times(-3)}{1+2}\right) \quad \therefore P(1)$

(3) $M\left(\frac{-3+9}{2}\right) \quad \therefore M(3)$

3 답 (1) P(1, 5) (2) P(−1, 3) (3) M(0, 4)

(1) $P\left(\frac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}, \frac{2\times7+1\times1}{2+1}\right)$

$\therefore P(1, 5)$

(2) $P\left(\dfrac{1\times3+2\times(-3)}{1+2}, \dfrac{1\times7+2\times1}{1+2}\right)$

$\therefore P(-1, 3)$

(3) $M\left(\dfrac{-3+3}{2}, \dfrac{1+7}{2}\right)$ $\qquad \therefore M(0, 4)$

4 답 (1) $G(-1, 3)$ (2) $G(1, 2)$

(1) $G\left(\dfrac{-3+(-4)+4}{3}, \dfrac{7+3+(-1)}{3}\right)$

$\therefore G(-1, 3)$

(2) $G\left(\dfrac{-2+2+3}{3}, \dfrac{2+5+(-1)}{3}\right)$

$\therefore G(1, 2)$

예제 03 선분의 내분점 29쪽

03-1 답 $m=5$, $n=2$

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2m-5n}{m+n}, \dfrac{8m-n}{m+n}\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$\dfrac{2m-5n}{m+n}=0$ $\qquad \therefore 2m=5n$

따라서 $m:n=5:2$이고 m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=5$, $n=2$

03-2 답 ②

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{6m-3n}{m+n}, \dfrac{-4m+2n}{m+n}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$\dfrac{-4m+2n}{m+n}=0$ $\qquad \therefore n=2m$

따라서 $m:n=1:2$이고 m, n은 서로소인 자연수이므로

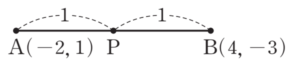
$m=1$, $n=2$

$\therefore m-n=1-2=-1$

03-3 답 $(1, -1)$, $(7, -5)$

$\overline{AB}=2\overline{BP}$에서 $\overline{AB}:\overline{BP}=2:1$이므로 점 P가 선분 AB 위의 점인 경우와 선분 AB의 연장선 위의 점인 경우로 나눈다.

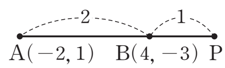
(i) 점 P가 선분 AB 위에 있는 경우



$\overline{AP}:\overline{BP}=1:1$에서 점 P는 선분 AB의 중점이므로

$P\left(\dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{1+(-3)}{2}\right)$ $\qquad \therefore P(1, -1)$

(ii) 점 P가 선분 AB의 연장선 위에 있는 경우



점 B가 선분 $\overline{AP}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 $P(a, b)$라고 하면 점 B의 좌표는

$B\left(\dfrac{2\times a+1\times(-2)}{2+1}, \dfrac{2\times b+1\times1}{2+1}\right)$

즉, $4=\dfrac{2a-2}{3}$, $-3=\dfrac{2b+1}{3}$이므로

$a=7$, $b=-5$ $\qquad \therefore P(7, -5)$

(i), (ii)에서 구하는 점 P의 좌표는

$(1, -1)$, $(7, -5)$

⊕ 보충 설명

직선 AB 위에 $\overline{AB}=2\overline{BP}$, 즉 $\overline{AB}:\overline{BP}=2:1$인 점 P가 선분 AB 위에만 있는 것이 아니므로 점 P가 선분 AB를 $1:1$로 내분할 때와 선분 AB의 연장선 위에 점 P가 있을 때의 2가지 경우를 모두 생각해야 한다.

예제 04 삼각형의 무게중심 31쪽

04-1 답 $\left(\dfrac{7}{3}, -\dfrac{7}{3}\right)$

선분 AB의 중점 D의 좌표는

$\left(\dfrac{3+(-1)}{2}, \dfrac{1+(-3)}{2}\right)$ $\qquad \therefore D(1, -1)$

선분 BC의 중점 E의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{-3+(-5)}{2}\right)$ $\qquad \therefore E(2, -4)$

선분 CA의 중점 F의 좌표는

$\left(\dfrac{5+3}{2}, \dfrac{-5+1}{2}\right)$ $\qquad \therefore F(4, -2)$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{1+2+4}{3}, \dfrac{-1+(-4)+(-2)}{3}\right)$

$\therefore \left(\dfrac{7}{3}, -\dfrac{7}{3}\right)$

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 DEF의 무게중심은 일치하므로 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{3+(-1)+5}{3}, \frac{1+(-3)+(-5)}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$

04-2 답 (1, 2)

세 점 A, B, C의 좌표를 각각 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라고 하면 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이 P(−2, 2)이므로

$\frac{2x_2+x_1}{2+1}=-2$, $\frac{2y_2+y_1}{2+1}=2$

$\therefore 2x_2+x_1=-6$, $2y_2+y_1=6$ ······ ㉠

선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이 Q(3, −2)이므로

$\frac{2x_3+x_2}{2+1}=3$, $\frac{2y_3+y_2}{2+1}=-2$

$\therefore 2x_3+x_2=9$, $2y_3+y_2=-6$ ······ ㉡

선분 CA를 2 : 1로 내분하는 점이 R(2, 6)이므로

$\frac{2x_1+x_3}{2+1}=2$, $\frac{2y_1+y_3}{2+1}=6$

$\therefore 2x_1+x_3=6$, $2y_1+y_3=18$ ······ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$3(x_1+x_2+x_3)=9$, $3(y_1+y_2+y_3)=18$

$\therefore x_1+x_2+x_3=3$, $y_1+y_2+y_3=6$

따라서 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=1$, $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=2$이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 (1, 2)이다.

다른 풀이

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표를 구해 보면

$\left(\frac{-2+3+2}{3}, \frac{2+(-2)+6}{3}\right)$ $\therefore (1, 2)$

이때 삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 PQR의 무게중심은 일치하므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 (1, 2)이다.

04-3 답 26

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (1, 2)이므로

$\left(\frac{a+b+(-3)}{3}, \frac{-1+2+ab}{3}\right)$

에서 $\frac{a+b-3}{3}=1$, $\frac{1+ab}{3}=2$

$a+b-3=3$, $1+ab=6$

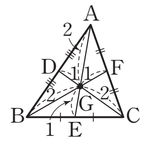
$\therefore a+b=6$, $ab=5$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=6^2-2\times5=26$

보충 설명

무게중심의 성질

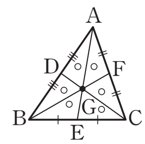
(1) 삼각형의 세 중선은 한 점(무게중심)에서 만나고 무게중심은 각 중선의 길이를 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분한다.



(2) 삼각형 ABC의 무게중심을 G라고 하면

$\triangle GAB=\triangle GBC=\triangle GCA$

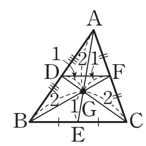
(3) 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점을 차례대로 D, E, F라고 하면



$\triangle GAF=\triangle GCF=\triangle GCE$
$=\triangle GBE=\triangle GBD$
$=\triangle GAD$

이때 (1)과 (2)는 다음과 같이 증명할 수 있다.

[증명] (1) 삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 중점을 차례대로 D, E, F라 하고 두 선분 BF, DC의 교점을 G라고 하면 삼각형의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여



$\overline{DF} /\!/ \overline{BC}$, $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

즉, $\triangle GBC \backsim \triangle GFD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BG} : \overline{FG}=\overline{GC} : \overline{GD}=\overline{BC} : \overline{FD}=2 : 1$

(2) 삼각형 ABC에서 $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$이므로

$\triangle ABE=\frac{1}{2}\triangle ABC$

또한 $\overline{AG} : \overline{GE}=2 : 1$이므로

$\triangle GAB=\frac{2}{3}\triangle ABE$

$\therefore \triangle GAB=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{3}\triangle ABC$

같은 방법으로

$\triangle GBC=\frac{1}{3}\triangle ABC$, $\triangle GCA=\frac{1}{3}\triangle ABC$

이므로

$\triangle GAB=\triangle GBC=\triangle GCA$

예제 05 평행사변형의 성질 33쪽

05-1 답 4

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

이때 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+2}{2}, \frac{4+5}{2}\right)$ $\therefore \left(\frac{a+2}{2}, \frac{9}{2}\right)$

선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$

$\therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$

따라서 $\frac{a+2}{2}=\frac{1}{2}, \frac{b+4}{2}=\frac{9}{2}$이므로

$a=-1, b=5$

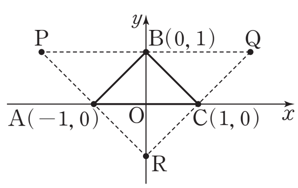
$\therefore a+b=-1+5=4$

보충 설명

평행사변형의 성질
(1) 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.
(2) 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.
(3) 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

05-2 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

다음 그림과 같이 주어진 세 점을 각각 A$(-1, 0)$, B$(0, 1)$, C$(1, 0)$이라 하고 세 선분 BC, CA, AB에 각각 평행하고 세 점 A, B, C를 지나는 직선들의 교점을 각각 P, Q, R이라고 하면 세 사각형 ACBP, ACQB, ABCR은 모두 평행사변형이다.



즉, 주어진 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 되려면 점 (a, b)는 세 점 P, Q, R 중 하나이어야 한다.

(i) 점 (a, b)가 점 P의 위치에 있는 경우

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 선분 CP의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$이고, 두 대각선의 중점이 일치하므로

$-\frac{1}{2}=\frac{1+a}{2}, \frac{1}{2}=\frac{0+b}{2}$

$\therefore a=-2, b=1$

즉, 점 P의 좌표가 $(-2, 1)$일 때, 사각형 ACBP는 평행사변형이다.

(ii) 점 (a, b)가 점 Q의 위치에 있는 경우

선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 선분 AQ의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$이고, 두 대각선의 중점이 일치하므로

$\frac{1}{2}=\frac{-1+a}{2}, \frac{1}{2}=\frac{0+b}{2}$

$\therefore a=2, b=1$

즉, 점 Q의 좌표가 $(2, 1)$일 때, 사각형 ACQB는 평행사변형이다.

(iii) 점 (a, b)가 점 R의 위치에 있는 경우

선분 AC의 중점의 좌표는 $(0, 0)$, 선분 BR의 중점의 좌표는 $\left(\frac{0+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$이고, 두 대각선의 중점이 일치하므로

$0=\frac{0+a}{2}, 0=\frac{1+b}{2}$

$\therefore a=0, b=-1$

즉, 점 R의 좌표가 $(0, -1)$일 때, 사각형 ABCR은 평행사변형이다.

(i)~(iii)에서 주어진 사각형이 평행사변형일 때, 점 (a, b)가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

05-3 답 2, 42

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

이때 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+2}{2}, \frac{2+(-3)}{2}\right)$

선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{b+3}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)$

이므로

$a+2=b+3$

$\therefore a-b=1$ …… ㉠

또한 마름모는 이웃하는 두 변의 길이가 같으므로

$\overline{AD}=\overline{CD}$에서

$\sqrt{(3-a)^2+(1-2)^2}=\sqrt{(3-2)^2+\{1-(-3)\}^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$ …… ㉡

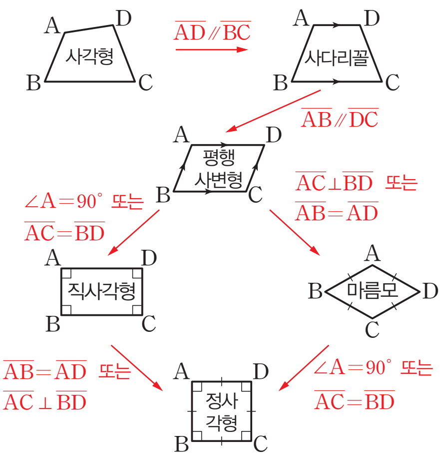
㉡을 ㉠에 각각 대입하면

$a=-1, b=-2$ 또는 $a=7, b=6$

$\therefore ab=(-1)\times(-2)=2$ 또는 $ab=7\times6=42$

보충 설명

1. 여러 가지 사각형의 성질
   (1) 직사각형, 마름모, 정사각형은 모두 평행사변형이다.
   (2) 직사각형의 두 대각선은 길이가 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.
   (3) 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.
   (4) 정사각형의 두 대각선은 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다.
2. 사각형 사이의 관계
   (1) 평행사변형에서 한 내각의 크기가 90°이거나 두 대각선의 길이가 같으면 직사각형이다.
   (2) 평행사변형에서 이웃하는 두 변의 길이가 같거나 두 대각선이 서로 수직이면 마름모이다.
   (3) 평행사변형이 (2), (3)을 모두 만족시키면 정사각형이다.



예제 06 삼각형의 내각의 이등분선 35쪽

06-1 답 $\mathrm{D}\left(3,\ -\frac{14}{5}\right)$

선분 AD가 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(-2-2)^2}=4\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\sqrt{(9-3)^2+(-4-2)^2}=6\sqrt{2}$

이므로

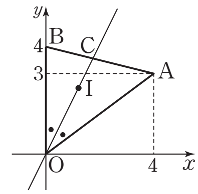
$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=4\sqrt{2}:6\sqrt{2}=2:3$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$를 $2:3$으로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2\times9+3\times(-1)}{2+3},\ \frac{2\times(-4)+3\times(-2)}{2+3}\right)$$

$\therefore \mathrm{D}\left(3,\ -\frac{14}{5}\right)$

06-2 답 ②



오른쪽 그림과 같은 삼각형 OAB에서 직선 OI는 $\angle AOB$의 이등분선이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{OA}:\overline{OB}$

$\overline{OA}=\sqrt{4^2+3^2}=5,\ \overline{OB}=4$

이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{OA}:\overline{OB}=5:4$

즉, 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$는 $\overline{AB}$를 $5:4$로 내분하는 점이므로

$$a=\frac{5\times0+4\times4}{5+4}=\frac{16}{9},\quad b=\frac{5\times4+4\times3}{5+4}=\frac{32}{9}$$

$\therefore a+b=\frac{16}{3}$

06-3 답 73

삼각형 ABC에서 $\overline{AP}$는 $\angle A$의 외각의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BP}:\overline{CP}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-2)^2+(-8-4)^2}=13$

$\overline{AC}=\sqrt{(6-2)^2+(1-4)^2}=5$

이므로

$\overline{BP}:\overline{CP}=\overline{AB}:\overline{AC}=13:5$

즉, 점 C는 $\overline{BP}$를 $8:5$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{8\times x+5\times(-3)}{8+5},\ \frac{8\times y+5\times(-8)}{8+5}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{8x-15}{13},\ \frac{8y-40}{13}\right)$$

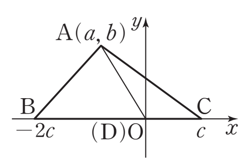
이때 $\mathrm{C}(6,\ 1)$이므로

$$\frac{8x-15}{13}=6,\ \frac{8y-40}{13}=1 \qquad \therefore x=\frac{93}{8},\ y=\frac{53}{8}$$

$$\therefore 4(x+y)=4\times\left(\frac{93}{8}+\frac{53}{8}\right)=73$$

예제 07 좌표를 이용한 도형의 성질의 증명 37쪽

07-1 답 풀이 참조



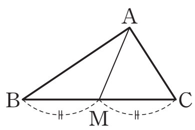
오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 이 좌표평면의 원점이 된다.

이때 $\overline{BD}:\overline{CD}=2:1$이므로 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 각각 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(-2c,\ 0)$, $\mathrm{C}(c,\ 0)$이라고 하면

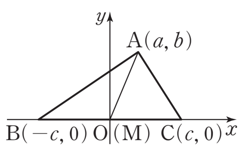
$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2$
$=\{(-2c-a)^2+(-b)^2\}+2\{(c-a)^2+(-b)^2\}$
$=(a^2+4ac+4c^2+b^2)+(2a^2-4ac+2c^2+2b^2)$
$=3a^2+3b^2+6c^2$
$=3(a^2+b^2+2c^2)$
또한 $\overline{AD}^2=a^2+b^2$, $\overline{DC}^2=c^2$이므로
$\overline{AD}^2+2\overline{DC}^2=(a^2+b^2)+2c^2$
$\qquad\qquad\quad=a^2+b^2+2c^2$
$\therefore\ \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{DC}^2)$

⊕ 보충 설명

파포스의 정리(중선정리) – 기하학과 대수학의 만남
도형을 좌표평면으로 옮겨 놓으면, 도형에 대한 여러 가지 문제들을 곱셈 공식이나 다항식의 계산을 이용하여 풀 수 있다.
예를 들어 삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라고 할 때, 삼각형의 모양에 상관없이

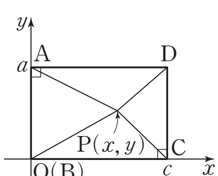


$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$
이 성립한다. 이를 중선정리 또는 파포스(Pappos)의 정리라고 한다. 이 정리는 변의 길이의 제곱과 관련되어 있어 단순한 닮음비나 합동으로는 증명하기가 쉽지 않다.
하지만 오른쪽 그림과 같이 주어진 삼각형의 변 BC를 x축으로 하고 점 M을 원점 O로 하는 좌표평면을 도입하여 생각해 보면 의외로 간단히 증명할 수 있다. 데카르트는 좌표평면을 이용하여 기하학(도형)의 문제를 대수적인 방법(방정식)으로 해결하는 아이디어를 처음으로 생각해 낸 사람이다. 이로써 기하학의 많은 문제가 해결되었고, 반대로 대수학의 문제 역시 기하학을 이용하여 쉽게 풀 수 있게 되었다.



07-2 답 풀이 참조

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 이 좌표평면의 원점이 된다.



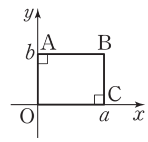
직사각형 ABCD의 네 꼭짓점을 각각 $A(0, a)$, $B(0, 0)$, $C(c, 0)$, $D(c, a)$라 하고 임의의 점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\{x^2+(y-a)^2\}+\{(x-c)^2+y^2\}$
$\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=(x^2+y^2)+\{(x-c)^2+(y-a)^2\}$
$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$

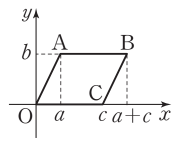
⊕ 보충 설명

사각형에 대한 문제를 좌표를 이용하여 풀 때에는 다음 그림과 같이 좌표축을 잡으면 된다.

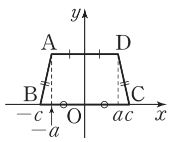
① 직사각형



② 평행사변형

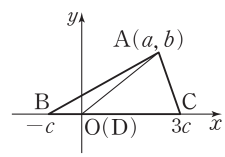


③ 등변사다리꼴



07-3 답 4

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 이 좌표평면의 원점이 된다.



삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(3c, 0)$이라고 하면
$\overline{AB}^2=(-c-a)^2+(-b)^2$
$\qquad=a^2+b^2+c^2+2ac$
$\overline{AC}^2=(3c-a)^2+(-b)^2$
$\qquad=a^2+b^2+9c^2-6ac$
$\therefore\ 3\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$
$\quad=3(a^2+b^2+c^2+2ac)+a^2+b^2+9c^2-6ac$
$\quad=4(a^2+b^2+3c^2)$
또한 $\overline{AD}^2=a^2+b^2$, $\overline{BD}^2=c^2$이므로
$\overline{AD}^2+3\overline{BD}^2=a^2+b^2+3c^2$
따라서 $3\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=4(\overline{AD}^2+3\overline{BD}^2)$이므로
$k=4$

기본 다지기 38쪽 ~ 39쪽

1 (1) 43 (2) 2 : 3 **2** $(-2, 1)$
3 (1) $(3, -2)$ (2) $(2, -2)$ **4** 6 **5** 9
6 $(7, -3)$ **7** 16 **8** $(4, 7)$ **9** 6
10 $(5, 2)$

1 (1) 점 P가 x축 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a,\ 0)$이라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$

$=\{(a-1)^2+(0-4)^2\}+\{(a-3)^2+(0-5)^2\}$

$=2a^2-8a+51$

$=2(a-2)^2+43$

따라서 $a=2$일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값은 43이다.

(2) 점 P가 x축 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a,\ 0)$이라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=\{(a-4)^2+(0-2)^2\}+a^2$

$=2a^2-8a+20$

$=2(a-2)^2+12$

$0\le a\le 5$에서 $a=2$일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값은 최소이다.

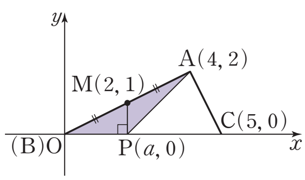
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는 $(2,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{CP}}=2:3$

다른 풀이

(2) 다음 그림과 같이 변 AB의 중점을 M이라 하고, 삼각형 ABP에서 중선정리를 이용하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2(\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{AM}}^2)$



이때 선분 AM의 길이가 일정하므로 선분 PM의 길이가 최소가 되어야 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 된다.

즉, 점 $\mathrm{M}(2,\ 1)$에서 변 BC에 내린 수선의 발이 점 P일 때, 선분 PM의 길이가 최소이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=2,\ \overline{\mathrm{CP}}=3$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{CP}}=2:3$

보충 설명

(1) 이차식의 최댓값 또는 최솟값을 구할 때, 이차식을 $a(x-b)^2+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수) 꼴로 변형하면

① $a>0$이면 $x=b$일 때, 최솟값 c를 가지고 최댓값은 없다.

② $a<0$이면 $x=b$일 때, 최댓값 c를 가지고 최솟값은 없다.

(2) 점 P는 변 BC 위에 있는 점이라고 하였으므로 점 P의 x좌표는 두 점 B, C의 x좌표이거나 두 수 0과 5 사이의 값이다.

2 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$

$=\{(a+3)^2+(b-5)^2\}+\{(a+5)^2+(b+3)^2\}$
$\qquad+\{(a-2)^2+(b-1)^2\}$

$=3a^2+12a+3b^2-6b+73$

$=3(a^2+4a+4)+3(b^2-2b+1)+58$

$=3(a+2)^2+3(b-1)^2+58$

이때 좌표평면 위의 점 P에 대하여 x좌표와 y좌표의 값은 서로 영향을 주지 않으므로 $a,\ b$는 서로의 값에 관계없이 어떤 값이든 가질 수 있다.

따라서 $a=-2,\ b=1$일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$의 값이 최소이므로 구하는 점 P의 좌표는 $(-2,\ 1)$이다.

보충 설명

세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$의 값이 최소가 되게 하는 점 P의 위치를 구해 보자.

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$

$=(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(a-x_2)^2+(b-y_2)^2$
$\qquad+(a-x_3)^2+(b-y_3)^2$

$=3a^2-2(x_1+x_2+x_3)a+{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2$
$\qquad+3b^2-2(y_1+y_2+y_3)b+{y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2$

$=3\left(a-\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(b-\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+\cdots$

따라서 $a=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ b=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$일 때,

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$의 값이 최소이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ ← △ABC의 무게중심

따라서 좌표평면 위의 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$의 값이 최소가 되게 하는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

3 외심은 삼각형의 외접원의 중심으로 외심에서 삼각형의 세 꼭짓점까지의 거리는 모두 외접원의 반지름의 길이이므로 서로 같다.

즉, 삼각형 ABC의 외심을 점 $\mathrm{D}(a,\ b)$라고 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$

(1) $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2$이므로

$(a-0)^2+(b-2)^2=\{a-(-1)\}^2+\{b-(-5)\}^2$

$a^2+b^2-4b+4=a^2+2a+b^2+10b+26$

$2a+14b=-22\qquad\therefore\ a+7b=-11\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또한 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2$이므로

$(a-0)^2+(b-2)^2=(a-3)^2+(b-3)^2$
$a^2+b^2-4b+4=a^2-6a+b^2-6b+18$
$6a+2b=14 \quad \therefore 3a+b=7$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=3,\ b=-2$
따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $(3,\ -2)$이다.

(2) $\overline{AD}=\overline{BD}$에서 $\overline{AD}^2=\overline{BD}^2$이므로
$\{a-(-1)\}^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$
a^2+2a+b^2-4b+5
$=a^2-4a+b^2-6b+13$
$6a+2b=8 \quad \therefore 3a+b=4$ ⋯⋯ ㉠
또한 $\overline{BD}=\overline{CD}$에서 $\overline{BD}^2=\overline{CD}^2$이므로
$(a-2)^2+(b-3)^2=(a-6)^2+(b-1)^2$
$a^2-4a+b^2-6b+13=a^2-12a+b^2-2b+37$
$8a-4b=24 \quad \therefore 2a-b=6$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=2,\ b=-2$
따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $(2,\ -2)$이다.

4 삼각형 ABC가 정삼각형이므로
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$
$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로
$\{2-(-2)\}^2+(-1-1)^2=(a-2)^2+\{b-(-1)\}^2$
$20=a^2-4a+b^2+2b+5$
$\therefore a^2-4a+b^2+2b=15$ ⋯⋯ ㉠
$\overline{AB}=\overline{CA}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$이므로
$\{2-(-2)\}^2+(-1-1)^2=(-2-a)^2+(1-b)^2$
$20=a^2+4a+b^2-2b+5$
$\therefore a^2+4a+b^2-2b=15$ ⋯⋯ ㉡
㉡−㉠을 하면 $8a-4b=0$
$\therefore 2a=b$
이것을 ㉠에 대입하면
$a^2-4a+4a^2+4a=15,\ a^2=3$
$\therefore ab=a\times 2a=2a^2=2\times 3=6$

5 선분 AB를 $5:b$로 내분하는 점의 좌표가 $(7,\ 6)$이므로
$\dfrac{5\times 16+b\times(-8)}{5+b}=7,\ \dfrac{5\times a+b\times 6}{5+b}=6$에서
$80-8b=35+7b,\ 5a+6b=30+6b$
$15b=45,\ 5a=30 \quad \therefore a=6,\ b=3$
$\therefore a+b=6+3=9$

6 $3\overline{PA}=2\overline{PB}$에서 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$이고 점 P는 선분 AB 위의 점이므로 점 P는 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이다.
이때 점 P의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로
$\dfrac{2\times a+3\times(-3)}{2+3}=1,\ \dfrac{2\times b+3\times 2}{2+3}=0$에서
$2a-9=5,\ 2b+6=0$
$\therefore a=7,\ b=-3$
따라서 구하는 점 B의 좌표는 $(7,\ -3)$이다.

7 $5x=3a+2c$를 x에 대하여 정리하면
$x=\dfrac{3a+2c}{5}=\dfrac{2c+3a}{2+3}$
또한 $5y=3b+2d$를 y에 대하여 정리하면
$y=\dfrac{3b+2d}{5}=\dfrac{2d+3b}{2+3}$
즉, 점 P의 좌표는
$\left(\dfrac{2c+3a}{2+3},\ \dfrac{2d+3b}{2+3}\right)$
이므로 점 P는 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이다.
$\therefore \overline{AP}=\dfrac{2}{5}\overline{AB}=\dfrac{2}{5}\times 40=16$

보충 설명
$\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$이므로
$\overline{AP}=\dfrac{2}{5}\overline{AB}$이고, $\overline{BP}=\dfrac{3}{5}\overline{AB}$이다.

8 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구해 보면
$\dfrac{1+x_1+x_2}{3}=3,\ \dfrac{-2+y_1+y_2}{3}=4$
$\therefore x_1+x_2=8,\ y_1+y_2=14$
따라서 선분 BC의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right) \quad \therefore (4,\ 7)$

9 두 점 B, C의 좌표를 각각 $B(a,\ b)$, $C(c,\ d)$라고 하면 두 변 AB, AC의 중점의 좌표가 각각 $M(0,\ 3)$, $N(-3,\ 6)$이므로
$\dfrac{-6+a}{2}=0,\ \dfrac{0+b}{2}=3$
$\dfrac{-6+c}{2}=-3,\ \dfrac{0+d}{2}=6$
$\therefore a=6,\ b=6,\ c=0,\ d=12$
따라서 세 점 $A(-6,\ 0)$, $B(6,\ 6)$, $C(0,\ 12)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가

$(x,\ y)$이므로

$x=\dfrac{-6+6+0}{3}=0,\ y=\dfrac{0+6+12}{3}=6$

$\therefore\ x+y=6$

10 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.
점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{1+2}{2},\ \dfrac{4-1}{2}\right)$

선분 BD의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{a-2}{2},\ \dfrac{b+1}{2}\right)$

즉, $\dfrac{a-2}{2}=\dfrac{1+2}{2},\ \dfrac{b+1}{2}=\dfrac{4-1}{2}$이므로

$a=5,\ b=2$

따라서 구하는 점 D의 좌표는 $(5,\ 2)$이다.

실력 다지기 40쪽~41쪽

11 ④ **12** ⑤ **13** ④ **14** 1 **15** $2\sqrt{5}$
16 52
17 (1) 5
(2) $(0,\ 0)$, $(1+\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3})$, $(1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3})$, $(-1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$, $(-1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$
18 14
19 (1) $(2,\ 1)$ (2) $(6,\ 3)$, $(4,\ -7)$, $(-4,\ 7)$
20 $\sqrt{58}$

11 **접근 방법** | 점 P가 선분 AB 위에 있고 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이므로 점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점임을 이용한다.

점 P가 선분 AB를 $2:1$로 내분하고, 점 P의 y좌표는 0이므로

$\dfrac{2\times k+1\times 4}{2+1}=\dfrac{2k+4}{3}=0$

$2k+4=0 \qquad \therefore\ k=-2$

12 **접근 방법** | 점 P가 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하므로 점 P의 좌표를 구한 후, 제1사분면 위의 점은 x좌표와 y좌표가 모두 양수임을 이용한다.

선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$a=\dfrac{t\times 5+(1-t)\times(-3)}{t+(1-t)}=8t-3$

$b=\dfrac{t\times(-1)+(1-t)\times 5}{t+(1-t)}=-6t+5$

이때 제1사분면 위의 점은 x좌표와 y좌표가 모두 양수이므로

$8t-3>0,\ -6t+5>0$

$\therefore\ t>\dfrac{3}{8},\ t<\dfrac{5}{6}$

따라서 구하는 t의 값의 범위는

$\dfrac{3}{8}<t<\dfrac{5}{6}$

13 **접근 방법** | 두 도로가 수직으로 만나고 있으므로 두 도로를 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 두 학생 A, B를 각각 두 점 A, B로 생각하여 그 위치를 좌표로 나타낼 수 있다.

동서를 이은 도로는 x축, 남북을 이은 도로는 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 두 도로의 교차점은 이 좌표평면의 원점이 된다.
두 학생 A, B를 각각 두 점 A, B로 생각하면 두 학생 A, B의 처음의 위치는 각각 $A(6,\ 0)$, $B(0,\ -4)$이고 t시간 후의 위치는 각각 $A(6-4t,\ 0)$, $B(0,\ -4+2t)$이므로 t시간 후의 두 점 A, B 사이의 거리 d는

$$\begin{aligned} d&=\sqrt{(6-4t)^2+(4-2t)^2} \\ &=\sqrt{20t^2-64t+52} \\ &=\sqrt{20\left(t^2-\frac{16}{5}t\right)+52} \\ &=\sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

따라서 두 학생 A, B 사이의 거리는 출발한 지 $t=\dfrac{8}{5}=1.6$(시간) 후에 최소가 된다.

14 **접근 방법** | 수직선 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.

$|\overline{PA}-\overline{PB}|\geq 0$이므로 $|\overline{PA}-\overline{PB}|$의 값이 최소일 때는 $|\overline{PA}-\overline{PB}|=0$, 즉 $\overline{PA}=\overline{PB}$일 때이다.

$|a+1|=|a-3|$에서 $a+1=\pm(a-3)$

(i) $a+1=a-3$일 때,
$0\times a=-4$를 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $a+1=-(a-3)$일 때,
$2a=2 \qquad \therefore\ a=1$

(i), (ii)에서 $a=1$

15 **접근 방법** | 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$임을 이용한다.

좌표평면 위에 세 점을 각각 $O(0, 0)$, $P(a, b)$, $Q(4, -2)$라고 하면

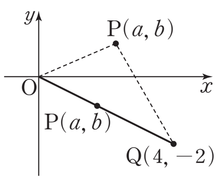
$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}$

이므로 선분 OP의 길이이고

$\sqrt{(a-4)^2+(b+2)^2}=\sqrt{(a-4)^2+\{b-(-2)\}^2}$

이므로 선분 QP의 길이이다.

즉, 주어진 식의 최솟값은 $\overline{OP}+\overline{PQ}$의 최솟값과 같고, 오른쪽 그림과 같이 세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있을 때, $\overline{OP}+\overline{PQ}$의 값은 최소이다.



$\therefore \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b+2)^2}=\overline{OP}+\overline{PQ}\geq\overline{OQ}$

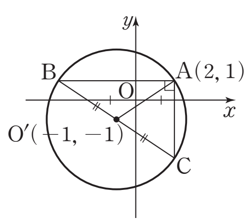
따라서 구하는 최솟값은 선분 OQ의 길이와 같으므로

$\overline{OQ}=\sqrt{(4-0)^2+(-2-0)^2}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

16 **접근 방법** | 삼각형 ABC의 외심이 선분 BC 위에 있으므로 삼각형 ABC는 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이다. 또한 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점까지의 거리는 같음을 이용한다.

삼각형 ABC의 외심을 O′이라고 하면 외심 O′에서 각 꼭짓점까지의 거리가 같으므로 점 O′은 변 BC의 중점이다.



따라서 외심의 성질에 의하여 삼각형 ABC는 변 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

이때 $\overline{BC}=2\overline{O'A}$에서

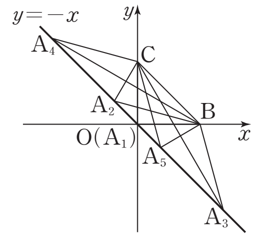
$\overline{BC}^2=4\overline{O'A}^2$

$=4\times[\{2-(-1)\}^2+\{1-(-1)\}^2]=52$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=52$

17 **접근 방법** | 좌표평면 위에 점 B, C를 나타낸 후 이등변삼각형 ABC가 되도록 직선 $y=-x$ 위에 점 A를 잡는다.

(1) 다음 그림에서 $\overline{A_1B}=\overline{A_1C}$, $\overline{BA_2}=\overline{BC}$, $\overline{BA_3}=\overline{BC}$, $\overline{CA_4}=\overline{CB}$, $\overline{CA_5}=\overline{CB}$라고 하면 점 A가 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5일 때, 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 된다.



따라서 구하는 점 A의 개수는 5이다.

(2) 점 A는 직선 $y=-x$ 위의 점이므로 $A(a, -a)$라고 하면

(i) $\overline{AB}=\overline{AC}$일 때, $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$이므로

$(a-2)^2+(-a-0)^2=(a-0)^2+(-a-2)^2$

$\therefore a=0$

$\therefore A(0, 0)$

(ii) $\overline{BA}=\overline{BC}$일 때, $\overline{BA}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a-2)^2+(-a-0)^2=(0-2)^2+(2-0)^2$

$a^2-2a-2=0$

$\therefore a=1\pm\sqrt{3}$

$\therefore A(1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$ 또는 $A(1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$

(iii) $\overline{CA}=\overline{CB}$일 때, $\overline{CA}^2=\overline{CB}^2$이므로

$(a-0)^2+(-a-2)^2=(2-0)^2+(0-2)^2$

$a^2+2a-2=0$

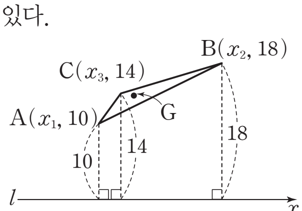
$\therefore a=-1\pm\sqrt{3}$

$\therefore A(-1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$ 또는 $A(-1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$

(i)~(iii)에서 구하는 점 A의 좌표는 $(0, 0)$, $(1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$, $(1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$, $(-1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$, $(-1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$

18 **접근 방법** | 직선 l을 x축으로 하는 좌표평면을 잡으면 세 점 A, B, C와 직선 l, 즉 x축 사이의 거리가 각각 10, 18, 14이므로 세 점 A, B, C의 y좌표가 각각 10, 18, 14가 될 수 있다.

직선 l을 x축으로 하는 좌표평면을 잡으면 세 점 A, B, C와 직선 l 사이의 거리는 각각 세 점 A, B, C의 y좌표와 같으므로 $A(x_1, 10)$, $B(x_2, 18)$, $C(x_3, 14)$라고 할 수 있다.



이때 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{10+18+14}{3}\right)$

$\therefore$ G$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, 14\right)$

따라서 점 G와 직선 l 사이의 거리는 점 G의 y좌표와 같으므로 14이다.

⊕ 보충 설명

점 G와 직선 l 사이의 거리는 삼각형과 직선을 좌표평면 위에 올려 놓고 생각하여도 변하지 않는다. 따라서 직선 l을 x축으로 잡고 좌표를 정하여도 점 G와 직선 l 사이의 거리는 변하지 않는다.

19 **접근 방법** | 조건을 만족시키는 점 P가 삼각형 OAB의 내부에 있으면 점 P는 삼각형 OAB의 무게중심임을 이용하여 좌표를 구하고, 삼각형 OAB의 외부에 있으면 네 점 O, A, B, P를 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형임을 이용한다.

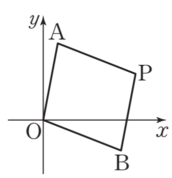
(1) 점 P는 삼각형 OAB의 무게중심이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{0+1+5}{3}, \dfrac{0+5+(-2)}{3}\right)$ $\quad\therefore$ P$(2, 1)$

(2) 점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

(i) 사각형 OBPA가 평행사변형일 때,

두 대각선 AB, OP의 중점이 일치하므로



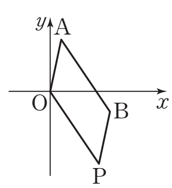
$\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+5}{2}, \dfrac{y}{2}=\dfrac{5-2}{2}$

$\therefore x=6, y=3$

$\therefore$ P$(6, 3)$

(ii) 사각형 OPBA가 평행사변형일 때,

두 대각선 OB, AP의 중점이 일치하므로



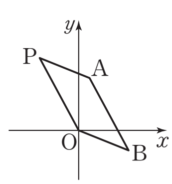
$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{5}{2}, \dfrac{y+5}{2}=\dfrac{-2}{2}$

$\therefore x=4, y=-7$

$\therefore$ P$(4, -7)$

(iii) 사각형 OPAB가 평행사변형일 때,

두 대각선 OA, BP의 중점이 일치하므로



$\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{y-2}{2}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore x=-4, y=7$

$\therefore$ P$(-4, 7)$

(i)~(iii)에서 점 P의 좌표는 $(6, 3)$, $(4, -7)$, $(-4, 7)$이다.

20 **접근 방법** | 중선정리를 이용하여 문제를 푼다.

$\overline{\mathrm{BM}}=8$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$에서

$10^2+12^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+8^2)$

$\therefore \overline{\mathrm{AM}}^2=58 \qquad \therefore \overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{58}$

기출 다지기 42쪽

21 ③ **22** 19 **23** ⑤ **24** 29

21 **접근 방법** | 삼각형의 한 내각의 이등분선이 대변의 중점을 지나면 이등변삼각형임을 이용한다.

$\angle$ABC의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지나므로 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{BA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$(-3-0)^2+(0-a)^2=4^2$, $9+a^2=16$

$a^2=7 \qquad \therefore a=\sqrt{7}$ 또는 $a=-\sqrt{7}$

이때 $a>0$이므로 $a=\sqrt{7}$

22 **접근 방법** | 마름모는 네 변의 길이가 모두 같고, 두 대각선의 중점이 일치하므로 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 등식을 세운다.

마름모 OABC에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$, 즉 $\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{OC}}^2$이므로

$a^2+7^2=5^2+5^2$

$a^2=1 \qquad \therefore a=1$ ($\because a>0$)

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선 AC, OB의 중점은 일치한다.

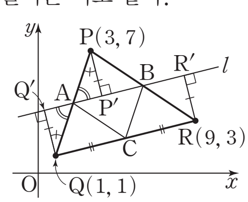
$\dfrac{1+5}{2}=\dfrac{0+b}{2}$, $\dfrac{7+5}{2}=\dfrac{0+c}{2}$에서

$b=6, c=12$

$\therefore a+b+c=1+6+12=19$

23 **접근 방법** | 직선 l이 세 점 P, Q, R로부터 같은 거리에 있으므로 세 점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′이라고 하면 세 선분 PP′, QQ′, RR′의 길이는 서로 같다.

다음 그림과 같이 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′이라고 하면 세 선분 PP′, QQ′, RR′의 길이는 서로 같다.



두 삼각형 PAP′, QAQ′에서

$\overline{QQ'}=\overline{PP'}$

$\angle PAP'=\angle QAQ'$ (맞꼭지각)

$\angle AP'P=\angle AQ'Q=90°$

이므로 $\triangle PAP' \equiv \triangle QAQ'$ (ASA 합동)

즉, 점 A는 선분 PQ의 중점이다.

같은 방법으로

$\triangle PBP' \equiv \triangle RBR'$ (ASA 합동)

이므로 점 B는 선분 PR의 중점이다.

즉, 세 점 A, B, C는 각각 세 선분 PQ, PR, QR의 중점이므로

$A\left(\frac{3+1}{2}, \frac{7+1}{2}\right)$ $\quad\therefore A(2, 4)$

$B\left(\frac{3+9}{2}, \frac{7+3}{2}\right)$ $\quad\therefore B(6, 5)$

$C\left(\frac{1+9}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ $\quad\therefore C(5, 2)$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 $G(x, y)$의 좌표는

$\left(\frac{2+6+5}{3}, \frac{4+5+2}{3}\right)$ $\quad\therefore \left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right)$

따라서 $x=\frac{13}{3}$, $y=\frac{11}{3}$이므로

$x+y=\frac{13}{3}+\frac{11}{3}=8$

보충 설명

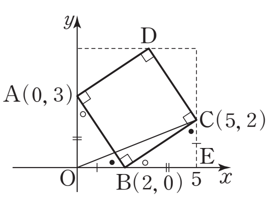
삼각형의 합동 조건

(1) 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때 두 삼각형은 서로 합동이다. (SSS 합동)

(2) 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때 두 삼각형은 서로 합동이다. (SAS 합동)

(3) 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때 두 삼각형은 서로 합동이다. (ASA 합동)

24 **접근 방법** | 삼각형의 합동을 이용하여 점 C의 좌표를 구한 후, 두 점 사이의 거리 공식을 이용한다.



점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 E라고 하면 삼각형의 합동 조건에 의하여

$\triangle AOB \equiv \triangle BEC$ (ASA 합동)

따라서 점 C의 좌표는 (5, 2)이므로

$\overline{OC}^2=5^2+2^2=29$

02. 직선의 방정식

개념 콕콕 **1 직선의 방정식** 49쪽

1 답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) 1 (3) $\sqrt{3}$

직선 l의 기울기는

(1) $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\tan 45°=1$

(3) $\tan 60°=\sqrt{3}$

2 답 (1) $y=-3x+4$ (2) $y=2x-4$

(1) 구하는 직선의 방정식은 $y-(-5)=-3(x-3)$

$\therefore y=-3x+4$

(2) 구하는 직선의 방정식은 $y-(-2)=2(x-1)$

$\therefore y=2x-4$

3 답 (1) $y=2x+1$ (2) $y=3x-1$

(1) $y-3=\frac{3-(-3)}{1-(-2)}(x-1)$

$y-3=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x+1$

(2) $y-2=\frac{5-2}{2-1}(x-1)$, $y-2=3(x-1)$

$\therefore y=3x-1$

4 답 (1) $y=2$ (2) $x=-2$ (3) $x=2$ (4) $y=-2$

(3) x축에 수직이면 y축에 평행하므로 $x=2$

(4) y축에 수직이면 x축에 평행하므로 $y=-2$

5 답 (1) $y=\frac{3}{4}x+3$ (2) $y=\frac{1}{2}x-1$

(1) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$에서 $y=\frac{3}{4}x+3$

(2) $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1$에서 $y=\frac{1}{2}x-1$

다른 풀이

(1) 두 점 $(-4, 0)$, $(0, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{3-0}{0-(-4)}(x-0)$ $\quad\therefore y=\frac{3}{4}x+3$

(2) 두 점 $(2, 0)$, $(0, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=\frac{-1-0}{0-2}(x-0)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x-1$

6 답 (1) 기울기 : 2, y절편 : -3
(2) 기울기 : $-\frac{1}{2}$, y절편 : $\frac{3}{2}$

(1) $2x-y-3=0$에서 $y=2x-3$이므로 기울기는 2, y절편은 -3이다.

(2) $x+2y-3=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$이므로 기울기는 $-\frac{1}{2}$, y절편은 $\frac{3}{2}$이다.

예제 01 직선의 방정식 51쪽

01-1 답 (1) 6 (2) -1 (3) -4

(1) x절편이 2, 즉 점 $(2,\ 0)$을 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$y-0=-3(x-2)$ $\quad\therefore y=-3x+6$

따라서 구하는 직선의 y절편은 6이다.

(2) 두 점 $(-1,\ 6)$, $(3,\ 2)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{6+2}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 4)$

점 $(1,\ 4)$를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y-4=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x+2$

따라서 구하는 직선의 x절편은 -1이다.

(3) x절편이 1, y절편이 2인 직선의 방정식은

$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$ $\quad\therefore y=-2x+2$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$a-b=-2-2=-4$

다른 풀이

(3) x절편이 1, y절편이 2이므로 구하는 직선은 두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지난다.
따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{2-0}{0-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x+2$

01-2 답 (1) -3 (2) 45

(1) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선의 기울기는

$\tan 60°=\sqrt{3}$

이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-2)$ $\quad\therefore y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

따라서 $m=\sqrt{3}$, $n=-\sqrt{3}$이므로

$mn=\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})=-3$

(2) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $30°$인 직선의 기울기는

$\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$ $\quad\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

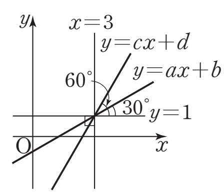
따라서 $\sqrt{3}x-3y+6=0$에서

$a=-3$, $b=6$이므로

$a^2+b^2=9+36=45$

01-3 답 $11-4\sqrt{3}$

두 직선 $x=3$, $y=1$이 이루는 각의 크기는 $90°$이고, $0<a<c$이므로 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore a=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$c=\tan 60°=\sqrt{3}$

또 두 직선이 $x=3$, $y=1$의 교점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$에서 $b=1-\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}x+d$에서 $d=1-3\sqrt{3}$

$\therefore ac+bd=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})(1-3\sqrt{3})$

$=11-4\sqrt{3}$

예제 02 세 점이 한 직선 위에 있을 조건 53쪽

02-1 답 16

세 점이 한 직선 위에 있으므로 두 점 $(1,\ a)$, $(a,\ 7)$을 지나는 직선과 두 점 $(a,\ 7)$, $(5,\ 11)$을 지나는 직선의 기울기가 같다.

$\frac{7-a}{a-1}=\frac{11-7}{5-a}$에서

$(7-a)(5-a)=4(a-1)$

$a^2-16a+39=0$, $(a-3)(a-13)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=13$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은 $3+13=16$

다른 풀이

두 점 $(1,\ a)$, $(a,\ 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-a=\frac{7-a}{a-1}\times(x-1)$

점 $(5,\ 11)$이 직선 위의 점이므로

$11-a=\frac{7-a}{a-1}(5-1)$, $(11-a)(a-1)=4(7-a)$

$a^2-16a+39=0$ …… ㉠

㉠은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 a의 값의 합은 16이다.

02-2

탑 (1) $y=3x+2$, $y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{2}$ (2) 1, 3

(1) 두 점 $(-a,\ 5)$, $(a,\ a)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-5=\frac{a-5}{a-(-a)}\{x-(-a)\}$, 즉

$y-5=\frac{a-5}{2a}(x+a)$ …… ㉠

점 $(a+4,\ 11)$이 직선 l 위의 점이므로

$11-5=\frac{a-5}{2a}(a+4+a)$, $6a=(a-5)(a+2)$

$a^2-9a-10=0$, $(a+1)(a-10)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=10$

(i) $a=-1$일 때, ㉠에서 직선 l의 방정식은

$y-5=\frac{-1-5}{-2}(x-1)$

$\therefore y=3x+2$

(ii) $a=10$일 때, ㉠에서 직선 l의 방정식은

$y-5=\frac{10-5}{20}(x+10)$

$\therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{2}$

(i), (ii)에서 직선 l의 방정식은

$y=3x+2$, $y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{2}$

(2) 세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있어야 한다.

따라서 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{4-1}{a-0}=\frac{(a-3)-1}{-1-0}$에서

$\frac{3}{a}=\frac{a-4}{-1}$, $a(a-4)=-3$

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

02-3

탑 200

점 A, B, C, D, E를 지나는 직선의 방정식은 두 점 $\mathrm{B}(-1,\ 3)$, $\mathrm{D}(3,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식과 일치하므로

$y-(-1)=\frac{-1-3}{3-(-1)}(x-3)$

$\therefore y=-x+2$

세 점 A, C, E가 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로 세 점 A, C, E의 x좌표를 각각 a, c, e라고 하면

$\mathrm{A}(a,\ -a+2)$, $\mathrm{C}(c,\ -c+2)$, $\mathrm{E}(e,\ -e+2)$

조건 ㈏에서 점 $\mathrm{B}(-1,\ 3)$이 선분 AC의 중점이므로

$\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{-a-c+4}{2}\right)$에서

$\frac{a+c}{2}=-1$ $\therefore a+c=-2$ …… ㉠

조건 ㈐에서 점 $\mathrm{C}(c,\ -c+2)$가 선분 AD를 $2:1$로 내분하므로

$\left(\frac{2\times3+1\times a}{2+1},\ \frac{2\times(-1)+1\times(-a+2)}{2+1}\right)$, 즉

$\left(\frac{a+6}{3},\ \frac{-a}{3}\right)$에서

$\frac{a+6}{3}=c$ $\therefore a-3c=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $c=1$

$\therefore \mathrm{A}(-3,\ 5)$, $\mathrm{C}(1,\ 1)$

조건 ㈑에서 점 $\mathrm{D}(3,\ -1)$이 선분 CE를 $1:2$로 내분하므로

$\left(\frac{1\times e+2\times1}{1+2},\ \frac{1\times(-e+2)+2\times1}{1+2}\right)$, 즉

$\left(\frac{e+2}{3},\ \frac{-e+4}{3}\right)$에서

$\frac{e+2}{3}=3$ $\therefore e=7$

$\therefore \mathrm{E}(7,\ -5)$

따라서 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 5)$, $\mathrm{E}(7,\ -5)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AE}}^2=\{7-(-3)\}^2+(-5-5)^2$

$=100+100=200$

예제 03 도형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식 55쪽

03-1

탑 16

직선 $y=ax+b$가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므

로 선분 BC의 중점을 지나야 한다.

선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$, 즉 $(-1, 0)$

따라서 직선 $y=ax+b$는 두 점 $(0, 4)$, $(-1, 0)$을 지나므로

$y-4=\frac{0-4}{-1-0}(x-0)$, $y=4x+4$

$\therefore a=4, b=4$

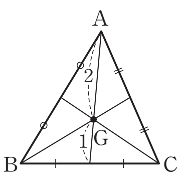
$\therefore ab=4\times4=16$

⊕ 보충 설명

(1) 삼각형의 중선은 삼각형의 넓이를 이등분한다.

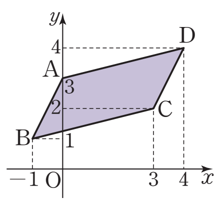
(2) 삼각형 ABC의 무게중심을 G라고 하면

$\triangle GAB=\triangle GBC=\triangle GCA$
$=\frac{1}{3}\triangle ABC$



03-2 답 $y=3x-2$

오른쪽 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 사각형 ABCD는 평행사변형임을 알 수 있다.



평행사변형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 교점, 즉 선분 AC 또는 선분 BD의 중점을 지난다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+3}{2}, \frac{3+2}{2}\right)$, 즉, $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

따라서 구하는 직선은 두 점 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선이므로

$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{5}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore y=3x-2$

03-3 답 $y=\frac{7}{10}x-\frac{1}{10}$

두 직사각형의 넓이를 각각 이등분하는 직선은 각각의 직사각형의 대각선의 교점을 지난다.

A$(1, 1)$, C$(5, 3)$이므로 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(3, 2)$

E$(-1, -1)$, G$(-3, -2)$이므로 직사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right)$, 즉 $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$

따라서 구하는 직선은 두 점 $(3, 2)$, $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$을 지나는 직선이므로

$y-2=\frac{-\frac{3}{2}-2}{-2-3}(x-3)$, $y-2=\frac{7}{10}(x-3)$

$\therefore y=\frac{7}{10}x-\frac{1}{10}$

예제 04 직선 $ax+by+c=0$ 57쪽

04-1 답 제4사분면

주어진 직선 $ax+by+c=0\ (b\neq0)$, 즉

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$

$\therefore ab>0, bc<0$

(i) $b>0$일 때, $a>0$, $c<0$

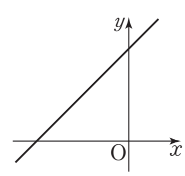
(ii) $b<0$일 때, $a<0$, $c>0$

(i), (ii)에서 b의 부호에 관계없이 $ac<0$

직선 $bx+cy+a=0\ (c\neq0)$, 즉

$y=-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$에서 $bc<0$이므로 $-\frac{b}{c}>0$이고, $ac<0$이므로 $-\frac{a}{c}>0$이다.

따라서 직선 $bx+cy+a=0$의 기울기는 양수이고, y절편은 양수이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같고, 이 직선은 제4사분면을 지나지 않는다.



04-2 답 ④

$ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 직선 $ax+by+c=0$의 기울기는 $-\frac{a}{b}$, y절편은 $-\frac{c}{b}$이다.

$ab>0$, $bc>0$에서 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 기울기와 y절편은 모두 음수이므로 직선의 개형은 ④와 같다.

04-3 답 풀이 참조

주어진 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$ …… ㉠

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $-\frac{b}{2a}>0$

$\therefore b<0$ ($\because$ ㉠) …… ㉡

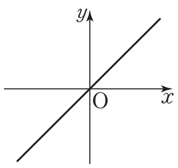
또한 y절편이 0이므로 $c=0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$에서 $ax+by=0$

$\therefore y=-\frac{a}{b}x$

즉, 주어진 직선은 기울기가 $-\frac{a}{b}$이고 원점을 지난다.

㉠, ㉡에서 $-\frac{a}{b}>0$이므로 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



보충 설명

이차함수의 그래프의 축

이차함수의 그래프의 꼭짓점이나 축을 구할 때에는 일반형을 표준형으로 변형해야 한다.

즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서

$$y=ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$이고 축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$이다.

개념 콕콕 2 두 직선의 위치 관계 63쪽

1 답 (1) $y=2x-3$ (2) $x=2$ (3) $y=1$

(1) 직선 $y=2x+1$의 기울기가 2이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=2(x-2)$ $\quad\therefore y=2x-3$

(2) 점 $(2, 1)$을 지나고 직선 $x=1$에 평행한 직선의 방정식은

$x=2$

(3) 점 $(2, 1)$을 지나고 직선 $y=-1$에 평행한 직선의 방정식은

$y=1$

2 답 (1) $y=-\frac{1}{2}x+2$ (2) $y=1$ (3) $x=2$

(1) 직선 $y=2x+1$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+2$

(2) 점 $(2, 1)$을 지나고 직선 $x=1$에 수직인 직선의 방정식은

$y=1$

(3) 점 $(2, 1)$을 지나고 직선 $y=-1$에 수직인 직선의 방정식은

$x=2$

3 답 1

두 직선 $y=mx+n$, $y=3x-2$가 일치하므로

$m=3$, $n=-2$

$\therefore m+n=3+(-2)=1$

4 답 (1) 2 (2) $-\frac{1}{2}$

(1) $\frac{a}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{-3}$ $\quad\therefore a=2$

(2) $a\times2+1\times1=0$에서 $a=-\frac{1}{2}$

다른 풀이

두 직선의 방정식을 표준형으로 고치면

$y=-ax+1$, $y=-2x+3$

(1) 두 직선이 평행하려면 두 직선의 기울기가 같고 y절편이 달라야 하므로

$-a=-2$, $1\neq3$ $\quad\therefore a=2$

(2) 두 직선이 수직이려면 두 직선의 기울기의 곱이 -1이어야 하므로

$(-a)\times(-2)=-1$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

5 답 2

$y=2x+1$에서 $2x-y+1=0$이므로

$\frac{a}{2}=\frac{b}{-1}=\frac{2}{1}$ $\quad\therefore a=4$, $b=-2$

$\therefore a+b=4+(-2)=2$

6 답 ㄱ, ㄹ

$x+2y-4=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x+2$

ㄱ. $x+2y+1=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

ㄴ. $2x+y-4=0$에서 $y=-2x+4$

따라서 직선 $x+2y-4=0$과 평행한 직선은 ㄱ, ㄹ이다.

예제 05 두 직선의 위치 관계 (1) 65쪽

05-1 답 (1) $y=-3x-5$ (2) $y=3x-4$

(1) 직선 $3x+y-2=0$, 즉 $y=-3x+2$에 평행한 직선의 기울기는 -3이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-3\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-3x-5$

(2) 두 점 $(-4, -1)$, $(2, -3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-3-(-1)}{2-(-4)}=-\frac{1}{3}$

이므로 구하는 직선의 기울기는 3이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=3(x-1)$

$\therefore y=3x-4$

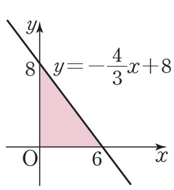
05-2 답 24

직선 $3x-4y=1$, 즉 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$의 기울기는 $\frac{3}{4}$이므로 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

기울기가 $-\frac{4}{3}$이고 점 $(3, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}(x-3)+4$ $\qquad \therefore y=-\frac{4}{3}x+8$

따라서 이 직선의 x절편은 6, y절편은 8이므로 구하는 삼각형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times6\times8=24$

05-3 답 $y=-\frac{3}{2}x+8$

직선 AC의 방정식은 $y=2$, 직선 BD의 방정식은 $x=2$이므로 두 대각선 AC와 BD의 교점 M의 좌표는 $(2, 2)$이다.

$\overline{AM}=\overline{CM}$이므로 $C(4, 2)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{-1-2}{2-0}=-\frac{3}{2}$

직선 CD는 직선 AB와 평행하므로 기울기가 $-\frac{3}{2}$이고, 점 $C(4, 2)$를 지난다.

따라서 직선 CD의 방정식은

$y-2=-\frac{3}{2}(x-4)$ $\qquad \therefore y=-\frac{3}{2}x+8$

예제 06 두 직선의 위치 관계 (2) 67쪽

06-1 답 (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$

(1) 주어진 두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{3}{a}=\frac{a-2}{1}\neq\frac{1}{1}$

$\frac{3}{a}=\frac{a-2}{1}$에서 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

$\frac{a-2}{1}\neq\frac{1}{1}$에서 $a\neq3$

$\therefore a=-1$

(2) 주어진 두 직선이 서로 수직이므로

$3\times a+(a-2)\times1=0$

$4a-2=0$ $\qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

06-2 답 ④

두 직선 $ax-y+1=0$, $2x-by-1=0$이 서로 평행하므로

$\frac{a}{2}=\frac{-1}{-b}\neq\frac{1}{-1}$

$\frac{a}{2}=\frac{-1}{-b}$에서 $ab=2$ $\qquad$ …… ㉠

$\frac{-1}{-b}\neq\frac{1}{-1}$에서 $b\neq-1$

$\therefore a\neq-2, b\neq-1$

또한 두 직선 $ax-y+1=0$, $x-(b-3)y+3=0$이 서로 수직이므로

$a\times1+(-1)\times(-b+3)=0$

$a+b-3=0$ $\qquad \therefore a+b=3$ $\qquad$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times2=5$

다른 풀이

주어진 세 직선을

$l_1 : ax-y+1=0$

$l_2 : 2x-by-1=0$

$l_3 : x-(b-3)y+3=0$

이라고 하면 세 직선 l_1, l_2, l_3의 기울기는 각각

a, $\frac{2}{b}$, $\frac{1}{b-3}$

$l_1 /\!/ l_2$에서 $a=\frac{2}{b}$이므로

$ab=2$ …… ㉠

$l_1 \perp l_3$에서 $a\times\frac{1}{b-3}=-1$이므로

$a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times2=5$

06-3 답 $y=\frac{1}{5}x+2$

선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

직선 AC의 기울기는 $\frac{0-5}{3-2}=-5$

이때 직선 BD는 직선 AC와 수직이므로 기울기가 $\frac{1}{5}$이고, 점 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지난다.

따라서 직선 BD의 방정식은

$y-\frac{5}{2}=\frac{1}{5}\left(x-\frac{5}{2}\right)$　　$\therefore y=\frac{1}{5}x+2$

예제 07 선분의 수직이등분선의 방정식 69쪽

07-1 답 (1) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$
(2) $x=2$
(3) $y=-1$

(1) 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$, 즉 $(3, 1)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-(-1)}{4-2}=2$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(3, 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선이므로

$y-1=-\frac{1}{2}(x-3)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

(2) 선분 CD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$, 즉 $(2, 1)$

두 점 C, D는 y좌표가 같으므로 선분 CD의 수직이등분선은 점 $(2, 1)$을 지나고 y축에 평행한 직선이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x=2$

(3) 선분 EF의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right)$, 즉 $(1, -1)$

두 점 E, F는 x좌표가 같으므로 선분 EF의 수직이등분선은 점 $(1, -1)$을 지나고 x축에 평행한 직선이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-1$

07-2 답 (1) $y=2x-4$ (2) $y=\frac{1}{2}x-3$

(1) 점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x+y^2-6y+10$

$=x^2-10x+y^2-2y+26$

$8x-4y-16=0$

$\therefore y=2x-4$

(2) 점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면 $\overline{CP}=\overline{DP}$에서

$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y+3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-6x+y^2-2y+10=x^2-10x+y^2+6y+34$

$4x-8y-24=0$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-3$

다른 풀이

두 점으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 도형은 두 점을 이은 선분의 수직이등분선이므로 다음과 같이 풀 수도 있다.

(1) 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(3, 2)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-3}{5-1}=-\frac{1}{2}$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(3,\ 2)$를 지나고 기울기가 2인 직선이므로

$y-2=2(x-3)$

$\therefore\ y=2x-4$

(2) 선분 CD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{1+(-3)}{2}\right)$, 즉 $(4,\ -1)$

두 점 C, D를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-3-1}{5-3}=-2$

따라서 선분 CD의 수직이등분선은 점 $(4,\ -1)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이므로

$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-4)$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x-3$

07-3 답 ④

선분 AB와 직선 $y=2x+\frac{3}{2}$은 수직이므로 직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

즉, $\frac{b-2}{-2-a}=-\frac{1}{2}$에서 $2b-4=2+a$

$\therefore\ a-2b=-6$ …… ㉠

또한 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a-2}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$이고, 직선 $y=2x+\frac{3}{2}$이 이 점을 지나므로

$\frac{b+2}{2}=2\times\frac{a-2}{2}+\frac{3}{2}$

$\therefore\ 2a-b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=5$

$\therefore\ a+b=4+5=9$

예제 08 세 직선의 위치 관계 71쪽

08-1 답 2

주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같이 2가지가 있다.

(i) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

직선 $y=ax-2$가 두 직선 $y=x$, $y=-2x+3$의 교점을 지날 때이다.

$y=x$와 $y=-2x+3$을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=1$

즉, 직선 $y=ax-2$가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=a-2$ $\quad\therefore\ a=3$

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우

직선 $y=ax-2$가 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-2x+3$과 평행해야 하므로 $a=1$ 또는 $a=-2$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$3+1+(-2)=2$

08-2 답 4

두 직선 $3x+y-2=0$, $-x+y=0$이 한 점에서 만나므로 직선 $ax+2y-3=0$이 다른 직선과 평행해야 한다.

(i) 직선 $ax+2y-3=0$이 직선 $3x+y-2=0$과 평행할 때,

$\frac{3}{a}=\frac{1}{2}\neq\frac{-2}{-3}$에서 $a=6$

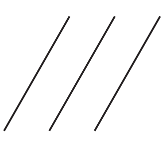
(ii) 직선 $ax+2y-3=0$이 직선 $-x+y=0$과 평행할 때,

$\frac{-1}{a}=\frac{1}{2}\neq\frac{0}{-3}$에서 $a=-2$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$6+(-2)=4$

08-3 답 $\frac{3}{2}$



서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 서로 평행해야 한다. 두 직선 $ax-y+2=0$, $x+by-3=0$이 서로 평행하므로

$\frac{a}{1}=\frac{-1}{b}\neq\frac{2}{-3}$에서 $ab=-1$ …… ㉠

또한 두 직선 $x+by-3=0$, $2x-y+4=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{2}=\frac{b}{-1}\neq\frac{-3}{4}$에서 $b=-\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=2$

$\therefore\ a+b=2+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

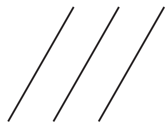
다른 풀이

$ax-y+2=0$에서 $y=ax+2$

$x+by-3=0$에서 $y=-\frac{1}{b}x+\frac{3}{b}$

$2x-y+4=0$에서 $y=2x+4$

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 서로 평행해야 하므로



$a=-\frac{1}{b}=2$

$2\neq\frac{3}{b}$, $\frac{3}{b}\neq 4$

따라서 $a=2$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$a+b=2+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

보충 설명

세 직선의 위치 관계를 직선에 의하여 좌표평면이 나누어지는 부분의 개수와 관련지어 표현할 수도 있다.

(i) 세 직선이 모두 평행하다.

➡ 세 직선에 의하여 좌표평면이 네 부분으로 나누어진다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나거나 세 직선 중 두 직선이 평행하다.

➡ 세 직선에 의하여 좌표평면이 여섯 부분으로 나누어진다.

예제 09 일정한 점을 지나는 직선의 방정식 73쪽

09-1 답 (1, 1)

$x-2y+1+k(x+y-2)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x-2y+1=0$, $x+y-2=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=1$

따라서 주어진 직선은 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 (1, 1)을 지난다.

09-2 답 ②

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y+1)k+(x-y+2)=0$ …… ㉠

㉠이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$2x+y+1=0$, $x-y+2=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=1$

따라서 주어진 직선은 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 (−1, 1)을 지나고, 이 점은 제2사분면 위의 점이므로 반드시 제2사분면을 지난다.

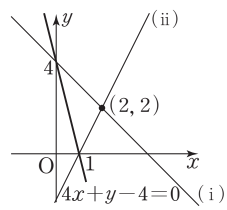
09-3 답 ②

$mx-y-2m+2=0$ …… ㉠

에서 $(x-2)m-(y-2)=0$이므로 이 직선은 m의 값에 관계없이 항상 점 (2, 2)를 지난다.

또한 $y=mx-2m+2$이므로 직선 ㉠은 기울기가 m이다.

주어진 두 직선이 제1사분면에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 두 점 (0, 4), (1, 0)을 잇는 선분과 만나야 한다.



(단, 양 끝 점은 제외한다.)

(i) 직선 ㉠이 점 (0, 4)를 지날 때,

$-4-2m+2=0$ $\therefore m=-1$

(ii) 직선 ㉠이 점 (1, 0)을 지날 때,

$m-2m+2=0$ $\therefore m=2$

(i), (ii)에서 $-1<m<2$

보충 설명

두 직선의 교점을 구한 후에

(교점의 x좌표)>0, (교점의 y좌표)>0

임을 이용하여 풀 수도 있지만 계산이 너무 복잡하다.

따라서 위의 풀이와 같이 주어진 직선이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 이용하여 푸는 것이 편리하다.

예제 10 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식 75쪽

10-1 답 $4x-3y-1=0$

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x+y-2)+k(2x-y-1)=0$ (k는 실수) …… ㉠

직선 ㉠이 점 (−2, −3)을 지나므로

$x=-2$, $y=-3$을 ㉠에 대입하면

$-2+(-3)-2+k\{2\times(-2)-(-3)-1\}=0$

$-7-2k=0$ $\therefore k=-\frac{7}{2}$

$k=-\frac{7}{2}$을 ㉠에 대입하면

$(x+y-2)-\frac{7}{2}(2x-y-1)=0$

$\therefore\ 4x-3y-1=0$

다른 풀이

두 직선 $x+y-2=0$, $2x-y-1=0$의 교점의 좌표를 구하면 $(1,\ 1)$이다.
따라서 두 점 $(1,\ 1)$, $(-2,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{-3-1}{-2-1}(x-1)$

$\therefore\ y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$, 즉 $4x-3y-1=0$

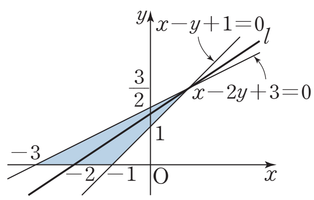
10-2 답 (1) $x+2y+3=0$ (2) $3x+y-8=0$

(1) 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(6x+16y+3)+k(x+6y-12)=0$ (k는 실수)
$\therefore\ (6+k)x+(16+6k)y+3-12k=0$ …… ㉠
이 직선이 직선 $x+2y-3=0$에 평행하므로
$\frac{6+k}{1}=\frac{16+6k}{2}\neq\frac{3-12k}{-3}$
$\frac{6+k}{1}=\frac{16+6k}{2}$에서 $6+k=8+3k$
$-2k=2 \qquad \therefore\ k=-1$
$k=-1$을 ㉠에 대입하면
$5x+10y+15=0 \qquad \therefore\ x+2y+3=0$

(2) 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x-y-4)+k(2x+y-5)=0$ (k는 실수)
$\therefore\ (1+2k)x+(-1+k)y-4-5k=0$ …… ㉠
이 직선이 직선 $2x-6y+3=0$에 수직이므로
$2(1+2k)-6(-1+k)=0$, $-2k=-8$
$\therefore\ k=4$
$k=4$를 ㉠에 대입하면
$9x+3y-24=0 \qquad \therefore\ 3x+y-8=0$

10-3 답 $2x-3y+4=0$

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$의 교점을 지나는 직선을 l이라고 하면
$l:(x-y+1)+k(x-2y+3)=0$ (k는 실수) …… ㉠
한편, 주어진 두 직선과 x축이 이루는 삼각형의 넓이를 직선 l이 이등분하려면 다음 그림과 같이 직선 l은 점 $(-2,\ 0)$을 지나야 한다.



즉, $x=-2$, $y=0$을 ㉠에 대입하면
$-1+k=0$
$\therefore\ k=1$
$k=1$을 ㉠에 대입하면 직선 l의 방정식은
$(x-y+1)+(x-2y+3)=0$
$\therefore\ 2x-3y+4=0$

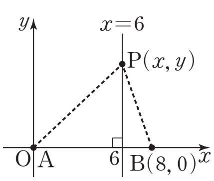
⊕ 보충 설명

삼각형에서 한 꼭짓점을 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선은 그 꼭짓점의 대변의 중점을 지난다.

예제 11 점이 나타내는 도형의 방정식 77쪽

11-1 답 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 지나고 선분 AB에 수직인 직선

$\overline{AB}=8$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 A를 좌표평면 위의 원점에 놓고 점 B의 좌표를 $(8,\ 0)$이라고 할 때, 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면



$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=32$에서
$(x^2+y^2)-\{(x-8)^2+y^2\}=32$
이 식을 전개하여 정리하면
$16x=96 \qquad \therefore\ x=6$
따라서 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 지나고 선분 AB에 수직인 직선이다.

11-2 답 ②

점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로
$b=-a+2$ …… ㉠
점 Q의 좌표 $(a-b,\ a+b)$를 $(x,\ y)$로 놓으면
$a-b=x$, $a+b=y$ …… ㉡
㉡의 두 식을 변끼리 더하면
$2a=x+y \qquad \therefore\ a=\frac{x+y}{2}$ …… ㉢

㉡의 두 식을 변끼리 빼면

$-2b=x-y \qquad \therefore b=\dfrac{y-x}{2}$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{y-x}{2}=-\dfrac{x+y}{2}+2$

$y-x=-(x+y)+4 \qquad \therefore y=2$

11-3 답 8

직선 $4x-3y+25=0$ 위의 임의의 점을 $P(a, b)$라 하고 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점을 $Q(x, y)$라고 하면

$x=\dfrac{2a+1\times8}{2+1}=\dfrac{2a+8}{3}$,

$y=\dfrac{2b+1\times(-6)}{2+1}=\dfrac{2b-6}{3}$ ⋯⋯ ㉠

한편, 점 $P(a, b)$는 직선 $4x-3y+25=0$ 위의 점이므로

$4a-3b+25=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $a=\dfrac{3x-8}{2}$, $b=\dfrac{3y+6}{2}$이므로 이것을 ㉡에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$4\times\dfrac{3x-8}{2}-3\times\dfrac{3y+6}{2}+25=0$

$4x-3y=0 \qquad \therefore y=\dfrac{4}{3}x$

따라서 $f(x)=\dfrac{4}{3}x$이므로

$f(6)=\dfrac{4}{3}\times6=8$

보충 설명

최종적으로 구해야 하는 것은 점 $Q(x, y)$에서 x와 y 사이의 관계식이다.

따라서 ㉠에서 구한 $x=\dfrac{2a+8}{3}$, $y=\dfrac{2b-6}{3}$을 각각 a, b에 대하여 나타낸 후 ㉡에 대입한다.

개념 콕콕 3 점과 직선 사이의 거리 79쪽

1 답 (1) 2 (2) $\sqrt{5}$

구하는 거리를 d라 하면

(1) $d=\dfrac{|3\times3-4\times1+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

(2) $y=-2x+5$에서 $2x+y-5=0$

$\therefore d=\dfrac{|-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

2 답 8

$\dfrac{|6\times3+4k-10|}{\sqrt{6^2+k^2}}=4$에서

$|k+2|=\sqrt{36+k^2}$

양변을 제곱하면

$k^2+4k+4=k^2+36$

$4k=32 \qquad \therefore k=8$

예제 12 점과 직선 사이의 거리 81쪽

12-1 답 (1) 1 (2) $\sqrt{5}$

(1) 주어진 두 직선이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $4x+3y+1=0$ 위의 한 점 $(2, -3)$과 직선 $4x+3y+6=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는
$\dfrac{|4\times2+3\times(-3)+6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{5}{5}=1$

(2) 주어진 두 직선이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=-2x-1$ 위의 한 점 $(0, -1)$과 직선 $y=-2x+4$, 즉 $2x+y-4=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는
$\dfrac{|-1-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

12-2 답 ①

직선 l의 기울기를 m이라고 하면 점 $(-1, 0)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y=m(x+1)$

$\therefore mx-y+m=0$

점 $(0, 2)$와 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|-2+m|=\sqrt{5m^2+5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2+4m+1=0$, $(2m+1)^2=0$

$\therefore m=-\dfrac{1}{2}$

따라서 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

12-3 답 ③

$mx+(m-3)y=-6$에서

$(x+y)m-3y+6=0$이므로

$x+y=0,\ -3y+6=0$

$\therefore\ x=-2,\ y=2$

즉, 직선 $mx+(m-3)y=-6$은 m의 값에 관계없이 점 $(-2,\ 2)$를 지난다.

따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 점 $(-2,\ 2)$와 직선 $2x+y=8$, 즉 $2x+y-8=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\times(-2)+2-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

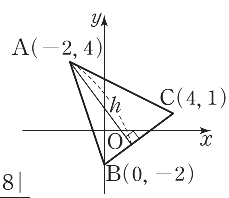
예제 13 세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이 83쪽

13-1 답 15

직선 BC의 방정식은

$$y-(-2)=\frac{1-(-2)}{4-0}(x-0) \qquad \therefore\ 3x-4y-8=0$$

삼각형 ABC의 높이 h는 오른쪽 그림과 같이 점 $A(-2,\ 4)$와 직선 BC 사이의 거리와 같으므로



$$h=\frac{|3\times(-2)+(-4)\times4-8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$=\frac{30}{5}=6$$

삼각형 ABC에서 밑변의 길이는

$$\overline{BC}=\sqrt{(4-0)^2+\{(1-(-2)\}^2}=\sqrt{25}=5$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times h=\frac{1}{2}\times5\times6=15$$

다른 풀이

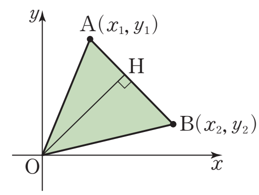
세 점을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키고 이 점을 A', B', C'이라 하자.

$A'(-2,\ 6)$, $B'(0,\ 0)$, $C'(4,\ 3)$

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}|4\times6-(-2)\times3|=15$$

보충 설명



위의 그림과 같이 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $O(0,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 구해 보자.

직선 AB의 방정식은

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

이 식을 전개하여 정리하면

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-(x_1y_2-x_2y_1)=0$$

이때 원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 선분 OH의 길이는 원점에서 직선 AB까지의 거리와 같으므로

$$\overline{OH}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$$

따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이므로 구하는 삼각형 OAB의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\times\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

또한 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는 세 꼭짓점 중 하나를 원점에 오도록 평행이동한 후 위의 방법을 이용하면 된다.

이때 삼각형 ABC의 넓이 S는

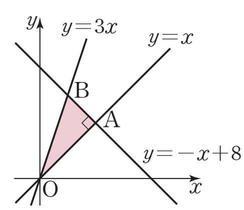
$$S=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|$$

13-2 답 8

두 점 $(3,\ 5)$, $(5,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{3-5}{5-3}(x-3) \qquad \therefore\ y=-x+8$$

이 직선과 직선 $y=x$는 서로 수직이므로 다음 그림과 같이 삼각형 OAB는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다.



또한 A$(4,\ 4)$, B$(2,\ 6)$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-4)^2+(6-4)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=8$

13-3 답 ②

세 직선 $x+2y-11=0$, $x-y+4=0$, $x-3y+4=0$의 교점을 구하면

A$(1,\ 5)$, B$(-4,\ 0)$, C$(5,\ 3)$

직선 BC의 방정식은 $x-3y+4=0$

점 A$(1,\ 5)$에서 직선 BC까지의 거리를 삼각형 ABC의 높이 h라고 하면

$h=\frac{|1-3\times5+4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

삼각형 ABC에서 밑변의 길이는

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\{5-(-4)\}^2+(3-0)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times h=\frac{1}{2}\times3\sqrt{10}\times\sqrt{10}=15$

기본 다지기 84쪽～85쪽

1 4 **2** ② **3** (1) 6 (2) $-\frac{1}{8}$ **4** $\frac{31\sqrt{34}}{34}$

5 (1) -1 (2) 2 **6** ③ **7** ④

8 $x+y-14=0$ **9** $y=2x+5$, $y=2x-5$

10 15

1 두 점 $(m,\ 4)$, $(2,\ -m)$을 지나는 직선의 기울기가 m이므로

$\frac{-m-4}{2-m}=m$, $-m-4=2m-m^2$

$m^2-3m-4=0$, $(m+1)(m-4)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=4$

따라서 구하는 양수 m의 값은 4이다.

⊕ 보충 설명

직선 위의 두 점의 좌표가 주어진 직선의 기울기는

➡ $\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$

2 직선 $l : x-2y+4=0$과 x축, y축이 만나는 점은 각각 A$(-4,\ 0)$, B$(0,\ 2)$이므로 선분 AB의 중점은

C$(-2,\ 1)$

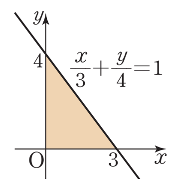
이때 직선 l에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-2\{x-(-2)\}$ $\quad\therefore y=-2x-3$

따라서 $m=-2$, $n=-3$이므로

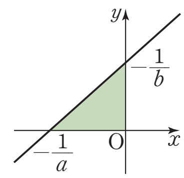
$m+n=-5$

3 (1) 직선 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$의 x절편은 3이고, y절편은 4이므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times3\times4=6$

(2) 직선 $ax+by+1=0$의 x절편은 $-\frac{1}{a}$, y절편은 $-\frac{1}{b}$이고 제4사분면을 지나지 않으므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 색칠한 부분의 넓이가 4이므로

$\left|\frac{1}{2}\times\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}\right|=4$

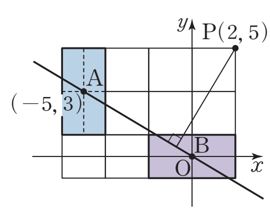
$\therefore ab=-\frac{1}{8}$ $(\because a>0,\ b<0)$

⊕ 보충 설명

직선이 x축과 만나는 점의 x좌표, y축과 만나는 점의 y좌표를 각각 x절편, y절편이라고 한다. 즉, $y=0$일 때의 x의 값이 x절편, $x=0$일 때의 y의 값이 y절편이다.

4 두 직사각형 A, B의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 직사각형 A, B의 대각선의 교점을 지나는 직선이다.

직사각형 B의 대각선의 교점을 원점으로 잡으면 다음 그림과 같이 직사각형 A의 대각선의 교점의 좌표는 $(-5,\ 3)$, 점 P의 좌표는 $(2,\ 5)$이다.



두 직사각형 A, B의 대각선의 교점 $(-5,\ 3)$, $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{5}x$ $\quad\therefore 3x+5y=0$

따라서 점 P$(2,\ 5)$와 직선 $3x+5y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times2+5\times5|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{31}{\sqrt{34}}=\frac{31\sqrt{34}}{34}$

보충 설명

좌표평면을 잡을 때, 어느 점을 원점으로 잡더라도 결과는 같게 나온다. 하지만 계산이 간단하려면 직선의 방정식을 간단히 나타낼 수 있어야 하므로 위의 풀이에서는 직사각형 B의 대각선의 교점을 원점으로 잡는 것이 편리하다.

5 (1) 두 직선이 서로 평행하므로

$-2(k+1)=(k+1)^2$ …… ㉠

$-k\neq3$ …… ㉡

㉠에서 $-2k-2=k^2+2k+1$이므로

$k^2+4k+3=0$, $(k+3)(k+1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=-1$

㉡에서 $k\neq-3$이므로 구하는 상수 k의 값은 -1이다.

(2) 두 직선이 일치하므로

$\frac{1}{a}=\frac{a}{a+2}=\frac{a}{4}$

$\frac{1}{a}=\frac{a}{a+2}$에서 $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$ …… ㉠

$\frac{1}{a}=\frac{a}{4}$에서 $a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 상수 a의 값은 2이다.

보충 설명

(2)에서 각 항의 계수의 비가 일정할 때, 한 직선의 양변에 일정한 값을 곱하면 나머지 한 직선과 같아짐을 알 수 있다.

6 직선 $2x-y+6=0$, 즉 $y=2x+6$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 점 A(2, 0)을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}(x-2)$ $\therefore x+2y-2=0$

즉, 점 B는 두 직선 $2x-y+6=0$과 $x+2y-2=0$의 교점이다.

두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=2$

따라서 구하는 점 B의 x좌표는 -2이다.

7 세 직선으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이 되려면 어느 두 직선이 수직이어야 한다.

$x+3y=2$에서 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ …… ㉠

$x-2y=4$에서 $y=\frac{1}{2}x-2$ …… ㉡

$ax-y=2$에서 $y=ax-2$ …… ㉢

세 직선 ㉠, ㉡, ㉢의 기울기가 각각 $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, a이므로

㉠, ㉡은 수직이 아니다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 수직일 때,

$\left(-\frac{1}{3}\right)\times a=-1$ $\therefore a=3$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 수직일 때,

$\frac{1}{2}\times a=-1$ $\therefore a=-2$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은

$3+(-2)=1$

8 두 직선 $y=4x-1$, $y=3x+2$, 즉 $4x-y-1=0$, $3x-y+2=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(4x-y-1)+k(3x-y+2)=0$ (k는 실수)

$(3k+4)x-(k+1)y+(2k-1)=0$ …… ㉠

$\therefore y=\frac{3k+4}{k+1}x+\frac{2k-1}{k+1}$

이 직선의 x절편과 y절편이 같으므로 이 직선의 기울기는 -1이다.

즉, $\frac{3k+4}{k+1}=-1$에서

$3k+4=-k-1$

$\therefore k=-\frac{5}{4}$

따라서 ㉠에 $k=-\frac{5}{4}$를 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y-\frac{7}{2}=0$

$\therefore x+y-14=0$

다른 풀이

㉠에 $y=0$을 대입하여 이 직선의 x절편을 구하면

$(3k+4)x+(2k-1)=0$

$\therefore x=-\frac{2k-1}{3k+4}$

또한 ㉠에 $x=0$을 대입하여 이 직선의 y절편을 구하면

$-(k+1)y+(2k-1)=0$

$\therefore\ y=\dfrac{2k-1}{k+1}$

x절편과 y절편이 같으므로

$-\dfrac{2k-1}{3k+4}=\dfrac{2k-1}{k+1}$ …… ㉡

$-(3k+4)=k+1 \qquad \therefore\ k=-\dfrac{5}{4}$

보충 설명

㉡에서 $2k-1=0$이면 $k=\dfrac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은 $11x-3y=0$이 된다. 이것은 x절편, y절편이 모두 0이 되어 문제의 주어진 조건에 어긋난다.

9 주어진 직선 $2x-y-1=0$의 기울기가 2이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=2x+a$라고 하면

$2x-y+a=0$ …… ㉠

원점에서 직선 ㉠까지의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|a|=5 \qquad \therefore\ a=\pm 5$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2x+5$ 또는 $y=2x-5$

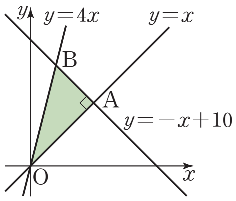
보충 설명

점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하려면 직선의 방정식을 일반형으로 고쳐야 한다.

10 두 점 $(4,\ 6)$, $(6,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-6=\dfrac{4-6}{6-4}(x-4) \qquad \therefore\ y=-x+10$

이 직선과 직선 $y=x$는 서로 수직이므로 삼각형 OAB는 다음 그림과 같이 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다.



또한 $A(5,\ 5)$, $B(2,\ 8)$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{(2-5)^2+(8-5)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times 5\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=15$

보충 설명

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식에서 기울기 m은 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$임을 이용한다. 또한 두 직선의 기울기의 곱이 -1이면 두 직선은 서로 수직임을 기억한다.

실력 다지기 86쪽~87쪽

11 18 **12** 9 **13** ④ **14** $\dfrac{2}{3}$ **15** -3

16 ⑤

17 (1) $x-y+3=0$, $2x+2y-1=0$

(2) $x-y+2=0$, $x+y=0$

18 2

19 (1) $y=1$, $4x-3y-5=0$

(2) $3x-4y+5=0$, $x=1$

20 2

11 **접근 방법** | 점 P의 좌표를 $P(a,\ -2a+12)$로 놓고 사각형 OQPR의 넓이를 a에 대한 식으로 나타내어 본다.

직선 $y=-2x+12$ 위의 한 점을 $P(a,\ -2a+12)$라고 하면 직사각형 OQPR의 넓이 S는

$S=a(-2a+12)$

$\ =-2a^2+12a$

$\ =-2(a-3)^2+18$

이때 점 P가 제1사분면 위의 점이므로 $0<a<6$이다.

따라서 $a=3$일 때, 최댓값은 18이다.

12 **접근 방법** | x절편 a와 y절편 b를 이용하여 직선의 방정식을 구하고, 주어진 점의 좌표를 대입하면 a, b에 대한 식이 나온다. 이때 a, b가 양의 정수인 조건을 이용하면 a, b의 값을 구할 수 있다.

x절편이 a이고 y절편이 b인 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$, 즉 $ab=2a+b$ …… ㉠

a, b가 양의 정수인 부정방정식이므로 ㉠을 두 다항식의 곱으로 나타내면

$ab-2a-b=0$

$a(b-2)-(b-2)-2=0$

$\therefore\ (a-1)(b-2)=2$

즉, $a-1$과 $b-2$는 2의 약수이므로 다음과 같이 4가지 경우를 생각할 수 있다.

(ⅰ) $\begin{cases} a-1=1 \\ b-2=2 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$ $\quad \therefore ab=8$

(ⅱ) $\begin{cases} a-1=2 \\ b-2=1 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$ $\quad \therefore ab=9$

(ⅲ) $\begin{cases} a-1=-1 \\ b-2=-2 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

이때 a, b가 양의 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $\begin{cases} a-1=-2 \\ b-2=-1 \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

이때 a가 양의 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

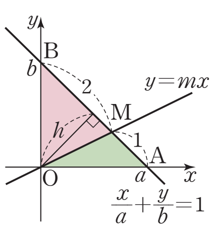
(ⅰ)~(ⅳ)에서 주어진 조건을 만족시키는 두 양의 정수 a, b에 대하여 ab의 최댓값은 9이다.

⊕ 보충 설명

$ab=2a+b$를 만족시키는 a와 b의 값은 무수히 많지만 위의 문제처럼 두 수가 양의 정수인 조건을 이용하면 유한개로 결정된다.

13 **접근 방법** | 두 삼각형의 높이가 같다면 밑변의 길이의 비가 두 삼각형의 넓이의 비가 되므로 직선 $y=mx$는 선분 AB를 1 : 2로 내분한다.

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 x축, y축과 만나는 점 A, B의 좌표는 각각 A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$이다.



한편, 원점에서 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$에 내린 수선의 길이를 h라고 하면 두 삼각형 OAM, OMB의 높이가 h로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비가 된다. 즉,

$\triangle$OAM : $\triangle$OMB$=\overline{\text{AM}} : \overline{\text{MB}}=1 : 2$

따라서 점 M은 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이므로 점 M의 좌표는

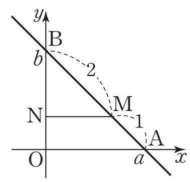
$\left(\frac{1\times0+2\times a}{1+2},\ \frac{1\times b+2\times0}{1+2}\right)$, 즉 $\left(\frac{2a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$

직선 $y=mx$가 점 M을 지나므로

$\frac{b}{3}=m\times\frac{2a}{3} \qquad \therefore m=\frac{b}{2a}$

⊕ 보충 설명

점 M의 좌표를 선분의 내분을 이용하여 쉽게 찾을 수 있었는데, 이 문제의 경우에는 삼각형의 닮음을 이용한 비의 관계를 통해서도 점 M의 좌표를 찾을 수 있다. 점 M을 지나면서 x축에 평행한 직선을 그었을 때 y축과의 교점을 점 N이라고 하면 삼각형 ABO와 삼각형 MBN은 닮음이고, 닮음비는 3 : 2이다. 이때 점 M의 x좌표는 선분 MN의 길이이고 y좌표는 선분 OB의 길이에서 선분 BN의 길이를 뺀 값이다.

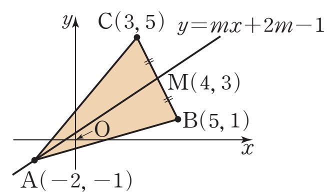


14 **접근 방법** | 주어진 직선의 방정식을 m에 대하여 정리하면 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 찾을 수 있다. 또한 삼각형의 높이가 같다면 밑변의 길이의 비가 넓이의 비가 된다.

$y=mx+2m-1$에서 $(x+2)m-(y+1)=0$

이므로 직선 $y=mx+2m-1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 A$(-2,\ -1)$을 지난다.

따라서 점 A를 지나는 직선 $y=mx+2m-1$이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 BC의 중점을 지나야 한다.



선분 BC의 중점 M의 좌표는

$\left(\frac{5+3}{2},\ \frac{1+5}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 3)$

직선 $y=mx+2m-1$이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로

$3=4m+2m-1$

$\therefore m=\frac{2}{3}$

⊕ 보충 설명

$y=mx+2m-1$을 $(x+2)m-(y+1)=0$으로 나타내는 것이 중요하다.

$y=mx+2m-1$의 그래프를 그리기는 어렵지만 $(x+2)m-(y+1)=0$과 같이 나타내면 한 점이 고정되면서 그래프의 위치를 쉽게 알 수 있다.

15 **접근 방법 |** 세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나면 된다.

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선 $x+y-1=0$, $x-y-3=0$의 교점을 나머지 한 직선 $ax-2y+4=0$이 지나야 한다.
$x+y-1=0$, $x-y-3=0$을 연립하여 풀면
$x=2$, $y=-1$
따라서 직선 $ax-2y+4=0$이 두 직선의 교점 $(2,\ -1)$을 지나므로
$2a-2\times(-1)+4=0 \qquad \therefore a=-3$

⊕ 보충 설명

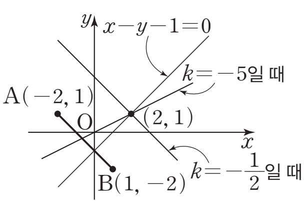
문제에서처럼 세 직선이 한 점에서 만난다면 그것은 세 직선 중 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지난다고 생각할 수 있다.

16 **접근 방법 |** 실수 k의 값에 관계없이 직선 l이 항상 지나는 점을 먼저 구하도록 한다.

① 임의의 실수 k에 대하여
$(2x+y-5)+k(x-y-1)=0$
이므로 k의 값에 관계없이 두 직선 $2x+y-5=0$, $x-y-1=0$의 교점 $(2,\ 1)$을 지난다.

② 일반형으로 정리하면
$(2+k)x+(1-k)y-(k+5)=0$
이 직선이 직선 $x-y-1=0$과 일치하려면
$\dfrac{2+k}{1}=\dfrac{1-k}{-1}=\dfrac{-k-5}{-1}$가 성립해야 한다.
그런데 $2+k\neq k-1$이므로 이 식은 성립할 수 없다.
따라서 직선 l은 직선 $x-y-1=0$과 일치할 수 없다.

③, ④



직선 l은 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선이므로 $\overline{AB}$와 한 점에서 만날 수 있다.
즉, $k=-5$일 때, 직선 l은 $x-2y=0$이므로 위의 그림과 같이 $\overline{AB}$와 한 점에서 만날 수 있다.
한편, 직선 l의 기울기가 -1이면 직선 l과 $\overline{AB}$는 평행하다.
즉, $k=-\dfrac{1}{2}$일 때, 직선 l은 $x+y-3=0$이므로 위의 그림과 같이 $\overline{AB}$와 평행할 수 있다.

⑤ $\overline{AB}$의 기울기가 $\dfrac{-2-1}{1-(-2)}=-1$이므로 직선 l과 $\overline{AB}$가 수직이려면 직선 l은 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 1인 직선이 되어야 한다. 즉,
$y-1=1\times(x-2)$
$\therefore x-y-1=0$
그러나 ②에서 직선 l은 k에 어떤 값을 대입하여도 직선 $x-y-1=0$을 나타낼 수는 없으므로 직선 l과 $\overline{AB}$는 수직이 될 수 없다.

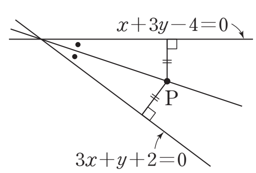
17 **접근 방법 |** 구하는 점의 좌표를 $\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건에서 거리 공식을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 점 P는 주어진 두 직선으로부터 같은 거리에 있으므로
$\dfrac{|x+3y-4|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{|3x+y+2|}{\sqrt{3^2+1^2}}$
$|x+3y-4|=|3x+y+2|$
$x+3y-4=\pm(3x+y+2)$
$\therefore x-y+3=0$ 또는 $2x+2y-1=0$

(2) 구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로
$\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$
$|x+2y-1|=|2x+y+1|$
$x+2y-1=\pm(2x+y+1)$
$\therefore x-y+2=0$ 또는 $x+y=0$

⊕ 보충 설명

각의 이등분선
(1)에서 두 직선에 이르는 거리가 같은 점 P가 나타내는 도형은 다음 그림과 같이 두 직선이 이루는 각의 이등분선이 된다.



18 **접근 방법 |** 평행한 두 직선 사이의 거리는 한 직선 위의 점에서 다른 직선까지의 거리이다.

두 직선 $mx+y-3=0$, $mx+y+m=0$이 평행하므로 직선 $mx+y-3=0$ 위의 한 점 $(0,\ 3)$과 직선 $mx+y+m=0$ 사이의 거리가 2이다.

즉, $\dfrac{|0+3+m|}{\sqrt{m^2+1^2}}=2$이므로

$|3+m|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2-6m-5=0$

이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 상수 m의 값의 합은

$-\dfrac{-6}{3}=2$

19 **접근 방법** | 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$ ······ ㉠

이때 y축에 평행한 직선은 ㉠ 꼴로 나타낼 수 없으므로 y축에 평행한 직선 중에서 주어진 조건을 만족시키는 직선이 있는지 꼭 확인하도록 한다.

(1) 점 $(2, 1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-1=m(x-2)$

$\therefore mx-y-2m+1=0$ ······ ㉠

원점에서 직선 ㉠까지의 거리가 1이므로

$\dfrac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$|-2m+1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2-4m=0$

$m(3m-4)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=\dfrac{4}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$y=1$ 또는 $4x-3y-5=0$

(2) 점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-2=m(x-1)$

$\therefore mx-y-m+2=0$ ······ ㉠

원점에서 직선 ㉠까지의 거리가 1이므로

$\dfrac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$|-m+2|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$-4m+3=0 \qquad \therefore m=\dfrac{3}{4}$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

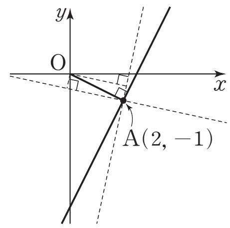
$3x-4y+5=0$

한편, 직선 $x=1$도 점 $(1, 2)$를 지나고 원점으로부터의 거리가 1이므로 구하는 직선의 방정식은

$3x-4y+5=0$ 또는 $x=1$

20 **접근 방법** | 좌표평면 위에 원점을 표시하고, 점 $(2, -1)$을 지나는 여러 직선을 그려 거리를 따져 보면 어떤 직선이 원점으로부터의 거리가 최대인지 알 수 있다.

점과 직선 사이의 거리는 수직 거리이므로 다음 그림과 같이 점 $A(2, -1)$을 지나는 직선 중에서 원점으로부터의 거리가 최대인 직선은 직선 OA에 수직인 직선이다.



따라서 직선 OA의 기울기가

$\dfrac{-1-0}{2-0}=-\dfrac{1}{2}$

이므로 구하는 직선의 기울기는 2이다.

다른 풀이

점 $A(2, -1)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라고 하면 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=m(x-2)$

$\therefore mx-y-2m-1=0$

원점과 이 직선 사이의 거리를 k라고 하면

$k=\dfrac{|-2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$

$|2m+1|=k\sqrt{m^2+1}$ ······ ㉠

양변을 제곱하여 정리하면

$(k^2-4)m^2-4m+(k^2-1)=0$ ······ ㉡

m이 실수이므로 m에 대한 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(k^2-4)(k^2-1)\ge 0$

$k^4-5k^2\le 0$

$k^2(k^2-5)\le 0$

$0\le k^2\le 5$

$\therefore 0\le k\le\sqrt{5}$ ($\because$ ㉠에서 $k\ge 0$)

따라서 거리의 최댓값은 $\sqrt{5}$이고, ㉡에 $k^2=5$를 대입하면

$m^2-4m+4=0$, $(m-2)^2=0$

$\therefore m=2$

보충 설명

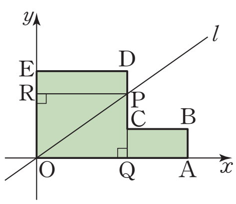
다른 풀이와 같이 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용할 수도 있지만 계산이 조금 복잡하다.

기출 다지기 88쪽

21 ② **22** ③ **23** $\frac{12}{5}$ **24** ①

21 **접근 방법** | 직사각형의 한 대각선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.

직선 l과 선분 CD의 교점을 P라 하고 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라고 하면 삼각형 OQP의 넓이와 삼각형 OPR의 넓이가 서로 같으므로 사각형 ABCQ와 사각형 DERP의 넓이가 서로 같아야 한다.



$3\times\overline{ER}=2\times1$에서 $\overline{ER}=\frac{2}{3}$

즉, $P\left(3,\ \frac{7}{3}\right)$이므로 직선 l의 기울기는 $\frac{7}{9}$이다.

따라서 $p=9$, $q=7$이므로

$p+q=16$

22 **접근 방법** | x축 위의 점 B를 $(a,\ 0)$으로 놓고 점 B와 직선 OA 사이의 거리를 구하면 $\overline{BI}$의 길이가 된다.

두 점 O, A$(8,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$

점 B의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(0<a<8)$이라고 하면

$\overline{BI}=\frac{|3\times a-4\times 0|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3a}{5}$

$\overline{BH}=8-a$

$\overline{BI}=\overline{BH}$이므로

$\frac{3a}{5}=8-a\qquad\therefore a=5$

$\therefore B(5,\ 0)$

두 점 A$(8,\ 6)$, B$(5,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{6-0}{8-5}(x-5)\qquad\therefore y=2x-10$

따라서 $m=2$, $n=-10$이므로

$m+n=2+(-10)=-8$

다른 풀이 1

점 A$(8,\ 6)$이므로 $\overline{AH}=6$, $\overline{OH}=8$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OA}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\overline{BH}=\overline{BI}=x$라고 하면 $\overline{OB}=8-x$

두 삼각형 OBI와 OAH가 서로 닮음이므로

$\overline{OB}:\overline{BI}=\overline{OA}:\overline{AH}$에서

$(8-x):x=10:6$

$10x=48-6x\qquad\therefore x=3$

즉, 점 B의 좌표는 $(5,\ 0)$이다.

두 점 A$(8,\ 6)$, B$(5,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{6-0}{8-5}(x-5)\qquad\therefore y=2x-10$

따라서 $m=2$, $n=-10$이므로

$m+n=2+(-10)=-8$

다른 풀이 2

직선 $y=mx+n$과 y축의 교점을 C라고 하면 두 직선 OC, AH가 서로 평행하므로

$\angle OCB=\angle HAB$

$\overline{BI}=\overline{BH}$이고 $\overline{AB}$는 공통이므로 두 직각삼각형 AIB, AHB는 서로 합동이다.

따라서 $\angle BAI=\angle BAH$

삼각형 OAC에서 $\angle OAC=\angle OCA$이므로

$\overline{OC}=\overline{OA}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

따라서 점 C의 좌표는 $(0,\ -10)$이므로 직선 AC의 기울기 m은

$m=\frac{6-(-10)}{8-0}=2$

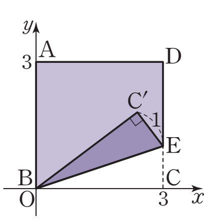
y절편은 -10이므로 $n=-10$

$\therefore m+n=2+(-10)=-8$

23 **접근 방법** | 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓고 문제를 해결한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 생각하면

A$(0,\ 3)$, B$(0,\ 0)$, C$(3,\ 0)$, E$(3,\ 1)$



이때 직선 BC′은 원점을 지나는 직선이므로 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$으로 놓으면 점 E와 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리가 1이다. 즉,

$\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$|3m-1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2-3m=0$, $m(4m-3)=0$

$\therefore m=\frac{3}{4}$ ($\because m>0$)

즉, 직선 BC′의 방정식은

$y=\frac{3}{4}x$

$\therefore 3x-4y=0$

따라서 점 A(0, 3)과 직선 BC′ 사이의 거리는

$\frac{|-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{12}{5}$

24 **접근 방법** | 직선 $y=2x-12a$와 평행한 직선이 이차함수의 그래프와 접하는 점에서 직선 $y=2x-12a$까지의 거리가 두 그래프 사이의 거리의 최솟값이다.

$3<a<7$일 때, 이차함수 $y=x^2-2ax-20$의 그래프와 직선 $y=2x-12a$가 만나지 않으므로 기울기가 2인 직선이 이차함수 $y=x^2-2ax-20$에 접할 때의 접점이 점 P일 때, 점 P와 직선 $y=2x-12a$ 사이의 거리가 최소가 된다.

$y=x^2-2ax-20$에 접하고 기울기가 2인 직선을

$y=2x+b$ ······ ㉠

라고 하면

$x^2-2ax-20=2x+b$

$x^2-2(a+1)x-20-b=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2+(20+b)=0$

$b=-(a+1)^2-20$

$=-a^2-2a-21$

이므로 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=2x-a^2-2a-21$

즉, $f(a)$는 두 직선 $y=2x-12a$와

$y=2x-a^2-2a-21$ 사이의 거리와 같으므로

직선 $y=2x-12a$ 위의 점 $(6a, 0)$과 직선

$y=2x-a^2-2a-21$, 즉 $2x-y-a^2-2a-21=0$

사이의 거리를 구하면

$f(a)=\frac{|12a-a^2-2a-21|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$=\frac{|-a^2+10a-21|}{\sqrt{5}}$

$=\frac{|-(a-5)^2+4|}{\sqrt{5}}$

따라서 $3<a<7$인 실수 a에 대하여 $f(a)$의 최댓값은

$f(5)=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

03. 원의 방정식

개념 콕콕 **1 원의 방정식** 95쪽

1 답 (1) 중심의 좌표 : (0, 0), 반지름의 길이 : $\sqrt{5}$

(2) 중심의 좌표 : (3, −1), 반지름의 길이 : 4

(3) 중심의 좌표 : (0, 1), 반지름의 길이 : $\sqrt{2}$

(4) 중심의 좌표 : (4, 0), 반지름의 길이 : 1

2 답 (1) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$

(2) $(x+1)^2+(y-5)^2=3$

3 답 (1) 중심의 좌표 : (−2, 3),

반지름의 길이 : $\sqrt{13}$

(2) 중심의 좌표 : (−1, −4), 반지름의 길이 : 5

(3) 중심의 좌표 : (−3, 0), 반지름의 길이 : 3

(4) 중심의 좌표 : (3, 5), 반지름의 길이 : $\sqrt{13}$

(1) $x^2+y^2+4x-6y=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=13$

따라서 중심의 좌표는 (−2, 3), 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이다.

(2) $x^2+y^2+2x+8y-8=0$에서

$(x+1)^2+(y+4)^2=25$

따라서 중심의 좌표는 (−1, −4), 반지름의 길이는 5이다.

(3) $x^2+y^2+6x=0$에서 $(x+3)^2+y^2=9$

따라서 중심의 좌표는 (−3, 0), 반지름의 길이는 3이다.

(4) $(x-1)(x-5)+(y-2)(y-8)=0$에서

$x^2-6x+y^2-10y+21=0$

$\therefore (x-3)^2+(y-5)^2=13$

따라서 중심의 좌표는 (3, 5), 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이다.

4 답 (1) $(x-3)^2+(y-4)^2=16$

(2) $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

(3) $(x-3)^2+(y+4)^2=9$

(4) $(x+3)^2+(y+4)^2=16$

5 답 (1) $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

(2) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

(3) $(x+4)^2+(y+4)^2=16$

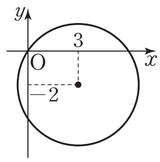
(4) $(x-\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=2$

예제 01 원의 방정식의 표준형 97쪽

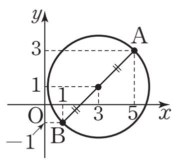
01-1

답 (1) $(x-3)^2+(y+2)^2=13$
(2) $(x-3)^2+(y-1)^2=8$
(3) $x^2+(y-1)^2=8$

(1) 원의 반지름의 길이를 r이라고 하면 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$
이 원이 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로
$(0-3)^2+(0+2)^2=r^2$
$\therefore\ r^2=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

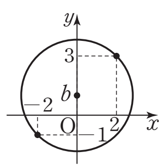


(2) 선분 AB의 중점이 원의 중심이므로 그 좌표는
$\left(\dfrac{5+1}{2},\ \dfrac{3+(-1)}{2}\right)$
$\therefore\ (3,\ 1)$



선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는
$\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(1-5)^2+(-1-3)^2}$
$=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-1)^2=8$

(3) 원의 중심을 $(0,\ b)$, 반지름의 길이를 r이라고 하면 원의 방정식은 $x^2+(y-b)^2=r^2$
이 원이 점 $(-2,\ -1)$을 지나므로 $(-2)^2+(-1-b)^2=r^2$
$\therefore\ b^2+2b+5=r^2$ ······ ㉠
또한 이 원이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로
$2^2+(3-b)^2=r^2$
$\therefore\ b^2-6b+13=r^2$ ······ ㉡
㉠$-$㉡을 하면
$8b-8=0 \qquad \therefore\ b=1$
$b=1$을 ㉠에 대입하면 $r^2=8$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+(y-1)^2=8$



다른 풀이

(1) 원의 반지름의 길이 r은 중심 $(3,\ -2)$와 원 위의 점 $(0,\ 0)$ 사이의 거리이므로
$r=\sqrt{3^2+(-2)^2}=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

(2) 원 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\angle\mathrm{APB}=90°$이므로 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$
이때
$\overline{AP}=\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$
$\overline{BP}=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$
$\overline{AB}=\sqrt{(1-5)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$
이므로
$\{(x-5)^2+(y-3)^2\}+\{(x-1)^2+(y+1)^2\}=32$
$x^2+y^2-6x-2y+2=0$
$\therefore\ (x-3)^2+(y-1)^2=8$

(3) 원의 중심 $(0,\ b)$와 원 위의 두 점 $(-2,\ -1)$, $(2,\ 3)$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이로 서로 같으므로
$\sqrt{(-2)^2+(-1-b)^2}=\sqrt{2^2+(3-b)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$b^2+2b+5=b^2-6b+13$
$8b=8 \qquad \therefore\ b=1$
즉, 반지름의 길이는
$r=\sqrt{(-2)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$
따라서 중심의 좌표가 $(0,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원의 방정식은
$x^2+(y-1)^2=8$

보충 설명

(2)에서 원의 중심을 C라 하면 원의 반지름의 길이 r은 선분 AC의 길이 또는 선분 BC의 길이와 같으므로
$r=\overline{AC}=\sqrt{(3-5)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$
와 같이 구해도 된다.

01-2

답 ①

선분 AB의 중점이 원의 중심이므로 그 좌표는
$\left(\dfrac{-2+4}{2},\ \dfrac{-7+1}{2}\right) \qquad \therefore\ (1,\ -3)$
선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는
$\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2+(1+7)^2}=\dfrac{1}{2}\times10=5$
즉, 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y+3)^2=25$
따라서 $a=1$, $b=-3$, $r=5$ ($\because\ r>0$)이므로
$a+b+r=1+(-3)+5=3$

01-3 답 17

원의 중심이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로 중심을 $(a,\ a-1)$이라고 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+\{y-(a-1)\}^2=c$

이 원이 점 $(-5,\ 0)$을 지나므로

$(-5-a)^2+(0-a+1)^2=c$

$\therefore\ 2a^2+8a+26=c$ ...... ㉠

또한 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$(1-a)^2+(2-a+1)^2=c$

$\therefore\ 2a^2-8a+10=c$ ...... ㉡

㉠－㉡을 하면

$16a+16=0 \qquad \therefore\ a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$2-8+26=c \qquad \therefore\ c=20$

즉, 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+2)^2=20$

따라서 $a=-1,\ b=-2,\ c=20$이므로

$a+b+c=-1+(-2)+20=17$

다른 풀이

원의 중심 $(a,\ a-1)$과 원 위의 두 점 $(-5,\ 0)$, $(1,\ 2)$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이로 서로 같으므로

$\sqrt{(-5-a)^2+(-a+1)^2}=\sqrt{(1-a)^2+(2-a+1)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$2a^2+8a+26=2a^2-8a+10$

$16a=-16 \qquad \therefore\ a=-1$

이때 반지름의 길이는

$\sqrt{(-5+1)^2+2^2}=\sqrt{20}$

이므로 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+2)^2=20$

따라서 $a=-1,\ b=-2,\ c=20$이므로

$a+b+c=-1+(-2)+20=17$

예제 02 원의 방정식의 일반형 99쪽

02-1 답 (1) 중심의 좌표 : $(1,\ 1)$, 반지름의 길이 : $\sqrt{5}$
(2) 중심의 좌표 : $(-2,\ 3)$, 반지름의 길이 : 5

(1) 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고 세 점 $\mathrm{P}(0,\ -1)$, $\mathrm{Q}(-1,\ 0)$, $\mathrm{R}(3,\ 2)$의 좌표를 차례대로 대입하여 정리하면

$B-C=1$ ...... ㉠

$A-C=1$ ...... ㉡

$3A+2B+C=-13$ ...... ㉢

㉠＋㉢을 하면

$3A+3B=-12$

$\therefore\ A+B=-4$ ...... ㉣

㉡＋㉢을 하면

$4A+2B=-12$

$\therefore\ 2A+B=-6$ ...... ㉤

㉤－㉣을 하면

$A=-2$이므로 $B=-2,\ C=-3$

즉, 원의 방정식은 $x^2+y^2-2x-2y-3=0$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=5$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 1)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

(2) 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고 세 점 $\mathrm{P}(2,\ 0)$, $\mathrm{Q}(1,\ -1)$, $\mathrm{R}(3,\ 3)$의 좌표를 차례대로 대입하여 정리하면

$2A+C=-4$ ...... ㉠

$A-B+C=-2$ ...... ㉡

$3A+3B+C=-18$ ...... ㉢

㉠－㉡을 하면

$A+B=-2$ ...... ㉣

㉢－㉠을 하면

$A+3B=-14$ ...... ㉤

㉤－㉣을 하면

$2B=-12$

즉, $B=-6$이므로 $A=4,\ C=-12$

즉, 원의 방정식은 $x^2+y^2+4x-6y-12=0$

$\therefore\ (x+2)^2+(y-3)^2=25$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ 3)$, 반지름의 길이는 5이다.

02-2 답 5

세 점 $(-4,\ 0)$, $(-2,\ 4)$, $(5,\ 3)$을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고 세 점의 좌표를 차례대로 대입하여 정리하면

$4A-C=16$

$2A-4B-C=20$

$5A+3B+C=-34$

세 식을 연립하여 풀면

$A=-2,\ B=0,\ C=-24$

즉, 원의 방정식은

$x^2+y^2-2x-24=0$

이때 점 $(1, a)$가 이 원 위의 점이므로

$a^2=25 \qquad \therefore a=\pm 5$

따라서 양수 a의 값은 5이다.

02-3 답 ③

삼각형의 외접원은 삼각형의 세 꼭짓점을 지나는 원이므로 먼저 주어진 세 직선으로 만들어지는 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표를 구해야 한다. 즉, 세 직선

$x+2y-12=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x-y+3=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$x-3y+3=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$

에 대하여 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=5$

이므로 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(2, 5)$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=-3,\ y=0$

이므로 두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $(-3, 0)$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$x=6,\ y=3$

이므로 두 직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는 $(6, 3)$

이때 세 점 $(2, 5)$, $(-3, 0)$, $(6, 3)$을 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고

세 점의 좌표를 차례대로 대입하여 정리하면

$2A+5B+C=-29$

$-3A+C=-9$

$6A+3B+C=-45$

세 식을 연립하여 풀면

$A=-4,\ B=0,\ C=-21$

즉, 원의 방정식은

$x^2+y^2-4x-21=0$

$\therefore (x-2)^2+y^2=5^2$

따라서 구하는 외접원의 넓이는

$\pi\times 5^2=25\pi$

예제 03 좌표축에 접하는 원의 방정식 101쪽

03-1 답 (1) $(x-3)^2+(y-4)^2=9$ 또는 $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

(2) $\dfrac{225}{16}\pi$

(1) 점 $(0, 4)$에서 y축에 접하므로 원의 중심을 $(a, 4)$라고 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-4)^2=a^2$

$\pi a^2=9\pi$에서 $a^2=9$

$\therefore a=3$ 또는 $a=-3$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-4)^2=9$ 또는 $(x+3)^2+(y-4)^2=9$

(2) 점 $(3, 0)$에서 x축에 접하므로 원의 중심을 $(3, b)$라고 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-b)^2=b^2$

이 원이 점 $(0, -6)$을 지나므로

$9+(-6-b)^2=b^2$

$12b+45=0$

$\therefore b=-\dfrac{15}{4}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{15}{4}\right)^2=\dfrac{225}{16}\pi$

03-2 답 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-6)^2=25$

원의 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a+1)$이라고 하면 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a|$이다.

즉, 원의 방정식은

$(x-a)^2+\{y-(a+1)\}^2=a^2$

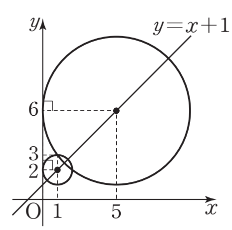
이때 이 원이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$(1-a)^2+(2-a)^2=a^2$

$a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$



(i) $a=1$일 때, 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

(ii) $a=5$일 때, 구하는 원의 방정식은

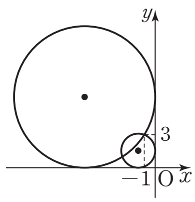
$(x-5)^2+(y-6)^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-6)^2=25$

03-3 답 ④

원이 점 $(-1,\ 3)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 주어진 원의 중심은 오른쪽 그림과 같이 제2사분면 위에 있어야 한다.



이때 반지름의 길이를 r이라고 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이므로 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$(-1+r)^2+(3-r)^2=r^2$

$\therefore\ r^2-8r+10=0$

$f(r)=r^2-8r+10$이라 하고, 방정식 $f(r)=0$의 판별식을 D라고 하면

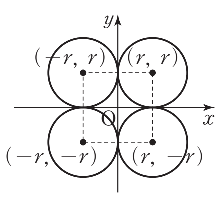
$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-1\times10=6>0$

또한 근과 계수의 관계에 의하여 (두 근의 합)$=8>0$, (두 근의 곱)$=10>0$이므로 방정식 $f(r)=0$은 서로 다른 두 양의 실근을 가진다.

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은 8이다.

보충 설명

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이 x축과 y축에 동시에 접하는 경우는 다음 그림과 같이 $r=|a|=|b|$일 때이다.



이때 원의 중심이

(1) 제1사분면에 있으면 ➡ $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

(2) 제2사분면에 있으면 ➡ $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

(3) 제3사분면에 있으면 ➡ $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

(4) 제4사분면에 있으면 ➡ $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

또한 원이 x축과 y축에 동시에 접하는 경우에는 원의 중심이 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있어야 함을 알 수 있다.

예제 04 점이 나타내는 도형의 방정식 103쪽

04-1 답 (1) $(x+3)^2+y^2=16$
(2) $(x+17)^2+y^2=324$

(1) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$에서 $2\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$2\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-5)^2+y^2}$

양변을 제곱하면

$4(x^2+2x+1+y^2)=x^2-10x+25+y^2$

$x^2+y^2+6x-7=0$

$\therefore\ (x+3)^2+y^2=16$

(2) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$에서 $3\overline{AP}=2\overline{BP}$이므로

$3\sqrt{(x+5)^2+y^2}=2\sqrt{(x-10)^2+y^2}$

양변을 제곱하면

$9(x^2+10x+25+y^2)=4(x^2-20x+100+y^2)$

$x^2+y^2+34x-35=0$

$\therefore\ (x+17)^2+y^2=324$

보충 설명

$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$에서 $m\neq n$이면 점 P가 나타내는 도형은 원이 된다.

하지만 $m=n$이면 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:1$, 즉 $\overline{AP}=\overline{BP}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB의 수직이등분선이 된다는 것에 주의해야 한다.

04-2 답 ③

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\overline{OP}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$에서

$x^2+y^2=(x-2)^2+(y-3)^2+(x-4)^2+y^2$

$x^2+y^2-12x-6y+29=0$

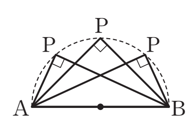
$\therefore\ (x-6)^2+(y-3)^2=16$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(6,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 4인 원이므로 구하는 도형의 길이는

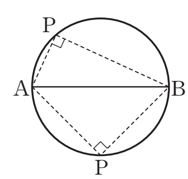
$2\pi\times4=8\pi$

보충 설명

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 정점 A, B에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$을 만족시키는 삼각형 PAB는 $\angle APB=90°$인 직각삼각형이다.



이때 반원에 대한 원주각의 크기는 항상 $90°$이므로 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 임의의 점 P를 잡으면 삼각형 PAB는 $\angle APB=90°$인 직각삼각형이다.

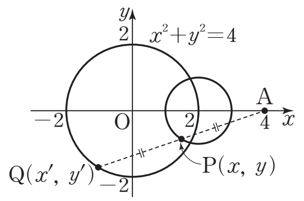


따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.

04-3 답 (1) $(x-2)^2+y^2=1$
(2) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

(1) 점 P의 좌표를 (x, y), 원 $x^2+y^2=4$ 위의 임의의 점을 $Q(x', y')$이라고 하면 점 $Q(x', y')$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$x'^2+y'^2=4$ ······ ㉠



또한 점 $P(x, y)$는 선분 AQ의 중점이므로

$x=\frac{4+x'}{2}$, $y=\frac{y'}{2}$

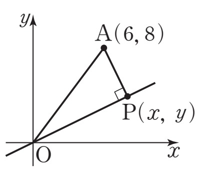
$\therefore x'=2x-4$, $y'=2y$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2x-4)^2+(2y)^2=4$

$\therefore (x-2)^2+y^2=1$

(2) 점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면 오른쪽 그림과 같이 점 A(6, 8)에서 원점을 지나는 직선에 내린 수선의 발이 점 P이므로 삼각형 OPA는 직각삼각형이다.



$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2=\overline{OA}^2$에서

$(x^2+y^2)+(x-6)^2+(y-8)^2=6^2+8^2$

$x^2+y^2-6x-8y=0$

$\therefore (x-3)^2+(y-4)^2=25$

개념 콕콕 **2 원과 직선의 위치 관계** 111쪽

1 답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 접한다.(한 점에서 만난다.)
(3) 만나지 않는다.
(4) 접한다.(한 점에서 만난다.)

(1) $y=x+2$를 $x^2+y^2=9$에 대입하면

$x^2+(x+2)^2=9$

$\therefore 2x^2+4x-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2\times(-5)=14>0$

따라서 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $y=x+3$을 $x^2+y^2+2x=1$에 대입하면

$x^2+(x+3)^2+2x=1$

$2x^2+8x+8=0$ $\quad\therefore x^2+4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times4=0$

따라서 원 O와 직선 l은 접한다.(한 점에서 만난다.)

(3) $y=-x+4$를 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(-x+4)^2=4$

$2x^2-8x+12=0$

$\therefore x^2-4x+6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times6=-2<0$

따라서 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.

(4) $y=5$를 $x^2+y^2=25$에 대입하면

$x^2+5^2=25$ $\quad\therefore x=0$

이 이차방정식은 근이 하나 존재하므로 원 O와 직선 l은 접한다.(한 점에서 만난다.)

2 답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 만나지 않는다.
(3) 접한다.(한 점에서 만난다.)
(4) 접한다.(한 점에서 만난다.)

(1) 원의 중심 (0, 0)과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 원의 중심 (3, 0)과 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.

(3) 원의 중심 (0, 0)과 직선 $x=-4$ 사이의 거리는

$|-4-0|=4$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원 O와 직선 l은 접한다.(한 점에서 만난다.)

(4) 원의 중심 (1, 1)과 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1-1+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원 O와 직선 l은 접한다.(한 점에서 만난다.)

3 답 (1) 내접한다. (2) 외접한다.
(3) 외부에 있다. (4) 서로 다른 두 점에서 만난다.

두 원의 중심거리를 d, 두 원 O, O'의 반지름의 길이를 각각 r, r'이라고 하면

(1) 두 원의 중심은 각각 $(0,\ 0)$, $(0,\ 3)$이므로 $d=3$
$r=2$, $r'=5$이므로
$d=r'-r$에서 두 원은 내접한다.

(2) $x^2+y^2-4x-4y-8=0$에서
$(x-2)^2+(y-2)^2=16$
즉, 두 원의 중심은 각각 $(-2,\ -1)$, $(2,\ 2)$이므로
$d=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-2)^2}=5$
$r=1$, $r'=4$이므로
$d=r+r'$에서 두 원은 외접한다.

(3) $O: (x-5)^2+(y+2)^2=4$
$O': (x-1)^2+(y+1)^2=1$
두 원의 중심은 각각 $(5,\ -2)$, $(1,\ -1)$이므로
$d=\sqrt{(5-1)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{17}$
$r=2$, $r'=1$이므로
$d>r+r'$에서 원 O는 원 O'의 외부에 있다.

(4) 두 원의 중심은 각각 $(0,\ 0)$, $(3,\ -4)$이므로
$d=\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=5$
$r=2$, $r'=4$이므로
$r'-r<d<r'+r$에서 두 원은 서로 다른 두 점에서 만난다.

4 답 (1) $4x-5y+11=0$ (2) $x-y-4=0$
(3) $x=3$ (4) $y=3$

(1) $(x^2+y^2+4x-5y+10)-(x^2+y^2-1)=0$
$\therefore\ 4x-5y+11=0$

(2) 두 원의 방정식 $(x-3)^2+(y+1)^2=2$,
$(x-2)^2+y^2=4$에서
$(x^2+y^2-6x+2y+8)-(x^2+y^2-4x)=0$
$-2x+2y+8=0$
$\therefore\ x-y-4=0$

(3) $(x^2+y^2-9)-(x^2+y^2-8x+15)=0$
$8x-24=0$
$\therefore\ x=3$

(4) 두 원의 방정식 $(x+1)^2+y^2=16$,
$(x+1)^2+(y-2)^2=8$에서
$(x^2+y^2+2x-15)-(x^2+y^2+2x-4y-3)=0$
$4y-12=0$
$\therefore\ y=3$

예제 05 판별식을 이용한 원과 직선의 위치 관계 113쪽

05-1 답 (1) $-5<k<5$ (2) $k=\pm5$
(3) $k<-5$ 또는 $k>5$

$y=-2x+k$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(-2x+k)^2=5$
$\therefore\ 5x^2-4kx+k^2-5=0$
위의 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=-k^2+25$

(1) $\frac{D}{4}>0$일 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로
$-k^2+25>0$, $k^2<25$
$\therefore\ -5<k<5$

(2) $\frac{D}{4}=0$일 때, 원과 직선이 접하므로
$-k^2+25=0$, $k^2=25$
$\therefore\ k=\pm5$

(3) $\frac{D}{4}<0$일 때, 원과 직선이 만나지 않으므로
$-k^2+25<0$, $k^2>25$
$\therefore\ k<-5$ 또는 $k>5$

05-2 답 (1) $m<-\sqrt{2}$ 또는 $m>\sqrt{2}$
(2) $m=\pm\sqrt{2}$ (3) $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

$y=mx+3$을 $x^2+y^2=3$에 대입하면
$x^2+(mx+3)^2=3$
$\therefore\ (m^2+1)x^2+6mx+6=0$
위의 이차방정식의 판별식을 D라고 하면
$\frac{D}{4}=(3m)^2-(m^2+1)\times6=3m^2-6$

(1) $\frac{D}{4}>0$일 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로
$3m^2-6>0$, $m^2>2$
$\therefore\ m<-\sqrt{2}$ 또는 $m>\sqrt{2}$

(2) $\frac{D}{4}=0$일 때, 원과 직선이 접하므로
$3m^2-6=0$, $m^2=2$
$\therefore\ m=\pm\sqrt{2}$

(3) $\frac{D}{4}<0$일 때, 원과 직선이 만나지 않으므로
$3m^2-6<0$, $m^2<2$
$\therefore\ -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

05-3 답 20

직선 $3x-y+2=0$, 즉 $y=3x+2$와 평행한 직선의 기울기는 3이므로 직선의 방정식을

$y=3x+k$ ($k\neq2$인 정수)

라 하고 이 식을 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(3x+k)^2=10$

$\therefore 10x^2+6kx+k^2-10=0$ …… ㉠

이때 원과 직선이 만나므로 이차방정식 ㉠이 실근을 가진다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면 $D\geq0$이므로

$\frac{D}{4}=(3k)^2-10(k^2-10)\geq0$

$k^2\leq100$

$\therefore -10\leq k<2,\ 2<k\leq10$ ($\because k\neq2$)

따라서 구하는 정수 k는 20개이다.

예제 06 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한 원과 직선의 위치 관계 115쪽

06-1 답 (1) $-5<k<5$
(2) $k=\pm5$
(3) $k<-5$ 또는 $k>5$

원의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $x+2y+k=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|2+2\times(-1)+k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|k|}{\sqrt5}$

(1) d가 원의 반지름의 길이 $\sqrt5$보다 작을 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{|k|}{\sqrt5}<\sqrt5$

$|k|<5$

$\therefore -5<k<5$

(2) d가 원의 반지름의 길이 $\sqrt5$와 같을 때, 원과 직선이 접하므로

$\frac{|k|}{\sqrt5}=\sqrt5$

$|k|=5$

$\therefore k=\pm5$

(3) d가 원의 반지름의 길이 $\sqrt5$보다 클 때, 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{|k|}{\sqrt5}>\sqrt5$

$|k|>5$

$\therefore k<-5$ 또는 $k>5$

보충 설명

예제 05와 같이 이차방정식의 판별식을 이용하여 원과 직선의 위치 관계를 구하는 방법은 위의 문제처럼 직선의 방정식을 $x=\square$(또는 $y=\triangle$) 꼴로 변형하기 복잡한 경우나 원의 중심이 원점이 아닌 경우 계산이 복잡하다.
따라서 x 또는 y를 소거하기 쉬운 경우를 제외하고는 원의 중심과 직선 사이의 거리와 반지름의 길이의 크기를 비교하여 원과 직선의 위치 관계를 판별하는 것이 더 편리하다.

06-2 답 (1) $m<-\sqrt2$ 또는 $m>\sqrt2$
(2) $m=\pm\sqrt2$ (3) $-\sqrt2<m<\sqrt2$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=mx+3$, 즉 $mx-y+3=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{m^2+1}}$

(1) d가 원의 반지름의 길이 $\sqrt3$보다 작을 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{3}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt3,\ 3<\sqrt3\times\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $m^2>2$

$\therefore m<-\sqrt2$ 또는 $m>\sqrt2$

(2) d가 원의 반지름의 길이 $\sqrt3$과 같을 때, 원과 직선이 접하므로

$\frac{3}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt3,\ 3=\sqrt3\times\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $m^2=2$

$\therefore m=\pm\sqrt2$

(3) d가 원의 반지름의 길이 $\sqrt3$보다 클 때, 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{3}{\sqrt{m^2+1}}>\sqrt3,\ 3>\sqrt3\times\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $m^2<2$

$\therefore -\sqrt2<m<\sqrt2$

06-3 답 ④

$x^2+y^2+4x-2y+1=0$에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$

원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 $3x+4y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2보다 작을 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{|3\times(-2)+4\times1+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}<2,\ |k-2|<10$

$-10<k-2<10$ $\therefore -8<k<12$

따라서 구하는 정수 k는 $-7,\ -6,\ \cdots,\ 11$의 19개이다.

예제 07 두 원의 교점을 지나는 직선 또는 원의 방정식 117쪽

07-1
답 (1) $x^2+y^2+6x-9y=0$
(2) $x^2+y^2-2y-1=0$ (3) $x-y-4=0$

(1) 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2-6)+k(x^2+y^2+4x-6y-2)=0$
(단, $k\neq-1$인 실수) …… ㉠

이 원이 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$(0+0-6)+k(0+0+0-0-2)=0$

$\therefore\ k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$(x^2+y^2-6)-3(x^2+y^2+4x-6y-2)=0$

$-2x^2-2y^2-12x+18y=0$

$\therefore\ x^2+y^2+6x-9y=0$

(2) $(x-1)^2+(y-2)^2=1$에서

$x^2+y^2-2x-4y+4=0$

$(x-2)^2+(y-3)^2=4$에서

$x^2+y^2-4x-6y+9=0$

이므로 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$(x^2+y^2-2x-4y+4)+k(x^2+y^2-4x-6y+9)$
$=0$ (단, $k\neq-1$인 실수) …… ㉠

이 원이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$(1+0+2-0+4)+k(1+0+4-0+9)=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{1}{2}$

$k=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$(x^2+y^2-2x-4y+4)$
$-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2-4x-6y+9)=0$

$\therefore\ x^2+y^2-2y-1=0$

(3) 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2-6x+2y+8)-(x^2+y^2-4x)=0$

$-2x+2y+8=0 \qquad \therefore\ x-y-4=0$

다른 풀이

(3) 두 원의 방정식

$x^2+y^2-6x+2y+8=0,\ x^2+y^2-4x=0$

을 연립하여 구한 두 원의 교점을 각각 A, B라고 하면 A$(2,\ -2)$, B$(4,\ 0)$

따라서 직선 AB의 방정식은

$y-0=\dfrac{0-(-2)}{4-2}(x-4) \qquad \therefore\ y=x-4$

07-2
답 ②

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2+2ax-4y-b)$
$-(x^2+y^2+bx+2y-a+1)=0$

$\therefore\ (2a-b)x-6y+(a-b-1)=0$

이 직선이 직선 $2x-3y+1=0$과 일치하므로

$\dfrac{2a-b}{2}=\dfrac{-6}{-3}=\dfrac{a-b-1}{1}$

$\therefore\ 2a-b=4,\ a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=1+(-2)=-1$

07-3
답 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

두 원의 공통현의 방정식은 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식과 같으므로

$(x^2+y^2+2x+2y-3)-(x^2+y^2+x+2y-2)=0$

$x-1=0 \qquad \therefore\ x=1$

$x=1$을 $x^2+y^2+2x+2y-3=0$에 대입하면

$y^2+2y=0,\ y(y+2)=0 \qquad \therefore\ y=0$ 또는 $y=-2$

두 원의 교점을 각각 A$(1,\ 0)$, B$(1,\ -2)$라고 하면 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{1+1}{2},\ \dfrac{0+(-2)}{2}\right) \qquad \therefore\ (1,\ -1)$

이때 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2+(-2)^2}=1$

따라서 구하는 원의 방정식은

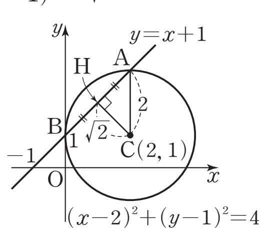
$(x-1)^2+(y+1)^2=1$

예제 08 현의 길이 119쪽

08-1
답 $2\sqrt{2}$

다음 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C$(2,\ 1)$이라 하고, 점 C에서 직선 $y=x+1$, 즉 $x-y+1=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$



이때 $\overline{AC}=2$이므로 직각삼각형 CAH에서

$\overline{AH}^2=\overline{AC}^2-\overline{CH}^2=2^2-(\sqrt{2})^2=2$

$\therefore \overline{AH}=\sqrt{2}$

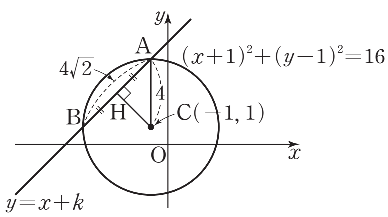
따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{2}$

08-2 답 ⑤

다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B, 원의 중심을 $C(-1, 1)$이라 하고, 점 C에서 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$



이때 $\overline{AC}=4$이므로 직각삼각형 CAH에서

$\overline{CH}^2=\overline{CA}^2-\overline{AH}^2=4^2-(2\sqrt{2})^2=8$

$\therefore \overline{CH}=2\sqrt{2}$

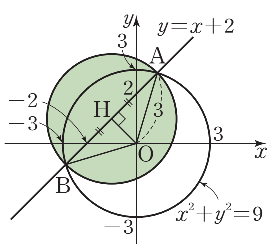
즉, 점 $C(-1, 1)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\overline{CH}=\frac{|-1-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-2+k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$|-2+k|=4 \qquad \therefore k=6\ (\because k>0)$

08-3 답 ③

오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라고 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.



원의 중심 $(0, 0)$에서 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{OH}=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

이때 $\overline{OA}=3$이므로 직각삼각형 AHO에서

$\overline{AH}^2=\overline{AO}^2-\overline{OH}^2=3^2-(\sqrt{2})^2=7$

$\therefore \overline{AH}=\sqrt{7}$

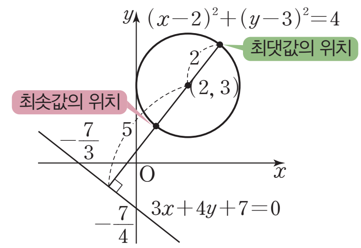
따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi\times(\sqrt{7})^2=7\pi$

예제 09 원 위의 한 점과 직선 사이의 거리 121쪽

09-1 답 $M=7$, $m=3$

원의 중심 $(2, 3)$과 직선 $3x+4y+7=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times2+4\times3+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5$



이때 원의 반지름의 길이는 2이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값 M은

$M=$(원의 중심과 직선 사이의 거리)$+$(반지름의 길이)

$=5+2=7$

또한 최솟값 m은

$m=$(원의 중심과 직선 사이의 거리)$-$(반지름의 길이)

$=5-2=3$

09-2 답 8

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$에서 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(3, 2)$이고 반지름의 길이는 2이다.

원의 중심 $(3, 2)$와 직선 $4x+3y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4\times3+3\times2+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{20}{5}=4$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값 M은

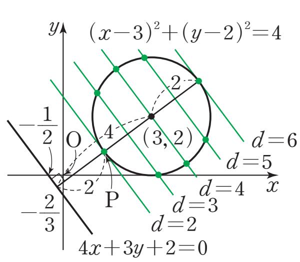
$M=$(원의 중심과 직선 사이의 거리)$+$(반지름의 길이)

$=4+2=6$

또한 최솟값 m은

$m=$(원의 중심과 직선 사이의 거리)$-$(반지름의 길이)

$=4-2=2$



위의 그림과 같이 원 위의 한 점 P와 직선 사이의 거리

d가 자연수가 되는 경우는

$d=2$, $d=3$, $d=4$, $d=5$, $d=6$일 때이고,

$d=2$, $d=6$인 경우에는 점 P가 각각 1개씩,

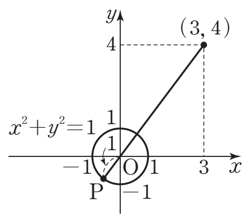
$d=3$, $d=4$, $d=5$인 경우에는 점 P가 각각 2개씩 있다.

따라서 구하는 점 P의 개수는

$1+2+2+2+1=8$

09-3 답 ④

좌표평면에서 $\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$의 값은 점 $(3,\ 4)$와 점 P 사이의 거리와 같고, 점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$의 값이 최대인 경우는 점 P의 위치가 다음 그림과 같을 때이다.



따라서 구하는 최댓값은 원의 중심 $(0,\ 0)$과 점 $(3,\ 4)$ 사이의 거리와 원의 반지름의 길이 1을 합한 것과 같으므로

$\sqrt{3^2+4^2}+1=6$

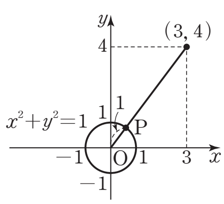
⊕ 보충 설명

같은 방법으로

$\sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}$의 최솟값은 점 P의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때이므로

$\sqrt{3^2+4^2}-1=4$

임을 알 수 있다.



개념 콕콕 **3 원의 접선의 방정식** 127쪽

1 답 (1) $y=2x\pm\sqrt{5}$ (2) $y=x\pm2\sqrt{2}$

(3) $y=-2x\pm4\sqrt{5}$

(1) 원의 반지름의 길이가 1이고 접선의 기울기가 2이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{2^2+1}$ $\quad\therefore\ y=2x\pm\sqrt{5}$

(2) 원의 반지름의 길이가 2이고 접선의 기울기가 1이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=x\pm2\sqrt{1^2+1}$ $\quad\therefore\ y=x\pm2\sqrt{2}$

(3) 원의 반지름의 길이가 4이고 접선의 기울기가 -2이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=-2x\pm4\sqrt{(-2)^2+1}$ $\quad\therefore\ y=-2x\pm4\sqrt{5}$

2 답 (1) $x+y=2$ (2) $-3x+2y=13$

(3) $4x-y=17$

(1) $1\times x+1\times y=2$ $\quad\therefore\ x+y=2$

(2) $-3\times x+2\times y=13$ $\quad\therefore\ -3x+2y=13$

(3) $4\times x+(-1)\times y=17$ $\quad\therefore\ 4x-y=17$

3 답 $y=-\sqrt{3}x+2$ 또는 $y=\sqrt{3}x+2$

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1$ …… ㉠

접선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2y_1=1$

$\therefore\ y_1=\frac{1}{2}$ …… ㉡

한편, 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=1$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면 ${x_1}^2=\frac{3}{4}$

$\therefore\ x_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 ㉠에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=1$ 또는 $-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=1$

$\therefore\ y=-\sqrt{3}x+2$ 또는 $y=\sqrt{3}x+2$

다른 풀이

점 $(0,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기를 m이라고 하면

$y-2=m(x-0)$ $\quad\therefore\ mx-y+2=0$ …… ㉣

원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 ㉣까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{2}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $\sqrt{m^2+1}=2$

$\therefore\ m=\pm\sqrt{3}$

이것을 ㉣에 대입하면 $y=\pm\sqrt{3}x+2$

4 답 (1) $-x+y=4$ 또는 $x+y=4$

(2) $2x-\sqrt{6}y=10$ 또는 $2x+\sqrt{6}y=10$

(1) 원 $x^2+y^2=8$ 위의 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=8$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $\mathrm{P}(0,\ 4)$를 지나므로

$x_1\times0+y_1\times4=8$ $\quad\therefore\ y_1=2$

또한 접점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=8$ …… ㉡

$y_1=2$를 ㉡에 대입하면

$x_1^2+2^2=8$, $x_1^2=4$

$\therefore x_1=-2$ 또는 $x_1=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$-2x+2y=8$ 또는 $2x+2y=8$

$\therefore -x+y=4$ 또는 $x+y=4$

(2) 원 $x^2+y^2=10$ 위의 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=10$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $P(5, 0)$을 지나므로

$x_1\times5+y_1\times0=10$ $\quad\therefore x_1=2$

또한 접점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=10$ …… ㉡

$x_1=2$를 ㉡에 대입하면

$2^2+y_1^2=10$, $y_1^2=6$

$\therefore y_1=-\sqrt{6}$ 또는 $y_1=\sqrt{6}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$2x-\sqrt{6}y=10$ 또는 $2x+\sqrt{6}y=10$

다른 풀이

(1) 접선의 기울기를 m이라고 하면 기울기가 m이고 점 $P(0, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=mx+4$

$\therefore mx-y+4=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y+4=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $2\sqrt{2}$와 같아야 하므로

$\frac{|4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

$4=2\sqrt{2(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2=1$ $\quad\therefore m=\pm1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$-x+y=4$ 또는 $x+y=4$

(2) 접선의 기울기를 m이라고 하면 기울기가 m이고 점 $P(5, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=m(x-5)$

$\therefore mx-y-5m=0$

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-5m=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$과 같아야 하므로

$\frac{|-5m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

$|-5m|=\sqrt{10(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$15m^2=10$ $\quad\therefore m=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$\sqrt{6}x-3y=5\sqrt{6}$ 또는 $\sqrt{6}x+3y=5\sqrt{6}$

$\therefore 2x-\sqrt{6}y=10$ 또는 $2x+\sqrt{6}y=10$

예제 10 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식 129쪽

10-1 답 (1) $y=2x\pm5$ (2) $y=3x\pm2\sqrt{10}$

(1) 접선의 기울기가 2이고 원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{2^2+1}$

$\therefore y=2x\pm5$

(2) 직선 $3x-y+2=0$, 즉 $y=3x+2$에 평행하므로 접선의 기울기는 3이다.

이때 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이는 2이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=3x\pm2\sqrt{3^2+1}$

$\therefore y=3x\pm2\sqrt{10}$

다른 풀이

(1) 기울기가 2인 접선의 방정식을

$y=2x+k$ (k는 상수), 즉 $2x-y+k=0$이라고 하면 이 직선과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|k|=5$

$\therefore k=\pm5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm5$

(2) 직선 $3x-y+2=0$, 즉 $y=3x+2$에 평행하므로 접선의 기울기는 3이다.

이때 접선의 방정식을

$y=3x+k$ (k는 상수), 즉 $3x-y+k=0$이라고 하면 이 직선과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=2$, $|k|=2\sqrt{10}$

$\therefore k=\pm2\sqrt{10}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=3x\pm2\sqrt{10}$

10-2

답 (1) $y=-x-1$ 또는 $y=-x+3$
(2) $y=-2x-3$ 또는 $y=-2x+7$

(1) 기울기가 -1인 접선의 방정식을

$y=-x+k$ (k는 상수), 즉 $x+y-k=0$이라고 하면 이 직선과 원의 중심 $(-1,\ 2)$ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-1+2-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$, $|1-k|=2$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=3$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-x-1$ 또는 $y=-x+3$

(2) 직선 $x-2y+4=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+2$에 수직이므로 접선의 기울기는 -2이다.

이때 접선의 방정식을

$y=-2x+k$ (k는 상수), 즉 $2x+y-k=0$이라고 하면 이 직선과 원 $x^2+y^2-2x-4=0$, 즉 $(x-1)^2+y^2=5$의 중심 $(1,\ 0)$ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|2\times1+0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$, $|2-k|=5$

$\therefore\ k=-3$ 또는 $k=7$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x-3$ 또는 $y=-2x+7$

10-3

답 8

두 점 $(-2,\ 8)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-8}{4-(-2)}=-1$

이고, 이 직선과 평행하므로 구하는 접선의 기울기는 -1이다.

이때 원 $x^2+y^2=8$의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y=-x\pm2\sqrt{2}\times\sqrt{(-1)^2+1}$

$\therefore\ y=-x\pm4$

접선이 원 $x^2+y^2=8$과 제1사분면에서 접하므로

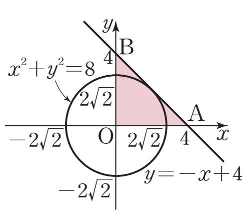
$y=-x+4$

따라서 오른쪽 그림에서

$\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$이므로

구하는 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times4=8$



예제 11 원 위의 한 점에서의 원의 접선의 방정식 131쪽

11-1

답 -8

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$2\times x+4\times y=20$

$\therefore\ x+2y-10=0$

따라서 $a=2$, $b=-10$이므로

$a+b=2+(-10)=-8$

다른 풀이

원의 중심 $(0,\ 0)$과 접점 $(2,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4-0}{2-0}=2$이고, 접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선과 수직이므로 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y-4=-\frac{1}{2}(x-2)$

$\therefore\ x+2y-10=0$

따라서 $a=2$, $b=-10$이므로

$a+b=2+(-10)=-8$

11-2

답 (1) $y=x$ (2) $y=-x+5$

(1) 원의 중심 $(3,\ -1)$과 접점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-(-1)}{1-3}=-1$

이때 접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직이므로 접선의 기울기는 1이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=1\times(x-1)$

$\therefore\ y=x$

(2) $x^2+y^2+2x-4y-3=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=8$

원의 중심 $(-1,\ 2)$와 접점 $(1,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4-2}{1-(-1)}=1$

이때 접선은 원의 중심과 접점을 지나는 직선에 수직이므로 접선의 기울기는 -1이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

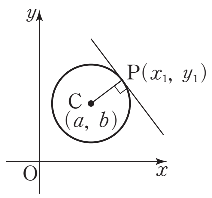
$y-4=-1\times(x-1)$

$\therefore\ y=-x+5$

보충 설명

원 위의 접선은 원의 중심과 접점을 이은 직선과 수직이다.

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ...... ㉠



에서

(i) $x_1 \neq a$, $y_1 \neq b$일 때,

직선 PC의 기울기가 $\frac{y_1-b}{x_1-a}$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-y_1=-\frac{x_1-a}{y_1-b}(x-x_1)$

즉,

$(x_1-a)(x-x_1)+(y_1-b)(y-y_1)=0$

이 식을 변형하면

$(x_1-a)(x-a+a-x_1)+(y_1-b)(y-b+b-y_1)=0$

$\therefore (x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)$
$=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$ ...... ㉡

한편, 점 P(x_1, y_1)은 원 ㉠ 위에 있으므로

$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$

이를 ㉡에 대입하면

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

(ii) $x_1=a$이면 접선의 방정식은

$y=b\pm r$

(iii) $y_1=b$이면 접선의 방정식은

$x=a\pm r$

(i)~(iii)에서 접선의 방정식은

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

11-3 답 ⑤

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 P$(4, 3)$에서의 접선의 방정식은

$4x+3y=25$ ...... ㉠

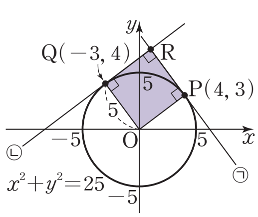
원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 Q$(-3, 4)$에서의 접선의 방정식은

$-3x+4y=25$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $4\times(-3)+3\times4=0$이므로 두 접선은 서로 수직이다.

또한 접선의 성질에 의하여 선분 OP와 접선 ㉠은 서로 수직이고, 선분 OQ와 접선 ㉡은 서로 수직이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 사각형 OPRQ는 원의 반지름을 한 변으로 하는 정사각형이므로 구하는 사각형의 넓이는



$5\times5=25$

예제 12 원 밖의 한 점에서 그은 원의 접선의 방정식 133쪽

12-1 답

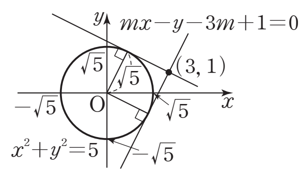
(1) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 또는 $y=2x-5$

(2) $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ 또는 $x=1$

(1) 점 $(3, 1)$을 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식을 $y-1=m(x-3)$, 즉 $mx-y-3m+1=0$이라고 하면 이 직선은 원 $x^2+y^2=5$, 즉 중심의 좌표가 $(0, 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원에 접하므로

$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$\therefore |-3m+1|=\sqrt{5}\times\sqrt{m^2+1}$ ...... ㉠



㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$2m^2-3m-2=0$, $(2m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$ 또는 $m=2$

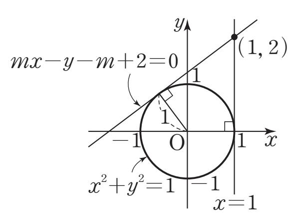
따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 또는 $y=2x-5$

(2) 점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식을 $y-2=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m+2=0$이라고 하면 이 직선은 원 $x^2+y^2=1$, 즉 중심의 좌표가 $(0, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원에 접하므로

$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$\therefore |-m+2|=\sqrt{m^2+1}$ ...... ㉠



㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$-4m+3=0 \qquad \therefore m=\frac{3}{4}$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

한편, 점 $(1, 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선 중에 하나는 점 $(1, 0)$에서 원과 접하므로 이 접선의 방정식은 $x=1$

다른 풀이

(1) 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$ …… ㉠

접선 ㉠이 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$3x_1+y_1=5$ $\quad \therefore\ y_1=-3x_1+5$ …… ㉡

또한 점 $(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1=1,\ y_1=2$ 또는 $x_1=2,\ y_1=-1$

이므로 ㉠에 차례대로 대입하면 구하는 접선의 방정식은 $x+2y=5$ 또는 $2x-y=5$

⊕ 보충 설명

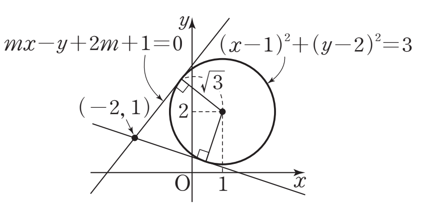
원 밖의 한 점에서 원에 접선을 그으면 접선은 항상 2개가 나온다는 것을 기억한다. 위의 문제 (2)에서도 기울기 m의 값이 1개 밖에 나오지 않았으므로 $x=k$ (k는 상수) 꼴의 접선을 찾아본다.

12-2 답 ⑤

점 $(-2,\ 1)$을 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식을 $y-1=m(x+2)$, 즉 $mx-y+2m+1=0$이라고 하면 이 직선은 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=3$, 즉 중심의 좌표가 $(1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원에 접하므로

$$\frac{|m\times1-2+2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$$

$\therefore\ |3m-1|=\sqrt{3}\times\sqrt{m^2+1}$ …… ㉠



㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2-3m-1=0$

두 접선의 기울기는 이 이차방정식의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 접선의 기울기의 합은 1이다.

12-3 답 $\sqrt{2}$

점 $(4,\ 0)$을 지나고 기울기가 m인 접선의 방정식을 $y=m(x-4)$, 즉 $mx-y-4m=0$이라고 하면 원의 중심 $(2,\ 0)$에서 이 직선까지의 거리 d는 반지름의 길이 r과 같다.

$$\frac{|2m-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=r \qquad \therefore\ |2m|=r\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$(4-r^2)m^2-r^2=0$ …… ㉠

이때 점 $(4,\ 0)$에서 두 접선이 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근의 곱은 -1이다.

$\dfrac{-r^2}{4-r^2}=-1,\ -r^2=-4+r^2,\ r^2=2$

$\therefore\ r=\sqrt{2}$ $(\because\ 0<r<2)$

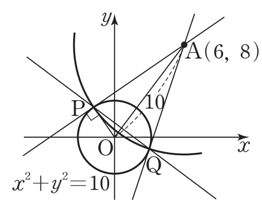
다른 풀이

두 접선이 서로 수직이면 두 접선과 반지름이 이루는 도형은 한 변의 길이가 r인 정사각형이므로 대각선 $\sqrt{2}r=2$에서 $r=\sqrt{2}$

예제 13 두 접점을 지나는 직선(극선)의 방정식 135쪽

13-1 답 $3x+4y-5=0$

오른쪽 그림과 같이 직선 PQ는 점 A를 중심으로 하고 $\overline{\text{AP}}$를 반지름으로 하는 원과 원 $x^2+y^2=10$의 공통현이다.



점 A(6, 8)에서 원의 중심 $(0,\ 0)$까지의 거리는 10이고, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로

$\overline{\text{AP}}=\sqrt{10^2-(\sqrt{10})^2}=3\sqrt{10}$

즉, 원의 중심이 A(6, 8)이고 반지름의 길이가 $3\sqrt{10}$인 원의 방정식은

$(x-6)^2+(y-8)^2=90$

$\therefore\ x^2+y^2-12x-16y+10=0$

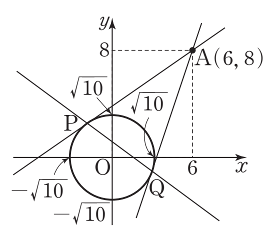
따라서 두 원의 공통현 PQ의 방정식은

$(x^2+y^2-10)-(x^2+y^2-12x-16y+10)=0$

$12x+16y-20=0$ $\quad \therefore\ 3x+4y-5=0$

다른 풀이

점 A(6, 8)에서 원 $x^2+y^2=10$에 그은 두 접선의 접점을 각각 $\text{P}(x_1,\ y_1)$, $\text{Q}(x_2,\ y_2)$라고 하면 접선의 방정식은



$x_1x+y_1y=10$,

$x_2x+y_2y=10$

이때 두 접선은 모두 점 A(6, 8)을 지나므로

$6x_1+8y_1=10$, $6x_2+8y_2=10$

이 두 식은 직선 $6x+8y=10$에 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$의 좌표를 대입한 것과 같고, 두 점을 지나는 직선은 유일하므로 직선 PQ의 방정식은

$3x+4y-5=0$

보충 설명

위의 풀이에서 점 $P(x_1, y_1)$이 원 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=10$

이 식과 $6x_1+8y_1=10$을 연립하여 점 P의 좌표를 구할 수도 있다.

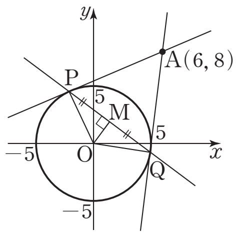
또한 직선 PQ의 방정식 $3x+4y-5=0$과 원 $x^2+y^2=10$을 연립하여 두 점 P, Q의 좌표를 구할 수도 있다.

13-2 답 $5\sqrt{3}$

극선의 방정식 공식을 이용하여 직선 PQ의 방정식을 구하면

$6x+8y=25 \qquad \therefore 6x+8y-25=0$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 (0, 0)에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 M이라고 하면



$\overline{OM}=\dfrac{|-25|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{5}{2}$

원의 반지름의 길이는 5이므로 직각삼각형 OPM에서

$\overline{PM}=\sqrt{5^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PM}=2\times\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

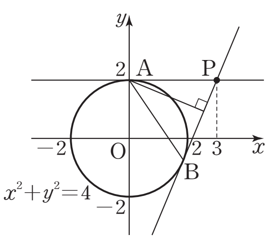
$=5\sqrt{3}$

13-3 답 $\dfrac{54}{13}$

접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y-2=m(x-3)$

$\therefore mx-y-3m+2=0$ ...... ㉠



원과 직선이 접하려면

원의 중심 (0, 0)과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\dfrac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $|-3m+2|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$5m^2-12m=0$, $m(5m-12)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=\dfrac{12}{5}$

즉, 접선의 방정식은

$y=2$ 또는 $12x-5y-26=0$

원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=2$의 교점인 점 A의 좌표는 (0, 2)이므로 선분 AP의 길이는

$\overline{AP}=\overline{BP}=3$

점 A(0, 2)와 직선 $12x-5y-26=0$ 사이의 거리는

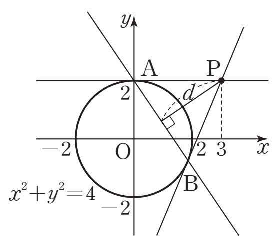
$\dfrac{|-10-26|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\dfrac{36}{13}$

따라서 삼각형 ABP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{36}{13}=\dfrac{54}{13}$

다른 풀이

극선의 방정식 공식을 이용하여 점 P(3, 2)에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점 A, B를 지나는 직선(극선)의 방정식을 구하면



$3x+2y=4$

점 P(3, 2)에서 직선 $3x+2y=4$까지의 거리 d는

$d=\dfrac{|3\times3+2\times2-4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{13}}$

이때 현 AB의 길이는

$\overline{AB}=2\times\sqrt{3^2-\left(\dfrac{9}{\sqrt{13}}\right)^2}=2\times\dfrac{6}{\sqrt{13}}=\dfrac{12}{\sqrt{13}}$

따라서 삼각형 ABP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{\sqrt{13}}\times\dfrac{12}{\sqrt{13}}=\dfrac{54}{13}$

기본 다지기 136쪽～137쪽

1 (1) $k<\dfrac{5}{2}$ (2) $-2<k<3$

2 (1) -1 (2) $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

3 (1) $(x-3)^2+(y+4)^2=9$
(2) $(x+5)^2+(y-3)^2=9$

4 14 **5** 15 **6** 6 **7** (1) 8 (2) $4\sqrt{3}$

8 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ **9** 4 **10** 8

1 (1) $x^2+y^2-2x+4y+2k=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=5-2k$

이 방정식이 원의 방정식이 되려면 반지름의 길이가 양수이어야 하므로

$5-2k>0$

$\therefore k<\frac{5}{2}$

(2) $x^2+y^2+4x-6y+k^2-k+7=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=-k^2+k+6$

이 방정식이 원의 방정식이 되려면 반지름의 길이가 양수이어야 하므로

$-k^2+k+6>0$

$k^2-k-6<0$

$(k+2)(k-3)<0$

$\therefore -2<k<3$

보충 설명

주어진 방정식이 원의 방정식이 되려면 방정식을

$(x-a)^2+(y-b)^2=c$ (a, b, c는 상수)

꼴로 변형했을 때, $c>0$이어야 한다.

2 (1) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

이므로 주어진 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -1)$이고, 직선 $y=kx+1$이 이 원의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 원의 중심 $(2,\ -1)$을 지난다. 즉,

$-1=k\times 2+1$

$\therefore k=-1$

(2) 직선 $2x-y-5=0$, 즉 $y=2x-5$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

$x^2+y^2-2x=0$에서

$(x-1)^2+y^2=1$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 0)$이고, 구하는 직선은 이 원의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 원의 중심 $(1,\ 0)$을 지난다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고, 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

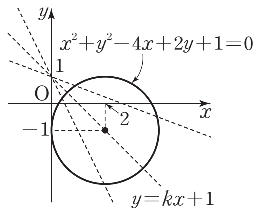
$y=-\frac{1}{2}(x-1)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

보충 설명

(1) $y=kx+1$에서 $-xk+(y-1)=0$이므로 $x=0$, $y=1$일 때, k의 값에 관계없이 식이 항상 성립한다.

즉, 직선 $y=kx+1$은 오른쪽 그림과 같이 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.



3 (1) $x^2+y^2-6x+8y=0$에서

$(x-3)^2+(y+4)^2=25$

이 원의 중심의 좌표가 $(3,\ -4)$이므로 구하는 원의 중심의 좌표는 $(3,\ -4)$이다.

또한 구하는 원은 y축에 접하므로 원의 반지름의 길이는 3이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+4)^2=9$

(2) 구하는 원이 x축에 접하고 반지름의 길이가 3이므로 제2사분면 위에 있는 원의 중심의 y좌표는 3이다.

이때 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 3)$ $(a<0)$이라고 하면

$(x-a)^2+(y-3)^2=9$

또한 이 원이 직선 $4x-3y+14=0$에 접하므로 원의 중심 $(a,\ 3)$과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같다. 즉,

$\frac{|4a-9+14|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$

$|4a+5|=15$

$4a+5=\pm 15$

$\therefore a=-5$ ($\because a<0$)

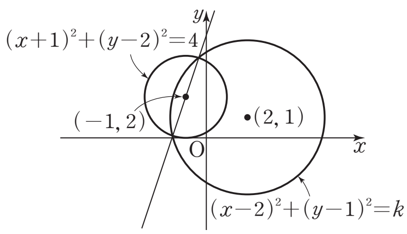
따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-3)^2=9$

보충 설명

반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라고 하면 $d=r$일 때, 원과 직선은 접한다.

4 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=k$가 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$의 둘레의 길이를 이등분하므로 다음 그림과 같이 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$의 중심 $(-1,\ 2)$를 지나야 한다.



$(x-2)^2+(y-1)^2=k$에서

$x^2+y^2-4x-2y+5-k=0$

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$에서

$x^2+y^2+2x-4y+1=0$

이므로 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x^2+y^2-4x-2y+5-k)-(x^2+y^2+2x-4y+1)=0$$

$\therefore\ -6x+2y+4-k=0$

따라서 이 직선이 점 $(-1,\ 2)$를 지나야 하므로

$6+4+4-k=0$

$\therefore\ k=14$

⊕ 보충 설명

두 원의 교점을 지나는 직선이 한 원의 둘레의 길이를 이등분할 때, 두 교점은 이등분되는 원의 지름의 양 끝 점이다.

5 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$, $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}}=3 : 2$에서 $2\overline{\mathrm{AP}}=3\overline{\mathrm{BP}}$이므로

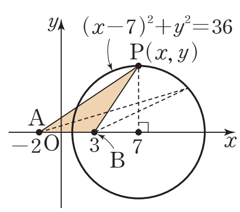
$2\sqrt{(x+2)^2+y^2}=3\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+y^2-14x+13=0$

$\therefore\ (x-7)^2+y^2=36$

즉, 오른쪽 그림과 같이 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(7,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 6인 원이다.



이때 삼각형 ABP의 밑변의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}=3-(-2)=5$로 일정하므로 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되는 것은 삼각형의 높이가 최대일 때이다.

따라서 삼각형 ABP의 높이는 원의 반지름의 길이인 6과 같을 때 최대이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times5\times6=15$

6 주어진 원과 y축이 만나는 교점의 x좌표는 0이므로 $x=0$을 주어진 원의 방정식에 대입하면

$(0-1)^2+(y-1)^2=10$

전개하여 정리하면

$y^2-2y-8=0$

$(y+2)(y-4)=0$

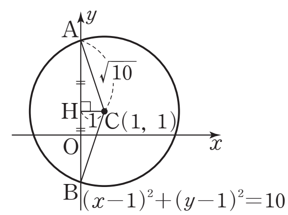
$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=4$

따라서 두 교점의 좌표는 각각 $(0,\ -2)$, $(0,\ 4)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$4-(-2)=6$

다른 풀이

원 $(x-1)^2+(y-1)^2=10$을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



현의 길이를 구하는 방법을 이용하면 y축과 만나는 두 교점 사이의 거리를 구할 수 있다.

원과 y축이 만나는 두 교점을 각각 A, B, 원의 중심을 $\mathrm{C}(1,\ 1)$, 중심 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직각삼각형 AHC에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{HC}}^2}$

$=\sqrt{10-1}$

$=3$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}$

$=2\times3$

$=6$

7 (1) 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2+6x-4y-4)-(x^2+y^2-4y-16)=0$

$6x+12=0$

$\therefore\ x=-2$

$x=-2$를 $x^2+y^2-4y-16=0$에 대입하면

$y^2-4y-12=0$

$(y+2)(y-6)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=6$

따라서 두 교점의 좌표가 $(-2,\ -2)$, $(-2,\ 6)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$6-(-2)=8$

(2) $(x-4)^2+(y-3)^2=21$에서

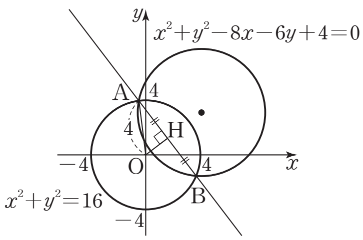
$x^2+y^2-8x-6y+4=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2-16)-(x^2+y^2-8x-6y+4)=0$

$8x+6y-20=0 \qquad \therefore 4x+3y-10=0$ …… ㉠

다음 그림과 같이 두 원의 교점을 각각 A, B라고 하면 선분 AB는 두 원의 공통현이 된다.



원 $x^2+y^2=16$의 중심에서 직선 ㉠에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 선분 AB의 중점이다. 원 $x^2+y^2=16$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\overline{OH}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

이때 $\overline{OA}=4$이고 직각삼각형 AOH에서

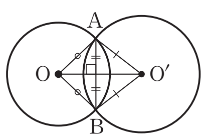
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 공통현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

⊕ 보충 설명

오른쪽 그림의 두 삼각형 OAO′, OBO′에서



$\overline{OA}=\overline{OB}$ ($\because$ 원 O의 반지름),

$\overline{O'A}=\overline{O'B}$ ($\because$ 원 O′의 반지름)

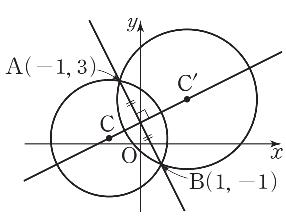
$\overline{OO'}$은 두 삼각형의 공통인 변이므로

$\triangle OAO' \equiv \triangle OBO'$ (SSS 합동)

$\therefore \angle AOO'=\angle BOO'$

따라서 선분 OO′은 이등변삼각형 OAB의 꼭지각의 이등분선이므로 이등변삼각형의 성질에 의하여 두 원의 중심을 이은 선분 OO′은 공통인 현 AB를 수직이등분한다.

8



두 원의 교점 A, B를 이은 선분 AB는 두 원의 공통현이므로 두 원의 중심 C, C′을 지나는 직선은 선분 AB를 수직이등분한다.

이때 직선 AB의 기울기가

$\dfrac{-1-3}{1-(-1)}=-2$

이므로 구하는 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다.

또한 구하는 직선은 선분 AB의 중점을 지나므로 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+1}{2},\ \dfrac{3+(-1)}{2}\right)$

$\therefore (0,\ 1)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{1}{2}(x-0)$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}x+1$

⊕ 보충 설명

두 원의 중심을 지나는 직선에 의하여 공통현이 수직이등분되지만 두 원의 중심을 이은 선분은 공통현에 의하여 수직이 등분되지 않음에 주의한다. 그러나 두 원의 반지름의 길이가 같을 때에는 두 원의 중심을 이은 선분도 공통현에 의하여 수직이등분된다.

9 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(\sqrt{3},\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$\sqrt{3}x-y=4$

이 직선이 원 $(x-a)^2+y^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(a,\ 0)$과 직선 $\sqrt{3}x-y-4=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같다. 즉,

$\dfrac{|\sqrt{3}\times a-0-4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=1$

$\therefore |\sqrt{3}a-4|=2$

양변을 제곱하여 정리하면

$3a^2-8\sqrt{3}a+12=0$

따라서 a에 대한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 a의 값의 곱은

$\dfrac{12}{3}=4$

⊕ 보충 설명

a에 대한 이차방정식 $3a^2-8\sqrt{3}a+12=0$의 판별식을 D라고 하면

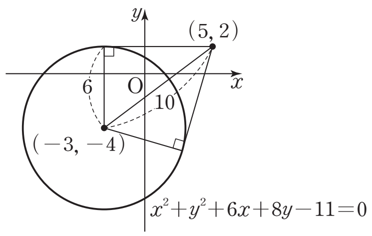
$\dfrac{D}{4}=(-4\sqrt{3})^2-3\times12=12>0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가진다.

따라서 모든 a의 값의 곱을 구할 때, 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.

10 $x^2+y^2+6x+8y-11=0$에서

$(x+3)^2+(y+4)^2=36$



즉, 원의 반지름의 길이는 6이고, 원의 중심 $(-3,\ -4)$와 점 $(5,\ 2)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(5+3)^2+(2+4)^2}=\sqrt{100}=10$

원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름에 수직이므로 피타고라스 정리에 의하여 구하는 접선의 길이는

$\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8$

⊕ 보충 설명

원 밖의 한 점에서 원에 그을 수 있는 접선은 항상 2개이고, 그 두 접선의 길이는 서로 같다.

실력 다지기 138쪽~141쪽

11 ③	**12** ③	**13** 6π	**14** $5<k<\frac{19}{2}$	
15 ②	**16** 10	**17** 50	**18** 4π	**19** 6
20 2	**21** 20	**22** (1) 2 (2) $\sqrt{43}$		**23** $\frac{8\sqrt{15}}{5}$
24 $2\sqrt{2}$	**25** $2x-4y+5=0$	**26** 3		**27** 28
28 $\frac{24}{7}$	**29** -3	**30** $0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$		

11 **접근 방법** | 중심의 x좌표(y좌표)의 절댓값이 반지름의 길이보다 클 경우 원은 y축(x축)과 만나지 않는다. 반대로 중심의 x좌표(y좌표)의 절댓값이 반지름의 길이보다 작거나 같을 경우, 원은 y축(x축)과 만난다.

$x^2+y^2-4x-2y=a-3$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=a+2$

이므로 중심의 좌표가 $(2,\ 1)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{a+2}$인 원이다.

이 원이 x축과 만나려면 $\sqrt{a+2}\geq 1$

양변을 제곱하여 정리하면 $a\geq -1$ ······ ㉠

y축과 만나지 않으려면 $0<\sqrt{a+2}<2$

양변을 제곱하여 정리하면 $-2<a<2$ ······ ㉡

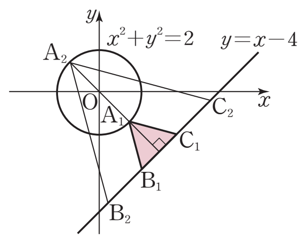
㉠, ㉡에서 $-1\leq a<2$

12 **접근 방법** | 정삼각형의 넓이는 점 A와 직선 $y=x-4$ 사이의 거리의 제곱에 비례한다. 이 거리가 가장 짧을 때와 가장 길 때, 점 A는 원의 중심을 지나고 직선 $y=x-4$에 수직인 직선 위에 있다.

원 위를 움직이는 점 A와 직선 사이의 거리가 정삼각형 ABC의 높이이고,

원점과 직선 $y=x-4$, 즉 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$



정삼각형의 넓이가 최소일 때의 삼각형은 위의 그림의 삼각형 $A_1B_1C_1$이고 높이는

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

최대일 때의 삼각형은 위의 그림의 삼각형 $A_2B_2C_2$이고 높이는

$2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

두 삼각형의 닮음비가 $\sqrt{2} : 3\sqrt{2}=1 : 3$이므로 넓이의 비는

$1^2 : 3^2=1 : 9$

13 **접근 방법** | 반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이므로 먼저 주어진 원의 반지름의 길이를 구한다.

$x^2+y^2-4mx+2(m+1)y+6m^2-7=0$에서

$(x-2m)^2+\{y+(m+1)\}^2=-m^2+2m+8$

이때 $-m^2+2m+8>0$이므로

$m^2-2m-8<0$

$(m+2)(m-4)<0$

$\therefore\ -2<m<4$

원의 둘레의 길이는 원의 반지름의 길이가 최대일 때, 최댓값을 가지므로 원의 반지름의 길이를 r이라고 하면

$r^2=-m^2+2m+8$

$\quad=-(m-1)^2+9$ (단, $-2<m<4$)

즉, $m=1$일 때, r^2이 최댓값 9를 가지므로 원의 둘레의 길이는 $r=3$일 때 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$2\pi\times 3=6\pi$

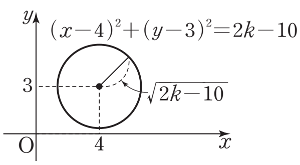
보충 설명

x^2+ax+b 꼴의 다항식은 다음과 같이 완전제곱식을 포함한 다항식 꼴로 변형할 수 있다.

$$x^2+ax+b=\left\{x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}+b-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$$

14 **접근 방법** | 주어진 원이 제1사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 제1사분면 위에 있고, 좌표축과 만나지 않으므로 반지름의 길이는 원의 중심의 x좌표의 절댓값, y좌표의 절댓값 중 작은 값보다 작아야 한다.

$x^2+y^2-8x-6y-2k+35=0$에서
$(x-4)^2+(y-3)^2=2k-10$
이므로 원의 중심의 좌표는 $(4,\ 3)$이고, 이 점은 제1사분면 위에 있다.
이때 이 방정식이 원을 나타내려면
$2k-10>0 \qquad \therefore k>5$ …… ㉠
이 원이 제1사분면 위에 있고 좌표축과 만나지 않으므로 반지름의 길이는 오른쪽 그림과 같이 y좌표인 3보다 작아야 한다. 즉,



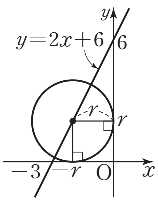
$\sqrt{2k-10}<3,\ 0\le 2k-10<9$
$\therefore 5\le k<\dfrac{19}{2}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $5<k<\dfrac{19}{2}$

보충 설명

원이 좌표축과 만나지 않을 조건을 생각할 때, 원의 중심의 x좌표의 절댓값과 y좌표의 절댓값 중에서 작은 값과 반지름의 길이를 비교하는 것은
(반지름의 길이)$<|$중심의 x좌표$|$,
(반지름의 길이)$<|$중심의 y좌표$|$
에서 $|$중심의 x좌표$|<|$중심의 y좌표$|$라고 하면
(반지름의 길이)$<|$중심의 x좌표$|<|$중심의 y좌표$|$
가 되어 (반지름의 길이)$<|$중심의 x좌표$|$의 범위만을 생각해도 되기 때문이다.
$|$중심의 y좌표$|<|$중심의 x좌표$|$인 경우에도 같은 방법으로 생각할 수 있다.

15 **접근 방법** | 원이 x축과 y축에 동시에 접하면 원의 중심의 x좌표, y좌표의 절댓값이 같고, 그 절댓값은 원의 반지름의 길이와 같다.

오른쪽 그림과 같이 원이 x축과 y축에 동시에 접하고, 중심이 제2사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r이라고 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이다.



이때 원의 중심 $(-r,\ r)$이 직선 $y=2x+6$ 위에 있으므로
$r=-2r+6$
$\therefore r=2$
즉, 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y-2)^2=4$
$\therefore x^2+y^2+4x-4y+4=0$
따라서 $a=4,\ b=-4,\ c=4$이므로
$a+b+c=4+(-4)+4=4$

보충 설명

원이 x축과 y축에 동시에 접하면
(반지름의 길이)$=|$중심의 x좌표$|=|$중심의 y좌표$|$
임을 기억한다.

16 **접근 방법** | 원이 x축에 접하므로
(반지름의 길이)$=|$중심의 y좌표$|$임을 이용한다.

중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고, x축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ …… ㉠
원 ㉠이 점 $A(0,\ 5)$를 지나므로
$a^2+(5-b)^2=b^2$
$\therefore a^2-10b+25=0$ …… ㉡
또한 원 ㉠이 점 $B(8,\ 1)$을 지나므로
$(8-a)^2+(1-b)^2=b^2$
$\therefore a^2-16a-2b+65=0$ …… ㉢
㉢$\times 5-$㉡을 하면
$4a^2-80a+300=0$
$a^2-20a+75=0$
$(a-5)(a-15)=0$
$\therefore a=5\ (\because 0\le a\le 8)$
$a=5$를 ㉡에 대입하여 정리하면 $b=5$
$\therefore a+b=5+5=10$

보충 설명

x축에 접하는 원이 점 $B(8,\ 1)$을 지나려면 원의 중심이 좌표평면의 $y>0$인 y축의 양의 부분 위에 있어야 한다. 이 문제에서는 중심의 x좌표인 a의 값의 범위가 $0\le a\le 8$이므로 원의 중심은 제1사분면 위에 있다.

17 **접근 방법 |** 원과 직선이 접할 때, 원의 중심과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

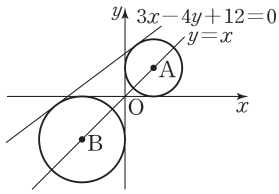
원의 중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면 점 $(a,\ a)$와 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $|a|$와 같으므로

$\dfrac{|3a-4a+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|a|$

$|-a+12|=5|a|$

$-a+12=\pm5a$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=2$

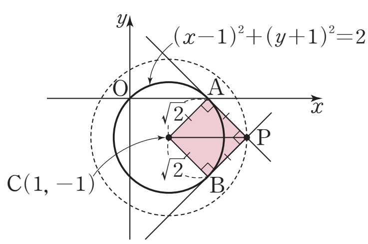


$\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(-3,\ -3)$이라고 하면

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\{2-(-3)\}^2+\{2-(-3)\}^2=50$

18 **접근 방법 |** 원의 접선의 성질에 의하여 원 위의 임의의 두 점에서 접선 두 개가 수직이 되도록 선을 그었을 때 생기는 교점인 P와 원의 중심 사이의 거리가 항상 같으므로 점 P가 나타내는 도형은 원이다.

주어진 원은 중심의 좌표가 $(1,\ -1)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 다음 그림과 같이 원의 중심을 $\mathrm{C}(1,\ -1)$, 두 접점을 각각 A, B라고 하면 원의 접선은 접점을 지나는 반지름에 수직이다.



즉, 사각형 ACBP는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 원의 중심 $\mathrm{C}(1,\ -1)$로부터 2만큼 떨어진 점들의 모임, 즉 중심이 $\mathrm{C}(1,\ -1)$이고, 반지름의 길이가 2인 원이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$의 둘레의 길이이므로

$2\pi\times2=4\pi$

보충 설명

점 P에서 한 원에 그은 두 접선이 서로 수직이 되면 접선의 길이가 원의 반지름의 길이와 같아진다는 것을 알 수 있다.

19 **접근 방법 |** 원 $x^2+y^2=36$과 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원의 교점을 지나는 직선의 방정식이 $x+y-6=0$이다.

중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고, 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=18$

$\therefore\ x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-18=0$ …… ㉠

원 $x^2+y^2=36$과 원 ㉠의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2-36)-(x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-18)=0$

$\therefore\ 2ax+2by-a^2-b^2-18=0$

이 직선이 직선 $x+y-6=0$과 일치하므로

$\dfrac{2a}{1}=\dfrac{2b}{1}=\dfrac{-a^2-b^2-18}{-6}$

$\therefore\ a=b,\ 12b=a^2+b^2+18$

$b=a$를 $12b=a^2+b^2+18$에 대입하면

$12a=a^2+a^2+18$

$2a^2-12a+18=0$

$a^2-6a+9=0,\ (a-3)^2=0$

$\therefore\ a=3,\ b=3$

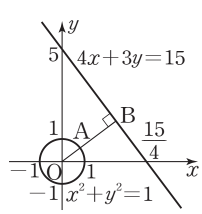
$\therefore\ a+b=3+3=6$

20 **접근 방법 |** 두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$임을 이용한다.

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에 대하여 $a^2+b^2=1$이므로 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점으로 생각할 수 있다.

또한 점 $\mathrm{B}(c,\ d)$에 대하여 $4c+3d=15$이므로 점 $\mathrm{B}(c,\ d)$는 직선 $4x+3y=15$ 위의 점으로 생각할 수 있다.

이때 $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$은 두 점 A, B 사이의 거리와 같으므로 두 점 A, B가 다음 그림과 같을 때, 주어진 식은 최솟값을 가진다.



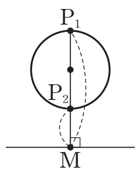
따라서 구하는 최솟값은

(원의 중심과 직선 $4x+3y=15$ 사이의 거리)

$-$(원의 반지름의 길이)

$=\dfrac{|-15|}{\sqrt{4^2+3^2}}-1=3-1=2$

21 **접근 방법** | 원 위의 한 점과 직선 사이의 거리는 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 지나고 직선에 수직인 직선을 그렸을 때, 선분 P_1M의 길이가 최댓값, 선분 P_2M의 길이가 최솟값이 된다.



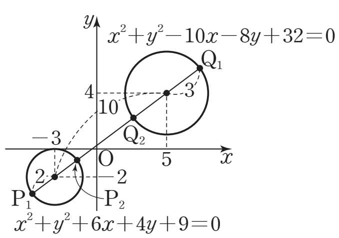
$x^2+y^2+6x+4y+9=0$에서 $(x+3)^2+(y+2)^2=4$이므로 중심의 좌표가 $(-3,\ -2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

$x^2+y^2-10x-8y+32=0$에서

$(x-5)^2+(y-4)^2=9$

이므로 중심의 좌표가 $(5,\ 4)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

다음 그림에서 선분 PQ의 길이가 최대, 최소가 될 때는 두 점 P, Q가 모두 두 원의 중심을 이은 직선 위에 있는 경우이다.



이때 두 원의 중심 $(-3,\ -2)$, $(5,\ 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(5+3)^2+(4+2)^2}=\sqrt{100}=10$

선분 PQ의 길이의 최댓값은 선분 P_1Q_1의 길이이므로

(두 원의 중심 사이의 거리)

$+$(두 원의 반지름의 길이의 합)

$=10+(2+3)=15$

선분 PQ의 길이의 최솟값은 선분 P_2Q_2의 길이이므로

(두 원의 중심 사이의 거리)

$-$(두 원의 반지름의 길이의 합)

$=10-(2+3)=5$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $15+5=20$

22 **접근 방법** | 두 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하여 좌표평면 위에 나타내면 두 원에 동시에 접하는 직선의 개수를 구할 수 있다.

$C_1: x^2+y^2-4x+2y-4=0$에서

$C_1: (x-2)^2+(y+1)^2=9$

$C_2: x^2+y^2+8x-6y-11=0$에서

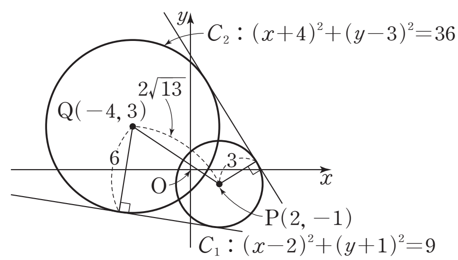
$C_2: (x+4)^2+(y-3)^2=36$

즉, 두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각 $(2,\ -1)$, $(-4,\ 3)$이고 반지름의 길이는 각각 3, 6이다.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 P, Q라고 하면 두 점 P, Q 사이의 거리는

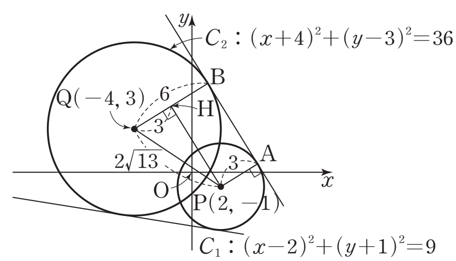
$\sqrt{(-4-2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

(1) 두 원 C_1, C_2는 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만난다.



따라서 구하는 직선의 개수는 2이다.

(2) 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리는 $2\sqrt{13}$이고 다음 그림과 같이 점 P에서 선분 BQ에 내린 수선의 발을 H라고 하면 선분 QH의 길이는 3이다.



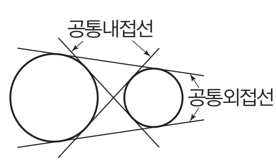
따라서 구하는 선분 AB의 길이는 선분 PH의 길이와 같으므로 직각삼각형 PQH에서

$\overline{AB}=\overline{PH}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{QH}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-3^2}=\sqrt{43}$

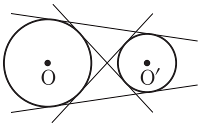
보충 설명

두 원에 동시에 접하는 직선인 공통접선에 대하여 알아보자. 두 원이 공통접선에 대하여 같은 쪽(반대쪽)에 있을 때, 이 공통접선을 공통외접선(공통내접선)이라고 한다. 다음 그림은 한 원이 다른 원의 외부에 있을 때의 공통접선을 나타낸 것이다.



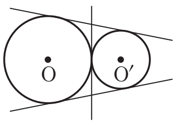
두 원의 위치 관계에 따라 공통접선의 개수는 다음과 같다.

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.



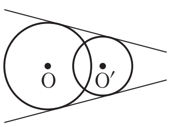
공통외접선 : 2개
공통내접선 : 2개

② 외접한다.



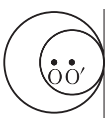
공통외접선 : 2개
공통내접선 : 1개

③ 서로 다른 두 점에서 만난다.



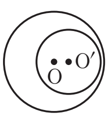
공통외접선 : 2개
공통내접선 : 0개

④ 내접한다.



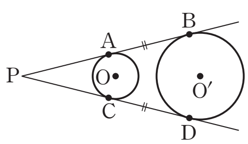
공통외접선 : 1개
공통내접선 : 0개

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

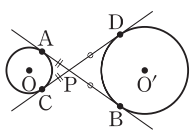


공통외접선 : 0개
공통내접선 : 0개

공통접선에 접하는 두 원의 접점 사이의 거리를 공통접선의 길이라고 한다. 원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로 두 공통접선의 길이는 같다.



$\overline{AB}=\overline{CD}$



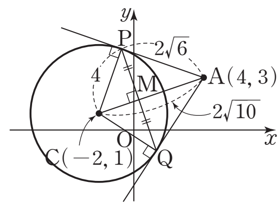
$\overline{AB}=\overline{CD}$

23 **접근 방법 |** 원 밖의 한 점에서 그은 접선은 접점을 지나는 반지름에 수직이므로 접선, 원의 중심과 원 밖의 점을 이은 선분 및 원의 반지름으로 이루어진 삼각형은 직각삼각형이다.

$x^2+y^2+4x-2y-11=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=16$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ 1)$이고 반지름의 길이는 4이므로 원의 중심을 C, 점 A에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q, 두 선분 CA, PQ의 교점을 M이라고 하면 다음 그림과 같다.



직각삼각형 CPA에서 $\overline{CP}=4$이고

$\overline{CA}=\sqrt{(4+2)^2+(3-1)^2}$

$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

이므로

$\overline{PA}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CP}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-4^2}$

$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

이때 두 삼각형 CPA, CQA는 합동이므로

$\overline{PM}=\overline{QM}$

또한 두 선분 CA, PQ는 서로 수직이므로

$\triangle CPA=\dfrac{1}{2}\times\overline{CP}\times\overline{PA}=\dfrac{1}{2}\times\overline{CA}\times\overline{PM}$

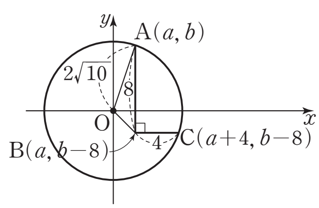
에서 $\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{6}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times\overline{PM}$

$\therefore\ \overline{PM}=\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$

따라서 두 접점 사이의 거리, 즉 선분 PQ의 길이는

$\overline{PQ}=2\overline{PM}=\dfrac{8\sqrt{15}}{5}$

24 **접근 방법 |** 주어진 원의 중심이 원점이 되도록 하는 좌표평면을 잡으면 세 점 A, B, C의 좌표를 생각할 수 있다.



위의 그림과 같이 원의 중심 O를 지나고 선분 BC에 평행한 직선을 x축, 선분 AB에 평행한 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 원의 중심 O는 이 좌표평면의 원점이 된다.

이때 점 $A(a,\ b)$라고 하면 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=4$이므로 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(a,\ b-8)$, $(a+4,\ b-8)$이다.

또한 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{10}$이므로 주어진 원의 방정식은

$x^2+y^2=40$

두 점 A, C는 원 $x^2+y^2=40$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=40$ $\cdots\cdots$ ㉠

$(a+4)^2+(b-8)^2=40$

$\therefore a^2+b^2+8a-16b+40=0$ …… ㉡

㉡－㉠을 하면

$8a-16b+80=0$

$\therefore a=2b-10$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2b-10)^2+b^2=40,\ 5b^2-40b+60=0$

$b^2-8b+12=0,\ (b-2)(b-6)=0$

$\therefore b=2$ 또는 $b=6$

이것을 ㉢에 차례대로 대입하면

$a=-6,\ b=2$ 또는 $a=2,\ b=6$

즉, 점 B의 좌표는 $(-6,\ -6)$ 또는 $(2,\ -2)$이다.

(ⅰ) 점 B의 좌표가 $(-6,\ -6)$이면

$\overline{OB}=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2}=6\sqrt{2}$

그런데 선분 OB의 길이가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{10}$보다 크므로 원의 내부의 점이 아니다.

(ⅱ) 점 B의 좌표가 $(2,\ -2)$이면

$\overline{OB}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

선분 OB의 길이가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{10}$보다 작으므로 원의 내부의 점이다.

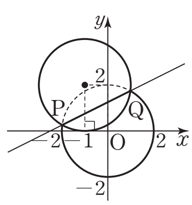
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 선분 OB의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

⊕ 보충 설명

좌표평면을 이용하여 도형의 성질을 확인할 때에는 계산이 간단해지도록 좌표축을 정하는 것이 좋다. 이 문제에서는 원의 방정식은 중심이 원점에 있을 때 식이 간단해지므로 원의 중심이 원점에 오도록 좌표축을 정하였다.

25 **접근 방법** | 원의 접혀진 부분을 일부로 하는 새로운 원을 그려서 생각해 보면 새로운 원은 원래의 원과 반지름의 길이가 같고, 중심의 x좌표는 -1이 된다.

호 PQ는 오른쪽 그림과 같이 점 $(-1,\ 0)$에서 x축에 접하고, 반지름의 길이가 2인 원의 호이다.



x축에 접하는 원의 중심의 y좌표는 $\pm$(반지름의 길이)이고, 호 PQ를 원의 일부로 가지는 원의 중심은 제2사분면 위에 있어야 한다.

즉, 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ 2)$이므로 호 PQ를 원의 일부로 가지는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

$\therefore x^2+y^2+2x-4y+1=0$ …… ㉠

이때 직선 PQ는 원 $x^2+y^2=4$와 원 ㉠의 교점을 지나는 직선이므로 직선 PQ의 방정식은

$(x^2+y^2-4)-(x^2+y^2+2x-4y+1)=0$

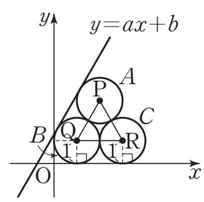
$\therefore 2x-4y+5=0$

⊕ 보충 설명

호 PQ를 원의 일부로 가지는 원은 원 $x^2+y^2=4$와 반지름의 길이가 같은데, 이는 하나의 호에 대하여 원은 하나로 결정되기 때문이다. 주어진 문제에서 원래의 원 조각으로 만들어 낸 새로운 원도 위치만 달라졌을 뿐 원래의 원과 반지름의 길이는 같다.

26 **접근 방법** | 두 원 A, B의 중심을 연결한 직선과 직선 $y=ax+b$는 서로 평행하고, 원과 직선이 서로 접하고 있으므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

다음 그림과 같이 세 원 A, B, C의 중심을 각각 P, Q, R이라고 하면 세 원의 반지름의 길이가 모두 같으므로 삼각형 PQR은 정삼각형이다.



정삼각형의 한 내각의 크기는 60°이고, 직선 QR은 x축과 평행하며 직선 $y=ax+b$는 직선 PQ와 평행하므로

$a=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

이때 원 B는 x축과 y축에 동시에 접하므로 원 B의 중심 Q의 좌표는 $(1,\ 1)$이고, 직선 $y=ax+b$, 즉 $\sqrt{3}x-y+b=0$에 접하므로 원 B의 중심 $Q(1,\ 1)$과 직선 $\sqrt{3}x-y+b=0$ 사이의 거리가 1이다. 즉,

$\dfrac{|\sqrt{3}-1+b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=1,\ |\sqrt{3}-1+b|=2$

$\sqrt{3}-1+b=\pm 2 \qquad \therefore b=3-\sqrt{3}\ (\because b>0)$

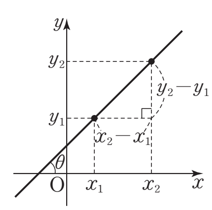
$\therefore a+b=\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})=3$

⊕ 보충 설명

(기울기)$=\dfrac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$

이므로 직선 $y=ax+b$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 기울기 a는

$a=\tan\theta$

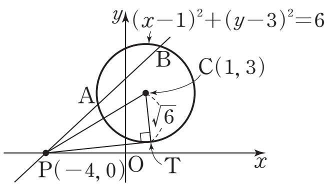


27 **접근 방법** | 점 P는 주어진 원 밖에 있는 점이므로 점 P에서 원에 그은 직선은 할선이고, 점 P에서 원에 접선을 그을 수 있으므로 할선과 접선의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

점 P에서 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=6$에 다음 그림과 같이 접선을 그을 때, 접점을 T라고 하면 원의 할선과 접선의 성질에 의하여

$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$

이므로 접선의 길이, 즉 선분 PT의 길이의 제곱의 값을 구하면 된다.



이때 원의 중심을 C(1, 3)이라고 하면

$\overline{PC}=\sqrt{(1+4)^2+3^2}=\sqrt{34}$

$\overline{CT}=\sqrt{6}$

따라서 직각삼각형 PTC에서

$\overline{PT}^2=\overline{PC}^2-\overline{CT}^2$

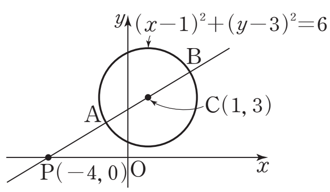
$=(\sqrt{34})^2-(\sqrt{6})^2$

$=28$

$\therefore \overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PT}^2=28$

다른 풀이

두 점 A, B에 대하여 $\overline{PA}\times\overline{PB}$의 값을 구하면 되므로 두 점 A, B의 위치를 계산하기 편한 곳으로 잡은 후에 $\overline{PA}\times\overline{PB}$의 값을 구해도 된다.



예를 들어 위의 그림과 같이 점 P에서 원의 중심 C(1, 3)을 지나는 직선을 그은 후 원과의 교점을 각각 A, B라고 하면

$\overline{PC}=\sqrt{34}$, $\overline{CA}=\overline{CB}=\sqrt{6}$이므로

$\overline{PA}=\overline{PC}-\overline{CA}$

$=\sqrt{34}-\sqrt{6}$

$\overline{PB}=\overline{PC}+\overline{CB}$

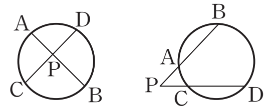
$=\sqrt{34}+\sqrt{6}$

$\therefore \overline{PA}\times\overline{PB}=(\sqrt{34}-6)(\sqrt{34}+\sqrt{6})$

$=34-6=28$

⊕ 보충 설명

(1) 원에서의 선분과 길이 사이의 관계



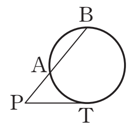
한 원에서 두 현 AB, CD 또는 이들의 연장선의 교점을 P라고 하면

$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

(2) 할선과 접선의 성질

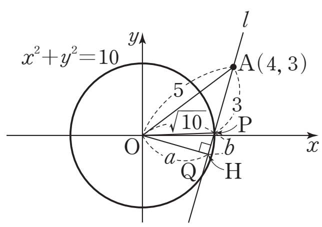
원 밖의 한 점 P에서 그 원에 그은 할선과 접선이 원과 만나는 점을 각각 A, B, T라고 하면

$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$



28 **접근 방법** | 원의 중심 O에서 직선 l에 내린 수선의 발 H는 선분 PQ의 중점이다. 이때 삼각형 OHP와 삼각형 OHA에서 피타고라스 정리를 이용할 수 있다.

원점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{OH}=a$, $\overline{HP}=b$라고 하면 두 삼각형 OHP, OHA는 모두 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=10$ ...... ㉠

$a^2+(b+3)^2=25$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=1$

직선 l의 기울기를 m이라고 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x-4)+3$이고 원의 중심 O와 직선

$mx-y-4m+3=0$

사이의 거리가 3이므로 ($\because a=3$)

$\dfrac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

$|-4m+3|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

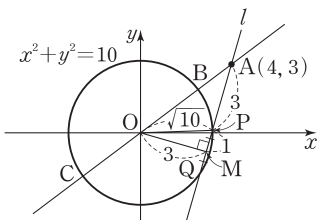
$7m^2-24m=0$, $m(7m-24)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=\dfrac{24}{7}$

직선 l의 기울기는 양수이므로 $m=\dfrac{24}{7}$

다른 풀이 1

직선 AO와 원의 교점을 다음 그림과 같이 각각 B, C 라고 하면



$\overline{AB}=\overline{AO}-\overline{OB}=5-\sqrt{10}$

$\overline{AC}=\overline{AO}+\overline{OC}=5+\sqrt{10}$

원에서 선분과 길이 사이의 관계에 의하여

$\overline{AP}\times\overline{AQ}=\overline{AB}\times\overline{AC}$

$3\times\overline{AQ}=(5-\sqrt{10})(5+\sqrt{10})$

$\therefore\ \overline{AQ}=5$

$\overline{PQ}=\overline{AQ}-\overline{AP}=5-3=2$이므로 현 PQ의 중점을 M이라고 하면 $\overline{PM}=1$

직각삼각형 OMP에서

$\overline{OM}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2}=3$

직선 l의 기울기를 m이라고 하면 직선 l의 방정식은 $y=m(x-4)+3$이고 원의 중심 O와 직선 $mx-y-4m+3=0$ 사이의 거리가 3이므로

$\dfrac{|-4m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

$|-4m+3|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$7m^2-24m=0,\ m(7m-24)=0$

$\therefore\ m=0$ 또는 $m=\dfrac{24}{7}$

직선 l의 기울기는 양수이므로 $m=\dfrac{24}{7}$

다른 풀이 2

점 P의 좌표를 P$(a,\ b)$라고 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=10$ ······ ㉠

선분 AP의 길이는 3이므로

$(a-4)^2+(b-3)^2=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

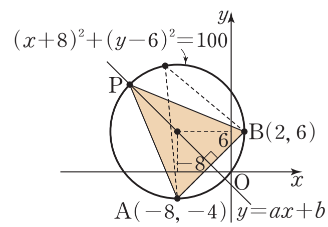
$a=\dfrac{79}{25},\ b=\dfrac{3}{25}$

따라서 직선 l의 기울기는

$$\frac{3-b}{4-a}=\frac{3-\frac{3}{25}}{4-\frac{79}{25}}=\frac{24}{7}$$

29 **접근 방법** | 삼각형 PAB에서 밑변이 선분 AB로 일정하므로 높이가 최대가 되도록 하는 점을 P로 잡는다.

삼각형 PAB의 밑변이 선분 AB로 일정하므로 넓이가 최대가 되려면 높이가 최대가 되어야 한다.
즉, 원 위의 한 점 P와 선분 AB 사이의 거리가 최대가 될 때, 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 된다.
다음 그림과 같이 원의 중심을 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점이 점 P인 경우 점 P와 선분 AB 사이의 거리가 최대가 되는 것을 알 수 있다.



이때 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{6-(-4)}{2-(-8)}=1$

즉, 점 P와 원의 중심 $(-8,\ 6)$을 지나는 직선은 기울기가 -1이므로 이 직선의 방정식은

$y-6=-\{x-(-8)\}$

$\therefore\ y=-x-2$

따라서 $a=-1,\ b=-2$이므로

$a+b=-1+(-2)=-3$

보충 설명

직선 AB와 평행하고 원의 중심을 지나는 직선을 생각해 보면 이 직선과 선분 AB 사이의 거리는 일정하다. 따라서 직선 AB와 평행하고 원의 중심을 지나는 직선과 원 위의 점 사이의 거리가 최대가 되도록 하는 원 위의 점 P를 잡아야 한다.

30 **접근 방법** | 직선 $y=a(x-1)$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 점 $(1,\ 0)$을 중심으로 직선의 기울기를 변화시키면서 5개의 점에서 만나는 경우를 찾아본다.

세 원 $C_1,\ C_2,\ C_3$이 서로 접하고 중심은 모두 x축 위에 있으므로 두 원 $C_2,\ C_3$의 방정식은

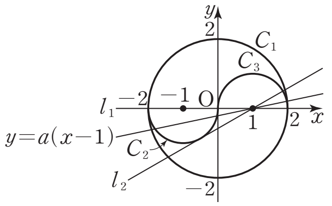
$C_2:(x+1)^2+y^2=1$

$C_3:(x-1)^2+y^2=1$

과 같이 생각할 수 있다.

또한 직선 $y=a(x-1)$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

이때 점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선들은 원 C_1과 항상 서로 다른 두 점에서 만나고 이 두 교점을 제외하면 원 C_3의 일부와는 항상 한 점에서 만난다.
또한 주어진 도형과 직선 $y=a(x-1)$이 서로 다른 다섯 개의 점에서 만나므로 직선 $y=a(x-1)$과 원 C_2의 일부는 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
즉, 직선 $y=a(x-1)$은 다음 그림과 같이 두 직선 l_1과 l_2 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 l_1의 방정식은 $y=0$이므로 직선 $y=a(x-1)$이 직선 l_1과 일치할 때에는 $a=0$

(ii) 직선 l_2는 원 C_2의 일부와 접하므로 원 C_2의 중심 $(-1,\ 0)$과 직선 $y=a(x-1)$, 즉 $ax-y-a=0$ 사이의 거리는 원 C_2의 반지름의 길이 1과 같다. 즉,

$$\frac{|a\times(-1)-0-a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1$$

$$|2a|=\sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$4a^2=a^2+1$$

$$\therefore\ a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데 $a<0$일 때에는 원 C_2의 일부와 만나지 않으므로

$$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(i), (ii)에서 $0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$

기출 다지기 142쪽

31 1 **32** ⑤ **33** ④ **34** 87

31 **접근 방법 |** 원의 중심이 제2사분면에 있고 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r이라고 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이다.

원의 중심 $(-r,\ r)$이 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로

$r=r^2+r-1,\ r^2=1$

$\therefore\ r=1\ (\because\ r>0)$

중심이 $(-1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

$\therefore\ x^2+y^2+2x-2y+1=0$

따라서 $a=2,\ b=-2,\ c=1$이므로

$a+b+c=2+(-2)+1=1$

32 **접근 방법 |** 원과 직선의 위치 관계를 생각하며 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 원 $C: x^2+y^2-4x-2ay+a^2-9=0$이 원점을 지나므로 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$a^2-9=0,\ a^2=9$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=3$

$a=-3$일 때, 원 C의 방정식은

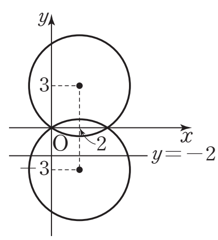
$x^2+y^2-4x+6y=0$

$\therefore\ (x-2)^2+(y+3)^2=13$

$a=3$일 때, 원 C의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6y=0$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-3)^2=13$



이때 $a=3$이면 원 C는 직선 $y=-2$와 만나지 않으므로 조건 (나)에서 $a=-3$

$(x-2)^2+(y+3)^2=13$에 $y=-2$를 대입하면

$(x-2)^2+(-2+3)^2=13$

$(x-2)^2=12$

$\therefore\ x=2\pm2\sqrt{3}$

따라서 원 C와 직선 $y=-2$가 만나는 두 점의 좌표는 각각 $(2-2\sqrt{3},\ -2)$, $(2+2\sqrt{3},\ -2)$이므로 두 점 사이의 거리는

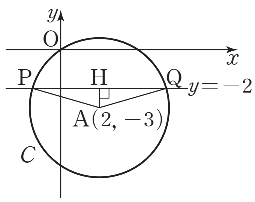
$(2+2\sqrt{3})-(2-2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$

다른 풀이

$a=-3$일 때, 원 C의 방정식은

$x^2+y^2-4x+6y=0\qquad\therefore\ (x-2)^2+(y+3)^2=13$

따라서 원 C의 중심은 $A(2,\ -3)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이다.



원의 중심 A$(2,\ -3)$에서 직선 $y=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 C와 직선 $y=-2$가 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{AH}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}}=4\sqrt{3}$

33 **접근 방법** | 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 추론한다.

두 점 A$(0,\ \sqrt{3})$, B$(1,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{0-\sqrt{3}}{1-0}x+\sqrt{3}$, $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$

원 C의 중심 $(1,\ 10)$과 직선 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|\sqrt{3}+10-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=5$

이고 원 C의 반지름의 길이는 3이므로 원 C 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리를 h라고 하면 $2\le h\le 8$이다.

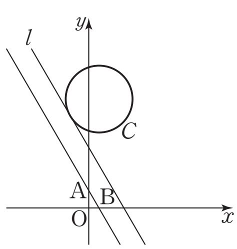
선분 AB의 길이는 $\sqrt{1+3}=2$이고 삼각형 ABP의 넓이를 S라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times 2\times h=h$

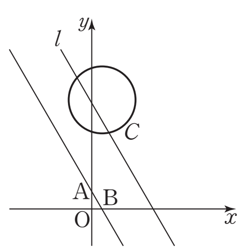
이므로 S가 자연수이려면 h가 자연수이어야 한다.

직선 AB와 평행한 직선 중에서 원 C의 중심으로부터의 거리가 $|5-h|$이고 직선 AB와의 거리가 h인 직선을 l이라고 하면

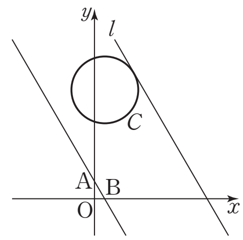
(ⅰ) $h=2$일 때,
직선 l과 원 C는 한 점에서 만나므로 점 P의 개수는 1



(ⅱ) $3\le h\le 7$일 때,
직선 l과 원 C는 서로 다른 두 점에서 만나므로 점 P의 개수는
$5\times 2=10$



(ⅲ) $h=8$일 때,
직선 l과 원 C는 한 점에서 만나므로 점 P의 개수는 1

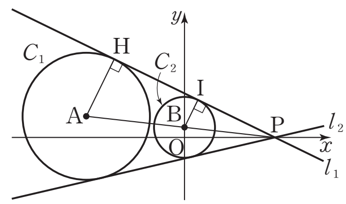


(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 점 P의 개수는

$1+10+1=12$

34 **접근 방법** | 원과 직선의 위치 관계를 생각하여 문제를 해결한다.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B라고 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(-7,\ 2)$, $(0,\ b)$이다.



그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BI}}=\sqrt{5}$이므로 두 삼각형 PAH, PBI의 닮음비는

$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{BI}}=2:1$

이때 점 B는 선분 AP의 중점이므로

$\dfrac{(-7)+a}{2}=0$, $\dfrac{2+0}{2}=b$

$\therefore\ a=7,\ b=1$

점 P$(7,\ 0)$을 지나고 점 B$(0,\ 1)$에서의 거리가 $\sqrt{5}$인 직선의 기울기를 m이라고 하면 이 직선의 방정식은

$y=m(x-7)$, 즉 $mx-y-7m=0$이므로

$\dfrac{|m\times 0-1-7m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$

$|-7m-1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$44m^2+14m-4=0$, $22m^2+7m-2=0$

$(2m+1)(11m-2)=0$

$\therefore\ m=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=\dfrac{2}{11}$

따라서 두 직선 l_1, l_2의 기울기의 곱은

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{2}{11}=-\dfrac{1}{11}$이므로 $c=-\dfrac{1}{11}$

$\therefore\ 11(a+b+c)=11\times\left(7+1-\dfrac{1}{11}\right)=87$

04. 도형의 이동

개념 콕콕 1 평행이동 147쪽

1 답 (1) $(1,\ -4)$ (2) $(5,\ -3)$ (3) $(-2,\ 2)$

2 답 (1) $(3,\ -2)$ (2) $(6,\ -4)$ (3) $(2,\ 0)$

3 답 (1) $2x-y+11=0$ (2) $y=2x+6$
(3) $x^2+y^2-4y+3=0$

(1) $2(x+2)-(y-3)+4=0$
$\therefore\ 2x-y+11=0$
(2) $y-3=2(x+2)-1$ $\quad\therefore\ y=2x+6$
(3) $(x+2)^2+(y-3)^2-4(x+2)+2(y-3)+4=0$
$\therefore\ x^2+y^2-4y+3=0$

4 답 (1) $x-2y-4=0$ (2) $y=1$
(3) $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

(1) $(x-1)-2(y+2)+1=0$
$\therefore\ x-2y-4=0$
(2) $y+2=3$ $\quad\therefore\ y=1$
(3) $\{(x-1)+2\}^2+\{(y+2)-3\}^2=4$
$\therefore\ (x+1)^2+(y-1)^2=4$

예제 01 평행이동 149쪽

01-1 답 (1) $(5,\ 1)$ (2) $x-2y-3=0$

점 $(-1,\ 2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(3,\ 1)$이므로
$-1+a=3,\ 2+b=1$ $\quad\therefore\ a=4,\ b=-1$
(1) 점 $(1,\ 2)$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(1+4,\ 2-1)$ $\quad\therefore\ (5,\ 1)$
(2) 직선 $x-2y+3=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x-4)-2(y+1)+3=0$
$\therefore\ x-2y-3=0$

01-2 답 5

$x^2+y^2+4x-2y+c=0$에서
$(x+2)^2+(y-1)^2=5-c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
원 ㉠을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은
$\{(x-a)+2\}^2+\{(y-b)-1\}^2=5-c$
이 원이 원 $x^2+y^2=1$과 일치하므로
$-a+2=0,\ -b-1=0,\ 5-c=1$
$\therefore\ a=2,\ b=-1,\ c=4$
$\therefore\ a+b+c=2+(-1)+4=5$

다른 풀이

원 $x^2+y^2+4x-2y+c=0$에서
$(x+2)^2+(y-1)^2=5-c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
원의 중심 $(-2,\ 1)$이 평행이동
$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점 $(0,\ 0)$으로 옮겨지므로
$-2+a=0,\ 1+b=0$ $\quad\therefore\ a=2,\ b=-1$
원 ㉠과 원 $x^2+y^2=1$의 반지름의 길이가 같으므로
$5-c=1$ $\quad\therefore\ c=4$
$\therefore\ a+b+c=2+(-1)+4=5$

01-3 답 -2

직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-2=a(x+1)+b$
$\therefore\ y=ax+a+b+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
직선 ㉠은 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$과 수직이므로
$a\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ $\quad\therefore\ a=2$
또한 두 직선이 y축 위의 점에서 만나므로 두 직선의 교점의 좌표는 $(0,\ 3)$이다.
점 $(0,\ 3)$을 ㉠에 대입하면
$3=a+b+2,\ 3=b+4\ (\because\ a=2)$ $\quad\therefore\ b=-1$
$\therefore\ ab=2\times(-1)=-2$

개념 콕콕 2 대칭이동 155쪽

1 답 (1) x축 : $(4,\ -5)$, y축 : $(-4,\ 5)$,
원점 : $(-4,\ -5)$, 직선 $y=x$: $(5,\ 4)$
(2) x축 : $(-3,\ -2)$, y축 : $(3,\ 2)$,
원점 : $(3,\ -2)$, 직선 $y=x$: $(2,\ -3)$
(3) x축 : $(5,\ 2)$, y축 : $(-5,\ -2)$,
원점 : $(-5,\ 2)$, 직선 $y=x$: $(-2,\ 5)$
(4) x축 : $(-4,\ 7)$, y축 : $(4,\ -7)$,
원점 : $(4,\ 7)$, 직선 $y=x$: $(-7,\ -4)$

2 답 (1) x축 : $y=-2x-4$, y축 : $y=-2x+4$,
원점 : $y=2x-4$, 직선 $y=x$: $y=\frac{1}{2}x-2$
(2) x축 : $y=x-4$, y축 : $y=x+4$,
원점 : $y=-x-4$, 직선 $y=x$: $y=-x+4$
(3) x축 : $x-2y+4=0$, y축 : $x-2y-4=0$,
원점 : $x+2y-4=0$,
직선 $y=x$: $2x+y+4=0$
(4) x축 : $x+2y+4=0$, y축 : $x+2y-4=0$,
원점 : $x-2y-4=0$,
직선 $y=x$: $2x-y-4=0$

3 답 (1) x축 : $x=1$, y축 : $x=-1$, 원점 : $x=-1$,
직선 $y=x$: $y=1$
(2) x축 : $x=-2$, y축 : $x=2$, 원점 : $x=2$,
직선 $y=x$: $y=-2$
(3) x축 : $y=-1$, y축 : $y=1$, 원점 : $y=-1$,
직선 $y=x$: $x=1$
(4) x축 : $y=2$, y축 : $y=-2$, 원점 : $y=2$,
직선 $y=x$: $x=-2$

4 답 (1) x축 : $(x-2)^2+(y+3)^2=9$,
y축 : $(x+2)^2+(y-3)^2=9$,
원점 : $(x+2)^2+(y+3)^2=9$,
직선 $y=x$: $(x-3)^2+(y-2)^2=9$
(2) x축 : $x^2+y^2+4x+2y+4=0$,
y축 : $x^2+y^2-4x-2y+4=0$,
원점 : $x^2+y^2-4x+2y+4=0$,
직선 $y=x$: $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

5 답 (1) x축 : $y=-x^2-1$, y축 : $y=x^2+1$
(2) x축 : $y=x^2-4$, y축 : $y=-x^2+4$

예제 02 대칭이동 157쪽

02-1
답 (1) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$
(2) $x^2+y^2+2x+4y+1=0$
(3) $x^2+y^2+2x-4y+1=0$
(4) $x^2+y^2+4x-2y+1=0$

방정식 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$에
(1) y 대신 $-y$를 대입하면
$x^2+(-y)^2-2x+4\times(-y)+1=0$
$\therefore\ x^2+y^2-2x-4y+1=0$
(2) x 대신 $-x$를 대입하면
$(-x)^2+y^2-2\times(-x)+4y+1=0$
$\therefore\ x^2+y^2+2x+4y+1=0$
(3) x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$(-x)^2+(-y)^2-2\times(-x)+4\times(-y)+1=0$
$\therefore\ x^2+y^2+2x-4y+1=0$
(4) x 대신 y, y 대신 x를 대입하면
$y^2+x^2-2y+4x+1=0$
$\therefore\ x^2+y^2+4x-2y+1=0$

02-2
답 ①

원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y+1)^2=4$ …… ㉠
원 ㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$(y-2)^2+(x+1)^2=4$
$\therefore\ (x+1)^2+(y-2)^2=4$

다른 풀이

원의 중심 $(0,\ 0)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(2,\ -1)$
점 $(2,\ -1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-1,\ 2)$
원의 반지름의 길이는 2이므로 구하는 도형의 방정식은
$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

02-3
답 -28

함수 $y=-2x^2+12x+a$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 함수식은
$-y=-2x^2+12x+a$
$\therefore\ y=2x^2-12x-a=2(x^2-6x+9)-a-18$
$=2(x-3)^2-a-18$
이 함수의 최솟값이 10이므로
$-a-18=10\qquad\therefore\ a=-28$

예제 03 점에 대한 대칭이동 159쪽

03-1
답 (1) $(3,\ 1)$ (2) $x-2y+9=0$

(1) 점 $(-1,\ 3)$을 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$\dfrac{-1+a}{2}=1$, $\dfrac{3+b}{2}=2$

$\therefore a=3$, $b=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3,\ 1)$이다.

(2) 직선 $x-2y-3=0$ 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$를 점 $(1,\ 2)$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',\ y')$이라고 하면

$\dfrac{x+x'}{2}=1$, $\dfrac{y+y'}{2}=2$

$\therefore x=2-x'$, $y=4-y'$ …… ㉠

㉠을 $x-2y-3=0$에 대입하면

$(2-x')-2(4-y')-3=0$

$\therefore x'-2y'+9=0$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $x-2y+9=0$

보충 설명

원점에 대한 대칭이동이 x축과 y축에 대하여 차례대로 대칭이동한 결과와 같은 것처럼, 점 $(a,\ b)$에 대한 대칭이동은 예제 **04**에서 배울 직선 $x=a$에 대한 대칭이동과 직선 $y=b$에 대한 대칭이동을 차례대로 적용한 결과와 같다.

03-2 답 ③

선분 PQ의 중점의 좌표가 $(2,\ 1)$이므로

$\dfrac{5+b}{2}=2$, $\dfrac{a+4}{2}=1$

$\therefore a=-2$, $b=-1$

따라서 $P(5,\ -2)$, $Q(-1,\ 4)$이므로 선분 PQ의 길이는

$\overline{PQ}=\sqrt{(-1-5)^2+(4+2)^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

03-3 답 18

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$의 중심 $(2,\ -1)$을 점 $(-1,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면

$\dfrac{2+a}{2}=-1$, $\dfrac{-1+b}{2}=1$

$\therefore a=-4$, $b=3$

원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-4,\ 3)$이고, 반지름의 길이는 3이다.

즉, $(x+4)^2+(y-3)^2=9$

$\therefore x^2+y^2+8x-6y+16=0$

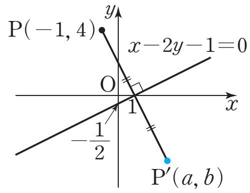
따라서 $a=8$, $b=-6$, $c=16$이므로

$a+b+c=8+(-6)+16=18$

예제 04 직선에 대한 대칭이동 161쪽

04-1 답 (1) $(3,\ -4)$ (2) $y=2x+1$

(1) 점 $P(-1,\ 4)$를 직선 $x-2y-1=0$, 즉 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(a,\ b)$라고 하면



선분 PP′의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{-1+a}{2},\ \dfrac{4+b}{2}\right)$이고, 이 점이 직선 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 위의 점이므로

$\dfrac{4+b}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-1+a}{2}-\dfrac{1}{2}$

$\therefore a-2b=11$ …… ㉠

또한 직선 PP′이 직선 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$과 수직이므로

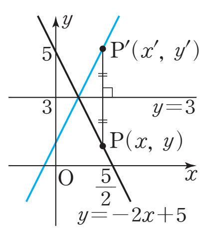
$\dfrac{b-4}{a-(-1)}\times\dfrac{1}{2}=-1$

$\therefore 2a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-4$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(3,\ -4)$이다.

(2) 직선 $y=-2x+5$ 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$를 직선 $y=3$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',\ y')$이라고 하면



선분 PP′의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{x+x'}{2},\ \dfrac{y+y'}{2}\right)$이고, 이 점이 직선 $y=3$ 위의 점이고, x좌표는 변하지 않으므로

$x'=x$, $\dfrac{y+y'}{2}=3$

$\therefore x=x'$, $y=-y'+6$

점 $P(x,\ y)$는 직선 $y=-2x+5$ 위의 점이므로

$-y'+6=-2x'+5$

$\therefore y'=2x'+1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2x+1$

다른 풀이

(2) 주어진 직선과 대칭인 직선의 방정식을 구하는 문제이므로 주어진 직선 위의 임의의 두 점을 선택하여 대칭이동한 점의 좌표를 직접 구한 후, 대칭이동한 두 점의 좌표를 이용하여 주어진 직선과 대칭인 직선의 방정식을 구할 수도 있다.

즉, 직선 $y=-2x+5$ 위의 두 점 $(0,\ 5)$, $(1,\ 3)$을 직선 $y=3$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 각각 $(0,\ 1)$, $(1,\ 3)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{3-1}{1-0}(x-0)$ $\quad\therefore y=2x+1$

04-2 답 (1) 4 (2) $(x+1)^2+(y+2)^2=4$

(1) 두 점 $(4,\ 2)$, $(-1,\ 7)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{4-1}{2},\ \dfrac{2+7}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$\dfrac{9}{2}=\dfrac{3}{2}a+b$ $\quad\therefore 3a+2b=9$ …… ㉠

또한 두 점 $(4,\ 2)$, $(-1,\ 7)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\dfrac{7-2}{-1-4}\times a=-1$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$3+2b=9$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=1+3=4$

(2) 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$의 중심 $(3,\ 2)$를 직선 $y=-x+1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 두 점 $(3,\ 2)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{3+a}{2},\ \dfrac{2+b}{2}\right)$이고, 이 점이 직선 $y=-x+1$ 위의 점이므로

$\dfrac{2+b}{2}=-\dfrac{3+a}{2}+1$

$\therefore a+b=-3$ …… ㉠

또한 두 점 $(3,\ 2)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $y=-x+1$과 수직이므로

$\dfrac{b-2}{a-3}\times(-1)=-1$

$\therefore a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

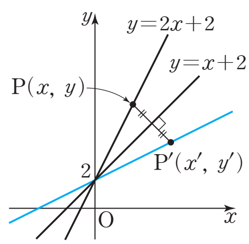
$a=-1,\ b=-2$

따라서 대칭이동한 원의 중심은 $(-1,\ -2)$이고, 원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+2)^2=4$

04-3 답 ③

직선 $y=2x+2$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라고 하면



선분 PP'의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{x+x'}{2},\ \dfrac{y+y'}{2}\right)$이고,

이 점이 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$\dfrac{y+y'}{2}=\dfrac{x+x'}{2}+2$

$\therefore x-y=-x'+y'-4$ …… ㉠

또한 직선 PP'이 직선 $y=x+2$와 수직이므로

$\dfrac{y'-y}{x'-x}\times1=-1$

$\therefore x+y=x'+y'$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=y'-2,\ y=x'+2$

이때 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 직선 $y=2x+2$ 위의 점이므로

$x'+2=2(y'-2)+2$

$\therefore y'=\dfrac{1}{2}x'+2$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+2$이므로

$m=\dfrac{1}{2},\ n=2$

$\therefore mn=\dfrac{1}{2}\times2=1$

예제 05 도형 $f(x,\ y)=0$의 평행이동과 대칭이동 163쪽

05-1 답 풀이 참조

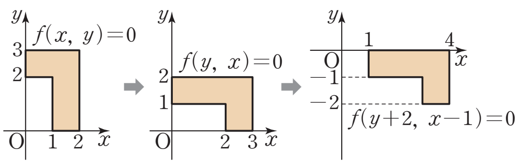
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$f(y,\ x)=0$

방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$f(y+2,\ x-1)=0$

따라서 방정식 $f(y+2,\ x-1)=0$이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



05-2 답 ②

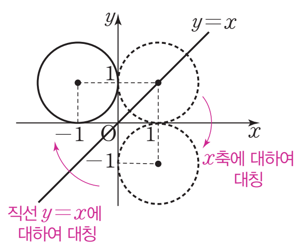
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

$f(x,\ -y)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$f(y,\ -x)=0$

따라서 방정식 $f(y,\ -x)=0$이 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



05-3 답 ①

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후, x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

즉, 방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$g(x+5,\ y-1)=0$

방정식 $g(x+5,\ y-1)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

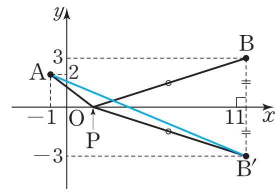
$g(x+5,\ -y-1)=0$

$\therefore\ f(x,\ y)=g(x+5,\ -y-1)$

예제 06 최단 거리 165쪽

06-1 답 13

점 B(11, 3)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면 B′(11, -3)



x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

즉, $\overline{AP}+\overline{B'P}$의 최솟값은 선분 AB′의 길이와 같다.

$\therefore\ \overline{AP}+\overline{BP}\ge\overline{AB'}$

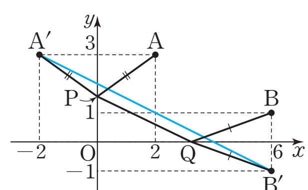
$=\sqrt{(11+1)^2+(-3-2)^2}$

$=\sqrt{169}=13$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 13이다.

06-2 답 $4\sqrt{5}$

점 A(2, 3)을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B(6, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면 A′(-2, 3), B′(6, -1)



y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}=\overline{A'P}$,

x축 위의 점 Q에 대하여 $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$

즉, $\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$의 최솟값은 선분 A′B′의 길이와 같다.

$\therefore\ \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}\ge\overline{A'B'}=\sqrt{(6+2)^2+(-1-3)^2}$

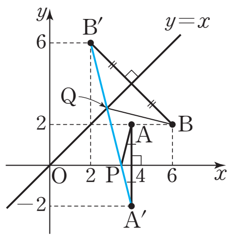
$=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은 $4\sqrt{5}$이다.

06-3 답 ②

점 A(4, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B(6, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면 A′(4, -2), B′(2, 6)

x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, 직선 $y=x$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{B'Q}}$이므로



$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$
$=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$
$\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$의 최솟값은 선분 A′B′의 길이와 같다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}\geq\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(2-4)^2+(6+2)^2}$
$=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 $2\sqrt{17}$이다.

개념 콕콕 **3 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프** 169쪽

1 답 (가) 0 (나) 3 (다) $2x-3$, 그래프는 풀이 참조

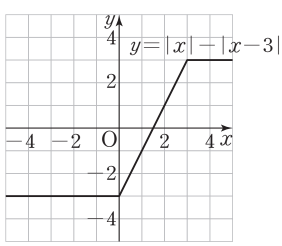
$y=|x|-|x-3|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 $\boxed{0}$, $\boxed{3}$이므로

(i) $x<\boxed{0}$일 때,
$|x|=-x$, $|x-3|=-(x-3)$
$\therefore\ y=-x+(x-3)=-3$

(ii) $\boxed{0}\leq x<\boxed{3}$일 때,
$|x|=x$, $|x-3|=-(x-3)$
$\therefore\ y=x+(x-3)=\boxed{2x-3}$

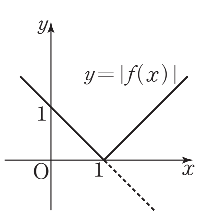
(iii) $x\geq3$일 때,
$|x|=x$, $|x-3|=x-3$
$\therefore\ y=x-(x-3)=3$

(i)~(iii)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

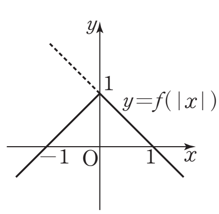


2 답 풀이 참조

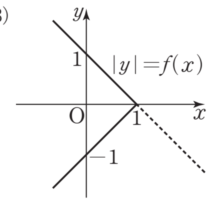
(1)



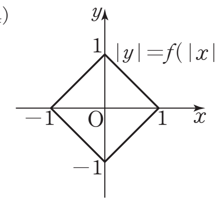
(2)



(3)



(4)

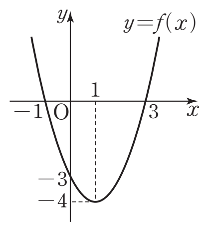


예제 07 **절댓값 기호를 포함한 식의 그래프** 171쪽

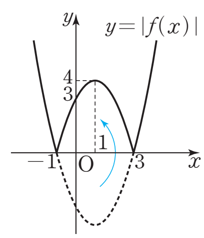
07-1 답 풀이 참조

(1) $y=f(x)$
$=x^2-2x-3$
$=(x-1)^2-4$

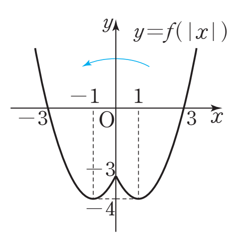
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



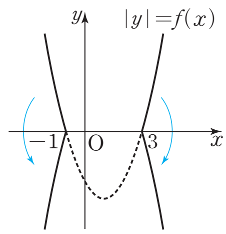
(2) $y=|f(x)|=|x^2-2x-3|$이므로
$y=x^2-2x-3$의 그래프를 그린 후, $y\geq0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동하여 그리면 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(3) $y=f(|x|)=|x|^2-2|x|-3$이므로
$y=x^2-2x-3\ (x\geq0)$의 그래프를 그린 후, $x\geq0$인 부분은 그대로 두고 $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동하여 그리면 $y=f(|x|)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(4) $|y|=f(x)=x^2-2x-3$이므로
$y=x^2-2x-3\ (y\geq0)$의 그래프를 그린 후, $y\geq0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 $y\geq0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하면 $|y|=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



07-2 답 풀이 참조

(1) $|x|+|y|=1$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x, y의 값, 즉 $x=0$, $y=0$을 기준으로 x, y의 값의 범위를 다음과 같이 나눈다.

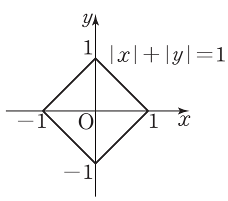
(i) $x\geq 0$, $y\geq 0$일 때,
$x+y=1 \qquad \therefore y=-x+1$

(ii) $x\geq 0$, $y<0$일 때,
$x-y=1 \qquad \therefore y=x-1$

(iii) $x<0$, $y\geq 0$일 때,
$-x+y=1 \qquad \therefore y=x+1$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때,
$-x-y=1 \qquad \therefore y=-x-1$

(i)~(iv)를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



(2) $|x|-|y|=1$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x, y의 값, 즉 $x=0$, $y=0$을 기준으로 x, y의 값의 범위를 다음과 같이 나눈다.

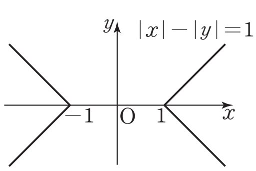
(i) $x\geq 0$, $y\geq 0$일 때,
$x-y=1 \qquad \therefore y=x-1$

(ii) $x\geq 0$, $y<0$일 때,
$x+y=1 \qquad \therefore y=-x+1$

(iii) $x<0$, $y\geq 0$일 때,
$-x-y=1 \qquad \therefore y=-x-1$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때,
$-x+y=1 \qquad \therefore y=x+1$

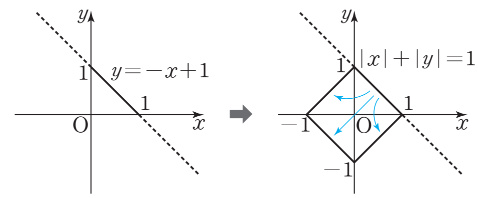
(i)~(iv)를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



다른 풀이

(1) (i) $|x|+|y|=1$에서 절댓값 기호를 없앤 식 $x+y=1$, 즉 $y=-x+1$의 그래프를 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 [그림 1]과 같이 그린다.

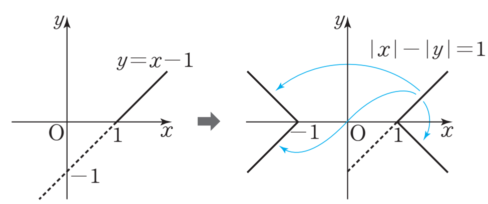
(ii) $y=-x+1$의 그래프의 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 나머지 부분은 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분을 각각 $x=0$ (y축), $y=0$ (x축), 원점 (0, 0)에 대하여 대칭이동하여 [그림 2]와 같이 그린다.



[그림 1] [그림 2]

(2) (i) $|x|-|y|=1$에서 절댓값 기호를 없앤 식 $x-y=1$, 즉 $y=x-1$의 그래프를 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 [그림 1]과 같이 그린다.

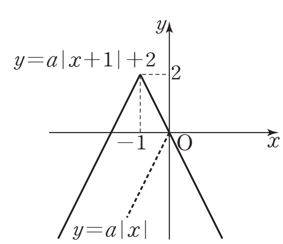
(ii) $y=x-1$의 그래프의 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 나머지 부분은 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분을 각각 $x=0$ (y축), $y=0$ (x축), 원점 (0, 0)에 대하여 대칭이동한 그래프를 [그림 2]와 같이 그린다.



[그림 1] [그림 2]

07-3 답 ②

$y=a|x-p|+q$의 그래프는 $y=a|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로



$p=-1$, $q=2$

$\therefore y=a|x+1|+2$

또한 이 함수의 그래프가 원점 (0, 0)을 지나므로

$0=a|0+1|+2$

$\therefore a=-2$

$\therefore a+p+q=-2+(-1)+2$
$=-1$

보충 설명

절댓값 기호 안의 일차식의 값이 0일 때, 직선의 기울기가 변한다는 것을 이용해도 된다. 즉, 절댓값 기호 안의 식 $x-p$에 기울기가 변하는 경계점의 x좌표 $x=-1$을 대입하면 $-1-p=0$이므로 $p=-1$이고 $q=2$이다.

예제 08 절댓값 기호를 여러 개 포함한 식의 그래프 173쪽

08-1 답 풀이 참조

(1) $y=|x+1|+x-1$에서

(i) $x<-1$일 때,

$|x+1|=-(x+1)$이므로

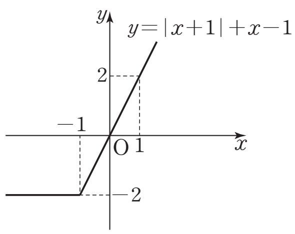
$y=-(x+1)+x-1=-2$

(ii) $x\geq-1$일 때,

$|x+1|=x+1$이므로

$y=(x+1)+x-1=2x$

(i), (ii)에서 함수 $y=|x+1|+x-1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $y=|x+2|+2|x-2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$|x+2|=-(x+2)$, $2|x-2|=-2(x-2)$이므로 $y=-(x+2)-2(x-2)=-3x+2$

(ii) $-2\leq x<2$일 때,

$|x+2|=x+2$, $2|x-2|=-2(x-2)$이므로

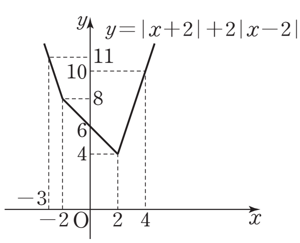
$y=x+2-2(x-2)=-x+6$

(iii) $x\geq2$일 때,

$|x+2|=x+2$, $2|x-2|=2(x-2)$이므로

$y=x+2+2(x-2)=3x-2$

(i)~(iii)에서 함수 $y=|x+2|+2|x-2|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



08-2 답 (1) $a>6$ (2) $-2<m<-1$

$f(x)=|x+2|+|x-4|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$|x+2|=-(x+2)$, $|x-4|=-(x-4)$이므로

$f(x)=-(x+2)-(x-4)$

$=-2x+2$

(ii) $-2\leq x<4$일 때,

$|x+2|=x+2$, $|x-4|=-(x-4)$이므로

$f(x)=x+2-(x-4)=6$

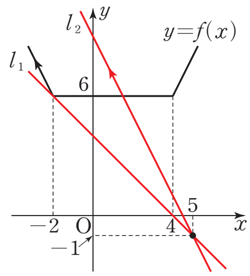
(iii) $x\geq4$일 때,

$|x+2|=x+2$, $|x-4|=x-4$이므로

$f(x)=x+2+x-4$

$=2x-2$

(i)~(iii)에서 함수 $f(x)=|x+2|+|x-4|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(1) 위의 그림에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 a의 값의 범위는 $a>6$

(2) 위의 그림에서 직선 $y=m(x-5)-1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(5,\ -1)$을 지나고 점 $(5,\ -1)$을 지나는 직선 중에 두 직선 l_1, l_2 사이에 위치하는 직선이 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다.

(i) 직선 l_1은 직선 $y=m(x-5)-1$이 점 $(-2,\ 6)$을 지날 때이므로

$6=m(-2-5)-1$, $-7m=7$

$\therefore m=-1$

(ii) 직선 l_2는 직선 $y=m(x-5)-1$이 직선 $y=-2x+2$와 평행할 때이므로

$m=-2$

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=m(x-5)-1$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위는

$-2<m<-1$

08-3 답 ⑤

$f(x)=|x|-|x-2|$에서

(i) $x<0$일 때,

$|x|=-x$, $|x-2|=-(x-2)$이므로

$f(x)=-x+(x-2)=-2$

(ii) $0\le x<2$일 때,

$|x|=x$, $|x-2|=-(x-2)$이므로

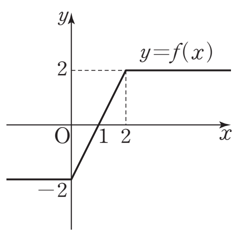
$f(x)=x+(x-2)=2x-2$

(iii) $x\ge 2$일 때,

$|x|=x$, $|x-2|=x-2$이므로

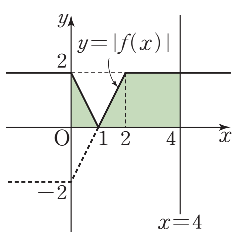
$f(x)=x-(x-2)=2$

(i)~(iii)에서 함수 $y=|x|-|x-2|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후, $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이다.

즉, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1\times 2+\frac{1}{2}\times(2+3)\times 2=6$

기본 다지기 174쪽~175쪽

1 1	**2** -2	**3** ㄱ, ㄷ	**4** 36	**5** -5
6 $\sqrt{2}$	**7** $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$		**8** 5	**9** $2\sqrt{5}$
10 $\frac{3}{4}$				

1 점 $A(-5, 8)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점이 점 $A'(4, 10)$이라고 하면

$-5+m=4$, $8+n=10$

$\therefore m=9$, $n=2$

즉, 삼각형 $A'B'C'$은 삼각형 ABC를 x축의 방향으로 9만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 두 점 B', C'을 각각 구하면

$B'(1+9, 1+2)$ $\quad\therefore B'(10, 3)$

$C'(3+9, 4+2)$ $\quad\therefore C'(12, 6)$

따라서 두 점 B', C'을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{6-3}{12-10}(x-10)$

$\therefore 3x-2y=24$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로

$a+b=3+(-2)=1$

⊕ 보충 설명

직선의 방정식

(1) 점 (a, b)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m(x-a)+b$

(2) 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

(3) x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

2 직선 $2x-4y+3=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-a)-4(y+1)+3=0$

$\therefore 2x-4y+(-2a-1)=0$

이 식이 $2x-4y+3=0$과 일치하므로

$-2a-1=3$ $\qquad\therefore a=-2$

3 $2x-y-1=0$에서 $y=2x-1$이므로 주어진 직선의 기울기는 2이고, 직선은 평행이동하여도 기울기가 변하지 않는다.

즉, 평행이동에 의하여 직선 $2x-y-1=0$과 겹쳐지는 직선은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 중에서 기울기가 2인 직선이다.

ㄱ. x절편이 -1, y절편이 2인 직선은 두 점 $(-1, 0)$, $(0, 2)$를 지나는 직선이므로 기울기는

$\frac{2-0}{0-(-1)}=2$

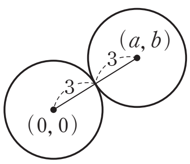
ㄴ. 두 점 $(-1,\ -3)$, $(2,\ 6)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{6-(-3)}{2-(-1)}=3$

ㄷ. 직선 $x+2y+3=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

따라서 주어진 직선과 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4 원 $x^2+y^2=9$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=9$



이 원과 원 $x^2+y^2=9$가 외접하므로 오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같아야 한다.

$\therefore \sqrt{a^2+b^2}=3+3=6$

$\therefore a^2+b^2=6^2=36$

⊕ 보충 설명

두 원의 반지름의 길이를 각각 r, r'이라 하고, 두 원의 중심 사이의 거리를 d라고 하면

(1) 두 원이 내접할 때, $d=|r-r'|$

(2) 두 원이 외접할 때, $d=r+r'$

5 $y=2x^2+4x+5$

$=2(x^2+2x+1)+3$

$=2(x+1)^2+3$ ······ ㉠

이 포물선의 방정식을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p+2$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(p+2)=2\{(x-p)+1\}^2+3$

$\therefore y=2(x-p+1)^2+p+5$

이 포물선의 꼭짓점이 x축 위에 있으므로

$p+5=0$

$\therefore p=-5$

다른 풀이

㉠에서 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 3)$이므로 이 점을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p+2$만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-1+p,\ 3+p+2)$ $\quad\therefore (p-1,\ p+5)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$p+5=0$ $\quad\therefore p=-5$

6 직선 $y=x+k$를 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=x+k$ $\quad\therefore y=-x-k$

직선 $y=x+k$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-x+k$

직선 $y=-x+k$ 위의 점 $(0,\ k)$와 직선 $y=-x-k$, 즉 $x+y+k=0$ 사이의 거리가 2이므로

$\dfrac{|0+k+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2$

$2k=2\sqrt{2}$ $(\because k>0)$ $\quad\therefore k=\sqrt{2}$

7 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a,\ -b)$

점 $(a,\ -b)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-2,\ -b+3)$

점 $(a-2,\ -b+3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-b+3,\ a-2)$

이때 점 $(-b+3,\ a-2)$가 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 겹쳐지므로

$a=-b+3$, $b=a-2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{5}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

8 $x^2+y^2-8x-4y+16=0$에서

$(x-4)^2+(y-2)^2=4$

즉, 원의 중심 $(4,\ 2)$를 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로 직선 $y=ax+b$는 두 점 $(4,\ 2)$, $(0,\ 0)$을 이은 선분을 수직이등분한다.

두 점 $(4,\ 2)$, $(0,\ 0)$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{4+0}{2},\ \dfrac{2+0}{2}\right)$

$\therefore (2,\ 1)$

직선 $y=ax+b$는 두 점 $(4,\ 2)$, $(0,\ 0)$을 지나는 직선과 수직이므로

$\dfrac{0-2}{0-4}\times a=-1$, $\dfrac{1}{2}a=-1$

$\therefore a=-2$

즉, 직선 $y=ax+b$는 점 $(2,\ 1)$을 지나고, 기울기가 -2인 직선이므로

$y-1=-2(x-2)$ $\qquad\therefore\ y=-2x+5$

$\therefore\ a=-2,\ b=5$

또한 원은 대칭이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

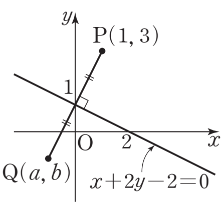
$c=2$

$\therefore\ a+b+c=-2+5+2=5$

보충 설명

원의 중심을 대칭이동하여 이 점을 중심으로 하고 처음 원의 반지름의 길이를 반지름으로 하는 원의 방정식을 구하면 원의 방정식을 이용하여 대칭이동한 것과 같은 식을 얻을 수 있다.

9 점 $\mathrm{P}(1,\ 3)$을 직선 $x+2y-2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+1$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$라고 하면 선분 PQ의 중점의 좌표는



$\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b+3}{2}\right)$

이 점이 직선 $x+2y-2=0$ 위의 점이므로

$\frac{a+1}{2}+2\times\frac{b+3}{2}-2=0$

$\therefore\ a+2b=-3$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또한 직선 PQ는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$과 수직이므로

$\frac{b-3}{a-1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$\therefore\ 2a-b=-1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-1$

따라서 점 Q의 좌표가 $(-1,\ -1)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-3)^2}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

보충 설명

선분 PQ가 직선 $x+2y-2=0$에 의하여 수직이등분되므로 점 P와 직선 $x+2y-2=0$ 사이의 거리가 선분 PQ의 길이의 $\frac{1}{2}$임을 이용하여 구할 수도 있다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=2\times\frac{|1\times1+2\times3-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$=2\sqrt{5}$

10 (i) 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-x,\ y)=0$

방정식 $f(-x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(-x,\ y-2)=0$

(ii) 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

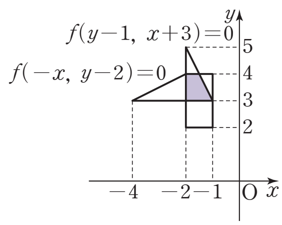
$f(y,\ x)=0$

방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(y-1,\ x+3)=0$

(i), (ii)에서 두 방정식

$f(-x,\ y-2)=0,\ f(y-1,\ x+3)=0$

이 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



따라서 내부의 공통부분의 넓이는

$1\times1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{3}{4}$

실력 다지기 176쪽～177쪽

11 3 **12** ④ **13** 5 **14** $(7,\ 3)$

15 $y=-2x+5$ **16** $-\frac{1}{4}$ **17** $(1,\ -1)$

18 최솟값 : $\frac{441}{13}$, 최댓값 : 61 **19** -2 **20** $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$

11 **접근 방법** | 원을 평행이동하여 그 원이 어떤 직선에 접한다면 평행이동하여 옮겨진 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.

원 $x^2+(y+2)^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+\{(y-1)+2\}^2=4$

$\therefore\ (x-a)^2+(y+1)^2=4$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

원 ㉠이 직선 $4x-3y-5=0$에 접하므로 원의 중심 $(a,\ -1)$과 이 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\dfrac{|4\times a-3\times(-1)-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$에서

$|4a-2|=10$, $4a-2=\pm10$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 양수 a의 값은 3이다.

12 **접근 방법** | 점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면 점 Q의 좌표는 $(-a, -b)$이다.

점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면 $P(a, b)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로 점 Q의 좌표는

$(-a, -b)$

두 점 $P(a, b)$, $Q(-a, -b)$는 곡선

$y=x^2-3x-4$ 위의 점이므로

$b=a^2-3a-4$ …… ㉠

$-b=a^2+3a-4$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2a^2-8=0$, $a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때, $b=6$

(ii) $a=2$일 때, $b=-6$

(i), (ii)에서

$P(-2, 6)$, $Q(2, -6)$ 또는 $P(2, -6)$, $Q(-2, 6)$

이므로

$$\overline{PQ}=\sqrt{(2+2)^2+(-6-6)^2}$$
$$=\sqrt{(-2-2)^2+(6+6)^2}$$
$$=4\sqrt{10}$$

13 **접근 방법** | 점 A에서 시작하여 점 $B(a, b)$가 $b=2a$를 만족시키는 점이 될 때까지 차례대로 규칙에 적용시켜 본다.

점 $A(6, 5)$는 $5<2\times6$이므로

x축의 방향으로 -1만큼 평행이동

➡ 점 $(5, 5)$는 $5<2\times5$이므로

x축의 방향으로 -1만큼 평행이동

➡ 점 $(4, 5)$는 $5<2\times4$이므로

x축의 방향으로 -1만큼 평행이동

➡ 점 $(3, 5)$는 $5<2\times3$이므로

x축의 방향으로 -1만큼 평행이동

➡ 점 $(2, 5)$는 $5>2\times2$이므로

y축의 방향으로 -1만큼 평행이동

➡ 점 $(2, 4)$는 $4=2\times2$이므로

더 이상 이동하지 않는다.

따라서 점 $B(2, 4)$이고, 이동한 횟수는 5이다.

14 **접근 방법** | 직사각형은 평행사변형이므로 평행사변형의 성질에 의하여 두 대각선의 중점이 일치함을 이용한다.

직사각형 OABC에서 두 대각선의 중점이 일치하므로 점 B의 좌표를 (a, b)라고 하면 두 점 C, A를 이은 선분의 중점과 두 점 O, B를 이은 선분의 중점의 x좌표와 y좌표가 각각 일치한다. 즉,

$\dfrac{6+4}{2}=\dfrac{0+a}{2}$, $\dfrac{-3+8}{2}=\dfrac{0+b}{2}$

$\therefore a=10$, $b=5$

$\therefore B(10, 5)$

점 $G(1, 6)$은 점 $C(4, 8)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점이므로

$4+m=1$, $8+n=6$

$\therefore m=-3$, $n=-2$

즉, 직사각형 DEFG는 직사각형 OABC를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 점 F는 점 $B(10, 5)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$F(10-3, 5-2)$ $\therefore F(7, 3)$

⊕ 보충 설명

평행이동의 규칙을 알아내어 두 점 D, E의 좌표를 구하고, 두 대각선의 중점이 일치하는 평행사변형의 성질을 이용하여 점 F의 좌표를 구할 수도 있다.

15 **접근 방법** | 처음 직선이 점 $(4, -3)$을 지나므로 처음 직선의 기울기만 구하면 된다. 따라서 처음 직선의 기울기를 m이라고 하면 처음 직선의 방정식을 만들 수 있다.

점 $(4, -3)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라고 하면 처음 직선의 방정식은

$y=m(x-4)-3$

이 직선을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-1=m(x+2-4)-3$

$\therefore y=m(x-2)-2$

이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=m(-x-2)-2$

$\therefore y=-m(x+2)-2$ …… ㉠

직선 ㉠과 직선 $x+2y-3=0$, 즉

$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$이 서로 수직이므로

$(-m)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$\therefore\ m=-2$

따라서 처음 직선의 방정식은

$y=-2(x-4)-3$

$\therefore\ y=-2x+5$

보충 설명

기울기가 m이고 점 (x_1, y_1)을 지나는 직선의 방정식은
$y=m(x-x_1)+y_1$

16 **접근 방법** | 직선을 점에 대하여 대칭이동해도 기울기는 변하지 않는다.

두 점 A′, B′은 점 P에 대하여 두 점 A, B를 대칭이동한 점이므로 직선 A′B′은 직선 AB의 점대칭도형이다.
△APB≡△A′PB′에서 ∠ABP=∠A′B′P (엇각)이므로

$\overleftrightarrow{AB}\,/\!/\,\overleftrightarrow{A'B'}$

따라서 직선 A′B′의 기울기는 직선 AB의 기울기와 같으므로 $\frac{1}{2}$이다.

직선 A′B′은 점 A′(3, 1)을 지나므로 직선 A′B′의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-3)\qquad\therefore\ y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$ab=-\frac{1}{4}$

17 **접근 방법** | 두 포물선이 점 P에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 P에 대하여 대칭임을 이용한다.

$y=x^2-6x+5$
$\ \ =(x-3)^2-4$

이므로 포물선 $y=x^2-6x+5$의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ -4)$이다.

$y=-x^2-2x+1$
$\ \ =-(x+1)^2+2$

이므로 포물선 $y=-x^2-2x+1$의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 2)$이다.

두 포물선이 점 P에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 P에 대하여 대칭이다.

따라서 두 꼭짓점 $(3,\ -4)$, $(-1,\ 2)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 점 P의 좌표이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{3-1}{2},\ \frac{-4+2}{2}\right)$

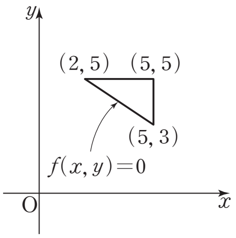
$\therefore\ \mathrm{P}(1,\ -1)$

보충 설명

원의 대칭이동은 원의 중심을 대칭이동하여 생각할 수 있듯이 포물선의 대칭이동도 꼭짓점을 대칭이동하여 생각할 수 있다.

18 **접근 방법** | x^2+y^2의 값은 원점과 점 $(x,\ y)$ 사이의 거리의 제곱을 뜻하므로, 방정식 $f(y-1,\ -x)=0$이 나타내는 삼각형을 좌표평면 위에 나타낸 후에 삼각형에 접하는 경우와 끝점을 지나는 경우에 주목하면 된다.

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 세 직선 $x=5$, $y=5$, $2x+3y-19=0$의 교점인 $(2,\ 5)$, $(5,\ 5)$, $(5,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형이다.



방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$f(y,\ x)=0$

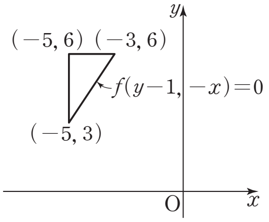
방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면

$f(y,\ -x)=0$

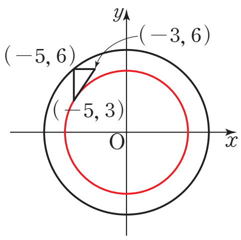
방정식 $f(y,\ -x)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$f(y-1,\ -x)=0$

따라서 방정식 $f(y-1,\ -x)=0$이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$x^2+y^2=k$라고 하면 k는 원 $x^2+y^2=k$가 두 점 $(-5,\ 3)$, $(-3,\ 6)$을 지나는 직선과 접하는 경우에 최솟값을 가지고, 점 $(-5,\ 6)$을 지나는 경우에 최댓값을 가진다.



두 점 $(-5,\ 3)$, $(-3,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{2}x+\frac{21}{2}$

즉, $3x-2y+21=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x-2y+21=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 $\sqrt{k}$이므로

$\frac{|21|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\sqrt{k}$ $\qquad \therefore k=\frac{441}{13}$

또한 원이 점 $(-5,\ 6)$을 지나는 경우

$25+36=k$ $\qquad \therefore k=61$

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 $\frac{441}{13}$, 최댓값은 61이다.

19 **접근 방법** | 두 점 A, B가 직선 $x+y+1=0$에 의해 나누어지는 두 영역 중 같은 영역에 있으므로, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소가 되려면 점 A를 직선 $x+y+1=0$에 대하여 대칭이동한 점 A′과 두 점 P, B가 모두 일직선 위에 있어야 한다.

$A(-3,\ 6)$을 직선 $x+y+1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a,\ b)$라고 하면 선분 AA′의 중점은

$\left(\frac{a-3}{2},\ \frac{b+6}{2}\right)$

이 점이 직선 $x+y+1=0$ 위에 있으므로

$\frac{a-3}{2}+\frac{b+6}{2}+1=0$

$\therefore a+b=-5$ $\qquad$ …… ㉠

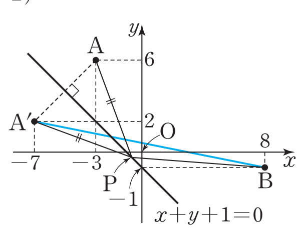
직선 AA′이 직선 $x+y+1=0$, 즉 $y=-x-1$과 수직이므로

$\frac{b-6}{a-(-3)}\times(-1)=-1$

$\therefore a-b=-9$ $\qquad$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=2$

$\therefore A'(-7,\ 2)$



앞의 그림에서

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$

즉, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소가 되는 점 $P(m,\ n)$은 선분 A′B와 직선 $x+y+1=0$과의 교점이다.

직선 A′B의 방정식은

$y-2=\frac{-1-2}{8-(-7)}(x+7)$

$\therefore x+5y-3=0$

따라서 점 P의 좌표를 구하면 $(-2,\ 1)$이므로

$m=-2$, $n=1$

$\therefore mn=(-2)\times1=-2$

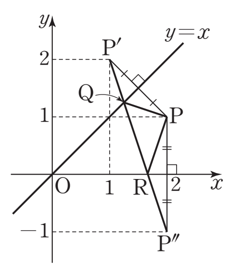
20 **접근 방법** | 점 P를 직선 $y=x$, x축에 대하여 각각 대칭이동하여 삼각형 PQR의 세 변 PQ, QR, RP의 길이의 합이 최소가 될 조건을 생각한다.

점 $P(2,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 점 $P(2,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P″이라고 하면 $P'(1,\ 2)$, $P''(2,\ -1)$

$\overline{PQ}=\overline{P'Q}$, $\overline{RP}=\overline{RP''}$이므로

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RP''}\geq\overline{P'P''}$

즉, 삼각형 PQR의 둘레의 길이가 최소일 때는 오른쪽 그림과 같이 직선 P′P″이 직선 $y=x$, x축과 만날 때의 교점을 각각 Q, R로 잡을 때이다.



점 R의 x좌표는 직선 P′P″과 x축이 만나는 점의 x좌표이므로 직선 P′P″의 방정식은

$y-2=\frac{-1-2}{2-1}(x-1)$

$\therefore y=-3x+5$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$0=-3x+5$ $\qquad \therefore x=\frac{5}{3}$

따라서 구하는 점 R의 좌표는

$\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$

기출 다지기 178쪽

21 ⑤ **22** ③ **23** ② **24** 64

21 **접근 방법** | 원의 중심을 지나는 직선에 의해 원의 넓이는 이등분된다.

원 C의 방정식은

$\{(x-3)+1\}^2+\{(y-a)+2\}^2=9$

$(x-2)^2+(y-a+2)^2=9$

원 C의 넓이가 직선 $3x+4y-7=0$에 의하여 이등분되려면 원 C의 중심이 직선 $3x+4y-7=0$ 위에 있어야 한다.

원 C의 중심의 좌표는 $(2,\ a-2)$이므로

$3\times2+4(a-2)-7=0$

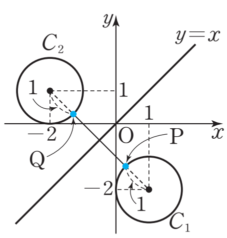
$\therefore\ a=\dfrac{9}{4}$

22 **접근 방법** | 원 위의 한 점과 직선 사이의 거리를 이용해서 푼다. 즉, 두 원의 중심 사이의 거리를 이용한다.

원 $C_1 : (x-1)^2+(y+2)^2=1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 방정식은

$C_2 : (x+2)^2+(y-1)^2=1$

원 C_1 위의 임의의 점 P와 원 C_2 위의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이가 최소가 되는 경우는 다음 그림과 같다.



즉, 구하는 선분 PQ의 길이의 최솟값은 두 원의 중심 $(1,\ -2)$, $(-2,\ 1)$ 사이의 거리에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 것과 같으므로

$\sqrt{(-2-1)^2+(1+2)^2}-(1+1)=3\sqrt{2}-2$

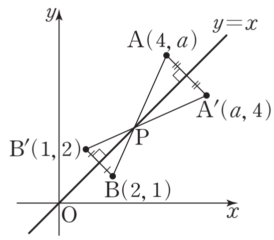
23 **접근 방법** | 두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다. 즉, 두 직선 AB와 A′B′의 교점이 P일 때, 두 삼각형 APA′, BPB′은 서로 닮음이다.

두 점 $\mathrm{A}(4,\ a)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각

$\mathrm{A'}(a,\ 4)$, $\mathrm{B'}(1,\ 2)$

두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다.

다음 그림과 같이 두 직선 AB와 A′B′의 교점이 P일 때, 두 삼각형 APA′, BPB′은 서로 닮음이다.



두 삼각형 APA′, BPB′의 넓이의 비가 9 : 4이므로 두 삼각형 APA′, BPB′의 닮음비는 3 : 2이다.

즉, $\overline{\mathrm{AA'}} : \overline{\mathrm{BB'}}=3:2$

$\overline{\mathrm{AA'}}=\sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2}=\sqrt{2}(a-4)\ (\because\ a>4)$

$\overline{\mathrm{BB'}}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AA'}} : \overline{\mathrm{BB'}}=3:2$에서

$\sqrt{2}(a-4) : \sqrt{2}=3:2$

$2\sqrt{2}(a-4)=3\sqrt{2},\ 2(a-4)=3 \qquad \therefore\ a=\dfrac{11}{2}$

다른 풀이

두 삼각형 APA′, BPB′의 넓이의 비가 9 : 4이므로 두 삼각형의 닮음비는 3 : 2이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}}=3:2$

점 P는 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\dfrac{3\times2+2\times4}{3+2},\ \dfrac{3\times1+2\times a}{3+2}\right)$

즉, $\mathrm{P}\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{2a+3}{5}\right)$

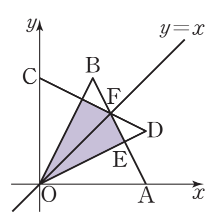
두 직선 AB, A′B′은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 두 직선 AB, A′B′의 교점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

따라서 $\dfrac{14}{5}=\dfrac{2a+3}{5}$이므로

$2a+3=14 \qquad \therefore\ a=\dfrac{11}{2}$

24 **접근 방법** | 대칭이동을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구한다. 즉, 두 직선 AB, OD의 교점, 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점의 좌표를 구한다.

두 직선 AB, OD의 교점을 E, 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점을 F라고 하자.



직선 AB의 방정식은

$y-0=\frac{2-0}{1-2}(x-2)$, 즉 $y=-2x+4$

점 B(1, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표는 (2, 1)이므로 직선 OD의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$

$-2x+4=\frac{1}{2}x$에서 $x=\frac{8}{5}$

$-2x+4=x$에서 $x=\frac{4}{3}$

이므로 두 점 E, F의 x좌표는 각각 $\frac{8}{5}$, $\frac{4}{3}$이다.

$$\begin{aligned}\triangle OAF : \triangle OEF &= \overline{AF} : \overline{EF}\\ &= \left|2-\frac{4}{3}\right| : \left|\frac{8}{5}-\frac{4}{3}\right|\\ &= 5:2\end{aligned}$$

이므로 삼각형 OEF의 넓이는 삼각형 OAF의 넓이의 $\frac{2}{5}$배이다.

따라서 $S=\left(\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{3}\right)\times\frac{2}{5}\times2=\frac{16}{15}$이므로

$60S=64$

다른 풀이

두 직선 AB, OD의 교점을 E, 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점을 F라고 하자.

직선 AB의 방정식은 $y=-2x+4$

즉, 직선 OD의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$

$-2x+4=\frac{1}{2}x$에서 $x=\frac{8}{5}$

$-2x+4=x$에서 $x=\frac{4}{3}$

이므로 두 점 E, F의 좌표는 각각

$E\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $F\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$\overline{OE}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\overline{EF}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$

이때 두 직선 AB, OD의 기울기의 곱이 -1이므로 삼각형 OEF는 직각삼각형이다.

$\therefore \triangle OEF=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}\times\frac{4\sqrt{5}}{15}=\frac{8}{15}$

따라서 $S=\frac{8}{15}\times2=\frac{16}{15}$이므로

$60S=64$

Ⅱ. 집합과 명제

05. 집합

개념 콕콕 **1 집합의 뜻과 포함 관계** 187쪽

1 답 (1) × (2) ○ (3) ○ (4) ×

(1) 깊다는 것의 기준이 명확하지 않아 깊은 강을 분명하게 결정할 수 없으므로 집합이 아니다.

(4) 아름답다는 것의 기준이 명확하지 않아 아름다운 꽃을 분명하게 결정할 수 없으므로 집합이 아니다.

2 답 (1) $\{x \mid x$는 10 이하의 소수$\}$

(2) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

3 답 (1) 50 (2) 3

(1) $n(A)=50$

(2) $|x|<2$, 즉 $-2<x<2$인 정수 x는 -1, 0, 1이므로 $A=\{-1, 0, 1\}$

$\therefore n(A)=3$

4 답 (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\subset$ (4) $\subset$ (5) $\not\subset$

집합 $A=\{1, 2, 3\}$에 대하여

$1\in A$, $2\in A$, $3\in A$

이므로

(1) $1 \boxed{\in} A$ (2) $4 \boxed{\notin} A$

(3) $\{3\} \boxed{\subset} A$ (4) $\varnothing \boxed{\subset} A$

(5) $\{0\} \boxed{\not\subset} A$

5 답 (1) 16 (2) 16 (3) 8

(1) $2^{5-1}=2^4=16$

(2) $2^{5-1}=2^4=16$

(3) 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 c를 반드시 원소로 가지고 d를 원소로 가지지 않는 부분집합이므로 그 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

예제 01 **집합과 원소, 집합과 집합 사이의 관계** 189쪽

01-1 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

집합 $A=\{\varnothing, 1, \{1\}\}$에서

ㄱ. 1은 집합 A의 원소이므로 $1\in A$ (참)

ㄴ. $\{1\}$은 집합 A의 원소이므로 $\{1\}\in A$ (참)

ㄷ. $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$ (참)

ㄹ. 공집합($\varnothing$)은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$ (참)

ㅁ. $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로 $\{\varnothing\}$은 집합 A의 부분집합이다. 즉, $\{\varnothing\}\subset A$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

01-2 답 ⑤

$\varnothing$은 집합 A의 원소이며 부분집합이므로

$\varnothing\in A$(①), $\varnothing\subset A$(②)

1과 $\{1, 2\}$는 집합 A의 원소이므로

$1\in A$(③), $\{1, 2\}\in A$(④)

그런데 $1\in A$, $2\in A$이므로

$\{1, 2\}\subset A$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

01-3 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

집합 2^A은 집합 A의 부분집합을 원소로 가지는 집합이므로

$\varnothing\in 2^A$, $A\in 2^A$ (ㄴ)

$\therefore$ $\{\varnothing\}\subset 2^A$ (ㄷ), $\{A\}\subset 2^A$ (ㄹ)

또한 공집합($\varnothing$)은 모든 집합의 부분집합이므로

$\varnothing\subset 2^A$ (ㄱ)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

예제 02 집합과 집합 사이의 포함 관계 191쪽

02-1 답 1, 2

$A\subset B$이므로 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소이다.

즉, $3\in A$에서 $3\in B$이어야 하므로

$a+1=3$ 또는 $a^2+2=3$

$\therefore$ $a=2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=1$

(ⅰ) $a=2$일 때,

$A=\{3, 5\}$, $B=\{3, 5, 6\}$ $\quad\therefore A\subset B$

(ⅱ) $a=-1$일 때,

$A=\{2, 3\}$, $B=\{0, 3, 5\}$ $\quad\therefore A\not\subset B$

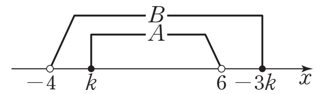
(ⅲ) $a=1$일 때,

$A=\{2, 3\}$, $B=\{2, 3, 5\}$ $\quad\therefore A\subset B$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 $A\subset B$가 성립하는 상수 a의 값은 1, 2이다.

02-2 답 $-4<k\le -2$

$A\subset B$가 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



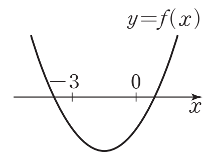
따라서 $-4<k$, $6\le -3k$이어야 하므로

$-4<k\le -2$

02-3 답 $1<a<4$

$f(x)=x^2+2ax+a-4$로 놓으면 $A\subset B$이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 x축의 아래쪽에 있는 x의 값의 범위가 $-3\le x\le 0$을 포함해야 한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



$f(-3)=9-6a+a-4<0 \qquad \therefore a>1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(0)=a-4<0 \qquad \therefore a<4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는

$1<a<4$

예제 03 두 집합이 서로 같을 조건 193쪽

03-1 답 -1

$A=B$이므로 $A\subset B$이고 $B\subset A$

즉, $A\subset B$이므로 $3\in B$이어야 한다.

(ⅰ) $a+4=3$, 즉 $a=-1$일 때,

$A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4\}$ $\quad\therefore A=B$

(ⅱ) $-a+1=3$, 즉 $a=-2$일 때,

$A=\{3, 4, 7\}$, $B=\{2, 3, 4\}$ $\quad\therefore A\neq B$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-1$

03-2 답 1

$A=B$이므로 $A\subset B$이고 $B\subset A$

즉, $A\subset B$이므로 $1\in B$이어야 한다.

$a^2+a-1=1$, $a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$

$\therefore$ $a=-2$ 또는 $a=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$B \subset A$이므로 $2 \in A$이어야 한다.

$a^2-3a+4=2$, $a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$

03-3 답 8

$A \subset B$이고 $B \subset A$이므로 $A=B$

$1 \in A$이므로 $1 \in B$이어야 하고, $2 \in B$이므로 $2 \in A$이어야 한다.

(i) $c+2=1$일 때,

$c=-1$이므로 성립하지 않는다. ($\because$ c는 양수)

(ii) $b-3=1$, 즉 $b=4$일 때,

$A=\{1, 4, a^2-a\}$이므로 $a^2-a=2$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because$ a는 양수)

$B=\{1, 2, c+2\}$에서 $c+2=4$ $\quad\therefore c=2$

(i), (ii)에서 $a=2$, $b=4$, $c=2$

$\therefore a+b+c=2+4+2=8$

예제 04 부분집합의 개수 195쪽

04-1 답 (1) 31 (2) 8 (3) 16

(1) 집합 A의 원소의 개수가 5이므로 집합 A의 부분집합의 개수는 2^5이고, 집합 A의 진부분집합은 부분집합 중에서 자기 자신은 제외해야 하므로 그 개수는

$2^5-1=31$

(2) 1, 2를 모두 원소로 가지지 않는 집합 A의 진부분집합은 두 원소 1, 2를 제외한 집합 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합과 같으므로 구하는 진부분집합의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

(3) 3을 반드시 원소로 가지는 집합 A의 부분집합은 집합 $\{1, 2, 4, 5\}$의 각 부분집합에 원소 3을 넣은 것과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

04-2 답 12

$A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 2 또는 3을 원소로 가지는 부분집합을 X라고 하면

(i) $2 \in X$, $3 \notin X$인 경우, 즉 2를 원소로 가지고 3을 원소로 가지지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-1-1}=2^2=4$

(ii) $2 \notin X$, $3 \in X$인 경우, 즉 2를 원소로 가지지 않고 3을 원소로 가지는 부분집합의 개수는

$2^{4-1-1}=2^2=4$

(iii) $2 \in X$, $3 \in X$인 경우, 즉 2, 3을 모두 원소로 가지는 부분집합의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$

(i)~(iii)에서 2 또는 3을 원소로 가지는 부분집합 X의 개수는

$4+4+4=12$

다른 풀이

$A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^4=16$

집합 A에서 원소 2와 3을 제외한 집합 $\{5, 7\}$의 부분집합은 모두 2와 3을 원소로 가지지 않고, 그 개수는

$2^2=4$

따라서 집합 A의 부분집합 중 2 또는 3을 원소로 가지는 부분집합의 개수는

$16-4=12$

04-3 답 12

$\{1, 2\} \subset X$이므로 $1 \in X$, $2 \in X$

$\{3, 4\} \not\subset X$이므로 $3 \notin X$ 또는 $4 \notin X$

집합 X의 개수는

(i) $1 \in X$, $2 \in X$이고 $3 \notin X$인 경우

$2^{6-2-1}=2^3=8$

(ii) $1 \in X$, $2 \in X$이고 $4 \notin X$인 경우

$2^{6-2-1}=2^3=8$

(iii) $1 \in X$, $2 \in X$이고 $3 \notin X$, $4 \notin X$인 경우

$2^{6-2-2}=2^2=4$

(i)~(iii)에서 집합 X의 개수는

$8+8-4=12$

개념 콕콕 2 집합의 연산 205쪽

1 답 (1) $\{2, 4, 8\}$ (2) $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ (3) $\{1, 3, 5, 7\}$ (4) $\{3, 5, 6, 7\}$ (5) $\{6\}$ (6) $\{1\}$

(1) $A \cap B=\{2, 4, 8\}$

(2) $A \cup B=\{1, 2, 4, 6, 8\}$

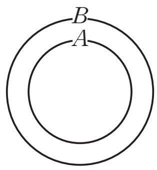
(3) $A^C=\{1, 3, 5, 7\}$

(4) $B^C=\{3, 5, 6, 7\}$
(5) $A-B=\{6\}$
(6) $B-A=\{1\}$

2

답 (1) A (2) B (3) $\varnothing$

$A\subset B$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $A\cap B=\boxed{A}$
(2) $A\cup B=\boxed{B}$
(3) $A-B=\boxed{\varnothing}$

3

답 (1) $\{8\}$ (2) $\{2, 8, 10\}$ (3) $\{8\}$ (4) $\{2, 8, 10\}$

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{4, 6, 10\}$에서
(1) $A\cup B=\{2, 4, 6, 10\}$이므로 $(A\cup B)^C=\{8\}$
(2) $A\cap B=\{4, 6\}$이므로 $(A\cap B)^C=\{2, 8, 10\}$
(3) $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{8\}$
(4) $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{2, 8, 10\}$

4

답 16

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=12+8-4=16$$

5

답 (1) 4 (2) 9

(1) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=10-6=4$
(2) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=15-6=9$

예제 05 집합의 연산 207쪽

05-1

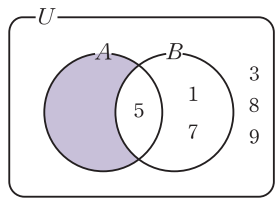
답 (1) $\{2, 5, 7, 11\}$ (2) $\{1, 2, 4, 5, 7, 11\}$ (3) $\{5, 7, 8, 10, 11\}$

$U=\{1, 2, 3, 4, \cdots, 12\}$이므로
$A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$,
$C=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
(1) $A\cap B^C=A-B=\{2, 5, 7, 11\}$
(2) $(A-B)\cup(C-B)=\{2, 5, 7, 11\}\cup\{1, 2, 4\}$
$=\{1, 2, 4, 5, 7, 11\}$
(3) $B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$이므로
$(B\cup C)^C=\{5, 7, 8, 10, 11\}$

05-2

답 $\{2, 4, 5, 6\}$

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$에 대하여 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.

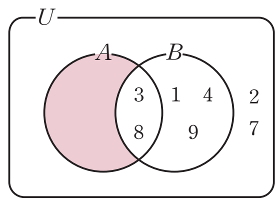


따라서 벤다이어그램의 색칠한 부분, 즉 집합 $A-B$의 원소는 2, 4, 6이므로
$A=\{2, 4, 5, 6\}$

05-3

답 22

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$에 대하여 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



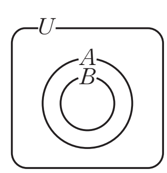
벤다이어그램의 색칠한 부분, 즉 집합 $A-B$의 원소는 5, 6이므로
$A=\{3, 5, 6, 8\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$3+5+6+8=22$

예제 06 집합의 연산과 포함 관계 209쪽

06-1

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

$B\subset A$이므로
오른쪽 벤다이어그램에서



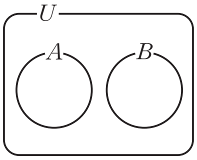
ㄱ. $A^C\cap B=B-A=\varnothing$ (참)
ㄴ. $A^C\cup B\neq B$ (거짓)
ㄷ. $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=B^C$ (참)
ㄹ. $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=A^C$ (참)
따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

06-2

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$A-B=A$, 즉 집합 A의 원소에서 집합 B의 원소를 제외하면 집합 A이어야 하므로
$A\cap B=\varnothing$

오른쪽 벤다이어그램에서



ㄱ. $A\cap B=\varnothing$ (참)

ㄴ. $B-A=B$ (참)

ㄷ. $A\subset B^C$ (참)

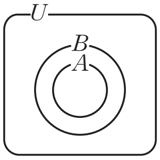
따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06-3 답 ㄱ, ㄷ

두 집합 A, B^C가 서로소이므로

$A\cap B^C=\varnothing$이고, $A\subset B$

오른쪽 벤다이어그램에서



ㄱ. $A-B=A\cap B^C=\varnothing$ (참)

ㄴ. $(A\cap B)^C=A^C$ (거짓)

ㄷ. $A\subset B$이므로 $A^C\cup B=U$

$\therefore (A^C\cup B)\cap A=U\cap A$

$=A$ (참)

따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄴ. $A\subset B$이므로 $B^C\subset A^C$이고, 드모르간의 법칙에 의하여

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C=A^C$ (거짓)

ㄷ. 집합의 분배법칙에 의하여

$(A^C\cup B)\cap A=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$

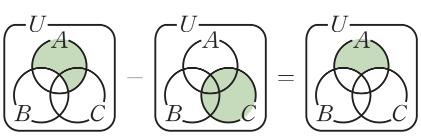
$=\varnothing\cup A$

$=A$ (참)

예제 07 집합의 연산법칙 211쪽

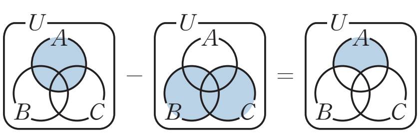
07-1 답 풀이 참조

(1) (i) 주어진 등식의 좌변을 벤다이어그램으로 나타내면



$A-B$ C $(A-B)-C$

(ii) 주어진 등식의 우변을 벤다이어그램으로 나타내면



A $B\cup C$ $A-(B\cup C)$

(i), (ii)에서 $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(2) 집합의 연산법칙을 이용하면

$(A-B)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$ ← 차집합의 성질

$=A\cap(B^C\cap C^C)$ ← 결합법칙

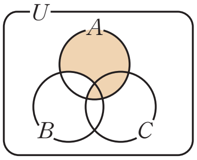
$=A\cap(B\cup C)^C$ ← 드모르간의 법칙

$=A-(B\cup C)$ ← 차집합의 성질

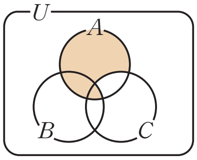
07-2 답 ㄱ, ㄷ

각각을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.

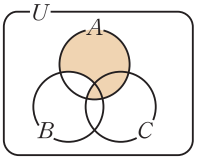
ㄱ. $A-(B-C)$



ㄴ. $A-(C-B)$



ㄷ. $(A-B)\cup(A\cap C)$



따라서 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ㄱ, ㄷ이다.

보충 설명

집합의 연산법칙에 의하여

$A-(B-C)=A\cap(B\cap C^C)^C$ ← 차집합의 성질

$=A\cap(B^C\cup C)$ ← 드모르간의 법칙

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)$ ← 분배법칙

$=(A-B)\cup(A\cap C)$ ← 차집합의 성질

따라서 ㄱ과 ㄷ은 같은 집합이다.

07-3 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $(A-B)\subset A$이므로 $A\cup(A-B)=A$

ㄴ. $(A\cup B)\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup B$

$=\varnothing\cup B=B$

ㄷ. $A\cap(A\cup B^C)=(A\cap A)\cup(A\cap B^C)$

$=A\cup(A-B)=A$

따라서 집합 A와 같은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

예제 08 집합의 연산과 부분집합의 개수 213쪽

08-1 답 8

$(A^C\cap B)\cup X=X$, 즉 $(B-A)\cup X=X$이므로

$(B-A)\subset X$

$B\cap X=X$이므로 $X\subset B$

$\therefore (B-A)\subset X\subset B$ …… ㉠

$B-A=\{2,\ 4,\ 6\}$이므로 ㉠을 원소나열법으로 나타내면

$\{2,\ 4,\ 6\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

즉, 집합 X는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중 2, 4, 6을 반드시 원소로 가지는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$

08-2 답 16

$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$

$(A\cup B)\cap X=X$이므로 $X\subset(A\cup B)$

$\therefore (A-B)\subset X\subset(A\cup B)$ …… ㉠

$A-B=\{3,\ 6,\ 9\}$, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$이므로 ㉠을 원소나열법으로 나타내면

$\{3,\ 6,\ 9\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$

즉, 집합 X는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$의 부분집합 중 3, 6, 9를 반드시 원소로 가지는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{7-3}=2^4=16$

08-3 답 8

$\{1,\ 5\}\cup X=\{2,\ 5\}\cup X$에서

$\{1,\ 5\}\subset[\{2,\ 5\}\cup X]$이므로 $1\in X$

$\{2,\ 5\}\subset[\{1,\ 5\}\cup X]$이므로 $2\in X$

즉, 집합 X는 집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중 1, 2를 반드시 원소로 가지는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

예제 09 집합의 원소의 개수 215쪽

09-1 답 (1) 18 (2) 27

(1) $n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)$

$=10-3=7$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=10+15-7=18$

(2) $(A^C\cap B)^C=U-(A^C\cap B)$

$=U-(B-A)$

이고 (1)에서 $n(A\cap B)=7$이므로

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=15-7=8$

또한 $(B-A)\subset U$이므로

$n((A^C\cap B)^C)=n(U-(B-A))$

$=n(U)-n(B-A)$

$=35-8=27$

다른 풀이

(1) $A\cup B=(A-B)\cup B$이고

$(A-B)\cap B=\varnothing$이므로

$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B)$

$=3+15=18$

09-2 답 11

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=50-n(A\cup B)=7$

$\therefore n(A\cup B)=43$

$\therefore n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(A-B)-n(B-A)$

$=43-15-17=11$

09-3 답 20

$A\subset B$일 때, $n(A\cap B)$는 최댓값 15를 가진다.

또한 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$에서

$n(A\cup B)$가 최대일 때, $n(A\cap B)$는 최소이다.

$n(A\cup B)$의 최댓값은 $n(A\cup B)=n(U)=35$일 때이므로 $n(A\cap B)$의 최솟값은

$n(A)+n(B)-35=15+25-35=5$

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$15+5=20$

예제 10 집합의 원소의 개수의 활용 217쪽

10-1 답 4명

학생 전체의 집합을 U, 남자 형제가 있는 학생의 집합을 A, 여자 형제가 있는 학생의 집합을 B라고 하면 남자 형제와 여자 형제가 모두 있는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(U)=30$, $n(A)=17$, $n(B)=12$, $n(A\cap B)=3$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=17+12-3=26$

남자 형제도 여자 형제도 없는 학생의 집합은
$(A\cup B)^C$이므로
$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=30-26=4$
따라서 구하는 학생은 4명이다.

10-2 답 34개

집합 S의 세 부분집합 A, B, C를
$A=\{x\,|\,x$는 2의 배수$\}$,
$B=\{x\,|\,x$는 3의 배수$\}$,
$C=\{x\,|\,x$는 6의 배수$\}$
라고 하면
$n(A)=44$, $n(B)=33$, $n(C)=11$
또한 6으로 나누어떨어지는 수는 2와 3으로 모두 나누어떨어지므로 $C=A\cap B$
$\therefore\ n(C)=n(A\cap B)$
$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=44+33-11=66$
따라서 집합 S의 원소 중에서 2로도 3으로도 나누어떨어지지 않는 수의 집합은 $(A\cup B)^C$이므로
$n((A\cup B)^C)=n(S)-n(A\cup B)$
$=100-66=34$
따라서 구하는 수는 34개이다.

10-3 답 17명

학생 전체의 집합을 U, 동영상 강의를 수강하는 학생의 집합을 A, 학원 수강을 하는 학생의 집합을 B라고 하면
$n(U)=30$, $n(A\cap B)=6$, $n((A\cup B)^C)=7$
이므로
$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=30-7=23$
학원 수강을 하지 않고 동영상 강의만을 수강하는 학생의 집합은 $A-B$이므로
$n(A-B)=n(A\cup B)-n(A\cap B)-n(B-A)$
$=23-6-n(B-A)$
$=17-n(B-A)$
≤ 17
즉, $n(B-A)=0$일 때, $n(A-B)$의 최댓값은 17이므로 학원 수강을 하지 않고 동영상 강의만을 수강하는 학생은 최대 17명까지 있다고 할 수 있다.

기본 다지기 218쪽~219쪽

1 ②	**2** $2<a<4$	**3** 64	**4** 10
5 ③	**6** ㄴ, ㄷ	**7** ㄱ, ㄴ, ㄷ	**8** 4
9 8	**10** ③		

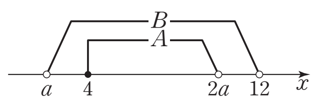
1 $B=\{x+y\,|\,x\in A,\ y\in A\}$에서 집합 B의 원소는 집합 A의 임의의 두 원소의 합이므로
$B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$
① 0은 집합 B의 원소이므로 $0\in B$ (참)
② 2는 집합 B의 원소이므로 $2\in B$ (거짓)
③ 3은 집합 B의 원소가 아니므로 $3\notin B$ (참)
④ $-1\in B$, $0\in B$, $1\in B$이므로 $A\subset B$ (참)
⑤ 집합 B의 원소의 개수가 5이므로 $n(B)=5$ (참)

보충 설명

집합 B의 원소를 구하는 과정은 다음과 같다.

$+$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

2 $A\subset B$가 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $a<4$, $2a\le 12$이어야 하므로 $a<4$ ...... ㉠
이때 집합 A에서 $2a>4$이어야 하므로 $a>2$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서 공통 범위를 구하면
$2<a<4$

3 $A\times B$
$=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)\}$
이므로 $n(A\times B)=6$
따라서 집합 $A\times B$의 부분집합의 개수는
$2^6=64$

보충 설명

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수는 2^n이다. 원소의 개수가 조금만 많아지더라도 원소를 직접 나열하여 부분집합을 구하는 것은 어려우므로 집합의 원소의 개수와 부분집합의 개수 사이의 관계를 잘 알아두어야 한다.

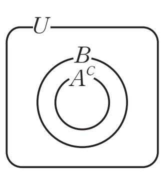
4 $A\cap B^{C}=A-B=\{-3,\ 4\}$이므로 $4\in A$이어야 한다.
즉, $a^2-2a-4=4$이어야 하므로
$a^2-2a-8=0$
$(a+2)(a-4)=0$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=4$
(i) $a=-2$일 때,
$A=\{-3,\ 3,\ 4,\ 8\}$, $B=\{5,\ 8,\ 15\}$이므로
$A\cap B^{C}=A-B=\{-3,\ 3,\ 4\}$
(ii) $a=4$일 때,
$A=\{-3,\ 3,\ 4,\ 8\}$, $B=\{-1,\ 3,\ 8\}$이므로
$A\cap B^{C}=A-B=\{-3,\ 4\}$
(i), (ii)에서 $a=4$이고, $B=\{-1,\ 3,\ 8\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은
$-1+3+8=10$

5 $A\cup(A^{C}\cap C)=A$에서
$(A\cup A^{C})\cap(A\cup C)=A$
$U\cap(A\cup C)=A$, $A\cup C=A$
$\therefore C\subset A$ ······ ㉠
$B\cap C^{C}=B-C=\varnothing$이므로
$B\subset C$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $B\subset C\subset A$

보충 설명

$B-C$는 $B-(B\cap C)$와 같다.
따라서 $B-C=B-(B\cap C)=\varnothing$이면 $B=B\cap C$이므로 $B\subset C$이다.

6 $(A-B)^{C}=(A\cap B^{C})^{C}=A^{C}\cup B$이므로
$(A^{C}\cup B)\subset B$
$\therefore A^{C}\subset B$
오른쪽 벤다이어그램에서

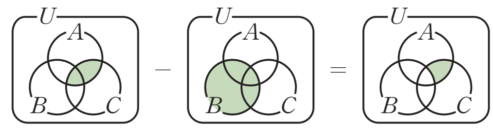


ㄱ. $A\cap B\neq\varnothing$ (거짓)
ㄴ. $A^{C}\subset B$이므로 $B^{C}\subset A$
$\therefore A\cup B^{C}=A$ (참)
ㄷ. $A^{C}\subset B$이므로
$U=(A\cup A^{C})\subset(A\cup B)$ ······ ㉠
또한 $A\subset U$, $B\subset U$에서
$(A\cup B)\subset U$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $A\cup B=U$ (참)
따라서 항상 성립하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

보충 설명

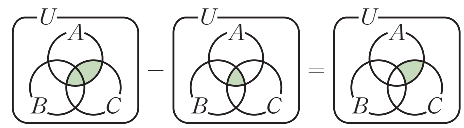
ㄷ에서 '$A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$'임을 이용하였다.

7 각각을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.
ㄱ. $(A\cap C)\cap B^{C}=(A\cap C)-B$



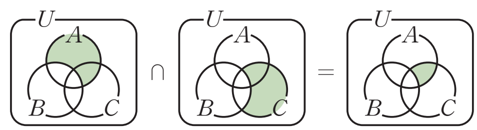
$A\cap C$　　B　　$(A\cap C)-B$

ㄴ. $(A\cap C)-(A\cap B\cap C)$



$A\cap C$　　$A\cap B\cap C$　　$(A\cap C)-(A\cap B\cap C)$

ㄷ. $(A-B)\cap(C-B)$



$A-B$　　$C-B$　　$(A-B)\cap(C-B)$

따라서 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8 $(B-A)\cup X=X$이므로
$(B-A)\subset X$
$B\cap X=X$이므로
$X\subset B$
$\therefore (B-A)\subset X\subset B$
또한 $B-A=\{2,\ 4,\ 5\}$이므로 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 2, 4, 5를 반드시 원소로 가지는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$

9 $(A\cup B)\cap(A^{C}\cup B)=(A\cap A^{C})\cup B$
$=\varnothing\cup B=B$
$\therefore B=\{1,\ 2\}$
$A\cup B^{C}=U$에서
$(A\cup B^{C})^{C}=U^{C}$, $A^{C}\cap B=\varnothing$
즉, $B-A=\varnothing$이므로
$B\subset A$
$\therefore \{1,\ 2\}\subset A$

따라서 집합 A는 1, 2를 반드시 원소로 가지는 전체집합 U의 부분집합이므로 집합 A의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

10 A_k는 100 이하의 자연수 중 k의 배수의 집합이므로

$$A_2\cap(A_3\cup A_4)=(A_2\cap A_3)\cup(A_2\cap A_4)$$
$$=A_6\cup A_4$$

$\therefore\ n(A_2\cap(A_3\cup A_4))$

$=n(A_6\cup A_4)$

$=n(A_6)+n(A_4)-n(A_6\cap A_4)$

$=n(A_6)+n(A_4)-n(A_{12})$

$n(A_6)=16,\ n(A_4)=25,\ n(A_{12})=8$이므로 구하는 원소의 개수는

$16+25-8=33$

보충 설명

일반적으로 자연수 k의 배수의 집합 A_k에 대하여 두 자연수 a, b가 주어졌을 때,

$A_a\cap A_b=A_{a\text{와 } b\text{의 최소공배수}}$

가 성립한다.

실력 다지기 220쪽 ~ 221쪽

11 24	**12** ④	**13** ④	**14** 12	**15** 8
16 4	**17** ㄱ, ㄴ	**18** 10명		

11 **접근 방법** | $\{2, 3\}\cap A\neq\varnothing$이므로 집합 A는 2를 원소로 가지거나 3을 원소로 가져야 한다.

$U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 2 또는 3을 원소로 가지는 부분집합의 개수를 구하면

(i) 2를 원소로 가지는 부분집합의 개수

$2^{5-1}=2^4=16$

(ii) 3을 원소로 가지는 부분집합의 개수

$2^{5-1}=2^4=16$

(iii) 2, 3을 모두 원소로 가지는 부분집합의 개수

$2^{5-2}=2^3=8$

(i)~(iii)에서 구하는 집합 A의 개수는

$16+16-8=24$

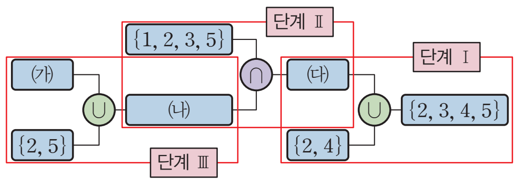
보충 설명

집합 U에서 2 또는 3을 원소로 가지는 부분집합의 개수는 집합 U의 모든 부분집합의 개수에서 2와 3을 모두 원소로 가지지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것이므로

$2^5-2^3=32-8=24$

와 같이 구할 수도 있다.

12 **접근 방법** | 합집합과 교집합의 뜻을 이용하여 (다)에 알맞은 집합을 먼저 구해 본다.



(다)에 알맞은 집합을 X라고 하면 위의 그림의 [단계 Ⅰ]에서 $\{2, 3, 4, 5\}=X\cup\{2, 4\}$이므로 집합 X는 3, 5를 반드시 원소로 가지며 집합 $\{2, 3, 4, 5\}$의 부분집합이다. …… ㉠

또한 [단계 Ⅱ]에서 집합 X는 집합 $\{1, 2, 3, 5\}$의 부분집합이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 집합 X는 3, 5를 반드시 원소로 가지며 집합 $\{2, 3, 5\}$의 부분집합이다.

한편, [단계 Ⅲ]에서 (나)는 2, 5를 반드시 원소로 가지므로 집합 X도 2를 원소로 가진다.

$\therefore\ X=\{2, 3, 5\}$

보충 설명

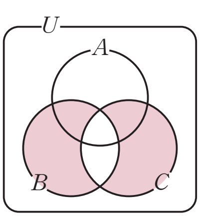
이런 유형의 문제는 위의 풀이와 같이 결과로부터 거꾸로 추적하는 것이 바람직하다.

13 **접근 방법** | $X\triangle Y=(X-Y)\cup(Y-X)$
$=(X\cup Y)-(X\cap Y)$

이므로 두 집합의 합집합에서 교집합을 뺀 집합으로 생각하여 풀어 본다.

$B\triangle C=(B-C)\cup(C-B)=(B\cup C)-(B\cap C)$

따라서 $B\triangle C$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 벤다이어그램의 색칠한 부분은 $A\cap(B\triangle C)$이다.



보충 설명

$(X-Y)\cup(Y-X)$
$=(X\cup Y)-(X\cap Y)$
를 집합의 연산법칙으로 확인해 보면
$(X-Y)\cup(Y-X)$
$=(X\cap Y^C)\cup(Y\cap X^C)$ ← 차집합의 성질
$=\{(X\cap Y^C)\cup Y\}\cap\{(X\cap Y^C)\cup X^C\}$ ← 분배법칙
$=\{(X\cup Y)\cap(Y^C\cup Y)\}\cap\{(X\cup X^C)\cap(Y^C\cup X^C)\}$
$=\{(X\cup Y)\cap U\}\cap\{U\cap(Y^C\cup X^C)\}$
$=(X\cup Y)\cap(Y^C\cup X^C)$
$=(X\cup Y)\cap(X\cap Y)^C$ ← 드모르간의 법칙
$=(X\cup Y)-(X\cap Y)$

14 **접근 방법 |** $A\cap B$는 집합 $A=\{1, 3, 5\}$의 부분집합이다. 이때 $n(A\cap B)=2$이므로 $A\cap B$는 $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$가 될 수 있다.

$(A\cap B)\subset A$이고, $n(A\cap B)=2$이므로
$A\cap B=\{1, 3\}$일 때, $1\in B$, $3\in B$, $5\notin B$이다.
즉, 집합 B의 개수는 집합 $\{2, 4\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^2=4$
또한 $A\cap B=\{1, 5\}$, $A\cap B=\{3, 5\}$일 때에도 가능한 집합 B의 개수는 각각 4이다.
따라서 구하는 집합 B의 개수는
$4+4+4=12$

보충 설명

$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_p, b_1, b_2, \cdots, b_q, c_1, c_2, \cdots, c_r\}$의 부분집합 중에서 $a_1, a_2, \cdots, a_p$를 원소로 가지고 $b_1, b_2, \cdots, b_q$를 원소로 가지지 않는 집합의 개수는 $c_1, c_2, \cdots, c_r$만 원소로 가지는 부분집합에 원소 $a_1, a_2, \cdots, a_p$를 넣으면 되므로 구하는 부분집합의 개수는 2^r이다.

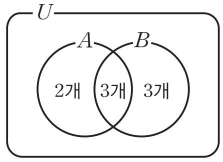
15 **접근 방법 |** 주어진 조건에 의하여 $n(A\cap B)$와 $n(B-A)$를 구하고, 집합 B의 부분집합 중에서 집합 $B-A$를 포함하는 부분집합의 개수를 구하도록 한다.

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서
$n(A)=5$, $n(A-B)=2$, $n(B)=6$이므로
$2=5-n(A\cap B)\qquad \therefore n(A\cap B)=3$
$\therefore n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$\qquad\qquad\quad =6-3=3$

$(B\cap A^C)\subset X\subset B$, 즉 $(B-A)\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 집합 $B-A$의 원소 3개를 반드시 원소로 가지는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{6-3}=2^3=8$

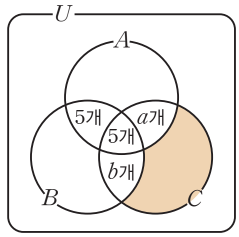
보충 설명

$n(A)=5$, $n(A-B)=2$, $n(B)=6$이므로 다음 벤다이어그램에서 $n(A\cap B)=3$, $n(B-A)=3$임을 알 수 있다.



16 **접근 방법 |** 세 집합 A, B, C를 벤다이어그램으로 나타내고 각각의 영역의 원소의 개수를 나타낸다.

세 집합 A, B, C의 원소의 개수를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같고, 문제에서 주어지지 않은 두 부분의 원소의 개수를 각각 a, b라고 하면 a와 b가 최대일 때, $n(C-(A\cup B))$가 최소이다.



$n(A)=14$이므로 a의 최댓값은 4이고
$n(B)=16$이므로 b의 최댓값은 6이다.
따라서 $n(C-(A\cup B))$의 최솟값은
$19-(a+b+5)=19-(4+6+5)=4$

보충 설명

위의 벤다이어그램에서 집합 A의 원소의 개수는 14로 고정되어 있으므로 $a+5+5=14$로부터 a의 최댓값은 4이다.
이와 같은 방법으로 b의 최댓값은 6임을 구할 수 있다.

17 **접근 방법 |** 집합 P에 대하여 $n(P)=m$이면 $s(P)=2^m$이다.

ㄱ. $n(A)=a$, $n(B)=b$라고 하면
$s(A)=2^a$, $s(B)=2^b$
$a<b$일 때, $2^a<2^b$이므로
$n(A)<n(B)$이면 $s(A)<s(B)$ (참)

ㄴ. $A\subset B$이면 $n(A)\le n(B)$이므로

$s(A)\le s(B)$

즉, $A\subset B$이면 $s(A)\le s(B)$ (참)

ㄷ. $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{3\}$일 때,

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3\}$

$s(A)=2^2=4$, $s(B)=2^1=2$, $s(A\cup B)=2^3=8$

이므로

$s(A)+s(B)<s(A\cup B)$

$\therefore s(A\cup B)\ne s(A)+s(B)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

보충 설명

두 집합 A, B가 서로소인 경우

$s(A\cup B)=s(A)\times s(B)$가 성립한다.

그러나 두 집합 A, B가 서로소가 아닌 경우

$s(A\cup B)=s(A)\times s(B)$가 성립하지 않는다.

18 **접근 방법** | 은행 입금, 휴대폰 결제, 신용카드 결제를 이용하여 포인트를 충전한 회원의 집합을 각각 A, B, C라고 한다. 세 가지 충전 방법 중 은행 입금과 휴대폰 결제, 휴대폰 결제와 신용카드 결제, 신용카드 결제와 은행 입금의 두 가지 방법만을 이용하여 포인트를 충전한 회원을 각각 p명, q명, r명, 세 가지 방법을 모두 이용하여 포인트를 충전한 회원을 x명이라 하고 주어진 조건을 적용해 본다.

회원 100명의 집합을 U, 은행 입금을 이용한 회원의 집합을 A, 휴대폰 결제를 이용한 회원의 집합을 B, 신용카드 결제를 이용한 회원의 집합을 C라고 하면

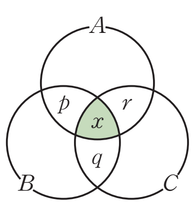
$n(A\cup B\cup C)=100$,

$n(A)=29$, $n(B)=74$, $n(C)=32$

또한 세 가지 충전 방법 중에서 두 가지 방법만을 이용한 회원, 즉 은행 입금과 휴대폰 결제를 이용한 회원을 p명, 휴대폰 결제와 신용카드 결제를 이용한 회원을 q명, 신용카드 결제와 은행 입금을 이용한 회원을 r명이라 하고, 세 가지 방법을 모두 이용한 회원을 x명이라고 하면

$n(A\cap B)=p+x$, $n(B\cap C)=q+x$

$n(C\cap A)=r+x$, $n(A\cap B\cap C)=x$



$p+q+r=15$이므로

$100=29+74+32-(p+x)-(q+x)-(r+x)+x$

$100=135-(p+q+r)-2x$

$100=135-15-2x$

$2x=20$

$\therefore x=10$

따라서 구하는 회원은 10명이다.

보충 설명

세 집합 A, B, C에 대하여

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)$

$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)$

가 성립한다.

기출 다지기 222쪽

19 7 **20** ② **21** ② **22** 63

19 **접근 방법** | 집합 $A\cap B^C$, 즉 $A-B$는 집합 A에 속하고, 집합 B에는 속하지 않는 원소들의 집합임을 생각하여 자연수 a의 값을 구한다.

$A=\{3,\ 6,\ 7\}$, $B=\{a-4,\ 8,\ 9\}$이고,

$A\cap B^C=A-B=\{6,\ 7\}$이므로 $3\in B$이어야 한다.

따라서 $a-4=3$이므로

$a=7$

20 **접근 방법** | $A\cup X=A$에서 $X\subset A$이고 $B\cap X=\varnothing$이어야 하므로 집합 X는 집합 $A-B$의 부분집합이어야 함을 이용하여 집합 X의 개수를 구한다.

$A\cup X=A$에서 $X\subset A$이고 $B\cap X=\varnothing$이므로 집합 X는 집합 $A-B$의 부분집합이다.

집합 $A-B$는 50 이하의 6의 배수 중 4의 배수가 아닌 수의 집합이므로

$A-B=\{6,\ 18,\ 30,\ 42\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 $A-B$의 부분집합의 개수이므로

$2^4=16$

21 **접근 방법 |** 은행 A와 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 각각 A, B라고 하여 집합의 원소의 개수에 대응해서 조건에 맞는 여자 고객의 수를 구한다.

은행 A와 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 각각 A, B라고 하면 조건 ㈎에서

$n(A)+n(B)=82$

또한 은행 A 또는 은행 B를 이용하는 남자 35명과 여자 30명을 대상으로 조사하였으므로

$n(A\cup B)=35+30=65$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=82-65=17$

한편, 한 은행만 이용하는 고객의 집합은

$(A\cup B)-(A\cap B)$이므로

$n(A\cup B)-n(A\cap B)=65-17=48$

조건 ㈏에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객과 여자 고객은 각각 24명이다.

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는

$30-24=6$

22 **접근 방법 |** 조건 ㈏를 만족시키기 위해서는 9로 나눈 나머지를 기준으로 구분하여 생각하고, 조건 ㈐를 만족시키기 위해서는 10으로 나눈 나머지를 기준으로 구분하여 생각한다. 이때 $S(A)-S(B)$의 값이 최대가 되려면 $S(A)$의 값이 최대이고 $S(B)$의 값이 최소가 되도록 정한다.

$S(A)-S(B)$의 값이 최대가 되려면 $S(A)$의 값이 최대이고 $S(B)$의 값이 최소이어야 한다.

9로 나눈 나머지가 같은 원소들로 이루어진 부분집합을 표로 나타내면 다음과 같다.

나머지	부분집합	나머지	부분집합
1	{1, 10, 19}	8	{8, 17}
2	{2, 11, 20}	7	{7, 16}
3	{3, 12}	6	{6, 15}
4	{4, 13}	5	{5, 14}
0	{9}	0	{18}

조건 ㈏에서 나머지의 합이 0 또는 9가 되는 두 부분집합 중 한 집합의 원소들만 집합 A에 속할 수 있다.

따라서 $S(A)$가 최대가 되려면 집합 U의 부분집합 {1, 10, 19}, {2, 11, 20}, {6, 15}, {5, 14}, {18}의 원소 중 큰 수부터 차례대로 집합 A의 원소가 되어야 한다.

조건 ㈎에서 $n(A)=8$이므로

$S(A)$가 최대가 되기 위해 가능한 집합 A는

{6, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 20} ······ ㉠

10으로 나눈 나머지가 같은 원소들로 이루어진 부분집합을 표로 나타내면 다음과 같다.

나머지	부분집합	나머지	부분집합
1	{1, 11}	9	{9, 19}
2	{2, 12}	8	{8, 18}
3	{3, 13}	7	{7, 17}
4	{4, 14}	6	{6, 16}
5	{5}	5	{15}
0	{10}	0	{20}

조건 ㈐에서 나머지의 합이 0 또는 10이 되는 두 부분집합 중 한 집합의 원소들만 집합 B에 속할 수 있다.

따라서 $S(B)$가 최소가 되려면 집합 U의 부분집합 {1, 11}, {2, 12}, {3, 13}, {4, 14}, {5}, {10}의 원소 중 작은 수부터 차례대로 집합 B의 원소가 되어야 한다.

조건 ㈎에서 $n(B)=8$이므로

$S(B)$가 최소가 되기 위해 가능한 집합 B는

{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12} ······ ㉡

㉠, ㉡에서 조건 ㈎의 $n(A\cap B)=1$을 만족시키려면 10, 11은 동시에 집합 B에 속할 수 없다.

$10\in B$, $11\in B$이면 $10\notin A$ 또는 $11\notin A$이다.

이때 1, 2, 5 중 적어도 하나가 집합 A에 속해야 하므로 $n(A\cap B)\neq 1$이 되어 조건 ㈎를 만족시키지 않는다.

따라서 $S(B)$가 최소가 되려면 $10\in B$, $11\notin B$이어야 하므로

$A=\{6, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 20\}$,

$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 12, 13\}$일 때,

$S(A)-S(B)$의 최댓값은 63이다.

06. 명제

개념 콕콕 **1 명제와 조건** 233쪽

1 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. 2는 소수이지만 홀수가 아니므로 거짓인 명제이다.
ㄴ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
ㄷ. 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로 참인 명제이다.
ㄹ. 마름모는 네 변의 길이가 모두 같지만 정사각형이 아니므로 거짓인 명제이다.
따라서 명제인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

2 답 (1) $\{0, 1, 2, 3\}$ (2) $\{0, 3, 4, 5\}$

(1) $x-2<2$에서 $x<4$이므로 주어진 조건의 진리집합은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다.
(2) $x^2-3x+2\neq0$에서 $(x-1)(x-2)\neq0$이므로
$x\neq1$이고 $x\neq2$
따라서 주어진 조건의 진리집합은 $\{0, 3, 4, 5\}$이다.

3 답 (1) 1은 홀수가 아니다. (거짓)
(2) 2는 소수이다. (참)

4 답 (1) $\sim p$: x는 6의 양의 약수가 아니다.,
$\sim p$의 진리집합 : $\{4, 5\}$
(2) $\sim p$: x는 짝수가 아니다.,
$\sim p$의 진리집합 : $\{1, 3, 5\}$
(3) $\sim p$: $x<3$,
$\sim p$의 진리집합 : $\{1, 2\}$
(4) $\sim p$: $x\neq2$이고 $x\neq4$,
$\sim p$의 진리집합 : $\{1, 3, 5, 6\}$

5 답 (1) 거짓 (2) 참 (3) 거짓

(1) [반례] $x=12$이면 x는 4의 배수이지만 x는 8의 배수가 아니다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.
(3) [반례] 밑변의 길이가 6이고 높이가 2인 직각삼각형과 밑변의 길이가 4이고 높이가 3인 직각삼각형의 넓이는 같지만 두 삼각형은 합동이 아니다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

예제 01 **명제와 조건의 부정** 235쪽

01-1 답 ㄱ

ㄱ. '1과 2는 서로소이다.'의 부정은 '1과 2는 서로소가 아니다.'이다. (참)
ㄴ. '2는 4의 양의 약수이다.'의 부정은 '2는 4의 양의 약수가 아니다.'이다. (거짓)
ㄷ. '6은 2의 배수이거나 3의 배수이다.'의 부정은 '6은 2의 배수가 아니고 3의 배수도 아니다.'이다. (거짓)
따라서 명제와 그 부정을 옳게 짝 지은 것은 ㄱ이다.

01-2 답 (1) $x=0$ 또는 $y=0$ (2) $x>0$이고 $y\leq1$

(1) '$x\neq0$이고 $y\neq0$'의 부정은 '$x=0$ 또는 $y=0$'이다.
(2) '$x\leq0$ 또는 $y>1$'의 부정은 '$x>0$이고 $y\leq1$'이다.

01-3 답 어떤 실수 x에 대하여 $x^2<1$이다.

'모든 실수 x에 대하여 $x^2\geq1$이다.'의 부정은 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2<1$이다.'이다.

예제 02 **조건과 진리집합** 237쪽

02-1 답 (1) $\{2, 4, 6, 8\}$ (2) $\{10, 12\}$
(3) $\{2, 4, 6, 8\}$

$U=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$이고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
p : $x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=4$
$\therefore P=\{2, 4\}$
q : $x^2-10x+16>0$에서 $(x-2)(x-8)>0$
$\therefore x<2$ 또는 $x>8$
$\therefore Q=\{10, 12\}$
(1) '$\sim q$'의 진리집합은 Q^C이므로
$Q^C=\{2, 4, 6, 8\}$
(2) '$\sim p$이고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이므로
$P^C\cap Q=\{10, 12\}$
(3) 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cup Q^C$이므로
$P\cup Q^C=\{2, 4, 6, 8\}$

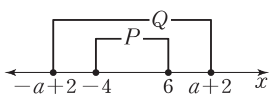
02-2 답 ⑤

$U=\{1, 2, 3, 6\}$이고 조건 p의 진리집합을 P라고 하면
$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ $\quad\therefore P=\{2, 3\}$

조건 '$\sim p$'의 진리집합은 P^C이므로 $P^C=\{1,\ 6\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
$1+6=7$

02-3 답 6

$p : x^2-2x-24\le 0$에서 $(x+4)(x-6)\le 0$
$\therefore\ -4\le x\le 6$
$q : |x-2|\le a$에서 $-a\le x-2\le a$ ($\because$ a는 자연수)
$\therefore\ -a+2\le x\le a+2$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{x\,|\,-4\le x\le 6\}$
$Q=\{x\,|\,-a+2\le x\le a+2\}$
이때 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$이고, 이를 만족시키는 실수 x가 존재하지 않으므로
$P\cap Q^C=\varnothing$이어야 한다.
즉, $P\subset Q$이어야 하므로 다음 그림과 같아야 한다.



$-a+2\le -4$, $6\le a+2$에서 $a\ge 6$, $a\ge 4$
$\therefore\ a\ge 6$
따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다.

예제 03 명제의 참, 거짓 239쪽

03-1 답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓 (4) 참

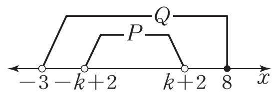
(1) 주어진 명제에서 두 조건을 각각 $p : x^2<1$, $q : x<1$이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$x^2<1$에서 $x^2-1<0$
$(x+1)(x-1)<0$ $\quad\therefore\ -1<x<1$
$\therefore\ P=\{x\,|\,-1<x<1\}$, $Q=\{x\,|\,x<1\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.
(2) [반례] $x=0$, $y=2$이면 $xy=0$이지만 $x=0$이고 $y\neq 0$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.
(3) 주어진 명제에서 두 조건을 각각 $p : x$는 12의 양의 약수, $q : x$는 16의 양의 약수라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $Q=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$
따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
(4) 주어진 명제에서 두 조건을 각각 $p : x$는 6의 배수, $q : 3$의 배수라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots\}$, $Q=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\}$
따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

다른 풀이

(3) [반례] $x=3$이면 x는 12의 양의 약수이지만 16의 양의 약수가 아니다.

03-2 답 5

$p : |x-2|<k$에서
$-k<x-2<k$ ($\because$ k는 양수)
$\therefore\ -k+2<x<k+2$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{x\,|\,-k+2<x<k+2\}$,
$Q=\{x\,|\,-3<x\le 8\}$
명제 $p\rightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 다음 그림과 같아야 한다.



$-3\le -k+2$이고 $k+2\le 8$
$k\le 5$이고 $k\le 6$
$\therefore\ k\le 5$
따라서 양수 k의 최댓값은 5이다.

03-3 답 (1) 참 (2) 거짓

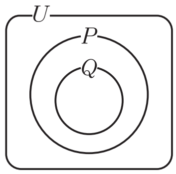
(1) $2\in A$이면 $1\in A$, $\frac{1}{2}\in A$, $\frac{1}{4}\in A$, $\cdots$
이므로 집합 A의 원소는 무수히 많다.
따라서 주어진 명제는 참이다.
(2) [반례] $x=\frac{1}{3}$이면 $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\in A$ (n은 자연수)이고
$y=\frac{1}{5}$이면 $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^m\in A$ (m은 자연수)이지만
$xy=\frac{1}{15}\not\in A$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

예제 04 진리집합의 포함 관계 241쪽

04-1 답 ㄱ, ㄷ

명제 $p\rightarrow q$는 거짓이므로 $P\not\subset Q$이고, 명제 $q\rightarrow p$는 참이므로 $Q\subset P$이다.

따라서 두 집합 P, Q의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $P \cup Q = P$ (참)

ㄴ. $P^C \cap Q = Q - P = \varnothing \neq U$ (거짓)

ㄷ. $Q^C \cap P^C = (Q \cup P)^C = P^C$ (참)

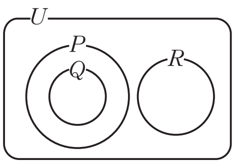
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04-2 답 ⑤

$P \cap Q = Q$이므로 $Q \subset P$

$P \cup R^C = R^C$이므로 $P \subset R^C$

따라서 세 집합 P, Q, R의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $R \subset Q^C$이므로 항상 참인 명제는 ⑤ $r \rightarrow \sim q$이다.

보충 설명

(1) $P \not\subset Q$이므로 $p \rightarrow q$는 거짓이다.

(2) $Q^C \not\subset R^C$이므로 $\sim q \rightarrow \sim r$은 거짓이다.

(3) $P \not\subset R$이므로 $p \rightarrow r$은 거짓이다.

(4) $P^C \not\subset R$이므로 $\sim p \rightarrow r$은 거짓이다.

04-3 답 ④

$P \cup Q = Q$이므로 $P \subset Q$

$Q \cap R = Q$이므로 $Q \subset R$

$\therefore P \subset Q \subset R$ ······ ㉠

$S \cup Q^C = U$에서

$(S \cup Q^C)^C = U^C$, $S^C \cap Q = \varnothing$

즉, $Q - S = \varnothing$이므로 $Q \subset S$

또한 $P^C \subset S^C$에서 $S \subset P$이므로

$Q \subset S \subset P$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $P = Q$이므로

$P = Q = S \subset R$

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 명제는 ④ $r \rightarrow q$이다.

개념 콕콕 2 명제의 역과 대우

245쪽

1 답 (1) 역 : $xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이다. (참)
대우 : $xy \neq 0$이면 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이다. (참)
(2) 역 : $x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다. (거짓)
대우 : $x+y \leq 0$이면 $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$이다. (참)

(2) 주어진 명제의 역 '$x+y>0$이면 $x>0$이고 $y>0$이다.'의 반례는 다음과 같다.
[반례] $x=-1$, $y=3$이면 $x+y>0$이지만 $x<0$이고 $y>0$이다.

2 답 (1) 역 : 이등변삼각형이면 $a=b$이다. (거짓)
대우 : 이등변삼각형이 아니면 $a \neq b$이다. (참)
(2) 역 : 직각삼각형이면 $a^2+b^2=c^2$이다. (거짓)
대우 : 직각삼각형이 아니면 $a^2+b^2 \neq c^2$이다. (참)

(1) 주어진 명제의 역 '이등변삼각형이면 $a=b$이다.'의 반례는 다음과 같다.
[반례] $b=c$이면 $a \neq b$이어도 이등변삼각형이다.

(2) 주어진 명제의 역 '직각삼각형이면 $a^2+b^2=c^2$이다.'의 반례는 다음과 같다.
[반례] $a^2+c^2=b^2$이면 $a^2+b^2 \neq c^2$이어도 직각삼각형이다.

3 답 ㄴ

명제 $p \rightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우인 명제 $q \rightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ㄴ이다.

4 답 (가) 홀수 (나) 홀수 (다) 짝수

결론을 부정하여 x, y를 모두 $\boxed{\text{홀수}}$라고 가정하면
$x=2m-1$, $y=2n-1$ (m, n은 자연수)로 놓을 수 있으므로

$xy=(2m-1)(2n-1)$
$\quad =4mn-2m-2n+1=2(2mn-m-n)+1$

그런데 $2mn-m-n$은 0 또는 자연수이므로 xy는 $\boxed{\text{홀수}}$이다. 이것은 xy가 $\boxed{\text{짝수}}$라는 사실에 모순이다.
따라서 자연수 x, y에 대하여 xy가 짝수이면 x 또는 y가 짝수이다.

예제 05 명제의 역과 대우 247쪽

05-1

답 (1) $x^2>0$이면 $x \neq 0$이다. (참)
(2) $x=0$이면 $x^2 \leq 0$이다. (참)
(3) $x^2 \leq 0$이면 $x=0$이다. (참)

명제 '$x \neq 0$이면 $x^2>0$이다.'에서 두 조건을 각각 $p: x \neq 0$, $q: x^2>0$이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{x | x \neq 0$인 실수$\}$, $Q=\{x | x^2>0$인 실수$\}$
이므로 $P=Q$이다.
이때 $P=Q$에서 $Q \subset P$이므로 $p \longrightarrow q$의 역 $q \longrightarrow p$, 즉 (1)은 참이다. 또한 $Q=P$에서 $P^C \subset Q^C$이므로 역의 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$, 즉 (2)도 참이다. 한편, $Q^C \subset P^C$이므로 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, 즉 (3)도 참이다.

05-2

답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 주어진 명제의 역은 '$x^3=8$이면 $x^2=4$이다.'이다.
$x^3=8$에서 $x=2$ ($\because$ x는 실수)
$\therefore x^2=4$
즉, 주어진 명제의 역은 참이다.
ㄴ. 주어진 명제의 역은 '$x>0$이면 $x>1$이다.'이다.
[반례] $x=\frac{1}{2}$이면 $\frac{1}{2}>0$이지만 $\frac{1}{2}<1$이므로 주어진 명제의 역은 거짓이다.
ㄷ. 주어진 명제의 역은 '$x>1$이면 $x^2>x$이다.'이다.
$x^2>x$에서 $x(x-1)>0$
$\therefore x<0$ 또는 $x>1$
즉, 주어진 명제의 역은 참이다.
따라서 주어진 명제의 역이 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

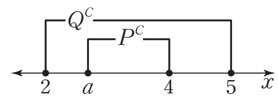
보충 설명

ㄴ에서 두 조건을 각각 $p: x>1$, $q: x>0$이라 하고 그 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 $P \subset Q$이고 $Q \not\subset P$이다.
따라서 명제 $p \longrightarrow q$는 참이고, 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

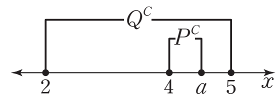
05-3

답 9

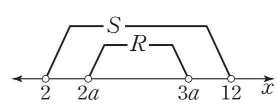
명제 '$x^2-(a+4)x+4a>0$이면 $x^2-7x+10>0$이다.'의 두 조건을 각각
$p: x^2-(a+4)x+4a>0$, $q: x^2-7x+10>0$이라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
명제 $p \longrightarrow q$의 역 $q \longrightarrow p$가 참이므로 역의 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$도 참이다.
$\sim p: x^2-(a+4)x+4a \leq 0$에서
$(x-4)(x-a) \leq 0$
이때 $a<4$인 경우에 $P^C=\{x | a \leq x \leq 4\}$
$4 \leq a$인 경우에 $P^C=\{x | 4 \leq x \leq a\}$
$\sim q: x^2-7x+10 \leq 0$에서
$(x-2)(x-5) \leq 0$ $\therefore 2 \leq x \leq 5$
$\therefore Q^C=\{x | 2 \leq x \leq 5\}$
명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 $P^C \subset Q^C$가 성립한다.
(i) $a<4$인 경우 다음 그림에서



$\therefore 2 \leq a<4$
(ii) $a \geq 4$인 경우 다음 그림에서



$\therefore 4 \leq a \leq 5$
(i), (ii)에서 $2 \leq a \leq 5$ …… ㉠
또한 명제 '$x^2-5ax+6a^2<0$이면 $x^2-14x+24<0$이다.'의 대우가 참이려면 주어진 명제가 참이어야 한다.
이 명제에서 두 조건을 각각 $r: x^2-5ax+6a^2<0$, $s: x^2-14x+24<0$이라 하고 두 조건 r, s의 진리집합을 각각 R, S라고 하면
$r: x^2-5ax+6a^2<0$에서
$(x-2a)(x-3a)<0$
㉠에서 $2 \leq a \leq 5$이고, 이때 $2a<3a$이므로
$R=\{x | 2a<x<3a\}$
$s: x^2-14x+24<0$에서
$(x-2)(x-12)<0$ $\therefore 2<x<12$
$\therefore S=\{x | 2<x<12\}$
명제 $r \longrightarrow s$가 참이려면 $R \subset S$이어야 하므로 다음 그림에서



즉, $2 \leq 2a$이고 $3a \leq 12$이므로
$a \geq 1$이고 $a \leq 4$
$\therefore 1 \leq a \leq 4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $2 \leq a \leq 4$이므로 이를 만족시키는 정수 a는 2, 3, 4이다.
따라서 구하는 모든 정수 a의 값의 합은
$2+3+4=9$

예제 06 대우를 이용한 명제의 증명 249쪽

06-1 답 풀이 참조

주어진 명제의 대우는

'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'

자연수 n이 홀수이면

$n=2k-1$ (k는 자연수)

로 놓을 수 있으므로

$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1$

$\quad=2(2k^2-2k)+1$

이때 $2(2k^2-2k)$는 0 또는 짝수이므로 n^2은 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

06-2 답 풀이 참조

주어진 명제의 대우는

'$\boxed{n\text{이 3의 배수가 아니면 } n^2\text{도 3의 배수가 아니다.}}$'

n이 3의 배수가 아니면

$n=3k-2$ 또는 $n=3k-1$ (k는 자연수)

로 놓을 수 있다.

(i) $n=3k-2$이면

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$

$\quad=3(\boxed{3k^2-4k+1})+\boxed{1}$

(ii) $n=3k-1$이면

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$

$\quad=3(\boxed{3k^2-2k})+\boxed{1}$

(i), (ii)에서 n^2을 3으로 나누었을 때의 나머지는 $\boxed{1}$이다.

즉, n^2은 3의 배수가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

06-3 답 풀이 참조

주어진 명제의 대우는

'a, b가 모두 홀수이면 $a+b$는 짝수이다.'

a, b가 모두 홀수이면

$a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)

로 놓을 수 있으므로

$a+b=(2m-1)+(2n-1)$

$\quad=2m+2n-2$

$\quad=2(m+n-1)$

이때 $2(m+n-1)$은 짝수이므로 $a+b$는 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

예제 07 귀류법을 이용한 명제의 증명 251쪽

07-1 답 풀이 참조

결론을 부정하여 $\sqrt{5}$가 유리수라고 가정하면 서로소인 두 자연수 m, n에 대하여

$\sqrt{5}=\dfrac{n}{m}$

위 식의 양변을 제곱하면

$5=\dfrac{n^2}{m^2}\qquad \therefore n^2=5m^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

즉, n^2이 5의 배수이므로 n도 5의 배수이다.

$n=5k$ (k는 자연수)라 하고 이를 ㉠에 대입하면

$(5k)^2=5m^2$, 즉 $5k^2=m^2$

이때 m^2이 5의 배수이므로 m도 5의 배수이다.

그런데 이것은 m, n이 서로소라는 사실에 모순이다.

따라서 $\sqrt{5}$는 무리수이다.

07-2 답 풀이 참조

결론을 부정하여 정수 m, n이 존재한다고 가정하면

$3m^2-n^2=1$에서 $3m^2=n^2+1$이므로 n^2+1은 3의 배수이다.

한편, 정수 n을 임의의 정수 k에 대하여 다음과 같이 나누어 생각해 보면

(i) $n=3k$일 때,

$n^2=(3k)^2=9k^2=3(\boxed{3k^2})$

(ii) $n=3k+1$일 때,

$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$

$\quad=3(\boxed{3k^2+2k})+\boxed{1}$

(iii) $n=3k+2$일 때,

$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4$

$\quad=3(\boxed{3k^2+4k+1})+\boxed{1}$

(i)~(iii)에서 n^2을 3으로 나누었을 때의 나머지는 0 또는 1이므로 n^2+1을 3으로 나누었을 때의 나머지는 $\boxed{1}$ 또는 $\boxed{2}$이다.

즉, n^2+1은 3의 배수가 아니므로 이것은 $3m^2-n^2=1$을 만족시키는 정수 m, n이 존재한다는 가정에 모순이다.
따라서 $3m^2-n^2=1$을 만족시키는 정수 m, n은 존재하지 않는다.

보충 설명

$3m^2=n^2+1$에서 $3m^2$이 3의 배수이므로 n^2+1도 3의 배수이다. 또한 임의의 정수 k에 대하여
(ⅰ) $n=3k$, (ⅱ) $n=3k+1$, (ⅲ) $n=3k+2$로 나누어 확인한 것은 모든 정수에 대하여 확인한 것과 같다.

07-3 답 풀이 참조

결론을 부정하여 m, n이 모두 홀수라고 가정하여 이차방정식 $x^2-mx+n=0$의 자연수인 해를 k라고 하면 $k^2-mk+n=0$에서 $n=mk-k^2$

(ⅰ) k가 홀수일 때,
mk는 홀수이고 k^2은 홀수이므로 $mk-k^2$이 짝수가 되어 n이 홀수라는 가정에 모순이다.

(ⅱ) k가 짝수일 때,
mk는 짝수이고 k^2은 짝수이므로 $mk-k^2$이 짝수가 되어 n이 홀수라는 가정에 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모두 가정에 모순이다.
따라서 이차방정식 $x^2-mx+n=0$이 자연수인 해를 가지면 m, n 중 적어도 하나는 짝수이다.

개념 콕콕 3 충분조건과 필요조건 255쪽

1 답 (1) 필요조건 (2) 충분조건

(1) $x^2=y^2$에서 $(x+y)(x-y)=0$
$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$
따라서 $q \Longrightarrow p$이고 $p \not\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(2) 모든 정삼각형은 이등변삼각형이다.
따라서 $p \Longrightarrow q$이고 $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

2 답 (1) $\{x|x>1\}$, $\{x|x>2\}$, $\supset$, 필요
(2) $\{x|x>2\}$, $\{x|x<-2$ 또는 $x>2\}$, $\subset$, 충분
(3) $\{1\}$, $\{1\}$, $=$, 필요충분

(1) 두 조건 $p: x>1$, $q: x>2$의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 $P=\boxed{\{x|x>1\}}$, $Q=\boxed{\{x|x>2\}}$
따라서 $P\boxed{\supset}Q$이므로 p는 q이기 위한 $\boxed{필요}$조건이다.

(2) 두 조건 $p: x>2$, $q: x^2>4$의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 $P=\boxed{\{x|x>2\}}$,
$x^2>4$에서 $(x+2)(x-2)>0$이므로
$Q=\boxed{\{x|x<-2 \text{ 또는 } x>2\}}$
따라서 $P\boxed{\subset}Q$이므로 p는 q이기 위한 $\boxed{충분}$조건이다.

(3) 두 조건 $p: 2x+1=3$, $q: x=1$의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 $2x+1=3$에서 $x=1$이므로
$P=\boxed{\{1\}}$, $Q=\boxed{\{1\}}$
따라서 $P\boxed{=}Q$이므로 p는 q이기 위한 $\boxed{필요충분}$조건이다.

3 답 ㄴ, ㄷ

ㄴ. $q \Longrightarrow p$이므로 $Q\subset P$ (참)
ㄷ. $Q\subset P$이므로 $Q-P=\varnothing$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

예제 08 충분조건, 필요조건, 필요충분조건의 판별 257쪽

08-1 답 (1) 필요충분조건 (2) 필요조건 (3) 충분조건

(1) $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이므로
$p \Longrightarrow q$
$xy=0$이면 $x=0$ 또는 $y=0$이므로
$q \Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

(2) $x-y>0$이면 $x>y$인 모든 실수 x, y에 대하여 성립하므로 $p \not\Longrightarrow q$
[반례] $x=5$, $y=3$이면 $x-y>0$이지만 $y\geq 0$이다.
$x>0$, $y<0$이면 $x-y>0$이므로 $q \Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(3) $x>0$이면 $x+y^2>0$이므로 $p \Longrightarrow q$ ($\because y^2\geq 0$)
$x+y^2>0$이면 y의 값에 따라 $x\leq 0$이어도 식이 성립하므로 $q \not\Longrightarrow p$
[반례] $x=-1$, $y=2$이면 $x+y^2>0$이지만 $x\leq 0$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

08-2 답 (1) 충분 (2) 필요충분 (3) 충분 (4) 필요

(1) $p: x>1$, $q: x^2>1$이라고 하면

$x>1$이면 $x^2>1$이므로 $p \Longrightarrow q$

$x^2>1$이면 $x<-1$ 또는 $x>1$이므로 $q \not\Longrightarrow p$

[반례] $x=-2$이면 $x^2>1$이지만 $x\le 1$이다.

따라서 $x>1$은 $x^2>1$이기 위한 충분조건이다.

(2) $p: |x|>0$, $q: x^2>0$이라고 하면

$|x|>0$이면 $x\ne 0$이므로 $x^2>0$이다.

$\therefore p \Longrightarrow q$

$x^2>0$이면 $x\ne 0$이므로 $|x|>0$이다.

$\therefore q \Longrightarrow p$

즉, $p \Longleftrightarrow q$이다.

따라서 $|x|>0$은 $x^2>0$이기 위한 필요충분조건이다.

(3) $p: x>0,\ y>0$, $q: x^2+y^2>0$이라고 하면

$x>0,\ y>0$이면 $x^2+y^2>0$이므로 $p \Longrightarrow q$

$x^2+y^2>0$이면 $x\ne 0$ 또는 $y\ne 0$이므로 $q \not\Longrightarrow p$

[반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $x^2+y^2=5>0$이지만 $x\le 0$, $y\le 0$이다.

따라서 $x>0$, $y>0$은 $x^2+y^2>0$이기 위한 충분조건이다.

(4) $p: x>0$ 또는 $y>0$, $q: x+y>0$이라고 하면

$x>0$ 또는 $y>0$이면 $x+y\le 0$인 경우도 존재하므로 $p \not\Longrightarrow q$

[반례] $x=-2$, $y=1$이면 $x>0$ 또는 $y>0$이지만 $x+y\le 0$이다.

명제 $q \longrightarrow p$의 대우 $\sim p \longrightarrow \sim q$에서 $x\le 0$, $y\le 0$이면 $x+y\le 0$이므로 $\sim p \Longrightarrow \sim q$, 즉 $q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

보충 설명

명제 $p \longrightarrow q$가 참이고, 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓이면 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이다.
두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$가 모두 참이면 p는 q이기 위한 필요충분조건, q는 p이기 위한 필요충분조건이다.

08-3 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$p: a^2+b^2=0$에서 $a=0$이고 $b=0$

$q: a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0 \qquad \therefore a=b$

$r: a^2-ab+b^2=0$에서 $\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}=0$

$\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2=0$이고 $\dfrac{3b^2}{4}=0$이므로

$a=0$이고 $b=0$

ㄱ. $p \Longrightarrow q$이고 $q \not\Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄴ. $q \not\Longrightarrow r$이고 $r \Longrightarrow q$

따라서 q는 r이기 위한 필요조건이다. (참)

ㄷ. $r \Longrightarrow p$이고 $p \Longrightarrow r$이므로 $r \Longleftrightarrow p$

따라서 r은 p이기 위한 필요충분조건이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

예제 09 충분조건, 필요조건과 진리집합의 관계 259쪽

09-1 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 벤다이어그램에서 $P\not\subset R$이고 $R\not\subset P$이므로

$p \not\Longrightarrow r$이고 $r \not\Longrightarrow p$이다.

즉, p는 r이기 위한 충분조건도 필요조건도 아니다. (거짓)

ㄴ. 벤다이어그램에서 $Q\subset P^C$이고 $P^C\not\subset Q$이므로

$q \Longrightarrow \sim p$

즉, $\sim p$는 q이기 위한 필요조건이다. (참)

ㄷ. 벤다이어그램에서 $Q\subset R$이므로 $R^C\subset Q^C$이고, $Q^C\not\subset R^C$이므로

$\sim r \Longrightarrow \sim q$

즉, $\sim r$은 $\sim q$이기 위한 충분조건이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

09-2 답 ㄱ, ㄷ

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R이라고 하면 p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q^C$이고, p는 r이기 위한 필요조건이므로 $R\subset P$이다.

ㄱ. $P\subset Q^C$에서 $Q\subset P^C$이므로 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

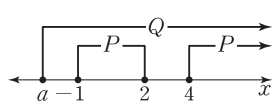
ㄴ. $P\subset Q^C$, $R\subset P$이므로 삼단논법에 의하여 $R\subset Q^C$이지만 $r \longrightarrow q$의 참, 거짓은 판별할 수 없다.

ㄷ. $R\subset Q^C$에서 $Q\subset R^C$이므로 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

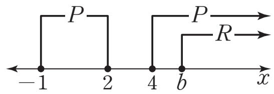
09-3 답 3

q는 p이기 위한 필요조건이므로 $p \Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$



즉, 위의 그림에서 $a\le -1$

r은 p이기 위한 충분조건이므로 $r \Longrightarrow p$, 즉 $R\subset P$



즉, 위의 그림에서 $b \geq 4$

따라서 a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 4이므로 그 합은

$-1+4=3$

기본 다지기 260쪽 ~ 261쪽

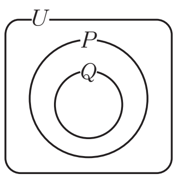
1 ③ **2** 7 **3** ④ **4** ㄱ, ㄴ, ㄹ

5 (1) -1 (2) 6 **6** -4

7 (가) 짝수 (나) 서로소 (다) 2 **8** (1) 8 (2) 8

9 1 **10** ㄴ, ㄷ

1 $P \cup Q=P$이므로 두 집합 P, Q의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $Q \subset P$, 즉 $P^C \subset Q^C$이므로 명제 ③ $\sim p \rightarrow \sim q$가 참이다.

2 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$이고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{1, 2, 5, 10\}$이므로

$P^C=\{3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$

$q : x^2 \leq 25$에서

$(x+5)(x-5) \leq 0$ $\quad \therefore -5 \leq x \leq 5$

$\therefore Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

이때 조건 '$\sim p$이고 q'의 진리집합은 $P^C \cap Q$이므로

$P^C \cap Q=\{3, 4\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$3+4=7$

3 12의 양의 약수 1, 2, 3, 4, 6, 12와 8의 양의 약수 1, 2, 4, 8에서 12의 양의 약수이면서 8의 양의 약수가 아닌 수를 찾으면 된다.

1, 2, 4는 12의 양의 약수이면서 8의 양의 약수이므로 가정과 결론을 모두 만족시킨다. 즉, 반례가 아니다.

8은 12의 양의 약수가 아니므로 가정을 만족시키지 못한다. 즉, 반례가 아니다.

6은 12의 양의 약수이지만 8의 양의 약수가 아니므로 가정은 만족시키지만 결론을 만족시키지 못하므로 반례이다.

⊕ 보충 설명

반례가 하나만 존재해도 그 명제는 거짓이 되므로 명제 $p \rightarrow q$가 거짓임을 보일 때에는 반례를 하나만 찾으면 된다.

4 ㄱ. 조건 $p : |x| \geq 0$의 진리집합을 P라고 하면

$|x| \geq 0$에서 x는 모든 실수이다.

$\therefore P=\{x | x$는 모든 실수$\}$

즉, $P=U$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. 조건 $p : x<1$의 진리집합을 P라고 하면

$P=\{x | x<1\}$

즉, $P \neq \varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. 조건 $p : x^2-4x+4>0$의 진리집합을 P라고 하면

$x^2-4x+4>0$에서 $(x-2)^2>0$

$\therefore P=\{x | x \neq 2$인 모든 실수$\}$

즉, $P \neq U$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

ㄹ. 조건 $p : x^2=4x$의 진리집합을 P라고 하면

$x^2=4x$에서

$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

$\therefore P=\{0, 4\}$

즉, $P \neq \varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.

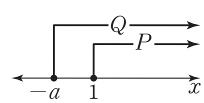
따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

5 (1) $p : x \geq 1$, $q : 2x+a \leq 3x+2a$라 하고 그 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$q : 2x+a \leq 3x+2a$에서 $x \geq -a$이므로

$P=\{x | x \geq 1\}$, $Q=\{x | x \geq -a\}$

명제 $p \rightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 다음 그림에서



$-a \leq 1$

$\therefore a \geq -1$

따라서 실수 a의 최솟값은 -1이다.

(2) 명제 '$x^2-ax+8 \neq 0$이면 $x \neq 2$이다.'가 참이 되려면 대우 '$x=2$이면 $x^2-ax+8=0$이다.'도 참이어야 한다.

따라서 $x=2$를 $x^2-ax+8=0$에 대입하면

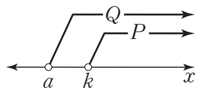
$4-2a+8=0$, $2a=12$

$\therefore a=6$

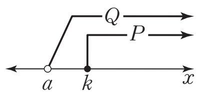
보충 설명

$P\subset Q$가 되도록 하는 실수 a의 값의 범위

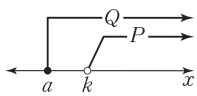
(단, k는 실수이다.)

(1)


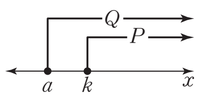
➡ $a\le k$

(2)


➡ $a<k$

(3)


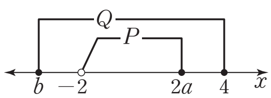
➡ $a\le k$

(4)


➡ $a\le k$

6 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 명제 $p \to q$의 대우가 참일 때, 명제 $p \to q$도 참이므로 $P\subset Q$이다.

즉, 오른쪽 그림에서



$2a\le 4$, $b\le -2$

$\therefore$ $a\le 2$, $b\le -2$

따라서 $m=2$, $n=-2$이므로

$mn=2\times(-2)=-4$

7 주어진 명제의 대우 '자연수 m, n에 대하여 m과 n이 모두 $\boxed{\text{짝수}}$이면 m과 n은 $\boxed{\text{서로소}}$가 아니다.'가 참임을 보이면 된다.

m과 n이 모두 $\boxed{\text{짝수}}$이면 $m=2k$, $n=2l$ (k, l은 자연수)로 나타낼 수 있다.

이때 $\boxed{2}$는 m과 n의 공약수이므로 m과 n이 모두 $\boxed{\text{짝수}}$이면 m과 n은 $\boxed{\text{서로소}}$가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

8 (1) $p : x^2+ax-48\ne 0$, $q : x-4\ne 0$이라고 하면 p가 q이기 위한 충분조건이므로 명제 $p \to q$가 참이다.

이때 명제 $p \to q$가 참이면 그 대우 $\sim q \to \sim p$, 즉 명제 '$x-4=0$이면 $x^2+ax-48=0$이다.'도 참이다.

따라서 $x=4$를 $x^2+ax-48=0$에 대입하면

$16+4a-48=0$, $4a=32$ $\quad\therefore a=8$

(2) $p : x-a\ne 0$, $q : x^2-5x-24\ne 0$이라고 하면 p가 q이기 위한 필요조건이므로 명제 $q \to p$가 참이다.

이때 명제 $q \to p$가 참이면 그 대우 $\sim p \to \sim q$, 즉 명제 '$x-a=0$이면 $x^2-5x-24=0$이다.'도 참이다.

따라서 $x=a$를 $x^2-5x-24=0$에 대입하면

$a^2-5a-24=0$, $(a+3)(a-8)=0$

$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

보충 설명

명제 $p \to q$가 참이면 그 대우 $\sim q \to \sim p$도 참이고, 대우 $\sim q \to \sim p$가 참이면 처음의 명제 $p \to q$도 참이다. 따라서 어떤 명제가 참임을 증명할 때에는 그 대우가 참임을 증명해도 된다.

9 p는 q이기 위한 충분조건, q는 r이기 위한 필요충분조건이 되려면 $p \Longrightarrow q$, $q \Longleftrightarrow r$, 즉

$P\subset Q$, $Q=R$이어야 한다.

$P\subset Q$이려면 $a+2\in Q$이어야 하므로

$a+2=2$ 또는 $a+2=4-a$

(i) $a+2=2$일 때, 즉 $a=0$이면

$Q=\{2, 4\}$, $R=\{-1, 0\}$이므로 $Q\ne R$

(ii) $a+2=4-a$일 때, 즉 $a=1$이면

$Q=\{2, 3\}$, $R=\{2, 3\}$이므로

$Q=R$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 1이다.

10 명제 $\sim q \to \sim p$가 참이므로 그 대우인 $p \to q$도 참이다.

두 명제 $p \to q$, $q \to \sim r$이 모두 참이므로 삼단논법에 의하여 $p \to \sim r$도 참이다.

ㄱ, ㄹ. 명제 $p \to r$이나 명제 $\sim p \to \sim r$의 참, 거짓은 판별할 수 없다.

ㄴ. 명제 $p \to \sim r$이 참이므로 그 대우인 $r \to \sim p$도 참이다.

ㄷ. 명제 $q \to \sim r$이 참이므로 그 대우 $r \to \sim q$도 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

보충 설명

두 명제 $p \to q$, $q \to r$이 모두 참이면 삼단논법에 의하여 명제 $p \to r$도 참이다.

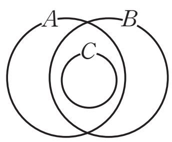
실력 다지기 262쪽～263쪽

11 (1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓 (4) 거짓 **12** ㄱ, ㄴ
13 ㄷ **14** 5 **15** 7
16 충분, 필요, 필요충분 **17** (1) 5 (2) 12
18 12 **19** -12 **20** 풀이 참조

11 **접근 방법** | 명제가 거짓임을 보일 때, 반례를 찾아서 보일 수 있는데, 집합에 대한 명제이므로 반례를 보일 때, 벤다이어그램을 이용한다.

(1) $A-B=\varnothing$이므로 집합 A의 모든 원소는 집합 B의 원소이다.
따라서 $A\subset B$이므로 주어진 명제는 참이다.

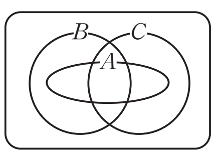
(2) [반례] 다음 벤다이어그램에서 $(A\cap C)\subset(B\cap C)$이지만 $A\not\subset B$이다.



따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(3) [반례] (2)의 벤다이어그램에서 $A\cap C=B\cap C$이지만 $A\neq B$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(4) [반례] 다음 벤다이어그램에서 $A\subset(B\cup C)$이지만 $A\not\subset B$이고 $A\not\subset C$이다.



따라서 주어진 명제는 거짓이다.

보충 설명

(1)에서 $A\subset B$이면 $A-B=\varnothing$이므로 두 조건 $A-B=\varnothing$와 $A\subset B$는 서로 필요충분조건이다.

12 **접근 방법** | 주어진 벤다이어그램에서 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 알아본다. 이때 $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C, R^C임을 이용한다.

ㄱ. $R\subset Q^C$이므로 명제 $r\to\sim q$는 참이다.
ㄴ. $Q\subset P$이므로 $P^C\subset Q^C$이다.
즉, 명제 $\sim p\to\sim q$는 참이다.
ㄷ. $R\not\subset P^C$이므로 명제 $r\to\sim p$는 거짓이다.
따라서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

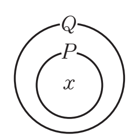
13 **접근 방법** | (가) '어떤 $x\in P$에 대하여 $x\notin Q$이다.'가 성립하므로 어떤 $x\in P$에 대하여 $x\in Q$일 수도 있다.
또한 (나) '모든 $x\in Q$에 대하여 $x\notin R$이다.'가 성립하므로 (나)를 이용하여 항상 참인 명제를 찾도록 한다.

(가)에서 어떤 $x\in P$에 대하여 $x\notin Q$이므로 어떤 $x\in P$에 대하여 $x\in Q$이다. 즉, 진리집합 P의 모든 원소가 집합 Q의 원소인 것은 아니다.
즉, $P\not\subset Q$이므로
ㄱ. 어떤 $x\in P$가 $x\in Q$일 수 있으므로
$p\to\sim q$는 거짓이다.
ㄴ. 어떤 $x\in P$가 $x\notin Q$이므로 $x\in P$가 $x\in R$일 수 있다. 즉, $p\to\sim r$은 거짓이다.
ㄷ. (나)에서 모든 $x\in Q$에 대하여 $x\notin R$이므로 두 집합 Q, R은 교집합이 없어야 한다.
즉, $Q\cap R=\varnothing$이므로 $q\to\sim r$은 항상 참이고, 그 대우 $r\to\sim q$도 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ㄷ뿐이다.

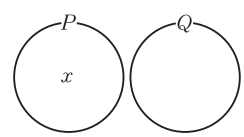
보충 설명

'모든'과 '어떤'의 의미를 집합의 포함 관계로 나타내면 다음과 같다.

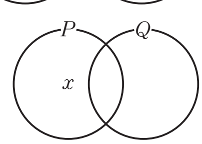
(1) 모든 $x\in P$에 대하여 $x\in Q$이다.



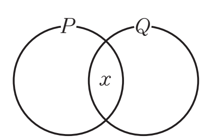
(2) 모든 $x\in P$에 대하여 $x\notin Q$이다.



(3) 어떤 $x\in P$에 대하여 $x\notin Q$이다.



(4) 어떤 $x\in P$에 대하여 $x\in Q$이다.



14 **접근 방법** | 전체집합 U에 대하여 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'가 거짓이려면 $P\neq U$임을 이용하여 구하도록 한다.

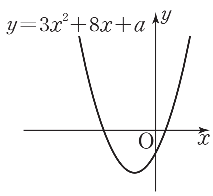
조건 $3x^2+8x+a\geq 0$의 진리집합이 실수 전체의 집합일 때, 주어진 명제는 참이므로 $3x^2+8x+a\geq 0$에서 이차방정식 $3x^2+8x+a=0$의 판별식을 D라고 하면
$\dfrac{D}{4}=4^2-3a\leq 0$이어야 한다.

$16-3a\le 0 \qquad \therefore\ a\ge\frac{16}{3}$

따라서 주어진 명제가 거짓이 되려면 $a<\frac{16}{3}$이어야 하므로 정수 a의 최댓값은 5이다.

다른 풀이

명제 '모든 실수 x에 대하여 $3x^2+8x+a\ge 0$이다.'가 거짓이면 이 명제의 부정 '어떤 실수 x에 대하여 $3x^2+8x+a<0$이다.'는 참이다.



따라서 이차함수 $y=3x^2+8x+a$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
이차방정식 $3x^2+8x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

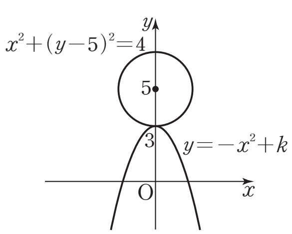
$\frac{D}{4}=4^2-3a>0 \qquad \therefore\ a<\frac{16}{3}$

따라서 정수 a의 최댓값은 5이다.

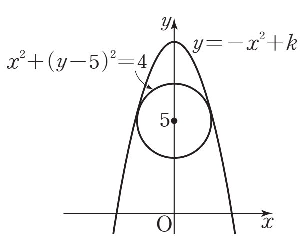
15 **접근 방법** | 이차함수의 그래프와 원의 교점이 생기도록 k의 값의 범위를 정하여 정수의 개수를 구하도록 한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 주어진 명제가 참이 되려면 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 한다.
그러므로 이차함수 $y=-x^2+k$의 그래프와 원 $x^2+(y-5)^2=4$의 교점이 존재해야 한다.

(i) 이차함수 $y=-x^2+k$의 그래프의 꼭짓점의 좌표 $(0, k)$가 $(0, 3)$일 때, 원 $x^2+(y-5)^2=4$와 한 점에서 만난다.



(ii) 이차함수 $y=-x^2+k$의 그래프와 원 $x^2+(y-5)^2=4$가 두 점에서 접할 때, 두 식을 연립한 방정식 $-y+k+(y-5)^2-4=0$, 즉 $y^2-11y+21+k=0$의 판별식을 D라고 하면



$D=(-11)^2-4(21+k)=0 \qquad \therefore\ k=\frac{37}{4}$

(i), (ii)에서 $3\le k\le\frac{37}{4}$이면 명제는 참이 된다.

따라서 이를 만족시키는 정수 k는 3, 4, 5, ⋯, 9의 7개이다.

16 **접근 방법** | 두 조건 p, q가 주어졌을 때, 두 명제 $p\to q$, $q\to p$의 참, 거짓을 조사하면 두 조건 p, q의 관계를 파악할 수 있다.

(i) 명제 $p\to q$에서 $ab<0$이면 $a<0$, $b>0$ 또는 $a>0$, $b<0$이므로 $p\Longrightarrow q$이다.
명제 $q\to p$에서 '$a<0$ 또는 $b<0$이면 $ab<0$이다.'는 거짓이므로 $q\not\Longrightarrow p$이다.
[반례] $a=-1$, $b=-1$이면 $a<0$ 또는 $b<0$이지만 $ab=(-1)\times(-1)=1>0$이다.
따라서 p는 q이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이다.

(ii) 명제 $q\to r$에서 '$a<0$ 또는 $b<0$이면 $|ab|>ab$이다.'는 거짓이므로 $q\not\Longrightarrow r$이다.
[반례] $a=-1$, $b=-1$이면 $a<0$ 또는 $b<0$이지만 $|ab|=ab=1$이다.
명제 $r\to q$에서 $|ab|>ab$이면 $a<0$, $b>0$ 또는 $a>0$, $b<0$이므로 $a<0$ 또는 $b<0$이 성립한다.
즉, $r\Longrightarrow q$이다.
따라서 q는 r이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$조건이다.

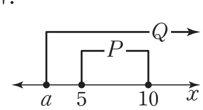
(iii) 명제 $p\to r$에서 $ab<0$이면 $|ab|>0$이므로 $|ab|>ab$가 성립한다. 즉, $p\Longrightarrow r$이다.
명제 $r\to p$에서 $|ab|>ab$이면 $a<0$, $b>0$ 또는 $a>0$, $b<0$이므로 $ab<0$이 성립한다.
즉, $r\Longrightarrow p$이다.
따라서 r은 p이기 위한 $\boxed{\text{필요충분}}$조건이다.

보충 설명

$|x|>x$가 성립하려면 $x<0$이어야 하므로 $|ab|>ab$에서 $ab<0$임을 알 수 있다.

17 **접근 방법** | 주어진 두 조건을 각각 p, q라 하고 그 각각의 진리집합 P, Q의 포함 관계를 생각해 본다.

(1) $p: 5\le x\le 10$, $q: x\ge a$라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{x\,|\,5\le x\le 10\}$, $Q=\{x\,|\,x\ge a\}$
이때 p가 q이기 위한 충분조건이려면 $p\Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$이어야 한다.



오른쪽 그림에서 $a\le 5$
따라서 실수 a의 최댓값은 5이다.

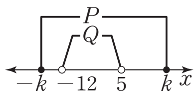
(2) p : $|x| \leq k$, q : $-12 < x < 5$라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P = \{x \mid -k \leq x \leq k\}$, $Q = \{x \mid -12 < x < 5\}$

이때 p가 q이기 위한 필요조건이려면

$q \Longrightarrow p$, 즉 $Q \subset P$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$-k \leq -12$, $k \geq 5$

$\therefore$ $k \geq 12$

따라서 양수 k의 최솟값은 12이다.

보충 설명

충분조건, 필요조건, 필요충분조건과 진리집합

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때,

(1) p가 q이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$

(2) p가 q이기 위한 필요조건이면 $Q \subset P$

(3) p가 q이기 위한 필요충분조건이면 $P = Q$

18 **접근 방법** | 두 조건 p와 q의 진리집합을 각각 구하여 조건을 만족시키도록 실수 a의 값의 범위를 구한다.

p : $x^2 - 8x + 15 \leq 0$에서

$(x-3)(x-5) \leq 0$　　$\therefore$ $3 \leq x \leq 5$

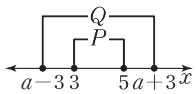
q : $|x-a| \leq 3$에서

$-3 \leq x-a \leq 3$　　$\therefore$ $a-3 \leq x \leq a+3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P = \{x \mid 3 \leq x \leq 5\}$, $Q = \{x \mid a-3 \leq x \leq a+3\}$

p가 q이기 위한 충분조건이 되려면 $p \Longrightarrow q$, 즉 $P \subset Q$이므로 오른쪽 그림에서



$a-3 \leq 3$, $a+3 \geq 5$

$\therefore$ $2 \leq a \leq 6$

따라서 실수 a의 최댓값과 최솟값의 곱은

$6 \times 2 = 12$

19 **접근 방법** | 두 조건 p와 q의 진리집합을 각각 구하고, $\sim p$가 q이기 위한 필요조건이 되기 위해서는 $q \Longrightarrow \sim p$임을 이용하여 a의 값의 범위를 정하여 정수 a의 최댓값과 최솟값을 구한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P = \{x \mid x \leq -4$ 또는 $x > 2\}$, $Q = \left\{x \,\middle|\, x = \dfrac{3a-1}{4}\right\}$

$\sim p$의 진리집합은

$P^C = \{x \mid -4 < x \leq 2\}$

$\sim p$가 q이기 위한 필요조건이 되기 위해서는

$q \Longrightarrow \sim p$, 즉 $Q \subset P^C$이므로

$-4 < \dfrac{3a-1}{4} \leq 2$, $-16 < 3a-1 \leq 8$

$-15 < 3a \leq 9$　　$\therefore$ $-5 < a \leq 3$

따라서 정수 a의 최댓값은 3, 최솟값은 -4이므로 그 곱은

$3 \times (-4) = -12$

20 **접근 방법** | 결론을 부정하여 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$의 유리수인 근이 존재한다고 가정하고 근과 계수의 관계를 이용하여 가정에 모순됨을 보이도록 한다.

결론을 부정하여 이차방정식

$x^2 - ax + b = 0$의 유리수인 근이 존재한다고 가정하면

x^2의 계수가 1이고, a, b가 모두 홀수, 즉 정수이므로

주어진 이차방정식의 유리수인 근은 정수이다.

두 유리수인 근을 각각 두 정수 α, β라고 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = b$

이고, a가 홀수이므로 두 정수 α, β 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이어야 한다.

이때 $\alpha\beta = $(짝수)이고, 이것은 $\alpha\beta = b$, 즉 b가 홀수라는 가정에 모순이다.

따라서 a, b가 모두 홀수이면 주어진 이차방정식

$x^2 - ax + b = 0$의 유리수인 근은 존재하지 않는다.

보충 설명

a, b가 모두 홀수라는 가정은 만족시키면서 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$의 유리수인 근이 존재하도록 하는 반례는 존재하지 않는다.

이와 같이 결론을 부정하여 가정에 모순됨을 보임으로써 주어진 명제가 참임을 보이는 것이 귀류법이다.

기출 다지기 264쪽

21 ⑤　**22** ③　**23** 8　**24** ①

21 **접근 방법** | 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하고, P, Q를 구하여 참, 거짓을 판단하도록 한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P = \{x \mid x \neq -2,\ x \neq 4$인 실수$\}$,

$Q = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$

두 조건 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이므로

$P^C = \{x \mid x = -2$ 또는 $x = 4\}$,

$Q^C=\{x \mid x<-2$ 또는 $x>4\}$

① $P \not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

② $P^C \not\subset Q^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

③ $Q \not\subset P^C$이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

④ $Q \not\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

⑤ $P^C \subset Q$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow q$는 참이다.

22 **접근 방법** | 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R이라고 하여 명제의 참을 이용하여 진리집합 사이의 포함 관계를 정하도록 한다.

ㄱ. $\sim p \Longrightarrow r$이므로 $P^C \subset R$ (참)

ㄴ. $\sim p \Longrightarrow r$이고 $r \Longrightarrow \sim q$이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Longrightarrow \sim q$이다.

$P^C \subset Q^C$, 즉 $Q \subset P$ (거짓)

ㄷ. $r \Longrightarrow \sim q$에서 $q \Longrightarrow \sim r$이므로

$Q \subset R^C$ ······ ㉠

$\sim p \Longrightarrow r$에서 $\sim r \Longrightarrow p$이므로

$R^C \subset P$ ······ ㉡

$\sim r \Longrightarrow q$이므로

$R^C \subset Q$ ······ ㉢

㉠, ㉡에 의하여 $Q \subset R^C \subset P$이므로 $Q \subset P$

$\therefore P \cap Q = Q$

㉠, ㉢에 의하여 $Q = R^C$

$\therefore P \cap Q = Q = R^C$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

23 **접근 방법** | 두 조건 p, q의 진리집합 P, Q를 정하여 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C \subset P$이므로 실수 a의 값의 범위를 정하여 최솟값을 구하도록 한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$p: 2x-a \le 0$에서 $x \le \frac{a}{2}$

$\therefore P=\left\{x \,\middle|\, x \le \frac{a}{2}\right\}$

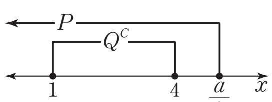
$q: x^2-5x+4>0$에 대하여

$\sim q: x^2-5x+4 \le 0$에서

$(x-1)(x-4) \le 0 \qquad \therefore 1 \le x \le 4$

$\therefore Q^C=\{x \mid 1 \le x \le 4\}$

p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이면 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q^C \subset P$가 성립해야 한다.



앞의 그림에서 $\frac{a}{2} \ge 4 \qquad \therefore a \ge 8$

따라서 실수 a의 최솟값은 8이다.

24 **접근 방법** | 두 조건 p, q의 진리집합 P, Q를 정하여 주어진 명제가 참이 되도록 하는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하도록 한다.

실수 전체의 집합을 U라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

'모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참인 명제가 되려면 $P=U$이어야 한다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+1 \ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-1 \le 0$

$(a+1)(a-1) \le 0 \qquad \therefore -1 \le a \le 1$

그러므로 정수 a는 -1, 0, 1이다.

이때 'p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참인 명제가 되려면 $P \subset Q^C$이어야 하고 $P=U$이므로 $Q^C=U$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $\sim q: x^2+2bx+9>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0$

$(b+3)(b-3)<0 \qquad \therefore -3<b<3$

그러므로 정수 b는 -2, -1, 0, 1, 2이다.

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3 \times 5 = 15$

07. 절대부등식

개념 콕콕 1 부등식의 증명 271쪽

1 답 (1) $>$ (2) $>$

(1) $a>b$이므로 $a-b>0$

$ac-bc=(a-b)c>0$ ($\because c>0$)

$\therefore ac\boxed{>}bc$

(2) $a>b$, $c>d$이므로 $a-b>0$, $c-d>0$

$a+c-(b+d)=(a-b)+(c-d)>0$

$\therefore a+c\boxed{>}b+d$

2 답 (1) $1+\frac{a}{2}\ge\sqrt{1+a}$ (2) $|a|+1\ge|a+1|$

(1) $a\ge-1$일 때, $1+\frac{a}{2}\ge0$, $\sqrt{1+a}\ge0$이므로

$$\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-(\sqrt{1+a})^2=1+a+\frac{a^2}{4}-(1+a)$$
$$=\frac{a^2}{4}\ge0$$

따라서 $\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-(\sqrt{1+a})^2\ge0$이므로

$1+\frac{a}{2}\ge\sqrt{1+a}$

이때 등호는 $a=0$일 때 성립한다.

(2) $|a|+1\ge0$, $|a+1|\ge0$이므로

$(|a|+1)^2-|a+1|^2$

$=a^2+2|a|+1-(a^2+2a+1)$

$=2|a|-2a$

$=2(|a|-a)\ge0$ ($\because |a|\ge a$)

$\therefore |a|+1\ge|a+1|$

이때 등호는 $|a|=a$, 즉 $a\ge0$일 때 성립한다.

3 답 (가) $a-2b$ (나) $a=2b$

$a^2+4b^2-4ab=a^2-4ab+4b^2=(\boxed{a-2b})^2\ge0$

$\therefore a^2+4b^2\ge4ab$

이때 등호는 $a-2b=0$, 즉 $\boxed{a=2b}$일 때 성립한다.

4 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $x^2+2x+1\ge0$, 즉 $(x+1)^2\ge0$은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 절대부등식이다.

ㄴ. 부등식 $4x+8<0$은 $x<-2$에서만 성립하므로 절대부등식이 아니다.

ㄷ. $(x-3)^2\ge0$이므로 $(x-3)^2+3>0$

즉, 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 절대부등식이다.

ㄹ. 부등식 $x^2+x>x^2$, 즉 $x>0$에서만 성립하므로 절대부등식이 아니다.

따라서 절대부등식인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

예제 01 차를 이용한 부등식의 증명 273쪽

01-1 답 풀이 참조

$ab+cd-(ac+bd)>0$이 성립함을 보이면 된다.

$$ab+cd-(ac+bd)=(ab-ac)+(cd-bd)$$
$$=a(b-c)-d(b-c)$$
$$=(a-d)(b-c)$$

이때 $a>b>c>d$이므로 $a-d>0$, $b-c>0$

$\therefore (a-d)(b-c)>0$

$\therefore ab+cd>ac+bd$

01-2 답 풀이 참조

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge0$이 성립함을 보이면 된다.

$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\ge0$

($\because (a-b)^2\ge0$, $(b-c)^2\ge0$, $(c-a)^2\ge0$)

$\therefore a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

이때 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.

보충 설명

$a\ge b\ge c\ge0$일 때, 부등식

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$가 성립함을 도형을 이용하여 살펴보자.

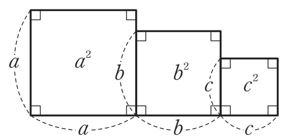
[그림 1]의 한 변의 길이가 각각 a, b, c인 세 정사각형으로 이루어진 도형의 넓이는 $a^2+b^2+c^2$이다.

[그림 2]의 가로의 길이가 각각 b, c, a이고 세로의 길이가 각각 a, b, c인 색칠한 세 직사각형으로 이루어진 도형의 넓이는 $ab+bc+ca$이다.

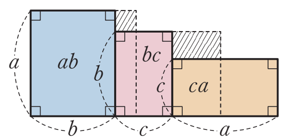
이때 [그림 1]의 도형의 넓이는 [그림 2]의 색칠한 세 직사각형으로 이루어진 도형의 넓이보다 빗금친 부분의 넓이만큼 더 크다.

따라서 $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$이다.

이때 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.



[그림 1]



[그림 2]

01-3 답 풀이 참조

(1) $AB-xy\geq 0$이 성립함을 보이면 된다.

$$AB-xy=\frac{ax+by}{a+b}\times\frac{bx+ay}{a+b}-xy$$
$$=\frac{(ax+by)(bx+ay)}{(a+b)^2}-xy$$
$$=\frac{(ax+by)(bx+ay)-(a+b)^2xy}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{abx^2+aby^2-2abxy}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{ab(x-y)^2}{(a+b)^2}\geq 0$$
$$(\because a>0,\ b>0,\ (x-y)^2\geq 0)$$

$\therefore AB\geq xy$

이때 등호는 $x=y$일 때 성립한다.

(2) $A^2+B^2-(x^2+y^2)\leq 0$ …… ㉠

이 성립함을 보이면 된다.

$$A^2+B^2=\left(\frac{ax+by}{a+b}\right)^2+\left(\frac{bx+ay}{a+b}\right)^2$$
$$=\frac{(ax+by)^2+(bx+ay)^2}{(a+b)^2}$$

이므로 부등식 ㉠의 양변에 양수 $(a+b)^2$을 곱하여 부등식을 증명해 보자.

$$(A^2+B^2)(a+b)^2-(x^2+y^2)(a+b)^2$$
$$=(ax+by)^2+(bx+ay)^2-(x^2+y^2)(a+b)^2$$
$$=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)+4abxy-(x^2+y^2)(a^2+2ab+b^2)$$
$$=4abxy-2ab(x^2+y^2)$$
$$=-2ab(x^2+y^2-2xy)$$
$$=-2ab(x-y)^2\leq 0$$
$$(\because a>0,\ b>0,\ (x-y)^2\geq 0)$$

$\therefore A^2+B^2\leq x^2+y^2$

이때 등호는 $x=y$일 때 성립한다.

예제 02 제곱의 차를 이용한 부등식의 증명 275쪽

02-1 답 풀이 참조

$\sqrt{2(a^2+b^2)}\geq 0,\ |a|+|b|\geq 0$이므로

$\{\sqrt{2(a^2+b^2)}\}^2-(|a|+|b|)^2\geq 0$이 성립함을 보이면 된다.

$$\{\sqrt{2(a^2+b^2)}\}^2-(|a|+|b|)^2$$
$$=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)$$
$$=|a|^2-2|a||b|+|b|^2$$
$$=(|a|-|b|)^2\geq 0$$

$\therefore \sqrt{2(a^2+b^2)}\geq |a|+|b|$

이때 등호는 $|a|=|b|$, 즉 $a=\pm b$일 때 성립한다.

02-2 답 풀이 참조

(1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0,\ \sqrt{a+b}\geq 0$이므로

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2\geq 0$이 성립함을 보이면 된다.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2$$
$$=(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)-(a+b)$$
$$=2\sqrt{ab}\geq 0\ (\because a\geq 0,\ b\geq 0)$$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$

이때 등호는 $\sqrt{ab}=0$, 즉 $ab=0$일 때 성립한다.

(2) $\sqrt{2(a+b)}\geq 0,\ \sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0$이므로

$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geq 0$이 성립함을 보이면 된다.

$$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$
$$=2(a+b)-(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$$
$$(\because a\geq 0,\ b\geq 0,\ a+b\geq 0)$$
$$=a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$$
$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$$

$\therefore \sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

이때 등호는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

02-3 답 풀이 참조

$$a^2-ab+b^2=\left(a^2-ab+\frac{b^2}{4}\right)-\frac{b^2}{4}+b^2$$
$$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\geq 0$$
$$\left(\because \left(a-\frac{b}{2}\right)^2\geq 0,\ \frac{3b^2}{4}\geq 0\right)$$

이므로

$$\frac{a^2-ab+b^2}{3}\geq 0$$

주어진 부등식

$\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}} \geq \dfrac{a-b}{2}$ …… ㉠

에 대하여

(i) $a<b$일 때,

$a-b<0$이므로 $\dfrac{a-b}{2}<0$

따라서 ㉠이 성립한다.

(ii) $a \geq b$일 때,

$a-b \geq 0$이므로 $\dfrac{a-b}{2} \geq 0$

㉠의 양변을 각각 제곱하여 빼면

$\left(\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

$=\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}-\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4}$

$=\dfrac{4(a^2-ab+b^2)-3(a^2-2ab+b^2)}{12}$

$=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{12}$

$=\dfrac{(a+b)^2}{12} \geq 0$

따라서 ㉠이 성립한다.

이때 등호는 $a+b=0$, 즉 $a=-b$일 때 성립한다.

(i), (ii)에서

$\sqrt{\dfrac{a^2-ab+b^2}{3}} \geq \dfrac{a-b}{2}$

개념 콕콕 2 산술평균과 기하평균 279쪽

1 답 (1) 8 (2) 20

(1) $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

그런데 $ab=16$이므로 $a+b \geq 2\sqrt{16}=8$

따라서 $a+b$의 최솟값은 8이다.

(2) $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5x+y \geq 2\sqrt{5xy}$ (단, 등호는 $5x=y$일 때 성립)

그런데 $xy=20$이므로

$5x+y \geq 2\sqrt{100}=20$

따라서 $5x+y$의 최솟값은 20이다.

2 답 (1) 16 (2) 18

(1) $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

그런데 $a+b=8$이므로

$8 \geq 2\sqrt{ab}$, $4 \geq \sqrt{ab}$

$\therefore ab \leq 16$

따라서 ab의 최댓값은 16이다.

(2) $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+2y \geq 2\sqrt{2xy}$ (단, 등호는 $x=2y$일 때 성립)

그런데 $x+2y=12$이므로

$12 \geq 2\sqrt{2xy}$, $6 \geq \sqrt{2xy}$

양변을 제곱하면

$36 \geq 2xy$

$\therefore xy \leq 18$

따라서 xy의 최댓값은 18이다.

3 답 최댓값 : 3, 최솟값 : -3

a, b, x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

$1 \times 9 \geq (ax+by)^2$

$\therefore -3 \leq ax+by \leq 3$ (단, 등호는 $ay=bx$일 때 성립)

예제 03 산술평균과 기하평균의 관계에 의한 최대, 최소 281쪽

03-1 답 (1) 최솟값 : 12, $a=\dfrac{3}{2}$

(2) 최솟값 : 25, $a=1$

(1) $4a>0$, $\dfrac{9}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a+\dfrac{9}{a} \geq 2\sqrt{4a \times \dfrac{9}{a}}=12$

이때 등호는 $4a=\dfrac{9}{a}$, 즉 $a^2=\dfrac{9}{4}$일 때 성립하므로

$a=\dfrac{3}{2}$ ($\because a>0$)

따라서 $4a+\dfrac{9}{a}$는 $a=\dfrac{3}{2}$일 때 최솟값 12를 가진다.

(2) $\left(a+\dfrac{4}{a}\right)\left(4a+\dfrac{1}{a}\right)=4a^2+1+16+\dfrac{4}{a^2}$

$=4a^2+\dfrac{4}{a^2}+17$

$4a^2>0$, $\dfrac{4}{a^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4a^2+\frac{4}{a^2}+17\ge 2\sqrt{4a^2\times\frac{4}{a^2}}+17$$
$$=8+17=25$$

이때 등호는 $4a^2=\frac{4}{a^2}$, 즉 $a^4=1$일 때 성립하므로

$a=1$ ($\because a>0$)

따라서 $\left(a+\frac{4}{a}\right)\left(4a+\frac{1}{a}\right)$은 $a=1$일 때 최솟값 25를 가진다.

03-2 답 (1) 9 (2) 16

(1) $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+4+1+\frac{4}{ab}$
$$=ab+\frac{4}{ab}+5$$

$ab>0$, $\frac{4}{ab}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$ab+\frac{4}{ab}+5\ge 2\sqrt{ab\times\frac{4}{ab}}+5=4+5=9$$
$\left(\text{단, 등호는 } ab=\frac{4}{ab}, \text{ 즉 } ab=2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 9이다.

(2) $(4a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=4+\frac{16a}{b}+\frac{b}{a}+4$
$$=\frac{16a}{b}+\frac{b}{a}+8$$

$\frac{16a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{16a}{b}+\frac{b}{a}+8\ge 2\sqrt{\frac{16a}{b}\times\frac{b}{a}}+8=8+8=16$$
$\left(\text{단, 등호는 } \frac{16a}{b}=\frac{b}{a}, \text{ 즉 } b=4a\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

보충 설명

(1)에서 두 식 $a+\frac{1}{b}$, $b+\frac{4}{a}$에 각각 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$a+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ …… ㉠

$b+\frac{4}{a}\ge 2\sqrt{\frac{4b}{a}}$ …… ㉡

이므로 직접 두 부등식을 곱하여

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}}\times 2\sqrt{\frac{4b}{a}}=8$ …… ㉢

과 같이 생각하여 최솟값을 8이라고 하면 안 된다.
왜냐하면 ㉠의 등호는 $ab=1$일 때 성립하고, ㉡의 등호는 $ab=4$일 때 성립하므로 두 부등식을 곱한 ㉢에서 등호가 성립하는 a, b의 값을 구할 수 없다.

03-3 답 (1) 3 (2) 9

(1) $3x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+y\ge 2\sqrt{3xy}$ (단, 등호는 $3x=y$일 때 성립)

그런데 $3x+y=6$이므로

$6\ge 2\sqrt{3xy}$, $3\ge\sqrt{3xy}$

양변을 제곱하면

$9\ge 3xy$

$\therefore xy\le 3$

따라서 xy의 최댓값은 3이다.

(2) $x^2>0$, $4y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+4y^2\ge 2\sqrt{x^2\times 4y^2}=4xy$

(단, 등호는 $x=2y$일 때 성립)

그런데 $x^2+4y^2=36$이므로

$36\ge 4xy$

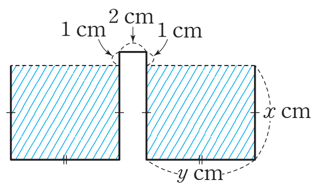
$\therefore xy\le 9$

따라서 xy의 최댓값은 9이다.

예제 04 산술평균과 기하평균의 관계의 활용 283쪽

04-1 답 2401 cm²

수로의 모양은 좌우 대칭이므로 앞쪽에서 바라본 수로의 단면은 다음 그림과 같다.



단면의 한 쪽을 세로의 길이가 x cm, 가로의 길이가 y cm인 직사각형이라고 하면 양철판의 폭이 2 m, 즉 200 cm이므로

$2+1\times2+4x+2y=200$

$4x+2y=196$

$\therefore 2x+y=98$

수로의 단면의 넓이는 두 직사각형의 넓이의 합이므로 $2xy$ cm²이다.

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+y\ge 2\sqrt{2xy}$ (단, 등호는 $2x=y$일 때 성립)

그런데 $2x+y=98$이므로

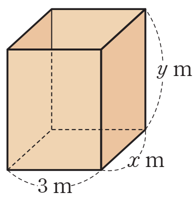
$98 \geq 2\sqrt{2xy}$, $49 \geq \sqrt{2xy}$

양변을 제곱하면

$2401 \geq 2xy$

따라서 수로를 통해 흐르는 물의 양이 최대가 되도록 할 때, 수로의 단면의 넓이는 $2401\ \mathrm{cm}^2$이다.

04-2 답 80만 원



물 탱크의 밑면의 세로의 길이를 x m, 높이를 y m라고 하면 물 탱크의 옆넓이는 $(6+2x)y\ \mathrm{m}^2$이므로 옆면을 만드는 데 드는 비용은

$(6+2x)y$만 원

또한 밑넓이는 $3x\ \mathrm{m}^2$이므로 밑면을 만드는 데 드는 비용은

$2 \times 3x = 6x$(만 원)

따라서 물 탱크를 만드는 데 드는 전체 비용을 P만 원이라고 하면

$P = (6+2x)y + 6x$

$\quad = 6x + 6y + 2xy \qquad \cdots\cdots$ ㉠

그런데 물 탱크의 부피가 $48\ \mathrm{m}^3$이므로

$3xy = 48 \qquad \therefore xy = 16$

㉠에 $xy=16$을 대입하면

$P = 6x + 6y + 32$

$\quad = 6(x+y) + 32$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$6(x+y) + 32 \geq 6 \times 2\sqrt{xy} + 32$

(단, 등호는 $x=y=4$일 때 성립)

그런데 $xy=16$이므로

$6(x+y)+32 \geq 6 \times 8 + 32 = 80$(만 원)

따라서 주어진 조건의 물 탱크를 만드는 데 드는 비용이 최소가 되도록 할 때, 그 비용은 80만 원이다.

04-3 답 5

중장비는 시간당 $x\ \mathrm{m}^2$의 작업을 하므로 $100\ \mathrm{m}^2$의 작업을 끝내는 데 걸리는 시간은 $\frac{100}{x}$시간이다.

또한 중장비를 사용하는 데 드는 총 비용은 중장비 기사에게 지불할 임금과 중장비에 필요한 경비의 합이므로 중장비를 사용하는 데 드는 총 비용을 Q원이라고 하면

$Q = \frac{100}{x} \times 10000 + 100 \times 400x$

$\quad = 10000\left(\frac{100}{x} + 4x\right)$

$\quad \geq 10000 \times 2\sqrt{\frac{100}{x} \times 4x} = 400000$

이때 등호는 $\frac{100}{x} = 4x$, 즉 $x^2 = 25$일 때 성립하므로

$x = 5$ ($\because x \geq 0$)

따라서 중장비를 사용하는 데 드는 총 비용이 최소가 되도록 할 때, x의 값은 5이다.

기본 다지기 284쪽 ~ 285쪽

1 (1) $\frac{a}{4} + 2 > \sqrt{a+4}$ (2) $A > B$

2 풀이 참조 **3** 30 **4** (1) $0 \leq k \leq 3$ (2) 3

5 (1) 8 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 4 **6** (1) 49 (2) 27

7 $2\sqrt{6}$ **8** 18 **9** ④ **10** 25

1 (1) $\frac{a}{4} + 2 > 0$, $\sqrt{a+4} > 0$이므로

$\left(\frac{a}{4}+2\right)^2 - (\sqrt{a+4})^2 = \frac{a^2}{16} + a + 4 - (a+4)$

$\qquad = \frac{a^2}{16} > 0$

($\because a > 0$에서 $a^2 > 0$)

따라서 $\left(\frac{a}{4}+2\right)^2 > (\sqrt{a+4})^2$이므로

$\frac{a}{4} + 2 > \sqrt{a+4}$

(2) $A = \sqrt{5} + 2\sqrt{2} > 0$, $B = 1 + \sqrt{10} > 0$이고

$A^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 5 + 4\sqrt{10} + 8 = 13 + 4\sqrt{10}$

$B^2 = (1+\sqrt{10})^2 = 1 + 2\sqrt{10} + 10 = 11 + 2\sqrt{10}$

이므로

$A^2 - B^2 = 13 + 4\sqrt{10} - (11 + 2\sqrt{10})$

$\qquad = 2(1+\sqrt{10}) > 0$

따라서 $A^2 > B^2$이므로

$A > B$

2 (1) $a^2 + 2b^2 - 2ab = (a^2 - 2ab + b^2) + b^2$

$\qquad = (a-b)^2 + b^2 \geq 0$

($\because (a-b)^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$)

$\therefore a^2 + 2b^2 \geq 2ab$

이때 등호는 $a-b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

(2) $a^2+b^2-2(a+b-1)$
$=a^2+b^2-2a-2b+2$
$=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)$
$=(a-1)^2+(b-1)^2\geq 0$
$(\because (a-1)^2\geq 0,\ (b-1)^2\geq 0)$
$\therefore\ a^2+b^2\geq 2(a+b-1)$
이때 등호는 $a-1=0,\ b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다.

⊕ 보충 설명

임의의 실수 a, b에 대하여
(1) $a^2\geq 0$
(2) $a^2+b^2\geq 0$
(3) $a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$
(4) $|a|^2=a^2,\ |ab|=|a||b|$

3 $x^2+y^2=20$이므로
$x^2+x+y^2+2y=x+2y+(x^2+y^2)$
$=x+2y+20$
x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(x+2y)^2$
그런데 $x^2+y^2=20$이므로
$5\times 20\geq(x+2y)^2,\ (x+2y)^2\leq 10^2$
$\therefore\ -10\leq x+2y\leq 10\ \left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{2}\text{일 때 성립}\right)$
$\therefore\ 10\leq x+2y+20\leq 30$
따라서 x^2+x+y^2+2y의 최댓값은 30이다.

4 (1) 부등식 $x^2+2kx+3k\geq 0$에서
$(x+k)^2-k^2+3k\geq 0$
이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$-k^2+3k\geq 0$
이 성립해야 한다. 즉,
$k^2-3k\leq 0,\ k(k-3)\leq 0$
$\therefore\ 0\leq k\leq 3$

(2) 부등식 $x^2+4kx+8k\geq 0$에서
$(x+2k)^2-4k^2+8k\geq 0$
이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$-4k^2+8k\geq 0$
이 성립해야 한다. 즉,
$4k^2-8k\leq 0,\ 4k(k-2)\leq 0$
$\therefore\ 0\leq k\leq 2$
따라서 구하는 정수 k는 0, 1, 2의 3개이다.

5 (1) $2a>0,\ \frac{8}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2a+\frac{8}{a}\geq 2\sqrt{2a\times\frac{8}{a}}$
$=8$
$\left(\text{단, 등호는 } 2a=\frac{8}{a}\text{, 즉 } a=2\text{일 때 성립}\right)$
따라서 구하는 최솟값은 8이다.

(2) $\frac{a}{3b}>0,\ \frac{b}{3a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{a}{3b}+\frac{b}{3a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{3b}\times\frac{b}{3a}}$
$=\frac{2}{3}$
$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{3b}=\frac{b}{3a}\text{, 즉 } a=b\text{일 때 성립}\right)$
따라서 구하는 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.

(3) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$
$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$
$\frac{a}{b}>0,\ \frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}+2$
$=4$
$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{b}=\frac{b}{a}\text{, 즉 } a=b\text{일 때 성립}\right)$
따라서 구하는 최솟값은 4이다.

⊕ 보충 설명

(3)에서 두 식 $a+b,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$에 각각 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ ...... ㉠
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ ...... ㉡
이므로 직접 두 부등식을 곱하면
$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 2\sqrt{ab}\times 2\sqrt{\frac{1}{ab}}=4$ ...... ㉢
에서 최솟값은 4이다.
일반적으로는 ㉠, ㉡의 식을 직접 곱하여 최솟값을 구할 수 없지만 이 문제에서는 ㉠의 등호가 성립할 때와 ㉡의 등호가 성립할 때가 모두 $a=b$이므로 ㉢과 같이 풀 수 있다.
하지만 주어진 식에 대하여 각각 나누어서 적용한 산술평균과 기하평균의 관계에서 등호가 성립할 때의 a, b의 값이 서로 다를 때에는 꼭 전개하여 풀도록 해야 한다.

6 (1) $\left(a+\frac{4}{a}\right)\left(9a+\frac{1}{a}\right)=9a^2+1+36+\frac{4}{a^2}$

$=9a^2+\frac{4}{a^2}+37$

$9a^2>0$, $\frac{4}{a^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$9a^2+\frac{4}{a^2}+37\geq 2\sqrt{9a^2\times\frac{4}{a^2}}+37=49$

$\left(\text{단, 등호는 } 9a^2=\frac{4}{a^2}\text{, 즉 } a=\frac{\sqrt{6}}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 49이다.

(2) $(x+y)\left(\frac{12}{x}+\frac{3}{y}\right)=12+\frac{3x}{y}+\frac{12y}{x}+3$

$=\frac{3x}{y}+\frac{12y}{x}+15$

$\frac{3x}{y}>0$, $\frac{12y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{3x}{y}+\frac{12y}{x}+15\geq 2\sqrt{\frac{3x}{y}\times\frac{12y}{x}}+15$

$=27$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{3x}{y}=\frac{12y}{x}\text{, 즉 } x=2y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 27이다.

⊕ 보충 설명

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 구할 때에는 다음에 주의해야 한다.
(i) 양수 조건이 있는지 확인한다.
(ii) 두 수의 곱이 일정하도록 식을 변형할 수 있는지 확인한다.
(iii) 두 식의 곱에서 각각의 식의 등호가 성립하는 경우가 서로 다르면 먼저 주어진 식을 전개한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 적용한다.

7 $3x+2y=12$이므로

$(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2=3x+2\sqrt{3x}\sqrt{2y}+2y$

$=3x+2y+2\sqrt{3x}\sqrt{2y}$

$=12+2\sqrt{6xy}$ ...... ㉠

한편, $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+2y\geq 2\sqrt{6xy}$ (단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립)

$\therefore 12\geq 2\sqrt{6xy}$ ($\because 3x+2y=12$) ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2=12+2\sqrt{6xy}\leq 12+12=24$

$\therefore 0<\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\leq\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ ($\because \sqrt{3x}+\sqrt{2y}>0$)

따라서 $\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$의 최댓값은 $2\sqrt{6}$이다.

8 $\left(4a+\frac{3}{b}\right)\left(\frac{3}{a}+b\right)=12+4ab+\frac{9}{ab}+3$

$=4ab+\frac{9}{ab}+15$

$4ab>0$, $\frac{9}{ab}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4ab+\frac{9}{ab}+15\geq 2\sqrt{4ab\times\frac{9}{ab}}+15=27$

$\left(\text{단, 등호는 } 4ab=\frac{9}{ab}\text{, 즉 } ab=\frac{3}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\left(4a+\frac{3}{b}\right)\left(\frac{3}{a}+b\right)$는 $ab=\frac{3}{2}$일 때, 최솟값 27을 가지므로

$k=\frac{3}{2}$, $m=27$

$\therefore \frac{m}{k}=27\times\frac{2}{3}=18$

9 주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 주어진 이차방정식은 허근을 가지므로

$\frac{D}{4}=1^2-a<0$

$1-a<0$ $\quad\therefore a>1$

따라서 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+1+\frac{1}{a-1}=a-1+2+\frac{1}{a-1}$

$=a-1+\frac{1}{a-1}+2$

$\geq 2\sqrt{(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+2$

$=2+2=4$

$\left(\text{단, 등호는 } a-1=\frac{1}{a-1}\text{, 즉 } a=2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

10 $S_1=\frac{1}{2}\times 4\times b=2b$,

$S_2=\frac{1}{2}\times 2\times a=a$

이므로

$S_1+S_2=2b+a=10$ ($\because a+2b=10$)

이때 $S_1>0$, $S_2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$S_1+S_2\geq 2\sqrt{S_1S_2}$ (단, 등호는 $S_1=S_2$일 때 성립)

그런데 $S_1+S_2=10$이므로

$10\geq 2\sqrt{S_1S_2}$, $5\geq\sqrt{S_1S_2}$

양변을 제곱하면

$S_1S_2 \le 25$

따라서 S_1S_2의 최댓값은 25이다.

보충 설명

삼각형 PAB의 밑변이 선분 AB일 때의 높이는 점 P의 y좌표와 같고, 삼각형 PDC의 밑변이 선분 CD일 때의 높이는 점 P의 x좌표와 같다.

실력 다지기 286쪽～287쪽

11 풀이 참조	**12** ㄱ, ㄷ, ㄹ		
13 (1) 16 (2) 8	**14** ㄱ, ㄴ, ㄷ		
15 (1) 4 (2) 6	**16** 62	**17** 9π	**18** 20
19 25 km	**20** $\frac{1}{3}$		

11 **접근 방법** | 두 식의 대소를 비교하는 방법 중에서 차를 이용하는 방법으로 주어진 부등식이 성립함을 보인다.

$x^4+y^4-(x^3y+xy^3) \ge 0$이 성립함을 보이면 된다.

$$\begin{aligned} x^4+y^4-(x^3y+xy^3) &= x^3(x-y)-y^3(x-y) \\ &= (x-y)(x^3-y^3) \\ &= (x-y)^2(x^2+xy+y^2) \end{aligned}$$

여기서 $(x-y)^2 \ge 0$ (등호는 $x=y$일 때 성립)이고

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= \left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}+y^2 \\ &= \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4} \ge 0 \end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } x+\frac{y}{2}=0,\ y=0, \text{ 즉 } x=y=0\text{일 때 성립}\right)$

이므로 $(x-y)^2(x^2+xy+y^2) \ge 0$

$\therefore x^4+y^4 \ge x^3y+xy^3$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

보충 설명

주어진 문제는 차를 이용하여 식을 정리한 다음 절대부등식 $x^2+xy+y^2 \ge 0$을 이용하여 바로 결론을 이끌어 낼 수도 있다.

실수 a, b, c, x, y에 대하여 다음의 절대부등식은 증명 없이도 정리처럼 이용할 수 있다.

(1) $a^2 \pm ab+b^2 \ge 0$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \ge 0$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

(3) $a^3+b^3+c^3-3abc \ge 0$
(단, $a>0$, $b>0$, $c>0$이고 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

(4) $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$
(단, $a>0$, $b>0$이고 등호는 $a=b$일 때 성립)

(5) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$
(단, 등호는 $ay=bx$일 때 성립)

12 **접근 방법** | ㄱ, ㄷ, ㄹ의 경우 제곱의 차를 이용하는 방법으로 부등식을 증명할 수 있고, ㄴ의 경우 양수 a, b에 대한 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면 부등식의 참, 거짓을 확인할 수 있다.

ㄱ. $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, $1>0$이므로 양변을 제곱하여 빼면

$$\begin{aligned} &(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-1^2 \\ &=(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)-1 \\ &=2\sqrt{ab}>0\ (\because a>b>0,\ a+b=1) \end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}>1$ (참)

ㄴ. $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

이때 $a+b=1$이므로

$\frac{1}{2} \ge \sqrt{ab}$ ······ ㉠

그러나 $a>b>0$이므로 ㉠에서 등호가 성립하는 경우는 존재하지 않는다.

$\therefore \sqrt{ab}<\frac{1}{2}$ (거짓)

ㄷ. $\sqrt{a-b}>0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$이므로 양변을 제곱하여 빼면

$$\begin{aligned} &(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \\ &=(a-b)-(a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b) \\ &=2\sqrt{ab}-2b \\ &=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0\ (\because a>b>0) \end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (참)

ㄹ. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>0$, $\frac{1}{2}>0$이므로 양변을 제곱하여 빼면

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{1}{4} \\ &=\frac{(a+b)^2-2ab}{2}-\frac{1}{4} \\ &=\frac{1-2ab}{2}-\frac{1}{4} \\ &=\frac{1}{4}-ab>0\ \left(\because \text{ㄴ에서 } \sqrt{ab}<\frac{1}{2}\text{이므로 } ab<\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\frac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

보충 설명

두 식의 대소를 비교하는 방법 중에서 제곱의 차를 이용하는 경우는 주로 주어진 식이 절댓값을 포함하거나 근호를 포함하고 있을 때이다.

$A\geq 0$, $B\geq 0$일 때,

(1) $A^2-B^2>0 \Longleftrightarrow A>B$

$A^2-B^2\geq 0 \Longleftrightarrow A\geq B$

(2) $A^2-B^2<0 \Longleftrightarrow A<B$

$A^2-B^2\leq 0 \Longleftrightarrow A\leq B$

13 **접근 방법** | (1) a, b에 대한 산술평균과 기하평균의 관계와 주어진 등식을 이용하여 $\sqrt{ab}$에 대한 이차부등식을 만든다.

(2) 구하는 값에 $2a+b=1$을 곱하여도 그 값이 변하지 않음을 이용하여 식을 변형한다.

(1) $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$ab+a+b=24$에서 $a+b=24-ab$이므로

$24-ab\geq 2\sqrt{ab}$

$(\sqrt{ab})^2+2\sqrt{ab}-24\leq 0$

$(\sqrt{ab}+6)(\sqrt{ab}-4)\leq 0$

$\therefore 0<\sqrt{ab}\leq 4$ ($\because \sqrt{ab}>0$)

$\therefore 0<ab\leq 16$

따라서 ab의 최댓값은 16이다.

(2) $2a+b=1$이므로

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\times 1=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(2a+b)$$
$$=\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4$$

이때 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{4a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{4a}{b}}+4$$
$$=4+4=8$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{a}=\frac{4a}{b},\ \text{즉 } b=2a\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$의 최솟값은 8이다.

14 **접근 방법** | ㄱ. 삼각형 ABC의 넓이를 식으로 나타내 본다.

ㄴ. ㄱ에서 구한 식과 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

ㄷ. 선분 BC의 길이를 피타고라스 정리를 이용하여 나타내 본다.

ㄱ. 삼각형 ABC에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$$

또한 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}=\sqrt{x^2+z^2}$이므로

$\frac{1}{2}y\sqrt{x^2+z^2}=\frac{1}{2}xz \qquad \therefore x^2y^2+y^2z^2=x^2z^2$

이때 양변을 $x^2y^2z^2$으로 나누면

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{y^2}$ (참)

ㄴ. $\frac{1}{x^2}>0$, $\frac{1}{z^2}>0$이므로 ㄱ에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{z^2}}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{1}{x^2}=\frac{1}{z^2},\ \text{즉 } x=z\text{일 때 성립}\right)$

그런데 $xz=1$이므로

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{z^2}}=2$$

즉, $\frac{1}{y^2}\geq 2$이므로 $y^2\leq\frac{1}{2}$

$\therefore 0<y\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ (참)

ㄷ. $x^2>0$, $z^2>0$이고 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$\overline{BC}=\sqrt{x^2+z^2}\geq\sqrt{2\sqrt{x^2z^2}}=\sqrt{2xz}$

(단, 등호는 $x^2=z^2$, 즉 $x=z$일 때 성립)

그런데 $xz=1$이므로

$\sqrt{x^2+z^2}\geq\sqrt{2xz}=\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BC}\geq\sqrt{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

보충 설명

세 변의 길이 x, y, z는 모두 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 적용할 수 있다.

15 **접근 방법** | (1) $b+c$를 하나의 수로 생각하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

(2) 분수를 분리하여 곱이 일정하도록 식을 묶어서 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

(1) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)=\{a+(b+c)\}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)$

$$=1+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}+1$$
$$=\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}+2$$

$\frac{a}{b+c}>0$, $\frac{b+c}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}+2\geq 2\sqrt{\frac{a}{b+c}\times\frac{b+c}{a}}+2=4$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{b+c}=\frac{b+c}{a}\text{, 즉 } a=b+c\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

(2) $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$

$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$, $\frac{c}{b}>0$, $\frac{b}{c}>0$, $\frac{a}{c}>0$, $\frac{c}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}$$

$$=2+2+2=6$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{a}=\frac{a}{b},\ \frac{c}{b}=\frac{b}{c},\ \frac{a}{c}=\frac{c}{a}\text{, 즉 } a=b=c\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

보충 설명 교육과정 외

세 양수 a, b, c에 대한 산술평균과 기하평균의 관계는 다음과 같다.

$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 세 수에서의 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$

$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\geq 3\times\sqrt[3]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}+3\times\sqrt[3]{\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{a}}$$

$=3+3=6$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

16 **접근 방법** | 곱해진 세 식에 산술평균과 기하평균의 관계를 각각 적용해 본다.

a, b, c가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{a\times\frac{1}{b}}=2\sqrt{\frac{a}{b}} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$b+\frac{4}{c}\geq 2\sqrt{b\times\frac{4}{c}}=4\sqrt{\frac{b}{c}} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

$$c+\frac{9}{a}\geq 2\sqrt{c\times\frac{9}{a}}=6\sqrt{\frac{c}{a}} \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

$$\therefore \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{c}\right)\left(c+\frac{9}{a}\right)\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}\times 4\sqrt{\frac{b}{c}}\times 6\sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$=48\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{a}}$$

$$=48$$

이때 등호는 ㉠에서 $a=\frac{1}{b}$, ㉡에서 $b=\frac{4}{c}$, ㉢에서 $c=\frac{9}{a}$일 때, 즉 $ab=1$, $bc=4$, $ca=9$일 때 성립하므로

$n_1=1$, $n_2=4$, $n_3=9$

따라서 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{c}\right)\left(c+\frac{9}{a}\right)$는 $ab=1$, $bc=4$, $ca=9$일 때, 최솟값 48을 가진다.

$\therefore m+n_1+n_2+n_3=48+1+4+9=62$

보충 설명

일반적으로 주어진 식을 전개한 다음 산술평균과 기하평균의 관계를 이용해야 하지만 주어진 문제에서는 3개의 부등식 ㉠, ㉡, ㉢의 등호가 동시에 성립하는 a, b, c가 존재한다. 따라서 이런 경우에는 각 부등식에서 합의 최솟값을 모두 곱한 값이 구하는 최솟값과 같다.

실제로 $ab=1$, $bc=4$, $ca=9$를 만족시키는 a, b, c의 값은 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=6$이다.

17 **접근 방법** | 두 반원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 x, y라고 하면 $2x+2y=12$이다. 두 수의 합이 일정하고 $x>0$, $y>0$이므로 색칠한 부분의 넓이의 최댓값을 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 구할 수 있다.

두 반원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 x, y라고 하면 $2x+2y=12$이므로 $x+y=6$

한편, 색칠한 부분의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}\pi\times 6^2-\frac{1}{2}\pi x^2-\frac{1}{2}\pi y^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\{6^2-(x^2+y^2)\}$$

$$=\frac{\pi}{2}[36-\{(x+y)^2-2xy\}]$$

$$=\pi xy\ (\because x+y=6)$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

그런데 $x+y=6$이므로

$6\geq 2\sqrt{xy}$, $\sqrt{xy}\leq 3$ $\quad\therefore xy\leq 9$

따라서 $\pi xy\leq 9\pi$이므로 색칠한 부분의 넓이 S의 최댓값은 9π이다.

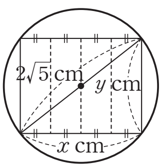
보충 설명

미지수 x, y로 만들어진 관계식 $x+y=6$에서 πxy의 최댓값은 위와 같이 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 구할 수 있고, 다음과 같이 이차식으로 나타내어 구할 수도 있다.

$$S=\pi xy=\pi\{x(6-x)\}$$
$$=\pi(-x^2+6x)$$
$$=\pi\{-(x-3)^2+9\}$$

따라서 S의 최댓값은 9π이다.

18 **접근 방법** | 원에 내접하는 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라고 하면 직사각형의 대각선에 의하여 잘리는 삼각형은 빗변이 원의 지름인 직각삼각형이다. 따라서 피타고라스 정리에 의하여 $x^2+y^2=(2\sqrt{5})^2$이 성립한다.



오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라고 하면

$x^2+y^2=20$

이때 정사각기둥의 옆면 하나의 가로의 길이는 $\frac{x}{4}$ cm, 세로의 길이는 y cm이므로

$l=\frac{x}{4}\times 8+4y=2x+4y$

코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2x+4y)^2\leq(2^2+4^2)(x^2+y^2)$$
$$=20\times 20=400$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 4x=2y,\text{ 즉 } x=\frac{1}{2}y\text{일 때 성립}\right)$$

$\therefore 2x+4y\leq 20$

따라서 l의 최댓값은 20이다.

보충 설명

코시－슈바르츠의 부등식을 이용하지 않고 좌표평면에서 최대가 되는 상황을 생각하여 다음과 같이 최댓값을 구할 수도 있다.

양수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=20$이고,

$2x+4y=k$ (k는 상수)라 하고 k의 최댓값을 구하면 된다.

즉, 원 $x^2+y^2=20$에 직선 $2x+4y=k$가 접할 때 k의 값이 최대가 되므로

$\frac{|2\times 0+4\times 0-k|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\sqrt{20}$ $\quad\therefore |k|=20$

따라서 최댓값은 20임을 알 수 있다.

19 **접근 방법** | 서울에서 공장까지의 거리를 x km, 토지의 사용료를 y_1만 원, 제품의 운반비를 y_2만 원이라 하고, 주어진 조건을 이용하여 서울로부터의 거리 1 km당 토지의 사용료(반비례 관계)와 1 km당 제품의 운반비(정비례 관계)를 구한다. 이때 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 토지의 사용료와 제품의 운반비의 합의 최솟값을 구한다.

서울에서 공장까지의 거리를 x km라 하고, 토지의 사용료를 y_1만 원, 제품의 운반비를 y_2만 원이라고 하면 공장의 토지의 사용료는 서울로부터의 거리에 반비례하므로

$y_1=\frac{k_1}{x}$ (k_1은 상수) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 서울에서 10 km만큼 떨어진 토지의 사용료는 250만 원이므로 ㉠에 $x=10$, $y_1=250$을 대입하면

$250=\frac{k_1}{10}$

$\therefore k_1=2500$

또한 제품의 운반비는 서울로부터의 거리에 정비례하므로

$y_2=k_2x$ (k_2는 상수) $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 서울에서 10 km만큼 떨어진 곳의 제품의 운반비는 40만 원이므로 ㉡에 $x=10$, $y_2=40$을 대입하면

$40=k_2\times 10$

$\therefore k_2=4$

토지의 사용료와 제품의 운반비의 합은

$\left(\frac{2500}{x}+4x\right)$만 원이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2500}{x}+4x\geq 2\sqrt{\frac{2500}{x}\times 4x}$$
$$=2\sqrt{10000}$$
$$=200\ \left(\text{단, 등호는 }\frac{2500}{x}=4x\text{일 때 성립}\right)$$

이때 $4x^2=2500$에서 $x=25$ ($\because x>0$)일 때 위의 부등식이 최솟값을 가진다.

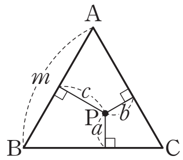
따라서 서울에서 25 km만큼 떨어진 지점에 공장을 세울 때 토지의 사용료와 제품의 운반비의 합이 최소인 200만 원이 된다.

보충 설명

변수 y가 변수 x에 정비례한다고 하면 $y=k_1x$ (k_1은 상수)로 나타내고, 변수 y가 변수 x에 반비례한다고 하면 $y=\frac{k_2}{x}$ (k_2는 상수)로 나타낸다.

20 **접근 방법 |** 점 P와 세 꼭짓점 A, B, C를 연결하여 주어진 삼각형을 세 개의 삼각형으로 나눈다. 이 세 삼각형의 넓이의 합을 구하면 a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 m이라고 하면



$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times m\times 1$

$=\frac{m}{2}$

$\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$

$=\frac{1}{2}\times m\times c+\frac{1}{2}\times m\times a+\frac{1}{2}\times m\times b$

$=\frac{m}{2}(a+b+c)$

이때 $\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$이므로

$\frac{m}{2}=\frac{m}{2}(a+b+c)$

$\therefore a+b+c=1$

코시-슈바르츠의 부등식

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

에 의하여

$3(a^2+b^2+c^2)\geq 1$

$\therefore a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

따라서 $a^2+b^2+c^2$의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

⊕ 보충 설명

a, b, x, y에 대한 코시-슈바르츠의 부등식을 a, b, c, x, y, z에 대한 부등식으로까지 확장해 볼 수 있다.

a, b, c, x, y, z가 실수일 때,

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\text{일 때 성립}\right)$

위의 부등식에 대한 증명은 다음과 같다.

임의의 실수 t에 대하여

$(at-x)^2\geq 0$, $(bt-y)^2\geq 0$, $(ct-z)^2\geq 0$

이므로

$(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2\geq 0$

$(a^2+b^2+c^2)t^2-2(ax+by+cz)t+(x^2+y^2+z^2)\geq 0$

위의 부등식이 모든 실수 t에 대하여 항상 성립해야 하므로 t에 대한 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=\{-(ax+by+cz)\}^2$

$-(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\leq 0$

$\therefore (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$

기출 다지기 288쪽

21 ② **22** ② **23** ⑤ **24** 8 **25** ①

21 **접근 방법 |** $xy>0$, $x+y>0$에서 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구하도록 한다.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{xy}$ …… ㉠

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립) …… ㉡

양변을 제곱하면 $(x+y)^2\geq 4xy$이므로

$\frac{1}{xy}\geq\frac{4}{(x+y)^2}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{xy}\geq\frac{12}{(x+y)^2}=\frac{4}{3}$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다.

다른 풀이

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)$ ($\because x+y=3$)

$=\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+2\right)$

$\geq\frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}}+2\right)=\frac{4}{3}$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다.

22 **접근 방법 |** $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구하도록 한다.

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$\left(4x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+16y\right)=64xy+\frac{1}{xy}+20$

$\geq 2\sqrt{64xy\times\frac{1}{xy}}+20$

$=16+20=36$

$\left(\text{단, 등호는 } xy=\frac{1}{8}\text{일 때 성립}\right)$

⊕ 보충 설명

$x>0$, $y>0$이므로

$4x+\frac{1}{y}\ge 2\sqrt{4x\times\frac{1}{y}}=4\sqrt{\frac{x}{y}}$

$\left(\text{단, 등호는 } xy=\frac{1}{4}\text{일 때 성립}\right)$

$\frac{1}{x}+16y\ge 2\sqrt{\frac{1}{x}\times 16y}=8\sqrt{\frac{y}{x}}$

$\left(\text{단, 등호는 } xy=\frac{1}{16}\text{일 때 성립}\right)$

위의 각각에 대하여 등호가 성립하는 경우가 다르므로

$\left(4x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+16y\right)\ge 4\sqrt{\frac{x}{y}}\times 8\sqrt{\frac{y}{x}}=32$

는 성립하지 않는다.

23 **접근 방법 |** ㄱ. 차로 식을 정리하여 성립함을 보이도록 한다.

ㄴ. 제곱의 차가 양수가 됨을 보이도록 한다.

ㄷ. 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 성립함을 보이도록 한다.

ㄱ. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{a+b}{ab}-\frac{4}{a+b}$

$=\frac{(a+b)^2-4ab}{ab(a+b)}$

$=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\ge 0$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립) (참)

ㄴ. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+b+2\sqrt{ab}-(a+b)$

$=2\sqrt{ab}>0$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ (참)

ㄷ. $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$,

$b+c\ge 2\sqrt{bc}$,

$c+a\ge 2\sqrt{ca}$

각 변끼리 더하면

$2(a+b+c)\ge 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

$\therefore a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

24 **접근 방법 |** 주어진 두 직선이 평행하므로 기울기가 서로 같다. 즉, $\frac{a}{2}=\frac{1}{b}$에서 $ab=2$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구하도록 한다.

두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 기울기가 각각 $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{b}$이고 두 직선이 서로 평행하므로 $\frac{a}{2}=\frac{1}{b}$에서 $ab=2$

$(a+1)(b+2)=ab+2a+b+2=2a+b+4$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

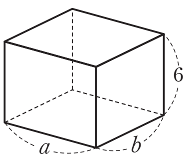
$2a+b+4\ge 2\sqrt{2ab}+4=8$

(단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

25 **접근 방법 |** 한 모서리의 길이가 6인 직육면체의 나머지 두 모서리의 길이를 각각 a, b로 놓고, 부피와 직육면체의 대각선의 길이를 식으로 나타내어 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 구하도록 한다.

오른쪽 그림과 같이 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a, b, 6이라고 하면



$6ab=108$이므로 $ab=18$

직육면체의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+6^2}$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립)

$\therefore a^2+b^2\ge 36$

$a^2+b^2+36\ge 72$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+36}\ge 6\sqrt{2}$

따라서 직육면체의 대각선의 길이의 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

Ⅲ. 함수

08. 함수

개념 콕콕 **1 함수** 297쪽

1 답 (1) 함수가 아니다. (2) 함수가 아니다.
(3) 함수이다., 정의역 : $\{1, 2, 3, 4\}$,
공역 : $\{5, 6, 7, 8\}$, 치역 : $\{5, 7, 8\}$

(1) X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 X에서 Y로의 함수가 아니다.

(2) X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 2개이므로 X에서 Y로의 함수가 아니다.

(3) X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응하므로 X에서 Y로의 함수이다.
이때 정의역은 $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역은 $\{5, 6, 7, 8\}$, 치역은 $\{5, 7, 8\}$이다.

2 답 두 함수 f와 g는 서로 같지 않다.

함수 $f(x)=x-1$의 정의역은 실수 전체의 집합이고,
함수 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$의 정의역은
$\{x\,|\,x\neq-1$인 모든 실수$\}$이므로 두 함수의 정의역이 서로 다르다.
따라서 두 함수 f와 g는 서로 같지 않다.

3 답 ①, ④

①, ④ 정의역이 실수 전체의 집합이고 정의역의 모든 원소에 공역의 원소가 하나씩 대응하므로 함수의 그래프이다.

③ 정의역의 원소 0에 대응하는 공역의 원소가 존재하지 않으므로 실수 전체의 집합에서 정의된 함수의 그래프가 아니다.

②, ⑤ 정의역의 한 원소에 공역의 원소가 두 개씩 대응하는 경우가 있으므로 함수의 그래프가 아니다.

참고 ③은 정의역이 $R-\{0\}$인 함수이다.
이때 R은 실수 전체의 집합이다.

4 답 (1) ㄱ, ㄷ, ㄹ (2) ㄱ, ㄹ (3) ㄴ (4) ㄹ

(1) 일대일함수는 정의역의 서로 다른 원소마다 공역의 서로 다른 원소가 대응하는 함수이므로 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

(2) 일대일대응은 일대일함수 중 치역과 공역이 같은 함수이므로 ㄱ, ㄹ이다.

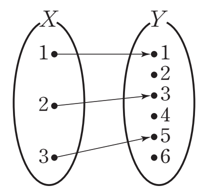
(3) 상수함수는 정의역의 모든 원소에 공역의 단 하나의 원소가 대응하는 함수이므로 ㄴ이다.

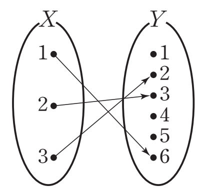
(4) 항등함수는 정의역과 공역이 같고, 정의역의 각 원소 x에 그 자신인 x가 대응하는 함수이므로 ㄹ이다.

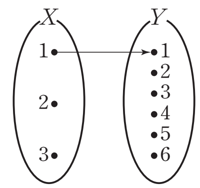
예제 01 **함수의 뜻** 299쪽

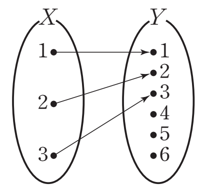
01-1 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


ㄷ. X의 원소 2, 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

01-2 답 ②, ③, ④

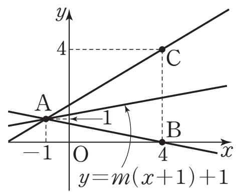
함수의 그래프는 정의역의 임의의 원소 a에 대하여 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.
즉, y축에 평행한 직선 $x=a$와 단 한 점에서 만나는 것이 함수의 그래프이므로 함수의 그래프인 것은 ②, ③, ④이다.

보충 설명
실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 만나지 않거나 두 개 이상의 점에서 만나는 그래프는 a를 원소로 하는 집합을 정의역으로 하는 함수의 그래프가 될 수 없다.

01-3 답 $-\dfrac{1}{5}\le m\le\dfrac{3}{5}$

$y=mx+m+1=m(x+1)+1$에서 이 직선은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 1)$을 지나고, m은 이 직선의 기울기이다.

이때 $f(x)$가 X에서 X로의 함수가 되려면 집합 X의 임의의 원소 x에 대하여 함숫값 $f(x)$가 집합 X의 원소이어야 하므로 $0 \le f(x) \le 4$이어야 한다.
즉, 다음 그림과 같이 $A(-1, 1)$, $B(4, 0)$, $C(4, 4)$라고 하면 직선 $y=m(x+1)+1$은 점 A를 지나면서 두 직선 AB, AC 사이에 존재해야 한다.



이때

$(\text{직선 AB의 기울기})=\dfrac{0-1}{4-(-1)}=-\dfrac{1}{5}$

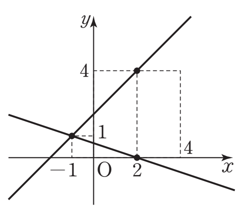
$(\text{직선 AC의 기울기})=\dfrac{4-1}{4-(-1)}=\dfrac{3}{5}$

이므로

$-\dfrac{1}{5} \le m \le \dfrac{3}{5}$

⊕ 보충 설명

직선 $y=m(x+1)+1$이 다음 그림과 같은 경우에는 $2<x\le 4$일 때, $f(x) \notin X$이므로 $f(x)$는 X에서 X로의 함수가 될 수 없다.



예제 02 서로 같은 함수 301쪽

02-1 답 2

두 함수 f, g에 대하여 $f=g$이므로
$f(-1)=g(-1)$에서
$0=-a+b$ ······ ㉠
$f(2)=g(2)$에서
$3=2a+b$ ······ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=1$
$\therefore a+b=1+1=2$

02-2 답 ③

두 함수 f, g에 대하여 $f=g$이려면 정의역의 모든 원소에 대응하는 함숫값이 서로 같아야 하므로
$f(x)=g(x)$에서
$2x^2-3x+4=x^2+2$
$x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 구하는 집합 X는 집합 $\{1, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로
$\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$
의 3개이다.

02-3 답 5

두 함수 f, g에 대하여 $f=g$이므로
$f(2)=g(2)$에서
$8+12=12+2k$
$2k=8 \qquad \therefore k=4$
2, α, β는 방정식 $f(x)=g(x)$의 근이므로 방정식
$f(x)=g(x)$에서
$x^3+12=3x^2+4x$
$x^3-3x^2-4x+12=0$
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2+\alpha+\beta=3 \qquad \therefore \alpha+\beta=1$
$\therefore \alpha+\beta+k=1+4=5$

다른 풀이

두 함수 f, g에 대하여 $f=g$이므로
$f(2)=g(2)$, $f(\alpha)=g(\alpha)$, $f(\beta)=g(\beta)$
가 성립한다.
즉, 2, α, β는 각각 방정식 $f(x)=g(x)$의 근이므로
$x^3+12=3x^2+kx$
$\therefore x^3-3x^2-kx+12=0$
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2+\alpha+\beta=3 \qquad \therefore \alpha+\beta=1$ ······ ㉠
$2\alpha+\alpha\beta+2\beta=-k$ ······ ㉡
$2\alpha\beta=-12 \qquad \therefore \alpha\beta=-6$ ······ ㉢
㉡에 ㉠, ㉢을 대입하여 정리하면
$k=-(2\alpha+\alpha\beta+2\beta)$
$\quad=-2(\alpha+\beta)-\alpha\beta$
$\quad=-2-(-6)=4$
$\therefore \alpha+\beta+k=1+4=5$

예제 03 일대일대응 303쪽

03-1 답 ②

①, ④ 직선 $y=b$와의 교점이 2개 이상인 실수 b가 존재하므로 일대일함수의 그래프가 아니다. 또한 치역과 공역이 같지 않다.

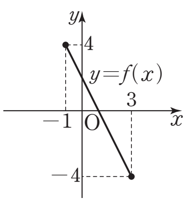
② 임의의 실수 b에 대하여 직선 $y=b$와의 교점이 1개이고 치역과 공역이 같으므로 일대일대응의 그래프이다.

③ 직선 $y=b$와의 교점이 2개인 실수 b가 존재하므로 일대일함수의 그래프가 아니다. 또한 치역과 공역이 같지 않다.

⑤ 직선 $y=b$와의 교점이 2개 이상인 실수 b가 존재하므로 일대일함수의 그래프가 아니다.

03-2 답 0

$a<0$이므로 함수 $f(x)=ax+b$가 정의역이 $X=\{x\,|\,-1\le x\le 3\}$이고, 치역이 $Y=\{y\,|\,-4\le y\le 4\}$인 일대일대응이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 4)$, $(3,\ -4)$를 지나야 하므로

$f(-1)=4$에서 $-a+b=4$ …… ㉠

$f(3)=-4$에서 $3a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

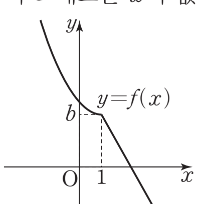
$a=-2,\ b=2$

$\therefore a+b=-2+2=0$

03-3 답 ②

$x<1$일 때, 함수 $y=(x-1)^2+b$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉, 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



이때 직선 $y=ax+4$의 기울기가 음수이어야 하므로

$a<0$ …… ㉠

또한 직선 $y=ax+4$가 점 $(1,\ b)$를 지나야 하므로

$b=a+4$ …… ㉡

㉡에서 $a+b=a+(a+4)=2a+4$

이때 a, b가 정수이므로 ㉠에서 정수 a의 최댓값이 -1이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은

$2\times(-1)+4=2$

예제 04 함수의 개수 305쪽

04-1 답 (1) 256 (2) 24

(1) 집합 X의 원소 1에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 2, 4, 6, 8의 4개이고, 다른 원소 3, 5, 7에 대응할 수 있는 Y의 원소도 각각 4개이다.
따라서 구하는 함수의 개수는
$4\times4\times4\times4=256$

(2) 집합 X의 원소 1에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 2, 4, 6, 8의 4개이고, 다른 원소 3, 5, 7에 대응할 수 있는 Y의 원소는 X의 원소에 대응한 Y의 원소를 제외해야 하므로 각각 3개, 2개, 1개이다.
따라서 구하는 일대일대응의 개수는 집합 X의 원소 1, 3, 5, 7의 자리를 정해 놓고 집합 Y의 원소 2, 4, 6, 8을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$4!=4\times3\times2\times1=24$

04-2 답 61

집합 X의 원소 1에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이고, 다른 원소 2와 3에 대응할 수 있는 Y의 원소도 각각 5개이다.

따라서 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

$5\times5\times5=125$

이때 $f(1)f(2)f(3)=0$을 만족시키려면

$f(1)=0$ 또는 $f(2)=0$ 또는 $f(3)=0$이어야 한다.

즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값 중에서 적어도 하나는 0이 되어야 하므로 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 모두 0이 아닌 함수를 제외해야 한다.

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 모두 0이 아닌 함수의 개수는 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에서 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수의 개수와 같으므로

$4\times4\times4=64$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$125-64=61$

04-3 답 12

조건 ㈎에서 $f(1)$의 값은 1 또는 2이어야 하고 조건 ㈏에서 $f(2)$의 값도 1 또는 2이어야 한다.
이때 조건 ㈐에서 함수 f는 일대일함수이고 정의역과 공역의 원소의 개수가 같으므로 일대일대응이다.

(i) $f(1)=1$인 경우
$f(2)=2$이고 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 1과 2를 제외한 3개이므로 일대일대응인 f의 개수는
$3!=3\times2\times1=6$

(ii) $f(1)=2$인 경우
$f(2)=1$이고 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 1과 2를 제외한 3개이므로 일대일대응인 f의 개수는
$3!=3\times2\times1=6$

(i), (ii)에서 함수 f의 개수는 $6+6=12$

예제 05 특정한 조건을 만족시키는 함수의 개수 307쪽

05-1 답 150

곱의 법칙에 의해 함수 f의 총 개수는
$3\times3\times3\times3\times3=3^5=243$

(i) 치역이 $\{a\}$인 함수의 개수는 1이므로 치역의 원소의 개수가 1인 함수의 개수는
${}_3C_1=3$

(ii) 치역이 $\{a, b\}$인 함수의 개수는
$2^5-2=30$
이므로 치역의 원소의 개수가 2인 함수의 개수는
${}_3C_2\times(2^5-2)=3\times30=90$

(i), (ii)에서 치역의 원소의 개수가 3, 즉 치역이 공역과 같은 함수의 개수는
$243-3-90=150$

다른 풀이

정의역의 원소를 공역의 원소의 수만큼의 조로 나누어야 한다.
즉, 1, 2, 3, 4, 5 다섯 개를 2개, 2개, 1개 또는 3개, 1개, 1개의 3개의 조로 나누는 방법의 수는
$${}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}+{}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}$$
$$=15+10=25$$
따라서 이 각각에 대하여 3개의 조에 공역의 원소 a, b, c를 대응시키는 경우의 수가 $3!$이므로 구하는 함수의 개수는
$25\times3!=150$

05-2 답 ①

서로 다른 종류의 책 6권을 정의역, 창희, 경도, 인영을 공역으로 하는 함수를 f라고 하면 곱의 법칙에 의해 함수 f의 총 개수는
$3\times3\times3\times3\times3\times3=3^6=729$
이때 모든 사람이 책을 한 권 이상씩 받아야 하므로 함수 f의 공역과 치역이 같아야 한다.

(i) 치역이 {창희}인 함수의 개수는 1이므로 치역의 원소의 개수가 1인 함수의 개수는
${}_3C_1=3$

(ii) 치역이 {창희, 경도}인 함수의 개수는
$2^6-2=62$
이므로 치역의 원소의 개수가 2인 함수의 개수는
${}_3C_2\times(2^6-2)=3\times62=186$

(i), (ii)에서 치역의 원소의 개수가 3, 즉 치역이 공역과 같은 함수의 개수는
$729-3-186=540$

다른 풀이

서로 다른 종류의 책 6권을 세 사람에게 한 권 이상씩 나누어 주는 방법은 책 6권을 1개, 2개, 3개 또는 1개, 1개, 4개 또는 2개, 2개, 2개로 나누어주면 된다.

(i) 책 6권을 1개, 2개, 3개로 나눈 후 세 사람에게 나누어 주는 경우
${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times3!=360$

(ii) 책 6권을 1개, 1개, 4개로 나눈 후 세 사람에게 나누어 주는 경우
$${}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}\times3!=90$$

(iii) 책 6권을 2개, 2개, 2개로 나눈 후 세 사람에게 나누어 주는 경우
$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}\times3!=90$$

(i)~(iii)에서 구하는 방법의 수는
$360+90+90=540$

05-3 답 ①

공역의 원소가 모두 홀수이므로 치역에 속하는 모든

원소의 합이 짝수이려면 치역의 원소의 개수가 2이어야 한다.
치역이 $\{3, 5\}$인 함수의 개수는
$2^5-2=30$
이므로 치역의 원소의 개수가 2인 함수의 개수는
${}_3C_2\times(2^5-2)=3\times30=90$

개념 콕콕 2 합성함수

313쪽

1 답 (1) 0 (2) -2 (3) 2 (4) 3

(1) $(g\circ f)(-2)=g(f(-2))=g(1)=0$
(2) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=-2$
(3) $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(-4)=2$
(4) $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(0)=3$

2 답 (1) $(g\circ f)(x)=2x+2$ (2) $(f\circ g)(x)=2x+1$
(3) $(f\circ f)(x)=x+2$ (4) $(g\circ g)(x)=4x$

두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=2x$에 대하여
(1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)$
$=2(x+1)=2x+2$
(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x)=2x+1$
(3) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x+1)$
$=(x+1)+1=x+2$
(4) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(2x)$
$=2\times(2x)=4x$

3 답 $(g\circ f)(x)=4x^2+4x+4$,
$(f\circ g)(x)=2x^2+7$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$
$=(2x+1)^2+3$
$=4x^2+4x+4$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+3)$
$=2(x^2+3)+1$
$=2x^2+7$

4 답 (1) 6 (2) 16

(1) $(f\circ g\circ h)(1)=f(g(h(1)))$
$=f(g(1))=f(-3)$
$=-2\times(-3)=6$
(2) $(h\circ f\circ g)(1)=h(f(g(1)))$
$=h(f(-3))=h(6)$
$=3\times6-2=16$

5 답 9

함수의 합성에 대하여 결합법칙이 성립하므로
$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$에서
$(h\circ(g\circ f))(-2)=((h\circ g)\circ f)(-2)$
$=(h\circ g)(f(-2))$
$=(h\circ g)(5)$
$=3\times5-6=9$

예제 06 합성함수

315쪽

06-1 답 -5

$f(x)=2x-1$, $g(x)=-3x+k$에 대하여
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(-3x+k)-1$
$=-6x+2k-1$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=-3(2x-1)+k$
$=-6x+k+3$
$f\circ g=g\circ f$이므로
$-6x+2k-1=-6x+k+3$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로
$2k-1=k+3$ $\quad\therefore k=4$
따라서 $g(x)=-3x+4$이므로
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)$
$=-3\times3+4=-5$

06-2 답 (1) $(-2, -2)$ (2) 1

(1) $f(x)=3x+4$, $g(x)=ax+b$에 대하여
$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=3(ax+b)+4$
$=3ax+3b+4$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=a(3x+4)+b$
$=3ax+4a+b$
$f\circ g=g\circ f$이므로
$3ax+3b+4=3ax+4a+b$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로
$3b+4=4a+b$
$\therefore b=2a-2$

$b=2a-2$를 $g(x)=ax+b$에 대입하면

$g(x)=ax+2a-2=a(x+2)-2$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계 없이 점 $(-2,\ -2)$를 지난다.

(2) $f(x)=-4x+5$에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=-4(-4x+5)+5$

$=16x-15$

$(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))$

$=-4(16x-15)+5$

$=-64x+65$

따라서 $(f\circ f\circ f)(k)=1$에서

$-64k+65=1 \qquad \therefore k=1$

06-3 답 b

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=6$에서

g는 일대일대응이고, $g(b)=4$이므로

$f(2)\neq b$

또한 f는 일대일대응이고, $f(1)=c$이므로

$f(2)\neq c$

따라서 $f(2)=a$이고, $f(1)=c$이므로

$f(3)=b$

예제 07 합성함수의 응용 317쪽

07-1 답 (1) -1 (2) $f(2x-1)=\dfrac{2x-8}{3}$

(1) $f(3x+1)=x-2$에서

$3x+1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t-1}{3}$이므로

$f(t)=\dfrac{t-1}{3}-2=\dfrac{t-7}{3}$

$\therefore f(4)=\dfrac{4-7}{3}=-1$

(2) (1)에서 $f(t)=\dfrac{t-7}{3}$이므로

$t=2x-1$을 대입하면

$f(2x-1)=\dfrac{(2x-1)-7}{3}=\dfrac{2x-8}{3}$

다른 풀이

(1) $f(3x+1)=x-2$에서

$3x+1=4$를 만족시키는 x의 값은 $x=1$이므로

$f(4)=1-2=-1$

07-2 답 ③

$x>0$일 때, $f(2x)=\dfrac{2}{x+2}$에서

$2x=t$로 놓으면 $t>0$이고 $x=\dfrac{t}{2}$이므로

$f(t)=\dfrac{2}{\dfrac{t}{2}+2}=\dfrac{4}{t+4}$

따라서 $x>0$일 때, $f(x)=\dfrac{4}{x+4}$

$\therefore 2f(x)=\dfrac{8}{x+4}$

07-3 답 ③

$(h\circ g\circ f)(x)=h(x)$에서

$h((g\circ f)(x))=h(x)$

이때 함수 h가 일대일대응이므로

$(g\circ f)(x)=x,\ g(f(x))=x$

$\therefore g(2x-3)=x$

$g(2x-3)=x$에서

$2x-3=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+3}{2}$이므로

$g(t)=\dfrac{t+3}{2} \qquad \therefore g(1)=\dfrac{1+3}{2}=2$

⊕ 보충 설명

함수 h가 일대일대응이므로 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$x_1\neq x_2$이면 $h(x_1)\neq h(x_2)$ …… ㉠

이다. 즉, ㉠의 대우인

$h(x_1)=h(x_2)$이면 $x_1=x_2$

도 성립한다.

예제 08 합성함수의 그래프 319쪽

08-1 답 풀이 참조

$f(x)=\begin{cases}3 & (x\geq 1)\\ 1 & (x<1)\end{cases}$, $g(3)=1,\ g(1)=1$이므로

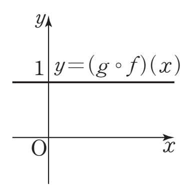
(i) $x\geq 1$일 때,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3)=1$

(ii) $x<1$일 때,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(1)=1$

(i), (ii)에서 모든 실수 x에 대하여 $(g\circ f)(x)=1$이므로 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



08-2 답 풀이 참조

주어진 그래프에서

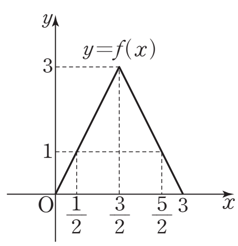
$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0\le x<\dfrac{3}{2}\right) \\ -2x+6 & \left(\dfrac{3}{2}\le x\le 3\right) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} & (1\le x\le 3) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\ &=\begin{cases} 2f(x) & (0\le f(x)<1) \\ \dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{3}{2} & (1\le f(x)\le 3) \end{cases}\end{aligned}$$

함수 $g(x)$가 $0\le x<1$, $1\le x\le 3$에서 서로 다른 함수의 식을 가지므로 함수 $f(x)$의 값이 1이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각해야 한다.



(i) $0\le x<\dfrac{1}{2}$일 때, $0\le f(x)<1$이므로

$$(g\circ f)(x)=2f(x)=2\times 2x=4x$$

(ii) $\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{2}$일 때, $1\le f(x)<3$이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{3}{2}\\ &=\frac{1}{2}\times 2x+\frac{3}{2}\\ &=x+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(iii) $\dfrac{3}{2}\le x<\dfrac{5}{2}$일 때, $1<f(x)\le 3$이므로

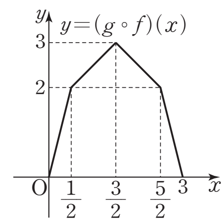
$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{3}{2}\\ &=\frac{1}{2}(-2x+6)+\frac{3}{2}\\ &=-x+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

(iv) $\dfrac{5}{2}\le x\le 3$일 때, $0\le f(x)\le 1$이므로

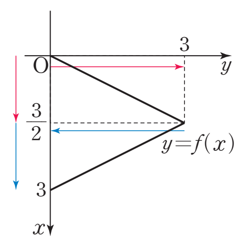
$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=2f(x)\\ &=2(-2x+6)\\ &=-4x+12\end{aligned}$$

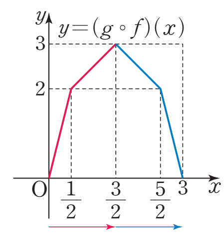
$$\therefore\ (g\circ f)(x)=\begin{cases} 4x & \left(0\le x<\dfrac{1}{2}\right) \\ x+\dfrac{3}{2} & \left(\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{2}\right) \\ -x+\dfrac{9}{2} & \left(\dfrac{3}{2}\le x<\dfrac{5}{2}\right) \\ -4x+12 & \left(\dfrac{5}{2}\le x\le 3\right) \end{cases}$$

따라서 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



다른 풀이





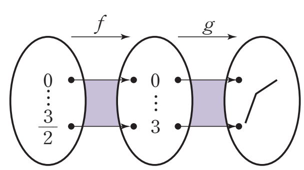
보충 설명

합성함수의 정의와 벤다이어그램을 이용하여 x의 값이 증가할 때 y의 값의 증가 · 감소를 조사하여 그릴 수도 있다.

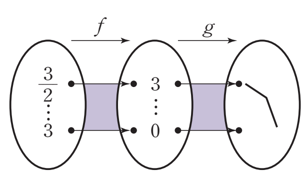
$0\le x\le 3$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$를 다음과 같이 생각해 보자.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=\dfrac{3}{2}$인 점에서 꺾이므로 x의 값의 범위를 $0\le x\le\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{3}{2}\le x\le 3$으로 나누어서 생각하면

$0\le x\le\dfrac{3}{2}$에서



마찬가지 방법으로 $\dfrac{3}{2}\le x\le 3$에서



이를 이용하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.

08-3 답 풀이 참조

주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (x>0) \end{cases},\ g(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1) \\ -x & (-1\le x<1) \\ -1 & (x\ge 1) \end{cases}$$

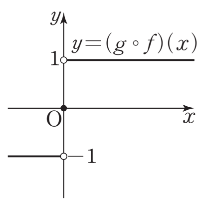
이므로

(1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$$=\begin{cases} 1 & (f(x)<-1) \\ -f(x) & (-1\le f(x)<1) \\ -1 & (f(x)\ge 1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

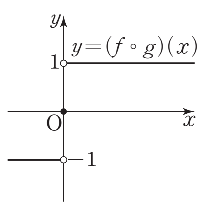


(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$$=\begin{cases} 1 & (g(x)<0) \\ 0 & (g(x)=0) \\ -1 & (g(x)>0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



개념 콕콕 3 역함수 327쪽

1 답 (1) 역함수가 존재하지 않는다.
(2) 역함수가 존재하지 않는다.
(3) 역함수가 존재한다.

(1) 집합 Y의 원소 5에 대응하는 집합 X의 원소가 없으므로 함수 f는 일대일대응이 아니다.
즉, 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$는 존재하지 않는다.

(2) 집합 Y의 원소 5에 대응하는 집합 X의 원소가 2개이므로 함수 f는 일대일대응이 아니다.
즉, 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$는 존재하지 않는다.

(3) 함수 f는 일대일대응이므로 역함수
$f^{-1}: Y \longrightarrow X$가 존재한다.

2 답 (1) 5 (2) 3 (3) 4 (4) 3 (5) 8 (6) 7

(1) $f(2)=5$

(2) $f^{-1}(7)=3$

(3) $f^{-1}(6)=4$

(4) $(f^{-1}\circ f)(3)=3$

(5) $(f\circ f^{-1})(8)=8$

(6) $(f^{-1})^{-1}(3)=f(3)=7$

3 답 (1) $f^{-1}(x)=x-2$ (2) $g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
(3) $(g\circ f)^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$
(4) $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

두 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=-2x+1$은 모두 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

(1) $y=x+2$로 놓고 x에 대하여 풀면
$x=y-2$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=x-2$
따라서 구하는 역함수는
$f^{-1}(x)=x-2$

(2) $y=-2x+1$로 놓고 x에 대하여 풀면
$2x=-y+1 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
따라서 구하는 역함수는
$g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

(3) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+2)$
$=-2(x+2)+1$
$=-2x-3$
$y=-2x-3$으로 놓고 x에 대하여 풀면
$2x=-y-3 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

따라서 구하는 역함수는

$(g\circ f)^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

(4) (1), (2)에서 $f^{-1}(x)=x-2$, $g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

이므로

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g^{-1})(x)&=f^{-1}(g^{-1}(x))\\&=f^{-1}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\\&=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-2=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

다른 풀이

(4) 역함수의 성질에 의하여

$(g\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$이므로

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g^{-1})(x)&=(g\circ f)^{-1}(x)\\&=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\ (\because (3))\end{aligned}$$

4 답 2

$f(2)=1$이므로 $2a+b=1$ …… ㉠

$f^{-1}(0)=3$에서 $f(3)=0$이므로

$3a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

$\therefore a+b=-1+3=2$

5 답 $a=-1$, $b=-2$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 점 $(2,\ -4)$를 지나므로

$f(2)=-4$, $f^{-1}(2)=-4$

$f(2)=-4$이므로 $2a+b=-4$ …… ㉠

$f^{-1}(2)=-4$에서 $f(-4)=2$이므로

$-4a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

예제 09 역함수의 성질 329쪽

09-1 답 (1) -1 (2) -20

(1) $g(4)=a$라고 하면 $g^{-1}(a)=4$에서 $f(a)=4$이므로

$-3a+1=4$, $-3a=3$ $\therefore a=-1$

(2) $(g\circ g\circ g)(k)=1$에서

$(g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ g\circ g)(k)$

$=(g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1})(1)$

$$\begin{aligned}\therefore k&=(g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1})(1)\\&=(f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(1)))=f(f(-2))\\&=f(7)=-20\end{aligned}$$

09-2 답 ⑤

함수 f의 역함수가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다.

따라서 $f^{-1}(1)+f^{-1}(2)+f^{-1}(3)+f^{-1}(4)+f^{-1}(5)$는 함수 f의 정의역의 모든 원소의 합과 같으므로

$f^{-1}(1)+f^{-1}(2)+f^{-1}(3)+f^{-1}(4)+f^{-1}(5)$

$=1+2+3+4+5=15$

09-3 답 28

$(g\circ g\circ g\circ g)(k)=2$에서

$(g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ g\circ g\circ g)(k)$

$=(g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$$\begin{aligned}\therefore k&=(g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1})(2)\\&=(f\circ f\circ f\circ f)(2)\\&=f(f(f(f(2))))\\&=f(f(f(0)))\ (\because f(2)=-2^2+2\times2=0)\\&=f(f(4))\ (\because f(0)=(-3)\times0+4=4)\\&=f(-8)\ (\because f(4)=-4^2+2\times4=-8)\\&=28\ (\because f(-8)=(-3)\times(-8)+4=28)\end{aligned}$$

예제 10 역함수와 그 그래프 331쪽

10-1 답 (1) $y=-x+2$, 그래프는 풀이 참조
(2) $y=\sqrt{x-1}\,(x\geq1)$, 그래프는 풀이 참조

(1) 함수 $y=-x+2$는 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

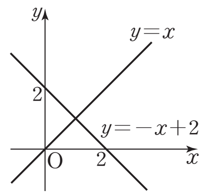
$y=-x+2$를 x에 대하여 풀면

$x=-y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-x+2$

또한 역함수의 그래프는 함수 $y=-x+2$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



(2) 함수 $y=x^2+1\ (x\geq 0)$은 집합 $\{x|x\geq 0\}$에서 집합 $\{y|y\geq 1\}$로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=x^2+1$을 x에 대하여 풀면

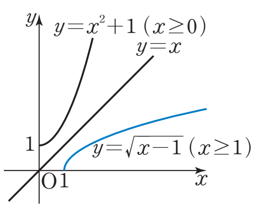
$x^2=y-1$

$\therefore x=\sqrt{y-1}\ (\because x\geq 0)$ …… ㉠

이때 함수 $y=x^2+1\ (x\geq 0)$의 치역이 $\{y|y\geq 1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\geq 1\}$이다.

따라서 ㉠에서 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\sqrt{x-1}\ (x\geq 1)$

또한 역함수의 그래프는 함수 $y=x^2+1\ (x\geq 0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



10-2 답 ⑤

(ⅰ) $y=af(x)$로 놓으면

$f(x)=\dfrac{y}{a}\qquad \therefore x=f^{-1}\left(\dfrac{y}{a}\right)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=f^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

따라서 함수 $af(x)$의 역함수는 $f^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, 즉

$g\left(\dfrac{x}{a}\right)$

(ⅱ) $y=f(ax)$로 놓으면

$ax=f^{-1}(y)\qquad \therefore x=\dfrac{1}{a}f^{-1}(y)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{a}f^{-1}(x)$

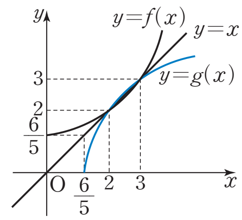
따라서 함수 $f(ax)$의 역함수는 $\dfrac{1}{a}f^{-1}(x)$, 즉

$\dfrac{1}{a}g(x)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 역함수는 ⑤ $g\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $\dfrac{1}{a}g(x)$이다.

10-3 답 $\sqrt{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\dfrac{1}{5}(x^2+6)=x$에서

$x^2+6=5x$

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0\qquad \therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

예제 11 합성함수의 역함수 333쪽

11-1 답 3

역함수와 합성함수의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g &= g\circ(g^{-1}\circ f^{-1})\circ g \\ &=(g\circ g^{-1})\circ(f^{-1}\circ g) \\ &=I\circ(f^{-1}\circ g) \\ &=f^{-1}\circ g \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(2) &=(f^{-1}\circ g)(2) \\ &=f^{-1}(g(2)) \\ &=f^{-1}(1) \end{aligned}$$

이때 $f^{-1}(1)=a$로 놓으면 $f(a)=1$이므로

$f(a)=a-2=1\qquad \therefore a=3$

따라서 $f^{-1}(1)=3$이므로

$(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(2)=3$

11-2 답 ②

$(g^{-1}\circ f^{-1})(8)=3$에서

$(f\circ g)^{-1}(8)=3$이므로

$(f\circ g)(3)=8$

즉, $f(g(3))=f(5)=8$이므로

$f(5)=5a+b=8$ …… ㉠

또한 $(f\circ g^{-1})(4)=f(g^{-1}(4))$에서

$g^{-1}(4)=k$로 놓으면 $g(k)=4$이므로

$g(k)=k+2=4 \qquad \therefore k=2$

즉, $g^{-1}(4)=2$이므로

$(f\circ g^{-1})(4)=f(2)=2a+b=-1$ …… ㉡

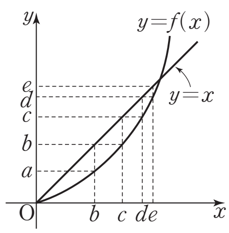
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-7$

$\therefore a+b=3+(-7)=-4$

11-3 답 ⑤

직선 $y=x$를 이용하여 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하여 주어진 그림에 나타내면 다음 그림과 같다.



$(f\circ f)^{-1}(c)=(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

이므로 $f^{-1}(c)=m$으로 놓으면

$f(m)=c$

위의 그림에서 $f(d)=c$이므로 $m=d$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(d)$ …… ㉠

또한 $f^{-1}(d)=n$으로 놓으면

$f(n)=d$

위의 그림에서 $f(e)=d$이므로 $n=e$

$\therefore f^{-1}(d)=e$ …… ㉡

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ f)^{-1}(c)&=(f^{-1}\circ f^{-1})(c)\\&=f^{-1}(f^{-1}(c))\\&=f^{-1}(d)\ (\because ㉠)\\&=e\ (\because ㉡)\end{aligned}$$

예제 12 우함수와 기함수 339쪽

12-1 답 (1) 우함수 (2) 기함수 (3) 기함수 (4) 우함수

주어진 조건에 의하여

$f(-x)=f(x),\ g(-x)=-g(x)$

(1) $F(x)=\{f(x)\}^2$이라고 하면

$F(-x)=\{f(-x)\}^2=\{f(x)\}^2=F(x)$

따라서 $F(-x)=F(x)$이므로 $\{f(x)\}^2$은 우함수이다.

(2) $F(x)=\{g(x)\}^3$이라고 하면

$$\begin{aligned}F(-x)&=\{g(-x)\}^3=\{-g(x)\}^3\\&=-\{g(x)\}^3\\&=-F(x)\end{aligned}$$

따라서 $F(-x)=-F(x)$이므로 $\{g(x)\}^3$은 기함수이다.

(3) $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0)$라고 하면

$$\begin{aligned}F(-x)&=\frac{f(-x)}{g(-x)}=\frac{f(x)}{-g(x)}\\&=-\frac{f(x)}{g(x)}=-F(x)\end{aligned}$$

따라서 $F(-x)=-F(x)$이므로 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 기함수이다.

(4) $F(x)=f(x)+xg(x)$라고 하면

$$\begin{aligned}F(-x)&=f(-x)+(-x)g(-x)\\&=f(x)+(-x)\{-g(x)\}\\&=f(x)+xg(x)\\&=F(x)\end{aligned}$$

따라서 $F(-x)=F(x)$이므로 $f(x)+xg(x)$는 우함수이다.

⊕ 보충 설명

우함수와 기함수의 성질

(1) (우함수)+(우함수)=(우함수)

(2) (기함수)+(기함수)=(기함수)

(3) (우함수)×(우함수)=(우함수)

(4) (기함수)×(기함수)=(우함수)

(5) (기함수)×(우함수)=(기함수)

12-2 답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

ㄱ. $F(x)=f(x)+f(-x)$라고 하면

$F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$

즉, $F(-x)=F(x)$이므로 $f(x)+f(-x)$는 우함수이다.

ㄴ. $F(x)=f(x)-f(-x)$라고 하면

$F(-x)=f(-x)-f(x)=-F(x)$

즉, $F(-x)=-F(x)$이므로 $f(x)-f(-x)$는 기함수이다.

ㄷ. $F(x)=f(x)f(-x)$라고 하면

$F(-x)=f(-x)f(x)=F(x)$

즉, $F(-x)=F(x)$이므로 $f(x)f(-x)$는 우함수이다.

ㄹ. $f(x)$가 기함수이므로

$f(-x)=-f(x)$

를 만족시킨다.

$F(x)=(f\circ f)(x)$라고 하면

$F(-x)=(f\circ f)(-x)=f(f(-x))$
$=f(-f(x))=-f(f(x))$
$=-(f\circ f)(x)=-F(x)$

즉, $F(-x)=-F(x)$이므로 $(f\circ f)(x)$는 기함수이다.

ㅁ. $f(x)$가 우함수이므로

$f(-x)=f(x)$

를 만족시킨다.

$F(x)=(f\circ f)(x)$라고 하면

$F(-x)=(f\circ f)(-x)=f(f(-x))$
$=f(f(x))=(f\circ f)(x)=F(x)$

즉, $F(-x)=F(x)$이므로 $(f\circ f)(x)$는 우함수이다.

따라서 우함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

⊕ 보충 설명

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이면

$f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

(1) $F(x)=(f\circ g)(x)$라고 하면

$F(-x)=(f\circ g)(-x)=f(g(-x))$
$=f(-g(x))=f(g(x))$
$=(f\circ g)(x)=F(x)$

따라서 $F(-x)=F(x)$이므로 함수 $(f\circ g)(x)$는 우함수이다.

(2) $F(x)=(g\circ f)(x)$라고 하면

$F(-x)=(g\circ f)(-x)=g(f(-x))$
$=g(f(x))=(g\circ f)(x)=F(x)$

따라서 $F(-x)=F(x)$이므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 우함수이다.

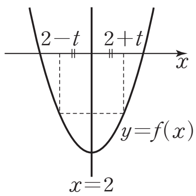
(1), (2)에서 우함수와 기함수를 합성했을 때에는 합성의 순서에 상관없이 우함수가 됨을 알 수 있다.

또한 〈보기〉의 ㄹ, ㅁ에서 알 수 있듯이 우함수끼리 합성하면 우함수, 기함수끼리 합성하면 기함수이다.

12-3 답 -2

함수 $f(x)=2x^2-8x-4$에서

$f(x)=2(x^2-4x)-4$
$=2(x^2-4x+4)-8-4$
$=2(x-2)^2-12$

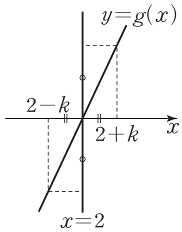


이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=2$의 좌우로 t (t는 실수)만큼 떨어진 x좌표에서의 함숫값이 같다.

즉, 임의의 실수 t에 대하여 $f(2-t)=f(2+t)$를 만족시키므로

$a=2$



또한 함수 $g(x)$는 $g(2-x)=-g(2+x)$를 만족시키므로 오른쪽 그림과 같이 $x=2$의 좌우로 k (k는 실수)만큼 떨어진 x좌표에서의 함숫값은 절댓값은 같고 부호는 서로 반대이다.

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$2\times2+b=0\qquad\therefore b=-4$

$\therefore a+b=2+(-4)=-2$

⊕ 보충 설명

함수 $f(x)=x^2$은 모든 실수 x에 대하여 $f(0+x)=f(0-x)$가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$ (y축)에 대하여 대칭이다.

일반적으로 이차함수

$g(x)=a(x-p)^2+q$ (a, p, q는 상수)

는 모든 실수 x에 대하여

$g(p+x)=g(p-x)$

가 성립하므로 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다.

예제 13 가우스 기호를 포함한 함수의 그래프 341쪽

13-1 답 풀이 참조

(1) 함수 $y=\left[\frac{x}{2}\right]$에서 $\frac{x}{2}$가 정수가 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누면

⋮

$-2\le\frac{x}{2}<-1$, 즉 $-4\le x<-2$일 때,

$\left[\frac{x}{2}\right]=-2$이므로 $y=-2$

$-1\le\frac{x}{2}<0$, 즉 $-2\le x<0$일 때,

$\left[\frac{x}{2}\right]=-1$이므로 $y=-1$

$0\le\frac{x}{2}<1$, 즉 $0\le x<2$일 때,

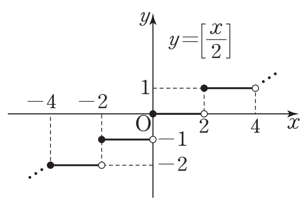
$\left[\frac{x}{2}\right]=0$이므로 $y=0$

$1\le\frac{x}{2}<2$, 즉 $2\le x<4$일 때,

$\left[\frac{x}{2}\right]=1$이므로 $y=1$

⋮

따라서 구하는 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) 함수 $y=[x^2]\,(-2<x<2)$에서 x^2이 정수가 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누면

$-2<x\le-\sqrt{3}$일 때, $3\le x^2<4$이므로

$y=[x^2]=3$

$-\sqrt{3}<x\le-\sqrt{2}$일 때, $2\le x^2<3$이므로

$y=[x^2]=2$

$-\sqrt{2}<x\le-1$일 때, $1\le x^2<2$이므로

$y=[x^2]=1$

$-1<x<1$일 때, $0\le x^2<1$이므로

$y=[x^2]=0$

$1\le x<\sqrt{2}$일 때, $1\le x^2<2$이므로

$y=[x^2]=1$

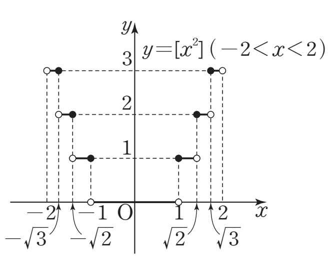
$\sqrt{2}\le x<\sqrt{3}$일 때, $2\le x^2<3$이므로

$y=[x^2]=2$

$\sqrt{3}\le x<2$일 때, $3\le x^2<4$이므로

$y=[x^2]=3$

따라서 함수 $y=[x^2]\,(-2<x<2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



13-2 답 풀이 참조

합성함수의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}h(x)&=(f\circ g\circ f)(x)\\&=f(g(f(x)))\\&=f(g(-x))\\&=f([-x])=-[-x]\end{aligned}$$

$\therefore\ h(x)=-[-x]$

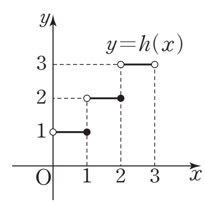
$0<x<3$에서 $-3<-x<0$이므로

(i) $-3<-x<-2$, 즉 $2<x<3$일 때,
$[-x]=-3$이므로 $h(x)=3$

(ii) $-2\le-x<-1$, 즉 $1<x\le2$일 때,
$[-x]=-2$이므로 $h(x)=2$

(iii) $-1\le-x<0$, 즉 $0<x\le1$일 때,
$[-x]=-1$이므로 $h(x)=1$

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



13-3 답 (1) 0 (2) $\{-1,\ 0\}$

(1) $[x]=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}y&=2X^2-3X+1\\&=2\left(X^2-\frac{3}{2}X+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{8}+1\\&=2\left(X-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

그런데 X는 정수이므로

(i) $X=0$일 때, $y=1$

(ii) $X=1$일 때, $y=0$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $X=1$, 즉 $1\le x<2$일 때 최솟값 0을 가진다.

(2) 정수 n에 대하여

(i) $x=n$일 때,

$$\begin{aligned}f(n)&=[n]+[-n]\\&=n+(-n)=0\end{aligned}$$

(ii) $n<x<n+1$일 때,

$-n-1<-x<-n$이므로

$[x]=n,\ [-x]=-n-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=[x]+[-x]\\&=n+(-n-1)=-1\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{-1,\ 0\}$이다.

⊕ 보충 설명

(1) $X=[x]$는 정수이므로 $X=\frac{3}{4}$이 될 수 없음에 주의한다.

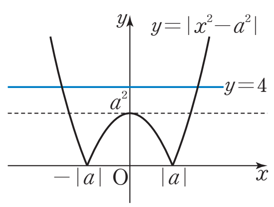
예제 14 함수의 그래프를 이용한 방정식의 실근의 개수 343쪽

14-1 답 $-2<a<2$

x에 대한 방정식 $|x^2-a^2|=4$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-a^2|$의 그래프와 직선 $y=4$의 교점의 개수와 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=|x^2-a^2|$의 그래프와 직선 $y=4$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. 이때

$$y=|x^2-a^2|=\begin{cases} x^2-a^2 & (x\le -|a| \text{ 또는 } x\ge |a|) \\ -x^2+a^2 & (-|a|<x<|a|) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=|x^2-a^2|$의 그래프와 직선 $y=4$를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$a^2<4$, $(a+2)(a-2)<0$ $\qquad\therefore -2<a<2$

14-2 답 $1<k<\frac{5}{4}$

집합 A는 x에 대한 방정식 $|x^2-1|=x+k$의 실근의 집합이다.

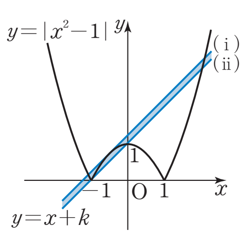
$n(A)=4$이므로 x에 대한 방정식 $|x^2-1|=x+k$는 서로 다른 네 실근을 가진다.

즉, 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 서로 다른 4개의 교점을 가진다.

이때

$$y=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+1 & (-1<x<1) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=x+k$를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



(i) 함수 $y=-x^2+1$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

이차방정식 $-x^2+1=x+k$, 즉

$x^2+x+k-1=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=1-4(k-1)=0$ $\qquad\therefore k=\frac{5}{4}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 두 점 $(0, 1)$, $(-1, 0)$을 지날 때,

$1=0+k$ $\qquad\therefore k=1$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$1<k<\frac{5}{4}$

14-3 답 ②

주어진 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2, 1이므로 방정식 $f(x)=0$의 두 근은 -2와 1이다.

방정식 $(f\circ f)(x)=0$, 즉 $f(f(x))=0$의 실근은

$f(x)=-2$ 또는 $f(x)=1$

을 만족시키는 x의 값과 같다.

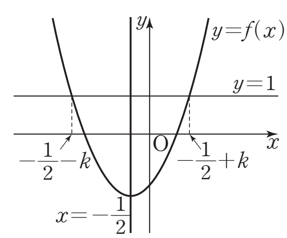
(i) $f(x)=-2$일 때, $x=-\frac{1}{2}$

(ii) $f(x)=1$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=-\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=1$의 두 실근은 각각

$-\frac{1}{2}+k$, $-\frac{1}{2}-k$ $(k>0)$

로 나타낼 수 있다.



따라서 방정식 $(f\circ f)(x)=0$의 모든 실근의 합은

$-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}+k\right)+\left(-\frac{1}{2}-k\right)=-\frac{3}{2}$

기본 다지기 344쪽~345쪽

1 4	**2** (1) 3 (2) 4	**3** 5	**4** 1
5 6	**6** (1) $h(x)=2x+2$ (2) $h(x)=2x+10$		
7 4	**8** ⑤	**9** ⑤	**10** $x\le -2$ 또는 $x\ge 0$

1 함수 $f(x)$는 상수함수이므로 $f(0)=f(2)=f(4)$

$f(0)=2$, $f(2)=4+2a+b$, $f(4)=16+4a+b$

$f(0)=f(2)$에서 $2a+b=-2$ …… ㉠
$f(0)=f(4)$에서 $4a+b=-14$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-6,\ b=10$
$\therefore\ a+b=4$

2 (1) $f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$에서
$2x^2+x-2=x,\ 2x^2-2=0$
$x^2-1=0,\ (x+1)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$
따라서 구하는 집합 X는 집합 $\{-1,\ 1\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로
$\{-1\},\ \{1\},\ \{-1,\ 1\}$
의 3개이다.
(2) 함수 $g\circ f$가 항등함수이므로 $(g\circ f)(2)=2$에서
$g(f(2))=g(-a)=2$
즉, $a^2-2a+b=2$ …… ㉠
$(g\circ f)(3)=3$에서
$g(f(3))=g(0)=3$
$\therefore\ b=3$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$a^2-2a+3=2,\ (a-1)^2=0 \qquad \therefore\ a=1$
$\therefore\ a+b=4$

3 $f(1)=3,\ f(2)=4$이고 함수 f가 일대일대응이므로 $f(5)$의 값은 집합 X의 원소 중에서 3, 4를 제외한 1, 2, 5 중 하나이다.
(i) $f(5)=1$일 때,
$1=(f\circ f\circ f)(5)=f(f(f(5)))$
$=f(f(1))=f(3)$
함수 f가 일대일대응이라는 조건에 모순이므로
$f(5)\neq 1$
(ii) $f(5)=2$일 때,
$1=(f\circ f\circ f)(5)=f(f(f(5)))$
$=f(f(2))=f(4)$
$\therefore\ f(3)=5$
(iii) $f(5)=5$일 때,
$1=(f\circ f\circ f)(5)=f(f(f(5)))$
$=f(f(5))$
$=f(5)$
$f(5)=5$라는 가정에 모순이므로 $f(5)\neq 5$
(i)~(iii)에서 $f(3)=5$

4 함수 $f(x)=ax\ (a\neq 0)$에서
$f(1)=a,\ f(2)=2a,\ f(3)=3a,\ f(4)=4a$
이므로 함수 f의 치역은
$\{a,\ 2a,\ 3a,\ 4a\}$
이때 합성함수 $g\circ f$가 정의되려면
$\{a,\ 2a,\ 3a,\ 4a\}\subset X$이어야 한다.
즉, $\{a,\ 2a,\ 3a,\ 4a\}\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 $a\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$
따라서 상수 a의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이다.
(i) $a=1$일 때,
$\{a,\ 2a,\ 3a,\ 4a\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}=X$
(ii) $a=2$일 때,
$\{a,\ 2a,\ 3a,\ 4a\}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}\not\subset X$
(iii) $a=3$일 때,
$\{a,\ 2a,\ 3a,\ 4a\}=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}\not\subset X$
(iv) $a=4$일 때,
$\{a,\ 2a,\ 3a,\ 4a\}=\{4,\ 8,\ 12,\ 16\}\not\subset X$
(i)~(iv)에서 $a=1$

⊕ 보충 설명

두 함수 $f,\ g$의 합성함수 $g\circ f$가 정의되기 위해서는 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합이어야 한다.
예를 들어 함수 $f(x)=x,\ g(x)=\frac{1}{x}$에서 f의 치역은 실수 전체의 집합 R이지만 함수 g의 정의역은 0이 아닌 실수 전체의 집합 $R-\{0\}$이므로 합성함수 $g\circ f$는 정의되지 않는다.

5 함수 f의 정의에 의하여
$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=1$
이때 $g(1)=3$이고 $f\circ g=g\circ f$에서
$f(g(x))=g(f(x))$ …… ㉠
(i) ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(g(1))=g(f(1))$
$f(3)=g(2) \qquad \therefore\ g(2)=4$
(ii) ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$f(g(2))=g(f(2))$
$f(4)=g(3) \qquad \therefore\ g(3)=1$
(iii) ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면
$f(g(3))=g(f(3))$
$f(1)=g(4) \qquad \therefore\ g(4)=2$
(i)~(iii)에서 $g(2)+g(4)=4+2=6$

⊕ 보충 설명

일반적으로는 합성함수에서 교환법칙이 성립하지 않는다.

6 (1) $(f\circ h)(x)=g(x)$에서

$f(h(x))=g(x)$

$2h(x)-6=4x-2$

$\therefore h(x)=2x+2$

(2) $(h\circ f)(x)=g(x)$에서

$h(f(x))=g(x)$

$\therefore h(2x-6)=4x-2$

이때 $2x-6=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+6}{2}$이므로

$h(t)=4\times\dfrac{t+6}{2}-2=2t+10$

$\therefore h(x)=2x+10$

7 $f(6)=2$이므로 $f^{-1}(2)=6$

$\therefore (g\circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))=g(6)=2$

또한 $g(6)=2$이므로 $g^{-1}(2)=6$

$\therefore (f\circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))=f(6)=2$

$\therefore (g\circ f^{-1})(2)+(f\circ g^{-1})(2)=2+2=4$

8 $g(x)=x+4$이므로

$(f^{-1}\circ g)(0)=f^{-1}(g(0))=f^{-1}(4)$

이때 $f^{-1}(4)=k$라고 하면 $f(k)=4$

(i) $k\ge0$이면 $f(k)=k^2=4$이므로

$k=2$ ($\because k\ge0$)

(ii) $k<0$이면 $f(k)=k<0$이므로

$f(k)=4$에 모순이다.

(i), (ii)에서 $f^{-1}(4)=2$이므로

$(f^{-1}\circ g)(0)=f^{-1}(4)=2$

다른 풀이

$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & (x\ge0)\\ x & (x<0)\end{cases}$이므로

$(f^{-1}\circ g)(0)=f^{-1}(g(0))=f^{-1}(4)=2$

9 (i) $f(x)$가 일차식일 때,

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$) ······ ㉠

라고 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=f(ax+b)$

$=a(ax+b)+b$

$=a^2x+ab+b=x$

$\therefore a^2=1,\ ab+b=0$ ······ ㉡

이때 $f(0)=1$이므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=b$ $\quad\therefore b=1$

$b=1$을 ㉡에 대입하면

$a+1=0$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-x+1$

(ii) $f(x)$가 이차식일 때,

$f(x)=qx^2+rx+s$ (q, r, s는 상수, $q\neq0$)라고 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=f(qx^2+rx+s)$

$=q(qx^2+rx+s)^2+r(qx^2+rx+s)+s$

이때 $q\neq0$이므로 합성함수 $(f\circ f)(x)$의 최고차항의 차수가 4이다.

따라서 $(f\circ f)(x)=x$라는 조건에 모순이다.

즉, $f(x)$가 2차 이상의 다항식일 때에는 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시킬 수 없다.

(i), (ii)에서 $f(x)=-x+1$

$\therefore f(-1)=-(-1)+1=2$

다른 풀이

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여

$(f\circ f)(x)=x$이므로 $f\circ f$는 항등함수이다.

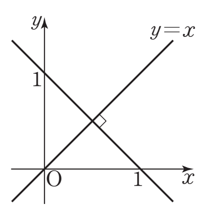
$\therefore f=f^{-1}$

즉, 함수 f와 그 역함수 f^{-1}가 서로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또한 $(f\circ f)(x)=x$, $f(0)=1$에서

$f(f(0))=0$ $\quad\therefore f(1)=0$

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$을 지나고, 직선 $y=x$에 대칭인 다항함수의 그래프는 직선, 즉 일차함수의 그래프뿐이다.



따라서 $f(x)=-x+1$이므로

$f(-1)=2$

10 부등식 $(f\circ g)(x)\ge0$에서

$f(g(x))\ge0$

$\therefore f(x+1)\ge0$

$f(x+1)\ge0$에서 $x+1=t$로 놓으면 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(t)\ge0$의 해는 $t\le-1$ 또는 $t\ge1$이므로

$x+1\le-1$ 또는 $x+1\ge1$

$\therefore x\le-2$ 또는 $x\ge0$

다른 풀이

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+1)(x-1)\ (a>0)$

이라고 하면

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
$$=f(x+1)=ax(x+2)$$

따라서 부등식 $(f\circ g)(x)\ge 0$, 즉

$ax(x+2)\ge 0\ (a>0)$의 해는

$x\le -2$ 또는 $x\ge 0$

실력 다지기 346쪽～347쪽

11 5 **12** 4 **13** ① **14** ⑤ **15** 120

16 (1) 16 (2) 2 **17** 32

18 $\left\{(f\circ f)(x)\,\middle|\,0\le (f\circ f)(x)\le \frac{3}{4}\right\}$ **19** ⑤

20 3

11 **접근 방법** | 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 항등함수는 $f(x)=x$, 상수함수는 $f(x)=k$ (k는 상수)가 성립한다.

$g(x)$가 항등함수이므로 $g(3)=3$

즉, 조건 ㈎에서 $f(2)=h(6)=3$

한편, $f(x)$가 일대일대응이고 $f(2)=3$이므로 조건 ㈏에서 $3f(3)=f(6)$

즉, $f(3)=2$

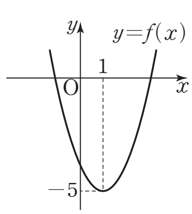
또한 $h(x)$가 상수함수이므로 $h(2)=h(6)=3$이다.

$\therefore\ f(3)+h(2)=2+3=5$

12 **접근 방법** | 일대일대응은 일대일함수이면서 치역과 공역이 서로 같은 함수이다. 이때 일대일함수의 그래프는 x축에 평행한 직선 $y=b$ (b는 치역의 원소)와 오직 한 점에서 만난다.

$$f(x)=x^2-2x-4$$
$$=(x^2-2x+1)-5$$
$$=(x-1)^2-5$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $f(x)$의 정의역은 $X=\{x\,|\,x\ge a\}$이고, $f(x)$는 집합 X에서 X로의 일대일함수이므로

$a\ge 1$

또한 공역 $X=\{x\,|\,x\ge a\}$와 치역 $\{y\,|\,y\ge f(a)\}$가 서로 같으므로

$f(a)=a$

$a^2-2a-4=a$, $a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a\ge 1)$

13 **접근 방법** | 함수 f와 그 역함수 f^{-1} 사이에는 $f(x)=y \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$가 성립함을 이용한다.

$f^{-1}(x)=x^2$에서

$f(x^2)=x$ …… ㉠

$(f\circ g^{-1})(x^2)=x$에서

$f(g^{-1}(x^2))=x$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x^2)=f(g^{-1}(x^2))$

f는 일대일대응이므로

$x^2=g^{-1}(x^2)$ $\quad\therefore\ g(x^2)=x^2$

$$\therefore\ (f\circ g)(20)=f(g(20))$$
$$=f(20)\ (\because\ g(20)=20)$$
$$=\sqrt{20}\ (\because\ ㉠)$$
$$=2\sqrt{5}$$

14 **접근 방법** | 함수 $f(x)$는 절댓값 기호 안의 식의 값을 0이 되게 하는 x의 값 $x=2$를 기준으로 나눈 범위에서 각각 다른 식을 가진다. 이때 두 식이 모두 x에 대한 일차식이므로 각 범위에서의 함수의 그래프는 직선이 되는데, 두 직선의 기울기의 부호가 다를 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프는 ∨자형 또는 ∧자형 꼴이 되고 기울기가 0인 경우 x축에 평행한 직선이 된다. 그런데 ∨자형 또는 ∧자형 꼴의 그래프나 x축에 평행한 직선은 일대일대응의 그래프가 아니므로 이 경우 함수 $f(x)$의 역함수는 존재하지 않는다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 일대일대응이 되기 위한 두 직선의 기울기의 부호를 생각해 본다.

$$f(x)=\begin{cases} ax+(x-2)+4 & (x\ge 2) \\ ax+(-x+2)+4 & (x<2) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} (a+1)x+2 & (x\ge 2) \\ (a-1)x+6 & (x<2) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해서는 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 두 직선 $y=(a+1)x+2$, $y=(a-1)x+6$의 기울기가 모두 양수이거나 모두 음수이어야 한다.

즉, 두 직선의 기울기의 곱이 0보다 커야 하므로

$(a+1)(a-1)>0$

$\therefore$ $a<-1$ 또는 $a>1$

보충 설명

함수가 일대일대응일 때에만 역함수가 존재하므로 역함수가 존재하기 위한 조건은 일대일대응이 되기 위한 조건과 같다.

15 **접근 방법 |** 함수 f의 역함수가 존재하기 위한 필요충분 조건은 함수 f가 일대일대응인 것이다. 또한 $X\cup Y=U$, $X\cap Y=\varnothing$이므로 집합 U의 원소 6개 중에서 정의역 X의 원소 3개를 뽑으면 남은 3개의 원소는 공역 Y의 원소가 된다.

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로 $n(U)=6$

$X\cup Y=U$, $X\cap Y=\varnothing$이므로

$n(X\cup Y)=6$, $n(X\cap Y)=0$

그런데 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 역함수를 가지려면 일대일대응이어야 하므로

$n(X)=n(Y)=3$

이때 집합 U의 원소 6개 중에서 정의역 X의 원소 3개를 뽑는 방법의 수는

${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$ …… ㉠

이 각각의 경우에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일대응이 되도록 정의역 X의 원소 3개를 공역 Y의 원소 3개에 대응시키는 방법의 수는

$3!=6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 함수 f의 개수는

$20\times6=120$

16 **접근 방법 |** (1) $f(x)=t$로 놓았을 때, 이차함수 $g(t)$의 최댓값이 10이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하는 것과 같다.

(2) 함수 $f(x)=|x-2|-5$를 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값 $x=2$를 기준으로 x의 값의 범위를 나누어서 나타낸 후, 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 식을 구한다.

(1) $f(x)=x^2-6x+12$

$=(x-3)^2+3$

이므로 $f(x)=t$로 놓으면

$t\geq3$

이때 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)$이고

$g(t)=-2t^2+4t+k$

$=-2(t-1)^2+k+2\ (t\geq3)$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=3$일 때 최댓값 10을 가진다.

$-2(3-1)^2+k+2=10$

$\therefore$ $k=16$

(2) $f(x)=|x-2|-5$

$=\begin{cases} x-7 & (x\geq2) \\ -x-3 & (x<2) \end{cases}$

$g(x)=x^2+6x+8$

$=(x+3)^2-1$

이므로 $0\leq x\leq5$에서

$(g\circ f)(x)$

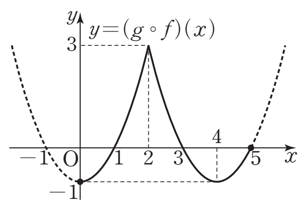
$=g(f(x))$

$=\{f(x)+3\}^2-1$

$=\begin{cases} \{(x-7)+3\}^2-1 & (2\leq x\leq5) \\ \{(-x-3)+3\}^2-1 & (0\leq x<2) \end{cases}$

$=\begin{cases} (x-4)^2-1 & (2\leq x\leq5) \\ x^2-1 & (0\leq x<2) \end{cases}$

합성함수 $y=(g\circ f)(x)\ (0\leq x\leq5)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

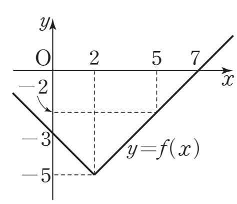


따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$3+(-1)=2$

다른 풀이

(2) 함수 $f(x)=\begin{cases} x-7 & (x\geq2) \\ -x-3 & (x<2) \end{cases}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=t$라고 하면 $0\leq x\leq5$에서

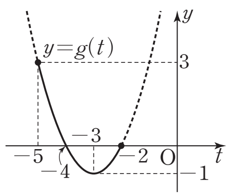
$-5\leq t\leq-2$

이때 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)$이고

$g(t)=t^2+6t+8$

$=(t+3)^2-1\ (-5\leq t\leq-2)$

$-5\leq t\leq-2$에서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로



함수 $y=g(t)$의 치역은

$\{y\,|\,-1\le y\le 3\}$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$3+(-1)=2$

보충 설명

제한된 범위에서의 이차함수의 최대, 최소

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최대, 최소는 다음과 같다.

(1) 축 $x=p$가 범위 $\alpha\le x\le\beta$에 포함될 때,

(i) $a>0$이면

최솟값은 $f(p)=q$이고 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값이다.

(ii) $a<0$이면

최댓값은 $f(p)=q$이고 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 작은 값이 최솟값이다.

(2) 축 $x=p$가 범위 $\alpha\le x\le\beta$에 포함되지 않을 때,

$f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값이고, 작은 값이 최솟값이다.

17

접근 방법 | 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하면 두 점 B, C의 좌표를 구할 수 있다. 또한 두 점 B, D의 y좌표가 같음을 이용하면 점 D의 좌표를 구할 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B와 두 점 C, D는 각각 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

즉, 점 $A(2,\ 4)$이므로 점 $B(4,\ 2)$이고, 두 점 B, D의 y좌표가 같으므로 점 D의 y좌표는 2이다.

이때 $f(-4)=2$이므로 점 D의 좌표는

$(-4,\ 2)$

$\therefore\ C(2,\ -4)$

$\overline{BD}=|4-(-4)|=8$이므로

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times 8\times(4-2)=8$

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times 8\times\{2-(-4)\}=24$

$\therefore\ \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD=8+24=32$

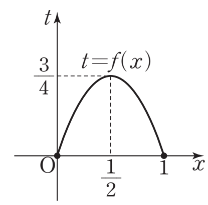
보충 설명

사다리꼴의 넓이를 구하는 공식을 이용하려고 하면 계산이 복잡해지므로 사다리꼴을 삼각형 2개로 나누어서 넓이를 구한다.

18

접근 방법 | 함수 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=t$로 놓고 변수 t의 값의 범위를 구해 본다. 이때 합성함수의 정의에 의하여 t의 값의 범위의 집합은 함수 $f(x)$ $(0\le x\le 1)$의 치역을 뜻하고, 함수 $f(t)$에서는 정의역을 뜻한다.

$f(x)=t$로 놓으면 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$0\le t\le\frac{3}{4}$

따라서 함수

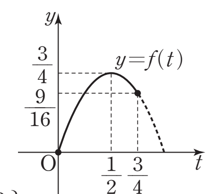
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(t)$

에서 함수 $f(t)$의 정의역이 $\left\{t\,\middle|\,0\le t\le\frac{3}{4}\right\}$이므로

$f(0)=0$

$f\left(\frac{3}{4}\right)=3\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$

함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉,



$0\le y\le\frac{3}{4}$

따라서 구하는 함수의 치역은

$\left\{(f\circ f)(x)\,\middle|\,0\le(f\circ f)(x)\le\frac{3}{4}\right\}$

19

접근 방법 | 구하는 집합의 원소의 개수는 방정식 $(f\circ f)(x)=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 두 교점의 x좌표를 각각 0, a $(a>0)$라고 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x)$에서

$f(x)=t$로 놓으면

$f(t)=t$

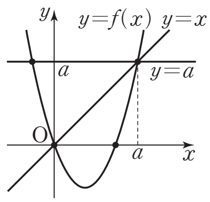
$\therefore\ t=0$ 또는 $t=a$

즉, $f(x)=0$ 또는 $f(x)=a$이다.

(i) $f(x)=0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=0$(x축)이 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(ii) $f(x)=a$일 때,
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(i), (ii)에서 방정식 $(f\circ f)(x)=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로 구하는 집합의 원소의 개수는 4이다.

⊕ 보충 설명

함수 $y=f(x)$의 그래프는 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.
따라서 $(f\circ f)(x)=f(x)$에서 양변에 f^{-1}를 합성하여 $f(x)=x$로 바꾸어 풀 수 없다.

20 **접근 방법** | 두 함수 $y=(f\circ f)(x)$, $y=\frac{1}{5}|x|$의 그래프의 교점의 개수를 구하면 된다.

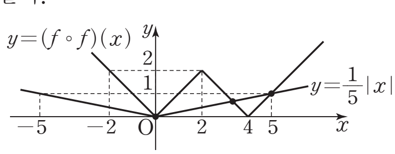
방정식 $(f\circ f)(x)=\frac{1}{5}|x|$의 실근의 개수는 두 함수 $y=(f\circ f)(x)$, $y=\frac{1}{5}|x|$의 그래프의 교점의 개수와 같다. 이때

$$f(x)=|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x\ge 2) \\ -x+2 & (x<2) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))\\&=\begin{cases} f(x)-2 & (f(x)\ge 2) \\ -f(x)+2 & (f(x)<2) \end{cases}\\&=\begin{cases} x-4 & (x\ge 4) \\ -x+4 & (2\le x<4) \\ x & (0<x<2) \\ -x & (x\le 0) \end{cases}\end{aligned}$$

두 함수 $y=(f\circ f)(x)$, $y=\frac{1}{5}|x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $(f\circ f)(x)=\frac{1}{5}|x|$의 실근의 개수는 3이다.

기출 다지기 348쪽

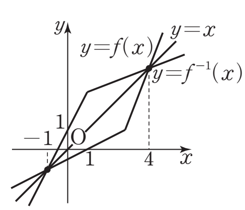
21 ④ **22** ④ **23** ② **24** 17

21 **접근 방법** | 역함수를 구하는 방법은 $y=f(x)$를 x에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 변형한 후 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타내면 된다.

$y=f(2x+3)$에서 x, y를 서로 바꾸면
$x=f(2y+3)$
$2y+3=f^{-1}(x)$
이때 $f^{-1}=g$이므로
$2y+3=g(x)$
$y=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$
따라서 함수 $y=f(2x+3)$의 역함수는
$y=\frac{1}{2}g(x)-\frac{3}{2}$
즉, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$이므로
$a+b=-1$

22 **접근 방법** | 함수 $y=f(x)$의 그래프가 증가하고 있으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 모두 직선 $y=x$ 위에 있다.

$\{f(x)\}^2=f(x)f^{-1}(x)$에서
$f(x)\{f(x)-f^{-1}(x)\}=0$
$\therefore$ $f(x)=0$ 또는 $f(x)=f^{-1}(x)$
(i) $f(x)=0$일 때,
$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$
(ii) $f(x)=f^{-1}(x)$일 때,
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같다.



즉, $f(x)=f^{-1}(x)$를 만족시키는 x의 값은
$f(x)=x$를 만족시키는 x의 값과 같으므로
$x=-1$ 또는 $x=4$
(i), (ii)에서 모든 실수 x의 값의 합은
$1+(-1)+4=4$

23 **접근 방법** | $a, b\in A$에 대하여 $f(f(a))=a$에서 $f(a)=a$인 경우와 $f(a)=b$인 경우로 나누어서 생각한다. 특히, $f(a)=b$인 경우는 $f(f(a))=f(b)$인데 $f(f(a))=a$가 성립하려면 $f(b)=a$이어야 한다.

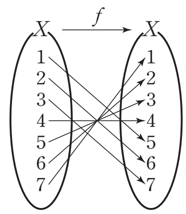
(i) 5개의 원소 모두 자기 자신에 대응하는 경우
f는 항등함수이므로 그 개수는 1
(ii) 자기 자신에 대응하는 원소가 3개이고, 2개가 서로 짝 지어 대응하는 경우
집합 A의 5개의 원소 중에서 2개를 택하여 서로 짝 지어 대응시키면 되므로 함수의 개수는
${}_5C_2=10$
(iii) 자기 자신에 대응하는 원소가 1개이고, 2개씩 2쌍이 서로 짝 지어 대응하는 경우
집합 A의 5개의 원소 중에서 4개의 원소를 2개, 2개의 두 조로 나눈 후 서로 짝 지어 대응시키면 되므로 함수의 개수는
${}_5C_2\times{}_3C_2\times\dfrac{1}{2!}=15$
(i)~(iii)에서 일대일대응 f의 개수는
$1+10+15=26$

24 **접근 방법** | 조건 ㈎에서 함수 f는 일대일함수이고, 조건 ㈏의 주어진 식에 $x=1$, $x=2$, $x=3$을 차례대로 대입해서 규칙성을 찾는다.

조건 ㈎에 의하여 함수 f는 X에서 X로의 일대일함수이므로 함수 f는 일대일대응이다.
또한 집합 X의 임의의 원소 x에 대하여
$1\le f(x)\le 7$, $1\le f(f(x))\le 7$ …… ㉠
조건 ㈏의 식에 $x=3$을 대입하면
$f(f(3))=f(3)-6$ …… ㉡
㉠에 의하여 $1\le f(3)-6$
즉, $f(3)\ge 7$이므로 $f(3)=7$
$f(3)=7$을 ㉡에 대입하면
$f(7)=7-6=1$
조건 ㈏의 식에 $x=2$를 대입하면
$f(f(2))=f(2)-4$ …… ㉢
$f(7)=1$이므로 ㉠에 의하여
$2\le f(2)-4$
즉, $f(2)\ge 6$이고 $f(3)=7$이므로 $f(2)=6$
$f(2)=6$을 ㉢에 대입하면
$f(6)=6-4=2$
조건 ㈏의 식에 $x=1$을 대입하면
$f(f(1))=f(1)-2$ …… ㉣
$f(7)=1$, $f(6)=2$이므로 ㉠에 의하여
$3\le f(1)-2$
즉, $f(1)\ge 5$이고 $f(2)=6$, $f(3)=7$이므로 $f(1)=5$
$f(1)=5$를 ㉣에 대입하면
$f(5)=5-2=3$
따라서 $f(1)=5$, $f(2)=6$, $f(3)=7$, $f(5)=3$, $f(6)=2$, $f(7)=1$이므로
$f(4)=4$
$\therefore f(2)+f(3)+f(4)=6+7+4=17$

보충 설명

함수 f는 다음 그림과 같다.



09. 유리식과 유리함수

개념 콕콕 1 유리식 357쪽

1 답 (1) $\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$ (2) $x-2$

(1) $\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}$

$=\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$

(2) $\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-3x}=\frac{x(x^2-5x+6)}{x(x-3)}$

$=\frac{x(x-2)(x-3)}{x(x-3)}$

$=x-2$

2 답 (1) $\frac{a+3}{(a-2)(a-4)(a+3)}$, $\frac{a-2}{(a-2)(a-4)(a+3)}$

(2) $\frac{(x-1)(x-5)}{(x+1)(x+2)(x-5)}$, $\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x-5)}$

(1) $a^2-6a+8=(a-2)(a-4)$,
$a^2-a-12=(a+3)(a-4)$이므로 두 유리식을 통분하면

$\frac{1}{a^2-6a+8}=\frac{a+3}{(a-2)(a-4)(a+3)}$,

$\frac{1}{a^2-a-12}=\frac{a-2}{(a-2)(a-4)(a+3)}$

(2) $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$,
$x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$이므로 두 유리식을 통분하면

$\frac{x-1}{x^2+3x+2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x+1)(x+2)(x-5)}$,

$\frac{x-2}{x^2-3x-10}=\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x-5)}$

3 답 (1) $\frac{5}{3-x}$ (2) $\frac{x+1}{x+2}$ (3) $\frac{3(x+1)}{x+5}$

(1) $\frac{1}{x-3}+\frac{6}{3-x}=\frac{(3-x)+6(x-3)}{(x-3)(3-x)}$

$=\frac{5x-15}{(x-3)(3-x)}$

$=\frac{5(x-3)}{(x-3)(3-x)}$

$=\frac{5}{3-x}$

(2) $\frac{x-2}{x-5}-\frac{4x+1}{x^2-3x-10}$

$=\frac{x-2}{x-5}-\frac{4x+1}{(x-5)(x+2)}$

$=\frac{(x-2)(x+2)-(4x+1)}{(x-5)(x+2)}$

$=\frac{x^2-4x-5}{(x-5)(x+2)}$

$=\frac{(x-5)(x+1)}{(x-5)(x+2)}$

$=\frac{x+1}{x+2}$

(3) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x}\div\frac{x^2+4x-5}{x^2+7x+12}\times\frac{3x^2+3x}{x^2+2x-8}$

$=\frac{(x-2)(x-1)}{x(x+3)}\times\frac{(x+3)(x+4)}{(x-1)(x+5)}\times\frac{3x(x+1)}{(x+4)(x-2)}$

$=\frac{3(x+1)}{x+5}$

4 답 (1) $\frac{2}{(x+1)(x+3)}$ (2) $\frac{5}{(x+2)(x+7)}$ (3) $\frac{x-7}{(x+1)(x-3)}$ (4) $\frac{x-6}{(x+2)(x-2)}$

(1) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

$=\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}$

$=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$

(2) $\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{3}{(x+4)(x+7)}$

$=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}$

$=\frac{x+7-(x+2)}{(x+2)(x+7)}=\frac{5}{(x+2)(x+7)}$

(3) $\frac{x+3}{x+1}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x+1+2}{x+1}-\frac{x-3+1}{x-3}$

$=1+\frac{2}{x+1}-\left(1+\frac{1}{x-3}\right)$

$=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-3}$

$=\frac{2(x-3)-(x+1)}{(x+1)(x-3)}$

$=\frac{x-7}{(x+1)(x-3)}$

(4) $\frac{x^2+5x+8}{x+2}-\frac{x^2+x-5}{x-2}$

$=\frac{(x+2)(x+3)+2}{x+2}-\frac{(x-2)(x+3)+1}{x-2}$

$=x+3+\frac{2}{x+2}-(x+3)-\frac{1}{x-2}$

$=\frac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{x-6}{(x+2)(x-2)}$

5 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{13}{25}$

$x:y=4:3$이므로 $x=4k$, $y=3k$ $(k\neq0)$로 놓으면

(1) $\frac{2x-y}{x+2y}=\frac{8k-3k}{4k+6k}=\frac{5k}{10k}=\frac{1}{2}$

(2) $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}=\frac{16k^2-12k^2+9k^2}{16k^2+9k^2}$

$=\frac{13k^2}{25k^2}=\frac{13}{25}$

예제 01 유리식의 사칙연산 359쪽

01-1 답 (1) $\frac{x-4}{x-1}$ (2) $x+2$ (3) $\frac{1}{(x-2)(x+2)}$ (4) $\frac{x+1}{x+2}$

(1) $\frac{x-3}{x+2}+\frac{2x-11}{x^2+x-2}$

$=\frac{x-3}{x+2}+\frac{2x-11}{(x+2)(x-1)}$

$=\frac{(x-3)(x-1)+2x-11}{(x+2)(x-1)}$

$=\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x-1)}$

$=\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x-1)}=\frac{x-4}{x-1}$

(2) $\frac{2x^2+3}{x-2}-\frac{x^2+7}{x-2}=\frac{(2x^2+3)-(x^2+7)}{x-2}$

$=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=x+2$

(3) $\frac{x-1}{x^2-2x}\times\frac{x}{x^2+x-2}$

$=\frac{x-1}{x(x-2)}\times\frac{x}{(x+2)(x-1)}$

$=\frac{1}{(x-2)(x+2)}$

(4) $\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-2}\div\frac{x+3}{x-1}=\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-2}\times\frac{x-1}{x+3}$

$=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)(x-1)}\times\frac{x-1}{x+3}$

$=\frac{x+1}{x+2}$

01-2 답 (1) $\frac{2(x^3-x+1)}{(x-1)(x+1)}$ (2) $\frac{8}{x^8-1}$

(1) $\frac{x^2-3x+3}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)+1}{x-1}$

$=x-2+\frac{1}{x-1}$

$\frac{x^2+3x+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x+2)-1}{x+1}$

$=x+2-\frac{1}{x+1}$

이므로

(주어진 식)

$=\left(x-2+\frac{1}{x-1}\right)+\left(x+2-\frac{1}{x+1}\right)$

$=2x+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

$=\frac{2x(x-1)(x+1)+(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\frac{2(x^3-x+1)}{(x-1)(x+1)}$

(2) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}$

$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}$

$=\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}$

$=2\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)-\frac{4}{x^4+1}$

$=\frac{4}{x^4-1}-\frac{4}{x^4+1}=\frac{8}{x^8-1}$

01-3 답 (1) 5 (2) 4

(1) 주어진 등식의 좌변을 통분하여 계산하면

$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}$

$=\frac{ax(x+1)+b(x+1)(x-1)+cx(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$

$=\frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x^3-x}$

주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+b+c=0$, $a-c=2$, $-b=-3$

앞의 세 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2},\ b=3,\ c=-\frac{5}{2}$

$\therefore\ a+b-c=-\frac{1}{2}+3-\left(-\frac{5}{2}\right)=5$

(2) 주어진 등식의 좌변을 통분하여 계산하면

$\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$

$=\frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\frac{(a+b)x^2-(a-b-c)x+(a+c)}{x^3+1}$

주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+b=3,\ a-b-c=0,\ a+c=0$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2,\ c=-1$

$\therefore\ a+b-c=1+2-(-1)=4$

예제 02 부분분수로의 변형 361쪽

02-1 답 (1) $\frac{6}{x(x+6)}$ (2) $\frac{3}{x(x+9)}$

(1) $\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{2}{(x+4)(x+6)}$

$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}=\frac{(x+6)-x}{x(x+6)}=\frac{6}{x(x+6)}$

(2) $\frac{1}{x(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+9)}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+9}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+9}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+9}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{(x+9)-x}{x(x+9)}=\frac{3}{x(x+9)}$

02-2 답 20

$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{3}{(x+3)(x+6)}+\frac{4}{(x+6)(x+10)}$

$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+10}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}=\frac{(x+10)-x}{x(x+10)}=\frac{10}{x(x+10)}$

따라서 $\frac{10}{x(x+10)}=\frac{n}{x(x+m)}$이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로 $m=10,\ n=10$

$\therefore\ m+n=10+10=20$

02-3 답 39

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{19\times20}$

$=\frac{1}{2-1}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3-2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4-3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\frac{1}{20-19}\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)$

$=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

따라서 $m=20,\ n=19$이므로

$m+n=20+19=39$

예제 03 번분수식의 계산 363쪽

03-1 답 (1) $\frac{x-a}{a(x+a)}$ (2) $x+2$

(1) $\frac{x+a}{a}-\frac{2x}{x+a}=\frac{(x+a)^2-2ax}{a(x+a)}$

$=\frac{x^2+a^2}{a(x+a)}$

$\therefore\ \frac{\frac{x+a}{a}-\frac{2x}{x+a}}{\frac{x^2+a^2}{x-a}}=\frac{\frac{x^2+a^2}{a(x+a)}}{\frac{x^2+a^2}{x-a}}$

$=\frac{(x-a)(x^2+a^2)}{a(x+a)(x^2+a^2)}$

$=\frac{x-a}{a(x+a)}$

(2) $1+\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=1+\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}$

$=1+\frac{1}{1-\frac{x}{x+1}}$

$$=1+\frac{1}{\frac{1}{x+1}}$$
$$=1+(x+1)=x+2$$

03-2 답 (1) $\frac{4a}{(a+1)^2}$ (2) -1

(1) $$1-\frac{\frac{1}{a}-\frac{2}{a+1}}{\frac{1}{a}-\frac{2}{a-1}}=1-\frac{\frac{a+1-2a}{a(a+1)}}{\frac{a-1-2a}{a(a-1)}}$$
$$=1-\frac{\frac{-(a-1)}{a(a+1)}}{\frac{-(a+1)}{a(a-1)}}$$
$$=1-\frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}$$
$$=\frac{(a+1)^2-(a-1)^2}{(a+1)^2}$$
$$=\frac{4a}{(a+1)^2}$$

(2) $$\frac{\frac{a-b}{a}-\frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}}=\frac{\frac{b(a-b)-a(a+b)}{ab}}{\frac{b(a+b)+a(a-b)}{ab}}$$
$$=\frac{\frac{-a^2-b^2}{ab}}{\frac{a^2+b^2}{ab}}$$
$$=\frac{-\frac{a^2+b^2}{ab}}{\frac{a^2+b^2}{ab}}=-1$$

03-3 답 4

$$\frac{1}{\frac{1}{a^7}+1}+\frac{1}{\frac{1}{a^5}+1}+\frac{1}{\frac{1}{a^3}+1}+\frac{1}{\frac{1}{a}+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{a^5+1}+\frac{1}{a^7+1}$$
$$=\frac{a^7}{a^7+1}+\frac{a^5}{a^5+1}+\frac{a^3}{a^3+1}+\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{a^5+1}+\frac{1}{a^7+1}$$
$$=\left(\frac{a^7}{a^7+1}+\frac{1}{a^7+1}\right)+\left(\frac{a^5}{a^5+1}+\frac{1}{a^5+1}\right)+\left(\frac{a^3}{a^3+1}+\frac{1}{a^3+1}\right)+\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}\right)$$
$$=\frac{a^7+1}{a^7+1}+\frac{a^5+1}{a^5+1}+\frac{a^3+1}{a^3+1}+\frac{a+1}{a+1}$$
$$=4$$

예제 04 비례식의 계산 365쪽

04-1 답 (1) $\frac{25}{6}$ (2) $\frac{5}{4}$

$\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}=2:3:1$에서

$x:y:z=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:1=3:2:6$이므로

$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x=3k,\ y=2k,\ z=6k$

(1) $$\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}=\frac{2k}{3k}+\frac{6k}{2k}+\frac{3k}{6k}$$
$$=\frac{2}{3}+3+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{4+18+3}{6}=\frac{25}{6}$$

(2) $$\frac{(x+y)z}{x(y+z)}=\frac{(3k+2k)\times6k}{3k(2k+6k)}=\frac{30k^2}{24k^2}=\frac{5}{4}$$

04-2 답 (1) $\frac{11}{14}$ (2) 2

$\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$a+b=3k,\ b+c=4k,\ c+a=5k$ ...... ㉠

㉠의 세 식을 변끼리 더하면 $2(a+b+c)=12k$

$\therefore\ a+b+c=6k$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a=2k,\ b=k,\ c=3k$

(1) $$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2k\times k+k\times3k+3k\times2k}{(2k)^2+k^2+(3k)^2}$$
$$=\frac{11k^2}{14k^2}=\frac{11}{14}$$

(2) $$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}=\frac{(2k)^3+k^3+(3k)^3}{3\times2k\times k\times3k}=\frac{36k^3}{18k^3}=2$$

04-3 답 21

$\frac{a}{2}=\frac{2b-c}{3}=\frac{c}{4}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$a=2k,\ 2b-c=3k,\ c=4k$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=2k,\ b=\frac{7}{2}k,\ c=4k$

$3a+2b+2c=3\times2k+2\times\frac{7}{2}k+2\times4k=21k$

$\therefore\ k=\frac{a}{2}=\frac{2b-c}{3}=\frac{c}{4}=\frac{3a+2b+2c}{21}$

$\therefore\ n=21$

예제 05 가비의 리 367쪽

05-1 답 -1, $\frac{1}{2}$

(ⅰ) $3a+2b+c \neq 0$일 때, 가비의 리에 의하여

$$\frac{3a}{2b+c}=\frac{2b}{c+3a}=\frac{c}{3a+2b}$$
$$=\frac{3a+2b+c}{6a+4b+2c}$$
$$=\frac{3a+2b+c}{2(3a+2b+c)}=\frac{1}{2}$$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

(ⅱ) $3a+2b+c=0$일 때, $2b+c=-3a$이므로

$$\frac{3a}{2b+c}=\frac{3a}{-3a}=-1$$

$\therefore k=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 k의 값은 -1, $\frac{1}{2}$이다.

보충 설명

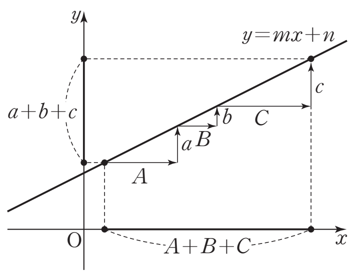
직선의 기울기를 이용하여 가비의 리를 증명할 수 있다.

다음 그림에서

$\frac{a}{A}$, $\frac{b}{B}$, $\frac{c}{C}$, $\frac{a+b+c}{A+B+C}$

는 모두 직선 $y=mx+n\ (m \neq 0)$의 기울기이므로

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}=\frac{a+b+c}{A+B+C}=m$$



05-2 답 19

(ⅰ) $a+2b+3c \neq 0$일 때, 가비의 리에 의하여

$$\frac{2b+3c}{a}=\frac{3c+a}{2b}=\frac{a+2b}{3c}$$
$$=\frac{2a+4b+6c}{a+2b+3c}$$
$$=\frac{2(a+2b+3c)}{a+2b+3c}$$
$$=2$$

$\therefore p=2$

(ⅱ) $a+2b+3c=0$일 때, $2b+3c=-a$이므로

$$\frac{2b+3c}{a}=\frac{-a}{a}=-1$$

$\therefore q=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $p=2$, $q=-1$이므로

$10p+q=10\times 2+(-1)=19$

05-3 답 -1, 8

(ⅰ) $a+b+c \neq 0$일 때, 가비의 리에 의하여

$$\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}$$
$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

$\frac{-a+b+c}{a}=1$에서 $b+c=2a$

$\frac{a-b+c}{b}=1$에서 $a+c=2b$

$\frac{a+b-c}{c}=1$에서 $a+b=2c$

$$\therefore \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$
$$=\frac{2c\times 2a\times 2b}{abc}=\frac{8abc}{abc}=8$$

(ⅱ) $a+b+c=0$일 때,

$a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$이므로

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$
$$=\frac{-c\times(-a)\times(-b)}{abc}=\frac{-abc}{abc}=-1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 식의 값은 -1, 8이다.

개념 콕콕 2 유리함수 375쪽

1 답 (1) ㄱ, ㅁ, ㅂ (2) ㄴ, ㄷ, ㄹ

(2) ㄹ. $y=\frac{x^2-1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x-1}{x+1}$이므로

다항함수가 아닌 유리함수이다.

2 답 (1) 정의역 : $\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$

치역 : $\{y\,|\,y\neq0$인 실수$\}$

(2) 정의역 : $\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$

치역 : $\{y\,|\,y\neq-1$인 실수$\}$

(3) 정의역 : $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$

치역 : $\{y\,|\,y\neq-3$인 실수$\}$

(4) 정의역 : $\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$

치역 : $\{y\,|\,y\neq4$인 실수$\}$

(4) $y=\frac{4x-5}{x-1}=\frac{4(x-1)-1}{x-1}=-\frac{1}{x-1}+4$

∴ 정의역 : $\{x|x\neq 1$인 실수$\}$

치역 : $\{y|y\neq 4$인 실수$\}$

3 답 (1) 그래프는 풀이 참조,

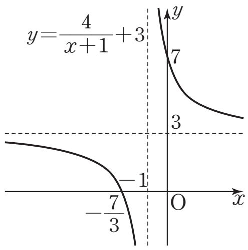
점근선의 방정식 : $x=-1$, $y=3$

(2) 그래프는 풀이 참조,

점근선의 방정식 : $x=-1$, $y=2$

(1) $y=\frac{4}{x+1}+3$의 그래프는 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

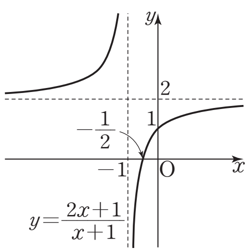
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=3$이다.



(2) $y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2(x+1)-1}{x+1}=-\frac{1}{x+1}+2$이므로

$y=\frac{2x+1}{x+1}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=2$이다.



4 답 (1) $y=\frac{1}{x+2}+1$ (2) $y=-\frac{1}{x+2}+2$

예제 06 유리함수의 그래프 377쪽

06-1 답 (1) 그래프는 풀이 참조,

정의역 : $\{x|x\neq 2$인 실수$\}$,

치역 : $\{y|y\neq -1$인 실수$\}$,

점근선의 방정식 : $x=2$, $y=-1$

(2) 그래프는 풀이 참조,

정의역 : $\{x|x\neq -1$인 실수$\}$,

치역 : $\{y|y\neq 2$인 실수$\}$,

점근선의 방정식 : $x=-1$, $y=2$

(3) 그래프는 풀이 참조,

정의역 : $\{x|x\neq -1$인 실수$\}$,

치역 : $\{y|y\neq 1$인 실수$\}$,

점근선의 방정식 : $x=-1$, $y=1$

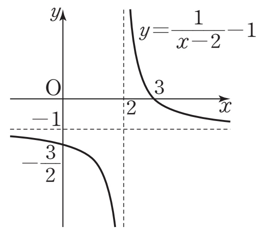
(4) 그래프는 풀이 참조,

정의역 : $\{x|x\neq -2$인 실수$\}$,

치역 : $\{y|y\neq -1$인 실수$\}$,

점근선의 방정식 : $x=-2$, $y=-1$

(1) $y=\frac{1}{x-2}-1$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

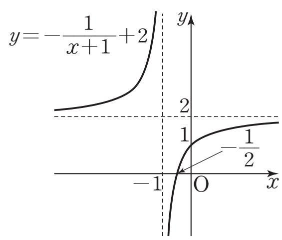


∴ 정의역 : $\{x|x\neq 2$인 실수$\}$

치역 : $\{y|y\neq -1$인 실수$\}$

점근선의 방정식 : $x=2$, $y=-1$

(2) $y=-\frac{1}{x+1}+2$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



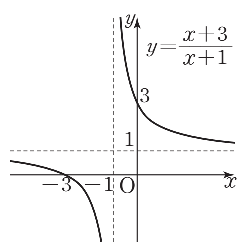
∴ 정의역 : $\{x|x\neq -1$인 실수$\}$

치역 : $\{y|y\neq 2$인 실수$\}$

점근선의 방정식 : $x=-1$, $y=2$

(3) $y=\frac{x+3}{x+1}=\frac{(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+1$이므로

$y=\frac{x+3}{x+1}$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것으로 오른쪽 그림과 같다.



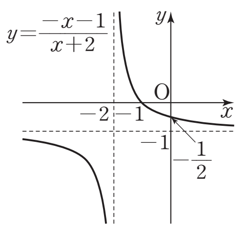
∴ 정의역 : $\{x|x\neq -1$인 실수$\}$

치역 : $\{y|y\neq 1$인 실수$\}$

점근선의 방정식 : $x=-1$, $y=1$

(4) $y=\frac{-x-1}{x+2}=\frac{-(x+2)+1}{x+2}=\frac{1}{x+2}-1$이므로

$y=\frac{-x-1}{x+2}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것으로 오른쪽 그림과 같다.



∴ 정의역 : $\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$

치역 : $\{y\,|\,y\neq-1$인 실수$\}$

점근선의 방정식 : $x=-2$, $y=-1$

06-2 답 6

$y=\frac{x+1}{x-2}=\frac{(x-2)+3}{x-2}=\frac{3}{x-2}+1$이므로

$y=\frac{x+1}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

∴ $a=2$, $b=1$, $k=3$

∴ $a+b+k=2+1+3=6$

06-3 답 ⑤

① $y=\frac{-x+2}{x+1}=\frac{-(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}-1$

② $y=\frac{2x+3}{x+2}=\frac{2(x+2)-1}{x+2}=-\frac{1}{x+2}+2$

③ $y=\frac{3x+4}{x+3}=\frac{3(x+3)-5}{x+3}=-\frac{5}{x+3}+3$

④ $y=\frac{x}{x-1}=\frac{(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1$

⑤ $y=\frac{-2x+6}{x-2}=\frac{-2(x-2)+2}{x-2}=\frac{2}{x-2}-2$

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 ⑤이다.

예제 07 유리함수의 그래프의 점근선 379쪽

07-1 답 $a=-3$, $b=-1$, $c=1$

점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-3$이므로 주어진 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+1}-3\ (k\neq0)$ …… ㉠

으로 놓을 수 있다. ㉠의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=k-3$ ∴ $k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{2}{x+1}-3=\frac{2-3(x+1)}{x+1}=\frac{-3x-1}{x+1}$

∴ $a=-3$, $b=-1$, $c=1$

07-2 답 4

주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x+1}+2\ (k<0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다. ㉠의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=k+2$ ∴ $k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-1}{x+1}+2=\frac{-1+2(x+1)}{x+1}=\frac{2x+1}{x+1}$

∴ $a=2$, $b=1$, $c=1$

∴ $a+b+c=2+1+1=4$

다른 풀이

$y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)+b-ac}{x+c}$

$=\frac{b-ac}{x+c}+a$ …… ㉠

이므로 ㉠의 점근선의 방정식은

$x=-c$, $y=a$ ∴ $a=2$, $c=1$

또한 ㉠의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=b-2+2$ ∴ $b=1$

∴ $a+b+c=2+1+1=4$

07-3 답 -11

$f(x)=\frac{2x+4}{2x+a}=\frac{(2x+a)+(4-a)}{2x+a}$

$=\frac{4-a}{2x+a}+1$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{a}{2}$, $y=1$

$g(x)=\frac{bx+5}{x+c}=\frac{b(x+c)+5-bc}{x+c}$

$=\frac{5-bc}{x+c}+b$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-c$, $y=b$

$\therefore a=2c,\ b=1$ …… ㉠

또한 $f(1)=-1$이므로

$\dfrac{6}{2+a}=-1 \qquad \therefore a=-8$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $c=-4$

$\therefore a+b+c=-8+1+(-4)=-11$

예제 08 유리함수의 그래프의 대칭성 381쪽

08-1 답 (1) -4 (2) -2

(1) $y=-\dfrac{3x+1}{x+1}=\dfrac{-3(x+1)+2}{x+1}$

$=\dfrac{2}{x+1}-3$

이므로 $y=-\dfrac{3x+1}{x+1}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=-3$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-1,\ -3)$에 대하여 대칭이므로

$a=-1,\ b=-3$

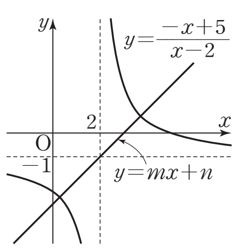
$\therefore a+b=-1+(-3)=-4$

(2) $y=\dfrac{-x+5}{x-2}=\dfrac{-(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}-1$이므로

$y=\dfrac{-x+5}{x-2}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=-1$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(2,\ -1)$을 지나고 기울기가 ±1인 직선에 대하여 대칭이다.



$m>0$이므로 $m=1$이고, 직선 $y=x+n$은 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$-1=2+n \qquad \therefore n=-3$

$\therefore m+n=1+(-3)=-2$

08-2 답 (1) 5 (2) 2

(1) $y=\dfrac{2x-1}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a-1}{x-a}=\dfrac{2a-1}{x-a}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x-1}{x-a}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a,\ y=2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(a,\ 2)$에 대하여 대칭이므로

$a=3,\ b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$

(2) $y=\dfrac{ax+3}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab+3}{x+b}=\dfrac{-ab+3}{x+b}+a$

이므로 $y=\dfrac{ax+3}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b,\ y=a$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-b,\ a)$를 지나고 기울기가 ±1인 직선에 대하여 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=-x+1,\ y=x-3$은 점 $(-b,\ a)$를 지나므로

$a=b+1,\ a=-b-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=-2$

$\therefore ab=(-1)\times(-2)=2$

다른 풀이

(2) 주어진 함수의 그래프가 두 직선 $y=-x+1,\ y=x-3$에 대하여 대칭이므로 두 직선의 교점은 주어진 함수의 그래프의 두 점근선의 교점이다.

즉, $-x+1=x-3$에서 $x=2,\ y=-1$

따라서 주어진 함수의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=-1$이므로

$y=\dfrac{k}{x-2}-1=\dfrac{-x+2+k}{x-2}\ (k\neq0)$

$\therefore a=-1,\ b=-2$

$\therefore ab=(-1)\times(-2)=2$

08-3 답 ②

함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=-\dfrac{d}{c},\ y=\dfrac{a}{c}$이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$를 지나고 기울기가 ±1인 직선에 대하여 대칭이다.

즉, 직선 $y=x$가 점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$를 지나므로

$\dfrac{a}{c}=-\dfrac{d}{c},\ a=-d \qquad \therefore a+d=0$

보충 설명

함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$는 $y=\dfrac{k}{x+\dfrac{d}{c}}+\dfrac{a}{c}$ (k는 상수)로 변형되므로 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$이다.

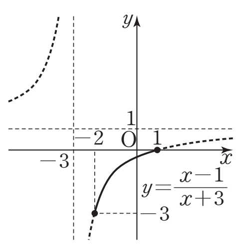
예제 09 유리함수의 최대, 최소 383쪽

09-1 답 (1) -3 (2) $\dfrac{5}{3}$

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{(x+3)-4}{x+3}=-\dfrac{4}{x+3}+1$이므로

$y=\dfrac{x-1}{x+3}$의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le 1$에서 함수 $y=\dfrac{x-1}{x+3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-2$일 때, 최솟값은



$\dfrac{-2-1}{-2+3}=-3$

$x=1$일 때, 최댓값은

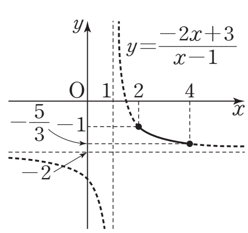
$\dfrac{1-1}{1+3}=0$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$0+(-3)=-3$

(2) $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-2$이므로 $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2\le x\le 4$에서 함수 $y=\dfrac{-2x+3}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때, 최댓값은



$\dfrac{-2\times2+3}{2-1}=-1$

$x=4$일 때, 최솟값은

$\dfrac{-2\times4+3}{4-1}=-\dfrac{5}{3}$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

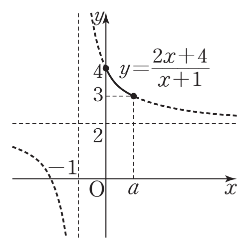
$-1\times\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$

09-2 답 (1) 1 (2) 4

(1) $y=\dfrac{2x+4}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+2$이므로

$y=\dfrac{2x+4}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le a$에서 함수 $y=\dfrac{2x+4}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=a$일 때, 최솟값은 3이므로

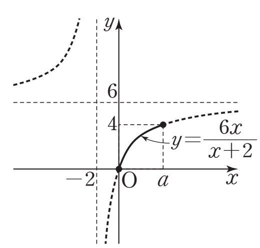
$\dfrac{2a+4}{a+1}=3$, $2a+4=3a+3$

$\therefore a=1$

(2) $y=\dfrac{6x}{x+2}=\dfrac{6(x+2)-12}{x+2}=-\dfrac{12}{x+2}+6$이므로

$y=\dfrac{6x}{x+2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{12}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le a$에서 $y=\dfrac{6x}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=a$일 때, 최댓값이 4이므로

$\dfrac{6a}{a+2}=4$, $6a=4a+8$

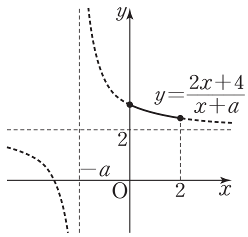
$\therefore a=4$

09-3 답 ④

$y=\dfrac{2x+4}{x+a}=\dfrac{2(x+a)+4-2a}{x+a}=\dfrac{4-2a}{x+a}+2$

(i) $4-2a>0$, 즉 $0<a<2$일 때,

$y=\dfrac{2x+4}{x+a}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x=0$일 때 최댓값을 가지므로



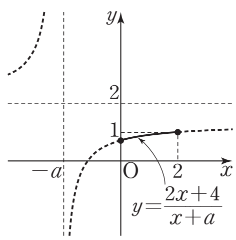
$\dfrac{4}{a}=1$

$\therefore a=4$

그런데 $a=4$는 $0<a<2$를 만족시키지 않는다.

(ii) $4-2a<0$, 즉 $a>2$일 때,

$y=\dfrac{2x+4}{x+a}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x=2$일 때 최댓값을 가지므로



$\dfrac{8}{2+a}=1$

$\therefore a=6$

(iii) $4-2a=0$, 즉 $a=2$일 때,

$y=\dfrac{2x+4}{x+2}=\dfrac{2(x+2)}{x+2}=2$

그런데 최댓값이 1이므로 모순이다.

(i)~(iii)에서 $a=6$이므로 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=\dfrac{2x+4}{x+6}$는 $x=0$일 때, 최솟값 $\dfrac{2}{3}$를 가진다.

예제 10 유리함수의 합성함수 385쪽

10-1 답 $-\sqrt{3}$

$f(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1}=0$

$f^2(\sqrt{3})=f(f(\sqrt{3}))=f(0)$

$=\dfrac{0-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times 0+1}=-\sqrt{3}$

$f^3(\sqrt{3})=f(f^2(\sqrt{3}))=f(-\sqrt{3})$

$=\dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})+1}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}$

$f^4(\sqrt{3})=f(f^3(\sqrt{3}))=f(\sqrt{3})=0$

이므로

$f^{3k}(\sqrt{3})=\sqrt{3}$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)

따라서 $101=3\times 33+2$이므로

$f^{101}(\sqrt{3})=f^2(f^{3\times 33}(\sqrt{3}))=f^2(\sqrt{3})=-\sqrt{3}$

10-2 답 2

주어진 그래프에서

$f^1(0)=f(0)=2$, $f^1(2)=f(2)=0$이므로

$f^2(2)=(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(0)=2$

$f^3(2)=(f\circ f^2)(2)=f(f^2(2))=f(2)=0$

$f^4(2)=(f\circ f^3)(2)=f(f^3(2))=f(0)=2$

$\vdots$

$\therefore f^n(2)=\begin{cases}0 & (n\text{은 홀수})\\ 2 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

$\therefore f^{99}(2)+f^{100}(2)=0+2=2$

10-3 답 ③

$f_1(x)=f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$f_2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{1-f(x)}$

$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{1}{\dfrac{1-x-1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$

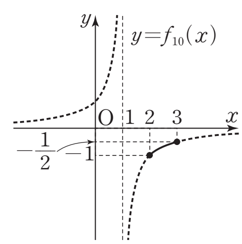
$f_3(x)=(f\circ f_2)(x)=f(f_2(x))=\dfrac{1}{1-f_2(x)}$

$=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{x-x+1}{x}}=x$

$\vdots$

$f_{10}(x)=f_1(x)=\dfrac{1}{1-x}$

따라서 $2\le x\le 3$에서 함수 $y=f_{10}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=2$일 때, 최솟값

$m=\dfrac{1}{1-2}=-1$

$x=3$일 때, 최댓값

$M=\dfrac{1}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore M+m=-\dfrac{1}{2}+(-1)=-\dfrac{3}{2}$

예제 11 유리함수의 역함수 387쪽

11-1 답 (1) $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$ (2) $y=-\dfrac{3}{x+1}-2$

(1) $y=\dfrac{x+2}{x-3}$를 x에 대하여 풀면

$y(x-3)=x+2$, $xy-3y=x+2$

$(y-1)x=3y+2$

$\therefore x=\dfrac{3y+2}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\dfrac{3x+2}{x-1}$

(2) $y=-\dfrac{3}{x+2}-1$을 x에 대하여 풀면

$y+1=-\dfrac{3}{x+2}$, $x+2=-\dfrac{3}{y+1}$

$\therefore\ x=-\dfrac{3}{y+1}-2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\dfrac{3}{x+1}-2$

11-2 답 ⑤

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}$에서 $y=\dfrac{2x+3}{x+4}$으로 놓고 x에 대하여 풀면

$y(x+4)=2x+3$, $xy+4y=2x+3$

$(y-2)x=-4y+3$

$\therefore\ x=\dfrac{-4y+3}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는 $y=\dfrac{-4x+3}{x-2}$

따라서 $(f^{-1})^{-1}=f$이므로

$\dfrac{-4x+3}{x-2}=\dfrac{ax+b}{-x+c}$, $\dfrac{4x-3}{-x+2}=\dfrac{ax+b}{-x+c}$

$\therefore\ a=4,\ b=-3,\ c=2$

$\therefore\ a+b+c=4+(-3)+2=3$

11-3 답 12

두 함수 $f(x)=\dfrac{ax+1}{2x-6}$, $g(x)=\dfrac{bx+1}{2x+6}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

$f(x)=\dfrac{ax+1}{2x-6}$에서 $y=\dfrac{ax+1}{2x-6}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$y(2x-6)=ax+1$, $2xy-6y=ax+1$

$(2y-a)x=6y+1$

$\therefore\ x=\dfrac{6y+1}{2y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는 $y=\dfrac{6x+1}{2x-a}$

따라서 $\dfrac{6x+1}{2x-a}=\dfrac{bx+1}{2x+6}$이므로

$a=-6,\ b=6$

$\therefore\ b-a=6-(-6)=12$

다른 풀이

두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이면 두 점근선의 교점도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)=\dfrac{ax+1}{2x-6}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=\dfrac{a}{2}$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(3,\ \dfrac{a}{2}\right)$이고, 함수 $g(x)=\dfrac{bx+1}{2x+6}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=\dfrac{b}{2}$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(-3,\ \dfrac{b}{2}\right)$이다.

두 점 $\left(3,\ \dfrac{a}{2}\right)$, $\left(-3,\ \dfrac{b}{2}\right)$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $3=\dfrac{b}{2}$, $\dfrac{a}{2}=-3$

$\therefore\ a=-6,\ b=6$

$\therefore\ b-a=6-(-6)=12$

예제 12 유리함수의 그래프와 직선의 위치 관계 389쪽

12-1 답 4

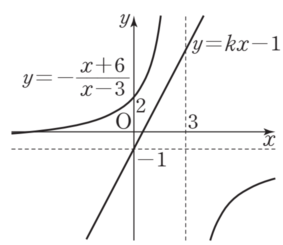
$y=-\dfrac{x+6}{x-3}=-\dfrac{(x-3)+9}{x-3}=-\dfrac{9}{x-3}-1$이므로

$y=-\dfrac{x+6}{x-3}$의 그래프는 $y=-\dfrac{9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

또한 직선 $y=kx-1$은 k의 값에 관계없이 점 $(0,\ -1)$을 지난다.

(i) $k=0$일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=-\dfrac{x+6}{x-3}$의 그래프와 직선 $y=-1$은 만나지 않는다.



(ii) $k\neq0$일 때,

함수 $y=-\dfrac{x+6}{x-3}$의 그래프와 직선 $y=kx-1$이 한 점에서 만나므로 $-\dfrac{x+6}{x-3}=kx-1$에서

$-x-6=(kx-1)(x-3)$

$-x-6=kx^2-(3k+1)x+3$

$\therefore\ kx^2-3kx+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(-3k)^2-4\times k\times 9=0$, $k(k-4)=0$

$\therefore k=4\ (\because k\neq 0)$

(i), (ii)에서 구하는 상수 k의 값은 4이다.

12-2 답 ⑤

두 점 P, Q는 모두 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ 위의 점이므로

P(0, 2), Q(2, 1)이다.

점 P(0, 2)는 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$의 그래프 위의 점이므로

$2=\dfrac{0+b}{0+1}\qquad \therefore b=2$ …… ㉠

점 Q(2, 1)도 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$의 그래프 위의 점이므로

$1=\dfrac{2a+b}{2+1}$, $2a+b=3$

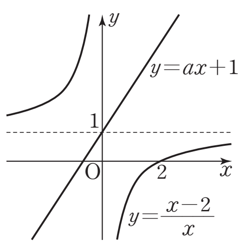
$2a+2=3\ (\because ㉠)\qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$

12-3 답 $a\ge 0$

$A\cap B=\varnothing$이므로 함수 $y=\dfrac{x-2}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+1$이 만나지 않는다.

$y=\dfrac{x-2}{x}=-\dfrac{2}{x}+1$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



직선 $y=ax+1$은 a의 값에 관계없이 점 (0, 1)을 지나므로 직선 $y=ax+1$이 함수 $y=\dfrac{x-2}{x}$의 그래프와 만나지 않으려면 $a>0$이어야 한다.

또한 $a=0$이면 직선은 $y=1$, 즉 점근선이 되므로 함수 $y=\dfrac{x-2}{x}$의 그래프와 만나지 않는다.

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $a\ge 0$이다.

기본 다지기 390쪽～391쪽

1 (1) 2 (2) 4		**2** 80억 원	**3** ㄴ, ㄷ	**4** 5
5 0	**6** 5	**7** 4	**8** 2	**9** 4
10 -2				

1 (1) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x}}\times\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^3}}$

$=\dfrac{x^3\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}\times\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}$

$=\dfrac{(x^3-1)(x+1)}{(x-1)(x^3+1)}$

$=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{x+1+\dfrac{1}{x}}{x-1+\dfrac{1}{x}}$

$=\dfrac{3+1}{3-1}=2$

(2) $\begin{cases}3x-4y-z=0 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x+y-8z=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡×4를 하면 $11x-33z=0$

$\therefore x=3z$

$x=3z$를 ㉡에 대입하면

$6z+y-8z=0\qquad \therefore y=2z$

$\therefore \dfrac{x^2-y^2-z^2}{xy-yz-zx}=\dfrac{(3z)^2-(2z)^2-z^2}{3z\times 2z-2z\times z-z\times 3z}$

$=\dfrac{4z^2}{z^2}=4$

2 두 기업 A, B의 작년 상반기 매출액을 각각 a억 원, b억 원이라고 하면 두 기업의 작년 상반기 매출액의 합계는 70억 원이므로

$a+b=70$ …… ㉠

올해 상반기 두 기업 A, B의 매출액이 작년 상반기에 비하여 각각 10 %, 20 %씩 증가하였고, 매출액의 증가량의 비가 2 : 3이므로

$0.1a : 0.2b=2 : 3$, $a : 2b=2 : 3$

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{2b}{3}=k\ (k\neq 0)$라고 하면

$a=2k$, $b=\dfrac{3}{2}k$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2k+\dfrac{3}{2}k=70$

$\dfrac{7}{2}k=70\qquad \therefore k=20$

$\therefore a=40,\ b=30\ (\because ㉡)$

따라서 올해 상반기 두 기업의 매출액의 합계는

$(1+0.1)a+(1+0.2)b=1.1\times 40+1.2\times 30$

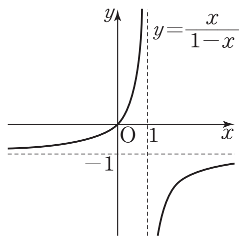
$=80$(억 원)

3 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}=-\dfrac{1}{x-1}-1$

ㄱ. 함수 $f(x)$의 정의역은 1이 아닌 모든 실수의 집합이고 치역은 -1이 아닌 모든 실수의 집합이다. (거짓)

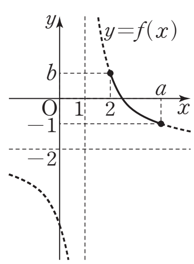
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프이다. (참)

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

4 $f(x)=\dfrac{3}{x-1}-2$라고 하면 $2\le x\le a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(2)=b=1$,

$f(a)=\dfrac{3}{a-1}-2$

$=-1$

$\therefore a=4,\ b=1$

$\therefore a+b=5$

5 $y=\dfrac{x+2}{ax+b}=\dfrac{\dfrac{1}{a}(ax+b)+2-\dfrac{b}{a}}{ax+b}$

$=\dfrac{2-\dfrac{b}{a}}{ax+b}+\dfrac{1}{a}$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{a},\ y=\dfrac{1}{a}\qquad \therefore a=2$

또한 주어진 함수의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지나므로

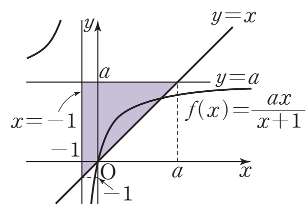
$2=\dfrac{2+2}{2a+b},\ 2=\dfrac{4}{4+b}$

$\therefore b=-2$

$\therefore a+b=2+(-2)=0$

6 함수 $f(x)=\dfrac{ax}{x+1}=\dfrac{-a}{x+1}+a$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=a$



두 직선 $x=-1$, $y=a$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 18이므로

$\dfrac{1}{2}(a+1)^2=18,\ a+1=\pm 6$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$

7 (ⅰ) $x<0$일 때,

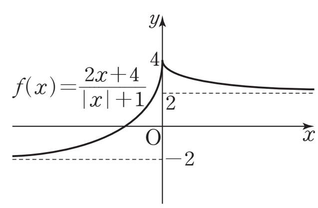
$y=\dfrac{2x+4}{-x+1}=\dfrac{-6}{x-1}-2$

(ⅱ) $x>0$일 때,

$y=\dfrac{2x+4}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+2$

(ⅲ) $x=0$일 때,

$y=\dfrac{0+4}{0+1}=4$



따라서 $x=0$일 때, 최댓값 4를 가지므로

$p=0,\ q=4\qquad \therefore p+q=4$

8 $f\circ f^{-1}=I$(항등함수)이므로

$h=f\circ(g\circ f)^{-1}$

$=f\circ(f^{-1}\circ g^{-1})$

$=(f\circ f^{-1})\circ g^{-1}$

$=I\circ g^{-1}$

$=g^{-1}$

$h(2)=g^{-1}(2)=k$ (k는 상수)라고 하면 $g(k)=2$

즉, $\dfrac{-k+4}{2k-3}=2$에서 $-k+4=4k-6$

$5k=10\qquad \therefore k=2$

$\therefore h(2)=2$

9 $y=\dfrac{ax+b}{x-2}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$y(x-2)=ax+b,\ xy-2y=ax+b$

$x(y-a)=2y+b \qquad \therefore\ x=\dfrac{2y+b}{y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\dfrac{2x+b}{x-a}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{2x+b}{x-a}$

이때 $f=f^{-1}$이므로

$\dfrac{ax+b}{x-2}=\dfrac{2x+b}{x-a} \qquad \therefore\ a=2$

또한 $f(1)=0$이므로

$\dfrac{a+b}{-1}=0,\ a+b=0$

$\therefore\ b=-2$

따라서 $f(x)=\dfrac{2x-2}{x-2}$이므로

$f(3)=\dfrac{2\times3-2}{3-2}=4$

다른 풀이

함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{a+b}{-1} \qquad \therefore\ a+b=0$ …… ㉠

역함수의 성질에 의하여 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

이때 $f=f^{-1}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다. 즉,

$1=\dfrac{b}{-2} \qquad \therefore\ b=-2$

$b=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=2$

따라서 $f(x)=\dfrac{2x-2}{x-2}$이므로

$f(3)=\dfrac{2\times3-2}{3-2}=4$

10 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$의 그래프가 점 $(2,\ -1)$을 지나므로 $f(2)=-1$에서

$2a+b=-1$ …… ㉠

또한 이 함수의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(2,\ -1)$을 지나므로 $f^{-1}(2)=-1$

이때 역함수의 성질에 의하여 $f(-1)=2$이므로

$\dfrac{-a+b}{-2}=2$

$\therefore\ -a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-3$

$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

실력 다지기 392쪽 ~ 393쪽

11 2	**12** -1	**13** 0	**14** (1) 9 (2) 3	
15 24	**16** $y=3$	**17** 11	**18** 8	**19** $\dfrac{4}{3}$
20 5				

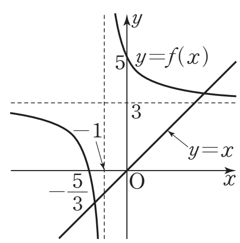
11 **접근 방법** | 역함수의 성질에 의하여 $(f\circ g)(x)=x$를 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 역함수 관계이다. 또한 역함수의 성질에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$(f\circ g)(x)=x$이므로 $f(g(x))=x$에서

$g(x)=f^{-1}(x)$이고

$f(x)=\dfrac{3x+5}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+3$

$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



즉, $\dfrac{3x+5}{x+1}=x$에서 $3x+5=x(x+1)$

$\therefore\ x^2-2x-5=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은 2이다.

보충 설명

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 구할 때에는 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 개형을 그리고 두 그래프의 교점 중 직선 $y=x$ 위에 있지 않은 것이 있는지 알아보고 방정식 $f(x)=x$를 푸는 것이 좋다.

12 **접근 방법** | 함수 $y=\dfrac{2x-5}{2x+3}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형하여 x, y의 값이 정수가 되는 값을 찾아본다.

$y=\dfrac{2x-5}{2x+3}=\dfrac{2x+3-8}{2x+3}$

$=-\dfrac{8}{2x+3}+1$

이므로 y의 값이 정수이려면 $2x+3$이 8의 약수이어야 한다.

$\therefore 2x+3=\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm8$

이 가운데 x의 값이 정수가 되는 것은

$2x+3=\pm1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1,\ -7)$, $(-2,\ 9)$이므로

$a+b+c+d=-1+(-7)+(-2)+9$

$=-1$

13 **접근 방법 |** 유리식으로 이루어진 항등식에서 미정계수를 구할 때에는 분모를 통분한 후 분자의 계수를 비교한다.

우변을 통분한 분수식의 분자를 $f(x)$라고 하면

$\dfrac{a_1}{x-1}+\dfrac{a_2}{x-2}+\cdots+\dfrac{a_{10}}{x-10}$

$=\dfrac{f(x)}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-10)}$에서

$f(x)=a_1(x-2)(x-3)\times\cdots\times(x-10)$
$+a_2(x-1)(x-3)\times\cdots\times(x-10)+\cdots$
$+a_{10}(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-9)$

따라서 모든 실수 x에 대하여

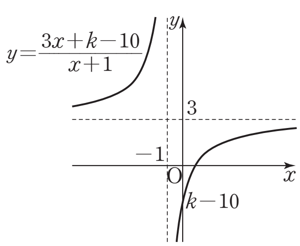
$1=f(x)=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})x^9+\cdots$

이 성립하므로 계수비교법에 의해서

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=0$

14 **접근 방법 |** 주어진 함수식을 $y=\dfrac{a}{x-p}+q$ 꼴로 나타낸 후 그래프가 조건을 만족시키도록 그려 본다.

(1) $y=\dfrac{3x+k-10}{x+1}=\dfrac{k-13}{x+1}+3$이므로 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=3$이다.

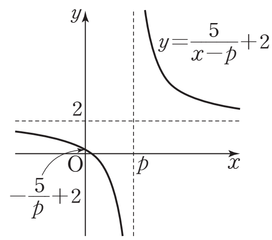


이 함수의 그래프가 제4사분면을 지나기 위해서는 그림과 같이 $k-13<0$이고, (y절편)$=k-10<0$이어야 한다.

따라서 $k<10$이므로 자연수 k의 개수는 9이다.

(2) 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=2$이다.

이때 $p\le0$이면 곡선 $y=\dfrac{5}{x-p}+2$는 반드시 제3사분면을 지나므로 $p>0$이다.



$x>p$일 때 함수의 그래프는 제1사분면만을 지난다.

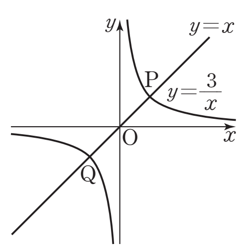
$x<p$일 때 주어진 함수의 그래프가 제3사분면을 지나지 않기 위해서는 $x=0$일 때 (y절편)≥0이어야 하므로

$\dfrac{5}{-p}+2\ge0 \qquad \therefore p\ge\dfrac{5}{2}$

따라서 정수 p의 최솟값은 3이다.

15 **접근 방법 |** 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 각각 대칭이므로 선분 PQ의 길이가 최소이려면 두 점 P, Q가 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이어야 한다.



$\dfrac{3}{x}=x$에서 $x^2=3 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{3}$

따라서 선분 PQ의 길이가 최소가 되는 두 점의 좌표는 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$, $\mathrm{Q}(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$이고 이때의 선분 PQ의 길이 s는

$s=\sqrt{(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

$\therefore s^2=(2\sqrt{6})^2=24$

16 **접근 방법 |** 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 실근과 방정식 $f(x)=x$의 실근이 같음을 이용한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $x=2$이므로

$f(x)=\dfrac{a}{x-2}+b\ (a>0,\ b>0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

또한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$\dfrac{a}{-2}+b=0 \quad \therefore a=2b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\dfrac{2b}{x-2}+b$

방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 실근은 방정식 $f(x)=x$의 실근과 같으므로 $\dfrac{2b}{x-2}+b=x$의 한 근이 5이다.

즉, $\dfrac{2b}{5-2}+b=5,\ 2b+3b=15 \quad \therefore b=3$

따라서 함수 $f(x)=\dfrac{6}{x-2}+3$의 그래프의 x축에 평행한 점근선의 방정식은 $y=3$이다.

17 **접근 방법 |** 삼각형 ABC의 넓이가 50이므로 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=50$이 성립한다. 선분 AB의 길이는 두 점 A, B의 x좌표의 차이고, 선분 AC의 길이는 두 점 A, C의 y좌표의 차이므로 점 A의 좌표를 기준으로 문제를 해결하면 된다.

점 A의 좌표를 $A\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)\ (p>0)$이라고 하면

$B\left(kp,\ \dfrac{1}{p}\right),\ C\left(p,\ \dfrac{k}{p}\right)$이므로

$\overline{AB}=|kp-p|=|(k-1)p|$

$\overline{AC}=\left|\dfrac{k}{p}-\dfrac{1}{p}\right|=\left|\dfrac{k-1}{p}\right|$

삼각형 ABC의 넓이가 50이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}&=\frac{1}{2}\times|(k-1)p|\times\left|\frac{k-1}{p}\right|\\&=\frac{(k-1)^2}{2}=50\end{aligned}$$

$(k-1)^2=100,\ k^2-2k-99=0$

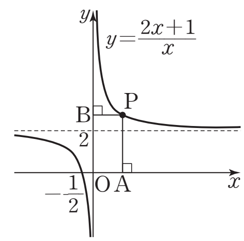
$(k+9)(k-11)=0$

$\therefore k=-9$ 또는 $k=11$

그런데 $k>0$이므로 $k=11$

18 **접근 방법 |** $P\left(t,\ \dfrac{2t+1}{t}\right)\ (t>0)$로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 사각형 OAPB의 둘레의 길이, 즉 $2(\overline{OA}+\overline{OB})$의 최솟값을 구한다.

$y=\dfrac{2x+1}{x}=\dfrac{1}{x}+2$이므로 $y=\dfrac{2x+1}{x}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$P\left(t,\ \dfrac{2t+1}{t}\right)\ (t>0)$로 놓으면

$A(t,\ 0),\ B\left(0,\ \dfrac{2t+1}{t}\right)$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{OA}+\overline{OB}&=t+\frac{2t+1}{t}\\&=t+\frac{1}{t}+2\ge 2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}+2=4\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } t=\dfrac{1}{t},\ \text{즉 } t=1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 사각형 OAPB의 둘레의 길이의 최솟값은

$4\times2=8$

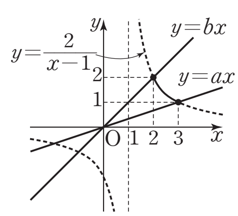
19 **접근 방법 |** 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다. $\dfrac{2x}{x-1}$를 $\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 고쳐 주어진 부등식을 간단히 한 후, 각 항을 관계식으로 가지는 세 함수의 그래프를 이용한다.

$\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+2$이므로

$ax+2\le\dfrac{2}{x-1}+2\le bx+2$에서

$ax\le\dfrac{2}{x-1}\le bx$ …… ㉠

$2\le x\le3$에서 $y=\dfrac{2}{x-1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $2\le x\le3$에서 ㉠을 만족시키는 두 실수 $a,\ b$의 값의 범위는 각각 $a\le\dfrac{1}{3},\ b\ge1$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{3}$, b의 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

보충 설명

부등식 $ax\le\frac{2}{x-1}$가 항상 성립하려면 직선 $y=ax$가 함수 $y=\frac{2}{x-1}$의 그래프보다 아래쪽에 있어야 한다.
직선 $y=ax$가 점 $(3, 1)$을 지나면 $a=\frac{1}{3}$이므로
$a\le\frac{1}{3}$
같은 방법으로 $b\ge1$

20 **접근 방법** | 함수 $f^{-1}(x)$는 함수 $f(x)$를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 함수이고, 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다. 이때 두 유리함수의 그래프의 점근선의 교점이 같아야 같은 함수임을 이용한다.

$$f(x)=\frac{2x+b}{x-a}=\frac{2(x-a)+2a+b}{x-a}=\frac{2a+b}{x-a}+2$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $(a, 2)$이다.
이때 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(2, a)$와 같다.
㈎에서 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $(a+4, -2)$이다.
이때 두 점 $(2, a)$, $(a+4, -2)$가 일치하므로 $a=-2$
함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{2a+b}{x}$의 그래프를 평행이동한 그래프와 일치하므로
㈏에서 $2a+b=3$
$\therefore b=7$
$\therefore a+b=-2+7=5$

다른 풀이

함수 $f(x)=\frac{2x+b}{x-a}$의 역함수를 구하면

$$f^{-1}(x)=\frac{ax+b}{x-2}$$

㈎에 의해

$$\frac{ax+b}{x-2}=\frac{2(x-4)+b}{(x-4)-a}-4=\frac{2(x-4)+b-4(x-4-a)}{(x-4)-a}=\frac{-2x+4a+8+b}{x-4-a}$$

$-2=-4-a$에서 $a=-2$

$$f(x)=\frac{2x+b}{x+2}=\frac{2(x+2)+b-4}{x+2}=\frac{b-4}{x+2}+2$$

이므로 ㈏에 의해 $b-4=3$ $\quad\therefore b=7$
$\therefore a+b=-2+7=5$

기출 다지기 394쪽

21 ① **22** ④ **23** 12 **24** 9

21 **접근 방법** | 유리함수 $f(x)$에 대하여 $y=|f(x)|$와 $y=k$가 한 점에서 만날 때, $y=k$는 $y=f(x)$의 점근선이다.

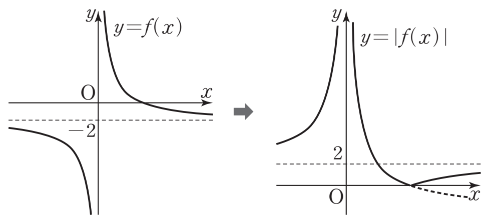
조건 ㈎에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=2$와 만나는 점의 개수와 직선 $y=-2$와 만나는 점의 개수의 합은 1이다.
곡선 $y=f(x)$가 x축에 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로 두 직선 $y=2$, $y=-2$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.
이때 곡선 $y=f(x)$의 한 점근선이 직선 $y=b$이므로
$b=2$ 또는 $b=-2$ …… ㉠
$f(x)=\frac{a}{x}+b$, 즉 $y=\frac{a}{x}+b$에서
$\frac{a}{x}=y-b$, $x=\frac{a}{y-b}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{a}{x-b}$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{a}{x-b}$
조건 ㈏에서 $f^{-1}(2)=f(2)-1$이므로
$\frac{a}{2-b}=\frac{a}{2}+b-1$ …… ㉡
㉡에서 $b\ne2$이므로 ㉠에서 $b=-2$
$b=-2$를 ㉡에 대입하면
$\frac{a}{4}=\frac{a}{2}-3$ $\quad\therefore a=12$

따라서 $f(x)=\dfrac{12}{x}-2$이므로

$f(8)=\dfrac{12}{8}-2=-\dfrac{1}{2}$

⊕ 보충 설명

함수 $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



22 **접근 방법 |** 점의 대칭이동과 점과 직선 사이의 거리를 이용한다.

점 $B(\alpha,\ \beta)$가 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위의 점이므로

$\beta=\dfrac{2}{\alpha}$, 즉 $\alpha\beta=2$ …… ㉠

$\alpha>\sqrt{2}$이므로 $0<\beta<\sqrt{2}$, 즉 $0<\beta<\alpha$

두 점 B, C가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로

$C(\beta,\ \alpha)$

$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}(\alpha-\beta)\ (\because\ \alpha>\beta)$

직선 BC와 직선 $y=x$가 서로 수직이므로 직선 BC의 기울기는 -1이다.

또한 이 직선이 점 B를 지나므로 직선 BC의 방정식은

$y-\beta=-(x-\alpha)$, 즉 $x+y-(\alpha+\beta)=0$

점 A와 직선 BC 사이의 거리를 h라고 하면

$$h=\frac{|-2+2-(\alpha+\beta)|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)\ (\because\ \alpha>0,\ \beta>0)$$

삼각형 ABC의 넓이가 $2\sqrt{3}$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times h$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}(\alpha-\beta)\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)=2\sqrt{3}$$

$\therefore\ \alpha^2-\beta^2=4\sqrt{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2=(4\sqrt{3})^2+4\times2^2=64$

$\alpha^2+\beta^2>0$이므로 $\alpha^2+\beta^2=8$

23 **접근 방법 |** 유리식을 간단히 하여 식의 값이 정수가 되는 조건을 구할 수 있다.

$$\frac{3m+9}{m^2-9}=\frac{3(m+3)}{(m-3)(m+3)}=\frac{3}{m-3}\ (m\neq\pm3)$$

이 값이 정수가 되려면 $m-3=\pm1,\ \pm3$이어야 하므로

$m=0,\ 2,\ 4,\ 6$

따라서 모든 m의 값의 합은

$0+2+4+6=12$

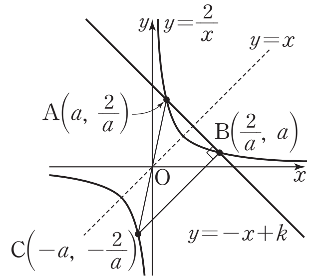
24 **접근 방법 |** 직선 AB의 기울기는 -1이고, $\angle ABC=90°$에서 직선 AB와 직선 BC는 서로 수직이므로 직선 BC의 기울기는 1이다. 이를 이용하여 점 B와 점 C의 좌표의 관계를 찾는다.

$f(x)=\dfrac{2}{x}$라고 하면 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나는 점 A의 좌표를 $A\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$라고 하면 점 B의 좌표는 $B\left(\dfrac{2}{a},\ a\right)$

$\angle ABC=90°$이므로 점 C는 제3사분면 위에 있고 점 C의 좌표를 $C\left(c,\ \dfrac{2}{c}\right)$라고 하면 직선 BC의 기울기는 1이다.

$\dfrac{\frac{2}{c}-a}{c-\frac{2}{a}}=\dfrac{-a}{c}=1$에서 $c=-a$이므로 $C\left(-a,\ -\dfrac{2}{a}\right)$



$$\overline{AC}^2=\{a-(-a)\}^2+\left\{\frac{2}{a}-\left(-\frac{2}{a}\right)\right\}^2$$

$$=4a^2+\frac{16}{a^2}=(2\sqrt{5})^2=20$$

$\therefore\ a^2+\dfrac{4}{a^2}=5$

이때 점 $A\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$가 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로

$\dfrac{2}{a}=-a+k\qquad\therefore\ k=a+\dfrac{2}{a}$

$\therefore\ k^2=\left(a+\dfrac{2}{a}\right)^2=a^2+\dfrac{4}{a^2}+4=9$

10. 무리식과 무리함수

개념 콕콕 1 무리식 401쪽

1 답 ④

④ 제곱하여 6이 되는 수는 $\pm\sqrt{6}$이다.

2 답 (1) $x\geq 2$ (2) $-1<x\leq 2$

(1) $x-2\geq 0$에서 $x\geq 2$

(2) 분모 $\sqrt{x+1}$에서 $x+1>0$

$\therefore x>-1$ ······ ㉠

분자 $\sqrt{2-x}$에서 $2-x\geq 0$

$\therefore x\leq 2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $-1<x\leq 2$

3 답 (1) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (3) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ (4) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

(1) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{5-2\sqrt{5}+1}{5-1}$

$=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})^2}{\{(\sqrt{3}+1)+\sqrt{2}\}\{(\sqrt{3}+1)-\sqrt{2}\}}$

$=\dfrac{3+1+2+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{(\sqrt{3}+1)^2-2}$

$=\dfrac{3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{(3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(x+1)-x}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

4 답 (1) $-\dfrac{2\sqrt{y}}{x-y}$ (2) $2\sqrt{x+1}$

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=-\dfrac{2\sqrt{y}}{x-y}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=\dfrac{2\sqrt{x+1}}{(x+1)-x}=2\sqrt{x+1}$

5 답 (1) $x=2$, $y=5$ (2) $x=3$, $y=1$ (3) $x=3$, $y=1$

무리수가 서로 같을 조건에 의하여

(1) $x+3=5$, $y-1=4$

$\therefore x=2$, $y=5$

(2) $x+y=4$, $x-y=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=1$

(3) $x-2y=1$, $-2x-y=-7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=1$

예제 01 제곱근의 성질 403쪽

01-1 답 (1) 3 (2) $3a$

(1) $-1<a<0$에서 $1-a>0$, $a+2>0$이므로

$\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt{(a+2)^2}=|1-a|+|a+2|$

$=(1-a)+(a+2)$

$=3$

(2) $-1<a<0$에서 $a+1>0$, $2a-1<0$이므로

$\sqrt{a^2+2a+1}-\sqrt{4a^2-4a+1}$

$=\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{(2a-1)^2}$

$=|a+1|-|2a-1|$

$=(a+1)+(2a-1)$

$=3a$

01-2 답 ⑤

$2<a<3$, 즉 $4<a^2<9$에서 $a^2-9<0$, $a^2-4>0$이므로

$\sqrt{(a^2-9)^2}+\sqrt{(a^2-4)^2}=|a^2-9|+|a^2-4|$

$=-(a^2-9)+(a^2-4)$

$=5$

01-3 답 $2(a-c)$

$a>b>c$에서 $a-b>0$, $b-c>0$, $c-a<0$이므로

$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=a-b$

$\sqrt{b^2-2bc+c^2}=\sqrt{(b-c)^2}=|b-c|=b-c$

$\sqrt{c^2-2ca+a^2}=\sqrt{(c-a)^2}=|c-a|=a-c$

$\therefore \sqrt{a^2-2ab+b^2}+\sqrt{b^2-2bc+c^2}+\sqrt{c^2-2ca+a^2}$

$=(a-b)+(b-c)+(a-c)$

$=2(a-c)$

예제 02 무리식의 계산 405쪽

02-1 답 (1) $-4x-2$ (2) $2\sqrt{6}+4$

(1) 분모를 통분하면

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$$

$$=\frac{(2x+1-2\sqrt{x}\sqrt{x+1})+(2x+1+2\sqrt{x}\sqrt{x+1})}{x-(x+1)}$$

$$=\frac{4x+2}{-1}=-4x-2$$

(2) $2<\sqrt{6}<3$에서 $4<\sqrt{6}+2<5$이므로

$\sqrt{6}+2$의 정수 부분은 $a=4$, 소수 부분은

$b=(\sqrt{6}+2)-4=\sqrt{6}-2$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{4}{\sqrt{6}-2}=\frac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}$$

$$=\frac{4\sqrt{6}+8}{6-4}=2\sqrt{6}+4$$

02-2 답 (1) $\frac{2(x+2)}{x-2}$ (2) 1

(1) $$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(x-2\sqrt{2}\sqrt{x}+2)+(x+2\sqrt{2}\sqrt{x}+2)}{x-2}$$

$$=\frac{2(x+2)}{x-2}$$

(2) $2<\sqrt{5}<3$에서 $3<\sqrt{5}+1<4$이므로 $\sqrt{5}+1$의 정수 부분은 3, 소수 부분은 $(\sqrt{5}+1)-3=\sqrt{5}-2$

$\therefore x=\sqrt{5}-2$

즉, $x+2=\sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$x^2+4x+4=5$ $\quad\therefore x^2+4x-1=0$

$\therefore x^4+4x^3-4x^2-12x+4$

$=(x^2+4x-1)(x^2-3)+1$

$=0\times(x^2-3)+1=1$

보충 설명

$x=p+\sqrt{q}$ (p는 유리수, $\sqrt{q}$는 무리수)에 대하여 $f(x)$의 값을 구할 때, $f(x)$의 차수가 높아서 주어진 x의 값을 직접 대입하여 계산하기가 어려운 경우가 있다. 이때 $x=p+\sqrt{q}$를 변형하여 제곱하면

$g(x)=0$ ($g(x)$는 이차식)

을 얻을 수 있고, $f(x)$를 $g(x)$로 나누어

$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$로 나타내면 $g(x)=0$임을 이용하여 $f(x)$의 차수를 낮출 수 있으므로 **02-2**의 (2)처럼 계산을 편리하게 할 수 있다.

02-3 답 ⑤

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2+(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}$$

$$=\frac{(2a-2\sqrt{a+b}\sqrt{a-b})+(2a+2\sqrt{a+b}\sqrt{a-b})}{(a+b)-(a-b)}$$

$$=\frac{4a}{2b}=\frac{2a}{b}$$

예제 03 무리식의 값 407쪽

03-1 답 (1) $16+8\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{3}$

(1) $$\frac{2}{1+\sqrt{x}}+\frac{2}{1-\sqrt{x}}=\frac{2(1-\sqrt{x})+2(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}$$

$$=\frac{4}{1-x} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 대입하면 구하는 식의 값은

$$\frac{4}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\frac{8}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{8(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{16+8\sqrt{3}}{4-3}=16+8\sqrt{3}$$

(2) $$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}+1-x}{(1+x)-(1-x)}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x}=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 대입하면 구하는 식의 값은

$$\frac{1+\sqrt{1-\frac{3}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

03-2 답 $\sqrt{6}$

$x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$

$x-y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

이므로

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$$
$$=\frac{x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y+x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y}{x-y}$$
$$=\frac{2(x+y)}{x-y}=\frac{2\times2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$$

03-3 답 (1) 322 (2) 22

(1) $x=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=\frac{(\sqrt{5}+2)^2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$

$=\frac{5+4\sqrt{5}+4}{5-4}=9+4\sqrt{5}$

$y=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}$

$=\frac{5-4\sqrt{5}+4}{5-4}=9-4\sqrt{5}$

이므로

$x+y=(9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5})=18$

$xy=(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})=81-80=1$

$\therefore\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=18^2-2\times1=322$

(2) $x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\frac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=\frac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$

$y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$=\frac{5-2\sqrt{15}+3}{5-3}=\frac{8-2\sqrt{15}}{2}=4-\sqrt{15}$

이므로

$x+y=(4+\sqrt{15})+(4-\sqrt{15})=8$

$xy=(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})=16-15=1$

$\therefore\ \sqrt{x^3+y^3-4}$

$=\sqrt{(x+y)^3-3xy(x+y)-4}$

$=\sqrt{8^3-3\times1\times8-4}$

$=\sqrt{484}=22$

보충 설명

(1) x, y의 값을 직접 대입하는 것보다 $x+y$, xy의 값을 이용하여 푸는 것이 훨씬 간단하다. 일반적으로 x^n+y^n 꼴의 값을 구할 때에는 $x+y$, xy의 값을 먼저 구한다.

(2) $x+y$, xy의 값으로부터 x^3+y^3의 값을 구하기 위하여 곱셈 공식을 변형한 식

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

를 이용한다.

예제 04 무리수가 서로 같을 조건 409쪽

04-1 답 (1) $a=1$, $b=-3$ (2) $a=-1$, $b=2$

(1) 좌변의 분모를 통분하면

$$\frac{a}{1+\sqrt{3}}+\frac{b}{1-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{a(1-\sqrt{3})+b(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{(a+b)+(-a+b)\sqrt{3}}{1-3}$$
$$=\frac{a+b}{-2}+\frac{-a+b}{-2}\sqrt{3}$$

따라서 $\frac{a+b}{-2}+\frac{-a+b}{-2}\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}$이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{a+b}{-2}=1$, $\frac{-a+b}{-2}=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-3$

(2) 좌변의 분모를 통분하면

$$\frac{a}{3+2\sqrt{2}}+\frac{b}{3-2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{a(3-2\sqrt{2})+b(3+2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$$
$$=\frac{3a+3b+(-2a+2b)\sqrt{2}}{9-8}$$
$$=3(a+b)+2(-a+b)\sqrt{2}$$

따라서 $3(a+b)+2(-a+b)\sqrt{2}=3+6\sqrt{2}$이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=1$, $-a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$

04-2 답 69

$3<\sqrt{15}<4$에서 $7<4+\sqrt{15}<8$이므로
$4+\sqrt{15}$의 정수 부분은 $a=7$, 소수 부분은
$b=(4+\sqrt{15})-7=\sqrt{15}-3$

$$\therefore \frac{a-b}{a+b}=\frac{7-(\sqrt{15}-3)}{7+(\sqrt{15}-3)}=\frac{10-\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}$$
$$=\frac{(10-\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}$$
$$=\frac{40-14\sqrt{15}+15}{16-15}$$
$$=55-14\sqrt{15}$$

따라서 $55-14\sqrt{15}=x+y\sqrt{15}$이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여 $x=55$, $y=-14$
$\therefore x-y=55-(-14)=69$

04-3 답 ④

$(2+\sqrt{3})^{10}=(2+\sqrt{3})^{8}(2+\sqrt{3})^{2}$이므로
$(2-\sqrt{3})^{8}(2+\sqrt{3})^{10}$
$=(2-\sqrt{3})^{8}(2+\sqrt{3})^{8}(2+\sqrt{3})^{2}$
$=\{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\}^{8}(2+\sqrt{3})^{2}$
$=(4-3)^{8}(2+\sqrt{3})^{2}$
$=4+4\sqrt{3}+3$
$=7+4\sqrt{3}$
따라서 $7+4\sqrt{3}=a+b\sqrt{3}$이므로 $a=7$, $b=4$
$\therefore a+b=7+4=11$

개념 콕콕 2 무리함수 417쪽

1 답 ㄱ, ㄴ, ㅁ

ㄷ. $y=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$이므로 무리함수가 아니다.
ㄹ. $y=\sqrt{6}x$는 다항함수이다.
ㅂ. $y=\sqrt{4x^2}=\sqrt{(2x)^2}=|2x|$이므로 무리함수가 아니다.
따라서 무리함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다.

2 답 ①

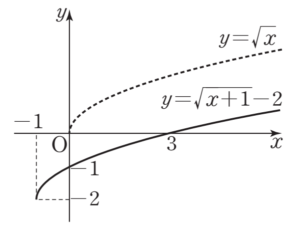
① $a>0$이면 정의역은 $\{x|x\ge 0\}$이고, $a<0$이면 정의역은 $\{x|x\le 0\}$이다.
② $\sqrt{ax}\ge 0$이므로 치역은 $\{y|y\ge 0\}$이다.
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

3 답 (1) 2, 6 (2) 2, -6

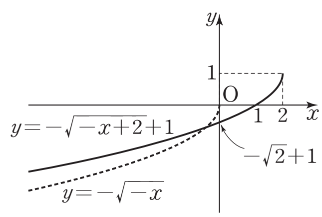
(1) $y=\sqrt{2x-4}+6=\sqrt{2(x-2)}+6$이므로 함수 $y=\sqrt{2x-4}+6$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\boxed{2}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{6}$만큼 평행이동한 것이다.
(2) $y=\sqrt{4-2x}-6=\sqrt{-2(x-2)}-6$이므로 함수 $y=\sqrt{4-2x}-6$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\boxed{2}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{-6}$만큼 평행이동한 것이다.

4 답 (1) 그래프는 풀이 참조, 정의역 : $\{x|x\ge -1\}$, 치역 : $\{y|y\ge -2\}$
(2) 그래프는 풀이 참조, 정의역 : $\{x|x\le 2\}$, 치역 : $\{y|y\le 1\}$
(3) 그래프는 풀이 참조, 정의역 : $\{x|x\le 2\}$, 치역 : $\{y|y\ge -1\}$
(4) 그래프는 풀이 참조, 정의역 : $\{x|x\ge -2\}$, 치역 : $\{y|y\ge 1\}$

(1) 함수 $y=\sqrt{x+1}-2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



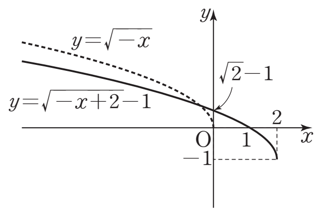
정의역은 $x+1\ge 0$에서 $x\ge -1$이므로 $\{x|x\ge -1\}$, 치역은 $\sqrt{x+1}\ge 0$에서 $\sqrt{x+1}-2\ge -2$이므로 $\{y|y\ge -2\}$이다.
(2) $y=-\sqrt{-x+2}+1=-\sqrt{-(x-2)}+1$
함수 $y=-\sqrt{-x+2}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 정의역은 $-x+2\geq0$에서 $x\leq2$이므로 $\{x|x\leq2\}$, 치역은 $-\sqrt{-x+2}\leq0$에서 $-\sqrt{-x+2}+1\leq1$이므로 $\{y|y\leq1\}$이다.

(3) $y=\sqrt{-x+2}-1=\sqrt{-(x-2)}-1$

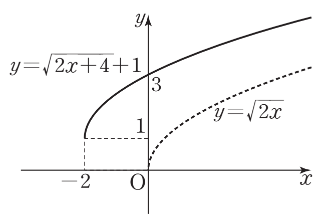
함수 $y=\sqrt{-x+2}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



정의역은 $-x+2\geq0$에서 $x\leq2$이므로 $\{x|x\leq2\}$, 치역은 $\sqrt{-x+2}\geq0$에서 $\sqrt{-x+2}-1\geq-1$이므로 $\{y|y\geq-1\}$이다.

(4) $y=\sqrt{2x+4}+1=\sqrt{2(x+2)}+1$

함수 $y=\sqrt{2x+4}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



정의역은 $2x+4\geq0$에서 $x\geq-2$이므로 $\{x|x\geq-2\}$, 치역은 $\sqrt{2x+4}\geq0$에서 $\sqrt{2x+4}+1\geq1$이므로 $\{y|y\geq1\}$이다.

예제 05 무리함수의 그래프 419쪽

05-1 답 (1) -4 (2) 4

(1) $2-ax\geq0$에서 $ax\leq2$ ...... ㉠

이때 정의역이 $\{x|x\geq-2\}$이므로 $a<0$

㉠의 양변을 a로 나누면 $x\geq\frac{2}{a}$

즉, $\frac{2}{a}=-2$이므로 $a=-1$

또한 치역은 $\sqrt{2-ax}\geq0$에서 $\sqrt{2-ax}+b\geq b$이므로 $\{y|y\geq b\}$ $\therefore b=4$

$\therefore ab=(-1)\times4=-4$

(2) $ax+2\geq0$에서 $ax\geq-2$ ...... ㉠

이때 정의역이 $\{x|x\geq-2\}$이므로 $a>0$

㉠의 양변을 a로 나누면 $x\geq-\frac{2}{a}$

즉, $-\frac{2}{a}=-2$이므로 $a=1$

또한 치역은 $\sqrt{ax+2}\geq0$에서 $-\sqrt{ax+2}+b\leq b$이므로 $\{y|y\leq b\}$ $\therefore b=4$

$\therefore ab=1\times4=4$

05-2 답 (1) -1 (2) 2

(1) 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\,(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x+1)}-3$ ...... ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, -4)$를 지나므로

$-4=-\sqrt{a}-3$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{x+1}-3$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=-3$이므로

$a+b+c=-1$

(2) 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$y=-\sqrt{a(x-1)}+2$ ...... ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{-a}+2$, $\sqrt{-a}=3$ $\therefore a=-9$

$a=-9$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-9x+9}+2$

따라서 $a=-9$, $b=9$, $c=2$이므로

$a+b+c=-9+9+2=2$

05-3 답 ②

주어진 직선의 기울기는 음수이고, y절편은 양수이므로 $a<0$, $b>0$

즉, $-a>0$, $b>0$이고 원점을 지나므로 무리함수 $y=b\sqrt{-ax}$의 그래프의 개형은 ②와 같다.

예제 06 무리함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 421쪽

06-1 답 2

함수 $y=-\sqrt{kx}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sqrt{k(x-2)}+4$ ...... ㉠

㉠의 그래프가 점 $(4,\ 2)$를 지나므로

$2=-\sqrt{k(4-2)}+4,\ \sqrt{2k}=2$

$2k=4 \qquad \therefore k=2$

06-2 답 ③

함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{(x-3)+2}-2=\sqrt{x-1}-2$

이것을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{x-1}-2$

$\therefore y=-\sqrt{x-1}+2$

따라서 $a=-1,\ b=-1,\ c=2$이므로

$a+b+c=-1+(-1)+2=0$

06-3 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. $y=\sqrt{2-x}=\sqrt{-(x-2)}$이므로 함수 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 함수 $y=-2\sqrt{x+1}$의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=\sqrt{2x+2}=\sqrt{2(x+1)}$이므로 함수 $y=\sqrt{2x+2}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=2\sqrt{2-x}=2\sqrt{-(x-2)}$이므로 함수 $y=2\sqrt{2-x}$의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

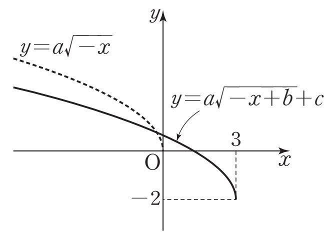
따라서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 그래프가 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

예제 07 무리함수의 그래프를 이용하여 그래프의 개형 구하기 423쪽

07-1 답 ①

함수 $y=a\sqrt{-x+b}+c=a\sqrt{-(x-b)}+c$의 그래프는 함수 $y=a\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림에서

$a>0,\ b=3,\ c=-2$



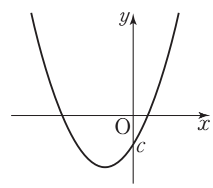
즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는

(i) $a>0$이므로 아래로 볼록

(ii) 축의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{3}{2a}<0$

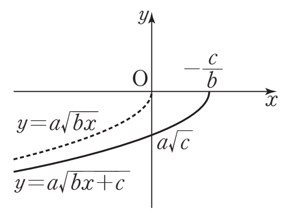
(iii) $c=-2$이므로 y절편은 음수

따라서 구하는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



07-2 답 ⑤

함수 $y=a\sqrt{bx+c}=a\sqrt{b\left(x+\dfrac{c}{b}\right)}$의 그래프는 함수 $y=a\sqrt{bx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{c}{b}$만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) 함수 $y=a\sqrt{bx}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\le0\}$이고 $bx\ge0$이므로 $b<0$

또한 함수 $y=a\sqrt{b\left(x+\dfrac{c}{b}\right)}$의 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,x\le-\dfrac{c}{b}\right\}$이고 그래프에서 $-\dfrac{c}{b}>0$이므로

$c>0\ (\because b<0)$

(ii) 함수 $y=a\sqrt{bx+c}$의 그래프의 y절편이 음수이므로

$a\sqrt{c}<0 \qquad \therefore a<0\ (\because \sqrt{c}>0)$

따라서 유리함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$에서 점근선이

$x=-a>0,\ y=c>0$

이고, $b<0$이므로 구하는 유리함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프의 개형은 ⑤이다.

보충 설명

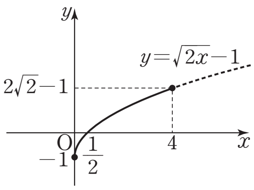
주어진 그래프는 $y=-\sqrt{kx}\ (k<0)$의 그래프를 평행이동한 것이므로 $y=a\sqrt{bx+c}$에서 $a<0,\ b<0$임을 알 수 있다.

예제 08 무리함수의 최대, 최소 425쪽

08-1

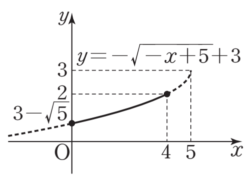
답 (1) 최댓값 : $2\sqrt{2}-1$, 최솟값 : -1
(2) 최댓값 : 2, 최솟값 : $3-\sqrt{5}$

(1) 함수 $y=\sqrt{2x}-1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=\sqrt{2x}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=0$일 때, 최솟값은
$\sqrt{2\times 0}-1=-1$
$x=4$일 때, 최댓값은
$\sqrt{2\times 4}-1=2\sqrt{2}-1$

(2) $y=-\sqrt{-x+5}+3=-\sqrt{-(x-5)}+3$이므로 함수 $y=-\sqrt{-x+5}+3$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=-\sqrt{-x+5}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

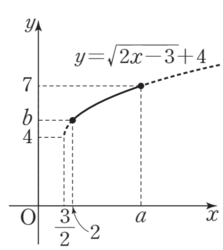


$x=0$일 때, 최솟값은
$-\sqrt{0+5}+3=3-\sqrt{5}$
$x=4$일 때, 최댓값은
$-\sqrt{-4+5}+3=2$

08-2

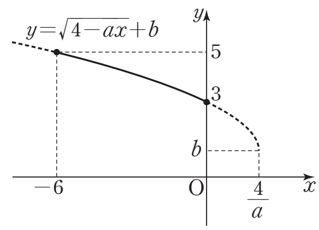
답 (1) 11 (2) 3

(1) $y=\sqrt{2x-3}+4=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+4$이므로 함수 $y=\sqrt{2x-3}+4$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $2\le x\le a$에서 함수 $y=\sqrt{2x-3}+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때, 최솟값은



$b=\sqrt{2\times 2-3}+4=5$
$x=a$일 때, 최댓값은
$\sqrt{2a-3}+4=7$
$\sqrt{2a-3}=3$, $2a-3=9$ $\quad\therefore a=6$
$\therefore a+b=6+5=11$

(2) $y=\sqrt{4-ax}+b=\sqrt{-a\left(x-\frac{4}{a}\right)}+b$이므로 함수 $y=\sqrt{4-ax}+b$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{a}$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $-6\le x\le 0$에서 함수 $y=\sqrt{4-ax}+b$의 그래프는 다음 그림과 같으므로

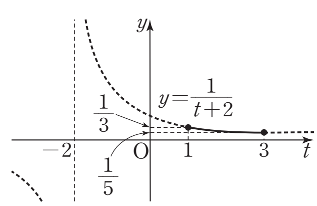


$x=-6$일 때, 최댓값은 $\sqrt{4-a\times(-6)}+b=5$
$\therefore \sqrt{4+6a}+b=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$x=0$일 때, 최솟값은 $\sqrt{4-a\times 0}+b=3$
$2+b=3$ $\quad\therefore b=1$
$b=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $a=2$
$\therefore a+b=2+1=3$

08-3

답 $\frac{8}{15}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)+1}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}$
$\sqrt{x}=t$로 놓으면 $1\le x\le 9$에서 $1\le t\le 3$이고
$y=\frac{1}{t+2}$
즉, 함수 $y=\frac{1}{t+2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{t}$의 그래프를 t축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
그러므로 $1\le t\le 3$에서 함수 $y=\frac{1}{t+2}$의 그래프는 다음 그림과 같다.

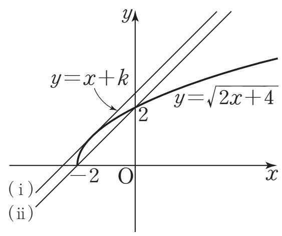


$t=1$일 때, 최댓값은 $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$
$t=3$일 때, 최솟값은 $\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}$
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$

예제 09 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계 427쪽

09-1 답 $2 \le k < \frac{5}{2}$

$y=\sqrt{2x+4}=\sqrt{2(x+2)}$ 이므로 함수 $y=\sqrt{2x+4}$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.



(i) 함수 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$x+k=\sqrt{2x+4}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+2(k-1)x+k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-1\times(k^2-4)=0$

$-2k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{2}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(-2, 0)$을 지날 때,

$0=-2+k \qquad \therefore k=2$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$2 \le k < \frac{5}{2}$

09-2 답 $3 \le k < \frac{15}{4}$

주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

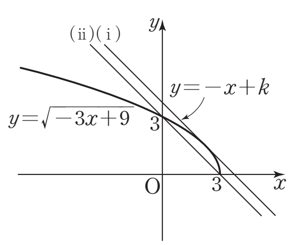
$\sqrt{ax+b}=\sqrt{a(x-3)}$

$\therefore b=-3a$ …… ㉠

또한 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로 $3=\sqrt{b} \qquad \therefore b=9$

$b=9$를 ㉠에 대입하면 $a=-3$이므로 주어진 함수는

$y=\sqrt{-3x+9}$



(i) 함수 $y=\sqrt{-3x+9}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때,

$-x+k=\sqrt{-3x+9}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+(-2k+3)x+k^2-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(-2k+3)^2-4\times(k^2-9)=0$

$-12k+45=0 \qquad \therefore k=\frac{15}{4}$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(3, 0)$을 지날 때,

$0=-3+k \qquad \therefore k=3$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

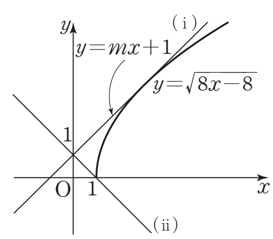
$3 \le k < \frac{15}{4}$

09-3 답 ④

$\sqrt{8x-8}=\sqrt{8(x-1)}$ 이므로 함수 $y=\sqrt{8x-8}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{8x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

또한 직선 $y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$을 지난다.

두 집합 A, B의 교집합이 공집합이 아니므로 직선 $y=mx+1$과 함수 $y=\sqrt{8x-8}$의 그래프는 한 점에서 만나거나 서로 다른 두 점에서 만난다.



(i) 함수 $y=\sqrt{8x-8}$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 접할 때,

$mx+1=\sqrt{8x-8}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$m^2x^2+2(m-4)x+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(m-4)^2-m^2\times9=0$

$m^2+m-2=0$, $(m-1)(m+2)=0$

$\therefore m=1$ $(\because m>0)$

(ii) 직선 $y=mx+1$이 점 $(1, 0)$을 지날 때,

$0=m+1 \qquad \therefore m=-1$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-1 \le m \le 1$

예제 10 무리함수의 역함수 429쪽

10-1

답 (1) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-2\ (x\ge1)$

(2) $y=-(x-2)^2+3\ (x\ge2)$

(3) $y=\frac{1}{3}x^2-2\ (x\le0)$

(4) $y=-(x-2)^2-1\ (x\le2)$

(1) 함수 $y=\sqrt{2x+4}+1$의 치역은 $\{y|y\ge1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge1\}$이다.

$y=\sqrt{2x+4}+1$을 x에 대하여 풀면

$y-1=\sqrt{2x+4}$, $(y-1)^2=2x+4$

$\therefore x=\frac{1}{2}(y-1)^2-2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{2}(x-1)^2-2\ (x\ge1)$

(2) 함수 $y=\sqrt{-x+3}+2$의 치역은 $\{y|y\ge2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge2\}$이다.

$y=\sqrt{-x+3}+2$를 x에 대하여 풀면

$y-2=\sqrt{-x+3}$, $(y-2)^2=-x+3$

$\therefore x=-(y-2)^2+3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-(x-2)^2+3\ (x\ge2)$

(3) 함수 $y=-\sqrt{3x+6}$의 치역은 $\{y|y\le0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le0\}$이다.

$y=-\sqrt{3x+6}$을 x에 대하여 풀면

$y^2=3x+6$

$\therefore x=\frac{1}{3}y^2-2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{3}x^2-2\ (x\le0)$

(4) 함수 $y=-\sqrt{-x-1}+2$의 치역은 $\{y|y\le2\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\le2\}$이다.

$y=-\sqrt{-x-1}+2$를 x에 대하여 풀면

$y-2=-\sqrt{-x-1}$, $(y-2)^2=-x-1$

$\therefore x=-(y-2)^2-1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-(x-2)^2-1\ (x\le2)$

10-2

답 32

함수 $f(x)=\sqrt{3x-6}+9$에서 $3x-6\ge0$이므로 정의역은 $\{x|x\ge2\}$이다.

또한 $\sqrt{3x-6}\ge0$에서 $\sqrt{3x-6}+9\ge9$이므로 치역은 $\{y|y\ge9\}$이다.

$y=\sqrt{3x-6}+9$로 놓고 x에 대하여 풀면

$y-9=\sqrt{3x-6}$, $3x-6=(y-9)^2$

$3x=y^2-18y+87$

$\therefore x=\frac{1}{3}y^2-6y+29$

x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$y=\frac{1}{3}x^2-6x+29$

$\therefore g(x)=\frac{1}{3}x^2-6x+29$

함수 $g(x)$의 정의역은 함수 $f(x)$의 치역이므로 $\{x|x\ge9\}$이다.

따라서 $a=-6$, $b=29$, $c=9$이므로

$a+b+c=-6+29+9=32$

10-3

답 ③

$f^{-1}(x)=k(x-2)^2+4\ (k<0,\ x\ge2)$로 놓으면

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$k(4-2)^2+4=0$, $4k=-4$

$\therefore k=-1$

$\therefore f^{-1}(x)=-(x-2)^2+4\ (x\ge2)$

$y=-(x-2)^2+4$로 놓고 x에 대하여 풀면

$(x-2)^2=-y+4$

$x-2=\sqrt{-y+4}\ (\because x\ge2)$

$\therefore x=\sqrt{-y+4}+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\sqrt{-x+4}+2$

$\therefore f(x)=\sqrt{-x+4}+2$

따라서 $a=-1$, $b=4$, $c=2$이므로

$a+b+c=-1+4+2=5$

보충 설명

$f(x)=\sqrt{ax+b}+c\ (a\ne0)$에서

$y=\sqrt{ax+b}+c\ (y\ge c)$로 놓고 x에 대하여 풀면

$y-c=\sqrt{ax+b}$, $(y-c)^2=ax+b$

$\therefore x=\frac{1}{a}(y-c)^2-\frac{b}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{a}(x-c)^2-\frac{b}{a}\ (x\ge c)$

따라서 주어진 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+c$의 역함수를

$f^{-1}(x)=k(x-2)^2+4\ (k<0,\ x\ge2)$

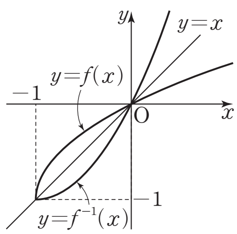
로 놓을 수 있다.

예제 11 무리함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점

431쪽

11-1 답 $\sqrt{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}-1$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+1}-1=x$에서 $\sqrt{x+1}=x+1$

양변을 제곱하면

$x+1=x^2+2x+1$, $x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

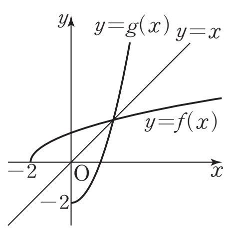
$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$

따라서 $\mathrm{P}(0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(-1,\ -1)$ 또는 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(0,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-1-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$

11-2 답 ②

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x\ge 0)$

따라서 교점의 좌표가 $(2,\ 2)$이므로

$a=2$, $b=2$

$\therefore a+b=2+2=4$

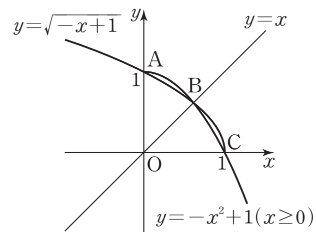
보충 설명

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이기도 하다. 하지만 그 역은 성립하지 않는다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 반드시 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이 되는 것은 아니다.

예를 들어 무리함수 $y=\sqrt{-x+1}$의 그래프와 그 역함수 $y=-x^2+1\ (x\ge 0)$의 그래프는 다음 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 만난다.



이때 점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이지만 나머지 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$은 직선 $y=x$ 위의 점이 아니다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 이외에 더 있을 수도 있다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점을 찾을 때에는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점을 이용해서 찾되 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 개형을 그려 두 그래프의 교점 중 직선 $y=x$ 위에 있지 않은 것이 있는지 알아보고 방정식 $f(x)=x$를 푸는 것이 좋다.

이때 다음 사실을 이용하면 편리하다.

(1) 함수 $y=f(x)$가 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 모두 직선 $y=x$ 위에 있다.

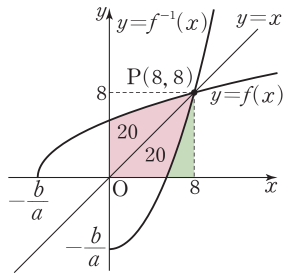
(2) 함수 $y=f(x)$가 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 함수일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 1개, 3개, ⋯이고, 이 중에서 직선 $y=x$ 위에 있는 교점은 1개이다. 이때 교점이 1개이면 이 점은 반드시 직선 $y=x$ 위에 있다.
참고로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있지 않은 점일 때, 그 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점도 교점이 된다.

(3) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 무수히 많다.

11-3 답 12

$f(x)=\sqrt{ax+b}=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}$이므로 함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a>0$, $\dfrac{b}{a}>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 서로 같다.
따라서 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $x=8$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times8\times8-20=12$

기본 다지기 432쪽～433쪽

1 (1) $\dfrac{2}{a}$ (2) $\dfrac{-2}{\sqrt{a^2+1}}$ **2** (1) $2\sqrt{2}$ (2) 15 **3** 3
4 16 **5** 6 **6** 8 **7** (1) 6 (2) 60
8 (1) 2 (2) 12 **9** 5 **10** 7

1 (1) $0<a<1$에서 $\dfrac{1}{a}>1$이므로

$a+\dfrac{1}{a}>0$, $a-\dfrac{1}{a}<0$

$\therefore \sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}+2}+\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}-2}$

$=\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2}$

$=\left|a+\dfrac{1}{a}\right|+\left|a-\dfrac{1}{a}\right|$

$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{2}{a}$

(2) $\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}$

$=\sqrt{1-\dfrac{2a}{a^2+1}}-\sqrt{1+\dfrac{2a}{a^2+1}}$

$=\sqrt{\dfrac{a^2+1-2a}{a^2+1}}-\sqrt{\dfrac{a^2+1+2a}{a^2+1}}$

$=\sqrt{\dfrac{(a-1)^2}{a^2+1}}-\sqrt{\dfrac{(a+1)^2}{a^2+1}}$

$=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{a^2+1}}-\dfrac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}$

$=\dfrac{a-1}{\sqrt{a^2+1}}-\dfrac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}$ ($\because a\geq1$)

$=\dfrac{a-1-(a+1)}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{-2}{\sqrt{a^2+1}}$

보충 설명

(1)에서 $0<a<1$이므로 $\dfrac{1}{a}$도 양수이고, 두 양수의 합은 양수이므로 $a+\dfrac{1}{a}>0$

또한 $0<a<1$에서 $\dfrac{1}{a}>1$이므로 $\dfrac{1}{a}>a$

$\therefore a-\dfrac{1}{a}<0$

2 (1) $x^2-6x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-6+\dfrac{1}{x}=0$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=6$

따라서 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\dfrac{1}{x}+2=6+2=8$이므로

$\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ $\left(\because \sqrt{x}>0,\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}>0\right)$

(2) $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2}=5+2\sqrt{6}$

$\therefore x-5=2\sqrt{6}$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$x^2-10x+25=24$

$x^2-10x=-1$

$\therefore (x^2-10x+6)(x^2-10x+4)$

$=(-1+6)\times(-1+4)$

$=5\times3=15$

3 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{2(x+3)-3}+2$

$\therefore y=\sqrt{2x+3}+2$

이것을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{2x+3}+2$

$\therefore y=-\sqrt{2x+3}-2$

이 함수의 식이 $y=-\sqrt{ax+b}+c$와 일치하므로

$a=2,\ b=3,\ c=-2$

$\therefore a+b+c=2+3+(-2)=3$

4 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=a\sqrt{x}\,(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -9만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 구하는 함수의 식을

$y=a\sqrt{x+9}-2$

로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(-5,\ 2)$를 지나므로

$2=2a-2 \qquad \therefore a=2$

$\therefore y=2\sqrt{x+9}-2$

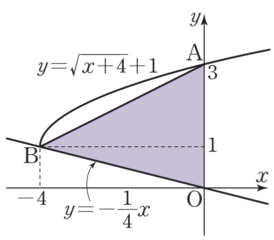
따라서 $\mathrm{A}(-8,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$이므로 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$

⊕ 보충 설명

함수 $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프가 지나는 점의 좌표가 두 개밖에 주어져 있지 않으므로 두 점의 좌표를 대입하는 방법으로는 세 상수 a, b, c의 값을 구할 수 없다.

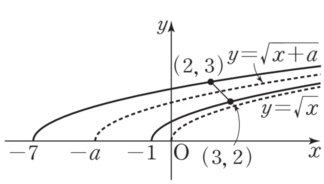
5 함수 $y=\sqrt{x+4}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같고, $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(-4,\ 1)$이다.



따라서 구하는 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$

6 함수 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



함수 $y=\sqrt{x+a}$의 그래프가 두 점 $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$를 이은 선분과 만나도록 평행이동하면

(ⅰ) 점 $(3,\ 2)$를 지날 때, 실수 a의 값은 최소이므로

$\sqrt{3+a}=2 \qquad \therefore a=1$

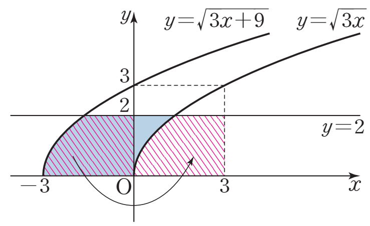
(ⅱ) 점 $(2,\ 3)$을 지날 때, 실수 a의 값은 최대이므로

$\sqrt{2+a}=3 \qquad \therefore a=7$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $M=7$, $m=1$이므로

$M+m=7+1=8$

7 (1) $y=\sqrt{3x+9}=\sqrt{3(x+3)}$이므로 함수 $y=\sqrt{3x+9}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것으로 다음 그림에서 빗금친 부분의 넓이는 서로 같다.



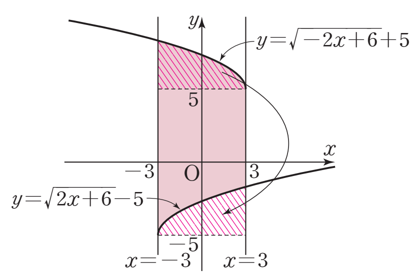
따라서 구하는 도형의 넓이는 가로의 길이가 3, 세로의 길이가 2인 직사각형의 넓이와 같으므로

$3\times 2=6$

(2) $y=\sqrt{2x+6}-5=\sqrt{2(x+3)}-5$이므로 함수 $y=\sqrt{2x+6}-5$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이고,

$y=\sqrt{-2x+6}+5=\sqrt{-2(x-3)}+5$이므로 함수 $y=\sqrt{-2x+6}+5$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

즉, 두 함수 $y=\sqrt{2x+6}-5$, $y=\sqrt{-2x+6}+5$의 그래프는 다음 그림과 같고, 두 빗금친 부분의 넓이는 서로 같다.

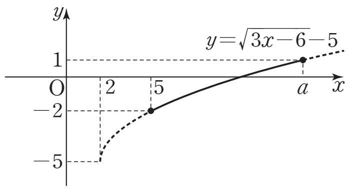


따라서 구하는 도형의 넓이는 가로의 길이가 6, 세로의 길이가 10인 직사각형의 넓이와 같으므로

$6\times 10=60$

8 (1) $y=\sqrt{a-x}+b=\sqrt{-(x-a)}+b$이므로 함수 $y=\sqrt{a-x}+b$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것으로 $x=a$에서 최솟값 b를 가진다.
따라서 $a=4$, $b=-2$이므로
$a+b=4+(-2)=2$

(2) $y=\sqrt{3x-6}-5=\sqrt{3(x-2)}-5$이므로 함수 $y=\sqrt{3x-6}-5$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $5\le x\le a$에서 함수 $y=\sqrt{3x-6}-5$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=5$일 때, 최솟값은
$b=\sqrt{3\times5-6}-5=-2$
$x=a$일 때, 최댓값 1을 가지므로
$\sqrt{3a-6}-5=1$, $\sqrt{3a-6}=6$
$3a-6=36$, $3a=42$ $\quad\therefore a=14$
$\therefore a+b=14+(-2)=12$

9 $f(x)=\sqrt{ax+b}$라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로
$1=\sqrt{3a+b}$
$\therefore 3a+b=1$ ...... ㉠
또한 역함수의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 3)$을 지난다.
따라서 $3=\sqrt{a+b}$이므로
$a+b=9$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-4$, $b=13$
$\therefore 2a+b=2\times(-4)+13=5$

10
$$\begin{aligned} f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f&=f\circ(f^{-1}\circ g^{-1})\circ f\\ &=(f\circ f^{-1})\circ(g^{-1}\circ f)\\ &=g^{-1}\circ f \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)&=(g^{-1}\circ f)(2)\\ &=g^{-1}(f(2))\\ &=g^{-1}(5)\end{aligned}$$
이때 $g^{-1}(5)=a$라고 하면 $g(a)=5$이므로
$\sqrt{4a-3}=5$, $4a=28$
$\therefore a=7$
$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)=7$

보충 설명

유리함수나 무리함수는 모두 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 따라서 함수 $g(x)$의 역함수를 직접 구하여 $g^{-1}(5)$의 값을 구할 수도 있지만 역함수의 성질
$y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$
를 이용하는 것이 훨씬 편리하다.

실력 다지기 434쪽～435쪽

11 ⑤ **12** ② **13** 0
14 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$
15 10 **16** $\dfrac{9}{4}$ **17** $-\dfrac{20}{3}$ **18** $0<k<\dfrac{1}{2}$
19 16 **20** $-\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$

11 **접근 방법** | 두 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$이면 $a\ge0$, $b<0$임을 이용한다.

$\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}=-\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$에서
$x-1\ge0$, $x-2<0$
$\therefore 1\le x<2$
따라서 $x+1>0$, $x-4<0$이므로
$$\begin{aligned}\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-4)^2}&=|x+1|+|x-4|\\ &=(x+1)-(x-4)\\ &=5\end{aligned}$$

12 **접근 방법** | 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 역함수 관계에 있음을 이용한다.

함수 $g(x)=\sqrt{5x-k}$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$이다.
$y=\sqrt{5x-k}$로 놓고 x에 대하여 풀면
$x=\dfrac{1}{5}y^2+\dfrac{1}{5}k$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k\ (x\ge0)$

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 역함수 관계이고, 두 함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.

$\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k=x$에서

$x^2-5x+k=0$

이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라고 하면

(i) $D=(-5)^2-4\times1\times k>0$

$25-4k>0 \qquad \therefore k<\frac{25}{4}$

(ii) $\alpha\beta=k\geq0$

(i), (ii)에서 $0\leq k<\frac{25}{4}$

따라서 구하는 정수 k는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 7개이다.

⊕ 보충 설명

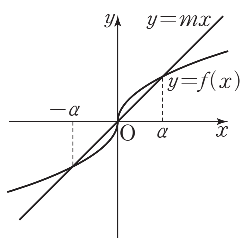
계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$의 두 실근을 α, β라 하고, 판별식을 D라고 할 때, 이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지려면

$D>0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta\geq0$

을 만족시켜야 한다.

13 **접근 방법 |** 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것임을 이용하여 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x} & (x\geq0)\\ -\sqrt{-2x} & (x<0)\end{cases}$의 그래프를 좌표평면 위에 그린 후, 원점을 지나는 직선인 $y=mx$와 서로 다른 세 점에서 만나는 경우를 찾아본다.

두 함수 $y=\sqrt{2x}$, $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x} & (x\geq0)\\ -\sqrt{-2x} & (x<0)\end{cases}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=mx$와 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 α라고 하면 직선 $y=mx$와 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 $-\alpha$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 원점을 지나는 직선 $y=mx$가 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x좌표의 합은

$\alpha+0+(-\alpha)=0$

⊕ 보충 설명

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-x, -y)=0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-f(-x)$

14 **접근 방법 |** 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 모두 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위가 아닌 곳에도 있을 수 있다.

함수 $y=\sqrt{1-x}\,(x\leq1)$의 역함수는

$y=1-x^2\,(x\geq0)$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 $0\leq x\leq1$에서 방정식 $\sqrt{1-x}=1-x^2$의 실근과 같다.

$\sqrt{1-x}=1-x^2$의 양변을 제곱하면

$1-x=1-2x^2+x^4$

$x^4-2x^2+x=0$

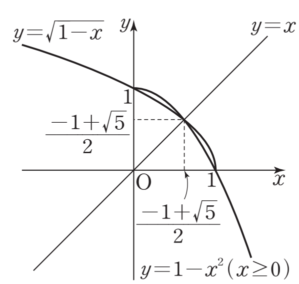
$x(x-1)(x^2+x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 $0\leq x\leq1$을 만족시키는 것은

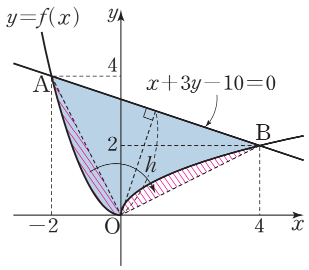
$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 함수 $f(x)=\sqrt{1-x}$의 그래프와 그 역함수 $f^{-1}(x)=1-x^2\,(x\geq0)$의 그래프는 다음 그림과 같이 세 점 $(0, 1)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$에서 만난다.



15 **접근 방법** | 주어진 부분의 넓이를 직접 구하기 어려우므로 도형의 일부를 잘라 다른 곳에 붙여 넓이를 구할 수 있는 모양으로 만들어 본다.

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 함수 $y=x^2\ (x\le 0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, 이것을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치한다.
또한 점 A도 y축에 대하여 대칭이동한 후, 이 점을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 점 B가 된다.
즉, 다음 그림에서 빗금친 부분의 넓이는 서로 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이와 같다.
삼각형 AOB에서 밑변을 $\overline{AB}$라고 하면 높이 h는 원점과 직선 $x+3y-10=0$ 사이의 거리이다.

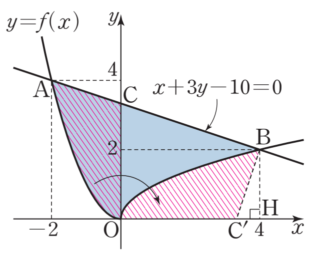
$\overline{AB}=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$

$h=\dfrac{|0+3\times 0-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$

$\therefore\ \triangle AOB=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$

다른 풀이

직선 $x+3y-10=0$이 y축과 만나는 점을 C라고 하면 $C\left(0,\ \dfrac{10}{3}\right)$이다.
점 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $C'\left(\dfrac{10}{3},\ 0\right)$이라 하고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 다음 그림에서 빗금친 부분의 넓이는 서로 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 사다리꼴 COHB의 넓이에서 삼각형 BC′H의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\dfrac{1}{2}\times\left(2+\dfrac{10}{3}\right)\times 4-\dfrac{1}{2}\times\left(4-\dfrac{10}{3}\right)\times 2=\dfrac{32}{3}-\dfrac{2}{3}=10$

16 **접근 방법** | 점 $(a,\ b)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이면 $b=f(a)$임을 이용한다.

점 $A(a,\ b)$는 함수 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프 위의 점이므로
$b=\sqrt{2-a},\ b^2=2-a$
$\therefore\ a=2-b^2$
이때 점 A는 제1사분면 위의 점이므로 $a>0,\ b>0$
즉, $b>0$이고 $a=2-b^2>0$이므로
$0<b<\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{OB}+\overline{OC}&=a+b=2-b^2+b\\&=-b^2+b+2\\&=-\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\end{aligned}$$

따라서 $b=\dfrac{1}{2}$일 때, $\overline{OB}+\overline{OC}$의 최댓값은 $\dfrac{9}{4}$이다.

보충 설명

$b=\dfrac{1}{2}$일 때, $a=2-b^2=2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$이므로 점 $A\left(\dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$은 제1사분면 위의 점이다.

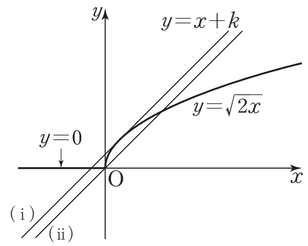
17 **접근 방법** | $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}=\dfrac{2}{3}$임을 이용하여 점 P의 y좌표를 구한다.

직선 $y=\dfrac{2}{3}x+a$의 기울기가 $\dfrac{2}{3}$이므로
$\overline{AQ}=3k\ (k>0)$라고 하면
$\overline{PQ}=2k$ …… ㉠
삼각형 PAQ의 넓이가 12이므로
$\triangle PAQ=\dfrac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times 3k\times 2k=3k^2$
$3k^2=12,\ k^2=4 \qquad \therefore\ k=2\ (\because\ k>0)$
㉠에서 $\overline{PQ}=4$이므로 점 P의 y좌표는 4이다.
이때 점 P는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 점이므로 점 P의 좌표는 $(16,\ 4)$이다.
따라서 직선 $y=\dfrac{2}{3}x+a$가 점 $(16,\ 4)$를 지나므로
$4=\dfrac{2}{3}\times 16+a \qquad \therefore\ a=-\dfrac{20}{3}$

18 **접근 방법** | $x\ge 0$인 경우와 $x<0$인 경우로 나누어 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프를 그린다.

$x\ge 0$일 때, $y=\sqrt{x+|x|}=\sqrt{x+x}=\sqrt{2x}$
$x<0$일 때, $y=\sqrt{x+|x|}=\sqrt{x-x}=0$

따라서 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$x+k=\sqrt{2x}$의 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=2x$

$\therefore\ x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-1\times k^2=0$

$-2k+1=0 \qquad \therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(0,\ 0)$을 지날 때,

$0=0+k \qquad \therefore\ k=0$

(i), (ii)에서 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나는 k의 값의 범위는

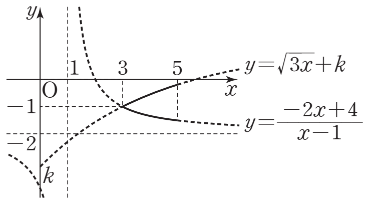
$0<k<\dfrac{1}{2}$

보충 설명

함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 $k<0$ 또는 $k>\dfrac{1}{2}$일 때 각각 한 점에서 만나고, $k=0$ 또는 $k=\dfrac{1}{2}$일 때 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

19 **접근 방법** | $3\le x\le 5$에서 유리함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$의 그래프를 그린 후, 무리함수 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프를 위, 아래로 평행이동하면서 한 점에서 만나는 경우를 찾아본다.

$3\le x\le 5$에서 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-2$의 그래프와 함수 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지날 때, 실수 k가 최댓값을 가지므로

$-1=3+k$

$\therefore\ k=-4$

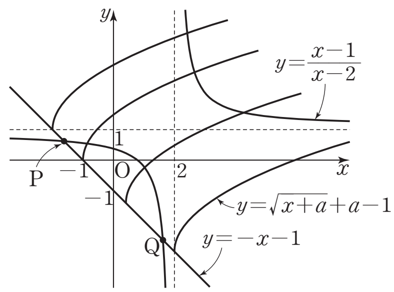
따라서 $M=-4$이므로 $M^2=16$

20 **접근 방법** | 함수 $y=\sqrt{x+a}+b$의 그래프의 시작점은 $(-a,\ b)$임을 이용한다.

$y=\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-2+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+1$이므로 함수 $y=\dfrac{x-1}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

또한 함수 $y=\sqrt{x+a}+a-1$의 그래프의 시작점 $(-a,\ a-1)$은 직선 $y=-x-1$ 위에 있다.

따라서 두 함수 $y=\dfrac{x-1}{x-2}$, $y=\sqrt{x+a}+a-1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=\dfrac{x-1}{x-2}$의 그래프와 직선 $y=-x-1$의 두 교점 P, Q에 대하여 선분 PQ 위의 점이 함수 $y=\sqrt{x+a}+a-1$의 그래프의 시작점이 되어야 한다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 구하면

$\dfrac{x-1}{x-2}=-x-1$에서

$x-1=(-x-1)(x-2)$

$x-1=-x^2+x+2,\ x^2=3$

$\therefore\ x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

따라서 두 점 P, Q의 x좌표는 각각 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$이므로

$-\sqrt{3}\le -a\le\sqrt{3}$

$\therefore\ -\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$

보충 설명

함수 $y=\dfrac{x-1}{x-2}$의 그래프를 그린 후 두 함수 $y=\dfrac{x-1}{x-2}$, $y=\sqrt{x+a}+a-1$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 함수 $y=\sqrt{x+a}+a-1$의 그래프를 그려 본다.

기출 다지기 436쪽

21 ④ **22** ① **23** ⑤

21 **접근 방법 |** 유리함수와 무리함수의 치역을 각각 구해서 비교해 본다.

함수 $f(x)$는 $-1 \le x \le 0$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하고,

$f(-1)=0$, $f(0)=1$이므로

$A=\{y \mid 0 \le y \le 1\}$

$p>0$이므로 함수 $g(x)$는 $-1 \le x \le 0$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다.

이때 $A=B$이므로

$g(-1)=1$, $g(0)=0$

$\dfrac{p}{-2}+q=1$, $-p+q=0$

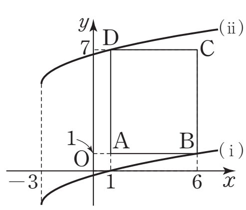
위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=2$, $q=2$

$\therefore p+q=4$

22 **접근 방법 |** 함수 $y=\sqrt{x+3}+a$의 그래프의 시작점이 점 $(-3,\ a)$임을 이용하여 그래프를 위, 아래로 평행이동하면서 직사각형과 만나는 경우를 찾아본다.

함수 $y=\sqrt{x+3}+a$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.



(i) 함수 $y=\sqrt{x+3}+a$의 그래프가 점 B$(6,\ 1)$을 지날 때,

$1=\sqrt{9}+a \qquad \therefore a=-2$

(ii) 함수 $y=\sqrt{x+3}+a$의 그래프가 점 D$(1,\ 7)$을 지날 때,

$7=\sqrt{4}+a \qquad \therefore a=5$

(i), (ii)에서 $-2 \le a \le 5$이므로 정수 a는 -2, -1, $\cdots$, 5의 8개이다.

23 **접근 방법 |** 조건 ㈎, ㈏를 만족시키도록 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보고, 그래프를 이용하여 a, k의 값을 구한다.

조건 ㈎에서 함수 f의 치역이 $\{y \mid y>2\}$이므로 함수 $f(x)$는 2보다 큰 모든 실수를 함숫값으로 가져야 한다.

또한 조건 ㈏에서 함수 $f(x)$가 일대일함수이다.

$y=\dfrac{2x+3}{x-2}$에 $x=3$을 대입하면

$y=\dfrac{2\times3+3}{3-2}=9$

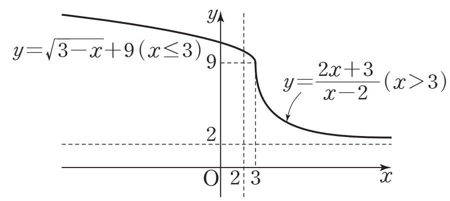
이므로 조건 ㈎, ㈏를 만족시키려면

$f(3)=\sqrt{3-3}+a=9$에서

$a=9$

$\therefore f(x)=\sqrt{3-x}+9\ (x \le 3)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(2)=\sqrt{3-2}+9=10$이므로

$f(2)f(k)=10f(k)=40$에서

$f(k)=4$

$2<f(k)=4<9$이므로 위의 그림에서 $k>3$임을 알 수 있다.

따라서 $f(k)=\dfrac{2k+3}{k-2}=4$이므로

$2k+3=4k-8$

$\therefore k=\dfrac{11}{2}$

MEMO

MEMO