

최상위의 수학



정답과 풀이



1 삼각비

STEP 주제별 실력다지기

7~14쪽

- | | | | | |
|--|--|--------------------------------------|---|-----------------------------|
| 1 (1) $\frac{7}{5}$ (2) $\frac{7}{5}$ (3) $\frac{25}{12}$ | 2 $\frac{204}{65}$ | 3 $\frac{7}{6}$ | 4 $-\frac{3}{13}$ | 5 $\frac{156}{5}$ cm |
| 6 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 1 | 7 ③ | 8 30° | 9 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 10 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm |
| 12 $\frac{8}{3}$ | 13 (1) \overline{DE} (2) $\sin x < \tan x$ | 14 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | |
| 15 (1) $x=2+2\sqrt{3}, y=2\sqrt{6}$ (2) $x=12(\sqrt{3}-1), y=6\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$ | | 16 $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm | | |
| 17 $\frac{5(2-\sqrt{3})}{2}$ m | 18 16.8 m | 19 $50(\sqrt{3}+1)$ m | 20 $100\sqrt{6}$ m | 21 $2-\sqrt{3}$ |
| 23 (1) $6\sqrt{2}$ cm ² (2) $8\sqrt{3}$ cm ² (3) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm ² (4) $21\sqrt{3}$ cm ² | 24 30° | 25 $3(\sqrt{3}-1)$ cm | | |
| 26 (1) $4\sqrt{3}$ cm (2) $2\sqrt{10}$ cm | 27 $150\sqrt{3}$ cm ² | 28 $200(\sqrt{2}+1)$ cm ² | 29 (1) $8(\sqrt{2}-1)$ cm (2) $128(\sqrt{2}-1)$ cm ² | |
| 30 (1) 2 (2) 3 | 31 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ | 32 $\frac{7}{5}$ | | |

최상위 01

NOTE 삼각비의 제곱 관계

원은 한 점에서부터 일정한 거리에 있는 모든 점들의 모임이다. 여기서 한 점이 원의 중심이고 일정한 거리는 원의 반지름이 된다. 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 좌표평면 위의 원점에 놓고 반지름이 1인 원을 그린 후에 원 위의 한 점 $P(x, y)$ 를 잡으면

$\triangle OHP$ 에서 피타고라스 정리에 의해

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

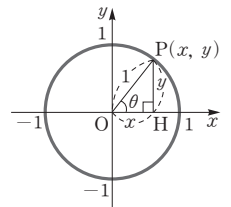
이것을 반지름이 1인 원의 방정식이라 한다.

이때 $\cos \theta = \frac{x}{1} = x, \sin \theta = \frac{y}{1} = y \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

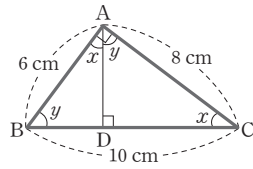
참고 $(\sin \theta)^2$ 는 $\sin^2 \theta, (\cos \theta)^2$ 는 $\cos^2 \theta$ 로 표현한다.



문제 풀이

1 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$ 에서 피타고라스정리에 의해

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(\text{cm})$$



$$\angle ACD = 90^\circ - \angle CAD = \angle BAD = \angle x$$

$$\angle ABD = 90^\circ - \angle BAD = \angle CAD = \angle y$$

$$(1) \sin x = \sin C = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\sin y = \sin B = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin x + \sin y = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

$$(2) \cos x = \cos C = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos y = \cos B = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos x + \cos y = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

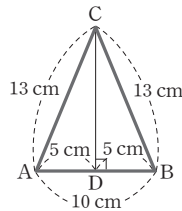
$$(3) \tan x = \tan C = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\tan y = \tan B = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \tan x + \tan y = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$$

2 오른쪽 그림의 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 D라 하면 \overline{CD} 는 \overline{AB} 를 이등분하므로

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm})$$



$\triangle ADC$ 에서

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{cm})$$

$$\sin A = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos B = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{5}{13}$$

$$\tan A = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{12}{5}$$

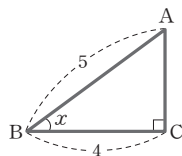
$$\therefore (\sin A + \cos B) \times \tan A = \left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\right) \times \frac{12}{5} = \frac{204}{65}$$

TIP 삼각비는 직각삼각형에서만 결정된다.

3 오른쪽 그림과 같이 $\cos x = \frac{4}{5}$ 인

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$



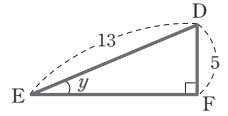
$$\therefore \tan x = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{3}{4}$$

$$\sin y = \frac{5}{13} \text{인 직각삼각형 DEF에서}$$

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{DE}^2 - \overline{DF}^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

$$\therefore \tan y = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore \tan x + \tan y = \frac{3}{4} + \frac{5}{12} = \frac{7}{6}$$



4 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서

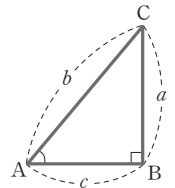
$$\sin A = \frac{a}{b}, \cos A = \frac{c}{b}$$

한편, $\sin A : \cos A = 5 : 4$

$$\text{이므로 } \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{5}{4}$$

$$\tan A = \frac{a}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \frac{\tan A - 2}{\tan A + 2} = \frac{\frac{5}{4} - 2}{\frac{5}{4} + 2} = \frac{5 - 8}{5 + 8} = -\frac{3}{13}$$



5 오른쪽 그림에서

$$\sin B = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \cos(\angle BAD)$$

이므로 $\angle BAD = \angle C$

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$$

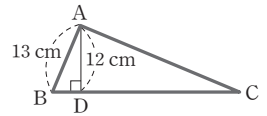
$$= \angle C + (90^\circ - \angle C) = 90^\circ$$

$\triangle ABD$ 에서 $\overline{BD} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5(\text{cm})$ 이고,

$\triangle ABD \sim \triangle CAD$ 이므로

$$\overline{BA} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{AD} \text{에서 } 13 : \overline{AC} = 5 : 12, 5\overline{AC} = 156$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{156}{5} \text{ cm}$$



6 (1) $\sin^2 60^\circ + \tan 30^\circ \times \cos 30^\circ + \cos^2 60^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

(2) $\frac{1}{\tan 60^\circ - 1} \div \frac{3 \tan 30^\circ + 1}{4 \cos 60^\circ}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \div \frac{3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{4 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2}{3 - 1} = 1$$

7 ① (주어진 식) = $0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} + 0 = -1$

② (주어진 식) = $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times 1 \times 1$
 $= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 2 = -1$

③ (주어진 식) = $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

④ (주어진 식) = $0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} = 0$

⑤ (주어진 식) = $\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 2 \times 1 = 3 - 2 = 1$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

TIP x 의 값이 0° 에서 90° 로 증가하면

(1) $\sin x \Rightarrow 0$ 에서 1로 증가

(2) $\cos x \Rightarrow 1$ 에서 0으로 감소

(3) $\tan x \Rightarrow 0$ 에서 무한히 증가

8 $\tan A = x$ 라 하면 $\frac{1-x}{1+x} = 2 - \sqrt{3}$

$1-x = (2-\sqrt{3})(1+x), (\sqrt{3}-3)x = 1-\sqrt{3}$

$\therefore x = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 $\angle A = 30^\circ$

9 $\triangle ABC$ 에서

$\angle B = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$

$\triangle ADC$ 에서

$\angle CAD = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$

$\triangle ABD$ 에서

$\angle BAD = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$

\therefore (주어진 식) = $\frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} + \tan 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

10 $\angle BAC = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$ 이므로

$\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$

$\triangle ABC$ 에서

$\sin 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ 이므로

$\overline{AC} = \overline{AB} \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2(\text{cm})$

$\cos 30^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 이므로

$\overline{BC} = \overline{AB} \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$

$\triangle ADC$ 에서

$\tan 30^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$ 이므로

$\overline{CD} = \overline{AC} \tan 30^\circ = 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$

$\therefore \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$

11 $15^\circ \leq \angle x \leq 60^\circ$ 이므로

$0^\circ \leq 2\angle x - 30^\circ \leq 90^\circ$

$\cos(2x - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$2\angle x - 30^\circ = 30^\circ \quad \therefore \angle x = 30^\circ$

$\therefore \tan x = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

12 $\tan A = 2$ 이므로 오른쪽 그림과 같은

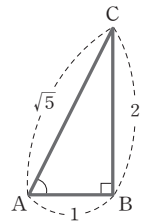
직각삼각형 ABC 에서

$\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos A = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \frac{3 \sin A + 2 \cos A}{2 \sin A - \cos A} = \frac{3 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5}}{2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{8}{3}$



13 (1) $\triangle ADE$ 에서

$\tan x = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \overline{DE} (\because \overline{AD} = 1)$

(2) $\sin x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \overline{BC} (\because \overline{AC} = 1)$ 이고

$\overline{BC} < \overline{DE}$ 이므로 $\sin x < \tan x$

TIP 반지름의 길이가 1인 사분원에서 삼각비의 값은 길이가 1인 선분을 이용하여 구한다.

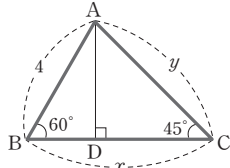
즉, \sin, \cos 은 빗변의 길이가 1인 직각삼각형을 이용하고, \tan 은 밑변의 길이가 1인 직각삼각형을 이용하여 구한다.

14 점 A 의 x 좌표를 a 라 하면

$\triangle AOB$ 에서 $a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1^2$ 이므로 $a = \frac{\sqrt{6}}{3} (\because a > 0)$

$\therefore \tan \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

15 (1) 오른쪽 그림에서 점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 D라 하면 $\triangle ABD$ 에서



$$\overline{BD} = 4 \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\overline{AD} = 4 \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

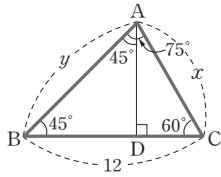
$\triangle ADC$ 에서

$$y = \overline{AC} = \frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{6}$$

또, $\overline{CD} = \overline{AD} = 2\sqrt{3}$ 이므로

$$x = \overline{BD} + \overline{CD} = 2 + 2\sqrt{3}$$

(2) 오른쪽 그림의 점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 D라 하면



$\triangle ABD$ 에서

$$\angle BAD = 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) = 45^\circ$$

이므로

$$\overline{BD} = \overline{AD} = \overline{AB} \sin 45^\circ = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \text{..... ㉠}$$

$\triangle ADC$ 에서

$$\angle ACD = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ \text{이므로}$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \text{..... ㉡}$$

$$\overline{CD} = \overline{AC} \cos 60^\circ = \frac{x}{2}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \therefore y = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD} = \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2} = 12 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{x}{2} = 12, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{x}{2} = 12$$

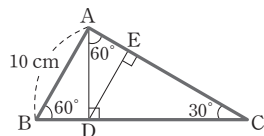
$$(\sqrt{3} + 1)x = 24$$

$$\therefore x = 12(\sqrt{3} - 1), \quad y = 6\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)$$

16 오른쪽 그림의 $\triangle ABD$ 에서

$$\overline{AD} = \overline{AB} \sin 60^\circ$$

$$= 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}(\text{cm})$$



$\triangle ADE$ 에서

$$\overline{DE} = \overline{AD} \sin 60^\circ = 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}(\text{cm})$$

$\triangle DCE$ 에서

$$\angle DCE = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ \text{이므로}$$

$$\overline{CE} = \frac{\overline{DE}}{\tan 30^\circ} = \frac{15}{2} \times \sqrt{3} = \frac{15\sqrt{3}}{2}(\text{cm})$$

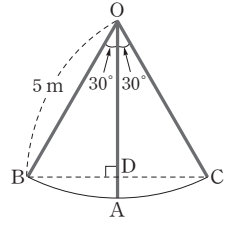
17 오른쪽 그림의 $\triangle OBD$ 에서

$$\overline{OD} = \overline{OB} \cos 30^\circ$$

$$= 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}(\text{m})$$

가장 높을 때와 가장 낮을 때의 높이의 차는 \overline{AD} 이므로

$$\overline{AD} = \overline{OA} - \overline{OD} = 5 - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5(2 - \sqrt{3})}{2}(\text{m})$$



18 오른쪽 그림에서 다리의 길이를

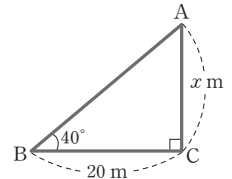
x m라 하면

$$x = 20 \tan 40^\circ$$

$$= 20 \times 0.84$$

$$= 16.8$$

따라서 다리의 길이는 16.8 m이다.



19 오른쪽 그림에서 산의 높이를

x m라 하면

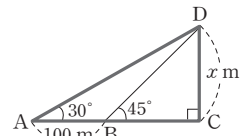
$$\overline{BC} = \overline{CD} = x \text{ m}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{100 + x}, \quad \sqrt{3}x = 100 + x$$

$$(\sqrt{3} - 1)x = 100 \quad \therefore x = \frac{100}{\sqrt{3} - 1} = 50(\sqrt{3} + 1)$$

따라서 산의 높이는 $50(\sqrt{3} + 1)$ m이다.



20 오른쪽 그림의 점 B에서 \overline{AC}

에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle ABH$ 에서

$$\overline{BH} = \overline{AB} \sin 45^\circ$$

$$= 300 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

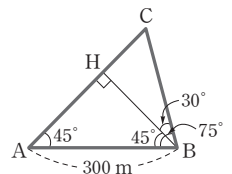
$$= 150\sqrt{2}(\text{m})$$

$$\angle ABH = 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) = 45^\circ$$

$\triangle HBC$ 에서

$$\angle CBH = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

$$\therefore \overline{BC} = \frac{\overline{BH}}{\cos 30^\circ} = 150\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 100\sqrt{6}(\text{m})$$



TIP 특수각에 대한 삼각비의 값을 이용할 수 있도록 보조선을 긋는다. 이때 특수각이 아닌 각에서 그 대변에 수선을 그어 생각해야 특수각을 이용할 수 있다.

21 오른쪽 그림에서

$\overline{AC} = \overline{BC} = a$ 라 하면
 $\triangle ACD$ 에서

$$\overline{CD} = \overline{AC} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$$

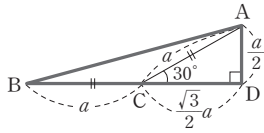
$\triangle ABC$ 는 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle ABC = \angle BAC$$

이때 $\angle ABC + \angle BAC = \angle ACD$ 이므로

$$\angle ABC = \angle BAC = \frac{1}{2} \angle ACD = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan 15^\circ &= \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\frac{a}{2}}{a + \frac{\sqrt{3}}{2}a} \\ &= \frac{a}{(2 + \sqrt{3})a} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \\ &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$



22 오른쪽 그림에서 $\overline{AB} = 2a$ 라

하면 $\triangle ABD$ 에서

$$\begin{aligned} \angle ABD &= 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

이므로

$$\overline{BD} = 2a \cos 60^\circ = 2a \times \frac{1}{2} = a$$

$$\overline{AD} = 2a \sin 60^\circ = 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$$

또, $\triangle ADC$ 에서

$$\overline{DC} = \sqrt{3}a \tan 45^\circ = \sqrt{3}a \times 1 = \sqrt{3}a$$

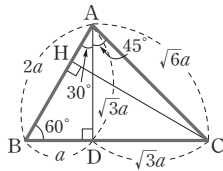
$$\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6}a$$

점 C에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle BCH$ 에서

$$\overline{CH} = \overline{BC} \sin 60^\circ = (1 + \sqrt{3})a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}a$$

$$\therefore \sin 75^\circ = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{6}a} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$



23 (1) $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$

(2) $\angle A = 180^\circ - (40^\circ + 20^\circ) = 120^\circ$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \sin(180^\circ - 120^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

$$\begin{aligned} (3) \square ABCD &= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin(180^\circ - 120^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2) \end{aligned}$$

(4) 오른쪽 그림의 $\square ABCD$ 는 등변사

다리꼴이므로

$$\angle C = \angle B = 60^\circ$$

\overline{BA} , \overline{CD} 의 연장선의 교점을

E라 하면

$$\angle EAD = \angle EBC = 60^\circ \text{ (동위각)}$$

$$\angle EDA = \angle ECB = 60^\circ \text{ (동위각)}$$

$$\angle BEC = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$$

즉, $\triangle EBC$, $\triangle EAD$ 는 정삼각형이므로

$$\overline{EA} = \overline{EB} - \overline{AB} = 10 - 6 = 4(\text{cm})$$

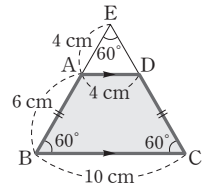
$\therefore \square ABCD$

$$= \triangle EBC - \triangle EAD$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 21\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$



24 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin B = 10$ 이므로

$$\sin B = \frac{1}{2} \quad \therefore \angle B = 30^\circ$$

25 오른쪽 그림에서

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 12 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 18\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

점 C에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle AHC$ 에서

$$\overline{CH} = \overline{AC} \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$$

$$\overline{AH} = \overline{AC} \cos 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3(\text{cm})$$

$$\overline{BH} = \overline{AB} - \overline{AH} = 12 - 3 = 9(\text{cm})$$

$\triangle CHB$ 에서

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 9^2} = 6\sqrt{3}(\text{cm})$$

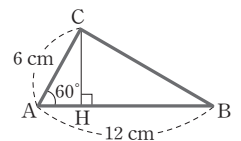
내접원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times r \times (6 + 12 + 6\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$$

$$r(9 + 3\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$$

$$\therefore r = \frac{18\sqrt{3}}{9 + 3\sqrt{3}} = 3(\sqrt{3} - 1)$$

따라서 내접원의 반지름의 길이는 $3(\sqrt{3} - 1)$ cm이다.



26 (1) 오른쪽 그림에서 점 G는

$\triangle ABC$ 의 무게중심이므로
 $\overline{AG} : \overline{GM} = 2 : 1$ 에서

$$4 : \overline{GM} = 2 : 1$$

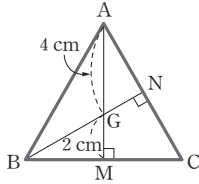
$$2\overline{GM} = 4 \quad \therefore \overline{GM} = 2 \text{ cm}$$

$$\therefore \overline{AM} = \overline{AG} + \overline{GM} = 4 + 2 = 6 \text{ (cm)}$$

또한, $\overline{AM} = \overline{AB} \sin 60^\circ$ 이므로

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = 6$$

$$\therefore \overline{AB} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$



$$(2) \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \overline{AB}^2 = 30\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\overline{AB}^2 = 120 \quad \therefore \overline{AB} = 2\sqrt{30} \text{ cm}$$

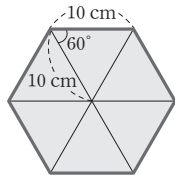
점 G는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이므로

$$\overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BN} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{30}$$

$$= 2\sqrt{10} \text{ (cm)}$$

27 한 변의 길이가 10 cm인 정육각형은 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 10 cm인 정삼각형 6개로 나누어지므로 구하는 넓이 S는



$$S = \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 60^\circ \right) \times 6$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2 \right) \times 6$$

$$= 150\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

28 오른쪽 그림에서 정팔각형의 한 내각의 크기는

$$\frac{180^\circ \times (8-2)}{8} = 135^\circ$$

이므로 $\triangle APB$ 에서

$$\angle PAB = \angle PBA = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$\overline{AB} = 10 \text{ cm}$ 이므로

$$\overline{PB} = \overline{AB} \sin 45^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

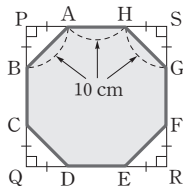
따라서 정팔각형의 넓이 S는

$$S = \square PQRS - 4\triangle APB$$

$$= (10\sqrt{2} + 10)^2 - 4 \left(\frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \right)$$

$$= 100(3 + 2\sqrt{2}) - 100$$

$$= 200(\sqrt{2} + 1) \text{ (cm}^2\text{)}$$



29 (1) 오른쪽 그림과 같이 정팔각형의 한 변의 길이를 $x \text{ cm}$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{PQ} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} x \text{ (cm)}$$

$$\overline{AP} = \overline{DW} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{2}x + x = 8$$

$$(\sqrt{2} + 1)x = 8$$

$$\therefore x = \frac{8}{\sqrt{2} + 1} = 8(\sqrt{2} - 1)$$

따라서 정팔각형의 한 변의 길이는 $8(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$ 이다.

(2) 정팔각형의 넓이 S는

$$S = \square ABCD - 4\triangle AQP$$

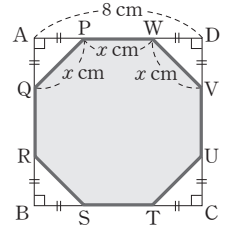
$$= 8^2 - 4 \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} x^2 \right)$$

$$= 64 - x^2$$

$$= 64 - \{8(\sqrt{2} - 1)\}^2$$

$$= 64 - 64(3 - 2\sqrt{2})$$

$$= 128(\sqrt{2} - 1) \text{ (cm}^2\text{)}$$



30 (1) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ + \tan 20^\circ \times \tan 70^\circ$

$$= \sin^2 20^\circ + \cos^2 (90^\circ - 70^\circ)$$

$$+ \tan 20^\circ \times \frac{1}{\tan (90^\circ - 70^\circ)}$$

$$= \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ + \tan 20^\circ \times \frac{1}{\tan 20^\circ}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

(2) $(\sin 25^\circ + \cos 25^\circ)^2 + (\sin 25^\circ - \cos 25^\circ)^2$

$$+ \tan 25^\circ \times \tan 65^\circ$$

$$= \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ + 2 \sin 25^\circ \times \cos 25^\circ$$

$$+ \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ - 2 \sin 25^\circ \times \cos 25^\circ$$

$$+ \tan 25^\circ \times \frac{1}{\tan (90^\circ - 65^\circ)}$$

$$= 1 + 2 \sin 25^\circ \times \cos 25^\circ + 1 - 2 \sin 25^\circ \times \cos 25^\circ$$

$$+ \tan 25^\circ \times \frac{1}{\tan 25^\circ}$$

$$= 1 + 1 + 1$$

$$= 3$$

31 $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \times \cos x + \cos^2 x$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \times \frac{1}{4}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\because \sin x > 0, \cos x > 0)$$

32 오른쪽 그림과 같이 $\sin A = \frac{4}{5}$ 인

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

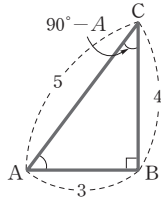
$$\text{이므로 } \tan A = \frac{4}{3}$$

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A = \frac{3}{5}$$

$$\tan(90^\circ - A) = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A = \frac{4}{5}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$



다른 풀이

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \frac{\sin A}{\cos A} \times \cos A + \frac{1}{\tan A} \times \sin A \\ &= \frac{\sin A}{\cos A} \times \cos A + \frac{\cos A}{\sin A} \times \sin A \\ &= \sin A + \cos A \\ &= \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

2 STEP 실력 높이기

15~21쪽

1 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 $\sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \tan \theta = 3$

3 $\frac{5\sqrt{13}}{13}$

4 $2 - \sqrt{3}$

5 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

6 1

7 (1) $\frac{89}{2}$ (2) 1

8 (1) $\frac{40}{9}$ (2) $\frac{32}{9}$

(3) $\pm \frac{\sqrt{7}}{4}$

9 ㉔

10 (1) $2\sqrt{7}$ (2) $2\sqrt{7}$

11 $14\sqrt{3}$ m

12 $50(\sqrt{3} + 1)$ m

13 $\frac{4}{3}$

14 $\frac{200(8\sqrt{5} - 5\sqrt{2})}{27}$ m

15 $\frac{63\sqrt{3}}{2}$ cm²

16 (1) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm² (2) $15\sqrt{3}$ cm²

17 $4(\sqrt{3} - 1)$

18 $\frac{25(5\sqrt{3} - 2\pi)}{12}$ cm²

19 100 cm²

20 $(10 - 5\sqrt{3})$ cm

21 $75\sqrt{3}$ cm²

22 $\frac{12\sqrt{3}}{5}$ cm

23 3 : 5 : 7

24 $5\sqrt{13}$ cm

25 $\frac{9\sqrt{5}}{16}$

26 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

27 $\frac{14}{3}\pi - 4\sqrt{3} - 4$

문제 풀이

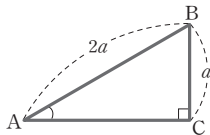
1 오른쪽 그림과 같이 $\angle C = 90^\circ$

이고 $\overline{AB} = c = 2a, \overline{BC} = a$ 인

직각삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} \\ &= \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a \end{aligned}$$

$$\therefore \tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



2 $\triangle PAQ$ 와 $\triangle CAB$ 에서

$\angle AQP = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle A$ 는 공통이므로

$\triangle PAQ \sim \triangle CAB$ (AA 닮음)

$\overline{AQ} : \overline{AB} = \overline{PQ} : \overline{CB}$ 이므로

$\overline{AQ} = x$ cm라 하면

$$x : (x + 6) = 3 : 5, 5x = 3(x + 6)$$

$$2x = 18 \quad \therefore x = 9$$

$\triangle PAQ$ 에서 $\overline{AP} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$ (cm)이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{9}{3\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan \theta = \frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}} = \frac{9}{3} = 3$$

3 서술형

표현 단계 $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

변형 단계 $\triangle ABC$ 에서

$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\angle ACB = 90^\circ - \angle x = \angle BAH = \angle y$$

$$\therefore \sin y = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

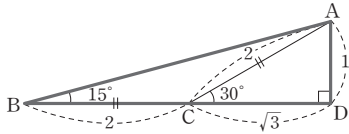
풀이 단계 $\therefore \sin x + \sin y = \frac{2\sqrt{13}}{13} + \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$

4 서술형

표현 단계 $\triangle ABC$ 에서

$$\angle BAC = \angle ACD - \angle ABC = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이다.



변형 단계 즉, $\overline{AC} = \overline{BC} = 2$ 이므로

$$\triangle ACD \text{에서 } \overline{CD} = \sqrt{3}, \overline{AD} = 1$$

풀이 단계 $\therefore \tan 15^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

5 오른쪽 그림과 같이 \overline{OB} 를 그으면

$$\overline{OB} = \overline{OA} = 4 \text{ cm}$$

$\triangle OAB$ 는 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각

형이므로

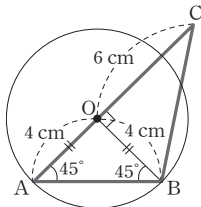
$$\angle OBA = \angle OAB = 45^\circ$$

$$\therefore \angle BOC = \angle OAB + \angle OBA = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

직각삼각형 OBC 에서

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13} \text{ (cm)}$$

$$\therefore \sin C = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$



6

$$\left(\sin A - \frac{1}{\sin A}\right)^2 = \sin^2 A + \frac{1}{\sin^2 A} - 2$$

$$\left(\cos A - \frac{1}{\cos A}\right)^2 = \cos^2 A + \frac{1}{\cos^2 A} - 2$$

$$\left(\tan A - \frac{1}{\tan A}\right)^2 = \tan^2 A + \frac{1}{\tan^2 A} - 2$$

\therefore (주어진 식)

$$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + \left(\frac{1}{\cos^2 A} - \tan^2 A\right) + \left(\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A}\right) - 2$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right) + \left(\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right) - 2$$

$$= 1 + \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} + \frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 A} - 2$$

$$= 1 + \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A} - 2$$

$$= 1 + 1 + 1 - 2 = 1$$

7 서술형

(1) 표현 단계 $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ 이므로

변형 단계 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ = 1$

$$\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ = 1$$

$$\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ = \sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ = 1$$

\vdots

$$\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ = \sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ = 1$$

$$\sin^2 45^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

풀이 단계 $\therefore \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ$

$$= 1 \times 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2}$$

(2) 표현 단계 $\tan(90^\circ - x) = \frac{1}{\tan x}$ 이므로

변형 단계 $\tan 1^\circ \times \tan 89^\circ = \tan 1^\circ \times \frac{1}{\tan 1^\circ} = 1$

$$\tan 2^\circ \times \tan 88^\circ = \tan 2^\circ \times \frac{1}{\tan 2^\circ} = 1$$

$$\tan 3^\circ \times \tan 87^\circ = \tan 3^\circ \times \frac{1}{\tan 3^\circ} = 1$$

\vdots

$$\tan 44^\circ \times \tan 46^\circ = \tan 44^\circ \times \frac{1}{\tan 44^\circ} = 1$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

풀이 단계 $\therefore \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \dots \times \tan 89^\circ = 1$

8 $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{25}{16}$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = \frac{25}{16}, \quad 2 \sin x \cos x = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \sin x \cos x = \frac{9}{32}$$

(1) $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{5}{4} \times \frac{32}{9} = \frac{40}{9}$

(2) $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{32}{9}$

(3) $(\sin x - \cos x)^2 = (\sin x + \cos x)^2 - 4 \sin x \cos x = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{9}{32} = \frac{25}{16} - \frac{18}{16} = \frac{7}{16}$

$$\therefore \sin x - \cos x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

9 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ 이고,}$$

한 변의 길이가 b 인 정육각형의 넓이는

$$\left(\frac{1}{2} \times b \times b \times \sin 60^\circ\right) \times 6 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times b^2 \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2$$

두 도형의 넓이가 같으므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 \text{에서}$$

$$a^2 = 6b^2 \quad \therefore a = \sqrt{6}b \quad (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 둘레의 길이는 정삼각형이 $3a$, 정육각형이 $6b$ 이므로 구하는 비는

$$\begin{aligned} 3a : 6b &= a : 2b = \sqrt{6}b : 2b \\ &= \sqrt{6} : 2 = \sqrt{3} : \sqrt{2} \end{aligned}$$

10 (1) 오른쪽 그림의 점 A에

서 \overline{BC} 의 연장선에 내린 수선의 발을 D라 하면

$\triangle ACD$ 에서 $\angle ACD = 60^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{AC} \sin 60^\circ \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\overline{CD} = \overline{AC} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$\triangle ABD$ 가 직각삼각형이므로

$$x = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

(2) 오른쪽 그림의 점 C에서

\overline{AB} 의 연장선에 내린 수선의 발을 D라 하면

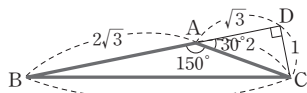
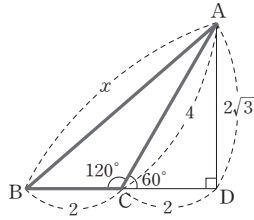
$\triangle ACD$ 에서 $\angle CAD = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{AD} = \overline{CA} \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\overline{CD} = \overline{CA} \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$\triangle BCD$ 가 직각삼각형이므로

$$x = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$



11 서술형

변형 단계 $\triangle BHD$ 에서

$$\overline{BH} = \overline{BD} \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6(\text{m})$$

$$\overline{DH} = \overline{BD} \sin 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}(\text{m})$$

$$\therefore \overline{AH} = \overline{AB} + \overline{BH} = 10 + 6 = 16(\text{m})$$

풀이 단계 $\triangle AHC$ 에서

$$\overline{CH} = \overline{AH} \tan 60^\circ = 16 \times \sqrt{3} = 16\sqrt{3}(\text{m})$$

$$\therefore \overline{CD} = \overline{CH} - \overline{DH} = 16\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 14\sqrt{3}(\text{m})$$

확인 단계 따라서 국기 게양대만의 높이는 $14\sqrt{3}$ m이다.

12 서술형

표현 단계 $\angle BDC = 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) = 45^\circ$ 이므로

$\overline{BC} = \overline{CD} = x$ m라 하면

변형 단계 $\tan 30^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB} + \overline{BC}} = \frac{x}{100 + x}$ 에서

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{100 + x}$$

풀이 단계 $\sqrt{3}x = 100 + x, (\sqrt{3} - 1)x = 100$

$$\therefore x = \frac{100}{\sqrt{3} - 1} = \frac{100(\sqrt{3} + 1)}{2} = 50(\sqrt{3} + 1)$$

확인 단계 따라서 이 기구의 높이는 $50(\sqrt{3} + 1)$ m이다.

13 $\triangle ABC$ 가 직각삼각형이므로 $c^2 = a^2 + b^2$

$$c = a + \frac{b}{2} \text{에서 } \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + ab + \frac{b^2}{4} = a^2 + b^2, \frac{3}{4}b^2 = ab$$

이때 $b > 0$ 이므로 $a = \frac{3}{4}b$

$$\therefore \tan x = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

14 서술형

표현 단계 점 C에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\text{또, } \cos \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = \frac{1}{3} \text{이}$$

므로

$$\overline{AC} = 3a \text{ m}, \overline{AH} = 2a \text{ m}, \overline{BC} = 3b \text{ m}, \overline{BH} = b \text{ m}$$

변형 단계 $\triangle ACH$ 에서 $\overline{CH} = \sqrt{(3a)^2 - (2a)^2} = \sqrt{5}a(\text{m})$

$$\triangle BCH \text{에서 } \overline{CH} = \sqrt{(3b)^2 - b^2} = 2\sqrt{2}b(\text{m})$$

$$\therefore \sqrt{5}a = 2\sqrt{2}b \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\text{또, } \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{BH} = 2a + b = 100(\text{m})$$

$$\therefore b = 100 - 2a \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

풀이 단계 \textcircled{B} 을 \textcircled{A} 에 대입하면

$$\sqrt{5}a = 2\sqrt{2}(100 - 2a), \sqrt{5}a = 200\sqrt{2} - 4\sqrt{2}a$$

$$(4\sqrt{2} + \sqrt{5})a = 200\sqrt{2}$$

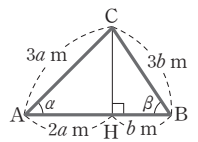
$$\therefore a = \frac{200\sqrt{2}}{4\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{200\sqrt{2}(4\sqrt{2} - \sqrt{5})}{27}$$

$$= \frac{1600 - 200\sqrt{10}}{27}$$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{5}a = \sqrt{5} \times \frac{1600 - 200\sqrt{10}}{27}$$

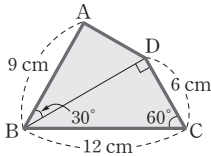
$$= \frac{200(8\sqrt{5} - 5\sqrt{2})}{27}(\text{m})$$

확인 단계 따라서 풍선의 높이는 $\frac{200(8\sqrt{5} - 5\sqrt{2})}{27}$ m이다.



15 오른쪽 그림에서

$\overline{BC} : \overline{CD} = 2 : 1$, $\angle C = 60^\circ$ 이므로
 $\triangle BCD$ 는 $\angle BDC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.



$\triangle BCD$ 에서 $\overline{BD} = \overline{CD} \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}(\text{cm})$

$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{3} \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} \\ &= \frac{27\sqrt{3}}{2} + 18\sqrt{3} = \frac{63\sqrt{3}}{2} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

16 (1) $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \sin 60^\circ$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

점 G가 무게중심이므로

$\triangle ABG = \triangle BCG = \triangle CAG$

$$= \frac{1}{3} \triangle ABC = \frac{20\sqrt{3}}{3} (\text{cm}^2)$$

(2) $\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 10 \times 12 \times \sin (180^\circ - 120^\circ)$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

$\square ABCD$ 는 평행사변형이므로 $\triangle ABD = \triangle BCD$

이때 $\overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로

$$\triangle BDM = \frac{1}{2} \triangle BCD = \frac{1}{2} \times 30\sqrt{3} = 15\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

17 서술형

표현 단계 $\angle ACB = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{AB} = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

변형 단계 점 E에서 \overline{BC} 에 내린 수선의

발을 H라 하고 $\overline{EH} = x$

라 하면 $\angle CEH = 45^\circ$ 이

므로 $\triangle EHC$ 는 직각이등

변삼각형이다.

$$\therefore \overline{HC} = \overline{EH} = x$$

또, $\triangle DBC$ 에서

$$\angle DBC = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$$
이므로

$\triangle EBH$ 에서

$$\overline{BH} = \frac{\overline{EH}}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x$$

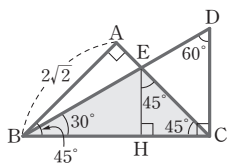
풀이 단계 $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC}$ 에서 $4 = \sqrt{3}x + x$ 이므로

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}+1} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{2} = 2(\sqrt{3}-1)$$

$$\therefore \triangle EBC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{EH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2(\sqrt{3}-1)$$

$$= 4(\sqrt{3}-1)$$



18 오른쪽 그림과 같이 \overline{OP} 를 그

으면 $\triangle OPA$ 는 $\overline{OA} = \overline{OP}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle OPA = \angle OAP = 30^\circ$$

$$\therefore \angle AOP = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

또, $\angle BOP = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 이다.

한편, $\overline{OA} = \overline{OB} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm})$ 이고,

$\overline{BC} = \overline{AB} \tan 30^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$ 이므로

(어두운 부분의 넓이)

$$= \triangle ABC - \triangle AOP - (\text{부채꼴 } OBP \text{의 넓이})$$

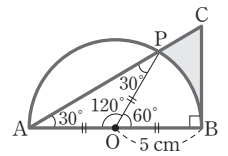
$$= \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{10\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \sin (180^\circ - 120^\circ)$$

$$- \pi \times 5^2 \times \frac{60}{360}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{3} - \frac{25}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{25}{6} \pi$$

$$= \frac{125\sqrt{3}}{12} - \frac{25}{6} \pi$$

$$= \frac{25(5\sqrt{3} - 2\pi)}{12} (\text{cm}^2)$$



19 오른쪽 그림에서

$\angle BAC = \angle XAC$ (접은 각)

$\angle XAC = \angle BCA$ (엇각)

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA$$

즉, $\triangle ABC$ 는 $\overline{BA} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이다.

점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle ABH$ 에서 $\overline{AH} = 10 \text{ cm}$ 이고, $\angle ABH = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{AH} = \overline{AB} \sin 30^\circ \text{에서 } 10 = \overline{AB} \times \frac{1}{2}$$

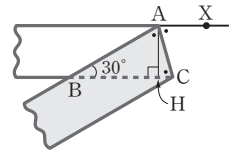
$$\therefore \overline{AB} = 20 \text{ cm}$$

따라서 $\overline{BC} = \overline{AB} = 20 \text{ cm}$ 이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 20 \times 10$$

$$= 100 (\text{cm}^2)$$



20 오른쪽 그림의

$\triangle ABE$ 와 $\triangle ADF$ 에서

$$\overline{AB} = \overline{AD}, \overline{AE} = \overline{AF}$$

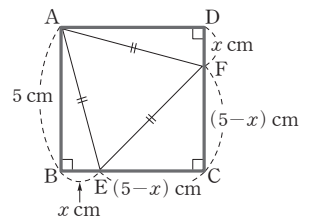
$\angle B = \angle D = 90^\circ$ 이므로

$$\triangle ABE \equiv \triangle ADF$$

(RHS 합동)

따라서 $\overline{BE} = x \text{ cm}$ 라 하면

$\overline{DF} = \overline{BE} = x \text{ cm}$ 이고 $\overline{EC} = \overline{FC} = (5-x) \text{ cm}$



△ABE에서

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = 5^2 + x^2$$

또, △ECF에서 ∠CEF = 45°이므로

$$\overline{EC} = \overline{EF} \cos 45^\circ \text{에서}$$

$$5 - x = \overline{EF} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \overline{EF} = \sqrt{2}(5 - x)$$

△AEF가 정삼각형이므로 $\overline{AE} = \overline{EF}$ 에서

$$\overline{AE}^2 = \overline{EF}^2$$

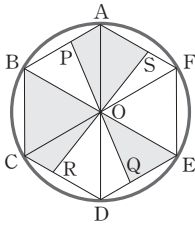
$$25 + x^2 = 2(5 - x)^2, x^2 - 20x + 25 = 0$$

$$\therefore x = 10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 25} = 10 \pm 5\sqrt{3}$$

그런데 $0 < x < 5$ 이므로 $x = 10 - 5\sqrt{3}$

따라서 \overline{BE} 의 길이는 $(10 - 5\sqrt{3})$ cm이다.

21 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O를 지나는 현이 \overline{AB} , \overline{DE} , \overline{CD} , \overline{AF} 와 만나는 점을 차례로 P, Q, R, S라 하면



△OPB와 △OQE에서

$\overline{OB} = \overline{OE}$ (반지름),

$\angle BOP = \angle EOQ$ (맞꼭지각), $\angle OBP = \angle OEQ$ (엇각)

이므로

△OPB ≅ △OQE (ASA 합동)

또, △OCR과 △OFS에서

$\overline{OC} = \overline{OF}$ (반지름), $\angle COR = \angle FOS$ (맞꼭지각),

$\angle OCR = \angle OFS$ (엇각)이므로

△OCR ≅ △OFS (ASA 합동)

따라서 구하는 어두운 부분의 넓이를 S' 라 하면

$$\begin{aligned} S' &= \triangle OAS + \triangle OAP + \triangle OBC + \triangle OCR + \triangle OQE \\ &= \triangle OAS + \triangle OAP + \triangle OBC + \triangle OFS + \triangle OPB \\ &= (\triangle OAS + \triangle OFS) + (\triangle OAP + \triangle OPB) + \triangle OBC \\ &= \triangle OAF + \triangle OAB + \triangle OBC \\ &= (\text{한 변의 길이가 } 10 \text{ cm인 정삼각형의 넓이}) \times 3 \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 60^\circ\right) \times 3 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2\right) \times 3 = 75\sqrt{3} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

22 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin 60^\circ$
 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} (\text{cm}^2)$

$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{2} \times 6 \times \overline{AD} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \overline{AD} (\text{cm}^2)$

$\triangle ACD = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AD} \times \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{AD} \times \frac{1}{2} = \overline{AD} (\text{cm}^2)$

△ABC = △ABD + △ACD이므로

$$6\sqrt{3} = \frac{3}{2} \overline{AD} + \overline{AD}, \frac{5}{2} \overline{AD} = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{12\sqrt{3}}{5} \text{ cm}$$

23 $a - 2b + c = 0$ ㉠

$3a + b - 2c = 0$ ㉡

㉠ + 2 × ㉡을 하면

$7a - 3c = 0 \quad \therefore a = \frac{3}{7}c$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{9}{7}c + b - 2c = 0 \quad \therefore b = \frac{5}{7}c$$

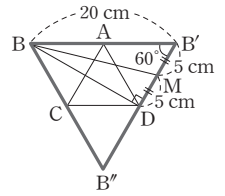
$$\therefore a : b : c = \frac{3}{7}c : \frac{5}{7}c : c = 3 : 5 : 7$$

△ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sin A : \sin B : \sin C &= \frac{2S}{bc} : \frac{2S}{ca} : \frac{2S}{ab} \\ &= \frac{a}{abc} : \frac{b}{abc} : \frac{c}{abc} \\ &= a : b : c \\ &= 3 : 5 : 7 \end{aligned}$$

24 주어진 정사면체의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 구하는 최단 길이는 \overline{BM} 의 길이이다.



\overline{BD} 는 한 변의 길이가 20 cm인 정삼각형의 높이이므로

△BB'D에서

$$\overline{BD} = \overline{BB'} \sin 60^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} (\text{cm})$$

또, $\overline{DM} = \overline{B'M} = \frac{1}{2} \times 10 = 5 (\text{cm})$

△BDM에서

$$\overline{BM} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DM}^2} = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + 5^2} = 5\sqrt{13} (\text{cm})$$

25 오른쪽 그림과 같이

$\sin \theta = \frac{2}{3}$ 인 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

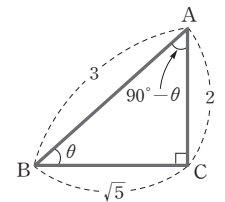
$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

∠BAC = 90° - θ이므로

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

직선 $x \sin \theta + y \cos \theta = \tan(90^\circ - \theta)$

즉, $\frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{5}}{3}y = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 에서



$$y=0\text{일 때, } \frac{2}{3}x = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \therefore x = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

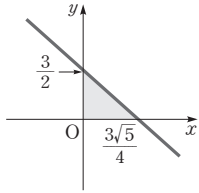
$$x=0\text{일 때, } \frac{\sqrt{5}}{3}y = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \therefore y = \frac{3}{2}$$

따라서 x 절편은 $\frac{3\sqrt{5}}{4}$,

y 절편은 $\frac{3}{2}$ 이므로

구하는 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{5}}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{5}}{16}$$



26 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$\triangle BPF$ 에서 $\overline{BF} = a$, $\overline{BP} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 이므로

$$\overline{PF} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

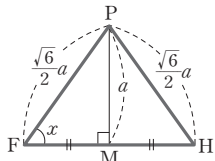
점 P 에서 \overline{FH} 에 내린 수선의 발을

M 이라 하면

$\triangle PFM$ 에서

$$\overline{FM} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2 - a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\therefore \cos x = \frac{\overline{FM}}{\overline{PF}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



27 서술형

표현 단계 \overline{PQ} 를 그으면

변형 단계 (원 O 의 활꼴의 넓이)

= (부채꼴 OPQ 의 넓이)

$-\triangle OPQ$

$$= \pi \times 4^2 \times \frac{60}{360} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ$$

$$= \pi \times 4^2 \times \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$$

(원 O' 의 활꼴의 넓이)

= (부채꼴 $O'PQ$ 의 넓이) $-\triangle O'PQ$

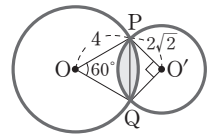
$$= \pi \times (2\sqrt{2})^2 \times \frac{90}{360} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$$

$$= 2\pi - 4$$

풀이 단계 \therefore (어두운 부분의 넓이)

$$= \left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right) + (2\pi - 4)$$

$$= \frac{14}{3}\pi - 4\sqrt{3} - 4$$



3 STEP 최고 실력 완성하기

22-26쪽

- | | | | | | |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------|---|--------------------------------|------------------------|
| 1 $4+3\sqrt{3}$ | 2 $\frac{7}{2}$ | 3 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ | 4 $2\sqrt{3}$ | 5 $25(3+\sqrt{3})\text{ cm}^2$ | 6 $1:\sqrt{2}$ |
| 7 $5\sqrt{6}\text{ m}$ | 8 ⑤ | 9 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ | 10 $16:12:9$ | 11 $6\sqrt{3}$ | 12 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ |
| 13 $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ | 14 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ | 15 풀이 참조 | 16 $60, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 17 풀이 참조 | |

문제 풀이

1 오른쪽 그림에서 $\tan 60^\circ$ 가

직선의 기울기이므로

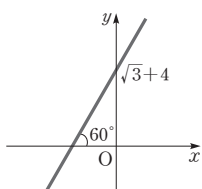
$$b = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

이고, y 절편은 $\sqrt{3}+4$ 이므로

$$-a - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 4$$

$$\therefore a = -2\sqrt{3} - 4$$

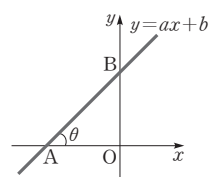
$$\therefore b - a = \sqrt{3} - (-2\sqrt{3} - 4) = 4 + 3\sqrt{3}$$



TIP 직선의 기울기와 \tan 값의 관계

직선 $y = ax + b$ 가 오른쪽 그림과 같을 때, 직선과 x 축이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} (\text{직선의 기울기}) = a &= \frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})} \\ &= \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} = \tan \theta \end{aligned}$$



2 (주어진 식) = $1 \times (1+1+1) + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2}$
 $+ (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$
 $= 3 + \frac{1}{4} + (1 - \frac{3}{4}) = \frac{7}{2}$

3 $\triangle ABC$ 에서 $\sin 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ 이므로
 $\overline{AC} \sin 30^\circ = \overline{AB}, \frac{1}{2} \overline{AC} = 1 \quad \therefore \overline{AC} = 2$
 $\triangle ACD$ 에서 $\cos 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$ 이므로
 $\overline{AD} \cos 30^\circ = \overline{AC}, \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AD} = 2 \quad \therefore \overline{AD} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
 $\triangle ADE$ 에서 $\cos 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$ 이므로
 $\overline{AE} \cos 30^\circ = \overline{AD}, \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AE} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \overline{AE} = \frac{8}{3}$
 $\triangle AEF$ 에서 $\cos 30^\circ = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$ 이므로
 $\overline{AF} \cos 30^\circ = \overline{AE}, \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AF} = \frac{8}{3} \quad \therefore \overline{AF} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$

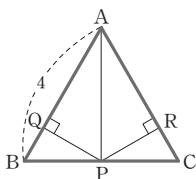
다른 풀이

한 내각의 크기가 30° 인 직각삼각형의 세 변의 길이의 비를 이용하면

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 2$ 이므로
 $1 : \overline{AC} = 1 : 2 \quad \therefore \overline{AC} = 2$
 $\triangle ACD$ 에서 $\overline{AC} : \overline{AD} = \sqrt{3} : 2$ 이므로
 $2 : \overline{AD} = \sqrt{3} : 2 \quad \therefore \overline{AD} = \frac{4}{\sqrt{3}}$
 $\triangle ADE$ 에서 $\overline{AD} : \overline{AE} = \sqrt{3} : 2$ 이므로
 $\frac{4}{\sqrt{3}} : \overline{AE} = \sqrt{3} : 2 \quad \therefore \overline{AE} = \frac{8}{3}$
 $\triangle AEF$ 에서 $\overline{AE} : \overline{AF} = \sqrt{3} : 2$ 이므로
 $\frac{8}{3} : \overline{AF} = \sqrt{3} : 2 \quad \therefore \overline{AF} = \frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$

4 오른쪽 그림과 같이 \overline{AP} 를 그으면
 $\triangle ABC = \triangle APB + \triangle APC$

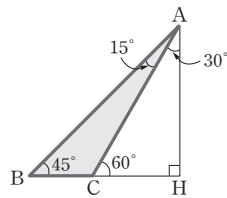
$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PQ}$
 $+ \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{PR}$
 $= \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{PQ} + \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{PR}$
 $= 2\overline{PQ} + 2\overline{PR} = 2(\overline{PQ} + \overline{PR})$



또, $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$
 즉, $2(\overline{PQ} + \overline{PR}) = 4\sqrt{3} \quad \therefore \overline{PQ} + \overline{PR} = 2\sqrt{3}$

5 오른쪽 그림의 점 A에서 \overline{BC} 의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

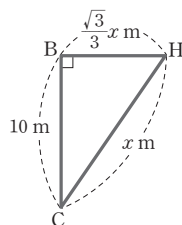
$\angle ACH = \angle ABC + \angle BAC$
 $= 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$
 $\angle CAH = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$
 또, $\overline{BH} = \overline{AH} = x$ cm라 하면
 $\overline{CH} = x \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (cm)
 $\overline{BC} = x - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 10$ (cm)
 $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}x = 10 \quad \therefore x = 5(3 + \sqrt{3})$
 $\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 10 \times 5(3 + \sqrt{3})$
 $= 25(3 + \sqrt{3})$ (cm²)



6 $\overline{AD} : \overline{CD}$
 $= \triangle ABD : \triangle BCD$
 $= (\frac{1}{2} \times 3 \times \overline{BD} \times \sin 45^\circ) : (\frac{1}{2} \times 6 \times \overline{BD} \times \sin 30^\circ)$
 $= \frac{3}{2} \sin 45^\circ : 3 \sin 30^\circ$
 $= (\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) : (3 \times \frac{1}{2}) = \sqrt{2} : 2 = 1 : \sqrt{2}$

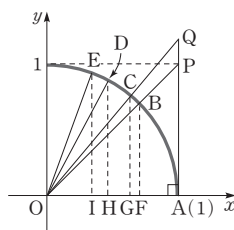
7 $\angle BAH = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$ 이므로
 $\overline{AH} = x$ m라 하면

$\overline{BH} = \overline{AH} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (m)
 $\overline{CH} = \overline{AH} = x$ m
 직각삼각형 BCH에서
 $10^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}x)^2 = x^2$
 $\frac{2}{3}x^2 = 100, x^2 = 150$
 $\therefore x = 5\sqrt{6}$
 따라서 깃대의 높이는 $5\sqrt{6}$ m이다.



8 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원에서

$\angle BOA = 45^\circ, \angle COA = 50^\circ,$
 $\angle DOA = 62^\circ, \angle EOA = 70^\circ$
 일 때, $\tan 45^\circ = \overline{AP} = 1,$
 $\tan 50^\circ = \overline{AQ}, \sin 62^\circ = \overline{DH},$
 $\cos 70^\circ = \overline{OI}$



$\overline{AQ} > \overline{AP} > \overline{DH}$ 이므로 $\tan 50^\circ > \sin 62^\circ$
 $\overline{OI} < \overline{OF} = \overline{BF} < \overline{DH}$ 이므로 $\cos 70^\circ < \sin 62^\circ$
 따라서 $\cos 70^\circ < \sin 62^\circ < \tan 50^\circ$ 이므로 $C < B < A$

9 정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면

$$\overline{CH} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{2}a$$

$$\overline{HM} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a$$

$$\overline{CF} = \overline{CH} = 2\sqrt{2}a \text{ 이므로 } \overline{CM} = \sqrt{(2\sqrt{2}a)^2 + a^2} = 3a$$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 \overline{HM} 에

내린 수선의 발을 N이라 하면

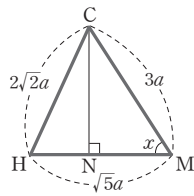
$$(2\sqrt{2}a)^2 - (\sqrt{5}a - \overline{NM})^2$$

$$= (3a)^2 - \overline{NM}^2$$

$$3a^2 + 2\sqrt{5}a\overline{NM} = 9a^2$$

$$\therefore \overline{NM} = \frac{3\sqrt{5}}{5}a$$

$$\therefore \cos x = \frac{\overline{NM}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}a}{3a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



10 $\triangle ABC$ 의 한 변의 길이를 a 라 하면

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$\triangle ADE$ 의 한 변의 길이는 $\triangle ABC$ 의 높이와 같으므로

$$\overline{AD} = \overline{AB} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ADE &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2 \end{aligned}$$

또, $\triangle AFG$ 의 한 변의 길이는 $\triangle ADE$ 의 높이와 같으므로

$$\overline{AF} = \overline{AD} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a$$

$$\begin{aligned} \triangle AFG &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}a \times \frac{3}{4}a \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{64}a^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABC : \triangle ADE : \triangle AFG$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 : \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2 : \frac{9\sqrt{3}}{64}a^2$$

$$= 16 : 12 : 9$$

11 점 D를 \overline{AB} 에 대하여 대칭이 동한 점을 D_1 , \overline{BC} 에 대하여 대칭이 동한 점을 D_2 라 하면 $\overline{D_1D_2}$ 의 길이가 $\triangle PQD$ 의 둘레의 길이의 최솟값이 된다.

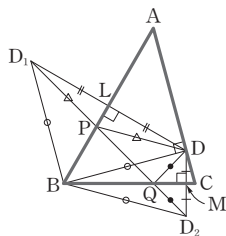
직각삼각형 ABD에서

$$\angle ABD = 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) = 45^\circ \text{ 이므로}$$

$\triangle ABD$ 는 $\overline{BD} = \overline{AD}$ 인 직각이등변삼각형이다.

$$\text{즉, } \overline{BD} = \overline{AB} \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

$\overline{DD_1}$ 과 \overline{AB} 의 교점을 L, $\overline{DD_2}$ 와 \overline{BC} 의 교점을 M이라 하면



$\triangle BDL \equiv \triangle BD_1L$ (SAS 합동)이므로 $\overline{BD} = \overline{BD_1}$ 이고

$\angle DBL = \angle D_1BL$ 이다.

또, $\triangle BDM \equiv \triangle BD_2M$ (SAS 합동)이므로 $\overline{BD} = \overline{BD_2}$ 이고

$\angle DBM = \angle D_2BM$ 이다.

즉, $\overline{BD_1} = \overline{BD_2} = \overline{BD} = 6$ 이고

$$\angle ABC = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ \text{ 이므로}$$

$$\angle D_1BD_2 = 2\angle ABC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ \text{ 이다.}$$

따라서 오른쪽 그림과 같은

$\triangle BD_1D_2$ 의 점 B에서 $\overline{D_1D_2}$ 에

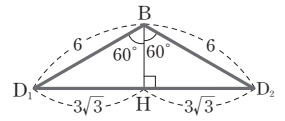
내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle D_1BH = \angle D_2BH = \frac{1}{2}\angle D_1BD_2 = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ \text{ 이므로}$$

$$\overline{D_1H} = \overline{BD_1} \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{D_1D_2} = 2\overline{D_1H} = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

따라서 $\triangle PQD$ 의 둘레의 길이의 최솟값은 $6\sqrt{3}$ 이다.



12 두 점 A, E에서 \overline{DF} 에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하고 $\overline{EF} = x$ 라 하자.

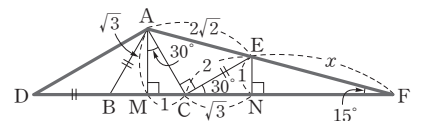
$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \frac{\overline{AM}}{\overline{AF}} \\ &= \frac{\overline{EN}}{\overline{EF}} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{\sqrt{3}}{x + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{x}$$

$$\sqrt{3}x = x + 2\sqrt{2}, (\sqrt{3} - 1)x = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

따라서 \overline{EF} 의 길이는 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ 이다.



13 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$ 는

이등변삼각형이므로

$$\begin{aligned} \angle B = \angle C &= \frac{1}{2} \times (180^\circ - 36^\circ) \\ &= 72^\circ \end{aligned}$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2} \times 72^\circ = 36^\circ$$

$\triangle DAB$ 에서 $\angle DAB = \angle DBA$ 이므로 $\overline{DA} = \overline{DB}$

또, $\angle BDC = \angle DAB + \angle DBA = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$ 이므로

$\triangle BCD$ 에서 $\angle BCD = \angle BDC \quad \therefore \overline{BD} = \overline{BC}$

점 D에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{DA} = \overline{DB} \text{ 이므로 } \overline{AH} = \overline{BH}$$

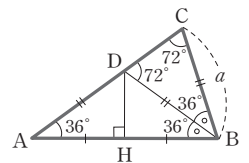
또, $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{CD}$$

$$\therefore \overline{BC}^2 = \overline{AB} \times \overline{CD} = \overline{AC} \times \overline{CD}$$

$\overline{CD} = x$ 라 하면

$$a^2 = (a+x)x, x^2 + ax - a^2 = 0$$



$$\therefore x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}a \quad (\because x > 0, a > 0)$$

따라서 $\overline{AB} = \overline{AC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}a$ 이므로

$$\cos 36^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

14 오른쪽 그림과 같이

$\overline{BC} = 3a$, $\overline{AB} = 3b$ 라 하고

두 점 D, E에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 각각 F, G, \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면

$\overline{BF} = \overline{FG} = \overline{GC} = a$, $\overline{AH} = \overline{HI} = \overline{IB} = b$

$\triangle DBF$ 에서 $\overline{BF}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{BD}^2$ 이므로

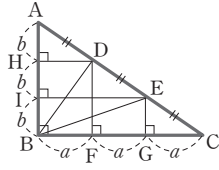
$$a^2 + (2b)^2 = \sin^2 x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle EBG$ 에서 $\overline{BG}^2 + \overline{EG}^2 = \overline{BE}^2$ 이므로

$$(2a)^2 + b^2 = \cos^2 x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$5a^2 + 5b^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{5}$$



$\triangle ABC$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{(3a)^2 + (3b)^2} \\ &= \sqrt{9(a^2 + b^2)} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

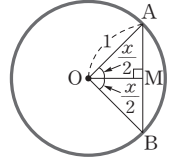
15 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \angle x,$$

$\overline{AM} = \overline{BM}$ 이므로

$$\triangle AOM \text{에서 } \sin \frac{x}{2} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2 \sin \frac{x}{2}$$



17 문제에 주어진 [그림 1]에서 \overline{AB} 가 지름이면

$\angle AOB = 180^\circ$, $\overline{AB} = 2$ 가 되므로

$$\overline{AB} = 2 \sin \frac{180^\circ}{2} = 2 \text{에서 } \sin 90^\circ = 1$$

I 단원 종합 문제

27~30쪽

- | | | | | | |
|--|---|-------------------------|--|--------------------------------|--------|
| 1 $\frac{7\sqrt{7}}{12}$ | 2 $\frac{5\sqrt{6}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{3}$ | 3 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 4 (1) \overline{DE} (2) $\cos x$ (3) $\sin x < \tan x$ | 5 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ | |
| 6 $\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{1}{3}$ | 7 ⑤ | 8 $\sqrt{2} : 1$ | 9 ③ | 10 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ | |
| 11 (1) $D(2\sqrt{3}, -2)$ (2) $\frac{8}{3}\pi$ | 12 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ | 13 ④ | 14 $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ | 15 12 cm^2 | |
| 16 $100(\sqrt{3}-1) \text{ cm}^2$ | 17 $200\sqrt{2} \text{ cm}^2$ | 18 $\frac{8}{15}$ | 19 ④ | 20 $100(\sqrt{3}+1) \text{ m}$ | 21 10초 |
| 22 $100\sqrt{3} \text{ m}$ | 23 $50\sqrt{2} \text{ cm}^2$ | 24 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ | | | |

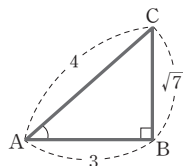
문제 풀이

1 오른쪽 그림과 같이 $\cos A = \frac{3}{4}$ 인

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{BC} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore \sin A + \tan A = \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{7\sqrt{7}}{12}$$



2 (주어진 식) $= 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $= \frac{5\sqrt{6}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{3}$

3 $\sin(A - 10^\circ) = \cos\{90^\circ - (A - 10^\circ)\}$

$$= \cos(100^\circ - A)$$

즉, $\cos(100^\circ - A) = \cos(A + 40^\circ)$ 이므로

$$100^\circ - \angle A = \angle A + 40^\circ$$

$$2\angle A = 60^\circ$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore \tan A = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

4 (1) $\tan x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \overline{DE}$

(2) $\sin x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \overline{BC}$

$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \overline{AB}$

$\tan x = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \overline{DE}$

따라서 $\angle x$ 가 90° 에 가까워지면

$\sin x$ 의 값인 \overline{BC} 의 길이는 1에 가까워지고,

$\cos x$ 의 값인 \overline{AB} 의 길이는 0에 가까워지고,

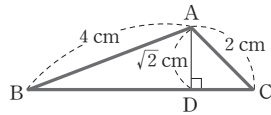
$\tan x$ 의 값인 \overline{DE} 의 길이는 한없이 커진다.

따라서 각도가 커짐에 따라 삼각비의 값이 작아지는 것은 $\cos x$ 이다.

(3) $\sin x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \overline{BC} < \tan x = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \overline{DE}$

$\therefore \sin x < \tan x$

5 오른쪽 그림의 점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 D라 하면



$\overline{AD} = \overline{AC} \sin C = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(\text{cm})$

$\therefore \sin B = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

6 오른쪽 그림에서

$\overline{ED} = x \text{ cm}$ 라 하면

$\overline{ED'} = x \text{ cm}$, $\overline{EC} = (3-x) \text{ cm}$

또, $\overline{AD'} = \overline{AD} = 5 \text{ cm}$ 이므로

$\overline{BD'} = \sqrt{\overline{AD'}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{cm})$

$\therefore \overline{CD'} = 5 - 4 = 1(\text{cm})$

$\triangle ED'C$ 에서 $x^2 = (3-x)^2 + 1^2 \quad \therefore x = \frac{5}{3}$

이때

$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{10}}{3}(\text{cm})$ 이므로

$\sin \theta + \tan \theta = \frac{\overline{ED'}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{ED'}}{\overline{AD'}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5\sqrt{10}}{3}} + \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{1}{3}$

7 $\overline{AH} = \overline{CH} = x \text{ cm}$ 라 하면

$\tan 30^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$ 이므로 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{5+x}$

$5+x = \sqrt{3}x$, $(\sqrt{3}-1)x = 5$

$\therefore x = \frac{5(1+\sqrt{3})}{2}$

따라서 \overline{AH} 의 길이는 $\frac{5(1+\sqrt{3})}{2} \text{ cm}$ 이다.

8 $\angle A = 180^\circ \times \frac{3}{3+4+5} = 45^\circ$

$\angle B = 180^\circ \times \frac{4}{3+4+5} = 60^\circ$

$\therefore \sin A : \cos B = \sin 45^\circ : \cos 60^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{1}{2}$

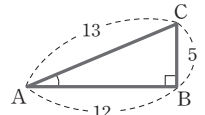
$= \sqrt{2} : 1$

9 $\tan A$ 가 기울기이므로 ③ $\tan A = \frac{5}{12}$

오른쪽 그림과 같이 $\tan A = \frac{5}{12}$ 인

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$



① $\sin A = \frac{5}{13}$ ② $\cos A = \frac{12}{13}$

④ $\sin A \times \cos A = \frac{5}{13} \times \frac{12}{13} = \frac{60}{169}$

⑤ $\sin A \times \tan A = \frac{5}{13} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{156}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

10 오른쪽 그림의

$\triangle OAB$ 에서

$\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$\therefore \overline{OB} = \sqrt{2}(\text{cm})$

($\because \overline{OB} > 0$)

$\triangle OBC$ 에서

$\overline{OC}^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$

$\therefore \overline{OC} = \sqrt{3} \text{ cm}$ ($\because \overline{OC} > 0$)

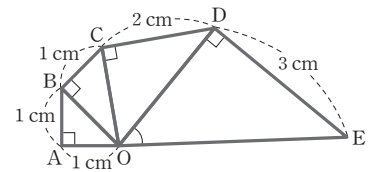
$\triangle OCD$ 에서 $\overline{OD}^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 = 7$

$\therefore \overline{OD} = \sqrt{7} \text{ cm}$ ($\because \overline{OD} > 0$)

$\triangle ODE$ 에서 $\overline{OE}^2 = (\sqrt{7})^2 + 3^2 = 16$

$\therefore \overline{OE} = 4 \text{ cm}$ ($\because \overline{OE} > 0$)

$\therefore \cos(\angle DOE) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OE}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$



11 (1) 오른쪽 그림에서

$\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 이고,

$\overline{OA'} = \overline{OA} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$A'(2\sqrt{2}, 0)$

같은 방법으로

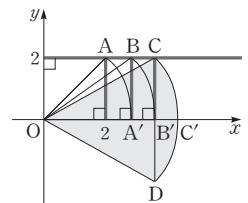
$\overline{OB'} = \overline{OB} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ 이므로

$B'(2\sqrt{3}, 0)$

$\therefore C(2\sqrt{3}, 2)$

점 C와 점 D는 x 축에 대하여 대칭이므로

$D(2\sqrt{3}, -2)$ 이다.



(2) 직각삼각형 OCB'에서

$$\overline{OC} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4, \overline{OB'} = 2\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\cos(\angle COB') = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \angle COB' = 30^\circ, \text{ 즉 } \angle COD = 60^\circ$$

따라서 부채꼴 OCD는 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 60° 이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times 4^2 \times \frac{60}{360} = \frac{8}{3}\pi$$

12 오른쪽 그림의 $\triangle ABD$ 에서

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \text{이므로}$$

$$3^2 = \overline{AD}^2 + 2^2$$

$$\therefore \overline{AD} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}(\text{cm})$$

$$\text{또, } \overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD} \text{이므로}$$

$$(\sqrt{5})^2 = 2\overline{CD}$$

$$\therefore \overline{CD} = \frac{5}{2} \text{ cm}$$

$\triangle ADC$ 에서

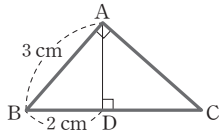
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = (\sqrt{5})^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

$$\therefore \cos(\angle ACD) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

$$= \frac{5}{2} \div \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{2}{3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



13 오른쪽 그림의 $\triangle OAB$ 에서

$$\overline{OB} = 4a, \overline{AB} = 3a \text{라 하면}$$

피타고라스 정리에 의해

$$5^2 = (4a)^2 + (3a)^2, 25 = 25a^2$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$$

$$\text{따라서 } \overline{OB} = 4, \overline{AB} = 3$$

점 B에서 \overline{OA} 에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 B의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\triangle OAB \sim \triangle OBH$ 에서

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OH}$$

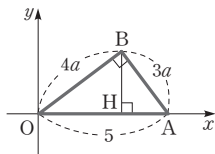
$$5 : 4 = 4 : x, 5x = 16 \quad \therefore x = \frac{16}{5}$$

또, $\triangle OBH \sim \triangle BAH$ 에서

$$\overline{OB} : \overline{BA} = \overline{OH} : \overline{BH}$$

$$4 : 3 = \frac{16}{5} : y, 4y = \frac{48}{5} \quad \therefore y = \frac{12}{5}$$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$ 이다.



14 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin(180^\circ - 120^\circ)$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

15 $\overline{BC} = \overline{AD} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ 이므로

$$\square ABCD = 3\sqrt{2} \times 4 \times \sin 45^\circ$$

$$= 3\sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12(\text{cm}^2)$$

16 오른쪽 그림의 점 A에서 \overline{BC}

에 내린 수선의 발을 H라 하고

$\overline{AH} = x \text{ cm}$ 라 하면

$$\overline{CH} = \frac{\overline{AH}}{\tan 45^\circ} = x(\text{cm}),$$

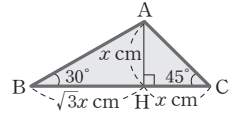
$$\overline{BH} = \frac{\overline{AH}}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x(\text{cm}) \text{이므로}$$

$$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} \text{에서 } 20 = (\sqrt{3} + 1)x$$

$$\therefore x = \frac{20}{\sqrt{3} + 1} = 10(\sqrt{3} - 1)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 20 \times 10(\sqrt{3} - 1)$$

$$= 100(\sqrt{3} - 1)(\text{cm}^2)$$



17 오른쪽 그림과 같이 $\triangle AOB$ 의

꼭짓점 A에서 \overline{OB} 에 내린 수선의 발

을 H라 하면

$\angle AOB = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$ 이므로

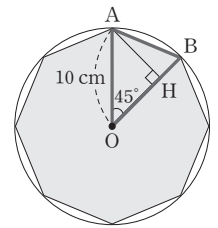
$$\sin 45^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{OA}}$$

$$\overline{AH} = \overline{OA} \sin 45^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$\therefore \triangle AOB = \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$

따라서 정팔각형의 넓이 S는

$$S = \triangle AOB \times 8 = 25\sqrt{2} \times 8 = 200\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$



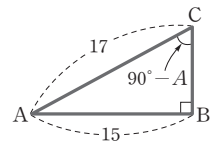
18 오른쪽 그림과 같이

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A = \frac{15}{17}$$

인 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{BC} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$$

$$\therefore \tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{15}$$



19 $1 + \tan^2 A = 1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

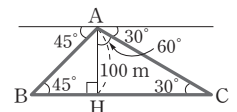
$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A}$$

20 주연이의 위치를 A, 공원의

양쪽 끝을 각각 B, C라 하면 오른

쪽 그림과 같으므로

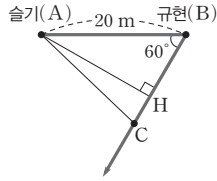


$$\overline{BH} = \overline{AH} = 100 \text{ m}$$

$$\overline{CH} = \overline{AH} \tan 60^\circ = 100\sqrt{3} \text{ (m)}$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} = 100(\sqrt{3} + 1) \text{ (m)}$$

21 오른쪽 그림의 점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 A에서 \overline{BC} 까지의 최단 거리는 \overline{AH} 이다.

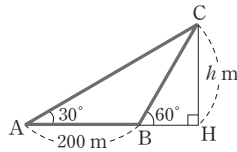


$$\overline{BH} = \overline{AB} \cos 60^\circ$$

$$= 20 \times \frac{1}{2} = 10 \text{ (m)}$$

따라서 규현이가 초속 1 m로 걸으므로 10초 후 가장 가까워진다.

22 오른쪽 그림의 점 C에서 \overline{AB} 의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{CH} = h$ m라 하면 $\angle BCH = 30^\circ$, $\angle ACH = 60^\circ$ 이므로



$$\overline{BH} = \overline{CH} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}h \text{ (m)},$$

$$\overline{AH} = \overline{CH} \tan 60^\circ = \sqrt{3}h \text{ (m)}$$

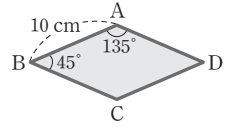
이때 $\overline{AB} = \overline{AH} - \overline{BH}$ 이므로

$$200 = \sqrt{3}h - \frac{\sqrt{3}}{3}h, \quad \frac{2\sqrt{3}}{3}h = 200$$

$$\therefore h = 100\sqrt{3}$$

따라서 산의 높이는 $100\sqrt{3}$ m이다.

23 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 10 cm인 마름모 ABCD에서 135° 인 각과 이웃하는 각의 크기는 $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ 이므로



$$\square ABCD = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 45^\circ$$

$$= 10 \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

24 오른쪽 그림에서

$\triangle AED \equiv \triangle FED$ 이므로

$$\overline{DF} = \overline{AD} = 10 \text{ cm}$$

$$\text{또, } \overline{CD} = \overline{AB} = 8 \text{ cm}$$

이므로 $\triangle DFC$ 에서

$$\overline{CF} = \sqrt{\overline{DF}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ (cm)}$$

$$\therefore \overline{BF} = \overline{BC} - \overline{CF} = 10 - 6 = 4 \text{ (cm)}$$

$\overline{AE} = \overline{EF} = x$ cm라 하면

$\overline{EB} = (8 - x)$ cm이므로

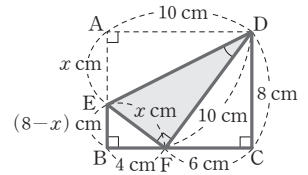
$$\triangle EBF \text{에서 } \overline{EF}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BF}^2$$

$$x^2 = (8 - x)^2 + 4^2, \quad 16x = 80 \quad \therefore x = 5$$

따라서 $\triangle DEF$ 에서

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{DF}^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

$$\therefore \sin(\angle EDF) = \frac{\overline{EF}}{\overline{DE}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



1 원과 직선

1 STEP 주제별 실력다지기

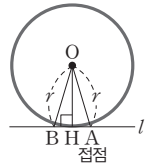
33-37쪽

- 1 3 cm 2 8 : 5 : 5 3 3 : 1 4 $\sqrt{2}\pi$ cm 5 $\frac{8}{3}\pi$ cm 6 $\frac{225}{4}\pi$ cm²
 7 10 cm 8 $\frac{24}{5}$ cm 9 (1) 18 cm (2) 9 cm 10 (1) 6 (2) 6 11 $4\sqrt{10}$ cm
 12 $\frac{25}{8}\pi$ cm² 13 $x+z=y$ 14 풀이 참조 15 30 cm²
 16 (1) 공통외접선 : 12 cm, 공통내접선 : $4\sqrt{3}$ cm (2) 공통외접선 : $2\sqrt{6}$ cm, 공통내접선은 없다.
 17 (1), (2) 풀이 참조 (3) $6\sqrt{2}$ cm² 18 $6\sqrt{2}$ cm 19 $(15-10\sqrt{2})$ cm 20 $(7-2\sqrt{6})$ cm 21 1 cm
 22 $10(2\sqrt{3}-3)$ cm 23 $\frac{21}{2}$ cm 24 $\frac{64}{3}$ cm 25 1 cm

최상의 02

NOTE '원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 수직이다.' 증명

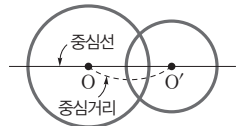
원 O와 직선 l이 한 점 A에서 만날 때(접할 때), \overline{OA} 와 직선 l이 수직이 아니라고 하자.
 점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle OHA=90^\circ$ 이고 직각삼각형 OHA에서 $\overline{OH} < \overline{OA}$
 그러면 $\overline{OB} = \overline{OA}$ 인 또 다른 한 점 B를 직선 l 위에 나타낼 수 있고 직선 l은 원과 두 점 A, B에서 만난다.
 이것은 원과 접선은 한 점에서 만난다는 접선의 정의에 모순이다.
 따라서 OA와 직선 l이 수직이 되어야 원과 한 점에서 만나므로 \overline{OA} 와 직선 l은 수직이다.



최상의 03

NOTE 두 원의 위치 관계

두 원의 중심 O, O'을 지나는 직선을 중심선이라 하고, 선분 OO'의 길이를 중심거리라 한다. 또 두 원이 한 점에서 만날 때 두 원은 서로 접한다고 하고, 만나는 점을 두 원의 접점이라 한다. 이때 두 원이 서로 외부에서 접하면 두 원은 외접한다고 하고, 한 원이 다른 원의 내부에서 접하면 두 원은 내접한다고 한다. 이때 외접이든지 내접이든지 접점은 두 원의 중심선 위에 있다.



두 원 O, O'의 반지름의 길이를 각각 $r, r'(r > r')$, 중심거리를 d 라 할 때, 두 원의 위치관계에 따른 r, r', d 사이의 관계는 다음과 같다.

한 원이 다른 원의 외부에 있다.	두 원이 외접한다.	두 원이 서로 다른 두 점에서 만난다.
$d > r + r'$	$d = r + r'$	$r - r' < d < r + r'$
두 원이 내접한다.	한 원이 다른 원의 내부에 있다.	두 원의 중심이 같다.
$d = r - r'$	$d < r - r'$	$d = 0$

1 $\overline{OB} \parallel \overline{DC}$ 이므로

$\angle BOC = \angle OCD$ (엇각),

$\angle AOB = \angle ODC$ (동위각)

그런데 $\triangle OCD$ 는 $\overline{OC} = \overline{OD}$ 인 이등변

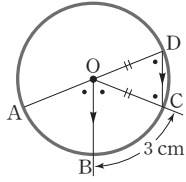
삼각형이므로

$\angle OCD = \angle ODC$

$\therefore \angle AOB = \angle BOC$

크기가 같은 두 중심각에 대한 호의 길이는 같으므로

$\widehat{AB} = \widehat{BC} = 3 \text{ cm}$



2 $\triangle OAD$ 는 $\overline{OA} = \overline{OD}$ 인 이등

변삼각형이므로

$\angle OAD = \angle ODA = 50^\circ$

$\therefore \angle AOD = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ)$

$= 80^\circ$

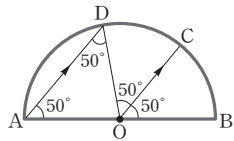
또, $\overline{AD} \parallel \overline{OC}$ 이므로

$\angle BOC = \angle OAD = 50^\circ$ (동위각)

$\angle COD = \angle ODA = 50^\circ$ (엇각)

호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$\widehat{AD} : \widehat{DC} : \widehat{CB} = 80^\circ : 50^\circ : 50^\circ = 8 : 5 : 5$



3 $\angle BOD = \theta$ 라 하면

$\triangle DEO$ 가 $\overline{DO} = \overline{DE}$ 인 이등변

삼각형이므로

$\angle DEO = \angle DOE = \theta$

$\angle ODC$ 는 $\triangle DEO$ 의 한 외각이므로

$\angle ODC = \angle DOE + \angle DEO = 2\theta$

또, $\triangle OCD$ 는 $\overline{OC} = \overline{OD}$ 인 이등변삼각형이므로

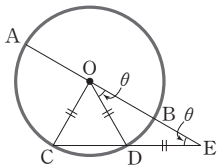
$\angle OCD = \angle ODC = 2\theta$

$\angle AOC$ 는 $\triangle OCE$ 의 한 외각이므로

$\angle AOC = \angle OCE + \angle OEC = 2\theta + \theta = 3\theta$

호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$\widehat{AC} : \widehat{BD} = \angle AOC : \angle BOD = 3\theta : \theta = 3 : 1$



4 $\angle AOB = x^\circ$ 라 하면

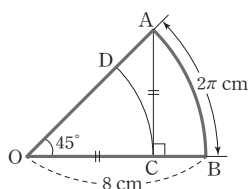
$\widehat{AB} = 2\pi = 2\pi \times 8 \times \frac{x}{360}$

$\therefore x = 45$

따라서

$\angle CAO = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$

이므로 $\triangle OAC$ 는 직각이등변삼각형이다.



$\overline{OA} : \overline{OC} = \sqrt{2} : 1$ 에서

$8 : \overline{OC} = \sqrt{2} : 1, \sqrt{2} \overline{OC} = 8 \quad \therefore \overline{OC} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

$\therefore \widehat{CD} = 2\pi \times 4\sqrt{2} \times \frac{45}{360} = \sqrt{2}\pi \text{ (cm)}$

5 $\triangle OAD$ 와 $\triangle OCD$ 에서

$\overline{OA} = \overline{OC}$ (반지름), $\angle AOD = \angle COD = 60^\circ$, \overline{OD} 는 공통
이므로 $\triangle OAD \cong \triangle OCD$ (SAS 합동)

$\therefore \angle ODA = \angle ODC = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ, \overline{AD} = \overline{CD}$

따라서 $\triangle OAD$ 는 직각삼각형이고, 세 내각의 크기가 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 이므로

$\overline{OA} : \overline{OD} = 2 : 1$ 에서

$\overline{OA} : 4 = 2 : 1 \quad \therefore \overline{OA} = 8 \text{ cm}$

$\therefore \widehat{AB} = 2\pi \times 8 \times \frac{60}{360} = \frac{8}{3}\pi \text{ (cm)}$

6 \overline{CH} 는 현의 수직이등분선이므로

그 연장선은 원의 중심을 지난다. 즉, 원을 완성하면 오른쪽 그림과 같고, 원의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$ 라 하면

$\overline{OH} = (r-3) \text{ cm}$

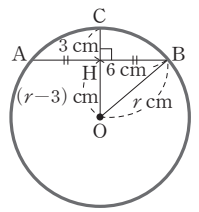
$\triangle OBH$ 에서

$\overline{OB}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{BH}^2$ 이므로

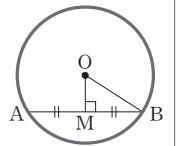
$r^2 = (r-3)^2 + 6^2, 6r = 45 \quad \therefore r = \frac{15}{2}$

따라서 원의 넓이는

$\pi r^2 = \pi \times \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}\pi \text{ (cm}^2\text{)}$



TIP 현의 수직이등분선에 의한 직각삼각형이 나오면 직각삼각형 OMB에서 피타고라스 정리를 이용한다.



7 오른쪽 그림과 같이 점 O에서

\overline{AC} 와 \overline{BD} 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면

$\triangle ORH$ 와 $\triangle ORH'$ 에서

$\angle H = \angle H' = 90^\circ, \overline{OR}$ 는 공통,

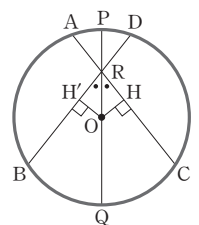
$\angle ORH = \angle ORH'$ 이므로

$\triangle ORH \cong \triangle ORH'$ (RHA 합동)

$\therefore \overline{OH} = \overline{OH'}$

따라서 원의 중심에서 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같으므로

$\overline{BD} = \overline{AC} = 10 \text{ cm}$



8 오른쪽 그림과 같이 \overline{AB} 와

$\overline{OO'}$ 의 교점을 M이라 하면

$\triangle OAO'$ 과 $\triangle OBO'$ 에서

$\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{O'A}=\overline{O'B}$,

$\overline{OO'}$ 은 공통이므로

$\triangle OAO' \equiv \triangle OBO'$ (SSS 합동)

$\therefore \angle AOM = \angle BOM$

$\triangle OAM$ 과 $\triangle OBM$ 에서

$\overline{OA}=\overline{OB}$, \overline{OM} 은 공통, $\angle AOM = \angle BOM$ 이므로

$\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ (SAS 합동)

$\therefore \angle AMO = \angle BMO = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$, $\overline{AM} = \overline{BM}$

$\triangle AOO'$ 에서

$\angle OAO' = 90^\circ$ 이므로

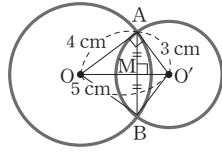
$\overline{OO'} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5(\text{cm})$

또, $\overline{AO} \times \overline{AO'} = \overline{AM} \times \overline{OO'}$ 이므로

$4 \times 3 = \overline{AM} \times 5$

$\therefore \overline{AM} = \frac{12}{5} \text{ cm}$

$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AM} = 2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5} (\text{cm})$



9 \overline{PA} 가 원 O의 접선이므로 $\angle OAP = 90^\circ$

(1) $\overline{OA} = 5 \text{ cm}$, $\overline{PA} = 12 \text{ cm}$ 이므로 $\triangle OAP$ 에서

$\overline{OP} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13(\text{cm})$

$\therefore \overline{BP} = \overline{BO} + \overline{OP} = 5 + 13 = 18(\text{cm})$

(2) $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r \text{ cm}$ 라 하면

$\overline{BP} = 25 \text{ cm}$ 이므로

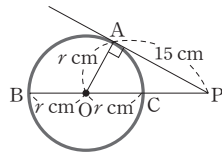
$\overline{OP} = (25 - r) \text{ cm}$

$\overline{PA} = 15 \text{ cm}$ 이므로 $\triangle OAP$ 에서

$(25 - r)^2 = r^2 + 15^2$, $625 - 50r + r^2 = r^2 + 225$

$50r = 400 \quad \therefore r = 8$

$\therefore \overline{CP} = \overline{BP} - \overline{BC} = 25 - 2 \times 8 = 9(\text{cm})$



10 (1) $\triangle ABC$ 에서

$\overline{BC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

오른쪽 그림과 같이 접점을 각

각 D, E, F라 하면

$\overline{BF} = \overline{BD} = x$, $\overline{AE} = \overline{AF} = 8 - x$,

$\overline{CE} = \overline{CD} = 10 - x$ 이므로

$\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE}$

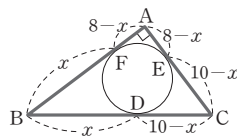
$= (8 - x) + (10 - x)$

$= 18 - 2x = 6$

$18 - 2x = 6$ 에서 $2x = 12 \quad \therefore x = 6$

(2) $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ 이므로

$7 + x = 5 + 8 \quad \therefore x = 6$



11 $\overline{PD} = \overline{CD} = 5 \text{ cm}$ 이고,

$\overline{AB} = \overline{AP} = \overline{AD} - \overline{PD}$

$= 13 - 5$

$= 8(\text{cm})$

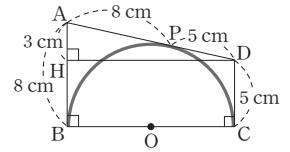
점 D에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH} = \overline{AB} - \overline{BH} = \overline{AB} - \overline{CD}$

$= 8 - 5 = 3(\text{cm})$

$\triangle AHD$ 는 직각삼각형이므로

$\overline{BC} = \overline{HD} = \sqrt{13^2 - 3^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}(\text{cm})$



TIP 반원의 지름과 길이가 같은 수선을 그어 직각삼각형을 만든 후 피타고라스 정리를 이용한다.

12 \overline{AB} , \overline{AC} 를 각각 지름으로 하는 두 반원의 넓이의 합

은 \overline{BC} 를 지름으로 하는 반원의 넓이와 같으므로

$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{8} \pi (\text{cm}^2)$

13 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC

에서 $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ 라 하면

피타고라스 정리에 의해

$b^2 + c^2 = a^2 \quad \dots \textcircled{1}$

$\triangle AEB$, $\triangle BFC$, $\triangle ACD$ 가 모두 정삼각형이므로

$\triangle AEB = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2 = x \quad \therefore c^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} x \quad \dots \textcircled{2}$

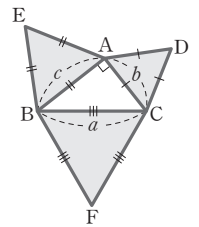
$\triangle BFC = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = y \quad \therefore a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} y \quad \dots \textcircled{3}$

$\triangle ACD = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 = z \quad \therefore b^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} z \quad \dots \textcircled{4}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$\frac{4}{\sqrt{3}} z + \frac{4}{\sqrt{3}} x = \frac{4}{\sqrt{3}} y$

$\therefore x + z = y$



14 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$ 는

$\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 피

타고라스 정리에 의해

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \quad \dots \textcircled{1}$

세 반원으로 이루어진 도형의 넓이의 합 $S_1 + S_2$ 는

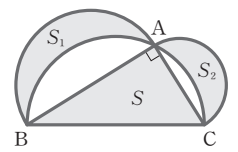
$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \overline{AB}\right)^2 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \overline{AC}\right)^2 + \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AC}$

$- \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \overline{BC}\right)^2$

$= \frac{\pi}{8} (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) + \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AC} - \frac{\pi}{8} \overline{BC}^2$

$= \frac{\pi}{8} \overline{BC}^2 + \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AC} - \frac{\pi}{8} \overline{BC}^2 \quad (\because \textcircled{1})$

$= \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AC} = S$



15 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$ 가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

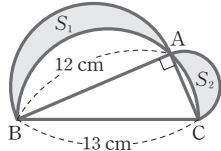
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$12^2 + \overline{AC}^2 = 13^2, \overline{AC}^2 = 25$$

$$\therefore \overline{AC} = 5 \text{ cm} (\because \overline{AC} > 0)$$

한편, $S_1 + S_2$ 의 값은 $\triangle ABC$ 의 넓이와 같으므로 (14번 증명 참고)

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \triangle ABC \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \\ &= 30(\text{cm}^2) \end{aligned}$$



16 (1) $\overline{OO'} = 8 + 2 + 3 = 13(\text{cm})$

(i) 오른쪽 그림과 같이 두 점

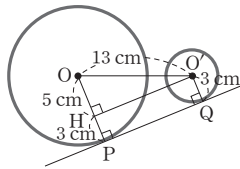
O, O' 에서 공통외접선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q 라 하고 점 O' 에서 \overline{OP} 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{HP} = \overline{O'Q} = 3 \text{ cm}$$

$$\therefore \overline{OH} = \overline{OP} - \overline{HP} = 8 - 3 = 5(\text{cm})$$

$$\triangle OHO' \text{에서 } \overline{HO'} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{cm})$$

따라서 공통외접선의 길이는 $\overline{PQ} = \overline{HO'} = 12 \text{ cm}$



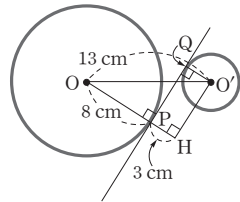
(ii) 오른쪽 그림과 같이 두 점

O, O' 에서 공통내접선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q 라 하고 점 O' 에서 \overline{OP} 의 연장선에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH} = \overline{QO'} = 3 \text{ cm}$$

$$\triangle OHO' \text{에서 } \overline{HO'} = \sqrt{13^2 - 11^2} = 4\sqrt{3}(\text{cm})$$

따라서 공통내접선의 길이는 $\overline{PQ} = \overline{HO'} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$



(2) (i) 오른쪽 그림과 같이 두 점 $O,$

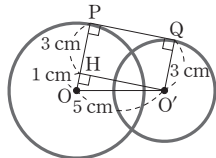
O' 에서 공통외접선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q 라 하고 점 O' 에서 \overline{OP} 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH} = \overline{QO'} = 3 \text{ cm}$$

$$\therefore \overline{HO} = \overline{OP} - \overline{PH} = 4 - 3 = 1(\text{cm})$$

$$\triangle OO'H \text{에서 } \overline{HO'} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$$

따라서 공통외접선의 길이는 $\overline{PQ} = \overline{HO'} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$



(ii) 공통내접선은 없다.

17 (1) 오른쪽 그림에서

$$\overline{PM} = \overline{RM} = \overline{QM} \text{이므로}$$

$\triangle PMR, \triangle RMQ$ 는 모두 이등변삼각형이다.

따라서 $\angle RPM = \angle PRM = \angle x,$

$\angle MRQ = \angle MQR = \angle y$ 라 하면

$\triangle PQR$ 에서 $2\angle x + 2\angle y = 180^\circ$

$$\therefore \angle PRQ = \angle x + \angle y = 90^\circ$$

(2) $\triangle OPM$ 과 $\triangle ORM$ 에서

$$\overline{OP} = \overline{OR}, \overline{PM} = \overline{RM},$$

$\angle OPM = \angle ORM = 90^\circ$ 이므로

$\triangle OPM \equiv \triangle ORM$ (SAS 합동)

$$\therefore \angle PMO = \angle RMO \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle O'RM$ 과 $\triangle O'QM$ 에서

$$\overline{O'R} = \overline{O'Q}, \overline{RM} = \overline{QM},$$

$\angle O'RM = \angle O'QM = 90^\circ$ 이므로

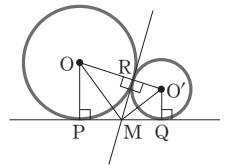
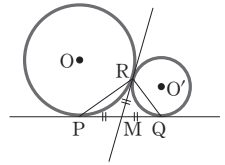
$\triangle O'RM \equiv \triangle O'QM$ (SAS 합동)

$$\therefore \angle RMO' = \angle QMO' \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$2(\angle RMO + \angle RMO') = 180^\circ$$

$$\therefore \angle OMO' = \angle RMO + \angle RMO' = 90^\circ$$



(3) 오른쪽 그림에서

$$\overline{OR} = \overline{OP} = 4 \text{ cm},$$

$$\overline{O'R} = \overline{O'Q} = 2 \text{ cm} \text{이므로}$$

$$\overline{OO'} = \overline{OR} + \overline{O'R}$$

$$= 4 + 2 = 6(\text{cm})$$

점 O' 에서 \overline{OP} 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{HP} = \overline{O'Q} = 2 \text{ cm}$$

$$\therefore \overline{OH} = \overline{OP} - \overline{HP} = 4 - 2 = 2(\text{cm})$$

$$\triangle OHO' \text{에서 } \overline{HO'} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}(\text{cm})$$

따라서 공통외접선 \overline{PQ} 의 길이는 $\overline{PQ} = \overline{HO'} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

$$\overline{PM} = \overline{RM} = \overline{QM} \text{이므로}$$

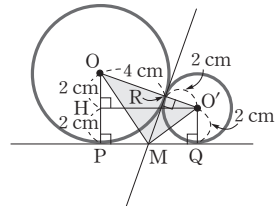
$$\overline{RM} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(\text{cm})$$

$\triangle OMO'$ 에서 $\overline{MR} \perp \overline{OO'}$ 이므로

$$\triangle OMO' = \frac{1}{2} \times \overline{OO'} \times \overline{RM}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{2}$$

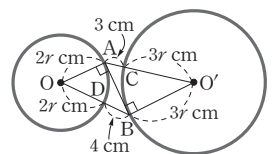
$$= 6\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$



18 두 원 O, O' 의 반지름의

길이를 각각 $2r \text{ cm}, 3r \text{ cm}$ 라

하면 $\triangle AOB$ 에서



$$\overline{AB}^2 + (2r)^2 = (2r+4)^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle ABO'$ 에서

$$\overline{AB}^2 + (3r)^2 = (3r+3)^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

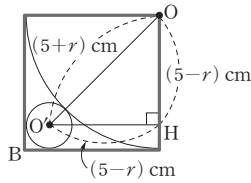
$$(2r+4)^2 - (2r)^2 = (3r+3)^2 - (3r)^2$$

$$2r = 7 \quad \therefore r = \frac{7}{2}$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(2r+4)^2 - (2r)^2} \\ &= \sqrt{11^2 - 7^2} = 6\sqrt{2}(\text{cm}) \end{aligned}$$

19 오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심 O 와 O' 을 이은 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형 $OO'H$ 를 그리고, 원 O' 의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$$\overline{OO'} = (5+r) \text{ cm}, \quad \overline{OH} = (5-r) \text{ cm},$$

$$\overline{O'H} = (5-r) \text{ cm}$$

$\triangle OO'H$ 에서 피타고라스 정리에 의해

$$(5+r)^2 = (5-r)^2 + (5-r)^2$$

$$r^2 - 30r + 25 = 0$$

$$\therefore r = -(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 25} = 15 \pm 10\sqrt{2}$$

이때 $0 < r < 5$ 이므로 원 O' 의 반지름의 길이는 $(15 - 10\sqrt{2})$ cm이다.

20 두 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$\overline{OO'} = 2r \text{ cm},$$

$$\overline{OH} = (8-2r) \text{ cm},$$

$$\overline{O'H} = (6-2r) \text{ cm}$$

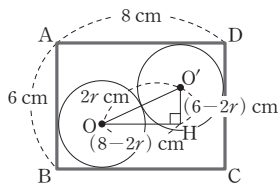
$\triangle O'OH$ 에서 피타고라스 정리에 의해

$$(2r)^2 = (8-2r)^2 + (6-2r)^2$$

$$r^2 - 14r + 25 = 0$$

$$\therefore r = -(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 25} = 7 \pm 2\sqrt{6}$$

이때 $0 < r < 3$ 이므로 원의 반지름의 길이는 $(7 - 2\sqrt{6})$ cm이다.



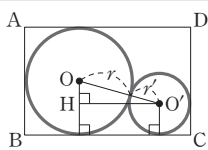
TIP 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 변에 접하면서 동시에 외접하는 두 원 O , O' 의 반지름의 길이를 각각 r , r' ($r > r'$)이라 하면

$$\overline{OO'} = r+r', \quad \overline{OH} = r-r',$$

$$\overline{O'H} = \overline{AD} - (r+r')$$

$$\triangle OHO' \text{에서 } \overline{OO'}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{O'H}^2$$

즉 $(r+r')^2 = (r-r')^2 + \{\overline{AD} - (r+r')\}^2$ 이 성립한다.



21 두 원 O' 과 O 의 접점을 P , 두 원 O' , O 와 선분 BC 와의 접점을 각각 Q , R 라 하면 $\triangle OBR$ 에서

$$\angle OBR = \frac{1}{2} \angle ABC$$

$$= \frac{1}{2} \times 60^\circ$$

$$= 30^\circ$$

$$\overline{BR} = \overline{CR} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}(\text{cm})$$

이므로 $\overline{OR} : \overline{BO} : 3\sqrt{3} = 1 : 2 : \sqrt{3}$

$$\therefore \overline{OR} = 3 \text{ cm}, \quad \overline{BO} = 6 \text{ cm}$$

원 O' 의 반지름의 길이를 r cm라 하면 $\triangle O'BQ$ 에서

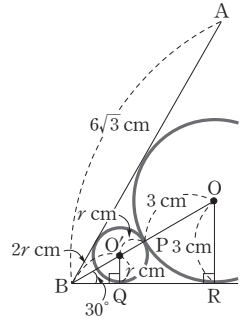
$$\overline{BO'} = 2r \text{ cm} \text{이므로}$$

$$\overline{BO} = \overline{BO'} + \overline{O'P} + \overline{PO}$$

$$= 2r + r + 3 = 6(\text{cm})$$

$$3r = 3 \quad \therefore r = 1$$

따라서 원 O' 의 반지름의 길이는 1 cm이다.



22 오른쪽 그림과 같이 두 원 Q , R 의 교점을 H , 두 원 P , R 의 교점을 H' 이라 하고, 세 원 P , Q , R 의 반지름의 길이를 r cm라 하면 $\triangle PQR$ 는 한 변의 길이가 $2r$ cm인 정삼각형이고, \overline{PH} 와 $\overline{QH'}$ 의 교점 O 는 $\triangle PQR$ 의 무게중심이다.

\overline{PH} 는 한 변의 길이가 $2r$ cm인 정삼각형의 높이이므로

$$\overline{PH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2r = \sqrt{3}r(\text{cm})$$

$$\therefore \overline{OP} = \frac{2}{3} \overline{PH} = \frac{2}{3} \times \sqrt{3}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}r(\text{cm})$$

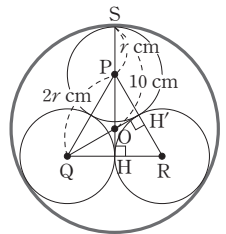
$$\overline{OS} = \overline{SP} + \overline{PO} = r + \frac{2\sqrt{3}}{3}r = 10(\text{cm}) \text{이므로}$$

$$(3 + 2\sqrt{3})r = 30$$

$$\therefore r = 10(2\sqrt{3} - 3)$$

$$\therefore r = 10(2\sqrt{3} - 3)$$

따라서 작은 원의 반지름의 길이는 $10(2\sqrt{3} - 3)$ cm이다.



TIP 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 높이 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 이다.

$$\mathbf{23} \quad 2\overline{AP} = \overline{AP} + \overline{AR}$$

$$= \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{AC} + \overline{CR}$$

$$= \overline{AB} + \overline{BQ} + \overline{CQ} + \overline{AC}$$

$$= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$$

$$= 8 + 7 + 6 = 21(\text{cm})$$

$$\therefore \overline{AP} = \frac{21}{2} \text{ cm}$$

24 오른쪽 그림의

$\triangle AQO$ 와 $\triangle ARO'$ 에서

$\angle OAQ$ 는 공통,

$\angle AQO = \angle ARO' = 90^\circ$

이므로

$\triangle AQO \sim \triangle ARO'$

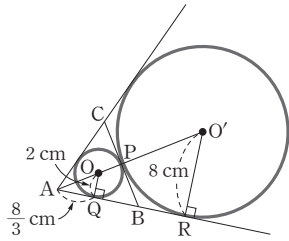
(AA 닮음)

즉, $\overline{OQ} : \overline{OR} = \overline{AQ} : \overline{AR}$ 이므로

$$2 : 8 = \frac{8}{3} : \overline{AR}$$

$$2\overline{AR} = \frac{64}{3} \text{ (cm)}$$

$$\therefore (\triangle ABC \text{의 둘레의 길이}) = 2\overline{AR} = \frac{64}{3} \text{ cm}$$



25 오른쪽 그림에서

$$\overline{AP} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$$

$$= \frac{1}{2} (7 + 6 + 6) = \frac{19}{2} \text{ (cm)}$$

$$\therefore \overline{BQ} = \overline{BP} = \frac{19}{2} - 7 = \frac{5}{2} \text{ (cm)}$$

$\overline{BE} = \overline{BD} = x \text{ cm}$ 라 하면

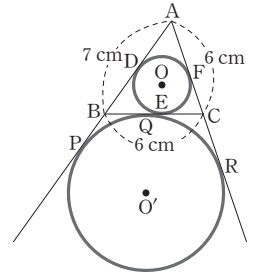
$$\overline{AF} = \overline{AD} = (7 - x) \text{ cm,}$$

$$\overline{CF} = \overline{CE} = (6 - x) \text{ cm 이므로}$$

$$\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{CF} = (7 - x) + (6 - x) = 6 \text{ (cm)}$$

$$2x = 7 \quad \therefore x = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \overline{QE} = \overline{BE} - \overline{BQ} = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = 1 \text{ (cm)}$$



2 STEP 실력 높이기

40~45쪽

- | | | | | | |
|-------------------------|-----------------------------------|--|------------------------|---|----------------------|
| 1 3 cm | 2 3 cm | 3 20 | 4 8 cm | 5 $\frac{a^2}{9}$ | 6 $\frac{169}{4}\pi$ |
| 7 $5\sqrt{3}$ cm | 8 $(110 - 25\pi)$ cm ² | 9 $\frac{120}{13}$ cm | 10 12 cm | 11 3 | 12 25π |
| 13 $\frac{16}{5}$ cm | 14 15 | 15 $\frac{576}{49}\pi$ cm ² | 16 144 cm ² | 17 $(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3})$ cm ² | 18 $\frac{3}{2}$ cm |
| 19 $(6 - 4\sqrt{2})$ cm | 20 20 cm | 21 27 cm ² | 22 13 cm | 23 $5(\sqrt{2} - 1)$ cm | |

문제 풀이

1 오른쪽 그림에서 $\triangle DOP$ 는

$\overline{DP} = \overline{DO}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle DOP = \angle DPO = 20^\circ$$

$$\therefore \angle ODC = \angle DPO + \angle DOP$$

$$= 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$$

또, \overline{OC} 를 그으면 $\triangle ODC$ 는 $\overline{OD} = \overline{OC}$ 인 이등변삼각형이

므로 $\angle OCD = \angle ODC = 40^\circ$

따라서 $\triangle OPC$ 에서

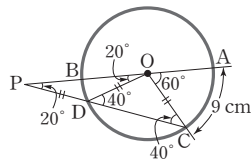
$$\angle AOC = \angle OPC + \angle OCP = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$$

부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$\widehat{BD} : \widehat{AC} = 20^\circ : 60^\circ = 1 : 3$$

$$\widehat{BD} : 9 = 1 : 3, \quad 3\widehat{BD} = 9$$

$$\therefore \widehat{BD} = 3 \text{ cm}$$



2 오른쪽 그림에서 $\triangle OCB$ 는

$\overline{OC} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DOB = \angle OCB + \angle OBC$$

$$= 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

$\overline{EA} \parallel \overline{DO}$ 이므로

$$\angle EAO = \angle DOB = 60^\circ \text{ (동위각)}$$

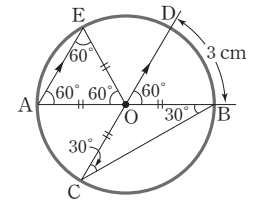
\overline{OE} 를 그으면 $\triangle OEA$ 는 $\overline{OA} = \overline{OE}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle OEA = \angle OAE = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AOE = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$$

크기가 같은 두 중심각에 대한 호의 길이는 같으므로

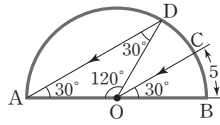
$$\widehat{AE} = \widehat{BD} = 3 \text{ cm}$$



3 서술형

표현 단계 \overline{OD} 를 그으면

$\triangle OAD$ 는 $\overline{OA}=\overline{OD}$ 인 이등변삼각형이다.



변형 단계 $\overline{AD} \parallel \overline{OC}$ 이므로

$\angle OAD = \angle BOC = 30^\circ$ (동위각)

또, $\overline{OA} = \overline{OD}$ 이므로

$\angle ODA = \angle OAD = 30^\circ$

풀이 단계 $\angle AOD = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$ 이고

호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$\angle BOC : \angle AOD = \widehat{BC} : \widehat{AD}$ 에서

$30^\circ : 120^\circ = 5 : \widehat{AD}$, $1 : 4 = 5 : \widehat{AD}$

$\therefore \widehat{AD} = 20$

4 오른쪽 그림과 같이 \overline{OA} 를 긋고

$\overline{OP} \perp \overline{AB}$ 인 \overline{OP} 를 그으면 큰 원의 현

\overline{AB} 는 이등분된다. 즉, $\overline{AP} = \overline{BP}$

또, 큰 원의 반지름의 길이를 R cm,

작은 원의 반지름의 길이를 r cm라

하면 두 원의 넓이의 차는

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 16\pi$$

$$\therefore R^2 - r^2 = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

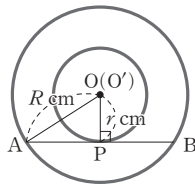
$\overline{OA} = R$ cm, $\overline{OP} = r$ cm이므로

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2 = R^2 - r^2$

$\textcircled{1}$ 에서 $\overline{AP}^2 = 16$

$\therefore \overline{AP} = 4$ cm ($\because \overline{AP} > 0$)

$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AP} = 2 \times 4 = 8$ (cm)

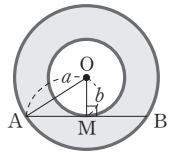


TIP 중심이 같은 두 원

큰 원의 반지름의 길이를 a , 작은 원의 반지름의 길이를 b 라 하면

$$(1) \overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$(2) (\text{색칠한 부분의 넓이}) = \pi a^2 - \pi b^2 = \pi(a^2 - b^2)$$



5 서술형

표현 단계 원의 중심 O 에서 현 \overline{AD} 에

내린 수선의 발을 H 라 하자.

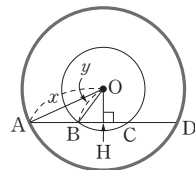
변형 단계 $\overline{AD} = a$ 이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \frac{a}{3}$$

\overline{BC} 는 작은 원의 현이므로 $\overline{BH} = \overline{HC} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{a}{6}$

이고, \overline{AD} 는 큰 원의 현이므로

$\overline{AH} = \overline{HD} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{a}{2}$ 이다.



$\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$ 라 하면 문제의 조건에서

$$x + y = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle OAH$ 에서 $\overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AH}^2 = x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$,

$\triangle OBH$ 에서 $\overline{OH}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BH}^2 = y^2 - \left(\frac{a}{6}\right)^2$

즉, $x^2 - \frac{a^2}{4} = y^2 - \frac{a^2}{36}$ 에서 $x^2 - y^2 = \frac{2}{9}a^2$

풀이 단계 $(x+y)(x-y) = \frac{2}{9}a^2$, $2(x-y) = \frac{2}{9}a^2$ ($\because \textcircled{1}$)

$$\therefore x - y = \frac{a^2}{9}$$

확인 단계 따라서 구하는 두 원의 반지름의 길이의 차는 $\frac{a^2}{9}$

이다.

6 서술형

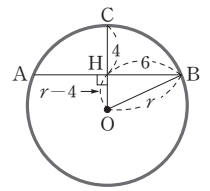
표현 단계 원의 중심을 O 라 하면 \overline{AB} 는 원 O 의 현이고, \overline{CH}

는 현의 수직이등분선이므로 원의 중심 O 는 \overline{CH} 의 연장선 위에 있다.

변형 단계 오른쪽 그림과 같이 원을 복

원하여 $\overline{OB} = r$ 라 하면

$\overline{OH} = r - 4$ 이다.



풀이 단계 $\triangle OBH$ 는 직각삼각형이므로

$$r^2 = (r-4)^2 + 6^2, 8r = 52$$

$$\therefore r = \frac{13}{2}$$

확인 단계 따라서 구하는 청동거울의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}\pi$$

7 오른쪽 그림과 같이 \overline{OT} 를 그

으면

$\angle PTO = 90^\circ$ 이므로

$$\overline{PT} : \overline{OT} : \overline{OP} = \sqrt{3} : 1 : 2$$

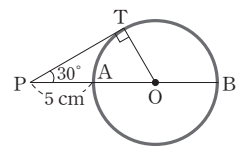
또, $\overline{OT} = \overline{OA}$ 이므로

$$\overline{OT} : (\overline{OT} + 5) = 1 : 2$$

$$\overline{OT} + 5 = 2\overline{OT}$$

$$\therefore \overline{OT} = 5$$
 cm

$$\therefore \overline{PT} = \sqrt{3} \times \overline{OT} = 5\sqrt{3}$$
 (cm)



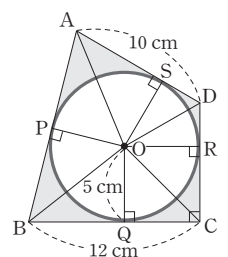
8 오른쪽 그림에서

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

$$= 10 + 12$$

$$= 22$$
 (cm)

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = \overline{OS} = 5$$
 cm

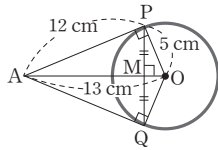


∴ □ABCD

$$\begin{aligned}
 &= \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD + \triangle ODA \\
 &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OP} + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{OQ} + \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{OR} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{OS} \\
 &= \frac{5}{2} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) \\
 &= \frac{5}{2} (\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC} + \overline{DA}) \\
 &= \frac{5}{2} (22 + 22) \\
 &= \frac{5}{2} \times 44 \\
 &= 110 (\text{cm}^2)
 \end{aligned}$$

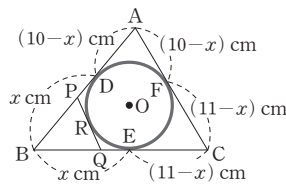
따라서 원 O의 넓이는 $\pi \times 5^2 = 25\pi (\text{cm}^2)$ 이므로
 (어두운 부분의 넓이) = □ABCD - (원 O의 넓이)
 $= 110 - 25\pi (\text{cm}^2)$

9 오른쪽 그림과 같이 \overline{OA} 를 긋고 \overline{OA} 와 \overline{PQ} 의 교점을 M이라 하면 $\overline{OA} \perp \overline{PQ}$, $\overline{PM} = \overline{MQ}$
 직각삼각형 PAO에서



$$\begin{aligned}
 \overline{OA} &= \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 (\text{cm}) \\
 \text{또, } \overline{AP} \times \overline{OP} &= \overline{PM} \times \overline{OA} \text{ 이므로} \\
 12 \times 5 &= \overline{PM} \times 13 \\
 \therefore \overline{PM} &= \frac{60}{13} \text{ cm} \\
 \therefore \overline{PQ} &= 2\overline{PM} = 2 \times \frac{60}{13} = \frac{120}{13} (\text{cm})
 \end{aligned}$$

10 오른쪽 그림에서
 (△PBQ의 둘레의 길이)



$$\begin{aligned}
 &= \overline{BP} + \overline{PQ} + \overline{BQ} \\
 &= \overline{BP} + \overline{PR} + \overline{QR} + \overline{BQ} \\
 &= (\overline{BP} + \overline{PD}) + (\overline{QE} + \overline{BQ}) \\
 &= \overline{BD} + \overline{BE} = 2\overline{BD} \\
 \overline{BD} = \overline{BE} &= x \text{ cm라 하면} \\
 \overline{AF} = \overline{AD} &= (10-x) \text{ cm} \\
 \overline{CF} = \overline{CE} &= (11-x) \text{ cm} \\
 \overline{AC} = \overline{AF} + \overline{CF} \\
 &= (10-x) + (11-x) \\
 &= 21 - 2x = 9 (\text{cm})
 \end{aligned}$$

$$2x = 12 \quad \therefore x = 6$$

따라서 △PBQ의 둘레의 길이는
 $2\overline{BD} = 2x = 2 \times 6 = 12 (\text{cm})$

11 서술형

표현 단계 △ABC는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$$

변형 단계 두 원 O, O'의 반지름의 길이가 같으므로 원의 접선의 성질에 의해

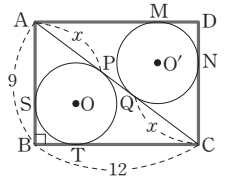
$$\overline{AS} = \overline{AP} = \overline{CN} = \overline{CQ} = x \text{라 하면}$$

$$\triangle ABC \text{에서 } \overline{CT} = \overline{CP} = 15 - x, \overline{BT} = \overline{BS} = 9 - x$$

풀이 단계 따라서 $\overline{BC} = \overline{BT} + \overline{TC}$ 이므로

$$(9 - x) + (15 - x) = 12, 2x = 12 \quad \therefore x = 6$$

$$\therefore \overline{PQ} = \overline{AC} - 2\overline{AP} = 15 - 2 \times 6 = 3$$



12 서술형

표현 단계 정삼각형의 내접원과 외접원은 중심이 같다.

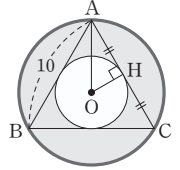
변형 단계 △ABC의 내접원과 \overline{AC} 의 접점을 H라 하면

$\overline{OH} \perp \overline{AC}$ 이고, \overline{AC} 는 외접원의 현이므로

$$\overline{AH} = \overline{CH} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

풀이 단계 따라서 어두운 부분의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \pi \times \overline{OA}^2 - \pi \times \overline{OH}^2 \\
 &= \pi (\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2) \\
 &= \pi \times \overline{AH}^2 \\
 &= \pi \times 5^2 = 25\pi
 \end{aligned}$$



13 $\overline{AP} = \overline{AB} = 2 \text{ cm}$,

$\overline{DP} = \overline{DC} = 8 \text{ cm}$ 이고

$\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{PH} \perp \overline{BC}$, $\overline{DC} \perp \overline{BC}$

이므로

$\overline{AB} \parallel \overline{PH} \parallel \overline{DC}$ 이다.

이때 \overline{AC} 를 긋고 \overline{AC} 와 \overline{PH} 의 교점을 Q라 하면

$\triangle APQ \sim \triangle ADC$ (AA 닮음)에서

$$\overline{AP} : \overline{AD} = \overline{PQ} : \overline{DC}$$

$$2 : 10 = \overline{PQ} : 8$$

$$10\overline{PQ} = 16 \quad \therefore \overline{PQ} = \frac{8}{5} \text{ cm}$$

또, $\triangle CQH \sim \triangle CAB$ (AA 닮음)에서

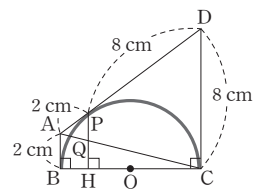
$$\overline{CQ} : \overline{CA} = \overline{QH} : \overline{AB} \text{이고}$$

$$\overline{CQ} : \overline{CA} = \overline{DP} : \overline{DA} \text{이므로}$$

$$\overline{QH} : \overline{AB} = \overline{DP} : \overline{DA} \text{에서 } \overline{QH} : 2 = 8 : 10$$

$$10\overline{QH} = 16 \quad \therefore \overline{QH} = \frac{8}{5} \text{ cm}$$

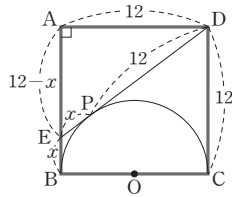
$$\therefore \overline{PH} = \overline{PQ} + \overline{QH} = \frac{8}{5} + \frac{8}{5} = \frac{16}{5} (\text{cm})$$



14 서술형

표현 단계 반원 O와 \overline{DE} 의 접점을 P라 하자.

변형 단계 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $\overline{DP} = \overline{DC} = 12$



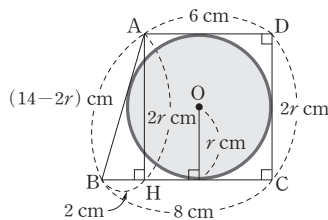
$\overline{EB} = \overline{EP} = x$ 라 하면 $\overline{AE} = 12 - x$

풀이 단계 $\triangle ADE$ 는 직각삼각형이므로
 $(x+12)^2 = (12-x)^2 + 12^2$
 $48x = 144 \quad \therefore x = 3$

확인 단계 따라서 \overline{DE} 의 길이는 $12 + 3 = 15$

15 오른쪽 그림과 같이

점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$\overline{AH} = \overline{CD} = 2r$ cm
 $\overline{BH} = \overline{BC} - \overline{CH} = \overline{BC} - \overline{AD} = 8 - 6 = 2$ (cm)

또, $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$ 이므로 $6 + 8 = \overline{AB} + 2r$ 에서
 $\overline{AB} = (14 - 2r)$ cm
 직각삼각형 ABH에서

$$(14 - 2r)^2 = (2r)^2 + 2^2, \quad 56r = 192 \quad \therefore r = \frac{24}{7}$$

따라서 원 O의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{24}{7}\right)^2 = \frac{576}{49} \pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

16 $\triangle ABO$ 에서 $\overline{OA} = \overline{OB} = 12$ cm이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$S_1 = (\overline{AB}$ 가 지름인 반원의 넓이) + $\triangle ABO$
 - (부채꼴 OAB의 넓이)

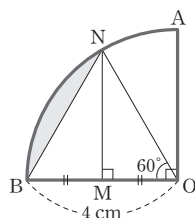
$$= \frac{\pi}{2} (6\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} \times 12 \times 12 - \frac{\pi}{4} \times 12^2 = 72 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_2 = \triangle ABO = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\therefore S_1 + S_2 = 72 + 72 = 144 \text{ (cm}^2\text{)}$$

17 오른쪽 그림에서 \overline{ON} 을 그으면

$\triangle NBM$ 과 $\triangle NOM$ 에서
 $\overline{BM} = \overline{OM}$, $\angle NMB = \angle NMO$,
 \overline{NM} 은 공통이므로
 $\triangle NBM \cong \triangle NOM$ (SAS 합동)
 $\therefore \overline{NB} = \overline{NO}$



또, $\overline{OB} = \overline{ON}$ (\because 부채꼴의 반지름)이므로

$$\overline{NB} = \overline{NO} = \overline{OB}$$

따라서 $\triangle NBO$ 는 정삼각형이므로 $\angle BON = 60^\circ$

한편, $\triangle NMO$ 에서 $\overline{OM} = 2$ cm, $\overline{ON} = 4$ cm이므로

$$\overline{NM} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

\therefore (어두운 부분의 넓이)

$$\begin{aligned} &= (\text{부채꼴 ONB의 넓이}) - \triangle NBO \\ &= \pi \times 4^2 \times \frac{60}{360} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{8}{3} \pi - 4\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

18 오른쪽 그림에서

$\overline{CD} = \overline{AB} = 6$ cm이므로

원 O'의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ (cm)}$$

따라서 $\overline{DP} = \overline{DQ} = 3$ cm,

$\overline{CG} = \overline{CQ} = 3$ cm이므로

$$\overline{AP} = \overline{AD} - \overline{DP} = 9 - 3 = 6 \text{ (cm)}$$

$\therefore \overline{AE} = \overline{AP} = 6$ cm

$\overline{FG} = \overline{FE} = x$ cm라 하면

$$\overline{BF} = (6 - x) \text{ cm}, \quad \overline{AF} = (6 + x) \text{ cm}$$

이므로 직각삼각형 ABF에서

$$(6 + x)^2 = 6^2 + (6 - x)^2, \quad 24x = 36 \quad \therefore x = \frac{3}{2}$$

$$\text{즉, } \overline{BF} = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \text{ (cm)}, \quad \overline{AF} = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \text{ (cm)}$$

이므로 원 O의 반지름의 길이를

r cm라 하면 $\triangle ABF$ 의 넓이에서

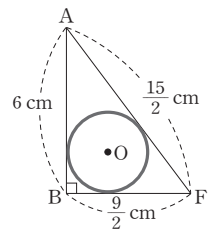
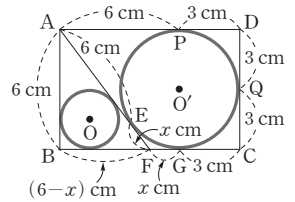
$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BF}$$

$$= \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BF} + \overline{FA}) \times r$$

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \left(6 + \frac{9}{2} + \frac{15}{2}\right) \times r$$

$$27 = 18r \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 $\frac{3}{2}$ cm이다.



19 $\square ABCD$ 가 정사각형이므로

$$\triangle DBC \text{에서 } \overline{BD} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$\triangle OBF$ 는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OF} = x$ cm라 하면

$$\overline{BO} = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}x \text{ (cm)}$$

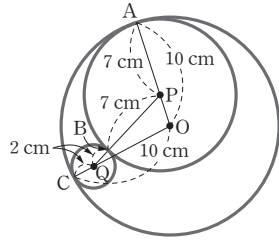
$$\overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OE} + \overline{ED} \text{이므로}$$

$$\sqrt{2}x + x + 2 = 2\sqrt{2}, \quad (\sqrt{2} + 1)x = 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$\therefore x = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} + 1} = 2(\sqrt{2} - 1)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

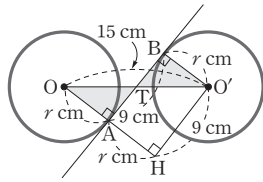
따라서 \overline{OF} 의 길이는 $(6 - 4\sqrt{2})$ cm이다.

20 오른쪽 그림과 같이 세 원의 접점을 각각 A, B, C라 하면



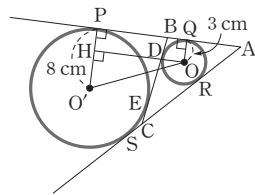
$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OA} - \overline{PA} \\ &= 10 - 7 = 3(\text{cm}) \\ \overline{PQ} &= \overline{PB} + \overline{BQ} \\ &= 7 + 2 = 9(\text{cm}) \\ \overline{OQ} &= \overline{OC} - \overline{QC} = 10 - 2 = 8(\text{cm}) \\ \text{따라서 } \triangle OPQ \text{의 둘레의 길이는} \\ \overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{OQ} &= 3 + 9 + 8 = 20(\text{cm}) \end{aligned}$$

21 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OO'}$ 과 \overline{AB} 의 교점을 T, 점 O'에서 \overline{OA} 의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하고, 두 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$$\begin{aligned} \overline{HO'} &= \overline{AB} = 9 \text{ cm} \\ \overline{OH} &= \overline{OA} + \overline{AH} = \overline{OA} + \overline{BO'} = r + r = 2r(\text{cm}) \\ \triangle OHO' \text{에서} \\ \overline{OO'}^2 &= \overline{OH}^2 + \overline{O'H}^2 \\ 15^2 &= (2r)^2 + 9^2 \\ 4r^2 + 81 &= 225, r^2 = 36 \\ \therefore r &= 6 (\because r > 0) \\ \therefore (\text{어두운 부분의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{AT} + \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{BT} \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times \overline{AT} + \frac{1}{2} \times 6 \times \overline{BT} \\ &= 3(\overline{AT} + \overline{BT}) \\ &= 3 \times 9 = 27(\text{cm}^2) \end{aligned}$$

22 오른쪽 그림에서 두 원 O, O'과 \overline{BC} 와의 접점을 각각 D, E라 하고, 두 원 O, O'과 \overline{AC} 와의 접점을 각각 R, S라 하면



$$\begin{aligned} \overline{BP} &= \overline{BE}, \overline{BQ} = \overline{BD} \text{이므로} \\ \overline{PQ} &= \overline{PB} + \overline{BQ} = \overline{BE} + \overline{BD} \quad \text{..... ㉠} \\ \text{또, } \overline{CS} &= \overline{CE}, \overline{CR} = \overline{CD} \text{이므로} \\ \overline{RS} &= \overline{RC} + \overline{CS} = \overline{CD} + \overline{CE} \quad \text{..... ㉡} \\ \text{㉠, ㉡에서} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{PQ} + \overline{RS} &= (\overline{BE} + \overline{BD}) + (\overline{CD} + \overline{CE}) \\ &= (\overline{BE} + \overline{CE}) + (\overline{BD} + \overline{CD}) \\ &= \overline{BC} + \overline{BC} \\ &= 2\overline{BC} \end{aligned}$$

이때 $\overline{AP} = \overline{AS}$ 이고 $\overline{AQ} = \overline{AR}$ 이므로 $\overline{PQ} = \overline{RS}$

$$\begin{aligned} 2\overline{PQ} &= 2\overline{RS} = 2\overline{BC} \\ \therefore \overline{PQ} &= \overline{BC} = 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

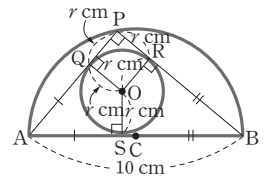
점 O에서 \overline{OP} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned} \overline{PH} &= \overline{QO} = 3 \text{ cm}, \overline{HO} = \overline{PQ} = 12 \text{ cm} \\ \therefore \overline{OH} &= \overline{OP} - \overline{PH} \\ &= 8 - 3 = 5(\text{cm}) \end{aligned}$$

따라서 $\triangle OHO'$ 에서

$$\overline{OO'} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13(\text{cm})$$

23 오른쪽 그림에서 원 O와 \overline{PA} , \overline{PB} , \overline{AB} 의 접점을 각각 Q, R, S라 하고, $\overline{PA} = a$ cm, $\overline{PB} = b$ cm, 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$\square PQOR$ 는 정사각형이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AS} + \overline{SB} = \overline{AQ} + \overline{BR} \\ &= (a - r) + (b - r) = 10 \\ 2r + 10 &= a + b \quad \therefore r = \frac{a + b - 10}{2} \end{aligned}$$

점 P에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{PH} = h$ cm라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP} \times \overline{BP} &= \overline{AB} \times \overline{PH} \\ \therefore ab &= 10h \end{aligned}$$

또, $\triangle PAB$ 에서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2$

즉, $a^2 + b^2 = 10^2$ 이므로

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 100 + 2ab = 100 + 20h$$

그러므로 $a + b$ 는 h 가 최대일 때, 즉 점 P가 \widehat{AB} 의 중점일 때 최대이고, $a + b$ 가 최대일 때 r 는 최댓값을 갖는다.

점 P가 \widehat{AB} 의 중점이면 $a = b = 5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} r &= \frac{a + b - 10}{2} = \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 10}{2} \\ &= \frac{10\sqrt{2} - 10}{2} = 5\sqrt{2} - 5 = 5(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

따라서 원의 넓이가 최대일 때 원 O의 반지름의 길이는 $5(\sqrt{2} - 1)$ cm이다.

- 1 $2(\sqrt{2}+2)$ cm 2 ④ 3 96 cm^2 4 $\frac{24\sqrt{6}}{7}$ cm 5 2 cm 6 $128\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right) \text{ cm}^2$
 7 $\frac{10}{3}$ cm 8 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm 9 2 cm 10 16 cm 11 $\frac{10}{2n+3}$ cm 12 6 cm
 13 $\frac{3(5-\sqrt{5})}{8}$ cm

문제 풀이

1 오른쪽 그림에서 $\triangle ABE$

는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AE} = \overline{AB} = 4 \text{ cm},$$

$$\overline{BE} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

또, $\square ABCD$ 는 직사각형이

$$\text{므로 } \overline{DC} = \overline{AB} = 4 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = x \text{ cm라 하면 } \overline{ED} = (x-4) \text{ cm}$$

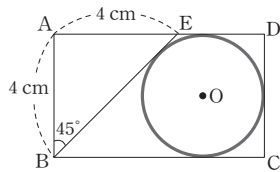
$\square EBCD$ 는 원 O 에 외접하므로

$$\overline{EB} + \overline{DC} = \overline{ED} + \overline{BC}$$

$$4\sqrt{2} + 4 = (x-4) + x, \quad 2x = 4\sqrt{2} + 8$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2} + 4 = 2(\sqrt{2} + 1)$$

따라서 \overline{BC} 의 길이는 $2(\sqrt{2} + 1)$ cm이다.



TIP 외접사각형의 성질

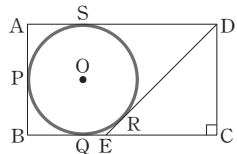
원 O 가 직사각형 $ABCD$ 의 세 변과 \overline{DE} 에 접하고 네 점 P, Q, R, S 가 접점일 때,

① $\square ABED$ 는 원 O 의 외접사각형이므로 $\overline{AB} + \overline{DE} = \overline{AD} + \overline{BE}$

② $\overline{DS} = \overline{DR}, \overline{EQ} = \overline{ER}$ 이므로

$$\overline{DE} = \overline{DS} + \overline{EQ}$$

③ 직각삼각형 DEC 에서 $\overline{CE}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{DE}^2$



2 오른쪽 그림에서

$$\overline{CD} = x \text{ cm}, \overline{BC} = y \text{ cm라 하면}$$

$$\square BCDF = 18 \text{ cm}^2 \text{이므로}$$

$$xy = 18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직사각형의 두 대각선의 길이는 같

으므로

$$\overline{BD} = \overline{CF} = 8 \text{ cm}$$

$\triangle BCD$ 에서

$$x^2 + y^2 = 8^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

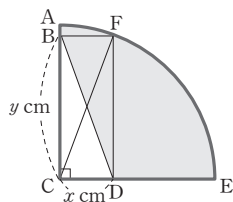
$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 8^2 + 2 \times 18 = 100$$

$$\therefore x+y = 10 \quad (\because x > 0, y > 0)$$

$$\overline{DE} = (8-x) \text{ cm}, \overline{AB} = (8-y) \text{ cm이므로}$$

$$\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DE} = (8-y) + 8 + (8-x)$$

$$= 24 - (x+y) = 24 - 10 = 14(\text{cm})$$



$$\widehat{EA} = 2\pi \times 8 \times \frac{90}{360} = 4\pi(\text{cm})$$

따라서 어두운 부분의 둘레의 길이는

$$\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DE} + \widehat{EA} = 14 + 4\pi(\text{cm})$$

3 오른쪽 그림과 같이

$$\overline{AP} = \overline{AR} = x \text{ cm라 하면}$$

$\square O'PBQ$ 가 정사각형이므로

$$\overline{BP} = \overline{BQ} = 4 \text{ cm},$$

$$\overline{CQ} = \overline{CR} = (20-x) \text{ cm}$$

$\triangle ABC$ 에서 $\angle B = 90^\circ$ 이고, $\overline{AC} = 20 \text{ cm}$,

$$\overline{AB} = (x+4) \text{ cm}, \overline{BC} = (24-x) \text{ cm이므로}$$

$$20^2 = (x+4)^2 + (24-x)^2$$

$$x^2 - 20x + 96 = 0$$

$$(x-8)(x-12) = 0$$

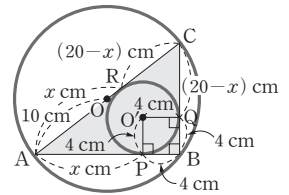
$$\therefore x = 12 \quad (\because 10 < x < 20)$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = 12 + 4 = 16(\text{cm}),$$

$$\overline{BC} = 24 - 12 = 12(\text{cm}) \text{이므로}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96(\text{cm}^2)$$



4 오른쪽 그림에서 $\triangle AOO'$ 의

넓이 S 는 헤론의 공식에 의하여

$$s = \frac{5+6+7}{2} = 9 \text{이므로}$$

$$S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$$

$$= \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}(\text{cm}^2)$$

\overline{AB} 와 $\overline{OO'}$ 의 교점을 H 라 하면

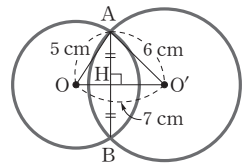
$$\overline{AB} \perp \overline{OO'}, \overline{AH} = \overline{BH} \text{이므로}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{OO'} \times \overline{AH} = 6\sqrt{6}(\text{cm}^2) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 7 \times \overline{AH} = 6\sqrt{6}$$

$$\therefore \overline{AH} = \frac{12\sqrt{6}}{7}(\text{cm})$$

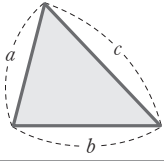
$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = \frac{24\sqrt{6}}{7}(\text{cm})$$



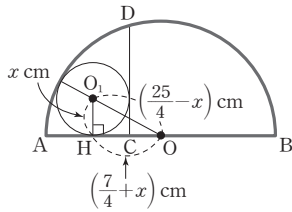
TIP 헤론의 공식

삼각형의 세 변의 길이를 각각 a, b, c 라 하면
넓이 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(단, $s = \frac{a+b+c}{2}$)



5 오른쪽 그림의 원 O_1 의 중심에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 원 O_1 의 반지름의 길이를 x cm라 하면 $\triangle O_1HO$ 에서



$\overline{O_1H} = x$ cm,

$\overline{O_1O} = \left(\frac{25}{4} - x\right)$ cm,

$\overline{HO} = \left(\frac{7}{4} + x\right)$ cm이므로

$\left(\frac{25}{4} - x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{7}{4} + x\right)^2$

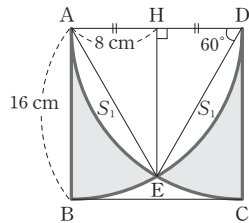
$\frac{625}{16} - \frac{25}{2}x + x^2 = 2x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{49}{16}$

$x^2 + 16x - 36 = 0, (x-2)(x+18) = 0$

$\therefore x = 2 (\because x > 0)$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 2 cm이다.

6 오른쪽 그림에서 \widehat{AC} 와 \widehat{BD} 가 만나는 점을 E 라 하면 $\overline{AE} = \overline{AD} = \overline{ED} = 16$ cm이므로 $\triangle AED$ 는 정삼각형이다.



(어두운 부분의 넓이)

$= 2\{(\text{사분원의 넓이}) - 2S_1 - \triangle AED\}$

$= 2\{(\text{사분원의 넓이}) - 2(S_1 + \triangle AED) + \triangle AED\}$

이때 $(S_1 + \triangle AED)$ 는 반지름의 길이가 16 cm이고 중심각의 크기가 60° 인 부채꼴의 넓이다.

$\therefore S_1 + \triangle AED = \pi \times 16^2 \times \frac{60}{360} = \frac{128}{3}\pi$ (cm²)

점 E 에서 \overline{AD} 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{AH} = \overline{DH} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$ (cm)

$\triangle EAH$ 에서

$\overline{EH} = \sqrt{\overline{EA}^2 - \overline{AH}^2}$

$= \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{192}$

$= 8\sqrt{3}$ (cm)

이므로

$\triangle AED = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{EH}$

$= \frac{1}{2} \times 16 \times 8\sqrt{3}$

$= 64\sqrt{3}$ (cm²)

\therefore (어두운 부분의 넓이)

$= 2\left(\frac{\pi}{4} \times 16^2 - 2 \times \frac{128}{3}\pi + 64\sqrt{3}\right)$

$= 2\left(64\pi - \frac{256}{3}\pi + 64\sqrt{3}\right)$

$= 128\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ (cm²)

7 오른쪽 그림과 같이 두 점 O_1, O_3 를 지나고 선분 AB 는 원 O 의 지름이므로

$\overline{OO_1} = \frac{1}{2}\overline{OA} = \frac{1}{2} \times 10$

$= 5$ (cm)

원 O_4 의 반지름의 길이를 r cm라

하면 직각삼각형 O_1OO_4 에서

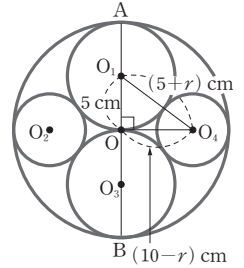
$\overline{OO_4} = (10-r)$ cm, $\overline{O_1O_4} = (5+r)$ cm

이므로 피타고라스 정리에 의해

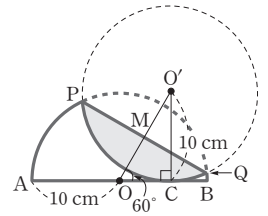
$(5+r)^2 = 5^2 + (10-r)^2$

$30r = 100 \quad \therefore r = \frac{10}{3}$

따라서 원 O_4 의 반지름의 길이는 $\frac{10}{3}$ cm이다.



8 호 PCQ 를 원의 일부로 하는 원 O' 을 작도하면 오른쪽 그림과 같고 원 O' 의 반지름의 길이는 10 cm이다.



즉, $\overline{O'C} = \overline{O'A} = 10$ cm이고,

$\angle O'OC = 60^\circ$ 이므로

$\overline{OC} : \overline{O'C} = 1 : \sqrt{3}$ 에서

$\overline{OC} : 10 = 1 : \sqrt{3}$

$\therefore \overline{OC} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

9 오른쪽 그림에서

$\overline{OC} = \overline{OA} = 8$ cm이므로

$\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{OC} = \frac{1}{2} \times 8$

$= 4$ (cm)

원 Q 의 반지름의 길이를 r cm라 하고, 점 Q 에서 \overline{OC} 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{PQ} = (4+r)$ cm, $\overline{OQ} = (8-r)$ cm,

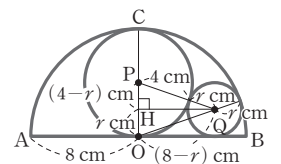
$\overline{OH} = r$ cm, $\overline{PH} = (4-r)$ cm

$\triangle PHQ$ 와 $\triangle OHQ$ 에서 $\overline{PQ}^2 - \overline{PH}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OH}^2$ 이므로

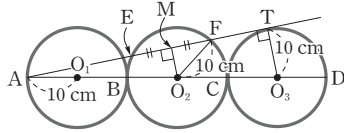
$(4+r)^2 - (4-r)^2 = (8-r)^2 - r^2$

$32r = 64 \quad \therefore r = 2$

따라서 원 Q 의 반지름의 길이는 2 cm이다.

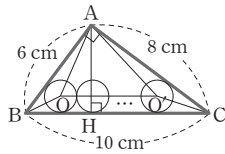


10 오른쪽 그림과 같이 두 점 O_2 와 O_3 에서 \overline{AT} 에 각각 수선을 내리면



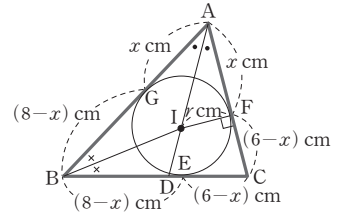
$\overline{O_2M} \parallel \overline{O_3T}$ 이므로
 $\triangle AO_2M \sim \triangle AO_3T$ (AA 닮음)
 $\overline{AO_2} : \overline{AO_3} = \overline{O_2M} : \overline{O_3T}$ 에서
 $30 : 50 = \overline{O_2M} : 10$
 $50\overline{O_2M} = 300 \quad \therefore \overline{O_2M} = 6 \text{ cm}$
 $\triangle O_2FM$ 에서
 $\overline{MF} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}$
 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로
 $\overline{EM} = \overline{MF}$
 $\therefore \overline{EF} = 2\overline{MF} = 2 \times 8 = 16 \text{ (cm)}$

11 $\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (cm)}$
 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 를 3개의 삼각형인 $\triangle OAB$, $\triangle O'AC$, $\triangle AOO'$ 과 1개의 사다리꼴



$OBCO''$ 으로 나누고, 합동인 원들의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$ 라 하면
 $\overline{OO'} = 2(n-1)r \text{ cm}$
 $\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{BC} \times \overline{AH}$ 에서
 $6 \times 8 = 10 \times \overline{AH}$
 $\therefore \overline{AH} = \frac{24}{5} \text{ cm}$
 $\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle O'AC + \triangle AOO' + \square OBCO''$
 $= \left(\frac{1}{2} \times 6 \times r\right) + \left(\frac{1}{2} \times 8 \times r\right)$
 $\quad + \frac{1}{2} \times 2(n-1)r \times \left(\frac{24}{5} - r\right)$
 $\quad + \frac{1}{2} \{2(n-1)r + 10\} \times r$
 $= 3r + 4r + (n-1)\left(\frac{24}{5} - r\right)r + (n-1)r^2 + 5r$
 $= 12r + (n-1)r\left(\frac{24}{5} - r + r\right)$
 $= 12r + \frac{24}{5}(n-1)r$
 $= \frac{12}{5}(2n+3)r$
 $= 24$
 $\therefore r = \frac{10}{2n+3}$
 따라서 반지름의 길이는 $\frac{10}{2n+3} \text{ cm}$ 이다.

12 오른쪽 그림에서
 $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC}$
 $= 4 : 3$



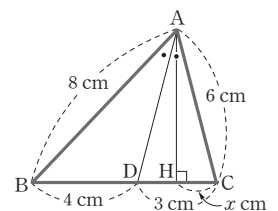
$\therefore \overline{BD} = 4 \text{ cm}, \quad \overline{DC} = 3 \text{ cm}$
 $\angle B$ 의 이등분선과 \overline{AD} 의 교점을 I라 하면
 $\overline{AI} : \overline{ID} = \overline{AB} : \overline{BD} = 8 : 4 = 2 : 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 한편, 점 I는 $\triangle ABC$ 의 내접원의 중심이므로
 원 I와 $\triangle ABC$ 와의 접점을 각각 E, F, G라 하고,
 $\overline{IF} = r \text{ cm}, \quad \overline{AF} = x \text{ cm}$ 라 하면
 $\overline{AG} = \overline{AF} = x \text{ cm},$
 $\overline{CE} = \overline{CF} = (6-x) \text{ cm},$
 $\overline{BE} = \overline{BG} = (8-x) \text{ cm}$ 이므로
 $\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{CE} = (8-x) + (6-x) = 7$
 $14 - 2x = 7, \quad 2x = 7$
 $\therefore x = \frac{7}{2}$

$\triangle ABC$ 의 넓이는 헤론의 공식에 의해
 $s = \frac{8+6+7}{2} = \frac{21}{2}$ 이므로
 $\triangle ABC = \sqrt{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-8\right)\left(\frac{21}{2}-6\right)\left(\frac{21}{2}-7\right)}$
 $= \sqrt{\frac{21}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{7}{2}}$
 $= \frac{21\sqrt{15}}{4} \text{ (cm}^2\text{)}$
 $\frac{r}{2}(8+6+7) = \frac{21\sqrt{15}}{4}$
 $\frac{21}{2}r = \frac{21\sqrt{15}}{4}$
 $\therefore r = \frac{\sqrt{15}}{2}$

직각삼각형 AIF에서
 $\overline{AI} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ (cm)}$
 $\textcircled{1}$ 에서 $\overline{AI} : \overline{ID} = 2 : 1$ 이므로
 $4 : \overline{ID} = 2 : 1, \quad 2\overline{ID} = 4 \quad \therefore \overline{ID} = 2 \text{ cm}$
 $\therefore \overline{AD} = \overline{AI} + \overline{ID} = 4 + 2 = 6 \text{ (cm)}$

다른 풀이

점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{CH} = x \text{ cm}$ 라 하면
 $\overline{BH} = (7-x) \text{ cm}$
 $\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2$ 에서
 $8^2 - (7-x)^2 = 6^2 - x^2$
 $14x = 21 \quad \therefore x = \frac{3}{2}$



$$\therefore \overline{DH} = \overline{CD} - \overline{CH} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \text{ (cm)}$$

$\triangle ADH$ 와 $\triangle ACH$ 에서

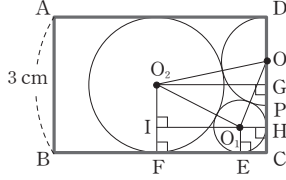
$$\overline{DH} = \overline{CH}, \overline{AH} \text{는 공통,}$$

$\angle AHD = \angle AHC = 90^\circ$ 이므로

$\triangle ADH \cong \triangle ACH$ (SAS 합동)

$$\therefore \overline{AD} = \overline{AC} = 6 \text{ cm}$$

13 오른쪽 그림에서 두 원 O_1, O_2 와 \overline{BC} 와의 접점을 각각 E, F, 점 O_2 에서 \overline{CD} 에 내린 수선의 발을 G, 점 O_1 에서 $\overline{CD}, \overline{O_2F}$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 반 원 O와 원 O_1 의 반지름의 길이를 각각 x cm, y cm라 하자.



$$\overline{OH} = (3 - x - y) \text{ cm이므로}$$

$\triangle OO_1H$ 에서

$$\overline{OO_1}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{O_1H}^2$$

$$(x + y)^2 = (3 - x - y)^2 + y^2$$

$$6x = y^2 - 6y + 9$$

$$6x = (y - 3)^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 O_2 의 반지름의 길이는 $\frac{3}{2}$ cm이므로

$\triangle O_1O_2I$ 에서

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_2I}^2 + \overline{O_1I}^2$$

$$\left(\frac{3}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{3}{2} - y\right)^2 + \overline{EF}^2$$

$$\overline{EF}^2 = 6y$$

$$\therefore \overline{EF} = \sqrt{6y} \text{ (cm)} \quad (\because \overline{EF} > 0)$$

또, $\triangle OGO_2$ 에서

$$\overline{OO_2}^2 = \overline{OG}^2 + \overline{O_2G}^2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + (y + \overline{EF})^2$$

$$6x = (y + \sqrt{6y})^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$3 - y = y + \sqrt{6y} \quad (\because 0 < y < 3)$$

$$\sqrt{6y} = 3 - 2y$$

양변을 제곱하면

$$6y = 9 - 12y + 4y^2, \quad 4y^2 - 18y + 9 = 0$$

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 4 \times 9}}{4} = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore y = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{4} \quad (\because 0 < y < 3)$$

$\textcircled{1}$ 에서

$$6x = \left(\frac{9 - 3\sqrt{5}}{4} - 3\right)^2 = \left\{\frac{3(1 + \sqrt{5})}{4}\right\}^2$$

$$x = \frac{9(6 + 2\sqrt{5})}{16} \times \frac{1}{6} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{16}$$

$$\therefore \overline{CP} = 3 - 2x = 3 - 2 \times \frac{9 + 3\sqrt{5}}{16}$$

$$= \frac{15 - 3\sqrt{5}}{8} = \frac{3(5 + \sqrt{5})}{8} \text{ (cm)}$$

2 원과 각

1 STEP 주제별 실력다지기

51-55쪽

- 1 풀이 참조 2 (1) 4 (2) 110 3 $(1+\sqrt{3}) : \sqrt{6} : 2$ 4 (1) 80° (2) 50° 5 23° 6 90°
 7 52.5° 8 (1) 40° (2) 60° 9 32° 10 $\frac{1}{2}$ 11 35° 12 (1) 75° (2) 120°
 13 40° 14 105° 15 $4\sqrt{5}$ cm 16 ④

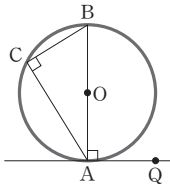
최상위 04

NOTE 접선과 현이 이루는 각의 크기

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

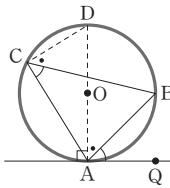
즉, $\angle QAB = \angle ACB$

(1) $\angle QAB$ 가 직각인 경우



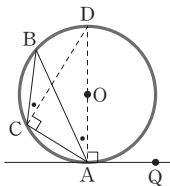
현 AB는 원 O의 지름이므로
 $\angle QAB = \angle ACB = 90^\circ$

(2) $\angle QAB$ 가 예각인 경우



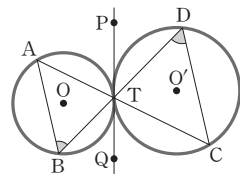
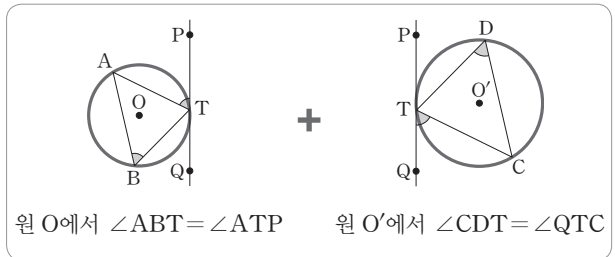
\overline{AD} 를 그으면 $\angle QAD = \angle ACD = 90^\circ$
 $\therefore \angle QAB = 90^\circ - \angle BAD$
 $= 90^\circ - \angle BCD$
 $= \angle ACB$

(3) $\angle QAB$ 가 둔각인 경우



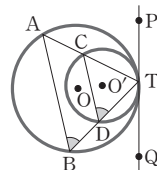
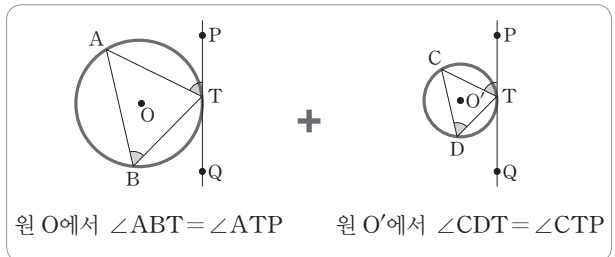
\overline{AD} 를 그으면 $\angle QAD = \angle ACD = 90^\circ$
 $\therefore \angle QAB = 90^\circ + \angle BAD$
 $= 90^\circ + \angle BCD$
 $= \angle ACB$

이 성질을 이용하여 두 원이 외부에서 접할 때, 다음과 같은 성질이 있음을 확인할 수 있다.



$\angle ATP = \angle QTC$ 이므로
 ① $\angle ABT = \angle CDT$
 ② $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (\because 엇각)

이와 마찬가지로 오른쪽 그림과 같이 두 원이 내부에서 접할 때에도 접선과 현이 이루는 각의 크기를 이용하여 다음 성질을 확인할 수 있다.



① $\angle ABT = \angle CDT$
 ② $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (\because 동위각)

1 (1) $\angle AOB = 2\theta$ 라 하면
 $\angle BOC = 180^\circ - 2\theta$
 또, $\overline{OB} = \overline{OC}$ 이므로
 $\angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC) = \theta$
 $\therefore \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$
 따라서 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이다.

(2) (1)에 의해 $\angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD$,
 $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD$ 이므로
 $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD$
 $= \frac{1}{2}\angle AOD + \frac{1}{2}\angle BOD$
 $= \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle BOD)$
 $= \frac{1}{2}\angle AOB$

따라서 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이다.

(3) (1)에 의해 $\angle DCB = \frac{1}{2}\angle DOB$,
 $\angle DCA = \frac{1}{2}\angle DOA$ 이므로
 $\angle ACB = \angle DCB - \angle DCA$
 $= \frac{1}{2}\angle DOB - \frac{1}{2}\angle DOA$
 $= \frac{1}{2}(\angle DOB - \angle DOA)$
 $= \frac{1}{2}\angle AOB$

따라서 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$ 이다.

2 (1) 한 원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하고,
 \widehat{AE} 에 대한 중심각의 크기는 60° 이므로

$$3 : x = 45^\circ : 60^\circ, 3 : x = 3 : 4 \quad \therefore x = 4$$

(2) 원주각의 크기는 호의 길이에 정비례하므로

$$\angle BEC : \angle CAD = 2 : 3$$

$$20^\circ : \angle CAD = 2 : 3$$

$$2\angle CAD = 60^\circ$$

$$\therefore \angle CAD = 30^\circ$$

\overline{OC} 를 그으면

$$\angle BOC = 2\angle BEC = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$$

$$\angle COD = 2\angle CAD = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

이므로

$$\angle AOB = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$$

$$\therefore x = 30 + 80 = 110$$

3 원주각의 크기는 호의 길이에 정비례하므로
 $\angle C : \angle A : \angle B = \widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 5 : 4 : 3$

$$\therefore \angle A = 180^\circ \times \frac{4}{5+4+3} = 60^\circ$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ \times \frac{3}{5+4+3} = 45^\circ$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ \times \frac{5}{5+4+3} = 75^\circ$$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 \overline{AB}

에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle ACH = 30^\circ, \angle HCB = 45^\circ$$

$\overline{AC} = a$ 라 하면 $\triangle AHC$ 에서

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}a$$

$$\overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

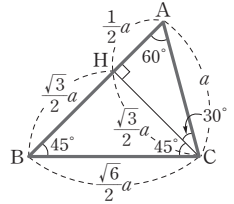
$\triangle BCH$ 에서

$$\overline{BH} = \overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2}\overline{BH} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\therefore \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a : \frac{\sqrt{6}}{2}a : a$$

$$= (1 + \sqrt{3}) : \sqrt{6} : 2$$

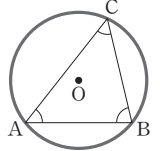


TIP 오른쪽 그림의 원 O에서
 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = l : m : n$ 이면
 $\Rightarrow \angle ACB : \angle BAC : \angle CBA$
 $= l : m : n$

$$\Rightarrow \angle ACB = \frac{l}{l+m+n} \times 180^\circ$$

$$\angle BAC = \frac{m}{l+m+n} \times 180^\circ$$

$$\angle CBA = \frac{n}{l+m+n} \times 180^\circ$$



4 (1) 오른쪽 그림과 같이 \overline{BD} 를 그
 으면 반원에 대한 원주각의 크기는
 90° 이므로

$$\angle ADB = 90^\circ$$

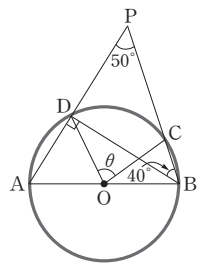
$\triangle DBP$ 에서

$$\angle ADB = \angle DPB + \angle DBP$$

$$90^\circ = 50^\circ + \angle DBP$$

$$\therefore \angle DBP = 40^\circ$$

$$\therefore \theta = \angle COD = 2\angle CBD = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$$



(2) 오른쪽 그림과 같이 \overline{BD} 를 그으면

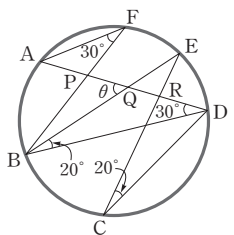
$$\angle ADB = \angle AFB = 30^\circ,$$

$$\angle DBE = \angle DCE = 20^\circ$$

이므로 $\triangle QBD$ 에서

$$\theta = \angle QBD + \angle QDB$$

$$= 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$$



5 오른쪽 그림과 같이 \overline{BD} 를 그

으면 $\widehat{AB} = \widehat{DE}$ 이므로

$$\angle ADB = \angle DBE$$

또, $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ 이므로

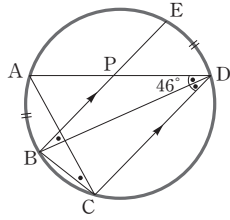
$$\angle BDC = \angle DBE \text{ (엇각)}$$

$$\therefore \angle ADB = \angle BDC$$

$$= \frac{1}{2} \angle ADC$$

$$= \frac{1}{2} \times 46^\circ = 23^\circ$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ADB = 23^\circ$$



6 반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이므로 $\angle ARB = 90^\circ$

$\widehat{AP} = \widehat{PQ} = \widehat{QB}$ 이므로

$$\angle ARP = \angle PRQ = \angle QRB$$

$$= \frac{1}{3} \angle ARB = \frac{1}{3} \times 90^\circ = 30^\circ$$

$$\therefore \angle ARQ = \angle ARP + \angle PRQ = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

$\widehat{RB} = \frac{1}{3} \widehat{ARB} = \widehat{AP}$ 이므로

$$\angle RAB = \angle ARP = 30^\circ$$

따라서 $\triangle ACR$ 에서

$$\angle OCQ = \angle ARC + \angle RAC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

7 $\angle ADB = \angle a$,

$\angle CBD = \angle b$ 라 하면

$\triangle BPD$ 에서

$$\angle a = \angle b + 30^\circ \quad \dots\dots \text{㉠}$$

원 O의 원주각의 크기의 총합은 180° 이므로

$$3\angle a + \angle b = 180^\circ \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } 3(\angle b + 30^\circ) + \angle b = 180^\circ, 4\angle b = 90^\circ$$

$$\therefore \angle b = 22.5^\circ$$

$$\therefore \angle ADB = \angle a = 22.5^\circ + 30^\circ = 52.5^\circ$$

8 (1) $\angle BAC = 70^\circ$ 이므로 $\triangle APB$ 에서

$$70^\circ = \theta + 30^\circ \quad \therefore \theta = 40^\circ$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 \overline{AB} 를

그으면

$$\angle ABC = 90^\circ \text{이므로}$$

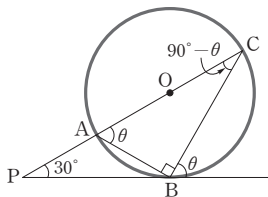
$$\angle BAC = \theta,$$

$$\angle ACB = 90^\circ - \theta$$

$\triangle PBC$ 에서

$$30^\circ + (90^\circ - \theta) = \theta, 2\theta = 120^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$



9 $\angle ACB = x$ 라 하고, 오른쪽

그림과 같이 \overline{AB} 를 그으면

$$\angle ABP = \angle ACB = x$$

$\triangle APB$ 에서

$$\angle BAC = \angle APB + \angle ABP$$

$$= 42^\circ + x$$

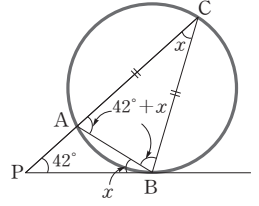
또, $\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로

$$\angle ABC = \angle BAC = 42^\circ + x$$

따라서 $\triangle ABC$ 에서

$$(42^\circ + x) + (42^\circ + x) + x = 180^\circ$$

$$3x = 96^\circ \quad \therefore x = 32^\circ$$



10 $\triangle ADE$ 에서

$$\angle DEA + \angle DAE$$

$$= \angle ADC = 75^\circ$$

접선과 현이 이루는 각의 성

질에 의해 $\angle BAC = \angle AEC$ 이므로

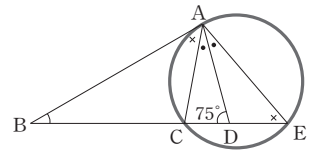
$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$$

$$= \angle AEC + \angle DAE = 75^\circ$$

따라서 $\triangle ABD$ 에서

$$\angle ABD = 180^\circ - 2 \times 75^\circ = 30^\circ$$

$$\therefore \sin(\angle ABE) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$



11 $\angle BAD = \angle ACB = 40^\circ$

$$\dots\dots \text{㉠}$$

$\triangle CAB$ 는 이등변삼각형이므로

$$\angle CAB = \angle CBA$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ)$$

$$= 70^\circ \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

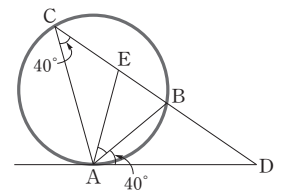
$$\angle CDA = 180^\circ - (40^\circ + 70^\circ + 40^\circ) = 30^\circ$$

$\triangle DEA$ 는 이등변삼각형이므로

$$\angle DAE = \angle DEA = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE - \angle BAD$$

$$= 75^\circ - 40^\circ = 35^\circ$$



8 (1) $\angle BAC = 70^\circ$ 이므로 $\triangle APB$ 에서

$$70^\circ = \theta + 30^\circ \quad \therefore \theta = 40^\circ$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 \overline{AB} 를

그으면

$$\angle ABC = 90^\circ \text{이므로}$$

$$\angle BAC = \theta,$$

$$\angle ACB = 90^\circ - \theta$$

$\triangle PBC$ 에서

$$30^\circ + (90^\circ - \theta) = \theta, 2\theta = 120^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

12 (1) $\triangle PEF$ 에서

$$\angle PFE = 180^\circ - (70^\circ + 35^\circ) = 75^\circ$$

$$\therefore \theta = \angle ABC = \angle CFE = 75^\circ$$

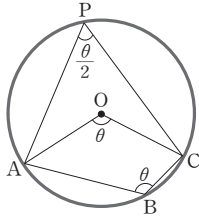
(2) 오른쪽 그림과 같이 점 P를 잡으면

$$\angle APC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{\theta}{2}$$

□PABC는 원 O에 내접하므로

$$\angle APC + \angle ABC = \frac{\theta}{2} + \theta = 180^\circ$$

$$\frac{3}{2}\theta = 180^\circ \quad \therefore \theta = 120^\circ$$



13 오른쪽 그림과 같이 \overline{BE} 를 그리면 □BCDE는 원 O에 내접하므로

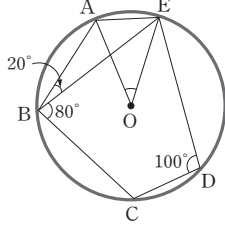
$$\angle CBE + \angle CDE = 180^\circ$$

$$\angle CBE + 100^\circ = 180^\circ$$

$$\angle CBE = 80^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle ABE &= \angle ABC - \angle CBE \\ &= 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle AOE &= 2\angle ABE \\ &= 2 \times 20^\circ = 40^\circ \end{aligned}$$

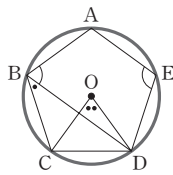


TIP 원에 내접하는 다각형의 보조선을 그려 사각형을 만든다.

⇒ 원 O에 내접하는 오각형 ABCDE에서 \overline{BD} 를 그으면

① □ABDE는 원 O에 내접하므로 $\angle ABD + \angle AED = 180^\circ$

② $\angle COD$ 는 \widehat{CD} 에 대한 중심각이고 $\angle CBD$ 는 \widehat{CD} 에 대한 원주각이므로 $\angle COD = 2\angle CBD$



14 \widehat{ABC} 의 길이는 원주의 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$\angle ADC = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times 360^\circ \right) = 45^\circ$$

\widehat{BCD} 의 길이는 원주의 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times 360^\circ \right) = 60^\circ$$

□ABCD는 원에 내접하므로

$$\begin{aligned} \angle ADC + \angle DCE &= \angle ADC + \angle BAD \\ &= 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ \end{aligned}$$

15 $\overline{AB} = 2$ cm,

$\overline{BC} = 2 + 2 = 4$ (cm)이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

△ABC와 △DCF에서

□ABDE는 원에 내접하므로

$$\angle BAC = \angle CDF$$

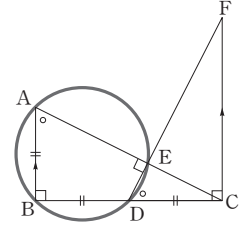
또, $\overline{AB} \parallel \overline{FC}$ 이므로 $\angle ABC = \angle DCF = 90^\circ$

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

따라서 △ABC ≅ △DCF (ASA 합동)이므로

$$\overline{DF} = \overline{AC} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\therefore \overline{AC} + \overline{DF} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \text{ (cm)}$$



16 ① $2 \times 8 = 4 \times (8 - 4)$ 이므로 원에 내접한다.

② $\overline{BD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고,

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 \text{이므로 } \angle C = 90^\circ$$

따라서 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ 이므로 원에 내접한다.

③ □ABCD는 등변사다리꼴이므로

$$\angle A = 180^\circ - \angle B = 60^\circ$$

따라서 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ 이므로 원에 내접한다.

④ $4 \times (4 + 5) \neq 3 \times (3 + 6)$ 이므로 원에 내접하지 않는다.

⑤ $\angle DCP = 180^\circ - (80^\circ + 30^\circ) = 70^\circ$

따라서 $\angle A = \angle DCP$ 이므로 원에 내접한다.

- | | | | | | |
|---------------|--|-----------------------------|----------------|---------------|---------------------------------------|
| 1 $6\sqrt{3}$ | 2 100° | 3 $12\pi - 9\sqrt{3}$ | 4 52.5° | 5 36° | 6 55° |
| 7 105° | 8 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ | 9 70° | 10 40° | 11 50° | 12 $\frac{8\sqrt{3}}{9} \text{ cm}^2$ |
| 13 95° | 14 $\frac{3+\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ | 15 $\frac{8}{3} \text{ cm}$ | 16 25° | 17 35° | 18 80° |
| 19 풀이 참조 | 20 90° | 21 85° | | | |

문제 풀이

1 $\sin(\angle APB) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 $\angle APB = 60^\circ$

원의 중심을 O라 하고 오른쪽 그림과 같이 \overline{OA} , \overline{OB} 를 그으면 원주각의 성질에 의해

$$\angle AOB = 2\angle APB = 120^\circ$$

또, $\widehat{AB} = 2\pi \times \overline{OA} \times \frac{120}{360} = 4\pi$ 에서

$$\overline{OA} = 6$$

$\overline{OA} = \overline{OB}$ 이고 $\angle AOB = 120^\circ$ 이므로

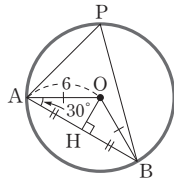
$$\angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$$

$\triangle OAB$ 의 점 O에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 \overline{AB} 를 수직이등분하므로

$$\overline{AH} = \overline{BH}$$

$$\triangle OAH \text{에서 } \overline{AH} = \overline{OA} \cos 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$



2 오른쪽 그림과 같이 \overline{AB} 를 그으면

$$\widehat{ABD} : \widehat{AD} = 2 : 1 \text{ 이고,}$$

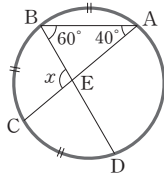
$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} \text{ 이므로}$$

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times 360^\circ \right) = 60^\circ$$

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 360^\circ \right) = 40^\circ$$

따라서 $\triangle ABE$ 에서

$$\angle x = \angle BAE + \angle ABE = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$$



3 서술형

표현 단계 원주각의 크기의 총합은 180°

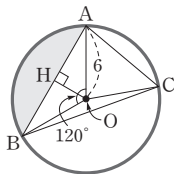
이므로

$$\text{변형 단계 } \angle ACB = 180^\circ \times \frac{3}{3+4+2} = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

또, 점 O에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle AOH = \angle BOH = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$



풀이 단계 $\overline{OA} : \overline{OH} = 2 : 1$ 에서

$$6 : \overline{OH} = 2 : 1$$

$$2\overline{OH} = 6$$

$$\therefore \overline{OH} = 3$$

$$\overline{OA} : \overline{AH} = 2 : \sqrt{3} \text{에서 } 6 : \overline{AH} = 2 : \sqrt{3},$$

$$2\overline{AH} = 6\sqrt{3} \quad \therefore \overline{AH} = 3\sqrt{3}$$

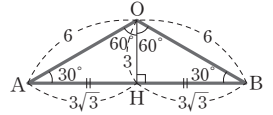
$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 3 = 9\sqrt{3}$$

확인 단계 \therefore (어두운 부분의 넓이)

$$= (\text{부채꼴 OAB의 넓이}) - \triangle OAB$$

$$= \pi \times 6^2 \times \frac{120}{360} - 9\sqrt{3} = 12\pi - 9\sqrt{3}$$



다른 풀이

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin(180^\circ - 120^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

4 $\triangle APD$ 에서

$$\angle A + \angle P = \angle QDC$$

$$= \angle ABC \text{ (내대각)}$$

$\triangle ABQ$ 에서

$$\angle A + \angle Q = \angle PBC$$

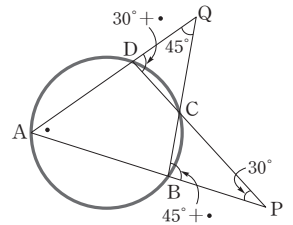
$$= \angle ADC \text{ (내대각)}$$

이때 $\square ABCD$ 는 원에 내접하므로

$$\angle A + \angle P + \angle A + \angle Q = \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

$$2\angle A + 30^\circ + 45^\circ = 180^\circ, \quad 2\angle A = 105^\circ$$

$$\therefore \angle BAD = 52.5^\circ$$



TIP $\square ABCD$ 가 원 O에 내접할 때,

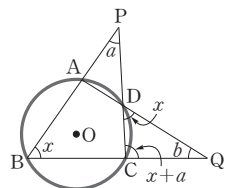
① $\angle CDQ = \angle ABC = \angle x$

② $\triangle PBC$ 에서 $\angle DCQ = \angle x + \angle a$

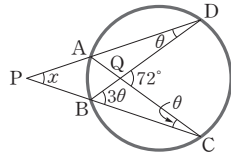
$\Rightarrow \triangle DCQ$ 에서

$$\angle x + (\angle x + \angle a) + \angle b = 180^\circ$$

$$\therefore \angle x = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle a - \angle b)$$



5 \widehat{AB} 의 원주각의 크기를 θ 라 하면 \widehat{CD} 의 원주각의 크기는 3θ 이므로



$\angle ACB = \theta, \angle CBD = 3\theta$
 $\triangle QBC$ 에서 $3\theta + \theta = 72^\circ \quad \therefore \theta = 18^\circ$
 또, $\angle ADB = \angle ACB = \theta$ 이고
 $\triangle BPD$ 에서 $\angle x + \theta = 3\theta$
 $\therefore \angle x = 2\theta = 2 \times 18^\circ = 36^\circ$

6 서술형

표현 단계 $\square ABCD$ 가 원에 내접하므로

$\angle BAQ = \angle x$ (내대각)

변형 단계 $\triangle ABQ$ 에서

$\angle QAB + \angle AQB = \angle ABC$

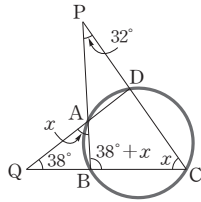
이므로

$\angle ABC = \angle x + 38^\circ$

풀이 단계 $\triangle PBC$ 에서

$32^\circ + (38^\circ + \angle x) + \angle x = 180^\circ$

$2\angle x = 110^\circ \quad \therefore \angle x = 55^\circ$



7 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}, \overline{AQ}$ 를 그으면 $\widehat{AP} = \widehat{AQ}$ 이므로

$\angle AQP = \angle APQ$

\overline{CP} 를 그으면

$\angle AQP = \angle ACP$

(\widehat{AP} 에 대한 원주각)

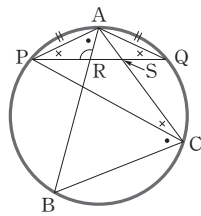
$\therefore \angle APQ = \angle ACP$

또, $\angle PAB = \angle PCB$ (\widehat{PB} 에 대한 원주각)이므로

$\triangle APR$ 에서

$\angle PAR + \angle APR = \angle PCB + \angle ACP$
 $= \angle ACB = 75^\circ$

$\therefore \angle ARP = 180^\circ - (\angle PAR + \angle APR)$
 $= 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$



8 오른쪽 그림의 $\triangle AB'C$ 에서

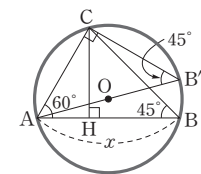
$\overline{AC} = 2 \sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

점 C에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH} = \overline{AC} \cos 60^\circ = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{BH} = \overline{CH} = \overline{AC} \sin 60^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{BH} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$



9 $\widehat{ABC}, \widehat{CD}$ 의 합은 반원이므로

두 호의 원주각의 합은 90° 이다.

$\therefore \angle CAD = 30^\circ, \angle CDA = 60^\circ$

$\angle COD = 2\angle CAD$
 $= 2 \times 30^\circ = 60^\circ$

에서

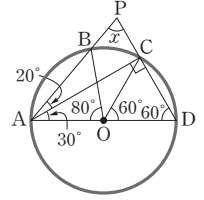
$\angle BOC = 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = 40^\circ$ 이므로

$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 40^\circ = 20^\circ$

따라서 $\angle ACD = 90^\circ$ 이므로

$\triangle APC$ 에서 $20^\circ + \angle x = 90^\circ$

$\therefore \angle x = 70^\circ$



10 오른쪽 그림과 같이 점 D

를 잡고 $\overline{QD}, \overline{RD}$ 를 그으면

$\angle QDB = \angle QAB = 40^\circ,$

$\angle BDR = \angle BCR = 30^\circ$ 이므로

$\angle QDR = \angle QDB + \angle BDR = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$ 이고

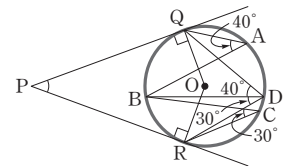
$\angle QOR = 2\angle QDR = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$

두 점 Q, R는 접점이므로 $\angle PQO = \angle PRO = 90^\circ$

$\square PROQ$ 에서 내각의 합은 360° 이므로

$\angle QPR + 90^\circ + 140^\circ + 90^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle QPR = 40^\circ$



11 접선과 현이 이루는 각의

성질에 의해

$\angle BAC = \angle ADC$

$\triangle ABF$ 에서

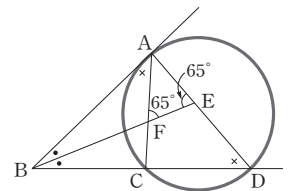
$\angle FAB + \angle FBA = \angle AFE$
 $= 65^\circ$

이므로 $\triangle EBD$ 에서

$\angle AEB = \angle EBD + \angle EDB$
 $= \angle FBA + \angle FAB$
 $= \angle AFE$
 $= 65^\circ$

따라서 $\triangle AFE$ 에서

$\angle EAF = 180^\circ - (\angle AEF + \angle AFE)$
 $= 180^\circ - (65^\circ + 65^\circ)$
 $= 180^\circ - 130^\circ$
 $= 50^\circ$



12 $\angle BAC=90^\circ$ 이므로

직각삼각형 APB에서

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{PA} \tan 30^\circ \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} (\text{cm})\end{aligned}$$

또, $\angle PBC=90^\circ$ 이고

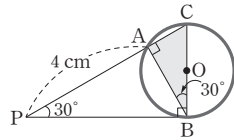
$$\angle PBA = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ \text{이므로}$$

$$\angle ABC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$\triangle ABC$ 에서

$$\overline{AC} = \overline{AB} \tan 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3} (\text{cm})$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{4}{3} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{9} (\text{cm}^2)\end{aligned}$$



13 **서술형**

표현 단계 오른쪽 그림과 같이 \overline{BC} 를 그으면

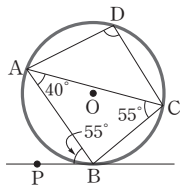
변형 단계 $\angle ACB = \angle ABP = 55^\circ$ 이므로
 $\angle ABC = 180^\circ - (40^\circ + 55^\circ) = 85^\circ$

풀이 단계 $\square ABCD$ 가 원 O에 내접하므로

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

$$85^\circ + \angle ADC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

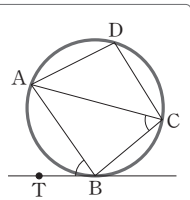


TIP 원에 내접하는 $\square ABCD$ 에서

① $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$

$\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$

② $\angle ABT = \angle ACB$



14 원주각의 크기는 호의 길이에

정비례하므로

$$\begin{aligned}\angle C : \angle A : \angle B \\ &= \widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} \\ &= 5 : 3 : 4\end{aligned}$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ \times \frac{3}{5+3+4} = 45^\circ,$$

$$\angle B = 180^\circ \times \frac{4}{5+3+4} = 60^\circ$$

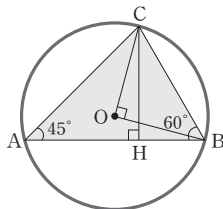
\overline{OB} , \overline{OC} 를 그으면

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

따라서 $\triangle OBC$ 는 직각이등변삼각형이므로

$$\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2} \times \overline{OB} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 (\text{cm})$$



점 C에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle CHB$ 에서 $\overline{BC} : \overline{BH} : \overline{HC} = 2 : 1 : \sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{BH} = 1 \text{ cm}, \overline{HC} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

또, $\triangle AHC$ 에서 $\overline{AH} = \overline{CH} = \sqrt{3} \text{ cm}$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{HC} \\ &= \frac{1}{2} \times (\sqrt{3} + 1) \times \sqrt{3} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} (\text{cm}^2)\end{aligned}$$

15 오른쪽 그림과 같이 $\overline{A'B}$ 를 그듯

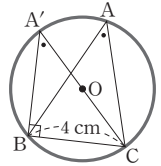
원의 중심을 지나는 $\overline{A'C}$ 를 그으면

$\angle A = \angle A'$ 이므로

$$\sin A' = \frac{\overline{BC}}{\overline{A'C}} = \frac{3}{4}$$

$$\overline{A'C} = \frac{4}{3} \overline{BC} = \frac{16}{3} (\text{cm})$$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2} \times \frac{16}{3} = \frac{8}{3} (\text{cm})$



16 $\angle BAE = 90^\circ - \angle AEG$

$$= \angle BEG,$$

$\angle BEG = \angle DEF$ (맞꼭지각),

$\angle BAC = \angle BDC$

(\widehat{BC} 에 대한 원주각)

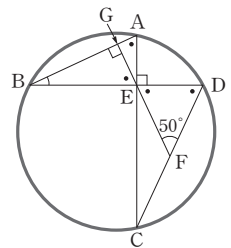
이므로

$$\angle DEF = \angle EDF$$

$\triangle FDE$ 에서

$$\angle DEF = \angle EDF = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ$$

$$\therefore \angle ABE = 90^\circ - \angle BAE = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$



17 오른쪽 그림과 같이 \overline{BD} 를 그으면

$\overline{AB} = \overline{AD}$ 이므로 $\widehat{AB} = \widehat{AD}$ 에서

$\angle ADB = \angle ABD$ 이고

\widehat{BAD} 의 원주각이 110° 이므로

$\angle ADB = (\widehat{AB}$ 에 대한 원주각)

$$= \frac{1}{2} \times (\widehat{BAD}$$
에 대한 원주각)

$$= \frac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ$$

\overline{OC} 를 그으면 $\triangle OBC$ 에서 $\overline{OB} = \overline{OC}$ 이고 $\angle OBC = 60^\circ$ 이

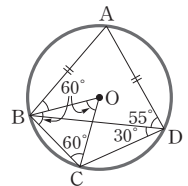
므로 $\triangle OBC$ 는 정삼각형이다.

$$\text{즉, } \angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

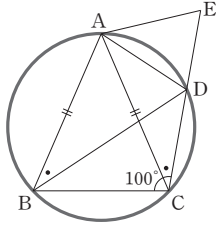
따라서 $\square ABCD$ 는 원에 내접하는 사각형이므로

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, (\angle ABO + \angle OBC) + \angle D = 180^\circ$$

$$\angle ABO + 60^\circ + (55^\circ + 38^\circ) = 180^\circ \quad \therefore \angle ABO = 35^\circ$$



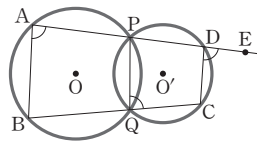
18 오른쪽 그림과 같이 \overline{AD} 를 그으면 $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACE$ 에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BD}=\overline{CE}$, $\angle ABD=\angle ACE$ (\widehat{AD} 에 대한 원주각)



이므로 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS 합동)
 $\square ABCD$ 는 원에 내접하므로 $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$
 $\therefore \angle CAE = \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD$
 $= 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

19 서술형

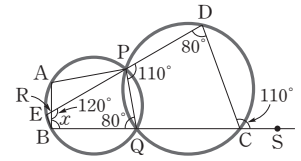
표현 단계 오른쪽 그림과 같이 \overline{AD} 의 연장선 위의 한 점을 E라 하고, \overline{PQ} 를 그으면



풀이 단계 $\square ABQP$ 는 원 O에 내접하므로 $\angle PAB = \angle PQC$ (내대각) ㉠
 또, $\square PQCD$ 도 원 O'에 내접하므로 $\angle PQC = \angle CDE$ (내대각) ㉡
 즉, ㉠, ㉡에서 $\angle PAB = \angle CDE$

확인 단계 따라서 동위각의 크기가 같으므로 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 이다.

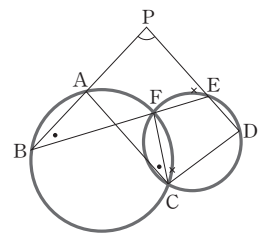
20 \overline{PQ} 를 그으면 $\angle PQB = \angle PDC = 80^\circ$ (내대각)
 $\angle PQC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$



이므로 $\angle PEB = \angle PQC = 100^\circ$ (내대각)
 $\angle PAB = \angle PEB = 100^\circ$ (원주각)
 $\angle DPQ = \angle DCS = 110^\circ$ (내대각)
 $\angle RPQ = 180^\circ - \angle DPQ = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$
 $\square RBQP$ 에서 $\angle x = 120^\circ + 80^\circ + 70^\circ = 360^\circ$
 $\therefore \angle x = 90^\circ$

21 오른쪽 그림과 같이 \overline{CF} 를 그으면

$\angle ABF = \angle ACF$ (\widehat{AF} 에 대한 원주각),
 $\angle PEF = \angle DCF$ (내대각)



이므로 $\triangle PBE$ 에서 $\angle APE = 180^\circ - (\angle PBE + \angle PEB)$
 $= 180^\circ - (\angle ACF + \angle DCF)$
 $= 180^\circ - 95^\circ$
 $= 85^\circ$

1 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

2 $2 : (1+\sqrt{5})$

3 ③

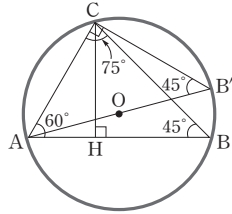
4 6 cm

5 120 m

6 753.6 m

문제 풀이

1 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 할 때, \overline{AO} 의 연장선과 원이 만나는 점을 B'이라 하고, $\overline{B'C}$ 를 그으면



$\angle ACB' = 90^\circ$

(반원에 대한 원주각)

$\angle AB'C = \angle ABC$

$= 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$ (\widehat{AC} 에 대한 원주각)

원 O의 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{AB'} = 2 \times 2 = 4$

$\therefore \overline{AC} = \overline{AB'} \sin 45^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

점 C에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH} = \overline{AC} \cos 60^\circ = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{2}$

$\overline{BH} = \overline{CH} = \overline{AC} \sin 60^\circ = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$

$\therefore \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{BH} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

2 \widehat{BC} 는 원주의 $\frac{1}{5}$ 이므로

$\angle BAC = \frac{1}{5} \times 180^\circ = 36^\circ$

$\triangle ABC$ 와 $\triangle AFB$ 에서

$\angle BCA = \angle FBA = 36^\circ$, $\angle A$ 는 공통

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AFB$ (AA 닮음)

$\angle CFB = \angle ABF + \angle BAF = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$

이므로

$\angle CBF = 180^\circ - (72^\circ + 36^\circ) = 72^\circ$

$\therefore \overline{CB} = \overline{CF}$

$\overline{AF} = 1$ cm, $\overline{FC} = x$ cm라 하면

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{FC} = x$ cm이므로

$\overline{AB} : \overline{AF} = \overline{AC} : \overline{AB}$ 에서

$x : 1 = (1+x) : x$

$x^2 = 1+x$

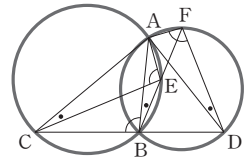
$x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

이때 $x > 0$ 이므로 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$\therefore \overline{AF} : \overline{FC} = 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
 $= 2 : (1 + \sqrt{5})$

3 $\angle ADF = \angle ABF$
 $= \angle ABE = \angle ACE$
 $\angle AFD = \angle ABC$ (내대각)
 $= \angle AEC$
 $\therefore \triangle ACE \sim \triangle ADF$ (AA 닮음)



4 오른쪽 그림과 같이 \overline{BI} 를 그으면 점 I가 $\triangle ABC$ 의 내심이므로

$\angle BAI = \angle CAI$

$\angle ABI = \angle CBI$

$\therefore \angle BID = \angle IAB + \angle IBA$

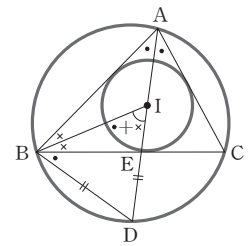
또, $\angle DBC = \angle DAC$

(\widehat{CD} 에 대한 원주각)이므로

$\angle DIB = \angle DBI$

따라서 $\triangle DIB$ 는 이등변삼각형이므로

$\overline{BD} = \overline{ID} = 6$ cm



5 오른쪽 그림과 같이 \overline{PB} 의 연장선이 원 O와 만나는 점을 C라 하면 \overline{PC} 는 원의 중심을 지난다.

원의 반지름의 길이를 r보라 하면

\overline{PA} 는 원의 접선이므로

$\overline{OA} \perp \overline{OP}$ 이고 $\overline{OA} = r$ 보

$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP}^2$ 이므로

$(r+20)^2 = r^2 + 80^2$

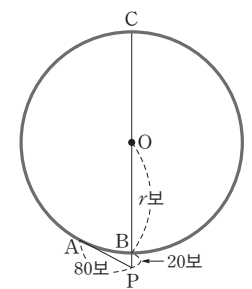
$r^2 + 40r + 400 = r^2 + 6400$

$40r = 6000 \quad \therefore r = 150$

따라서 원 모양의 도여니산성의 반지름의 길이는 150보이

고 연수의 보폭은 80 cm이므로

$150 \times 80 = 12000$ (cm) = 120 (m)



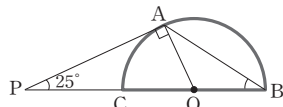
6 원의 반지름의 길이가 120 m이므로 구하는 원 모양의 도여니산성의 둘레의 길이는

$2\pi \times 120 = 240\pi = 240 \times 3.14 = 753.6$ (m)

- | | | | | | |
|-----------------------|-------------------------------|------------------------------------|---------|--|----------------------|
| 1 32.5° | 2 4 cm | 3 5 cm | 4 15 cm | 5 24 cm | 6 5 cm |
| 7 $10(\sqrt{2}-1)$ | 8 ② | 9 6π | 10 10° | 11 30° | 12 $\frac{10}{3}\pi$ |
| 13 40° | 14 ④ | 15 $\frac{100}{3}\pi \text{ cm}^2$ | 16 105° | 17 75° | 18 ② |
| 19 120 cm^2 | 20 $\frac{128}{5} \text{ cm}$ | 21 $4\sqrt{5} \text{ cm}$ | 22 2 cm | 23 $\frac{28-8\sqrt{6}}{5} \text{ cm}$ | 24 ⑤ |
| 25 45° | 26 122.5° | | | | |

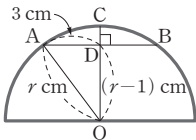
문제 풀이

1 오른쪽 그림과 같이 \overline{OA} 를 그으면
 $\angle PAO = 90^\circ$ 이므로
 $\angle AOC = 180^\circ - (90^\circ + 25^\circ) = 65^\circ$
 $\therefore \angle ABP = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \times 65^\circ = 32.5^\circ$

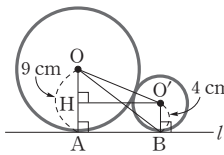


2 $\overline{AP} = \overline{AS} = 2 \text{ cm}$ 이므로
 $\overline{BQ} = \overline{BP} = \overline{AB} - \overline{AP} = 6 - 2 = 4 \text{ (cm)}$

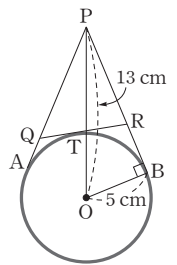
3 원의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$ 라 하면 오른쪽 그림과 같이 \overline{CD} 는 원의 중심 O를 지나므로
 $\overline{AO} = r \text{ cm}$, $\overline{DO} = (r-1) \text{ cm}$
 따라서 $\triangle AOD$ 에서
 $r^2 = (r-1)^2 + 3^2$, $2r = 10$
 $\therefore r = 5$
 따라서 원의 반지름의 길이는 5 cm이다.



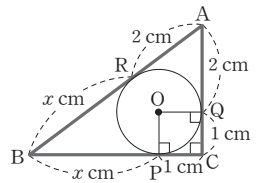
4 오른쪽 그림과 같이 점 O'에서 \overline{OA} 에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $\overline{HA} = \overline{O'B} = 4 \text{ cm}$ 이므로
 $\overline{OH} = \overline{OA} - \overline{HA} = 9 - 4 = 5 \text{ (cm)}$
 $\overline{OO'} = 9 + 4 = 13 \text{ (cm)}$
 즉, $\triangle OHO'$ 에서
 $\overline{HO'} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (cm)}$
 $\therefore \overline{AB} = \overline{HO'} = 12 \text{ cm}$
 따라서 $\triangle OAB$ 에서
 $\overline{OB} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \text{ (cm)}$



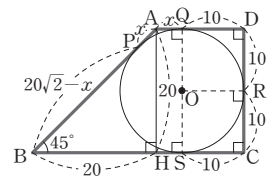
5 $\overline{PA} = \overline{PB} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (cm)}$
 \overline{QR} 와 원 O와의 접점을 T라 하면
 $\overline{QT} = \overline{QA}$, $\overline{RT} = \overline{RB}$ 이므로
 $\triangle PQR$ 의 둘레의 길이는
 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{PQ} + \overline{QT} + \overline{TR} + \overline{RP} = \overline{PQ} + \overline{QA} + \overline{RB} + \overline{RP} = \overline{PA} + \overline{PB} = 12 + 12 = 24 \text{ (cm)}$



6 오른쪽 그림과 같이 \overline{OQ} 를 그으면 $\square OPCQ$ 는 정사각형이므로
 $\overline{QC} = \overline{PC} = 1 \text{ cm}$
 $\therefore \overline{AR} = \overline{AQ} = \overline{AC} - \overline{QC} = 3 - 1 = 2 \text{ (cm)}$
 $\overline{BP} = \overline{BR} = x \text{ cm}$ 라 하면 $\triangle ABC$ 에서
 $(x+2)^2 = (x+1)^2 + 3^2$
 $2x = 6 \quad \therefore x = 3$
 $\therefore \overline{AB} = \overline{AR} + \overline{BR} = 2 + 3 = 5 \text{ (cm)}$



7 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 H라 하자.
 $\angle ABH = 45^\circ$ 이므로 $\triangle ABH$ 는 직각이등변삼각형이다.
 $\overline{AH} = \overline{DC} = 10 + 10 = 20$ 이므로 $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$
 $\overline{AP} = \overline{AQ} = x$ 라 하면 $\overline{BS} = \overline{PB} = 20\sqrt{2} - x$ 이므로
 $\overline{HS} = \overline{BS} - \overline{BH} = (20\sqrt{2} - x) - 20$
 또, $\overline{HS} = \overline{AQ} = x$ 이므로
 $20\sqrt{2} - x - 20 = x$, $2x = 20\sqrt{2} - 20$
 $\therefore x = 10\sqrt{2} - 10 = 10(\sqrt{2} - 1)$
 따라서 \overline{AP} 의 길이는 $10(\sqrt{2} - 1)$ 이다.



- 8 ① 주어진 조건만으로는 원에 내접하는지 알 수 없다.
 ② $\angle A + \angle C = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$ 이므로 원에 내접한다.
 ③ $\angle BAC \neq \angle BDC$ 이므로 원에 내접하지 않는다.
 ④ 주어진 조건만으로는 원에 내접하는지 알 수 없고,
 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ 이므로 원에 외접한다.
 ⑤ $3 \times 4 \neq 5 \times 2$ 이므로 원에 내접하지 않는다.

9 오른쪽 그림과 같이 \overline{BC} 를 그으면

$\triangle BPC$ 에서

$$\angle PBC + \angle PCB = 60^\circ \text{이고}$$

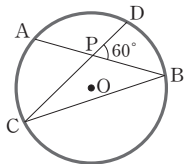
$\angle PBC, \angle PCB$ 는 각각 $\widehat{AC}, \widehat{BD}$ 에

대한 원주각이므로

$$(\text{원주}) : (\widehat{AC} + \widehat{BD}) = 180^\circ : 60^\circ$$

$$\text{에서 } 2\pi \times 9 : (\widehat{AC} + \widehat{BD}) = 3 : 1$$

$$\therefore \widehat{AC} + \widehat{BD} = 6\pi$$



10 $\angle BDC = \angle BAC = 20^\circ$ 이므로

$\triangle QCD$ 에서 $\angle ACD + \angle BDC = \angle AQD$

$$\text{즉, } \angle ACD + 20^\circ = 50^\circ$$

$$\therefore \angle ACD = 30^\circ$$

따라서 $\triangle APC$ 에서 $\angle ACD = \angle x + \angle PAC$ 이므로

$$30^\circ = \angle x + 20^\circ \quad \therefore \angle x = 10^\circ$$

11 \widehat{CD} 의 원주각의 크기를

θ 라 하면

$$\widehat{BC} = \widehat{DA} = \widehat{CD} \text{이고}$$

한 원의 원주각의 크기의 합

은 180° 이므로

\widehat{AB} 의 원주각의 크기는 $180^\circ - 3\theta$ 이다.

$$\therefore \angle ADB = 180^\circ - 3\theta$$

$\triangle BPD$ 에서

$$20^\circ + (180^\circ - 3\theta) = \theta, \quad 4\theta = 200^\circ \quad \therefore \theta = 50^\circ$$

$$\therefore \angle PDB = 180^\circ - 3\theta = 180^\circ - 3 \times 50^\circ = 30^\circ$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 \overline{AC} 를 그

어 \overline{BD} 와 만나는 점을 Q라 하

자.

$$\angle ADB = x \text{라 하면}$$

$$\angle ACB = \angle ADB = x$$

$$\triangle DPB \text{에서 } \angle DBC = 20^\circ + x$$

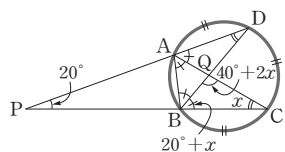
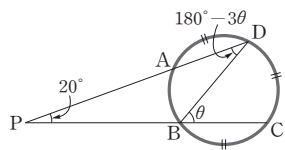
$$\widehat{BC} = \widehat{DA} = \widehat{CD} \text{이므로}$$

$$\angle ABD = \angle CAB = \angle DBC = 20^\circ + x$$

$$\angle CQB = (20^\circ + x) + (20^\circ + x) = 40^\circ + 2x \text{이므로}$$

$$\triangle QBC \text{에서 } (40^\circ + 2x) + (20^\circ + x) + x = 180^\circ$$

$$60^\circ + 4x = 180^\circ, \quad 4x = 120^\circ \quad \therefore x = 30^\circ$$



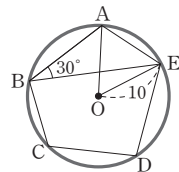
12 오른쪽 그림과 같이 \overline{BE} 를 그으면

$\square BCDE$ 에서 $\angle EBC + \angle D = 180^\circ$ 이므로

$$\angle ABE = 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$$

$$\text{즉, } \angle AOE = 2\angle ABE = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \widehat{AE} = 2\pi \times 10 \times \frac{60}{360} = \frac{10}{3}\pi$$



13 오른쪽 그림과 같이 \overline{AT} 를 그으면

\overline{AB} 가 원 O의 지름이므로 $\angle ATB = 90^\circ$

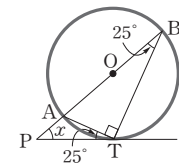
이고,

$$\angle ATP = \angle ABT = 25^\circ \text{이다.}$$

따라서 $\triangle BPT$ 에서

$$\angle x + (25^\circ + 90^\circ) + 25^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \angle x = 40^\circ$$



14 ① $\angle AFH + \angle AEH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

따라서 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180° 이므로 원에 내접한다.

② $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$

따라서 두 각은 같은 호에 대한 원주각이므로 원에 내접한다.

③ $\angle HDC + \angle HEC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

따라서 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180° 이므로 원에 내접한다.

⑤ $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$

따라서 두 각은 같은 호에 대한 원주각이므로 원에 내접한다.

15 $\triangle ABC$ 의 외접원의 중심을 O

라 할 때, \overline{BO} 의 연장선과 원이 만나는 점을 C' 이라 하면

$$\angle AC'B = \angle ACB$$

$$= 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ)$$

$$= 60^\circ$$

또, $\angle BAC' = 90^\circ$ 이므로

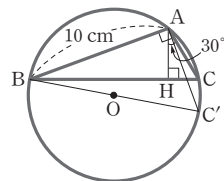
$$\sin C' = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC'}} \text{에서 } \sin 60^\circ = \frac{10}{\overline{BC'}}$$

$$\therefore \overline{BC'} = \frac{10}{\sin 60^\circ} = 10 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}$$

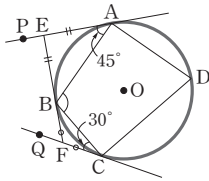
따라서 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{BC'} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ (cm)이므로

구하는 원의 넓이 S는

$$S = \pi \times \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{100}{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



16 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 원에 접선을 그어 \overline{PA} , \overline{QC} 와의 교점을 각각 E, F라 하면



$\overline{EA} = \overline{EB}$ 이므로

$$\angle EBA = \angle EAB = 45^\circ$$

또, $\overline{FB} = \overline{FC}$ 이므로

$$\angle FBC = \angle FCB = 30^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 \overline{BD} 를 그으면 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의해

$$\angle ADB = \angle PAB = 45^\circ,$$

$$\angle BDC = \angle BCQ = 30^\circ$$

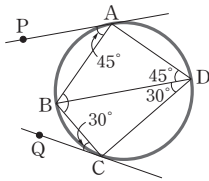
$$\begin{aligned} \therefore \angle ADC &= \angle ADB + \angle BDC \\ &= 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ \end{aligned}$$

$\square ABCD$ 는 원에 내접하므로

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \text{에서}$$

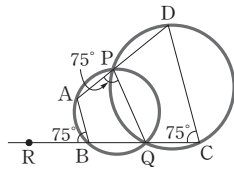
$$\angle ABC + 75^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = 105^\circ$$



17 오른쪽 그림과 같이 \overline{PQ} 를 그으면 내대각의 크기는 같으므로

$$\begin{aligned} \angle BCD &= \angle APQ = \angle ABR \\ &= 75^\circ \end{aligned}$$



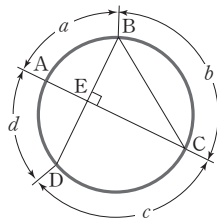
18 오른쪽 그림과 같이 \overline{BC} 를 그으면 $\triangle BCE$ 에서

$$\angle ACB + \angle CBD = 90^\circ \text{이므로}$$

\widehat{AB} 의 중심각과 \widehat{CD} 의 중심각의 크기의 합은 180° 이다.

따라서 $\widehat{AB} + \widehat{CD} = a + c$ 는

원주의 $\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$ 이다.



TIP 마찬가지로 $\widehat{AB} + \widehat{CD} = b + d$ 도 πr 이다.

19 $\overline{BE} = \overline{BD} = x$ cm라

하면

$$\overline{CE} = \overline{CF} = (26 - x) \text{ cm}$$

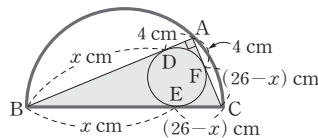
$$\overline{AD} = \overline{AF} = 4 \text{ cm이므로}$$

$$\overline{AB} = (x + 4) \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = 4 + (26 - x) = 30 - x \text{ (cm)}$$

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(x + 4)^2 + (30 - x)^2 = 26^2$$



$$x^2 - 26x + 120 = 0$$

$$(x - 6)(x - 20) = 0$$

$$\therefore x = 6 \text{ 또는 } x = 20$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 24 \times 10$$

$$= 120 \text{ (cm}^2\text{)}$$

20 점 O'에서 \overline{OP} 에 내린 수선의

발을 H라 하면 $\overline{HP} = 4$ cm

이므로

$$\overline{OH} = 16 - 4 = 12 \text{ (cm)}$$

$$\overline{OO'} = 16 + 4 = 20 \text{ (cm)}$$

이므로 $\triangle OHO'$ 에서

$$\overline{O'H} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ (cm)}$$

$\overline{OO'}$ 과 \overline{PQ} 의 교점을 H'이라 하면

$$\triangle OH'P \cong \triangle OH'Q \text{이므로}$$

$$\overline{OO'} \perp \overline{PQ}, \overline{PH'} = \overline{QH'}$$

$\triangle OHO'$ 과 $\triangle OH'P$ 에서

$$\angle OHO' = \angle OH'P = 90^\circ, \angle O \text{는 공통이므로}$$

$$\triangle OHO' \sim \triangle OH'P \text{ (AA 닮음)}$$

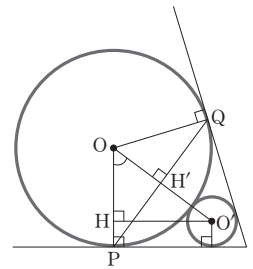
$$\overline{OO'} : \overline{OP} = \overline{O'H} : \overline{PH'}$$

$$20 : 16 = 16 : \overline{PH'}$$

$$20\overline{PH'} = 256$$

$$\therefore \overline{PH'} = \frac{64}{5} \text{ cm}$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH'} = 2 \times \frac{64}{5} = \frac{128}{5} \text{ (cm)}$$



21 오른쪽 그림과 같이

$\overline{BO} = \overline{OC} = x$ cm라 하면

$$\overline{AB} = 2x \text{ cm}$$

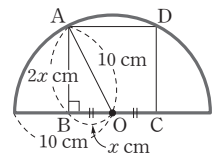
\overline{OA} 를 그으면 $\overline{OA} = 10$ cm이므로

$\triangle ABO$ 에서

$$10^2 = x^2 + (2x)^2, x^2 = 20$$

$$\therefore x = 2\sqrt{5} \text{ (} \because x > 0\text{)}$$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $4\sqrt{5}$ cm이다.



22 점 O는 $\triangle ABC$ 의 내심이므로

$$\angle DAC = \angle DAB$$

$$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC} = 5 : 3$$

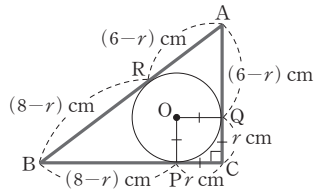
즉, $\overline{AB} = 5x$ cm, $\overline{AC} = 3x$ cm라 하면

$$(5x)^2 = (3x)^2 + 8^2, 16x^2 = 64$$

$$x^2 = 4 \quad \therefore x = 2 \text{ (} \because x > 0\text{)}$$

$$\therefore \overline{AB} = 10 \text{ cm}, \overline{AC} = 6 \text{ cm}$$

따라서 원 O와 $\triangle ABC$ 의 접점을 P, Q, R라 하고, 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$$\overline{CP} = \overline{CQ} = r \text{ cm,}$$

$$\overline{AR} = \overline{AQ} = (6-r) \text{ cm,}$$

$$\overline{BR} = \overline{BP} = (8-r) \text{ cm}$$

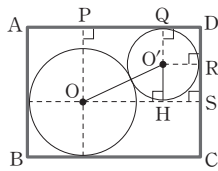
이므로

$$\overline{AB} = \overline{AR} + \overline{BR} = (6-r) + (8-r) = 10$$

$$2r = 4 \quad \therefore r = 2$$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 2 cm이다.

23 오른쪽 그림에서 두 원 O, O'의 반지름의 길이를 각각 $3x$ cm, $2x$ cm라 하면



$$\overline{OH} = \overline{PQ} = (8-5x) \text{ cm,}$$

$$\overline{O'H} = \overline{RS} = (6-5x) \text{ cm,}$$

$$\overline{OO'} = 3x + 2x = 5x \text{ (cm)}$$

이므로 $\triangle OHO'$ 에서

$$(5x)^2 = (8-5x)^2 + (6-5x)^2$$

$$25x^2 - 140x + 100 = 0$$

$$5x^2 - 28x + 20 = 0$$

$$\therefore x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 5 \times 20}}{5} = \frac{14 \pm \sqrt{96}}{5} = \frac{14 \pm 4\sqrt{6}}{5}$$

그런데 $6-5x > 0$ 에서 $5x < 6$ 이므로 $x = \frac{14-4\sqrt{6}}{5}$

따라서 원 O'의 반지름의 길이는

$$2x = \frac{28-8\sqrt{6}}{5} \text{ (cm)}$$

24 ① $\angle CBD = \angle CAD$ (\widehat{CD} 에 대한 원주각)

$$\therefore \angle CBP = \angle PAD$$

$$\textcircled{2} \angle APF = \angle CPE = 90^\circ - \angle PCE = \angle CBP = \angle PAF$$

$$\textcircled{3} \angle FPD = \angle BPE = 90^\circ - \angle CPE = \angle ECP = \angle FDP$$

$$\textcircled{4} \angle APF = \angle PAF \text{ 이므로 } \overline{AF} = \overline{PF}$$

또, $\angle FPD = \angle FDP$ 이므로 $\overline{PF} = \overline{DF}$

$$\therefore \overline{AF} = \overline{FD}$$

25 오른쪽 그림과 같이 \overline{AT} 를 그으면

$$\begin{aligned} \angle PTB &= \angle PTA + \angle ATB \\ &= \angle ABT + \angle ATB \\ &= 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ \end{aligned}$$

이므로 $\triangle TPB$ 에서

$$\angle TPB = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle TPC = \angle CPB &= \frac{1}{2} \angle TPB \\ &= \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ \end{aligned}$$

따라서 $\triangle CPB$ 에서

$$\angle PCT = \angle CPB + \angle CBP = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 \overline{OT} 를 그으면

$$\begin{aligned} \angle PTO &= 90^\circ \\ \angle AOT &= 2\angle ABT \\ &= 2 \times 30^\circ = 60^\circ \end{aligned}$$

$\triangle TPO$ 에서

$$\angle TPO = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle TPC = \angle CPB &= \frac{1}{2} \angle TPO \\ &= \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ \end{aligned}$$

따라서 $\triangle CPB$ 에서

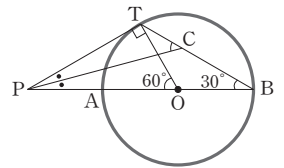
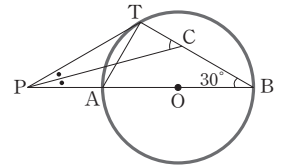
$$\angle PCT = \angle CPB + \angle CBP = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$$

26 두 원은 반지름의 길이가 같으므로 두 점 P, Q를 지나는 두 호의 길이가 같다. 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$$\begin{aligned} \angle PAQ &= \angle PBQ \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - 65^\circ) = 57.5^\circ \end{aligned}$$

$\square AQCP$ 는 원에 내접하므로

$$\begin{aligned} \angle PCQ &= 180^\circ - \angle PAQ \\ &= 180^\circ - 57.5^\circ = 122.5^\circ \end{aligned}$$



1 대푯값과 산포도

1 STEP 주제별 실력다지기

71-74쪽

- | | | | | |
|---|-------------------|------|------|-----------------------|
| 1 3 | 2 ① | 3 7 | 4 13 | 5 평균 : 19회, 분산 : 5.2 |
| 6 2.8시간 | 7 3 | 8 18 | 9 16 | 10 (1) 3 (2) 16 (3) 4 |
| 11 표는 풀이 참조, 평균 : 77, 분산 : 81, 표준편차 : 9 | 12 (1) 70점 (2) 8점 | | | |

최상위 05
NOTE

평균은 자료의 변량을 모두 더하고 이를 자료의 개수로 나눈 값이므로 모든 자료의 변량을 평균으로 생각할 수 있다. 예를 들어 어떤 자료의 평균이 10이면 그 자료의 모든 변량을 10으로 볼 수 있다. 따라서 모든 변량이 10이고, 평균이 10이므로 편차는 0이고 편차의 총합은 항상 0이다.

이를 식으로 증명해 보자.

n 개의 자료의 변량을 각각 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 이라 하고 평균을 M 이라 하면

$$M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

양변에 n 을 곱하면

$$Mn = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \quad \text{..... ㉠}$$

이때 편차는 각각 $x_1 - M, x_2 - M, x_3 - M, \dots, x_n - M$ 이므로 편차의 합은

$$\begin{aligned} & (x_1 - M) + (x_2 - M) + (x_3 - M) + \dots + (x_n - M) \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) - Mn}{1} \\ &= Mn - Mn \quad \text{㉡} \\ &= 0 \end{aligned}$$

1 a, b, c, d, e 의 평균이 5이므로

$$\frac{a+b+c+d+e}{5}=5$$

$$\therefore a+b+c+d+e=25$$

따라서 $13-2a, 13-2b, 13-2c, 13-2d, 13-2e$ 의 평균은

$$\frac{(13-2a)+(13-2b)+(13-2c)+(13-2d)+(13-2e)}{5}$$

$$= \frac{13 \times 5 - 2(a+b+c+d+e)}{5}$$

$$= \frac{65 - 2 \times 25}{5}$$

$$= 3$$

다른 풀이

a, b, c, \dots 의 평균이 m 일 때, $pa+q, pb+q, pc+q, \dots$ 의 평균은 $pm+q$ 이므로 주어진 자료의 평균은

$$p=-2, q=13, m=5 \text{에서}$$

$$13 - 2 \times 5 = 3$$

2 ① 사람의 염색체는 일반적으로 46개이지만 45개 또는 47개인 사람도 있다.

따라서 사람의 염색체의 개수의 평균이 46개라고 볼 수 없고, 가장 많이 나오는 값이어서 대푯값이 된 최빈값이라고 보는 것이 옳다.

③ 자료의 개수가 짝수이므로 중앙에 있는 두 값 4와 6의 평균 $\frac{4+6}{2}=5$ 가 주어진 자료의 중앙값이다.

④ 9와 15가 모두 두 번씩 가장 많이 나왔으므로 최빈값은 9와 15이다.

⑤ 다수 득표로 선출하는 방법은 모두 대푯값으로 최빈값을 사용한 것이다.

3 주어진 자료를 크기순으로 나열하면

2, 2, 5, 5, 7, 9, 9, 9

이므로

$$a = \frac{2+2+5+5+7+9+9+9}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

자료의 개수가 짝수이므로 중앙값은 4번째 값 5와 5번째 값 7의 평균이다.

$$\therefore b = \frac{5+7}{2} = 6$$

주어진 자료에서 9가 3번으로 가장 많이 나왔으므로

$$c = 9$$

따라서 a, b, c 의 평균은

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{6+6+9}{3} = 7$$

4 나머지 한 개의 변량의 편차를 x 라 하면 편차의 총합은 항상 0이어야 하므로

$$(-2)+1+4+x=0 \quad \therefore x=-3$$

따라서 (편차)=(변량)-(평균)에서

$$(변량)=(편차)+(평균) \text{이므로}$$

$$(나머지 한 개의 변량)=(-3)+16=13$$

$$5 \quad (\text{평균}) = \frac{17+17+18+20+23}{5} = \frac{95}{5} = 19(\text{회})$$

따라서 주어진 자료의 편차는 차례로 -2회, -2회, -1회, 1회, 4회이므로

$$(\text{분산}) = \frac{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2+4^2}{5}$$

$$= \frac{26}{5} = 5.2$$

6 편차의 총합은 항상 0이어야 하므로

$$(-2)+4+0+2+x=0 \quad \therefore x=-4$$

따라서 분산은

$$\frac{(-2)^2+4^2+0^2+2^2+(-4)^2}{5} = \frac{40}{5} = 8 \text{이므로}$$

$$(\text{표준편차}) = \sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ = 2 \times 1.4 = 2.8(\text{시간})$$

$$7 \quad (\text{평균}) = \frac{2+5+7+7+x+11}{6} = 7 \text{에서}$$

$$x+32=42 \quad \therefore x=10$$

따라서 각 변량의 편차는 -5, -2, 0, 0, 3, 4이므로

$$(\text{분산}) = \frac{(-5)^2+(-2)^2+0^2+0^2+3^2+4^2}{6}$$

$$= \frac{54}{6} = 9$$

$$\therefore (\text{표준편차}) = \sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{9} = 3$$

8 세 변량 a, b, c 의 평균이 4이므로

$$\frac{a+b+c}{3} = 4 \text{에서 } a+b+c=12$$

세 변량 a, b, c 의 분산이 2이므로

$$\frac{(a-4)^2+(b-4)^2+(c-4)^2}{3} = 2 \text{에서}$$

$$(a^2-8a+16)+(b^2-8b+16)+(c^2-8c+16)=6$$

$$a^2+b^2+c^2-8(a+b+c)+48=6$$

$$a^2+b^2+c^2-8 \times 12+48=6$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=54$$

따라서 각 변량을 제공한 수 a^2, b^2, c^2 의 평균은

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} = \frac{54}{3} = 18$$

9 (평균) = $\frac{4+x+6+y+5}{5} = 5$ (회)에서
 $x+y+15=25 \quad \therefore x+y=10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또, (분산) = (표준편차)² = 2² = 4이므로
 $\frac{(4-5)^2+(x-5)^2+(6-5)^2+(y-5)^2+(5-5)^2}{5} = 4$
 $\frac{x^2+y^2-10(x+y)+52}{5} = 4$
 $x^2+y^2-10 \times 10+52=20(\because \textcircled{1}) \quad \therefore x^2+y^2=68$
 따라서 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ 에서
 $10^2=68+2xy, 2xy=32 \quad \therefore xy=16$

10 a, b, c 의 평균이 2이므로
 $\frac{a+b+c}{3} = 2 \quad \therefore a+b+c=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 a, b, c 의 분산이 4이므로
 $\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3} = 4$
 $\therefore (a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 (1) $2a-1, 2b-1, 2c-1$ 의 평균은
 $\frac{(2a-1)+(2b-1)+(2c-1)}{3}$
 $= \frac{2(a+b+c)-3}{3}$
 $= \frac{2 \times 6 - 3}{3} = 3(\because \textcircled{1})$
 (2) $2a-1, 2b-1, 2c-1$ 의 분산은
 $\frac{(2a-1-3)^2+(2b-1-3)^2+(2c-1-3)^2}{3}$
 $= \frac{(2a-4)^2+(2b-4)^2+(2c-4)^2}{3}$
 $= \frac{\{2(a-2)\}^2+\{2(b-2)\}^2+\{2(c-2)\}^2}{3}$
 $= \frac{4(a-2)^2+4(b-2)^2+4(c-2)^2}{3}$
 $= \frac{4\{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\}}{3}$
 $= \frac{4 \times 12}{3} = 16(\because \textcircled{2})$
 (3) (표준편차) = $\sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{16} = 4$

다른 풀이

$x_i(i=1, 2, \dots, n)$ 의 평균이 m , 분산이 V , 표준편차가 s 일 때, $ax_i+b(i=1, 2, \dots, n)$ 에 대하여
 (평균) = $am+b$, (분산) = a^2V , (표준편차) = $|a|s$ 이다.
 즉, 세 변량 a, b, c 의 평균이 2, 분산이 4일 때, 세 변량 $2a-1, 2b-1, 2c-1$ 에 대하여
 (1) (평균) = $2 \times 2 - 1 = 3$
 (2) (분산) = $2^2 \times 4 = 16$
 (3) (표준편차) = $|2| \times \sqrt{4} = 4$

11

계급	도수	계급값	(계급값) × (도수)	편차	(편차) ² × (도수)
55 ^{이상} ~65 ^{미만}	1	60	60	-17	(-17) ² × 1 = 289
65 ~ 75	3	70	210	-7	(-7) ² × 3 = 147
75 ~ 85	4	80	320	3	3 ² × 4 = 36
85 ~ 95	2	90	180	13	13 ² × 2 = 338
합계	10		⊖ 770		⊖ 810

⊖에서 (평균) = $\frac{770}{10} = 77$
 ⊖에서 (분산) = $\frac{810}{10} = 81$
 (표준편차) = $\sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{81} = 9$

12

수학 성적 (점)	도수 (명)	계급값 (점)	(계급값) × (도수)	편차 (점)	(편차) ² × (도수)
45 ^{이상} ~55 ^{미만}	2	50	100	-20	(-20) ² × 2 = 800
55 ~ 65	9	60	540	-10	(-10) ² × 9 = 900
65 ~ 75	27	70	1890	0	0 ² × 27 = 0
75 ~ 85	11	80	880	10	10 ² × 11 = 1100
85 ~ 95	1	90	90	20	20 ² × 1 = 400
합계	50		⊖ 3500		⊖ 3200

(1) ⊖에서 (평균) = $\frac{3500}{50} = 70$ (점)
 (2) ⊖에서 (분산) = $\frac{3200}{50} = 64$ 이므로
 (표준편차) = $\sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{64} = 8$ (점)

- 1 93점 2 (1) A반 : 150 cm, B반 : 153 cm, C반 : 154 cm (2) 153 cm 3 $\frac{5x-2y}{3}$ 점 4 6.1권
 5 3 : 4 6 ①, ⑤ 7 ② 8 $\sqrt{11}$ 9 51 kg 10 1.04
 11 15 12 4 13 4 14 평균 : 171.5 cm, 표준편차 : $2\sqrt{6}$ cm 15 은정, 현정, 나연
 16 (1) 합 : 18, 제곱의 합 : 84 (2) 4 (3) 7 17 $\sqrt{41}$

문제 풀이

1 나연이가 3회에 걸쳐 본 시험 점수의 총합은 $89 \times 3 = 267$ (점)
 이므로 마지막 시험 점수를 x 점이라 하면
 (4회까지의 평균 점수) $= \frac{267+x}{4}$ (점)
 $\frac{267+x}{4} \geq 90 \quad \therefore x \geq 93$
 따라서 마지막 시험에서 받아야 하는 최저 점수는 93점이다.

2 서술형

표현 단계 A반의 평균 키를 a cm, B반의 평균 키를 b cm, C반의 평균 키를 c cm라 하면

변형 단계 A, B반의 평균 키가 152 cm이므로

$$\frac{10a+20b}{10+20} = 152 \text{에서 } a+2b=456 \quad \dots \textcircled{A}$$

A, C반의 평균 키가 153 cm이므로

$$\frac{10a+30c}{10+30} = 153 \text{에서 } a+3c=612 \quad \dots \textcircled{B}$$

B, C반의 평균 키가 153.6 cm이므로

$$\frac{20b+30c}{20+30} = 153.6 \text{에서 } 2b+3c=768 \quad \dots \textcircled{C}$$

풀이 단계 (1) $\textcircled{A} + \textcircled{B} + \textcircled{C}$ 을 하면 $a+2b+3c=918$

$$\therefore a=150, b=153, c=154$$

따라서 A반의 평균 키는 150 cm, B반의 평균 키는 153 cm, C반의 평균 키는 154 cm이다.

(2) (세 반의 평균 키)

$$\begin{aligned} &= \frac{10 \times 150 + 20 \times 153 + 30 \times 154}{10 + 20 + 30} \\ &= \frac{1500 + 3060 + 4620}{60} = \frac{9180}{60} = 153(\text{cm}) \end{aligned}$$

3 현정의 10과목 전체 점수의 총합은 $10x$ 점이고, 국어, 영어, 수학, 과학 4과목의 점수의 총합은 $4y$ 점이므로 (나머지 6과목의 점수의 총합) $= 10x - 4y$ (점)

$$\begin{aligned} \therefore (\text{나머지 6과목의 평균 점수}) &= \frac{10x-4y}{6} \\ &= \frac{5x-2y}{3}(\text{점}) \end{aligned}$$

4 (각 계급의 도수) $=$ (각 계급의 상대도수) \times (총인원)
 이므로 주어진 자료를 도수분포표로 나타내면 다음과 같다.

읽은 책의 권수(권)	상대도수	도수(명)	계급값(권)	(계급값) \times (도수)
1 이상 ~ 3 미만	0.1	2	2	4
3 ~ 5	0.3	6	4	24
5 ~ 7	0.2	4	6	24
7 ~ 9	0.25	5	8	40
9 ~ 11	0.15	3	10	30
합계	1	20		122

$$\therefore (\text{평균}) = \frac{122}{20} = 6.1(\text{권})$$

5 서술형

표현 단계

반	평균 점수(점)	학생 수(명)
A	63	a
B	70	b

변형 단계 A반의 학생 수를 a 명, B반의 학생 수를 b 명이라 하면 두 반의 평균 점수가 67점이므로

$$\frac{63a+70b}{a+b} = 67$$

풀이 단계 즉, $63a+70b=67a+67b, 4a=3b$

$$\therefore a : b = 3 : 4$$

6 ① (반례) 두 자료

A : 1, 2, 3, 4, 5

B : 0.5, 3, 3, 3, 5.5

에서 A, B의 평균을 각각 구하면

$$A : \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$B : \frac{0.5+3+3+3+5.5}{5} = 3$$

두 자료 A, B의 편차는 각각

A : -2, -1, 0, 1, 2

B : -2.5, 0, 0, 0, 2.5

이므로 두 자료 A, B의 편차의 절댓값의 총합은

$$A : |-2| + |-1| + 0 + 1 + 2 = 6$$

$$B : |-2.5| + 0 + 0 + 0 + 2.5 = 5$$

또, 두 자료 A, B의 표준편차는

$$A : \sqrt{\frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5}} = \sqrt{2}$$

$$B : \sqrt{\frac{(-2.5)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.5^2}{5}} = \sqrt{2.5}$$

따라서 자료 A의 편차의 절댓값의 총합이 더 크지만 표준편차는 더 작다.

⑤ 편차의 총합은 항상 0이므로 음수가 될 수 없다.

따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤이다.

7 세 자료 A, B, C의 평균은 각각 25.5, 75.5, 50.5이므로 각 자료의 편차는

$$A : -24.5, -23.5, \dots, -0.5, 0.5, \dots, 24.5$$

$$B : -24.5, -23.5, \dots, -0.5, 0.5, \dots, 24.5$$

$$C : -49.5, -48.5, \dots, -0.5, 0.5, \dots, 49.5$$

따라서 각 자료의 분산을 구하면

$$a = \frac{2\{(0.5)^2 + (1.5)^2 + \dots + (24.5)^2\}}{50}$$

$$b = \frac{2\{(0.5)^2 + (1.5)^2 + \dots + (24.5)^2\}}{50}$$

$$c = \frac{2\{(0.5)^2 + (1.5)^2 + \dots + (49.5)^2\}}{100}$$

$$\therefore a = b < c$$

8 서술형

$$\begin{aligned} \text{표현 단계 (평균)} &= \frac{(\text{변량})\text{의 총합}}{(\text{변량})\text{의 개수}} \\ &= \frac{2+3+4+5+6+6+9+13}{8} = \frac{48}{8} = 6 \end{aligned}$$

변형 단계 각 변량의 편차는 (변량) - (평균)이므로

$$-4, -3, -2, -1, 0, 0, 3, 7$$

$$\begin{aligned} \text{풀이 단계} \therefore (\text{분산}) &= \frac{(\text{편차})^2\text{의 총합}}{(\text{변량})\text{의 개수}} \\ &= \frac{(-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 3^2 + 7^2}{8} \\ &= \frac{88}{8} = 11 \end{aligned}$$

$$\text{확인 단계} \therefore (\text{표준편차}) = \sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{11}$$

9 수정이의 몸무게의 편차를 x kg이라 하면 편차의 총합은 항상 0이어야 하므로 $4+0+3+0+x+(-5)=0$

$$2+x=0 \quad \therefore x=-2$$

이때 (편차) = (변량) - (평균)에서

(변량) = (평균) + (편차)이므로

$$(\text{수정이의 몸무게}) = 50 + (-2) = 48(\text{kg})$$

또, 전체 가족의 몸무게의 분산은

$$\frac{4^2 + 0^2 + 3^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-5)^2}{6} = \frac{54}{6} = 9 \text{이므로}$$

$$(\text{표준편차}) = \sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{9} = 3(\text{kg})$$

따라서 수정이의 몸무게와 전체 가족의 몸무게의 표준편차의 합은

$$48 + 3 = 51(\text{kg})$$

10

점수(점)	도수(명)	(점수) × (도수)	편차(점)	(편차) ² × (도수)
7	2	14	-1.6	(-1.6) ² × 2 = 5.12
8	2	16	-0.6	(-0.6) ² × 2 = 0.72
9	4	36	0.4	0.4 ² × 4 = 0.64
10	2	20	1.4	1.4 ² × 2 = 3.92
합계	10	⊖ 86		⊖ 10.4

$$\text{㉠에서 (평균)} = \frac{86}{10} = 8.6(\text{점})$$

$$\text{㉡에서 (분산)} = \frac{10.4}{10} = 1.04$$

11 세 수 a, b, c 의 평균이 4이므로

$$\frac{a+b+c}{3} = 4 \quad \therefore a+b+c = 12$$

또, 세 수 a, b, c 의 표준편차가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{(a-4)^2 + (b-4)^2 + (c-4)^2}{3} = (\sqrt{2})^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 8(a+b+c) + 48 = 6$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 8 \times 12 + 48 = 6$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 54$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \text{이므로}$$

$$12^2 = 54 + 2(ab+bc+ca)$$

$$2(ab+bc+ca) = 90$$

$$\therefore ab+bc+ca = 45$$

따라서 세 수 ab, bc, ca 의 평균은

$$\frac{ab+bc+ca}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

12 10개의 변량을 각각 x_1, x_2, \dots, x_{10} 이라 하면

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 10,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 170$$

이므로

$$(\text{평균}) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\begin{aligned} (\text{분산}) &= \frac{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + \dots + (x_{10}-1)^2}{10} \\ &= \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2) - 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) + 10}{10} \end{aligned}$$

$$= \frac{170 - 2 \times 10 + 10}{10}$$

$$= 16$$

$$\therefore (\text{표준편차}) = \sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{16} = 4$$

13 네 변량 a, b, c, d 의 평균이 2이므로

$$\frac{a+b+c+d}{4}=2 \quad \therefore a+b+c+d=8$$

네 변량 a, b, c, d 의 표준편차가 2이므로

$$\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2+(d-2)^2}{4}=2^2$$

$$\therefore (a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2+(d-2)^2=16$$

따라서 네 변량 $5-2a, 5-2b, 5-2c, 5-2d$ 에 대하여

$$(\text{평균})=\frac{(5-2a)+(5-2b)+(5-2c)+(5-2d)}{4}$$

$$=\frac{5 \times 4 - 2(a+b+c+d)}{4}$$

$$=\frac{20-2 \times 8}{4}$$

$$=1$$

$$(\text{분산})=\frac{1}{4}\{(5-2a-1)^2+(5-2b-1)^2$$

$$+(5-2c-1)^2+(5-2d-1)^2\}$$

$$=\frac{(4-2a)^2+(4-2b)^2+(4-2c)^2+(4-2d)^2}{4}$$

$$=\frac{\{2(2-a)\}^2+\{2(2-b)\}^2+\{2(2-c)\}^2+\{2(2-d)\}^2}{4}$$

$$=\frac{4(2-a)^2+4(2-b)^2+4(2-c)^2+4(2-d)^2}{4}$$

$$=4\frac{\{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2+(d-2)^2\}}{4}$$

$$=(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2+(d-2)^2$$

$$=16$$

$$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{16}=4$$

다른 풀이

$x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 의 표준편차가 s 일 때,

$ax_i+b (i=1, 2, \dots, n)$ 의 표준편차는 $|a|s$ 이다.

네 변량 a, b, c, d 의 표준편차가 2이므로 네 변량

$5-2a, 5-2b, 5-2c, 5-2d$ 의 표준편차는

$$|-2| \times 2=4$$

14

키(cm)	도수 (명)	계급값 (cm)	(계급값) \times (도수)	편차 (cm)	(편차) ² \times (도수)
160 ^{이상} ~165 ^{미만}	2	162.5	325	-9	$(-9)^2 \times 2=162$
165 ~170	5	167.5	837.5	-4	$(-4)^2 \times 5=80$
170 ~175	9	172.5	1552.5	1	$1^2 \times 9=9$
175 ~180	3	177.5	532.5	6	$6^2 \times 3=108$
180 ~185	1	182.5	182.5	11	$11^2 \times 1=121$
합계	20		⊖ 3430		⊕ 480

$$\ominus \text{에서 } (\text{평균})=\frac{3430}{20}=171.5(\text{cm})$$

$$\oplus \text{에서 } (\text{분산})=\frac{480}{20}=24$$

$$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}(\text{cm})$$

15 세 사람의 음악 감상 시간의 평균을 각각 구하면

$$(\text{은정이의 평균})=\frac{3+2+4}{3}=3(\text{시간})$$

$$(\text{나연이의 평균})=\frac{4+2+6}{3}=4(\text{시간})$$

$$(\text{현정이의 평균})=\frac{1+4+1}{3}=2(\text{시간})$$

이므로 각각의 편차는 다음 표와 같다.

	은정	나연	현정
1일	0시간	0시간	-1시간
2일	-1시간	-2시간	2시간
3일	1시간	2시간	-1시간

따라서 세 사람의 분산을 각각 구하면

$$(\text{은정이의 분산})=\frac{0^2+(-1)^2+1^2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$(\text{나연이의 분산})=\frac{0^2+(-2)^2+2^2}{3}=\frac{8}{3}$$

$$(\text{현정이의 분산})=\frac{(-1)^2+2^2+(-1)^2}{3}=2$$

분산이 작을수록 음악 감상 시간이 고르므로 음악 감상 시간이 고른 순서대로 나열하면 은정, 현정, 나연이다.

16 서술형

$$\text{표현 단계 (1) (평균)}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_6}{6}=3 \text{이므로}$$

$$x_1+x_2+\dots+x_6=18$$

$$(\text{분산})=\frac{(x_1-3)^2+(x_2-3)^2+\dots+(x_6-3)^2}{6}$$

$$=5$$

이므로

$$(x_1^2+x_2^2+\dots+x_6^2)$$

$$-6(x_1+x_2+\dots+x_6)+6 \times 3^2$$

$$=30$$

$$(x_1^2+x_2^2+\dots+x_6^2)-6 \times 18+54=30$$

$$\therefore x_1^2+x_2^2+\dots+x_6^2=84$$

$$(2) (\text{평균})=\frac{(x_1+x_2+\dots+x_6)+x_7+x_8}{8}$$

$$=\frac{18+8+6}{8}$$

$$=\frac{32}{8}=4$$

$$(3) (\text{분산})=\frac{(x_1-4)^2+(x_2-4)^2+\dots+(x_8-4)^2}{8}$$

$$=\frac{(x_1^2+x_2^2+\dots+x_8^2)-8(x_1+x_2+\dots+x_8)+8 \times 4^2}{8}$$

$$=\frac{(84+x_7^2+x_8^2)-8 \times 32+128}{8}$$

$$=\frac{(84+8^2+6^2)-128}{8}$$

$$=\frac{56}{8}=7$$

17 x_1, x_2, \dots, x_{10} 의 평균이 10이므로

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_{10}}{10}=10$$

$$\therefore x_1+x_2+\dots+x_{10}=100$$

y_1, y_2, \dots, y_{20} 의 평균이 10이므로

$$\frac{y_1+y_2+\dots+y_{20}}{20}=10$$

$$\therefore y_1+y_2+\dots+y_{20}=200$$

따라서 $x_1, x_2, \dots, x_{10}, y_1, y_2, \dots, y_{20}$ 의 평균은

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_{10}+y_1+y_2+\dots+y_{20}}{30}$$

$$=\frac{100+200}{30}=10$$

x_1, x_2, \dots, x_{10} 의 표준편차는 5이므로

$$\frac{(x_1-10)^2+(x_2-10)^2+\dots+(x_{10}-10)^2}{10}=5^2$$

$$\therefore (x_1-10)^2+(x_2-10)^2+\dots+(x_{10}-10)^2=250$$

또, y_1, y_2, \dots, y_{20} 의 표준편차는 7이므로

$$\frac{(y_1-10)^2+(y_2-10)^2+\dots+(y_{20}-10)^2}{20}=7^2$$

$$\therefore (y_1-10)^2+(y_2-10)^2+\dots+(y_{20}-10)^2=980$$

따라서 $x_1, x_2, \dots, x_{10}, y_1, y_2, \dots, y_{20}$ 의 분산은

$$\frac{1}{30}\{(x_1-10)^2+(x_2-10)^2+\dots+(x_{10}-10)^2+(y_1-10)^2+(y_2-10)^2+\dots+(y_{20}-10)^2\}$$

$$=\frac{250+980}{30}$$

$$=\frac{1230}{30}=41$$

$$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}=\sqrt{41}$$

TIP x_1, x_2, \dots, x_{10} 과 y_1, y_2, \dots, y_{20} 의 평균이 모두 10이므로 $x_1, x_2, \dots, x_{10}, y_1, y_2, \dots, y_{20}$ 의 평균도 10임을 알 수 있다.

3 STEP 최고 실력 완성하기

79~80쪽

1 5

2 ③, ⑤

3 6

4 11.67

5 변량, 평균

6 분산, $\frac{\{(\text{변량})-(\text{평균})\}^2 \text{의 총합}}{\text{총 도수}}$ 또는 $\frac{(\text{편차})^2 \text{의 총합}}{\text{총 도수}}$

7 표준편차, $\sqrt{\frac{\{(\text{변량})-(\text{평균})\}^2 \text{의 총합}}{\text{총 도수}}}$ 또는 $\sqrt{\frac{(\text{편차})^2 \text{의 총합}}{\text{총 도수}}}$

8 고르다

문제 풀이

1 연속하는 4개의 홀수를 $2n-3, 2n-1, 2n+1, 2n+3$ (n 은 2 이상의 자연수)이라 하면

$$(\text{평균})=\frac{(2n-3)+(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)}{4}$$

$$=\frac{8n}{4}=2n$$

$$(\text{분산})=\frac{1}{4}\{(2n-3-2n)^2+(2n-1-2n)^2+(2n+1-2n)^2+(2n+3-2n)^2\}$$

$$=\frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4}=\frac{20}{4}=5$$

TIP 연속하는 4개의 홀수를 (1, 3, 5, 7), (3, 5, 7, 9), ... 등의 구체적인 수로 놓고 풀어도 된다.

예 1, 3, 5, 7에서

$$(\text{평균})=\frac{1+3+5+7}{4}=\frac{16}{4}=4$$

$$(\text{분산})=\frac{(1-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}{4}$$

$$=\frac{20}{4}=5$$

2 두 선수 A, B의 패스 성공 횟수의 평균을 각각 구하면

$$(\text{A의 평균})=\frac{2+13+10+4+11}{5}=8(\text{회})$$

$$(\text{B의 평균})=\frac{4+8+6+6+11}{5}=7(\text{회})$$

분산을 각각 구하면

$$(\text{A의 분산})=\frac{(-6)^2+5^2+2^2+(-4)^2+3^2}{5}=18$$

$$(\text{B의 분산})=\frac{(-3)^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2+4^2}{5}=5.6$$

① 패스 성공 횟수의 평균은 A 선수가 B 선수보다 높다.

② A 선수의 패스 성공 횟수의 분산은 18이다.

④ (패스 성공률) = $\frac{(\text{성공한 패스의 개수})}{(\text{전체 패스의 개수})}$ 인데 전체 패스

의 개수를 모르므로 성공률은 두 선수 모두 알 수 없다.

⑤ 분산이 작을수록 패스 성공 횟수가 고르므로 B 선수가 A 선수보다 고른 패스 성공 횟수를 보인다.

따라서 알 수 있는 사실은 ③, ⑤이다.

3 $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 20, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 130$

이므로 $2x_1 + 1, 2x_2 + 1, \dots, 2x_{10} + 1$ 에 대하여

$$\begin{aligned} (\text{평균}) &= \frac{(2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) + \dots + (2x_{10} + 1)}{10} \\ &= \frac{2(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) + 10}{10} \\ &= \frac{2 \times 20 + 10}{10} = 5 \\ (\text{분산}) &= \frac{(2x_1 + 1 - 5)^2 + (2x_2 + 1 - 5)^2 + \dots + (2x_{10} + 1 - 5)^2}{10} \\ &= \frac{(2x_1 - 4)^2 + (2x_2 - 4)^2 + \dots + (2x_{10} - 4)^2}{10} \\ &= \frac{\{2(x_1 - 2)\}^2 + \{2(x_2 - 2)\}^2 + \dots + \{2(x_{10} - 2)\}^2}{10} \\ &= \frac{4\{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + \dots + (x_{10} - 2)^2\}}{10} \\ &= \frac{4\{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 - 4(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) + 4 \times 10\}}{10} \\ &= \frac{4(130 - 4 \times 20 + 40)}{10} = 36 \end{aligned}$$

\therefore (표준편차) $= \sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{36} = 6$

4 자료 A의 변량을 x_1, x_2, \dots, x_{10} , 자료 B의 변량을

y_1, y_2, \dots, y_{20} 이라 하면

자료 A의 평균은 7이므로

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} = 7$$

$\therefore x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 70$

자료 A의 분산은 11이므로

$$\frac{(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 + \dots + (x_{10} - 7)^2}{10} = 11$$

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2) - 14(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) + 49 \times 10 \\ = 110 \end{aligned}$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2) - 14 \times 70 + 490 = 110$$

$\therefore x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 600$

또, 자료 B의 평균은 4이므로

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{20}}{20} = 4$$

$\therefore y_1 + y_2 + \dots + y_{20} = 80$

자료 B의 분산은 9이므로

$$\frac{(y_1 - 4)^2 + (y_2 - 4)^2 + \dots + (y_{20} - 4)^2}{20} = 9$$

$$(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2) - 8(y_1 + y_2 + \dots + y_{20}) + 16 \times 20 = 180$$

$$(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2) - 8 \times 80 + 320 = 180$$

$\therefore y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2 = 500$

두 자료 A, B의 변량을 합한 $x_1, x_2, \dots, x_{10}, y_1, y_2, \dots, y_{20}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} (\text{평균}) &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10} + y_1 + y_2 + \dots + y_{20}}{30} \\ &= \frac{70 + 80}{30} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{분산}) &= \frac{1}{30} \{ (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + \dots + (x_{10} - 5)^2 \\ &\quad + (y_1 - 5)^2 + (y_2 - 5)^2 + \dots + (y_{20} - 5)^2 \} \\ &= \frac{1}{30} \{ (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2) \\ &\quad - 10(x_1 + x_2 + \dots + x_{10} + y_1 + y_2 + \dots + y_{20}) \\ &\quad + 25 \times 10 + 25 \times 20 \} \\ &= \frac{(600 + 500) - 10(70 + 80) + 750}{30} \\ &= \frac{350}{30} \\ &= 11.666\cdots \end{aligned}$$

따라서 소수 셋째 자리에서 반올림하여 분산을 나타내면 11.67이다.

2 상관관계

1 STEP 주제별 실력다지기

82~85쪽

- 1 ②, ⑤ 2 ①, ⑤ 3 80점 4 35% 5 ②, ⑤ 6 ⑤
- 7 (1) 양의 상관관계 (2) 30% (3) 30점 8 풀이 참조, 양의 상관관계 9 ② 10 12
- 11 75점 12 5명

최상위 06 NOTE

상관표는 두 변량의 도수분포표를 함께 나타내어 서로의 관계를 알아보기 쉽게 만든 표이다. 상관표는 두 변량의 분포 상태를 알 수 있고, 산점도와 마찬가지로 두 변량의 상관관계를 알 수 있다. 상관관계의 정도만 알고 싶다면 시각적으로 한 번에 나타나는 산점도가 편하고, 상관표는 도수를 확실히 알 수 있어 평균 등을 구해야 할 때 편리하다.

상관표가 나오면 기준선을 그어서 생각한다.

(1) 이상, 이하, 초과, 미만 등의 말이 나올 경우

예 x 는 3 이상 y 는 4 이상 \Rightarrow 상관표의 어두운 부분

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	합계
5						
4						
3						
2						
1						
합계						

(2) 높은, 낮은, 같은 등의 비교의 말이 나올 경우

예 $x=y$ 일 경우 $\Rightarrow x=y$ 가 지나는 부분 (대각선이 지나는 부분)

$x > y$ 일 경우 $\Rightarrow x=y$ 의 아래쪽 부분

$x < y$ 일 경우 $\Rightarrow x=y$ 의 위쪽 부분

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	합계
5					$x=y$	
4		$x < y$				
3				$x > y$		
2			$x > y$			
1		$x > y$				
합계						

1 A는 여가 시간이 적고 그 대신 학교 성적은 높다. 반면에 B는 학교 성적은 중간인데 비해서 여가 시간은 많은 편이다. 또한, A, B를 비교하면 A는 B보다 학교 성적은 높고, 여가 시간은 적다.

⑤ 여가 시간이 많을수록 점들이 아래로 분포하므로 학교 성적이 떨어지는 경향이 있음을 알 수 있다.
따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

2 ② D는 C보다 과학 성적이 높다.

③ C는 과학 성적과 사회 성적이 같다.

④ D는 사회 성적보다 과학 성적이 높다.

따라서 옳은 것은 ①, ⑤이다.

3 중간 고사 성적보다 기말 고사 성적이 향상된 학생은 점 (0, 0)과 점 (100, 100)을 잇는 대각선 위쪽에 있는 점으로 도수분포표를 그려 보면

기말고사 성적(점)	60	70	80	90	100	합계
도수(명)	1	2	1	2	1	7

따라서 구하는 평균은

$$\frac{60 \times 1 + 70 \times 2 + 80 \times 1 + 90 \times 2 + 100 \times 1}{7} = \frac{560}{7} = 80(\text{점})$$

4 주어진 조건을 만족하는 학생의

(높이뛰기 기록, 100 m 달리기 기록)은

(5, 12), (5, 13), (5, 14), (6, 12), (6, 13), (6, 14),

(7, 12)의 7명이므로

전체의 $\frac{7}{20} \times 100 = 35(\%)$ 이다.

5 ① 상관관계가 없다.

② 일반적으로 기온이 높아지면 음료수 판매량은 증가한다. 즉, 양의 상관관계이다.

③ 일반적으로 물건값이 오르면 소비는 줄어든다. 즉, 음의 상관관계이다.

④ 일반적으로 기온이 올라가면 난방비는 줄어든다. 즉, 음의 상관관계이다.

⑤ 일반적으로 수요가 늘어나면 공급도 늘어난다. 즉, 양의 상관관계이다.

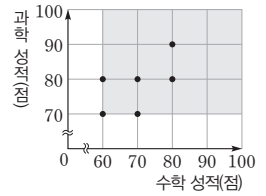
따라서 양의 상관관계가 있는 것은 ②, ⑤이다.

6 ⑤ 도시가 넓으면 인구가 많아지는 경향이 있으므로 양의 상관관계이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

7 (2) 해당되는 학생은 오른쪽 그림에서 어두운 부분이므로 6명이다.

$$\therefore \frac{6}{20} \times 100 = 30(\%)$$



(3) 과학 성적이 50점 미만인 학생들의

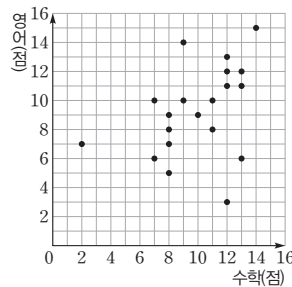
(수학 성적, 과학 성적)은

(20, 30), (30, 30), (30, 40), (40, 40)

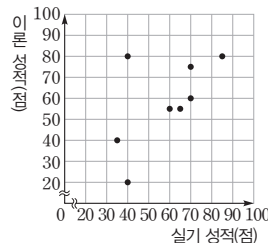
이므로 수학 성적의 평균은

$$\frac{20 + 30 + 30 + 40}{4} = \frac{120}{4} = 30(\text{점})$$

8 산점도를 그려 보면 다음 그림과 같고, 약한 양의 상관관계가 있다고 할 수 있다.



9 산점도를 그려 보면 다음 그림과 같으므로 약한 양의 상관관계가 있다고 볼 수 있다.



$$10 \quad A + 2 + 1 = 4 \quad \therefore A = 1$$

$$A + 3 + 5 + B = 11 \quad \therefore B = 2$$

$$1 + 6 + B = C \quad \therefore C = 9$$

$$\therefore A + B + C = 1 + 2 + 9 = 12$$

11 주어진 조건의 도수분포표를 그려 보면

영어 성적(점)	도수(명)	계급값(점)	(계급값)×(도수)
80 ^{이상} ~90 ^{미만}	1	85	85
70 ~80	5	75	375
60 ~70	1	65	65
합계	7		525

$$\begin{aligned} \therefore (\text{평균}) &= \frac{85+375+65}{7} \\ &= \frac{525}{7} = 75(\text{점}) \end{aligned}$$

12 상관표에서 굵은 선안에 있는 자료는 국어 성적과 영어 성적의 합이 130점 미만인 자료이고, 어두운 곳의 자료는 국어 성적과 영어 성적의 합이 130점 미만이 될 수도 있고, 130점 이상이 될 수도 있는 자료이다.

국어(점) / 영어(점)	40 ^{이상} ~50 ^{미만}	50~60	60~70	70~80	80~90	90~100	합계
90 ^{이상} ~100 ^{미만}					1	1	2
80 ~ 90			1	1	6	1	9
70 ~ 80		1	3	5	2		11
60 ~ 70	1	2	2	1			6
50 ~ 60		1					1
40 ~ 50	1						1
합계	2	4	6	7	9	2	30

따라서 최소한 5명은 두 과목의 성적의 합이 130점 미만이다.

2 STEP 실력 높이기

86~90쪽

- 1 ④ 2 ④ 3 (1) 35% (2) 6.5점 4 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조, 80점
- 5 (1) 12명 (2) 66점 6 풀이 참조 (1) 2명 (2) 1.37 7 (1) 2 (2) 8.6점 (3) 8명 (4) 31명
- 8 (1) 63점 (2) 4명 (3) L 9 80점 10 (1) 양의 상관관계 (2) 24 (3) 83.6점 11 B반

문제 풀이

1 마른 편인 학생은 키에 비해 몸무게가 적게 나가는 학생이다.

따라서 가장 마른 편인 학생은 ④ D이다.

2 ④ 실기 점수와 필기 점수의 합이 70점 이상인 학생의 (실기 점수, 필기 점수)는 (35, 35), (35, 40), (40, 30), (40, 35), (40, 45), (45, 40)으로 6명이다.

⑤ 실기 점수가 25점 미만이면서 필기 점수가 30점 미만인 학생의 (실기 점수, 필기 점수)는 (10, 10), (10, 20), (15, 10), (15, 20), (20, 20)으로 5명이다.

즉, 실기 점수가 25점 이상 또는 필기 점수가 30점 이상인 학생은 $20 - 5 = 15$ (명)이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

3 서술형

(1) 변형 단계 두 과목의 성적의 차가 2점 이상인 학생의 성적을 (수학 점수, 영어 점수)의 순서쌍으로 나타내면

(5, 8), (6, 8), (6, 9), (7, 4), (7, 9), (8, 5), (9, 7)이므로 7명이다.

풀이 단계 $\therefore \frac{7}{20} \times 100 = 35(\%)$

(2) 표현 단계 영어 성적보다 수학 성적이 우수한 학생은 오른쪽 위로 향하는 대각선의 아래쪽에 있는 학생이다.

풀이 단계 $\therefore (\text{평균}) = \frac{4+5+6+7+8+9}{6}$
 $= \frac{39}{6}$
 $= 6.5(\text{점})$

4 (1) 미술 과목의 실기 성적이 위로 올라갈수록 계급값이 커져야 하는데 작아지고 있다. 따라서 올바른 상관표는 다음과 같다.

이론 성적(점) \ 실기 성적(점)	50	60	70	80	90	100	합계
100					1	3	4
90			1	2	6		9
80	1		7	10			18
70		3	2	3			8
60	1						1
합계	2	3	10	15	7	3	40

(2) 위의 상관표에서 어두운 부분은 이론 성적과 실기 성적이 같은 자료이다. 따라서 조건에 맞는 도수분포표는 다음과 같다.

실기 성적(점)	도수(명)	(계급값) × (도수)
100	1	100
90	3	270
80	8	640
70	3	210
60	1	60
합계	16	1280

$$\therefore (\text{평균}) = \frac{1280}{16} = 80(\text{점})$$

5 (1) $3+4+2+3=12$ (명)

(2) 도수분포표를 그려 보면

수학 성적(점)	도수(명)	계급값(점)	(계급값) × (도수)
50 ^{이상} ~60 ^{미만}	3	55	165
60 ~70	3	65	195
70 ~80	4	75	300
합계	10		660

$$\therefore (\text{평균}) = \frac{660}{10} = 66(\text{점})$$

6 상관표를 그려서 구한다.

시력 \ 청력(db)	1.20 ^{이상} ~1.30 ^{미만}	1.30 ~1.40	1.40 ~1.50	1.50 ~1.60	합계
60 ^{이상} ~70 ^{미만}				1	1
50 ~60	1		2		3
40 ~50		4	1		5
30 ~40	1				1
합계	2	4	3	1	10

(1) 시력이 1.40 이상 1.50 미만이고 청력이 50 db 이상 60 db 미만인 학생은 위의 어두운 부분이므로 2명이다.

(2) 도수분포표를 그려 보면

시력	도수(명)	계급값	(계급값) × (도수)
1.30 ^{이상} ~1.40 ^{미만}	4	1.35	5.40
1.40 ~1.50	1	1.45	1.45
합계	5		6.85

$$\therefore (\text{평균}) = \frac{6.85}{5} = 1.37$$

7 서술형

풀이 단계 (1) $E=40-(1+4+5+7+9+4)=10$

$$C=40-(4+9+8+6+4+2)=7$$

$$A=7-2=5 \quad \therefore B=10-(2+5+1)=2$$

(2) $D=9-(3+2+1)=3$ 이므로

$$(\text{평균}) = \frac{7 \times 3 + 8 \times 5 + 9 \times 9 + 10 \times 3}{20} = \frac{172}{20} = 8.6(\text{점})$$

(3) 수학 성적이 6점 미만인 학생이 5명, 과학 성적이 6점 미만인 학생이 6명, 수학 성적과 과학 성적이 동시에 6점 미만인 학생은 3명이므로 $5+6-3=8$ (명)

(4) |(수학 점수)-(과학 점수)|=0인 학생은

$$1+2+3+5+2=13(\text{명})\text{이고,}$$

|수학 점수)-(과학 점수)|=1인 학생은

$$(1+2+3+2+2)+(1+3+2+2)=18(\text{명})$$

이다.

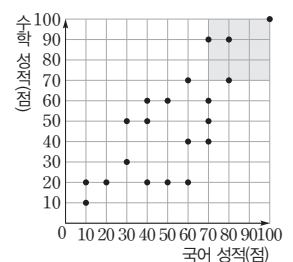
$$\therefore 13+18=31(\text{명})$$

8 (1) 도수분포표를 그려 보면

수학 성적(점)	도수(명)	(성적) × (도수)
100	1	100
90	2	180
70	2	140
60	1	60
50	1	50
40	2	80
20	1	20
합계	10	630

$$\therefore (\text{평균}) = \frac{630}{10} = 63(\text{점})$$

(2) 국어 성적과 수학 성적이 모두 70점 이상인 학생은 오른쪽 그림의 어두운 부분에 있는 학생 4명이다.



- (3) ㄱ. 국어 성적보다 수학 성적이 더 좋은 학생이 8명, 수학 성적보다 국어 성적이 더 좋은 학생이 8명, 국어와 수학 성적이 같은 학생이 4명이므로 국어 성적보다 수학 성적이 좋은 학생이 더 많다고 볼 수 없다.
- ㄴ. 양의 상관관계이므로 수학 성적이 좋은 학생이 대체로 국어 성적도 좋다.
- ㄷ. 국어와 수학 중에서 어느 과목을 더 잘하는지는 도수분포표를 각각 작성하여 평균을 구해 보면 된다. 따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

9 서술형

표현 단계 중간 고사 수학 성적보다 기말 고사 수학 성적이 더 좋은 학생 수는 오른쪽 위로 향하는 대각선의 위쪽에 있는 점의 개수와 같다.

변형 단계 도수분포표로 나타내면

기말고사 수학 성적(점)	60	70	80	90	100	합계
학생 수(명)	1	2	1	2	1	7

풀이 단계 ∴ (평균)

$$= \frac{60 \times 1 + 70 \times 2 + 80 \times 1 + 90 \times 2 + 100 \times 1}{7}$$

$$= \frac{560}{7}$$

$$= 80(\text{점})$$

10 (2) $2 + 11 + E + 4 + 3 + 3 = 30 \quad \therefore E = 7$

$$1 + 2 + B + 3 = 11 \quad \therefore B = 5$$

$$1 + C + 1 = A \quad \therefore A = C + 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$1 + C + 1 + A + 1 = E \quad \therefore A + C = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $A = 3, C = 1$

따라서 $B + A = D$ 에서 $D = 8$

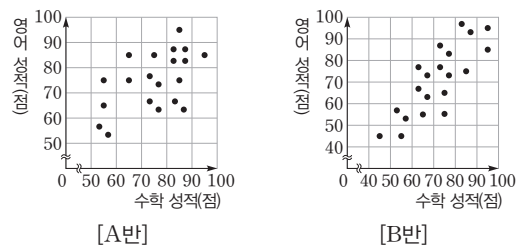
$$\therefore A + B + C + D + E = 24$$

(2) 도수분포표를 그려 보면

수학 성적(점)	도수(명)	계급값(점)	(계급값) × (도수)
90 이상 ~ 100 미만	2	95	190
80 ~ 90	8	85	680
70 ~ 80	4	75	300
합계	14		1170

$$\therefore (\text{평균}) = \frac{1170}{14} = 83.57 \dots \approx 83.6(\text{점})$$

11 A, B반의 산점도를 각각 그려본다. B반의 산점도를 그릴 때 영어와 수학의 축을 바꾸어 그린다.



따라서 A반보다는 B반의 성적 분포가 더 강한 양의 상관관계를 이룬다.

1 (1) 4, 30 (2) 6명 2 8개 3 풀이 참조

문제 풀이

- 1 (1) 중간 고사 성적이 80점인 자료로부터
 $1+(x-1)^2+(x-1)=3x+1$
 $x^2-4x=0, x(x-4)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=4$
 그런데 $x-2>0$ 이므로 $x=4$
 $1+(x-2)+(x-1)^2+1=A \quad \therefore A=13$
 $1+(x-1)+x+2=B \quad \therefore B=10$
 $(x-2)+x+1=C \quad \therefore C=7$
 $\therefore A+B+C=7+10+13=30$
- (2) 중간 고사 성적과 기말 고사 성적이 같은 곳을 연결하면 기울기가 양수인 직선이 나타나고, 주어진 조건을 만족하는 자료는 그 직선의 위쪽에 위치하는 자료이므로 학생 수는
 $1+1+(x-2)+2=x+2=6(\text{명})$

- 2 표의 가로에서 나오는 식은
 $d+a+6=b \quad \dots \textcircled{A}$
 $2+3+e+c+7+4=40 \quad \dots \textcircled{B}$
 표의 세로에서 나오는 식은
 $d+7+1=e \quad \dots \textcircled{C}$
 $a+10+3=c \quad \dots \textcircled{D}$
 $4+b+18+8+1=40 \quad \therefore b=9 \quad \dots \textcircled{E}$
 한편, 턱걸이를 7개 한 학생들의 팔굽혀펴기 개수의 평균은
 $\frac{9d+56+7}{e}=8.1$ 에서
 $9d+63=8.1 \times e \quad \dots \textcircled{F}$
 \textcircled{C} 에서 $e=d+8$ 을 \textcircled{F} 에 대입하면
 $9d+63=8.1(d+8)$
 $0.9d=1.8 \quad \therefore d=2, e=10$
 따라서 \textcircled{A} 에서 $a=1$, \textcircled{D} 에서 $c=14$
 도수분포표를 그려보면
- | 팔굽혀펴기 개수(개) | 도수(명) | (개수)×(도수) |
|-------------|-------|-----------|
| 10 | 1 | 10 |
| 9 | 3 | 27 |
| 8 | 8 | 64 |
| 7 | 3 | 21 |
| 6 | 1 | 6 |
| 합계 | 16 | 128 |
- $\therefore (\text{평균}) = \frac{128}{16} = 8(\text{개})$

- 3 산점도에 나타난 자료의 개수가 18개이므로 2개의 자료를 구하면 된다.
- (i) 두 명의 올해 수학 성적을 x 점, y 점($x \leq y$)이라 놓으면 지난해 수학 성적보다 올해 수학 성적이 좋은 학생들의 올해 수학 성적은 20점, 30점, 40점, 40점, 60점, x 점, y 점이므로 평균은
 $\frac{x+y+190}{7}=50$
 $\therefore x+y=160$
 그런데 찢겨진 부분이 70점 이상 100점 이하이므로 가능한 x, y 의 값은
 $x=70, y=90$ 또는 $x=y=80$ 의 두 가지이다.
- (ii) 두 명의 지난해 수학 성적을 a 점, b 점($a \leq b$)이라 놓으면 지난해 수학 성적보다 올해 수학 성적이 좋은 학생들의 지난해 수학 성적은 10점, 10점, 20점, 30점, 50점, a 점, b 점이므로 평균은
 $\frac{a+b+120}{7}=30$
 $\therefore a+b=90$
 그런데 찢겨진 부분이 20점 이상 70점 이하이므로 가능한 a, b 의 값은
 $a=20, b=70$ 또는 $a=30, b=60$ 또는 $a=40, b=50$ 의 세 가지이다.
- (i), (ii)에서 (올해 수학 성적, 지난해 수학 성적)의 순서쌍을 찾으면
 ① (70, 20), (90, 70)
 ② (70, 70), (90, 20) : 부적합
 ③ (70, 30), (90, 60)
 ④ (70, 60), (90, 30) : 부적합
 ⑤ (70, 40), (90, 50)
 ⑥ (70, 50), (90, 40)
 ⑦ (80, 20), (80, 70) : 부적합
 ⑧ (80, 30), (80, 60)
 ⑨ (80, 40), (80, 50)
 따라서 구하는 자료는 ①, ③, ⑤, ⑥, ⑧, ⑨ 6가지가 가능하다.

- 1 평균 : 95.25 cm, 중앙값 : 94.5 cm, 최빈값 : 95 cm 2 92점 3 6 4 ④
 5 228점 6 ①
 7 (1) A : 5점, B : 5점, C : 5점, D : 5점 (2) A : $\sqrt{3}$ 점, B : $\sqrt{7}$ 점, C : $\sqrt{6}$ 점, D : $\sqrt{8.4}$ 점 (3) A, C, B, D, 풀이 참조
 8 사, 르, 바, 모, 다 9 ④ 10 ① 11 평균 : 34회, 표준편차 : 13.7회 12 7
 13 70 14 ② 15 $x=8, y=7$ 16 ④ 17 ⑤ 18 ④
 19 ⑤ 20 (1) 40% (2) 81점 21 (1) 양의 상관관계 (2) 19명 22 양의 상관관계
 23 (1) 45% (2) 4명 24 양의 상관관계 25 (1) 29 (2) 양의 상관관계 (3) 16대 (4) 12대 (5) 7.1 km/l

문제 풀이

1 주어진 자료를 크기순으로 나열하면
 90 cm, 91 cm, 92 cm, 94 cm, 95 cm, 95 cm, 100 cm,
 105 cm
 이므로
 $(\text{평균}) = \frac{90+91+92+94+95+95+100+105}{8}$
 $= \frac{762}{8} = 95.25(\text{cm})$
 또, 자료의 개수가 짝수이므로 중앙값은 4번째 값 94 cm와
 5번째 값 95 cm의 평균이다.
 $\therefore (\text{중앙값}) = \frac{94+95}{2} = 94.5(\text{cm})$
 주어진 자료에서 95 cm가 2번으로 가장 많이 나왔으므로
 최빈값은 95 cm이다.

2 세 학생 A, B, C의 시험 점수를 각각 a점, b점, c점
 이라 하면
 $\frac{a+b}{2} = 92, \frac{b+c}{2} = 87, \frac{a+c}{2} = 97$
 이므로
 $a+b=184, b+c=174, a+c=194$
 위의 세 식을 변끼리 더하면
 $2(a+b+c) = 552$
 $\therefore a+b+c = 276$
 따라서 A, B, C의 시험 점수의 평균은
 $\frac{a+b+c}{3} = \frac{276}{3} = 92(\text{점})$

3 주어진 자료의 평균이 5이므로
 $\frac{9+x+3+6+10+y+0}{7} = 5$
 $x+y+28 = 35$
 $\therefore x+y = 7$
 또, 주어진 자료의 최빈값이 6이므로 정수 x, y 중 적어도
 하나는 6이어야 한다.

따라서 $x=6, y=1$ 이라 하여 주어진 자료를 크기순으로 나
 열하면
 0, 1, 3, 6, 6, 9, 10
 이므로 중앙값은 4번째 값인 6이다.

4 변량 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 의 평균이 m이므로
 $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} = m$
 $\therefore x_1+x_2+\dots+x_n = mn$
 따라서 변량 $\frac{x_1-a}{b}, \frac{x_2-a}{b}, \dots, \frac{x_n-a}{b}$ 의 평균은
 $\frac{\frac{x_1-a}{b} + \frac{x_2-a}{b} + \dots + \frac{x_n-a}{b}}{n}$
 $= \frac{(x_1+x_2+\dots+x_n) - an}{bn}$
 $= \frac{mn - an}{bn} = \frac{m-a}{b}$

다른 풀이

$x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 의 평균이 m일 때,
 $ax_i + b (i=1, 2, \dots, n)$ 의 평균은 $am + b$ 이므로
 $\frac{x_i - a}{b} (i=1, 2, \dots, n)$ 의 평균은 $\frac{m-a}{b}$ 이다.

5 남학생 수를 x명이라 하면 여학생 수는 2x명이므로
 (여학생의 점수의 총합)
 $= (\text{여학생의 평균 점수}) \times (\text{여학생 수})$
 $= 225 \times 2x = 450x(\text{점})$
 (남학생의 점수의 총합)
 $= (\text{남학생의 평균 점수}) \times (\text{남학생 수})$
 $= 234 \times x = 234x(\text{점})$
 따라서 전체 학생의 평균 점수는
 $\frac{(\text{여학생의 점수의 총합}) + (\text{남학생의 점수의 총합})}{(\text{전체 학생 수})}$
 $= \frac{450x + 234x}{3x} = \frac{684x}{3x} = 228(\text{점})$

6 ①, ②, ③, ④의 평균은 모두 3이고, ⑤의 평균은 4이므로 각각의 분산은 다음과 같다.

$$\textcircled{1} \frac{5(1-3)^2+5(5-3)^2}{10}=4$$

$$\textcircled{2} \frac{3(1-3)^2+3(5-3)^2+4(3-3)^2}{10}=2.4$$

$$\textcircled{3} \frac{5(2-3)^2+5(4-3)^2}{10}=1$$

$$\textcircled{4} \frac{3(2-3)^2+3(4-3)^2+4(3-3)^2}{10}=0.6$$

$$\textcircled{5} \frac{10(4-4)^2}{10}=0$$

따라서 분산이 클수록 분포가 고르지 않으므로 분포가 가장 고르지 않은 것은 ①이다.

다른 풀이

각각의 분산을 구하지 않더라도 직관적으로 볼 때, ①의 변량들이 평균을 중심으로 가장 멀리 흩어져 있으므로 ①의 분포가 가장 고르지 않다.

7 (1) 4명이 맞힌 점수를 크기순으로 각각 나열하면

A : 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8

B : 1, 2, 2, 4, 5, 5, 6, 8, 8, 9

C : 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9

D : 1, 1, 2, 4, 5, 5, 6, 8, 9, 9

자료의 개수가 모두 10개로 짝수이므로 구하는 중앙값은 5번째와 6번째 변량의 평균이다. 따라서 A, B, C, D의 중앙값은 모두 5점이다.

(2) A, B, C, D의 평균이 모두 5점이므로 각각의 편차는

A : -3, -2, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 3

B : -4, -3, -3, -1, 0, 0, 1, 3, 3, 4

C : -4, -3, -2, -1, 0, 0, 1, 2, 3, 4

D : -4, -4, -3, -1, 0, 0, 1, 3, 4, 4

따라서 A, B, C, D의 분산을 각각 구하면

(A의 분산)

$$= \frac{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2 \times 2+0^2 \times 2+1^2 \times 2+2^2+3^2}{10}$$

$$= \frac{30}{10}=3$$

(B의 분산)

$$= \frac{(-4)^2+(-3)^2 \times 2+(-1)^2+0^2 \times 2+1^2+3^2 \times 2+4^2}{10}$$

$$= \frac{70}{10}=7$$

(C의 분산)

$$= \frac{(-4)^2+(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2 \times 2+1^2+2^2+3^2+4^2}{10}$$

$$= \frac{60}{10}=6$$

(D의 분산)

$$= \frac{(-4)^2 \times 2+(-3)^2+(-1)^2+0^2 \times 2+1^2+3^2+4^2 \times 2}{10}$$

$$= \frac{84}{10}=8.4$$

이므로 A, B, C, D의 표준편차는 각각 $\sqrt{3}$ 점, $\sqrt{7}$ 점, $\sqrt{6}$ 점, $\sqrt{8.4}$ 점이다.

(3) 표준편차가 작을수록 분포가 고르므로 점수가 고른 사람부터 차례로 나열하면 A, C, B, D이다.

8 도수분포표에서 표준편차를 구하는 순서는 다음과 같다.

스. 각 계급의 계급값을 구한다.

르. 평균을 구한다.

버. 각 계급의 편차를 구한다.

머. 편차의 제곱의 평균인 분산을 구한다.

디. 분산의 양의 제곱근을 구한다.

따라서 올바른 순서대로 나열하면 스, 르, 버, 머, 디이다.

9 (편차)=(변량)-(평균)에서 (평균)=(변량)-(편차)

이므로

$$\begin{aligned} (\text{평균}) &= (11\text{일의 컴퓨터 이용 시간}) - (11\text{일의 편차}) \\ &= 3 - (-1) = 4(\text{시간}) \end{aligned}$$

또, 편차의 총합은 항상 0이어야 하므로 14일의 컴퓨터 이용 시간의 편차를 x 시간이라 하면

$$(-1)+3+(-4)+x+2=0 \quad \therefore x=0$$

따라서 0점의 컴퓨터 이용 시간의 분산은

$$\frac{(-1)^2+3^2+(-4)^2+0^2+2^2}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\therefore (\text{표준편차}) = \sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{6}(\text{시간})$$

10 연속하는 5개의 정수를 $x-2, x-1, x, x+1, x+2$

(단, x 는 정수)라 하면

$$(\text{평균}) = \frac{(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)}{5}$$

$$= \frac{5x}{5} = x$$

이므로

$$(\text{분산}) = \frac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5}$$

$$= \frac{10}{5} = 2$$

$$\therefore (\text{표준편차}) = \sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{2}$$

다른 풀이

연속하는 5개의 정수를 (0, 1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4, 5), ... 등의 구체적인 수로 정하여 풀어도 된다.

예 0, 1, 2, 3, 4에서

$$(\text{평균}) = \frac{0+1+2+3+4}{5} = 2$$

$$(\text{분산}) = \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = 2$$

$$\therefore (\text{표준편차}) = \sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{2}$$

11

윗몸일으키기 횟수(회)	도수 (명)	계급값 (회)	(계급값) ×(도수)	편차 (회)	(편차) ² ×(도수)
10 ^{이상} ~20 ^{미만}	8	15	120	-19	(-19) ² ×8=2888
20 ~30	12	25	300	-9	(-9) ² ×12=972
30 ~40	0	35	0	1	1 ² ×0=0
40 ~50	16	45	720	11	11 ² ×16=1936
50 ~60	4	55	220	21	21 ² ×4=1764
합계	40		⊖ 1360		⊕ 7560

$$\textcircled{A} \text{에서 } (\text{평균}) = \frac{1360}{40} = 34(\text{회})$$

$$\textcircled{B} \text{에서 } (\text{분산}) = \frac{7560}{40} = 189$$

$$\therefore (\text{표준편차}) = \sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{189} = \sqrt{1.89 \times 100} \\ = 10\sqrt{1.89} = 10 \times 1.37 = 13.7(\text{회})$$

12 $\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = 25$ 이므로

$$a+b+c+d+e+f=150$$

또, $\frac{(a-25)^2 + (b-25)^2 + \dots + (f-25)^2}{6} = 7^2$ 이므로

$$(a-25)^2 + (b-25)^2 + \dots + (f-25)^2 = 294$$

따라서 $a-2, b-2, c-2, d-2, e-2, f-2$ 에 대하여

$$(\text{평균}) = \frac{(a-2) + (b-2) + \dots + (f-2)}{6}$$

$$(\text{평균}) = \frac{(a+b+\dots+f) - 2 \times 6}{6}$$

$$(\text{평균}) = \frac{150 - 12}{6} = 23$$

$$(\text{분산}) = \frac{(a-2-23)^2 + (b-2-23)^2 + \dots + (f-2-23)^2}{6}$$

$$= \frac{(a-25)^2 + (b-25)^2 + \dots + (f-25)^2}{6}$$

$$= \frac{294}{6}$$

$$= 49$$

$$\therefore (\text{표준편차}) = \sqrt{(\text{분산})} = \sqrt{49} = 7$$

다른 풀이

$x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 의 표준편차가 s 일 때,

$ax_i + b (i=1, 2, \dots, n)$ 의 표준편차는 $|a|s$ 이므로 구하는

표준편차는

$$|1| \times 7 = 7$$

13 세 수 x_1, x_2, x_3 의 평균이 8이므로

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 8$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 = 24$$

또, 세 수 x_1, x_2, x_3 의 표준편차가 $\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{(x_1-8)^2 + (x_2-8)^2 + (x_3-8)^2}{3} = (\sqrt{6})^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16(x_1 + x_2 + x_3) + 3 \times 8^2 = 18$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16 \times 24 + 192 = 18$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 210$$

따라서 세 수 x_1^2, x_2^2, x_3^2 의 평균은

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} = \frac{210}{3} = 70$$

14 (가) 각 과목에 대한 (현정이의 성적) - (학급 평균)이

국어는 $76 - 70 = 6$ (점), 수학은 $74 - 56 = 18$ (점), 영어는 $78 - 64 = 14$ (점)이므로 현정이는 다른 과목에 비해 수학 성적이 우수하다고 할 수 있다.

(나) 표준편차가 작을수록 분포가 고르므로 이 학급에서 성적이 가장 고른 과목은 국어라고 할 수 있다.

15 $(\text{평균}) = \frac{16+14+x+10+y}{5} = 11$ 이므로

$$40 + x + y = 55 \quad \therefore x + y = 15 \quad \dots \textcircled{A}$$

(분산)

$$= \frac{(16-11)^2 + (14-11)^2 + (x-11)^2 + (10-11)^2 + (y-11)^2}{5}$$

$$= 12$$

$$\text{이므로 } 5^2 + 3^2 + (x-11)^2 + (-1)^2 + (y-11)^2 = 60$$

$$\therefore (x-11)^2 + (y-11)^2 = 25 \quad \dots \textcircled{B}$$

ⓐ을 y 에 대하여 풀면 $y = 15 - x$

$y = 15 - x$ 를 ⓑ에 대입하면

$$(x-11)^2 + (15-x-11)^2 = 25$$

$$(x-11)^2 + (4-x)^2 = 25$$

$$x^2 - 22x + 121 + x^2 - 8x + 16 = 25$$

$$2x^2 - 30x + 112 = 0, \quad x^2 - 15x + 56 = 0$$

$$(x-7)(x-8) = 0 \quad \therefore x=7 \text{ 또는 } x=8$$

따라서 $x=7$ 이면 $y=8$ 이고, $x=8$ 이면 $y=7$ 이다.

그런데 $x > y$ 이므로 $x=8, y=7$

16 일반적으로 통학 거리가 멀면 버스를 타는 시간도 많다. 즉, 양의 상관관계이다.

17 ①, ② 양의 상관관계

③, ④ 상관관계가 없다.

⑤ 일반적으로 소비가 늘면 대체로 저축은 줄어든다. 즉, 음의 상관관계이다.

18 ①, ②, ⑤ 양의 상관관계

③ 음의 상관관계

따라서 상관관계가 없다고 판단되는 것은 ④이다.

19 E는 일주일 학습 시간은 적지만 성적은 높은 편이다.

20 (1) 순서쌍 (국어 성적, 영어 성적)으로 나타낼 때,

국어 성적이 더 좋은 순서쌍은 12개이므로

$$\frac{12}{30} \times 100 = 40(\%)$$

(2) 국어 성적과 영어 성적의 총점이 140점 이상인 순서쌍

(국어 성적, 영어 성적)은

(100, 90), (90, 100), (90, 90), (90, 80), (90, 70),

(90, 60), (80, 80), (80, 70), (70, 90), (60, 80)

이므로 이들의 영어 성적 분포는

영어 성적(점)	60	70	80	90	100	합계
도수(명)	1	2	3	3	1	10

∴ (평균)

$$= \frac{60 \times 1 + 70 \times 2 + 80 \times 3 + 90 \times 3 + 100 \times 1}{10}$$

$$= \frac{810}{10} = 81(\text{점})$$

21 (1) 연습 시간이 늘어나면 대체적으로 타율이 좋아진다.

따라서 양의 상관관계가 있다.

(2) 구하는 인원은 전체 인원에서 다음 표의 인원을 제외하면 되므로

타율(할)	1 ^{이상} ~1.5 ^{미만}	1.5 ~2	2 ~2.5	2.5 ~3
연습 시간(시간)				
5 ^{이상} ~6 ^{미만}				3
4 ~5	1	2	5	

$$30 - (3 + 1 + 2 + 5) = 19(\text{명})$$

22 x가 증가할 때, y도 증가하므로 양의 상관관계를 이루고 있다.

23 (1) 3학년 때 성적이 향상된 학생의 성적을 나타내는

점은 점 (10, 10), 점 (20, 20), ...을 지나는 직선 위쪽에 있다. 따라서 9명이다.

$$\therefore \frac{9}{20} \times 100 = 45(\%)$$

(2) 전체의 상위 30%는 $20 \times 0.3 = 6(\text{명})$ 이다. 2학년 때 6

등 안에 들었던 학생은 80점 이상이고, 3학년 때 6등 안에 든 학생도 80점 이상이다. 따라서 2학년과 3학년 때 모두 80점 이상인 학생은 4명이다.

24 상관표를 작성해 보면 다음과 같다.

음악 성적(점) 미술 성적(점)	5	6	7	8	9	합계
9				2	1	3
8			2		1	3
7		1	3	2		6
6		2				2
5	1					1
합계	1	3	5	4	2	15

따라서 양의 상관관계가 있다.

25 (1) 세로 칸을 계산하면

$$5 + a + 4 = 15 \quad \therefore a = 6$$

$$3 + b + e = f \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$1 + 2 + c = 4 \quad \therefore c = 1$$

$$1 + 15 + d + 8 + 3 = 40 \quad \therefore d = 13$$

가로 칸을 계산하면

$$4 + a + b + c = d \quad \therefore b = 2 (\because a = 6, c = 1, d = 13)$$

$$2 + 1 + 4 + e = 8 \quad \therefore e = 1$$

따라서 ①에서 $f = 6 (\because b = 2, e = 1)$

$$\therefore a + b + c + d + e + f = 29$$

(2) 다음 상관표에서 나타나듯이 양의 상관관계를 이룬다.

1차(km/l) 2차(km/l)	5	6	7	8	9	합계
9					1	1
8		5	5	3	2	15
7		4	6	2	1	13
6	2	1	4	1		8
5	1	2				3
합계	3	12	15	6	4	40

(3) 위의 상관표에서 어두운 부분의 윗부분에 있는 자료가 문제의 조건을 만족한다.

$$2 + 4 + 5 + 5 = 16 \text{ 즉, } 16\text{대이다.}$$

(4) 위의 상관표에서 붉은 선 안에 있는 자료들이 문제의 조건을 만족한다.

$$5 + 6 + 1 = 12 \text{ 즉, } 12\text{대이다.}$$

(5) 도수분포표를 그려 보면

2차 연비(km/l)	도수(대)	(계급값) × (도수)
8	13	104
7	12	84
6	6	36
5	2	10
합계	33	234

$$\therefore (\text{평균}) = \frac{234}{33} = 7.09\dots \approx 7.1(\text{km/l})$$

경시와 수능에 필수적인 도형 | 부록

98~127쪽

- 1** (1) $\frac{7}{5}$ cm (2) $\frac{84}{25}$ cm² **2** $\frac{84}{125}$ cm **3** $5\sqrt{5}$ cm **4** 244 **5** $\sqrt{5}$ cm
6 4억 2천만 원 **7** $\sqrt{7}$ cm **8** 11 **9** $\sqrt{129}$ cm **10** 90 **11** 풀이 참조
12 $\frac{\sqrt{46}}{2}$ cm **13** 81 **14** 60 **15** $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ cm² **16** $2\sqrt{34}$ cm **17** 21 cm²
18 (1) $\frac{58}{7}$ cm² (2) $2\sqrt{5}$ cm **19** $\frac{14\sqrt{5}}{3}$ cm² **20** $3\sqrt{15}$ cm² **21** (1) $\frac{7}{4}$ cm (2) $\frac{75}{4}$ cm²
22 $6\sqrt{10}$ cm **23** $\sqrt{5}$ cm **24** 4 cm **25** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm **26** $\frac{4\sqrt{30}}{5}$ cm
27 (1) $50\sqrt{3}$ cm² (2) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm **28** $4\sqrt{3}$ cm **29** $\sqrt{6}$ cm² **30** (1) $2\sqrt{2}$ cm² (2) $\frac{\sqrt{14}}{4}$ cm (3) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ cm³
31 $50\sqrt{6}$ cm² **32** $\sqrt{3} : 1$ **33** 풀이 참조 **34** $5\sqrt{2}$ cm **35** (1) $\frac{25\sqrt{11}}{4}$ cm² (2) $\frac{125\sqrt{2}}{2}$ cm³
36 ㉔ **37** $\frac{5\sqrt{11}}{4}$ cm² **38** $48\pi(7\sqrt{6}+12\sqrt{3}+12\sqrt{2}-3)$ cm³ **39** $6\sqrt{66}$ cm³ **40** $40\sqrt{3}$ cm³
41 $36\sqrt{2}$ cm³ **42** $\frac{27\sqrt{11}}{4}$ cm² **43** $\frac{12\sqrt{7}}{7}$ cm **44** $\frac{3500\sqrt{2}}{3}$ cm³ **45** $4\sqrt{3}$ cm **46** 24 cm, 800π cm³
47 $9\sqrt{3}\pi$ cm³ **48** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ **49** $\sqrt{55}$ cm **50** $\frac{3}{2}$ cm **51** 15 cm **52** 45°
53 $\sqrt{65}$ **54** 20 cm **55** $2\sqrt{97}$ cm **56** 10 cm **57** $8\sqrt{2}$ cm **58** $10\sqrt{3}$ cm
59 25 cm **60** (1) $15\sqrt{5}$ cm (2) 5 cm **61** $2\sqrt{13}$ cm **62** 13π cm **63** 50 cm
64 $6\sqrt{5}$ cm **65** (1) 25 cm (2) 2 cm **66** $5\sqrt{13}$ cm **67** $5\sqrt{5}$ cm **68** $\frac{10\sqrt{21}}{3}$ cm
69 $x=3$ 또는 $x=4$ **70** 2 cm **71** $\frac{4}{5}$ cm **72** 3 cm **73** 21 : 4 **74** 6 cm
75 8 cm **76** 3 **77** 6 cm **78** $3\sqrt{2}$ cm **79** $\sqrt{5}$ cm **80** $\frac{16}{3}$ cm
81 36 **82** 4 **83** 2 cm **84** 10 cm **85** $2\sqrt{15}$ cm **86** $\frac{14}{3}$ cm
87 6 cm **88** $4\sqrt{3}$ cm **89** $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm **90** 4 cm **91** $\frac{15}{8}$ cm **92** $\frac{24}{5}$ cm
93 $\frac{32}{5}$ cm **94** 5 cm **95** 7 cm **96** $10(2\sqrt{3}-3)$ cm **97** $2\sqrt{6}$

1 (1) 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$ 는

직각삼각형이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10(\text{cm})$$

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이므로

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm})$$

또, $\overline{AC}^2 = \overline{AH} \times \overline{AB}$ 이므로

$$6^2 = \overline{AH} \times 10 \text{에서}$$

$$\overline{AH} = \frac{18}{5}(\text{cm})$$

$$\therefore \overline{MH} = \overline{AM} - \overline{AH}$$

$$= 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5}(\text{cm})$$

(2) $\overline{AC} \times \overline{BC} = \overline{CH} \times \overline{AB}$ 이므로

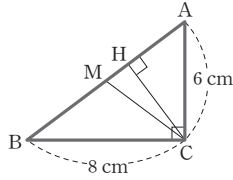
$$6 \times 8 = \overline{CH} \times 10$$

$$\therefore \overline{CH} = \frac{24}{5}(\text{cm})$$

$$\therefore \triangle CHM = \frac{1}{2} \times \overline{MH} \times \overline{CH}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{5} \times \frac{24}{5}$$

$$= \frac{84}{25}(\text{cm}^2)$$



2 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$ 는

직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm})$$

$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AD} \times \overline{BC}$ 이므로

$$3 \times 4 = \overline{AD} \times 5$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{12}{5}(\text{cm})$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC} = (\overline{BM} - \overline{DM}) \times \overline{BC}$$

$$3^2 = \left(\frac{5}{2} - \overline{DM}\right) \times 5$$

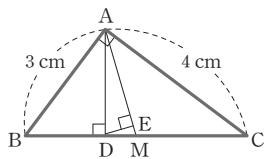
$$\frac{5}{2} - \overline{DM} = \frac{9}{5}$$

$$\therefore \overline{DM} = \frac{5}{2} - \frac{9}{5} = \frac{7}{10}(\text{cm})$$

한편, 점 M은 빗변의 중점이므로 직각삼각형 ABC의 외심이다.

$$\therefore \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \frac{5}{2} \text{cm}$$

또, $\triangle ADM$ 에서



$\overline{DM} \times \overline{DA} = \overline{DE} \times \overline{AM}$ 이므로

$$\frac{7}{10} \times \frac{12}{5} = \overline{DE} \times \frac{5}{2}$$

$$\therefore \overline{DE} = \frac{84}{125}(\text{cm})$$

3 오른쪽 그림에서

$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$

이고, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

이므로

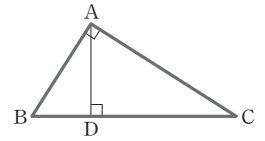
($\triangle ABC$ 의 둘레의 길이)²

= ($\triangle ABD$ 의 둘레의 길이)²

+ ($\triangle ADC$ 의 둘레의 길이)²

$$= 5^2 + 10^2 = 125$$

$$\therefore (\triangle ABC \text{의 둘레의 길이}) = 5\sqrt{5}(\text{cm})$$



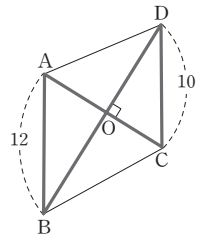
4 오른쪽 그림과 같이 \overline{AD} 와 \overline{BC} 를

각각 그으면 $\square ABCD$ 의 두 대각선이 서로 수직이므로

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$$

$$= 12^2 + 10^2$$

$$= 244$$



5 오른쪽 그림과 같이

$\triangle ABO$ 를 $\triangle DCO'$ 으로 평행

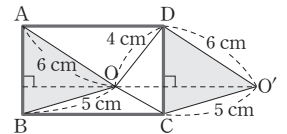
이동하면 $\square DOCO'$ 의 두 대각

선은 서로 수직이므로

$$6^2 + \overline{OC}^2 = 5^2 + 4^2$$

$$\overline{OC}^2 = 5$$

$$\therefore \overline{OC} = \sqrt{5}(\text{cm}) (\because \overline{OC} > 0)$$



6 오른쪽 그림에서 공사비는 거리에 비례하므로

$$\overline{OA} = 3a, \overline{OB} = 4a, \overline{OC} = 5a$$

(단, a는 상수)라 하면

$\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OD}^2$ 이므로

$$(3a)^2 + (5a)^2 = (4a)^2 + \overline{OD}^2$$

$$\overline{OD}^2 = 18a^2$$

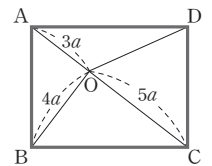
$$\therefore \overline{OD} = 3\sqrt{2}a (\because \overline{OD} > 0)$$

D 도시를 연결하는 데 드는 공사비를 x원이라 하면

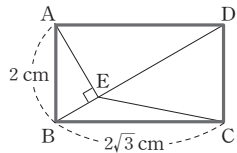
$$3a : 3\sqrt{2}a = 3\sqrt{2}a : x$$

$$\therefore x = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \times 1.4$$

$$= 4\text{억 } 2\text{천만(원)}$$

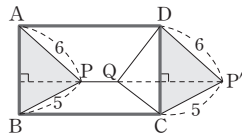


7 오른쪽 그림에서
 $\overline{AD} = \overline{BC} = 2\sqrt{3}$ cm 이므로



$\triangle ABD$ 에서
 $\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2}$
 $= \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ (cm)
 $\triangle ABD \sim \triangle EBA$ 이고 닮음비는
 $\overline{BD} : \overline{BA} = 4 : 2 = 2 : 1$ 이므로
 $\overline{AB} : \overline{EB} = 2 : 1$ 에서
 $2 : \overline{EB} = 2 : 1 \quad \therefore \overline{BE} = 1$ (cm)
 $\triangle ABE$ 에서
 $\overline{AE} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ (cm)
 $\overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{DE}^2$ 이므로
 $(\sqrt{3})^2 + \overline{CE}^2 = 1^2 + 3^2$
 $\overline{CE}^2 = 7$
 $\therefore \overline{CE} = \sqrt{7}$ (cm) ($\because \overline{CE} > 0$)

8 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABP$ 를 $\triangle DCP'$ 으로 평행이동하면

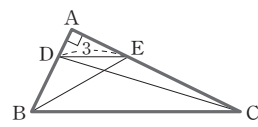


$\square DQCP'$ 의 두 대각선은 서로 수직이므로
 $\overline{DQ}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{DP}^2 + \overline{CQ}^2$
 $\therefore \overline{DQ}^2 - \overline{CQ}^2 = \overline{DP}^2 - \overline{CP}^2$
 $= 6^2 - 5^2 = 11$

9 $\overline{DE}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CD}^2$ 이므로

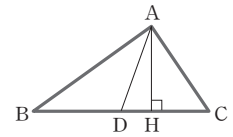
$4^2 + \overline{BC}^2 = 8^2 + 9^2$
 $\overline{BC}^2 = 129$
 $\therefore \overline{BC} = \sqrt{129}$ (cm) ($\because \overline{BC} > 0$)

10 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 이므로



$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 이고,
 $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 2$ 에서 두 삼각형의 닮음비는 1 : 3이다.
 즉, $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$ 이므로
 $1 : 3 = 3 : \overline{BC}$
 $\therefore \overline{BC} = 9$
 $\therefore \overline{CD}^2 + \overline{BE}^2 = (\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2) + (\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2)$
 $= (\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2) + (\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2)$
 $= \overline{DE}^2 + \overline{BC}^2$
 $= 3^2 + 9^2 = 90$

11 오른쪽 그림의 $\triangle ABH$ 에서



$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \\ &= \overline{AH}^2 + (\overline{BD} + \overline{DH})^2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

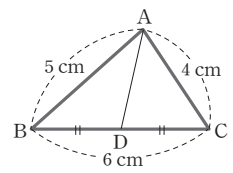
또, $\triangle ACH$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 \\ &= \overline{AH}^2 + (\overline{CD} - \overline{DH})^2 \\ &= \overline{AH}^2 + (\overline{BD} - \overline{DH})^2 \quad (\because \overline{CD} = \overline{BD}) \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

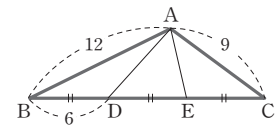
$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= 2(\overline{AH}^2 + \overline{DH}^2 + \overline{BD}^2) \\ &= 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2) \end{aligned} \quad (\because \triangle ADH \text{에서 } \overline{AD}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{DH}^2)$$

12 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$ 에서



$\overline{BD} = \overline{CD}$ 이므로 중선 정리에 의해
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)$
 $5^2 + 4^2 = 2(\overline{AD}^2 + 3^2)$
 $41 = 2\overline{AD}^2 + 18$
 $2\overline{AD}^2 = 23$
 $\overline{AD}^2 = \frac{23}{2}$
 $\therefore \overline{AD} = \frac{\sqrt{46}}{2}$ (cm) ($\because \overline{AD} > 0$)

13 오른쪽 그림에서 $\overline{BD} = \overline{DE}$



이므로 $\triangle ABE$ 에서 중선 정리를 이용하면
 $\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)$
 $12^2 + \overline{AE}^2 = 2(\overline{AD}^2 + 6^2)$
 $\therefore 2\overline{AD}^2 - \overline{AE}^2 = 72 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

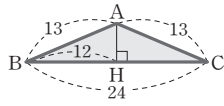
또, $\overline{DE} = \overline{CE}$ 이므로 $\triangle ADC$ 에서 중선 정리를 이용하면

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 &= 2(\overline{AE}^2 + \overline{DE}^2) \\ \overline{AD}^2 + 9^2 &= 2(\overline{AE}^2 + 6^2) \\ \therefore 2\overline{AE}^2 - \overline{AD}^2 &= 9 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

따라서 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 = 81$$

14 오른쪽 그림과 같이 세 변의 길이가 13, 13, 24인 $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로



$$\overline{BH} = \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 24 = 12$$

$\triangle ABH$ 에서

$$\overline{AH} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 24 \times 5 = 60$$

다른 풀이

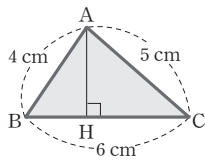
삼각형의 세 변의 길이가 13, 13, 24이므로 헤론의 공식을 이용하면

$$s = \frac{13 + 13 + 24}{2} = 25$$

따라서 삼각형의 넓이 S는

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{25(25-13)(25-13)(25-24)} \\ &= \sqrt{25 \times 12 \times 12 \times 1} \\ &= 60 \end{aligned}$$

15 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle ABH$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$ 이고

$\triangle ACH$ 에서

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 \text{이므로}$$

$$\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2$$

이때 $\overline{BH} = x$ cm라 하면

$$\overline{CH} = (6-x)$$
 cm이므로

$$4^2 - x^2 = 5^2 - (6-x)^2$$

$$16 - x^2 = 25 - 36 + 12x - x^2$$

$$27 = 12x$$

$$\therefore x = \frac{9}{4}$$

$\triangle ABH$ 에서

$$4^2 = \overline{AH}^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2, \overline{AH}^2 = \frac{175}{16}$$

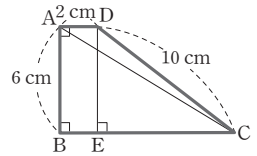
$$\therefore \overline{AH} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \text{ (cm)} \quad (\because \overline{AH} > 0)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{5\sqrt{7}}{4}$$

$$= \frac{15\sqrt{7}}{4} \text{ (cm}^2\text{)}$$

16 오른쪽 그림의 점 D에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 E라 하면



$$\overline{BE} = \overline{AD} = 2 \text{ cm,}$$

$$\overline{DE} = \overline{AB} = 6 \text{ cm}$$

$\triangle CDE$ 에서

$$\overline{CE} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{DE}^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC}$$

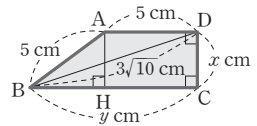
$$= 2 + 8 = 10 \text{ (cm)}$$

따라서 $\triangle ABC$ 에서

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + 10^2} = 2\sqrt{34} \text{ (cm)}$$

17 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{CD} = x$ cm, $\overline{BC} = y$ cm라 하면



$$\overline{AH} = \overline{CD} = x \text{ cm,}$$

$$\overline{BH} = \overline{BC} - \overline{CH}$$

$$= \overline{BC} - \overline{AD} = y - 5 \text{ (cm)}$$

$\triangle BCD$ 에서

$$x^2 + y^2 = 90 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle ABH$ 에서

$$5^2 = (y-5)^2 + x^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $x^2 = 90 - y^2$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$25 = y^2 - 10y + 25 + 90 - y^2, 10y = 90$$

$$\therefore y = 9$$

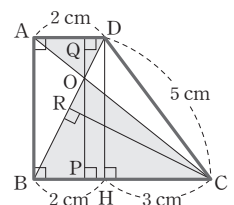
$\textcircled{1}$ 에 $y = 9$ 를 대입하면 $x^2 + 9^2 = 90$

$$x^2 = 9 \quad \therefore x = 3$$

따라서 $\square ABCD$ 의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times (5+9) \times 3 = 21 \text{ (cm}^2\text{)}$$

18 (1) 오른쪽 그림의 점 D에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{BH} = \overline{AD} = 2 \text{ cm,}$$

$$\overline{CH} = 5 - 2 = 3 \text{ (cm)}$$

$\triangle DHC$ 에서

$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{CH}^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (cm)}$$

점 O에서 \overline{BC} , \overline{AD} 에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면

$$\overline{OP} + \overline{OQ} = \overline{DH} = 4 \text{ cm}$$

$\triangle OAD \sim \triangle OCB$ 이고 닮음비가 2 : 5 이므로

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \frac{5}{5+2} \times \overline{DH} \\ &= \frac{5}{7} \times 4 = \frac{20}{7} (\text{cm}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{OQ} &= \frac{2}{5+2} \times \overline{DH} \\ &= \frac{2}{7} \times 4 = \frac{8}{7} (\text{cm}) \end{aligned}$$

\therefore (어두운 부분의 넓이)

$$\begin{aligned} &= \triangle OBC + \triangle OAD \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{OP} + \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{OQ} \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{20}{7} + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{8}{7} \\ &= \frac{50}{7} + \frac{8}{7} = \frac{58}{7} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

(2) $\triangle ABD$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} (\text{cm}) \end{aligned}$$

점 C에서 \overline{BD} 에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\triangle CDB$ 는 이등변삼각형이므로

$$\overline{BR} = \overline{DR} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5} (\text{cm})$$

따라서 $\triangle BCR$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{CR} &= \sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= 2\sqrt{5} (\text{cm}) \end{aligned}$$

19 오른쪽 그림의 점 A와 점 D에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, $\overline{BP} = x \text{ cm}$ 라 하면

$$\overline{PQ} = \overline{AD} = 2 \text{ cm},$$

$$\overline{QC} = (3-x) \text{ cm} \text{ 이므로}$$

$\triangle ABP$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{BP}^2 \\ &= 3^2 - x^2 \\ &= 9 - x^2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

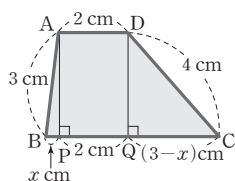
$\triangle DQC$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{DQ}^2 &= \overline{DC}^2 - \overline{QC}^2 \\ &= 4^2 - (3-x)^2 \\ &= 7 + 6x - x^2 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{DQ}^2$ 이므로

$$9 - x^2 = 7 + 6x - x^2, \quad 6x = 2$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}$$

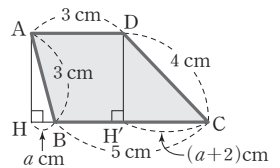


$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{9 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3} (\text{cm})$$

따라서 $\square ABCD$ 의 넓이 S는

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times (\overline{AD} + \overline{BC}) \times \overline{AP} \\ &= \frac{1}{2} \times (2+5) \times \frac{4\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{14}{3} \sqrt{5} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

20 오른쪽 그림의 두 점 A와 D에서 \overline{BC} 와 그 연장선에 내린 수선의 발을 각각 H와 H'이라 하고, $\overline{HB} = a \text{ cm}$ 라 하면



$$\begin{aligned} \overline{CH'} &= \overline{BC} - \overline{BH'} \\ &= 5 - (3-a) \\ &= a+2 (\text{cm}) \end{aligned}$$

$\triangle AHB$ 에서

$$\overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2 = 3^2 - a^2$$

$\triangle DH'C$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{DH'}^2 &= \overline{DC}^2 - \overline{CH'}^2 \\ &= 4^2 - (a+2)^2 \end{aligned}$$

$$\overline{AH} = \overline{DH'} \text{ 이므로 } \overline{AH}^2 = \overline{DH'}^2$$

$$9 - a^2 = 16 - (a+2)^2$$

$$9 = 16 - 4a - 4$$

$$4a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \sqrt{3^2 - a^2} = \sqrt{9 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{135}{16}} = \frac{3\sqrt{15}}{4} (\text{cm}) \end{aligned}$$

이므로 구하는 $\square ABCD$ 의 넓이 S는

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times (\overline{AD} + \overline{BC}) \times \overline{AH} \\ &= \frac{1}{2} \times (3+5) \times \frac{3\sqrt{15}}{4} \\ &= 3\sqrt{15} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

21 (1) 오른쪽 그림에서

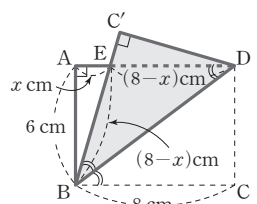
$\angle EBD = \angle CBD$ (접은 각)

$\angle CBD = \angle EDB$ (엇각)

$$\therefore \angle EBD = \angle EDB$$

즉, $\triangle EBD$ 는 $\overline{EB} = \overline{ED}$ 인

이등변삼각형이다.



$\overline{AE} = x$ cm라 하면

$\overline{EB} = \overline{ED} = (8-x)$ cm이므로 $\triangle BAE$ 에서

$$\overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2, (8-x)^2 = x^2 + 6^2$$

$$16x = 28 \quad \therefore x = \frac{7}{4}(\text{cm})$$

따라서 \overline{AE} 의 길이는 $\frac{7}{4}$ cm이다.

$$\begin{aligned} (2) \triangle EBD &= \frac{1}{2} \times \overline{ED} \times \overline{AB} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(8 - \frac{7}{4}\right) \times 6 \\ &= \frac{75}{4}(\text{cm}^2) \end{aligned}$$

22 오른쪽 그림과 같이

$$\overline{EB'} = \overline{EB} = 18 - 8 = 10(\text{cm})$$

이므로 $\triangle AEB'$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{AB'} &= \sqrt{\overline{EB'}^2 - \overline{AE}^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 8^2} \\ &= 6(\text{cm}) \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{B'D} = 18 - 6 = 12(\text{cm})$$

$\triangle EB'A \sim \triangle B'GD$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AB'} : \overline{DG} = \overline{EA} : \overline{B'D} \text{에서}$$

$$6 : \overline{DG} = 8 : 12 = 2 : 3$$

$$2 \overline{DG} = 18$$

$$\therefore \overline{DG} = 9(\text{cm})$$

또, $\overline{EB'} : \overline{B'G} = 2 : 3$ 에서

$$10 : \overline{B'G} = 2 : 3$$

$$2 \overline{B'G} = 30$$

$$\therefore \overline{B'G} = 15(\text{cm})$$

또, $\triangle B'DG \sim \triangle FC'G$ (AA 닮음)이고

$$\begin{aligned} \overline{GC'} &= \overline{B'C'} - \overline{B'G} \\ &= 18 - 15 = 3(\text{cm}) \end{aligned}$$

이므로

$$\overline{GD} : \overline{GC'} = \overline{DB'} : \overline{C'F} \text{에서}$$

$$9 : 3 = 12 : \overline{C'F}$$

$$9 \overline{C'F} = 36$$

$$\therefore \overline{C'F} = 4(\text{cm})$$

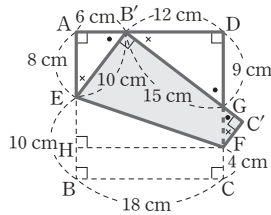
점 F에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle EHF$ 에서

$$\overline{EH} = \overline{EB} - \overline{HB} = 10 - 4 = 6(\text{cm}),$$

$$\overline{FH} = \overline{BC} = 18 \text{ cm}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{EF} &= \sqrt{\overline{EH}^2 + \overline{FH}^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 18^2} \\ &= 6\sqrt{10}(\text{cm}) \end{aligned}$$



23 오른쪽 그림에서

$\overline{BC'} = \overline{BC} = 5$ cm이고

$\overline{AB} = 4$ cm이므로

$\triangle ABC'$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{AC'} &= \sqrt{\overline{BC'}^2 - \overline{AB}^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 4^2} = 3(\text{cm}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{C'D} &= \overline{AD} - \overline{AC'} \\ &= 5 - 3 = 2(\text{cm}) \end{aligned}$$

$\overline{DE} = x$ cm라 하면

$$\overline{EC'} = \overline{EC} = (4-x) \text{ cm}$$

$$\triangle C'ED \text{에서 } \overline{EC'}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{C'D}^2$$

$$(4-x)^2 = x^2 + 2^2$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

$$\overline{DE} = \frac{3}{2} \text{ cm이므로}$$

$$\overline{C'E} = 4 - x = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}(\text{cm})$$

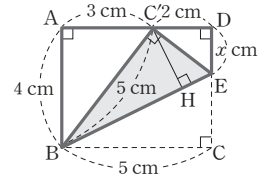
한편, $\triangle C'BE$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{BE} &= \sqrt{\overline{BC'}^2 + \overline{C'E}^2} \\ &= \sqrt{5^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{2}(\text{cm}) \end{aligned}$$

이때 $\overline{BC'} \times \overline{C'E} = \overline{BE} \times \overline{C'H}$ 이므로

$$5 \times \frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \times \overline{C'H}$$

$$\therefore \overline{C'H} = \sqrt{5}(\text{cm})$$



24 오른쪽 그림에서

$\overline{BC} = a$ cm라 하면

$\triangle QBC \cong \triangle QBP$ 이므로

$$\overline{BP} = \overline{BC} = a \text{ cm}$$

또한,

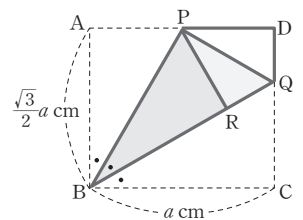
$$\begin{aligned} \angle ABP &= \angle PBQ \\ &= \angle QBC \\ &= \frac{1}{3} \times 90^\circ = 30^\circ \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \overline{BA} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \text{ cm}$$

$$a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = 8\sqrt{3} \text{에서}$$

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

$$\therefore \overline{BC} = 4 \text{ cm}$$



25 $\triangle EFG$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{EG} &= \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm}) \end{aligned}$$

\overline{AG} 는 직육면체의 대각선이므로

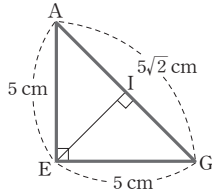
$$\begin{aligned} \overline{AG} &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \\ &= 5\sqrt{2}(\text{cm}) \end{aligned}$$

오른쪽 그림과 같이 $\triangle AEG$ 에서

$$\overline{AE} \times \overline{EG} = \overline{AG} \times \overline{EI}$$

$$5 \times 5 = 5\sqrt{2} \times \overline{EI}$$

$$\therefore \overline{EI} = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\text{cm})$$



26 오른쪽 그림의 $\triangle HEG$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{EG} &= \sqrt{\overline{EH}^2 + \overline{HG}^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} \\ &= 2\sqrt{5}(\text{cm}) \end{aligned}$$

$$\text{또, } \overline{HE} \times \overline{HG} = \overline{EG} \times \overline{HI}$$

이므로

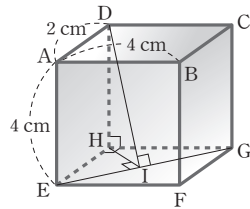
$$2 \times 4 = 2\sqrt{5} \times \overline{HI}$$

$$\therefore \overline{HI} = \frac{4\sqrt{5}}{5}(\text{cm})$$

따라서 $\triangle DHI$ 에서

$$\angle DHI = 90^\circ \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{DI} &= \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{HI}^2} \\ &= \sqrt{4^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{96}{5}} = \frac{4\sqrt{30}}{5}(\text{cm}) \end{aligned}$$



27 (1) $\overline{BD} = \overline{BG} = \overline{DG}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{10^2 + 10^2} \\ &= 10\sqrt{2}(\text{cm}) \end{aligned}$$

이므로 한 변의 길이가

$10\sqrt{2}$ cm인 정삼각형

BDG의 넓이 S는

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (10\sqrt{2})^2 = 50\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

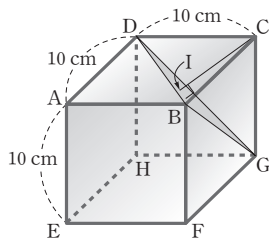
(2) 사면체 C - BDG의 부피 V는

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times \overline{CG}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 10\right) \times 10$$

$$= \frac{1}{3} \times 50 \times 10$$

$$= \frac{500}{3}(\text{cm}^3)$$



$$\begin{aligned} \text{또, } V &= \frac{1}{3} \times \triangle BDG \times \overline{CI} \\ &= \frac{1}{3} \times 50\sqrt{3} \times \overline{CI} \end{aligned}$$

$$\frac{50}{3} \sqrt{3} \times \overline{CI} = \frac{500}{3}$$

$$\therefore \overline{CI} = \frac{10\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$$

28 오른쪽 그림과 같이 \overline{DQ} ,

\overline{AE} , \overline{BP} 의 연장선은 한 점 R에서 만나고, $\triangle REQ \sim \triangle RAD$ 이므로

$$\overline{EQ} = \frac{1}{2} \overline{AD} \text{이고}$$

$$\overline{AE} = \overline{ER}, \overline{DQ} = \overline{QR}$$

따라서 $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{AR} = 12$ cm,

$\overline{BD} = \overline{DR} = \overline{BR} = 12\sqrt{2}$ cm가 되므로 사면체 A - BDR의 부피를 V라 하고, 점 A에서 $\triangle BDR$ 에 내린 수선의 길이를 h cm라 하면

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle ABD \times \overline{AR}$$

$$= \frac{1}{3} \times \triangle BDR \times h$$

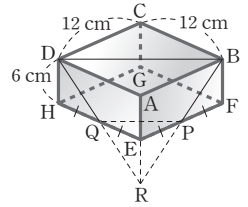
이때 $\triangle BDR$ 는 한 변의 길이가 $12\sqrt{2}$ cm인 정삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (12\sqrt{2})^2 = 72\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 12 \times 12\right) \times 12 = \frac{1}{3} \times 72\sqrt{3} \times h$$

$$\therefore h = 4\sqrt{3}$$

따라서 수선의 길이는 $4\sqrt{3}$ cm이다.



29 $\triangle APD$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{PD}^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}(\text{cm}) \end{aligned}$$

$\triangle CGP$ 에서

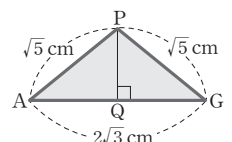
$$\begin{aligned} \overline{PG} &= \sqrt{\overline{PC}^2 + \overline{CG}^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}(\text{cm}) \end{aligned}$$

또, \overline{AG} 는 직육면체의 대각선이므로

$$\begin{aligned} \overline{AG} &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{3}(\text{cm}) \end{aligned}$$

오른쪽 그림과 같이 $\triangle PAG$ 는 이등변삼각형이므로 점 P에서 \overline{AG} 에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$$\overline{AQ} = \overline{GQ} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}(\text{cm})$$



△PAQ에서

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{\overline{PA}^2 - \overline{AQ}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}(\text{cm}) \end{aligned}$$

따라서 △PAG의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}(\text{cm}^2)$$

30 (1) 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} \\ &= 2(\text{cm}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{GB} = \overline{GD} &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} \\ &= 3(\text{cm}) \end{aligned}$$

이므로 헤론의 공식을 이용하면

$$s = \frac{2+3+3}{2} = 4 \text{이므로}$$

△BGD의 넓이 S는

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{4(4-2)(4-3)(4-3)} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2}(\text{cm}^2) \end{aligned}$$

(2) 점 C에서 △BGD에 내린 수선의 길이를 h cm라 하면 사면체 C-BGD의 부피는

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times \overline{GC} &= \frac{1}{3} \times \triangle BGD \times h \\ \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \right) \times \sqrt{7} &= \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times h \\ \therefore h &= \frac{\sqrt{14}}{4} \end{aligned}$$

따라서 수선의 길이는 $\frac{\sqrt{14}}{4}$ cm이다.

(3) (사면체 E-BGD의 부피)

= (직육면체의 부피)

- (사면체 C-BGD의 부피)

- (사면체 A-BDE의 부피)

- (사면체 F-BEG의 부피)

- (사면체 H-DEG의 부피)

= (직육면체의 부피) - 4 × (사면체 C-BGD의 부피)

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7}$$

$$= 2\sqrt{7} - \frac{4\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{3}(\text{cm}^3)$$

31 \overline{AG} 는 정육면체의 대각선이므로

$$\overline{AG} = \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2} = 10\sqrt{3}(\text{cm})$$

$$\overline{MN} = \overline{FH} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}(\text{cm})$$

□AMGN은 마름모이므로 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{MN}$$

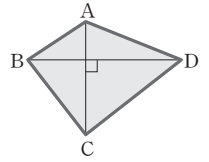
$$= \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 10\sqrt{2} = 50\sqrt{6}(\text{cm}^2)$$

참고

대각선이 서로 수직인 사각형의 넓이

S는

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD}$$



32 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 정사면체

B-DEG의 겹넓이 S는

$$S = 4 \times (\text{한 변의 길이가 } \sqrt{2}a \text{인 정삼각형의 넓이})$$

$$= 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2a^2 \right)$$

$$= 2\sqrt{3}a^2$$

또, 정육면체의 겹넓이는 $6a^2$ 이므로 겹넓이의 비는

$$6a^2 : 2\sqrt{3}a^2 = 3 : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 1$$

33 오른쪽 그림의 꼭짓점 A에서

밀면 BCD에 내린 수선의 발을 H

라 하고 \overline{DH} 의 연장선이 \overline{BC} 와 만

나는 점을 M이라 하면 점 H는

△BCD의 무게중심이므로

$$\overline{DH} : \overline{HM} = 2 : 1$$

또, $\overline{BM} = \overline{MC}$ 이므로 \overline{DM} 은 △BCD의 높이가 되어

$$\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\therefore \overline{DH} = \frac{2}{3}\overline{DM}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

△AHD에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DH}^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

따라서 사면체 A-BCD의 부피 V는

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle BCD \times \overline{AH}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

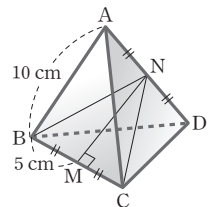
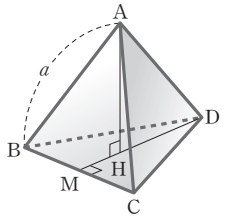
34 오른쪽 그림과 같이 △NBC는

$\overline{NB} = \overline{NC}$ 인 이등변삼각형이므로

$\overline{NM} \perp \overline{BC}$ 이다.

이때 \overline{CN} 과 \overline{BN} 은 각각 정삼각형

ACD와 ABD의 높이이므로



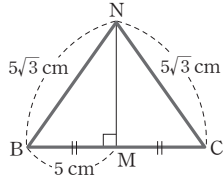
$$\overline{NC} = \overline{NB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10$$

$$= 5\sqrt{3}(\text{cm})$$

또, $\triangle NBM$ 에서

$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm}) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \sqrt{\overline{BN}^2 - \overline{BM}^2} \\ &= \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - 5^2} \\ &= \sqrt{75 - 25} \\ &= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}(\text{cm}) \end{aligned}$$



35 (1) $\triangle ABD$ 에서 점 M, N은 각각 \overline{AB} , \overline{AD} 의 중점이므로 삼각형의 중점 연결 정리에 의해

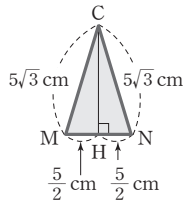
$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \frac{1}{2} \overline{BD} \\ &= \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm}) \end{aligned}$$

\overline{CM} 과 \overline{CN} 은 한 변의 길이가 10 cm인 정삼각형의 높이이므로

$$\overline{CM} = \overline{CN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3}(\text{cm})$$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 \overline{MN} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned} \triangle CMH \text{에서} \\ \overline{CH} &= \sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{MH}^2} \\ &= \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \frac{5}{2}\sqrt{11}(\text{cm}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore \triangle CMN &= \frac{1}{2} \times \overline{MN} \times \overline{CH} \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5\sqrt{11}}{2} \\ &= \frac{25\sqrt{11}}{4}(\text{cm}^2) \end{aligned}$$

(2) 점 C에서 $\triangle ABD$ 에 내린 수선의 길이를 h cm라 하면 (사각뿔 C-MBDN의 부피)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \times \square\text{MBDN} \times h \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\triangle\text{ABD} \times \frac{3}{4}\right) \times h \\ &= \left(\frac{1}{3} \times \triangle\text{ABD} \times h\right) \times \frac{3}{4} \\ &= (\text{사면체 A-BCD의 부피}) \times \frac{3}{4} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{12} \times 10^3\right) \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{125\sqrt{2}}{2}(\text{cm}^3) \end{aligned}$$

36 오른쪽 그림과 같이 구의 중심 O는 점 A에서 $\triangle BCD$ 에 내린 수선 AH 위에 있다. 또, 점 H는 $\triangle BCD$ 의 무게중심이므로

$$\begin{aligned} \overline{DH} &= \frac{2}{3} \times \overline{DE} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 9 \\ &= 3\sqrt{3}(\text{cm}) \end{aligned}$$

$\triangle AHD$ 는 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DH}^2} \\ &= \sqrt{9^2 - (3\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{54} = 3\sqrt{6}(\text{cm}) \end{aligned}$$

정사면체가 구에 내접하려면 $\overline{OA} = \overline{OD}$ 이어야 한다.

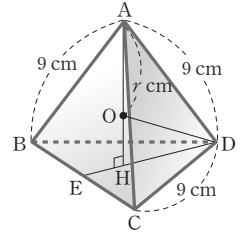
그런데 $\triangle OHD$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{OH}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{OD}^2$$

구의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$\begin{aligned} (3\sqrt{6} - r)^2 + (3\sqrt{3})^2 &= r^2 \\ 54 - 6\sqrt{6}r + r^2 + 27 &= r^2 \\ 6\sqrt{6}r &= 81 \\ \therefore r &= \frac{9\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

따라서 구의 반지름의 길이는 $\frac{9}{4}\sqrt{6}$ cm이다.



37 오른쪽 그림과 같이

$$\overline{CF} = 2 \text{ cm}, \overline{CG} = 1 \text{ cm},$$

$$\angle C = 60^\circ \text{ 이므로}$$

$$\overline{FG} \perp \overline{CD} \text{ 이고 } \overline{FG} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

세 점 E, F, G를 지나는 평면과

\overline{BD} 가 만나는 점을 H라 하면

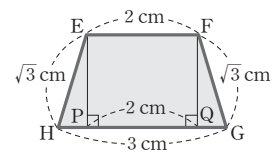
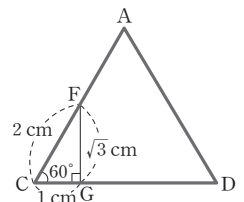
$$\overline{EF} \parallel \overline{GH}$$

$\triangle DBC \sim \triangle DHG$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{GH} &= \frac{3}{4} \overline{BC} \\ &= \frac{3}{4} \times 4 = 3(\text{cm}) \end{aligned}$$

단면을 그려 보면 오른쪽 그림과 같으므로 두 점 E, F에서 \overline{HG} 에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면

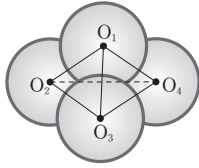
$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \overline{EF} = 2 \text{ cm} \\ \overline{HP} &= \overline{GQ} = \frac{1}{2}(\overline{HG} - \overline{PQ}) \\ &= \frac{1}{2}(3 - 2) = \frac{1}{2}(\text{cm}) \end{aligned}$$



△EHP에서

$$\begin{aligned} \overline{EP} &= \sqrt{\overline{EH}^2 - \overline{HP}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2} (\text{cm}) \\ \therefore \square\text{EHGF} &= \frac{1}{2}(\overline{EF} + \overline{HG}) \times \overline{EP} \\ &= \frac{1}{2}(2+3) \times \frac{\sqrt{11}}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{11}}{4} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

38 수면의 최소 높이는
(구 O_1 의 반지름의 길이)
+ (사면체 $O_1-O_2O_3O_4$ 의 높이)
+ (구 O_3 의 반지름의 길이)



$$= 6 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \times 12\right) + 6$$

$$= 4\sqrt{6} + 12$$

$$= 4(\sqrt{6} + 3) (\text{cm})$$

또, 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$\begin{aligned} \overline{O_2H} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 \\ &= 6\sqrt{3} (\text{cm}) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \overline{AH} - \overline{AO} \\ &= (6\sqrt{3} + 6) - r (\text{cm}) \end{aligned}$$

$\overline{OO_3} = (r - 6)$ cm, $\overline{O_3H} = 6$ cm이므로

△ OO_3H 에서

$$(r - 6)^2 = (6\sqrt{3} + 6 - r)^2 + 6^2$$

$$2 \times 6\sqrt{3}(6 - r) + (6\sqrt{3})^2 + 6^2 = 0$$

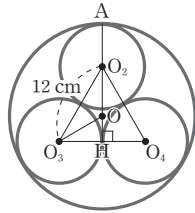
$$\therefore r = 6 + 4\sqrt{3}$$

따라서 필요한 최소의 물의 부피 V 는

$V = (\text{최소 높이의 원기둥의 부피}) - 4 \times (\text{구의 부피})$

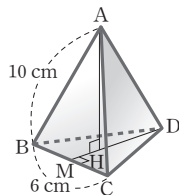
$$= \pi(6 + 4\sqrt{3})^2 \times 4(\sqrt{6} + 3) - 4 \times \frac{4}{3}\pi \times 6^3$$

$$= 48\pi(7\sqrt{6} + 12\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - 3) (\text{cm}^3)$$



39 오른쪽 그림의 꼭짓점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하고 \overline{DH} 의 연장선이 \overline{BC} 와 만나는 점을 M이라 하면 점 H는 △BCD의 무게중심이므로 $\overline{DH} : \overline{HM} = 2 : 1$

이때 \overline{DM} 은 △BCD의 높이이므로



$$\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} (\text{cm})$$

$$\therefore \overline{DH} = \frac{2}{3} \overline{DM}$$

$$= \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} (\text{cm})$$

△AHD에서

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DH}^2} \\ &= \sqrt{10^2 - (2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{88} = 2\sqrt{22} (\text{cm}) \end{aligned}$$

따라서 구하는 부피 V 는

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle\text{BCD} \times \overline{AH}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2\right) \times 2\sqrt{22} \\ &= 6\sqrt{66} (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

40 오른쪽 그림과 같이 사면체를 만들

어 \overline{BC} 의 중점을 H라 하면 점 H는

△ABC의 외심이므로

$$\overline{AH} = \overline{BH} = \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 10 = 5 (\text{cm})$$

△DCB에서

$$\overline{DH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3} (\text{cm})$$

즉, △DAH에서 $\overline{DA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{DH}^2$ 이므로 $\overline{AH} \perp \overline{DH}$

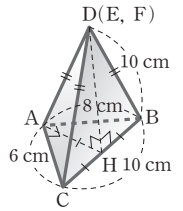
따라서 \overline{DH} 는 사면체 D-ABC의 높이이다.

∴ (사면체 D-ABC의 부피)

$$= \frac{1}{3} \times \triangle\text{ABC} \times \overline{DH}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 6\right) \times 5\sqrt{3}$$

$$= 40\sqrt{3} (\text{cm}^3)$$



41 오른쪽 그림의 △BCD에서

$$\overline{BD} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} (\text{cm})$$

점 A에서 밑면에 내린 수선의 발

H는 \overline{BD} 와 \overline{CE} 의 교점이므로

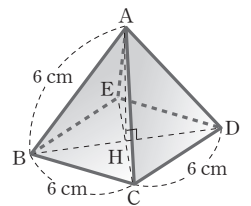
$$\overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{2} (\text{cm})$$

△ABH에서

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} \\ &= \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} \\ &= 3\sqrt{2} (\text{cm}) \end{aligned}$$



따라서 구하는 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \square BCDE \times \overline{AH} \\ &= \frac{1}{3} \times 6^2 \times 3\sqrt{2} \\ &= 36\sqrt{2}(\text{cm}^3) \end{aligned}$$

42 오른쪽 그림에서 $\overline{BP} = \overline{CQ}$ 이고 $\triangle AED$ 에서 삼각형의 중점 연결 정리에 의하여

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{ED} = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\text{cm})$$

$$\overline{PQ} \parallel \overline{ED} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\square EBCD$ 에서

$$\overline{ED} \parallel \overline{BC} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

따라서 $\square PBCQ$ 는 등변사다리꼴이다.

또, $\triangle ACD$ 와 $\triangle ABE$ 는 한 변의 길이가 6 cm인 정삼각형이므로

$$\overline{CQ} = \overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}(\text{cm})$$

또한, 점 P, Q에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면

$$\overline{HH'} = \overline{PQ} = 3 \text{ cm}$$

$$\overline{BH} = \overline{CH'} = \frac{1}{2} \times (6 - 3)$$

$$= \frac{3}{2}(\text{cm})$$

$\triangle PBH$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{PH} &= \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{BH}^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{11}}{2}(\text{cm}) \end{aligned}$$

$$\therefore \square PBCQ = \frac{1}{2} \times (\overline{PQ} + \overline{BC}) \times \overline{PH}$$

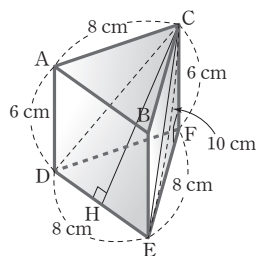
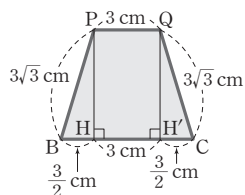
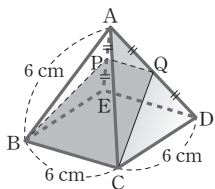
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times (3 + 6) \times \frac{3\sqrt{11}}{2} \\ &= \frac{27\sqrt{11}}{4}(\text{cm}^2) \end{aligned}$$

43 오른쪽 그림의 $\triangle CEF$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{CE} &= \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{CF}^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 6^2} \\ &= 10(\text{cm}) \end{aligned}$$

$\triangle CDF$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \sqrt{\overline{DF}^2 + \overline{CF}^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10(\text{cm}) \end{aligned}$$



점 C에서 \overline{DE} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{DH} = \overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{DE}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 = 4(\text{cm})$$

$\triangle CHE$ 에서

$$\overline{CH} = \sqrt{10^2 - 4^2} = 2\sqrt{21}(\text{cm})$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle CDE &= \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{21} \\ &= 8\sqrt{21}(\text{cm}^2) \end{aligned}$$

따라서 점 F에서 $\triangle CDE$ 에 내린 수선의 길이를 h cm라 하면 사면체 F-CDE의 부피는

$$\frac{1}{3} \times \triangle CDE \times h = \frac{1}{3} \times \triangle DEF \times \overline{CF}$$

$$\frac{1}{3} \times 8\sqrt{21} \times h = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2\right) \times 6$$

$$\therefore h = \frac{12\sqrt{7}}{7}$$

따라서 수선의 길이는 $\frac{12\sqrt{7}}{7}$ cm이다.

44 사각뿔대의 옆면의 모서리의 연장선을 그어 뿔로 만들면 오른쪽 그림과 같다.

두 점 E, F에서 \overline{AB} 에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면

$$\overline{AP} = \overline{QB} = \frac{1}{2} \overline{AE}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm})$$

$$\overline{PQ} = \overline{EF} = 10 \text{ cm}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$$

$$= 5 + 10 + 5 = 20(\text{cm})$$

$\triangle OEF \sim \triangle OAB$ 이므로

$$\overline{OE} : \overline{OA} = \overline{EF} : \overline{AB} = 10 : 20 = 1 : 2 \text{에서}$$

$$\overline{OA} = 2\overline{OE}$$

또, $\overline{OA} = \overline{OE} + 10$ 이므로

$$\overline{OE} + 10 = 2\overline{OE} \quad \therefore \overline{OE} = 10(\text{cm})$$

$$\therefore \overline{OA} = 10 + 10 = 20(\text{cm})$$

$\square ABCD$ 는 한 변의 길이가 20 cm인 정사각형이므로

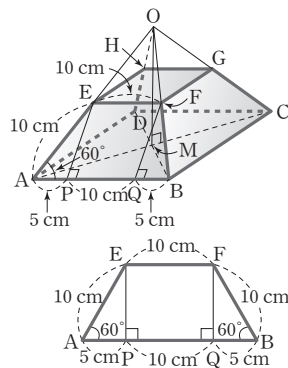
$$\overline{AC} = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2}(\text{cm})$$

$\triangle OAM$ 에서

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 20\sqrt{2} = 10\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{OM} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AM}^2} \\ &= \sqrt{20^2 - (10\sqrt{2})^2} \\ &= 10\sqrt{2}(\text{cm}) \end{aligned}$$



따라서 사각뿔 O-ABCD의 부피 V' 은

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{3} \times \square ABCD \times \overline{OM} \\ &= \frac{1}{3} \times 20^2 \times 10\sqrt{2} \\ &= \frac{4000\sqrt{2}}{3} (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

또, 사각뿔 O-EFGH의 부피 V'' 은

$$\begin{aligned} V'' &= \frac{1}{3} \times \square EFGH \times \left(\frac{1}{2}\overline{OM}\right) \\ &= \frac{1}{3} \times 10^2 \times 5\sqrt{2} \\ &= \frac{500\sqrt{2}}{3} (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

따라서 구하는 사각뿔대의 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \frac{4000\sqrt{2}}{3} - \frac{500\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{3500\sqrt{2}}{3} (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

45 오른쪽 그림의 정삼각형

ACE의 한 변의 길이를 x cm

라 하면

$$\overline{BC} = \sqrt{x^2 - 16} (\text{cm})$$

$$\overline{CD} = \sqrt{x^2 - 36} (\text{cm})$$

또, 점 A에서 \overline{DE} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{DH} = \overline{AB} = 4 \text{ cm} \text{ 이므로}$$

$$\overline{EH} = \overline{DE} - \overline{DH}$$

$$= 6 - 4 = 2 (\text{cm})$$

$\triangle AHE$ 에서

$$\overline{AH} = \overline{BD} = \sqrt{x^2 - 4} (\text{cm})$$

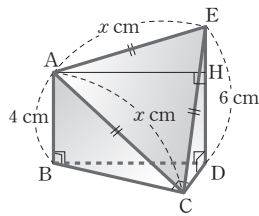
따라서 $\triangle BCD$ 에서

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$$

$$x^2 - 4 = (x^2 - 16) + (x^2 - 36)$$

$$x^2 = 48 \quad \therefore x = 4\sqrt{3} (\because x > 0)$$

따라서 정삼각형 ACE의 한 변의 길이는 $4\sqrt{3}$ cm이다.



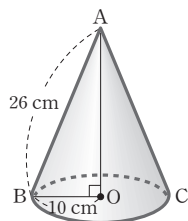
46 오른쪽 그림에서 원뿔의 높이 \overline{AO}

는

$$\begin{aligned} \overline{AO} &= \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2} \\ &= \sqrt{26^2 - 10^2} \\ &= 24 (\text{cm}) \end{aligned}$$

또, 구하는 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times (\text{밑면의 넓이}) \times \overline{AO} \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times 24 \\ &= 800\pi (\text{cm}^3) \end{aligned}$$



47 오른쪽 그림에서 (전개도의 중심각의 크기)

$$= \frac{\overline{PC}}{\overline{OC}} \times 360^\circ$$

$$\text{즉, } 180^\circ = \frac{\overline{PC}}{6} \times 360^\circ$$

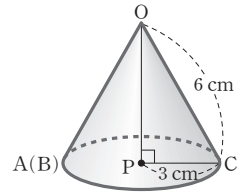
$$\therefore \overline{PC} = 3 (\text{cm})$$

$\triangle OPC$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{PC}^2} \\ &= \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} (\text{cm}) \end{aligned}$$

따라서 원뿔의 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times (\text{밑면의 넓이}) \times \overline{OP} \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3\sqrt{3} \\ &= 9\sqrt{3}\pi (\text{cm}^3) \end{aligned}$$



48 (전개도의 중심각의 크기)

$$= \frac{(\text{밑면의 반지름의 길이})}{(\text{모선의 길이})} \times 360^\circ \text{ 이므로}$$

A로 만든 원뿔에서

$$240^\circ = \frac{(\text{밑면의 반지름의 길이})}{15} \times 360^\circ$$

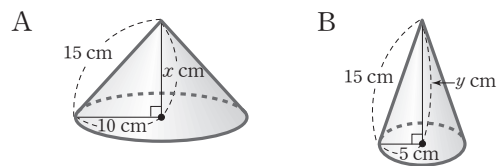
$$(\text{밑면의 반지름의 길이}) = 10 (\text{cm})$$

B로 만든 원뿔에서

$$120^\circ = \frac{(\text{밑면의 반지름의 길이})}{15} \times 360^\circ$$

$$(\text{밑면의 반지름의 길이}) = 5 (\text{cm})$$

따라서 두 고깔은 아래 그림과 같은 원뿔 모양이 된다.



그러므로 각 원뿔의 높이를 구하면

$$x = \sqrt{15^2 - 10^2} = 5\sqrt{5}$$

$$y = \sqrt{15^2 - 5^2} = 10\sqrt{2}$$

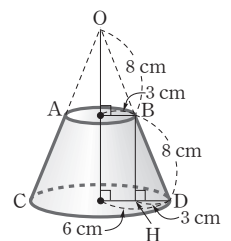
$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

49 오른쪽 그림의 $\triangle OAB$ 와

$\triangle OCD$ 의 닮음비가 1 : 2이므로 윗면의 반지름의 길이는 3 cm이다.

점 B에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle BHD$ 에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{BH} = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55} (\text{cm})$$



50 오른쪽 그림의 $\triangle OAH$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{cm}) \end{aligned}$$

$\triangle OO'P \sim \triangle OAH$ 이므로

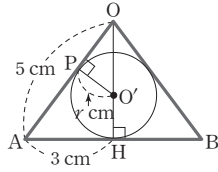
$\overline{O'P} = r$ cm라 하면

$\overline{OO'} : \overline{OA} = \overline{O'P} : \overline{AH}$ 에서

$$(4-r) : 5 = r : 3, 5r = 12 - 3r$$

$$8r = 12 \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

따라서 구의 반지름의 길이는 $\frac{3}{2}$ cm이다.



51 오른쪽 그림과 같이 점 A

를 \overline{CD} 에 대하여 대칭이동한

점을 A' 이라 하면

$\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

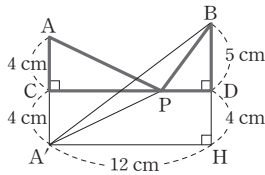
$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$ 가 되고

그 최솟값은 $\overline{A'B}$ 의 길이이다.

점 A' 에서 \overline{BD} 의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle A'HB$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{A'B} &= \sqrt{\overline{A'H}^2 + \overline{BH}^2} \\ &= \sqrt{12^2 + 9^2} = 15(\text{cm}) \end{aligned}$$



52 오른쪽 그림과 같이 점 A를 \overline{BD}

에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라

하면 $\overline{AP} = \overline{A'P}$

$\overline{AP} + \overline{PC} = \overline{A'P} + \overline{PC}$ 가 되고 그

최솟값은 $\overline{A'C}$ 의 길이이다.

한편, 점 A' 에서 \overline{CD} 의 연장선에 내

린 수선의 발을 H라 하고

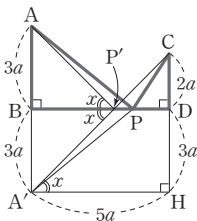
$\angle AP'B = \angle BP'A' = \angle P'A'H = \angle x$ 라 하면

$\overline{A'H} = \overline{BD} = 5a$,

$\overline{CH} = \overline{CD} + \overline{DH} = 2a + 3a = 5a$

이므로 $\triangle A'HC$ 는 직각이등변삼각형이 된다.

따라서 $\angle x = 45^\circ$ 이다.



53 오른쪽 그림과 같이 점 A를

x 축에 대하여 대칭이동한 점

$A'(-1, -2)$ 에서

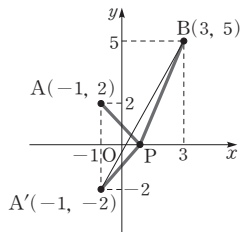
$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA'} + \overline{PB}$

$\geq \overline{A'B}$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은

$\overline{A'B}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{A'B} &= \sqrt{\{3 - (-1)\}^2 + \{5 - (-2)\}^2} \\ &= \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65} \end{aligned}$$

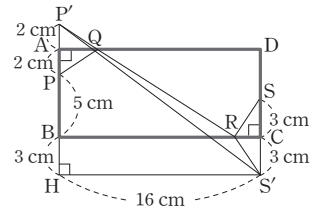


54 다음 그림과 같이 점 P와 점 S를 \overline{AD} , \overline{BC} 에 대하여

대칭이동한 점을 각각 P' , S' 이라 하면

$\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} = \overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RS'}$

이고 그 최솟값은 $\overline{P'S'}$ 의 길이이다.



점 S' 에서 \overline{AB} 의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle P'HS'$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{P'S'} &= \sqrt{\overline{P'H}^2 + \overline{HS'}^2} \\ &= \sqrt{12^2 + 16^2} = 20(\text{cm}) \end{aligned}$$

55 오른쪽 그림과 같이 점 D

와 점 B를 각각 \overline{AB} 와 \overline{CD} 에

대하여 대칭이동한 점을 각각

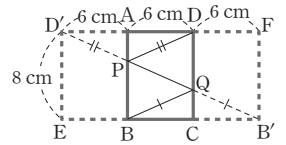
D' , B' 이라 하면 구하는 길이는

$\overline{DP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{D'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$

이므로 최솟값은 두 점 D' 과 B' 을 직선으로 연결한 선분의

길이이다. 즉,

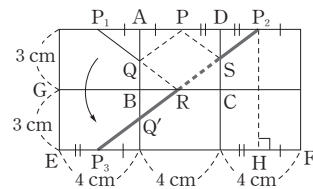
$$\begin{aligned} \overline{D'B'} &= \sqrt{\overline{D'E}^2 + \overline{EB'}^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 18^2} \\ &= \sqrt{388} \\ &= 2\sqrt{97}(\text{cm}) \end{aligned}$$



56 다음 그림과 같이 $\square ABCD$ 와 합동인 직사각형을 작

도하여 점 P를 \overline{AB} 와 \overline{DC} 에 대하여 대칭이동한 점을 각각

P_1 , P_2 라 하자.



$\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{P_1Q} + \overline{QR}$, $\overline{PS} + \overline{SR} = \overline{P_2S} + \overline{SR}$

다시 두 점 P_1 , Q 를 \overline{GB} 에 대하여 대칭이동한 점을 각각

P_3 , Q' 이라 하면

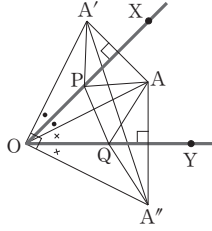
$\overline{P_1Q} + \overline{QR} = \overline{P_3Q'} + \overline{Q'R}$ 가 되어 $\square PQRS$ 의 둘레의 길이의

최솟값은 $\overline{P_2P_3}$ 의 길이가 된다.

점 P_2 에서 \overline{EF} 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned} \overline{P_2P_3} &= \sqrt{\overline{P_3H}^2 + \overline{P_2H}^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10(\text{cm}) \end{aligned}$$

57 점 A를 \overrightarrow{OX} , \overrightarrow{OY} 에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A', A''이라 하면



$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} \\ = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''}$$

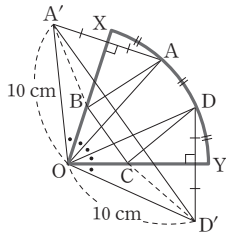
이므로 그 최솟값은 $\overline{A'A''}$ 의 길이이다.

$$\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''} = 8 \text{ cm 이고,} \\ \angle A'OX = \angle AOX, \angle A''OY = \angle AOY \text{에서} \\ \angle A'OA'' = 2(\angle AOX + \angle AOY) \\ = 2 \times 45^\circ \\ = 90^\circ$$

이므로 $\triangle A'OA''$ 에서

$$\overline{A'A''} = \sqrt{\overline{OA'}^2 + \overline{OA''}^2} \\ = \sqrt{8^2 + 8^2} \\ = 8\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

58 오른쪽 그림과 같이 점 A와 D를 \overrightarrow{OX} , \overrightarrow{OY} 에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A', D'이라 하면

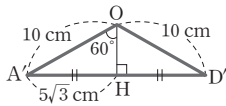


$$\overline{OA'} = \overline{OA} = 10 \text{ cm,} \\ \overline{OD'} = \overline{OD} = 10 \text{ cm 이고,} \\ \angle A'OX = \angle XOA = \angle AOD \\ = \angle DOY = \angle D'OY \\ = \frac{1}{3} \times 72^\circ \\ = 24^\circ$$

$$\therefore \angle A'OD' = 24^\circ \times 5 = 120^\circ \\ \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CD'} \geq \overline{A'D'}$$

즉, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ 의 최솟값은 $\overline{A'D'}$ 의 길이이다.

$\triangle OA'D'$ 은 이등변삼각형이므로 점 O에서 $\overline{A'D'}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

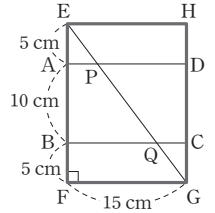


$$\angle A'OH = \angle D'OH \\ = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

따라서 $\triangle OA'H$ 에서

$$\overline{OA'} : \overline{A'H} = 2 : \sqrt{3} \text{ 이므로} \\ 10 : \overline{A'H} = 2 : \sqrt{3}, 2\overline{A'H} = 10\sqrt{3} \\ \therefore \overline{A'H} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)} \\ \therefore \overline{A'D'} = 2\overline{A'H} \\ = 2 \times 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

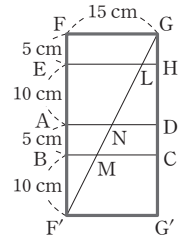
59 선이 지나가는 면을 펼치면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 최단 거리 \overline{EG} 는

$$\overline{EG} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2} \\ = \sqrt{20^2 + 15^2} \\ = 25 \text{ (cm)}$$

60 (1) 선이 지나가는 면을 펼쳐서 전개도를 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 최단 거리는 $\overline{F'G'}$ 이고,

$$\triangle GF'G' \text{에서} \\ \overline{F'G'} = \sqrt{\overline{GG'}^2 + \overline{F'G'}^2} \\ = \sqrt{30^2 + 15^2} \\ = 15\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

(2) $\triangle F'MB \sim \triangle F'GF$ 에서

$$\overline{F'B} : \overline{F'F} = \overline{BM} : \overline{FG} \text{ 이므로} \\ 10 : 30 = \overline{BM} : 15 \\ 30\overline{BM} = 150 \\ \therefore \overline{BM} = 5 \text{ (cm)}$$

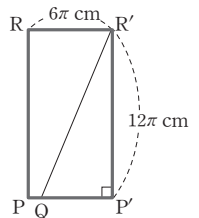
61 구하는 최단 거리는 다음과 같이 두 가지 중에서

(i) $\overline{AG} = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58} \text{ (cm)}$

(ii) $\overline{AG} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ (cm)}$

따라서 구하는 최단 거리는 $2\sqrt{13} \text{ cm}$ 이다.

62 원기둥의 옆면의 전개도를 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.



원기둥의 밑면의 둘레의 길이는 $2\pi \times 3 = 6\pi \text{ (cm)}$

이므로 $\overline{RR'} = \overline{PP'} = 6\pi \text{ cm}$

또, $\overline{PQ} = 2\pi \times 3 \times \frac{60}{360} = \pi \text{ (cm)}$

$\therefore \overline{QP'} = 6\pi - \pi = 5\pi \text{ (cm)}$

따라서 구하는 최단 길이는 $\overline{QR'}$ 이므로 $\triangle R'QP'$ 에서

$$\begin{aligned}\overline{QR'} &= \sqrt{\overline{QP'}^2 + \overline{R'P'}^2} \\ &= \sqrt{(5\pi)^2 + (12\pi)^2} \\ &= 13\pi(\text{cm})\end{aligned}$$

63 오른쪽 그림과 같이 옆면의 전개도를 그리면

$$\overline{BB'} = 2\pi \times \frac{10}{\pi} = 20(\text{cm})$$

두 바퀴 감은 실의 최단 길이는

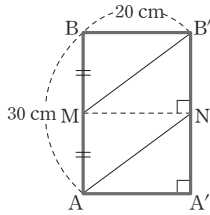
$\overline{MB'} + \overline{AN}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{MB'} &= \sqrt{\overline{BB'}^2 + \overline{BM}^2} \\ &= \sqrt{20^2 + 15^2} \\ &= 25(\text{cm})\end{aligned}$$

$$\overline{AN} = \overline{MB'} = 25 \text{ cm}$$

따라서 구하는 실의 최단 길이는

$$25 + 25 = 50(\text{cm})$$



64 주어진 도형의 옆면의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 중심각의 크기를 $\angle x$ 라 하면

$$\angle x = \angle BAB' = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} \times 360^\circ$$

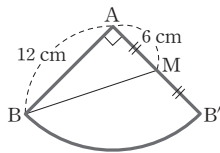
$$= \frac{3}{12} \times 360^\circ$$

$$= 90^\circ$$

따라서 구하는 최단 길이는 \overline{BM} 이므로

$\triangle ABM$ 에서

$$\begin{aligned}\overline{BM} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AM}^2} \\ &= \sqrt{12^2 + 6^2} \\ &= 6\sqrt{5}(\text{cm})\end{aligned}$$



65 (1) 원뿔대를 연장하여 원뿔을 만들면 오른쪽 그림과 같다.

$$\overline{PB} : \overline{QA} = 1 : 2 \text{이므로}$$

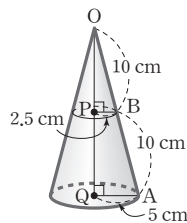
$$\overline{OB} = \overline{AB} = 10 \text{ cm}$$

원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴의

중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\theta = \frac{\overline{QA}}{\overline{OA}} \times 360^\circ$$

$$= \frac{5}{20} \times 360^\circ = 90^\circ$$

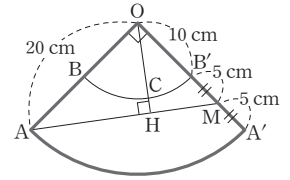


즉, 감긴 실의 최단 길이는

오른쪽 그림의 \overline{AM} 이다.

$\triangle OAM$ 에서

$$\begin{aligned}\overline{AM} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OM}^2} \\ &= \sqrt{20^2 + 15^2} \\ &= 25(\text{cm})\end{aligned}$$



(2) 구하는 최단 거리는 \overline{CH} 이므로 $\triangle OAM$ 에서

$$\overline{OA} \times \overline{OM} = \overline{AM} \times \overline{OH}$$

$$20 \times 15 = 25 \times \overline{OH}$$

$$\therefore \overline{OH} = 12(\text{cm})$$

$$\therefore \overline{CH} = \overline{OH} - \overline{OC}$$

$$= 12 - 10$$

$$= 2(\text{cm})$$

66 주어진 정사면체의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 구하는 최단 길이는 \overline{BM} 이다.

\overline{BD} 는 한 변의 길이가 20 cm인 정삼각형의 높이이므로

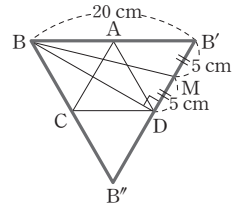
$$\overline{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20$$

$$= 10\sqrt{3}(\text{cm})$$

$$\text{또, } \overline{DM} = \overline{B'M} = \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm})$$

$\triangle BDM$ 에서

$$\begin{aligned}\overline{BM} &= \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DM}^2} \\ &= \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + 5^2} \\ &= 5\sqrt{13}(\text{cm})\end{aligned}$$

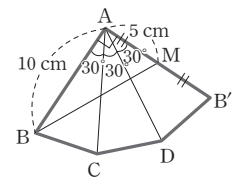


67 전개도를 그려 보면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 최단 길이는 \overline{BM} 이다.

$\angle BAB' = 30^\circ \times 3 = 90^\circ$ 이므로

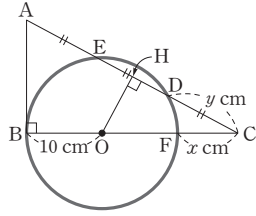
$\triangle ABM$ 에서

$$\begin{aligned}\overline{BM} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AM}^2} \\ &= \sqrt{10^2 + 5^2} \\ &= 5\sqrt{5}(\text{cm})\end{aligned}$$



68 주어진 정팔면체의 전개도를 그려 보면 다음 그림과 같으므로 구하는 최단 거리는 \overline{PQ} 이다.

75 $\overline{CF} = x$ cm, $\overline{CD} = y$ cm라 하면 $\overline{CF} \times \overline{CB} = \overline{CD} \times \overline{CE}$ 에서 $x(x+20) = y \times 2y$ ㉠



점 O에서 \overline{DE} 에 내린 수선의 발을 H라 하면 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

$$\overline{DH} = \overline{EH} = \frac{y}{2}$$

$$\therefore \overline{CH} = \overline{CD} + \overline{DH}$$

$$= y + \frac{y}{2} = \frac{3}{2}y(\text{cm})$$

$\triangle COH$ 와 $\triangle CAB$ 에서

$\angle CHO = \angle CBA = 90^\circ$, $\angle C$ 는 공통이므로

$\triangle COH \sim \triangle CAB$ (AA 닮음)

$\overline{CO} : \overline{CA} = \overline{CH} : \overline{CB}$ 에서

$$(x+10) : 3y = \frac{3}{2}y : (x+20)$$

$$\therefore (x+10)(x+20) = \frac{9}{2}y^2 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{x+10}{x} = \frac{9}{4} \left(\because x+20 = \frac{2y^2}{x} \right)$$

$$9x = 4(x+10), 5x = 40 \quad \therefore x = 8$$

따라서 \overline{CF} 의 길이는 8 cm이다.

76 $\overline{EA} \times \overline{EC} = \overline{EB} \times \overline{ED}$ 에서

$$\overline{EA} \times 6 = 9 \times 2$$

$$\therefore \overline{EA} = 3(\text{cm})$$

$\overline{PB}^2 = \overline{PA} \times \overline{PC}$ 에서

$$6^2 = x(x+3+6)$$

$$x^2 + 9x - 36 = 0$$

$$(x-3)(x+12) = 0$$

$$\therefore x = 3 (\because x > 0)$$

77 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

$$\overline{GD} = \overline{GC} = 3 \text{ cm}$$

$\overline{PE}^2 = \overline{PD} \times \overline{PC}$ 에서

$$\overline{PE}^2 = 2 \times (2+3+3) = 16$$

$$\therefore \overline{PE} = 4(\text{cm}) (\because \overline{PE} > 0)$$

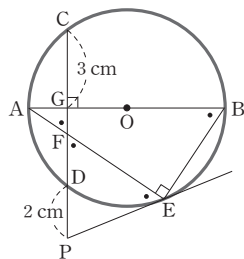
\overline{BE} 를 그으면

$\triangle AGF$ 와 $\triangle AEB$ 에서

$\angle AGF = \angle AEB = 90^\circ$, $\angle A$ 는 공통이므로

$\triangle AGF \sim \triangle AEB$ (AA 닮음)

$$\therefore \angle AFG = \angle ABE$$



또, $\angle PFE = \angle AFG$ (맞꼭지각),

$\angle PEA = \angle ABE$ (접선과 현이 이루는 각)이므로

$$\angle PFE = \angle PEF$$

따라서 $\triangle PEF$ 는 이등변삼각형이므로

$$\overline{PF} = \overline{PE} = 4 \text{ cm}$$

$$\therefore \overline{DF} = \overline{PF} - \overline{PD}$$

$$= 4 - 2 = 2(\text{cm})$$

$$\therefore \overline{PE} + \overline{DF} = 4 + 2 = 6(\text{cm})$$

78 오른쪽 그림과 같이 \overline{OC} 를 그으면 $\angle AOD = \angle OCA$

$\triangle AOC$ 는 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle OAC = \angle OCA$

$\therefore \angle AOD = \angle OAC$

따라서 $\triangle DAO$ 는 이등변삼각형이므로

$$\overline{AD} = \overline{OD} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\overline{AO}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$ 에서

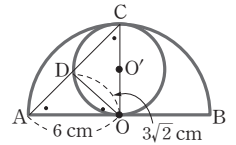
$$6^2 = 3\sqrt{2} \times \overline{AC}$$

$$\therefore \overline{AC} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$\therefore \overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD}$$

$$= 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{2}(\text{cm})$$



다른 풀이

$\triangle AOC$ 에서 $\angle AOC = 90^\circ$ 이므로

$$\overline{AC} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\therefore \overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD}$$

$$= 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{2}(\text{cm})$$

79 $\overline{CA}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$ 에서

$$\overline{CA}^2 = 2(2+8) = 20$$

$$\therefore \overline{CA} = 2\sqrt{5}(\text{cm}) (\because \overline{CA} > 0)$$

\overline{AD} 를 그으면 $\angle ADB = 90^\circ$ 이고

$\overline{AE} = \overline{ED}$ 이므로

$$\angle EAD = \angle EDA$$

$$\therefore \angle EDC = 90^\circ - \angle EDA$$

$$= 90^\circ - \angle EAD$$

$$= \angle ECD$$

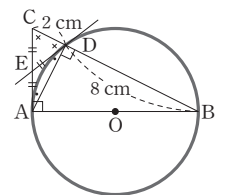
즉, $\triangle EDC$ 는 이등변삼각형이므로

$$\overline{ED} = \overline{EC}$$

따라서 $\overline{EA} = \overline{ED} = \overline{EC}$ 이므로

$$\overline{DE} = \overline{AE} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}(\text{cm})$$



86 오른쪽 그림과 같이 \overline{MB} , \overline{BQ}

를 그으면

$$\overline{MB} = \overline{MA} = 8 \text{ cm}$$

$$\angle MAB = \angle MBA$$

$\triangle PBM$ 과 $\triangle BQM$ 에서

$$\angle PBM = 180^\circ - \angle MBA$$

$$= 180^\circ - \angle MAB$$

한편, $\square AMQB$ 는 원에 내접하므로

$$\angle BQM = 180^\circ - \angle MAB$$

$$\therefore \angle PBM = \angle BQM$$

또, $\angle BMP$ 는 공통이므로

$$\triangle PBM \sim \triangle BQM \text{ (AA 닮음)}$$

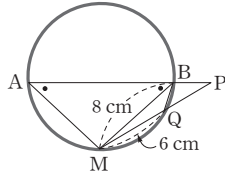
따라서 $\overline{PM} : \overline{BM} = \overline{BM} : \overline{QM}$ 이므로

$$\overline{PM} : 8 = 8 : 6, 6\overline{PM} = 64$$

$$\therefore \overline{PM} = \frac{32}{3} \text{ (cm)}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \overline{PM} - \overline{MQ}$$

$$= \frac{32}{3} - 6 = \frac{14}{3} \text{ (cm)}$$



87 각의 이등분선의 정리에 의해

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}$$

$$8 : 6 = \overline{BP} : (7 - \overline{BP})$$

$$8(7 - \overline{BP}) = 6\overline{BP}$$

$$14\overline{BP} = 56$$

$$\therefore \overline{BP} = 4 \text{ (cm)}, \overline{CP} = 3 \text{ (cm)}$$

또, 원에서의 비례 관계에 의해

$$\overline{PA} \times \overline{PQ} = \overline{PB} \times \overline{PC}$$

$$\overline{PA} \times \overline{PQ} = 4 \times 3 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AP} \times \overline{AQ}$$

$$8 \times 6 = \overline{AP} \times \overline{AQ}$$

$$\therefore \overline{AP} \times \overline{AQ} = 48 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\overline{AP} \times \overline{AQ} = \overline{AP}(\overline{AP} + \overline{PQ})$$

$$= \overline{AP}^2 + \overline{AP} \times \overline{PQ}$$

$$= \overline{AP}^2 + 12 = 48$$

$$\overline{AP}^2 = 36$$

$$\therefore \overline{AP} = 6 \text{ (cm)} (\because \overline{AP} > 0)$$

88 $\overline{PB} = \overline{PC}$ 이고, $\overline{PA} \times \overline{PQ} = \overline{PB} \times \overline{PC}$ 이므로

$$6 \times 2 = \overline{PB}^2$$

$$\therefore \overline{PB} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)} (\because \overline{PB} > 0)$$

$$\therefore \overline{BC} = 2\overline{PB} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

89 $\triangle ABH$ 에서

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 8^2}$$

$$= 4\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

\overline{AO} 의 연장선이 원 O와 만나는 점

을 P라 하고 \overline{BP} 를 그으면

$\triangle ABP$ 와 $\triangle AHD$ 에서

$$\angle APB = \angle ADH \text{ (}\widehat{AB}\text{에 대한 원주각)},$$

$$\angle ABP = \angle AHD = 90^\circ \text{ (반원에 대한 원주각)이므로}$$

$$\triangle ABP \sim \triangle AHD \text{ (AA 닮음)}$$

$$\overline{AB} : \overline{AH} = \overline{AP} : \overline{AD}$$

$$4\sqrt{5} : 4 = \overline{AP} : 5$$

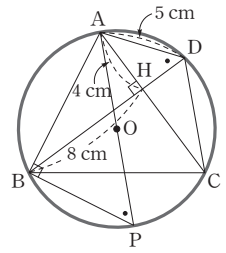
$$4\overline{AP} = 20\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AP} = 5\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

따라서 원 O의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AP} = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{5}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{2} \text{ (cm)}$$



90 오른쪽 그림과 같이 $\angle A$ 의 이

등분선은 작은 원의 중심 O와 점 T

를 지난다.

또, \overline{PO} 와 \overline{BT} 를 그으면

$\triangle APO$ 와 $\triangle ABT$ 에서

$$\angle APO = \angle ABT = 90^\circ,$$

$\angle A$ 는 공통이므로

$$\triangle APO \sim \triangle ABT \text{ (AA 닮음)}$$

$$\overline{AT} = \overline{AO} + \overline{OT} = \overline{AO} + \overline{OP}$$

$$\overline{AO} : \overline{OP} = 2 : 1 \text{ 이므로}$$

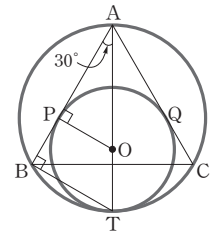
$$\overline{AO} : \overline{AT} = 2 : 3$$

$$\text{따라서 } \overline{AP} : \overline{AB} = \overline{AO} : \overline{AT} = 2 : 3 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AP} : 6 = 2 : 3, 3\overline{AP} = 12$$

$$\therefore \overline{AP} = 4 \text{ (cm)}$$

$$\therefore \overline{AQ} = \overline{AP} = 4 \text{ cm}$$



91 \overline{AO} 의 연장선이 원 O와 만나

는 점을 D라 하고, \overline{BD} 를 그으면

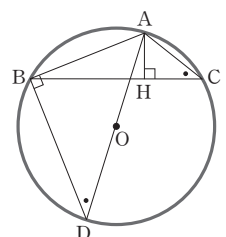
$\triangle ABD$ 와 $\triangle AHC$ 에서

$$\angle ADB = \angle ACB$$

(\widehat{AB} 에 대한 원주각),

$$\angle ABD = \angle AHC = 90^\circ \text{ 이므로}$$

$$\triangle ABD \sim \triangle AHC \text{ (AA 닮음)}$$



따라서 $\overline{AB} : \overline{AH} = \overline{AD} : \overline{AC}$ 에서

$$5 : \overline{AH} = 2 \times 4 : 3$$

$$8\overline{AH} = 15$$

$$\therefore \overline{AH} = \frac{15}{8}(\text{cm})$$

92 반원에 대한 원주각의 크기는

90° 이므로

$$\angle AEB = 90^\circ, \angle ATB = 90^\circ$$

$\triangle ABT$ 에서

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm})$$

$\triangle CAT$ 와 $\triangle TAB$ 에서

$$\angle ATC = \angle ABT \text{ (접선과 현이 이루는 각)},$$

$$\angle ACT = \angle ATB = 90^\circ \text{ 이므로}$$

$\triangle CAT \sim \triangle TAB$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AT} : \overline{AB} = \overline{TC} : \overline{BT}$ 에서

$$3 : 5 = \overline{TC} : 4$$

$$5\overline{TC} = 12$$

$$\therefore \overline{TC} = \frac{12}{5}(\text{cm})$$

$\triangle DTB$ 와 $\triangle TAB$ 에서

$$\angle BTD = \angle BAT \text{ (접선과 현이 이루는 각)},$$

$$\angle TDB = \angle ATB = 90^\circ \text{ 이므로}$$

$\triangle DTB \sim \triangle TAB$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{TB} : \overline{AB} = \overline{TD} : \overline{AT}$ 에서

$$4 : 5 = \overline{TD} : 3$$

$$5\overline{TD} = 12$$

$$\therefore \overline{TD} = \frac{12}{5}(\text{cm})$$

이때 $\square AEDC$ 는 직사각형이므로

$$\overline{AE} = \overline{CD} = \overline{TC} + \overline{TD}$$

$$= \frac{12}{5} + \frac{12}{5}$$

$$= \frac{24}{5}(\text{cm})$$

93 오른쪽 그림과 같이 \overline{AC} 를

그르면 $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ 이므로

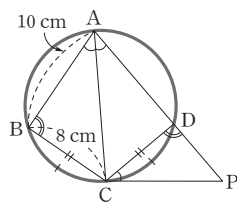
$$\overline{CD} = \overline{BC} = 8 \text{ cm}$$

$$\angle BAC = \angle DAC,$$

$$\angle DCP = \angle DAC$$

(접선과 현이 이루는 각)

$$\therefore \angle BAC = \angle DCP$$



84 경시와 수능에 필수적인 도형

또, $\angle ABC = \angle CDP$ (내대각)이므로

$\triangle ABC \sim \triangle CDP$ (AA 닮음)

$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{BC} : \overline{DP}$ 에서

$$10 : 8 = 8 : \overline{DP}$$

$$10\overline{DP} = 64$$

$$\therefore \overline{DP} = \frac{32}{5}(\text{cm})$$

94 \overline{AO} 의 연장선과 원이 만나는 점

을 D라 하고 \overline{BD} 를 그으면

$\triangle ABD$ 와 $\triangle QMC$ 에서

$$\angle ABD = \angle QMC = 90^\circ,$$

$\angle ADB = \angle ACB$ (\widehat{AB} 에 대한 원주각)이므로

$\triangle ABD \sim \triangle QMC$ (AA 닮음)

$$\therefore \angle BAD = \angle MQC$$

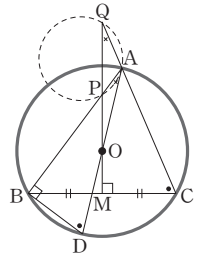
따라서 \overline{OA} 는 $\triangle PAQ$ 의 외접원의 접선이므로

$$\overline{OA}^2 = \overline{OP} \times \overline{OQ}$$
에서

$$6^2 = 4(4 + \overline{PQ})$$

$$4 + \overline{PQ} = 9$$

$$\therefore \overline{PQ} = 5(\text{cm})$$



95 \overline{AB} 와 \overline{CD} 의 연장선이 만나는

점을 E라 하자.

\overline{OB} , \overline{OC} 를 긋고, $\angle CDO = \theta$ 라

하면

$$\angle COA = 2\angle CDO = 2\theta$$

$\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로

$$\angle BOA = \angle COB$$

$$= \frac{1}{2}\angle COA = \theta$$

따라서 $\triangle AOB \sim \triangle ADE$ (AA 닮음)이고, 닮음비는

$$\overline{AO} : \overline{AD} = 1 : 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} : \overline{AE} = 1 : 2 \text{ 에서}$$

$$2 : \overline{AE} = 1 : 2$$

$$\therefore \overline{AE} = 4(\text{cm})$$

$$\therefore \overline{BE} = \overline{AE} - \overline{AB}$$

$$= 4 - 2 = 2(\text{cm})$$

또, $\overline{BO} : \overline{ED} = 1 : 2$ 에서

$$4 : \overline{ED} = 1 : 2$$

$$\therefore \overline{ED} = 8(\text{cm})$$

따라서 $\overline{EB} \times \overline{EA} = \overline{EC} \times \overline{ED}$ 에서

