



개념원리[®] | 수학 I

정답과 풀이

개념원리 익히기 · 확인체크

I. 지수함수와 로그함수

1

(1) -27 의 세제곱근은 방정식 $x^3 = -27$ 의 근이므로
 $x^3 + 27 = 0, (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

(2) 81 의 네제곱근은 방정식 $x^4 = 81$ 의 근이므로
 $x^4 - 81 = 0, (x+3)(x-3)(x^2 + 9) = 0$

$$\therefore x = \pm 3 \text{ 또는 } x = \pm 3i$$

$$\text{답 (1) } -3, \frac{3+3\sqrt{3}i}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$$

$$(2) -3, 3, -3i, 3i$$

2

$$(1) \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$(2) \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

$$(3) \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$$

$$(4) -\sqrt[4]{81} = -\sqrt[4]{3^4} = -3$$

$$(5) \sqrt[3]{-0.008} = \sqrt[3]{(-0.2)^3} = -0.2$$

$$(6) -\sqrt[5]{(-3)^5} = -(-3) = 3$$

$$\text{답 (1) } 2 \quad (2) 2 \quad (3) -3$$

$$(4) -3 \quad (5) -0.2 \quad (6) 3$$

3

$$(1) \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3 \times 27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$(2) \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\frac{2}{16}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \sqrt[4]{16^3} = (\sqrt[4]{16})^3 = (\sqrt[4]{2^4})^3 = 2^3 = 8$$

$$(4) \sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{3}$$

$$(5) \sqrt[12]{3^4} \times \sqrt[9]{3^6} = 3^{\frac{4}{12}} \times 3^{\frac{6}{9}} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1+2}{3}} = 3^1 = 3$$

$$(6) \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[4]{\frac{2}{32}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{답 (1) } 3 \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) 8 \quad (4) \sqrt{3} \quad (5) 3 \quad (6) \frac{1}{2}$$

4

$$(1) \sqrt[3]{\sqrt{216}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{216}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{6^3}} = \sqrt{6}$$

$$(2) \sqrt[4]{\sqrt[3]{16}} \times \sqrt[3]{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{16}} \times \sqrt[3]{\sqrt{16}} \\ = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^4}} \times \sqrt[3]{\sqrt{2^2}} \\ = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[3]{2} \\ = \sqrt[12]{2^4 \times 2^4} \\ = \sqrt[12]{2^8} = \sqrt[3]{2} \\ = 2$$

$$\text{답 (1) } \sqrt{6} \quad (2) 2$$

5

① -4 의 제곱근을 x 라 하면 $x^2 = -4$ 이므로
 $x = \pm 2i$ (거짓)

② 제곱근 16 은 $\sqrt{16} = 4$ 이다. (거짓)

③ 27 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = 27$ 이므로
 $x^3 - 27 = 0, (x-3)(x^2 + 3x + 9) = 0$
 $\therefore x = 3$ 또는 $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ (거짓)

④ 9 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 9$ 이므로
 $x^4 - 9 = 0, (x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$
 $\therefore x = \pm \sqrt{3}$ 또는 $x = \pm \sqrt{3}i$

따라서 9 의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ 의 2 개이다. (참)

⑤ -16 의 네제곱근을 x 라 하면
 $x^4 = -16$

이를 만족시키는 실수 x 의 값은 존재하지 않으므로
 -16 의 네제곱근 중 실수인 것은 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

6

$$(1) \sqrt[5]{32^2} \div (\sqrt[3]{2})^6 - \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[5]{(2^5)^2} \div \sqrt[3]{2^6} - \sqrt[3]{2^6} \\ = \sqrt[5]{2^{10}} \div \sqrt[3]{2^6} - \sqrt[3]{2^6} \\ = 2^2 \div 2^2 - 2 = 1 - 2 \\ = -1$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{1}{\sqrt[3]{27}}(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt[3]{3^3}}(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}+1) \\
 &= \frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}+1)\{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}+1\} \\
 &= \frac{1}{3}\{(\sqrt[3]{2})^3+1^3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \times (2+1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \sqrt[4]{\frac{3\sqrt{125}}{9\sqrt{125}}} \times \sqrt[6]{\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt{125}}} \times \sqrt[9]{\frac{\sqrt[4]{125}}{\sqrt{125}}} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{3\sqrt{125}}}{\sqrt[4]{9\sqrt{125}}} \times \frac{\sqrt[6]{\sqrt[3]{125}}}{\sqrt[6]{\sqrt{125}}} \times \frac{\sqrt[9]{\sqrt[4]{125}}}{\sqrt[9]{\sqrt{125}}} \\
 &= \frac{\sqrt[12]{125}}{\sqrt[36]{125}} \times \frac{\sqrt[18]{125}}{\sqrt[12]{125}} \times \frac{\sqrt[36]{125}}{\sqrt[18]{125}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \sqrt{\frac{27^{10}+9^{10}}{27^4+9^{11}}} = \sqrt{\frac{(3^3)^{10}+(3^2)^{10}}{(3^3)^4+(3^2)^{11}}} \\
 &= \sqrt{\frac{3^{30}+3^{20}}{3^{12}+3^{22}}} = \sqrt{\frac{3^{20}(3^{10}+1)}{3^{12}(1+3^{10})}} \\
 &= \sqrt{3^8} = 3^4 = 81
 \end{aligned}$$

답 (1) -1 (2) 1 (3) 1 (4) 81

7

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sqrt[4]{ab^2} \times \sqrt[8]{a^2b} \div \sqrt[6]{a^2b^3} \\
 &= \sqrt[24]{a^6b^{12}} \times \sqrt[24]{a^6b^3} \div \sqrt[24]{a^8b^{12}} \\
 &= \sqrt[24]{a^6b^{12} \times a^6b^3 \div a^8b^{12}} \\
 &= \sqrt[24]{a^{6+6-8}b^{12+3-12}} \\
 &= \sqrt[24]{a^4b^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sqrt[5]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt[5]{\sqrt{x}}}{\sqrt[5]{\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}}} \\
 &= \frac{\sqrt[15]{x}}{\sqrt[10]{x}} \times \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[15]{x}} \times \frac{\sqrt[10]{x}}{\sqrt{x}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \sqrt[3]{a \times \sqrt[4]{a^2} \times \sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2} \times \sqrt[3]{a}} \\
 &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[20]{a^2 \times \sqrt[3]{a}} \\
 &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[20]{a^2} \times \sqrt[20]{\sqrt[3]{a}} \\
 &= \sqrt[60]{a} \times \sqrt[10]{a} \times \sqrt[60]{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[60]{a^{12} \times a^6 \times a} = \sqrt[60]{a^{12+6+1}} \\
 &= \sqrt[60]{a^{19}}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\sqrt[24]{a^4b^3}$ (2) 1 (3) $\sqrt[60]{a^{19}}$

8

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10}, B = \sqrt[4]{5}, C = \sqrt[3]{\sqrt{11}} = \sqrt[6]{11}$$

6, 4의 최소공배수는 12이므로

$$A = \sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{100}, B = \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125},$$

$$C = \sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{11^2} = \sqrt[12]{121}$$

따라서 $\sqrt[12]{100} < \sqrt[12]{121} < \sqrt[12]{125}$ 이므로 $A < C < B$

답 $A < C < B$

9

$$(1) (2\sqrt{2})^0 = 1$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = (2^{-1})^{-4} = 2^4 = 16$$

$$(3) 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(4) 8^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 1 + (4^{-1})^{-2} = 1 + 4^2 = 17$$

답 (1) 1 (2) 16 (3) $\frac{1}{9}$ (4) 17

10

$$(1) (2^{\frac{3}{4}})^2 \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 5^{\frac{4}{3}} \times 25^{-\frac{1}{6}} = 5^{\frac{4}{3}} \times (5^2)^{-\frac{1}{6}} = 5^{\frac{4}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \\
 &= 5^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 5^1 = 5
 \end{aligned}$$

$$(3) \sqrt{3} \div (3^{\frac{1}{4}})^6 = 3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$(4) \sqrt{32} \div \sqrt[4]{4} = \sqrt{2^5} \div \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{5}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = 2^2 = 4$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{-\frac{8}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4} \times \left(-\frac{8}{3}\right)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = (4^{-1})^{-2} \\
 &= 4^2 = 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{15}{2}}\right\}^{\frac{8}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{15}{2} \times \frac{8}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-12} = (2^{-1})^{-12} \\
 &= 2^{12} = 4096
 \end{aligned}$$

답 (1) 8 (2) 5 (3) $\frac{1}{3}$ (4) 4 (5) 16 (6) 4096

11

$$\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$$

답 $a^{\frac{5}{6}}$

12

$$(1) (4^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}} = 4^{\sqrt{36}} = 4^6 = (2^2)^6 = 2^{12} = 4096$$

$$(2) 5^{3\sqrt{5}} \div 5^{\sqrt{5}} = 5^{3\sqrt{5} - \sqrt{5}} = 5^{2\sqrt{5}}$$

$$(3) 3^{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \times 3^{2-\sqrt{2}} = 3^{2+\sqrt{2}} \times 3^{2-\sqrt{2}} = 3^{(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})} \\ = 3^4 = 81$$

$$(4) 5^{\sqrt{3}} \times 5^{1-\sqrt{3}} \times 3^{\pi} \times 3^{2-\pi} = 5^{\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})} \times 3^{\pi+(2-\pi)} \\ = 5^1 \times 3^2 = 5 \times 9 \\ = 45$$

답 (1) 4096 (2) $5^{2\sqrt{5}}$ (3) 81 (4) 45

13

$$(1) 8^{\frac{1}{4}} \times 32^{-\frac{1}{2}} \div 2^{-\frac{3}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{4}} \times (2^5)^{-\frac{1}{2}} \div 2^{-\frac{3}{4}} \\ = 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{-\frac{5}{2}} \div 2^{-\frac{3}{4}} \\ = 2^{\frac{3}{4} - \frac{5}{2} - (-\frac{3}{4})} \\ = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \left\{ \left(\frac{27}{216} \right)^{-\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{27}{6} \right)^{\frac{1}{2}} = \left\{ \left(\frac{1}{2^3} \right)^{-\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{3^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ = \left(\frac{1}{2^3} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{3}{2^{\frac{1}{2}}} \\ = (2^{-3})^{-\frac{1}{2}} \times 3 \times 2^{-\frac{1}{2}} \\ = 2^{\frac{3}{2}} \times 3 \times 2^{-\frac{1}{2}} \\ = 2^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} \times 3 \\ = 2 \times 3 \\ = 6$$

$$(3) 3^{2+2\sqrt{2}} \div 3^{2\sqrt{2}-1} - \{(-3)^6\}^{\frac{1}{3}} \\ = 3^{(2+2\sqrt{2}) - (2\sqrt{2}-1)} - (3^6)^{\frac{1}{3}} \\ = 3^3 - 3^2 \\ = 18$$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 6 (3) 18

14

$$\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[4]{a} \times \sqrt[12]{a} = a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{12}} \\ = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

15

$$\sqrt[3]{4\sqrt{4} \times \frac{4}{\sqrt[4]{4}}} = (4 \times 4^{\frac{1}{2}} \times 4 \div 4^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} \\ = (4^{1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} \\ = (4^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{3}{4}} \\ = (2^2)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

16

$$2^3 = a \text{에서 } 2 = a^{\frac{1}{3}}, 3^4 = b \text{에서 } 3 = b^{\frac{1}{4}} \text{이므로}$$

$$12^8 = (2^2 \times 3)^8 = 2^{16} \times 3^8 = (a^{\frac{1}{3}})^{16} (b^{\frac{1}{4}})^8 = a^{\frac{16}{3}} b^2$$

답 $a^{\frac{16}{3}} b^2$

17

$$a = \sqrt[3]{6}, b = \sqrt{7} \text{에서 } a^3 = 6, b^2 = 7 \text{이므로}$$

$$\sqrt[9]{42} = 42^{\frac{1}{9}} = (6 \times 7)^{\frac{1}{9}} = (a^3 b^2)^{\frac{1}{9}} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{9}}$$

답 $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{9}}$

18

$$(1) \text{ 곱셈 공식 } (A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 - B^3 \text{을}$$

이용하여 식을 간단히 하면

$$(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$$

$$= (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}) \{ (a^{\frac{1}{3}})^2 + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + (b^{\frac{1}{3}})^2 \}$$

$$= (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3$$

$$= a - b$$

(2) 곱셈 공식 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 을 이용하여 식을 간단히 하면

$$\begin{aligned} & (3^{\frac{1}{2}}+1)(3^{\frac{1}{2}}-1)(8^{\frac{1}{3}}+1)(8^{\frac{1}{3}}-1) \\ &= \{(3^{\frac{1}{2}})^2-1\}\{(8^{\frac{1}{3}})^2-1\} \\ &= (3-1)(8^{\frac{2}{3}}-1) \\ &= 2\{(2^3)^{\frac{2}{3}}-1\} \\ &= 2(2^2-1)=6 \end{aligned}$$

답 (1) **a-b** (2) **6**

19

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=1$ 의 양변을 제곱하면

$$x-2+x^{-1}=1 \quad \therefore x+x^{-1}=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 세제곱하면

$$x^3+3x^2 \cdot x^{-1}+3x \cdot x^{-2}+x^{-3}=27$$

$$x^3+x^{-3}+3(x+x^{-1})=27$$

$$x^3+x^{-3}+3 \cdot 3=27$$

$$\therefore x^3+x^{-3}=18$$

답 18

다른풀이 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2+2=1^2+2=3$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3+x^{-3} &= (x+x^{-1})^3-3(x+x^{-1}) \\ &= 3^3-3 \times 3=18 \end{aligned}$$

20

$$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 제곱하면

$$a+2+a^{-1}=16$$

$$\therefore a+a^{-1}=14 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②의 양변을 제곱하면

$$a^2+2+a^{-2}=196$$

$$\therefore a^2+a^{-2}=194 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

③의 양변을 세제곱하면

$$a^{\frac{3}{2}}+3a \cdot a^{-\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-1}+a^{-\frac{3}{2}}=64$$

$$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})=64$$

$$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3 \cdot 4=64$$

..... ㉠

$$\therefore a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=52$$

㉠, ㉠에서

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+2}{a^2+a^{-2}+3}=\frac{52+2}{194+3}=\frac{54}{197}$$

답 $\frac{54}{197}$

21

$x=4^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세제곱하면

$$x^3=(4^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}})^3$$

$$=4+3 \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}+3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}+2$$

$$=6+3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}(4^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}})$$

$$=6+6x \quad \leftarrow 4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=2$$

$$\therefore x^3-6x=6$$

답 6

22

$$x^{-2}=6, \text{ 즉 } \frac{1}{x^2}=6 \text{에서 } x^2=\frac{1}{6}$$

주어진 식의 분모, 분자에 각각 x 를 곱하면

$$\frac{x^3-x^{-3}}{x+x^{-1}}=\frac{x(x^3-x^{-3})}{x(x+x^{-1})}=\frac{x^4-x^{-2}}{x^2+1}$$

$$=\frac{(x^2)^2-x^{-2}}{x^2+1}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2-6}{\frac{1}{6}+1}=-\frac{215}{42}$$

답 $-\frac{215}{42}$

23

$9^x=2$, 즉 $3^{2x}=2$ 이므로 주어진 식의 분모, 분자에 각각 3^x 를 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{27^x-27^{-x}}{3^x+3^{-x}} &= \frac{3^{3x}-3^{-3x}}{3^x+3^{-x}} = \frac{3^x(3^{3x}-3^{-3x})}{3^x(3^x+3^{-x})} \\ &= \frac{3^{4x}-3^{-2x}}{3^{2x}+1} = \frac{(3^{2x})^2-(3^{2x})^{-1}}{3^{2x}+1} \end{aligned}$$

$$=\frac{2^2-\frac{1}{2}}{2+1}=\frac{7}{6}$$

답 $\frac{7}{6}$

24

$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=2$ 에서 좌변의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=2, \frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=2$$

$$a^{2x}+1=2(a^{2x}-1) \quad \therefore a^{2x}=3$$

$$\therefore a^x=\sqrt{3} \quad (\because a>0 \text{에서 } a^x>0)$$

답 $\sqrt{3}$

다른풀이 $\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=2$ 에서

$$a^x+a^{-x}=2(a^x-a^{-x}), \quad a^x+a^{-x}=2a^x-2a^{-x}$$

$$\therefore a^x=3a^{-x}$$

양변에 a^x 을 곱하면

$$a^{2x}=3 \quad \therefore a^x=\sqrt{3} \quad (\because a>0 \text{에서 } a^x>0)$$

25

$4^x=9^y=6^z=k$ ($k>0$)라 하면

$$4^x=k \text{에서 } 4=k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$9^y=k \text{에서 } 9=k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$6^z=k \text{에서 } 6=k^{\frac{1}{z}}, \text{ 즉 } 36=k^{\frac{2}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A} \times \textcircled{B} \div \textcircled{C}$ 을 하면

$$4 \times 9 \div 36 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{2}{z}}$$

$$\therefore 1 = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}}$$

이때 $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$ 이므로

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = 0$$

답 0

26

답 (1) $2=\log_4 16$ (2) $-3=\log_{10} 0.001$

(3) $0=\log_4 1$ (4) $1=\log_5 5$

(5) $\frac{1}{2}=\log_5 \sqrt{5}$ (6) $4=\log_{\sqrt{3}} 9$

27

답 (1) $3^4=81$ (2) $(\sqrt{2})^4=4$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$ (4) $5^0=1$

28

(1) $\log_2 16=x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여
 $2^x=16 \quad \therefore x=4$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 27=x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=27$$

$$27=3^3=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \text{이므로 } x=-3$$

(3) $\log_4 64=x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여
 $4^x=64 \quad \therefore x=3$

(4) $\log_{\frac{1}{3}} 81=x$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=81$$

$$81=3^4=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \text{이므로 } x=-4$$

답 (1) 4 (2) -3 (3) 3 (4) -4

29

(1) $N=3^{-2}=\frac{1}{9}$

(2) $N=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

(3) $N=2^1=2$

(4) $N=6^0=1$

답 (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{1}{64}$ (3) 2 (4) 1

30

(진수) >0 , (밑) >0 , (밑) $\neq 1$ 이므로

(1) $x+4>0 \quad \therefore x>-4$

(2) $x>0, x \neq 1$

답 (1) $x>-4$ (2) $x>0, x \neq 1$

31

(1) $\log_8 0.25=x$ 에서

$$8^x=0.25, \quad (2^3)^x=\frac{1}{4}$$

$$2^{3x}=2^{-2}, \quad 3x=-2$$

$$\therefore x=-\frac{2}{3}$$

(2) $\log_{0.1} 0.001=x$ 에서

$$0.1^x = 0.001, 0.1^x = 0.1^3$$

$$\therefore x = 3$$

(3) $\log_x 81 = -\frac{4}{3}$ 에서

$$x^{-\frac{4}{3}} = 81$$

$$\therefore x = 81^{-\frac{3}{4}} = (3^4)^{-\frac{3}{4}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

(4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -2$ 에서

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

(5) $\log_4 \{\log_3(\log_2 x)\} = 0$ 에서

$$4^0 = \log_3(\log_2 x), \log_3(\log_2 x) = 1$$

$$3^1 = \log_2 x, \log_2 x = 3$$

$$\therefore x = 2^3 = 8$$

답 (1) $-\frac{2}{3}$ (2) 3 (3) $\frac{1}{27}$ (4) 2 (5) 8

32

$\log_a 27 = -2$ 에서 $a^{-2} = 27$

밑의 조건에서 $a > 0$ 이므로 $a = 27^{-\frac{1}{2}} = (3^3)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}}$

$\log_{\sqrt{3}} b = 3$ 에서 $b = (\sqrt{3})^3 = (3^{\frac{1}{2}})^3 = 3^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore ab = 3^{-\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^0 = 1$$

답 1

33

$\log_{x-2}(-x^2+8x-7)$ 이 정의되려면

밑의 조건에서 $x-2 > 0, x-2 \neq 1$

$$\therefore x > 2, x \neq 3$$

..... ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+8x-7 > 0$

$$x^2-8x+7 < 0, (x-1)(x-7) < 0$$

$$\therefore 1 < x < 7$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$2 < x < 3 \text{ 또는 } 3 < x < 7$$

따라서 자연수 x 는 4, 5, 6이므로 그 합은

$$4+5+6=15$$

답 15

34

답 (1) 1 (2) 0 (3) 1 (4) 0

35

(1) $\log_4 8 + \log_4 2 = \log_4(8 \times 2) = \log_4 16 = 2$

(2) $\log_{10} 50 - \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{50}{5} = \log_{10} 10 = 1$

(3) $\log_3 \frac{3}{4} + \log_3 12 = \log_3 \left(\frac{3}{4} \times 12\right) = \log_3 9 = 2$

답 (1) 2 (2) 1 (3) 2

36

(1) $\log_{10} 6 = \log_{10}(2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = a + b$

(2) $\log_{10} 18 = \log_{10}(2 \times 3^2) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3^2$
 $= \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 = a + 2b$

(3) $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - a$

(4) $\log_{10} \frac{9}{8} = \log_{10} \frac{3^2}{2^3}$
 $= \log_{10} 3^2 - \log_{10} 2^3$
 $= 2 \log_{10} 3 - 3 \log_{10} 2$
 $= 2b - 3a$

답 (1) $a+b$ (2) $a+2b$ (3) $1-a$ (4) $2b-3a$

37

(1) $\log_{16} 8 = \log_{2^4} 2^3 = \frac{3}{4} \log_2 2 = \frac{3}{4}$

(2) $\log_{1000} \frac{1}{10} = \log_{10^3} 10^{-1} = -\frac{1}{3} \log_{10} 10 = -\frac{1}{3}$

(3) $2^{\log_2 5} = 5$

(4) $4^{\log_2 9} = 9^{\log_2 4} = 9^2 = 81$

답 (1) $\frac{3}{4}$ (2) $-\frac{1}{3}$ (3) 5 (4) 81

38

(1) $\log_7 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 7}$

(2) $\log_3 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 3} = \frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 3}$

(3) $\log_3 100 = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 3} = \frac{2}{\log_{10} 3}$

답 (1) $\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 7}$ (2) $\frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 3}$ (3) $\frac{2}{\log_{10} 3}$

39

$$(1) \log_2 16\sqrt{2} = \log_2 (2^4 \times 2^{\frac{1}{2}}) = \log_2 2^{\frac{9}{2}} \\ = \frac{9}{2} \log_2 2 = \frac{9}{2}$$

$$(2) \log_a \frac{1}{a^2} = \log_a a^{-2} = -2 \log_a a = -2$$

$$\text{답 (1) } \frac{9}{2} \quad (2) -2$$

40

$$(1) \frac{1}{2} \log_2 \frac{9}{49} - \log_2 \frac{3}{14} \\ = \log_2 \left(\frac{9}{49}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_2 \frac{3}{14} \\ = \log_2 \frac{3}{7} - \log_2 \frac{3}{14} \quad \left(\frac{9}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \left\{\left(\frac{3}{7}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{7} \\ = \log_2 \left(\frac{3}{7} \div \frac{3}{14}\right) = \log_2 \left(\frac{3}{7} \times \frac{14}{3}\right) \\ = \log_2 2 = 1$$

$$(2) \frac{1}{2} \log_2 3 + 3 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ = \log_2 3^{\frac{1}{2}} + \log_2 (\sqrt{2})^3 - \log_2 \sqrt{6} \\ = \log_2 \sqrt{3} + \log_2 2\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ = \log_2 \frac{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \log_2 2 = 1$$

$$(3) 2 \log_{10} \frac{5}{3} - \log_{10} \frac{7}{4} + 2 \log_{10} 3 + \frac{1}{2} \log_{10} 49 \\ = \log_{10} \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \log_{10} \frac{7}{4} + \log_{10} 3^2 + \log_{10} 49^{\frac{1}{2}} \\ = \log_{10} \left\{\left(\frac{5}{3}\right)^2 \div \frac{7}{4} \times 3^2 \times 49^{\frac{1}{2}}\right\} \\ = \log_{10} \left(\frac{25}{9} \times \frac{4}{7} \times 9 \times 7\right) \\ = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 \\ = 2 \log_{10} 10 = 2$$

$$(4) 3 \log_5 \sqrt[3]{2} + \log_5 \sqrt{10} - \frac{1}{2} \log_5 8 \\ = \log_5 (\sqrt[3]{2})^3 + \log_5 \sqrt{10} - \log_5 8^{\frac{1}{2}} \\ = \log_5 2 + \log_5 \sqrt{10} - \log_5 2\sqrt{2} \quad \leftarrow 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ = \log_5 \frac{2 \times \sqrt{10}}{2\sqrt{2}} = \log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{2} \log_5 5 = \frac{1}{2}$$

$$\text{답 (1) } 1 \quad (2) 1 \quad (3) 2 \quad (4) \frac{1}{2}$$

41

$$(1) (\log_2 3 + \log_8 9)(\log_9 2 + \log_{27} 16) \\ = (\log_2 3 + \log_{2^3} 3^2)(\log_{3^2} 2 + \log_{3^3} 2^4) \\ = \left(\log_2 3 + \frac{2}{3} \log_2 3\right) \left(\frac{1}{2} \log_3 2 + \frac{4}{3} \log_3 2\right) \\ = \frac{5}{3} \log_2 3 \times \frac{11}{6} \log_3 2 \\ = \frac{55}{18} \log_2 3 \times \log_3 2 \\ = \frac{55}{18}$$

$$(2) 2 \log_5 4 - 3 \log_5 2 = \log_5 4^2 - \log_5 2^3 \\ = \log_5 16 - \log_5 8 \\ = \log_5 \frac{16}{8} = \log_5 2$$

$$\therefore 5^{2 \log_5 4 - 3 \log_5 2} = 5^{\log_5 2} = 2$$

$$(3) 4^{\log_2 7} + 27^{\log_3 2} = 7^{\log_2 4} + 2^{\log_3 27} \\ = 7^2 + 2^3 = 49 + 8 = 57$$

$$(4) (\log_2 3)(\log_3 5)(\log_5 6)(\log_6 8) \\ = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 5} \times \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} \\ = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = \frac{3 \log_{10} 2}{\log_{10} 2} = 3$$

$$\text{답 (1) } \frac{55}{18} \quad (2) 2 \quad (3) 57 \quad (4) 3$$

42

$$(1) (\log_2 3)(\log_4 x) = \log_4 3 \text{에서}$$

$$(\log_2 3)(\log_{2^2} x) = \log_{2^2} 3$$

$$\log_2 3 \times \frac{1}{2} \log_2 x = \frac{1}{2} \log_2 3$$

$$\log_2 x = 1$$

$$\therefore x = 2$$

$$(2) a^2 b^3 = 1 \text{의 양변에 } a \text{를 밑으로 하는 로그를 취하면}$$

$$\log_a a^2 b^3 = \log_a 1, \log_a a^2 + \log_a b^3 = 0$$

$$2 + 3 \log_a b = 0$$

$$\therefore \log_a b = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \log_a a^3 b^2 = \log_a a^3 + \log_a b^2$$

$$= 3 + 2 \log_a b$$

$$= 3 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & (\log_2 3 + 2 \log_4 5) \log_{\sqrt{15}} a \\
 &= (\log_2 3 + 2 \log_{2^2} 5) \log_{15^{\frac{1}{2}}} a \\
 &= (\log_2 3 + \log_2 5) \times 2 \log_{15} a \\
 &= \log_2 15 \times 2 \times \frac{\log_2 a}{\log_2 15} \\
 &= 2 \log_2 a \\
 &\text{이므로 } 2 \log_2 a = 6 \\
 &\log_2 a = 3 \quad \therefore a = 8
 \end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{5}{3}$ (3) 8

43

$$\begin{aligned}
 (1) & \log_{10} 25 = \log_{10} 5^2 = 2 \log_{10} 5 \\
 &= 2 \log_{10} \frac{10}{2} = 2(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) \\
 &= 2(1 - a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \log_{10} 0.72 = \log_{10} \frac{72}{100} = \log_{10} 72 - \log_{10} 100 \\
 &= \log_{10} (2^3 \times 3^2) - \log_{10} 10^2 \\
 &= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2 - 2 \log_{10} 10 \\
 &= 3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 - 2 \\
 &= 3a + 2b - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & \log_{10} \frac{1}{15} = \log_{10} 15^{-1} = -\log_{10} 15 \\
 &= -\log_{10} (3 \times 5) \\
 &= -(\log_{10} 3 + \log_{10} 5) \\
 &= -\left(\log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}\right) \\
 &= -(\log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2) \\
 &= -(\log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2) \\
 &= -(b + 1 - a) \\
 &= a - b - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) & \log_{10} \sqrt{30} = \frac{1}{2} \log_{10} 30 = \frac{1}{2} \log_{10} (3 \times 10) \\
 &= \frac{1}{2} (\log_{10} 3 + \log_{10} 10) \\
 &= \frac{1}{2} (\log_{10} 3 + 1) = \frac{1}{2} (b + 1)
 \end{aligned}$$

답 (1) $2(1-a)$ (2) $3a+2b-2$

(3) $a-b-1$ (4) $\frac{1}{2}(b+1)$

44

$$\begin{aligned}
 \log_x \sqrt[4]{a^3 b} &= \log_x (a^3 b)^{\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{\log_3 a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{4}}}{\log_3 x^{\frac{1}{4}}} = \frac{\log_3 a^{\frac{3}{4}} + \log_3 b^{\frac{1}{4}}}{3 \log_3 a} \\
 &= \frac{\frac{3}{4} \log_3 a + \frac{1}{4} \log_3 b}{3 \log_3 a} = \frac{\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y}{3x} \\
 &= \frac{3x+y}{12x}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{3x+y}{12x}$

45

$$\begin{aligned}
 32^x &= 216 \text{에서 } x = \log_{32} 216, \\
 243^y &= 216 \text{에서 } y = \log_{243} 216 \\
 \therefore \frac{1}{x} &= \frac{1}{\log_{32} 216} = \log_{216} 32, \\
 \frac{1}{y} &= \frac{1}{\log_{243} 216} = \log_{216} 243 \\
 \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \log_{216} 32 + \log_{216} 243 \\
 &= \log_{216} 2^5 + \log_{216} 3^5 = \log_{216} (2^5 \times 3^5) \\
 &= \log_{6^3} (2^5 \times 3^5) = \log_{6^3} 6^5 \\
 &= \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{3}$

46

이차방정식 $x^2 - 9x + 3 = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 9, \alpha\beta = 3$ 따라서 $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{9}{3} = 3$ 이므로 $\log_3 (\alpha^{-1} + \beta^{-1}) = \log_3 3 = 1$

답 1

47

이차방정식 $x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 두 실근이 $\log_{10} \alpha, \log_{10} \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\log_{10} \alpha + \log_{10} \beta = 5, (\log_{10} \alpha)(\log_{10} \beta) = 3$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a \beta + \log_\beta a &= \frac{\log_{10} \beta}{\log_{10} a} + \frac{\log_{10} a}{\log_{10} \beta} \\ &= \frac{(\log_{10} a)^2 + (\log_{10} \beta)^2}{(\log_{10} a)(\log_{10} \beta)} \\ &= \frac{(\log_{10} a + \log_{10} \beta)^2 - 2(\log_{10} a)(\log_{10} \beta)}{(\log_{10} a)(\log_{10} \beta)} \\ &= \frac{5^2 - 2 \times 3}{3} = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{19}{3}$

48

$$A = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{4}} 8 = \frac{1}{3} \log_{2^{-2}} 2^3 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$B = 8^{\log_{\frac{1}{8}} 16} = 16^{\log_{\frac{1}{8}} 8} = 16^{-1} = \frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{7} \log_{27} 3\sqrt{3} = \frac{1}{7} \log_{3^3} 3^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{7} \times \frac{\frac{3}{2}}{3} \\ &= \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{14} \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{1}{2} < \frac{1}{16} < \frac{1}{14}$ 이므로 $A < B < C$

답 $A < B < C$

49

$\log_5 25 = 2$, $\log_5 125 = 3$ 이므로 $2 < \log_5 100 < 3$

즉 $\log_5 100$ 의 정수 부분은 2이다.

$\therefore a = 2$

$\log_5 100$ 의 정수 부분이 2이므로 소수 부분은

$$\log_5 100 - 2 = \log_5 100 - \log_5 25$$

$$= \log_5 \frac{100}{25}$$

$$= \log_5 4$$

$\therefore b = \log_5 4$

$$\therefore 4^a + 4^{\frac{1}{b}} = 4^2 + 4^{\frac{1}{\log_5 4}}$$

$$= 16 + 4^{\log_5 5}$$

$$= 16 + 5$$

$$= 21$$

답 21

50

$$(1) \log 10000 = \log 10^4 = 4$$

$$(2) \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$$

$$(3) \log 0.001 = \log \frac{1}{1000} = \log 10^{-3} = -3$$

$$(4) \log \sqrt[4]{10^3} = \log 10^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$$

$$(5) \log 10\sqrt{10} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$(6) \log \sqrt[3]{100} = \log \sqrt[3]{10^2} = \log 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

답 (1) 4 (2) -2 (3) -3 (4) $\frac{3}{4}$ (5) $\frac{3}{2}$ (6) $\frac{2}{3}$

51

답 (1) 0.7126 (2) 0.8248 (3) 0.3945

52

$\log 3.62 = 0.5587$ 이므로

$$\log 362 = \log(3.62 \times 10^2)$$

$$= \log 3.62 + \log 10^2$$

$$= \log 3.62 + \boxed{2} = \boxed{0.5587} + \boxed{2}$$

$$= \boxed{2.5587}$$

답 (가): 2 (나): 0.5587 (다): 2.5587

53

(3) $\log 0.8525 = -0.0693 = -1 + 0.9307$ 이므로

정수 부분은 -1, 소수 부분은 0.9307

(4) $\log 0.0025 = -2.6021 = -3 + 0.3979$ 이므로

정수 부분은 -3, 소수 부분은 0.3979

답 (1) 정수 부분: 0, 소수 부분: 0.6149

(2) 정수 부분: 3, 소수 부분: 0.5593

(3) 정수 부분: -1, 소수 부분: 0.9307

(4) 정수 부분: -3, 소수 부분: 0.3979

54

(1) 진수 12345는 정수 부분이 5자리인 수이므로

$\log 12345$ 의 정수 부분은 4

(2) 진수 19.19는 정수 부분이 2자리인 수이므로

$$\log 19.19 \text{의 정수 부분은 } 1$$

(3) 진수 0.0419는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 수이므로

$$\log 0.0419 \text{의 정수 부분은 } -2$$

(4) 진수 1.4는 정수 부분이 한 자리인 수이므로

$$\log 1.4 \text{의 정수 부분은 } 0$$

답 (1) 4 (2) 1 (3) -2 (4) 0

55

$$\begin{aligned} (1) \log 18 &= \log(2 \times 3^2) = \log 2 + 2 \log 3 \\ &= 0.3010 + 2 \times 0.4771 = 1.2552 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log \frac{5}{3} &= \log 5 - \log 3 = 1 - \log 2 - \log 3 \\ &= 1 - 0.3010 - 0.4771 = 0.2219 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \log \sqrt{6} &= \frac{1}{2} \log 6 = \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3) \\ &= \frac{1}{2}(0.3010 + 0.4771) = 0.38905 \end{aligned}$$

답 (1) 1.2552 (2) 0.2219 (3) 0.38905

56

$$\begin{aligned} (1) \log 523 &= \log(5.23 \times 10^2) \\ &= \log 5.23 + \log 10^2 \\ &= 0.7185 + 2 \\ &= 2.7185 \end{aligned}$$

∴ 정수 부분 : 2, 소수 부분 : 0.7185

$$\begin{aligned} (2) \log 52.3 &= \log(5.23 \times 10) \\ &= \log 5.23 + \log 10 \\ &= 0.7185 + 1 \\ &= 1.7185 \end{aligned}$$

∴ 정수 부분 : 1, 소수 부분 : 0.7185

$$\begin{aligned} (3) \log 0.0523 &= \log(5.23 \times 10^{-2}) \\ &= \log 5.23 + \log 10^{-2} \\ &= -2 + 0.7185 \end{aligned}$$

∴ 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.7185

답 (1) 정수 부분 : 2, 소수 부분 : 0.7185

(2) 정수 부분 : 1, 소수 부분 : 0.7185

(3) 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.7185

57

(1) 3.74는 정수 부분이 한 자리인 수이므로 $\log 3.74$ 의 정수 부분은 $1 - 1 = 0$ 이다. 또한 3.74와 37.4의 숫자 배열이 같으므로 $\log 3.74$ 의 소수 부분은 $\log 37.4$ 의 소수 부분과 같다.

$$\therefore \log 3.74 = 0 + 0.5729 = 0.5729$$

(2) 374는 정수 부분이 세 자리인 수이므로 $\log 374$ 의 정수 부분은 $3 - 1 = 2$ 이다. 또한 374와 37.4의 숫자 배열이 같으므로 $\log 374$ 의 소수 부분은 $\log 37.4$ 의 소수 부분과 같다.

$$\therefore \log 374 = 2 + 0.5729 = 2.5729$$

(3) 0.0374는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 수이므로 $\log 0.0374$ 의 정수 부분은 -2 이다. 또한 0.0374와 37.4의 숫자 배열이 같으므로 $\log 0.0374$ 의 소수 부분은 $\log 37.4$ 의 소수 부분과 같다.

$$\therefore \log 0.0374 = -2 + 0.5729 = -1.4271$$

답 (1) 0.5729 (2) 2.5729 (3) -1.4271

$$\begin{aligned} \text{다른풀이 (1) } \log 3.74 &= \log(37.4 \times 10^{-1}) \\ &= \log 37.4 + \log 10^{-1} \\ &= 1.5729 - 1 \\ &= 0.5729 \end{aligned}$$

58

(1) $\log x$ 의 소수 부분과 $\log 2.34$ 의 소수 부분이 같으므로 x 의 숫자 배열은 2.34의 숫자 배열과 같다. 또한 $\log x$ 의 정수 부분이 2이므로 x 는 정수 부분이 3자리인 수이다.

$$\therefore x = 234$$

$$\begin{aligned} (2) \log x &= -0.6308 = -1 + (1 - 0.6308) \\ &= -1 + 0.3692 \end{aligned}$$

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log 2.34$ 의 소수 부분이 같으므로 x 의 숫자 배열은 2.34의 숫자 배열과 같다. 또한 $\log x$ 의 정수 부분이 -1 이므로 x 는 소수점 아래 첫째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 수이다.

$$\therefore x = 0.234$$

$$(3) \log x = -2.6308 = -2 - 0.6308$$

$$\begin{aligned}
 &= (-2-1) + (1-0.6308) \\
 &= -3 + 0.3692
 \end{aligned}$$

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log 2.34$ 의 소수 부분이 같으므로 x 의 숫자 배열은 2.34의 숫자 배열과 같다. 또한 $\log x$ 의 정수 부분이 -3 이므로 x 는 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 수이다.

$$\therefore x = 0.00234$$

답 (1) 234 (2) 0.234 (3) 0.00234

59

$$\begin{aligned}
 (1) \log 5^{30} &= 30 \log 5 = 30 \log \frac{10}{2} \\
 &= 30(1 - \log 2) = 30(1 - 0.3010) \\
 &= 20.970
 \end{aligned}$$

따라서 $\log 5^{30}$ 의 정수 부분이 20이므로 5^{30} 은 21자리의 정수이다.

$$\begin{aligned}
 (2) \log 2^{40} &= 40 \log 2 = 40 \times 0.3010 = 12.040 \\
 &\text{따라서 } \log 2^{40} \text{의 정수 부분이 12이므로 } 2^{40} \text{은 13자리의 정수이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \log (2^{30} \times 3^{30}) &= \log 2^{30} + \log 3^{30} \\
 &= 30 \log 2 + 30 \log 3 \\
 &= 30(\log 2 + \log 3) \\
 &= 30(0.3010 + 0.4771) \\
 &= 23.343
 \end{aligned}$$

따라서 $\log (2^{30} \times 3^{30})$ 의 정수 부분이 23이므로 $2^{30} \times 3^{30}$ 은 24자리의 정수이다.

답 (1) 21자리 (2) 13자리 (3) 24자리

60

$$\begin{aligned}
 (1) \log \left(\frac{1}{4}\right)^{100} &= \log 4^{-100} = -100 \log 4 \\
 &= -100 \times 2 \log 2 \\
 &= -100 \times 2 \times 0.3010 \\
 &= -60.20 = -60 - 0.20 \\
 &= (-60 - 1) + (1 - 0.20) \\
 &= -61 + 0.80
 \end{aligned}$$

따라서 $\log \left(\frac{1}{4}\right)^{100}$ 의 정수 부분이 -61 이므로

$\left(\frac{1}{4}\right)^{100}$ 을 소수로 나타내면 소수점 아래 61째 자리

에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$$\begin{aligned}
 (2) \log 2^{-20} &= -20 \log 2 = -20 \times 0.3010 \\
 &= -6.020 = -6 - 0.020 \\
 &= (-6 - 1) + (1 - 0.020) \\
 &= -7 + 0.980
 \end{aligned}$$

따라서 $\log 2^{-20}$ 의 정수 부분이 -7 이므로 2^{-20} 을 소수로 나타내면 소수점 아래 7째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 (1) 소수점 아래 61째 자리

(2) 소수점 아래 7째 자리

61

18^{50} 이 63자리의 정수이므로 $\log 18^{50}$ 의 정수 부분은 62이다. 즉

$$62 \leq \log 18^{50} < 63$$

$$62 \leq 50 \log 18 < 63 \quad \therefore \frac{62}{50} \leq \log 18 < \frac{63}{50}$$

각 변에 15를 곱하면

$$15 \times \frac{62}{50} \leq 15 \log 18 < 15 \times \frac{63}{50}$$

$$\therefore 18.6 \leq \log 18^{15} < 18.9$$

따라서 $\log 18^{15}$ 의 정수 부분이 18이므로 18^{15} 은 19자리의 정수이다.

답 19자리

62

$$\begin{aligned}
 \log 5^{20} &= 20 \log 5 = 20 \log \frac{10}{2} \\
 &= 20(1 - \log 2) \\
 &= 20(1 - 0.3010) \\
 &= 13.980
 \end{aligned}$$

$\log 5^{20}$ 의 정수 부분이 13이므로 5^{20} 은 14자리의 정수이다.

$$\therefore a = 14$$

한편, $\log 5^{20}$ 의 소수 부분이 0.980이고

$\log 9 = 2 \log 3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542$, $\log 10 = 1$ 이므로

$$\log 9 < 0.980 < \log 10$$

$$\log 9 + 13 < 13.980 < \log 10 + 13$$

$$\log 9 + \log 10^{13} < \log 5^{20} < \log 10 + \log 10^{13}$$

$$\log(9 \times 10^{13}) < \log 5^{20} < \log(10 \times 10^{13})$$

$$\therefore 9 \times 10^{13} < 5^{20} < 10 \times 10^{13}$$

따라서 $5^{20} = 9 \cdot \square \times 10^{13}$ 이므로 5^{20} 의 최고 자리의 숫자는 9이다.

$$\therefore b = 9$$

$$\therefore a + b = 14 + 9 = 23$$

답 23

63

$\log A = n + a$ (n 은 정수, $0 \leq a < 1$)라 하면 n 과 a 가 이차방정식 $2x^2 + 5x + k = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + a = -\frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$na = \frac{k}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

n 은 정수이고, $0 \leq a < 1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} n + a &= -\frac{5}{2} = -2 - \frac{1}{2} \\ &= (-2 - 1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= -3 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore n = -3, a = \frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $-3 \times \frac{1}{2} = \frac{k}{2}$

$$\therefore k = -3$$

답 -3

64

$\log x^2$ 의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\begin{aligned} \log x^2 - \log \frac{1}{x} &= 2 \log x + \log x \\ &= 3 \log x = (\text{정수}) \end{aligned}$$

$\log x$ 의 정수 부분이 2이므로

$$2 \leq \log x < 3$$

$$\therefore 6 \leq 3 \log x < 9$$

$3 \log x$ 는 정수이므로

$$3 \log x = 6 \text{ 또는 } 3 \log x = 7 \text{ 또는 } 3 \log x = 8$$

$$\therefore \log x = 2 \text{ 또는 } \log x = \frac{7}{3} \text{ 또는 } \log x = \frac{8}{3}$$

$$\therefore x = 10^2 = 100 \text{ 또는 } x = 10^{\frac{7}{3}} = 100 \sqrt[3]{10}$$

$$\text{또는 } x = 10^{\frac{8}{3}} = 100 \sqrt[3]{100}$$

답 100, $100 \sqrt[3]{10}$, $100 \sqrt[3]{100}$

65

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\begin{aligned} \log x + \log \sqrt{x} &= \log x + \frac{1}{2} \log x \\ &= \frac{3}{2} \log x = (\text{정수}) \end{aligned}$$

이고, $\log x \neq (\text{정수})$, $\log \sqrt{x} \neq (\text{정수})$

$\log x$ 의 정수 부분이 4이므로

$$4 < \log x < 5 \quad \leftarrow \log x \text{는 정수가 아니므로}$$

$$\log x = 4 \text{가 될 수 없다.}$$

각 변에 $\frac{3}{2}$ 을 곱하면

$$6 < \frac{3}{2} \log x < \frac{15}{2}$$

$\frac{3}{2} \log x$ 는 정수이므로

$$\frac{3}{2} \log x = 7 \quad \therefore \log x = \frac{14}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \sqrt[4]{x} &= \log x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log x = \frac{1}{4} \times \frac{14}{3} \\ &= \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

따라서 $\log \sqrt[4]{x}$ 의 소수 부분은 $\frac{1}{6}$ 이다.

답 $\frac{1}{6}$

다른풀이 $\log x$ 의 소수 부분을 a 라 하면

$$\log x = 4 + a \quad (0 < a < 1) \quad \leftarrow \log x \text{는 정수가 아니다.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \sqrt{x} &= \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2}(4 + a) \\ &= 2 + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은 $\frac{a}{2}$ 이므로

$$\alpha + \frac{\alpha}{2} = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \log x = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

따라서 $\log \sqrt[4]{x} = \frac{1}{4} \log x = \frac{7}{6}$ 의 소수 부분은 $\frac{1}{6}$ 이다.

66

$$T = T_a + (T_0 - T_a)10^{-0.02t}$$

$T_a = 20, T_0 = 120, T = 25$ 를 대입하면

$$25 = 20 + (120 - 20)10^{-0.02t}$$

$$5 = 100 \times 10^{-0.02t}, \quad 10^{-0.02t} = \frac{1}{20}$$

$$\log 10^{-0.02t} = \log \frac{1}{20}$$

$$-0.02t = \log \frac{1}{20} = -\log 20 = -(1 + \log 2)$$

$$\therefore t = \frac{-(1 + \log 2)}{-0.02} = \frac{1 + 0.3}{0.02} = 65$$

따라서 물체의 온도가 25 °C가 되는 것은 65분 후이다.

답 ②

67

먼저 제거 장치가 가동되기 시작하고 n 초 후 작업장의 1 m^3 당 먼지의 양이 $50 \mu\text{g}$ 이 되었으므로

$$50 = 20 + 180 \times 3^{-\frac{n}{256}}, \quad 30 = 180 \times 3^{-\frac{n}{256}}$$

$$3^{-\frac{n}{256}} = \frac{1}{6}, \quad 3^{-\frac{n}{256}} = 6^{-1}, \quad 3^{\frac{n}{256}} = 6$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 3^{\frac{n}{256}} = \log 6, \quad \frac{n}{256} \log 3 = \log 6$$

$$\begin{aligned} \therefore n &= \frac{256 \log 6}{\log 3} = \frac{256(\log 2 + \log 3)}{\log 3} \\ &= \frac{256(0.30 + 0.48)}{0.48} = 416 \end{aligned}$$

답 416

68

$$\text{ㄹ. } y = 2 \cdot 3^x \text{에서 } y = 3^{\log_3 2} \cdot 3^x$$

$$\therefore y = 3^{x + \log_3 2}$$

$$\text{ㄴ. } y = \frac{1}{2^x} \text{에서 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㄴ

69

$$(1) f(2) = 2^2 = 4$$

$$(2) f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{-1} = (\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$(4) g(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

$$(5) g(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$(6) g(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$$

답 (1) 4 (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) 1 (5) $\frac{1}{27}$ (6) 9

70

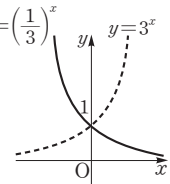
답 (1) 실수 (2) 양의 실수 (3) <

(4) > (5) x 축 (직선 $y=0$)

71

(1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ 이므로 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

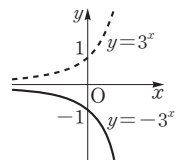
따라서 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 실수 전체의 집합, 치역은 양의 실수 전체의 집합, 점근선은 x 축 (직선 $y=0$)



이다.

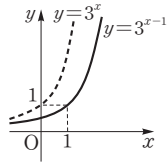
(2) $y = -3^x$ 에서 $-y = 3^x$ 이므로 함수 $y = -3^x$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y = -3^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 실수 전체의 집합, 치역은 음의 실수 전체의 집합, 점근선은 x 축 (직선 $y=0$)이다.



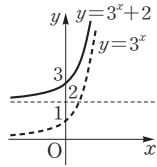
(3) 함수 $y=3^{x-1}$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=3^{x-1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 실수 전체의 집합, 치역은 양의 실수 전체의 집합, 점근선은 x 축(직선 $y=0$)이다.



(4) 함수 $y=3^x+2$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=3^x+2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 실수 전체의 집합, 치역은 $\{y \mid y > 2\}$, 점근선은 직선 $y=2$ 이다.



답 풀이 참조

72

(1) $\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{9}=9^{\frac{1}{4}}=(3^2)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}}$

이때 $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ 이고, 지수함수 $y=3^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이므로 $3^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{2}}$
 $\therefore \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{9}$

(2) $(\frac{1}{5})^{-2}, (\frac{1}{5})^{0.5}$ 에서 $-2 < 0.5$ 이고, 지수함수 $y=(\frac{1}{5})^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이므로 $(\frac{1}{5})^{-2} > (\frac{1}{5})^{0.5}$

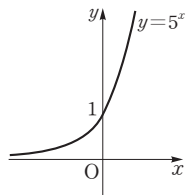
답 (1) $\sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{9}$ (2) $(\frac{1}{5})^{-2} > (\frac{1}{5})^{0.5}$

73

함수 $y=5^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다. (참)

ㄴ. 그래프의 점근선은 x 축이다. (거짓)



ㄷ. x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다. (참)

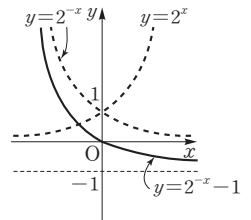
ㄹ. 지수함수 $y=5^x$ 은 일대일함수이므로 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다. (참)
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

74

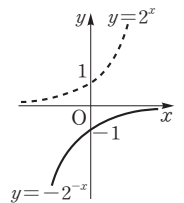
(1) $y=2^{-x}-1$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=2^{-x}-1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 실수 전체의 집합, 치역은 $\{y \mid y > -1\}$, 점근선은 직선 $y=-1$ 이다.



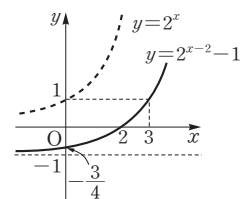
(2) $y=-2^{-x}$ 에서 $-y=2^{-x}$ 이므로 함수 $y=-2^{-x}$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=-2^{-x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 실수 전체의 집합, 치역은 $\{y \mid y < 0\}$, 점근선은 x 축(직선 $y=0$)이다.



(3) $y=2^{x-2}-1$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=2^{x-2}-1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 실수 전체의 집합, 치역은 $\{y \mid y > -1\}$, 점근선은 직선 $y=-1$ 이다.

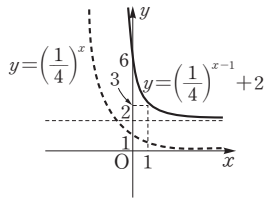


(4) $y=(\frac{1}{4})^{x-1}+2$ 의 그래프는 $y=(\frac{1}{4})^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} + 2 \text{의 그}$$

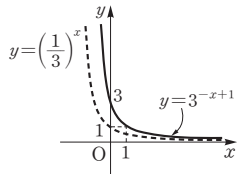
래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 실수 전체의 집합, 치역은 $\{y|y > 2\}$, 점근선은 직선 $y=2$ 이다.



(5) $y = 3^{-x+1} = 3^{-(x-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 이므로 함수 $y = 3^{-x+1}$

의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = 3^{-x+1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 실수 전체의 집합, 치역은 $\{y|y > 0\}$, 점근선은 x 축(직선 $y=0$)이다.

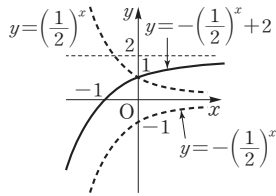


(6) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수

$$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \text{의}$$

그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 실수 전체의 집합, 치역은 $\{y|y < 2\}$, 점근선은 직선 $y=2$ 이다.



답 풀이 참조

75

$y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 3^{x-3} - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = 3^{-x-3} - 2 \quad \therefore y = -3^{-x-3} + 2$$

$$\text{즉 } y = -3^{-x} \cdot 3^{-3} + 2 = -\frac{1}{27} \cdot 3^{-x} + 2$$

$$\therefore a = -\frac{1}{27}, b = 2$$

$$\text{답 } a = -\frac{1}{27}, b = 2$$

76

$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x+1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 의 그래프가 두 점 $(-1, m)$, $(2, n)$ 을 지나므로

$$m = \left(\frac{2}{3}\right)^{-(-1)+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$n = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore mn = \frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{답 } \frac{2}{3}$$

77

함수 $y = 2^x$ 의 그래프는 점

$(0, 1)$ 을 지나므로 $a = 1$

직선 $y = x$ 가 점 $(b, 1)$ 을

지나므로 $b = 1$

함수 $y = 2^x$ 의 그래프가 점

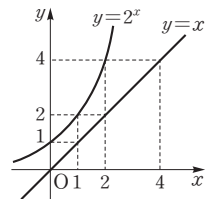
$(1, c)$ 를 지나므로 $c = 2$

직선 $y = x$ 는 점 $(2, 2)$ 를 지나고, 함수 $y = 2^x$ 의 그래프는 점 $(2, 4)$ 를 지난다.

또한 직선 $y = x$ 는 점 $(4, 4)$ 를 지나므로 $d = 4$

$$\therefore a + b + c + d = 1 + 1 + 2 + 4 = 8$$

답 8



78

$$(1) \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}, 0.5^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$$

이때 $-\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{3}{2}$ 이고, 지수함수 $y = 2^x$ 은 x 의

값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이므로

$$2^{-\frac{1}{3}} < 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore 0.5^{\frac{1}{3}} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2^3}$$

$$(2) \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1, \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{27}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$$

이때 $\frac{1}{3} < \frac{3}{4} < 1$ 이고, 지수함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{9}} < \sqrt[4]{\frac{1}{27}} < \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$\text{답 (1) } 0.5^{\frac{1}{3}} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2^3} \quad (2) \sqrt{\frac{1}{9}} < \sqrt[4]{\frac{1}{27}} < \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

79

$f(x)$ 와 $g(x)$ 는 각각 서로의 역함수이므로

$$g\left(\frac{1}{25}\right) = a \text{라 하면 } f(a) = \frac{1}{25}$$

$$5^a = 5^{-2} \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{25}\right) = -2$$

$$g(125) = b \text{라 하면 } f(b) = 125$$

$$5^b = 5^3 \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore g(125) = 3$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{25}\right) \cdot g(125) = -2 \times 3 = -6$$

답 -6

80

$f(x)$ 와 $g(x)$ 는 각각 서로의 역함수이므로

$$g\left(\frac{4}{3}\right) = a \text{라 하면 } f(a) = \frac{4}{3}$$

$$3^a \cdot 2^{1-a} = \frac{4}{3}$$

$$3^a \cdot 2^1 \cdot 2^{-a} = \frac{4}{3}, 3^a \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^a = \frac{4}{3}, 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^a = \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^a = \frac{2}{3}, \left(\frac{3}{2}\right)^a = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

$$\therefore a = -1$$

$$\therefore g\left(\frac{4}{3}\right) = -1$$

답 -1

81

답 증가, 2, 9, -1, $\frac{1}{3}$

82

답 감소, -2, 9, 3, $\frac{1}{27}$

83

(1) 함수 $y = 2^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하는 함수이다.

따라서 $0 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y = 2^x$ 은 $x=3$ 에서 최댓값 $2^3=8$, $x=0$ 에서 최솟값 $2^0=1$ 을 갖는다.

(2) 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 은

$$x = -2 \text{에서 최댓값 } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16,$$

$$x = 1 \text{에서 최솟값 } \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4} \text{을 갖는다.}$$

(3) 함수 $y = 5^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하는 함수이다.

따라서 $x \geq 1$ 일 때, 함수 $y = 5^x$ 은 최댓값을 갖지 않고, $x=1$ 에서 최솟값 $5^1=5$ 를 갖는다.

(4) 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $x \leq -4$ 일 때, 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 은 최댓값을

갖지 않고, $x=-4$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81$ 을 갖는다.

답 (1) 최댓값 : 8, 최솟값 : 1

(2) 최댓값 : 16, 최솟값 : $\frac{1}{4}$

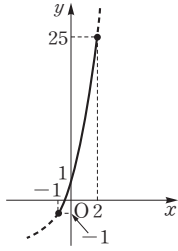
(3) 최솟값 : 5, 최댓값은 없다.

(4) 최솟값 : 81, 최댓값은 없다.

84

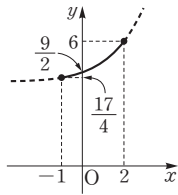
(1) $y=3^{x+1}-2$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이다.

따라서 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $y=3^{x+1}-2$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $3^{2+1}-2=25$, $x=-1$ 에서 최솟값 $3^{-1+1}-2=-1$ 을 갖는다.



(2) $y=2^{x-1}+4$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이다.

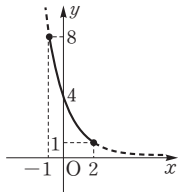
따라서 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $y=2^{x-1}+4$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $2^{2-1}+4=6$, $x=-1$ 에서 최솟값 $2^{-1-1}+4=\frac{17}{4}$ 을 갖는다.



(3) $y=2^{2-x}=2^{-(x-2)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 이

므로 함수 $y=2^{2-x}$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다.

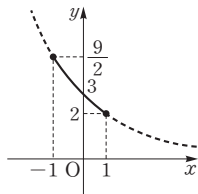
따라서 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $y=2^{2-x}$ 은 $x=-1$ 에서 최댓값 $2^{2+1}=8$, $x=2$ 에서 최솟값 $2^{2-2}=1$ 을 갖는다.



(4) $y=2^x \cdot 3^{1-x}=2^x \cdot 3^1 \cdot 3^{-x}$
 $=3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

이므로 함수 $y=2^x \cdot 3^{1-x}$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $-1 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y=2^x \cdot 3^{1-x}$ 은 $x=-1$ 에서 최댓값 $2^{-1} \cdot 3^{1-(-1)}=\frac{1}{2} \times 3^2=\frac{9}{2}$, $x=1$ 에서 최솟값 $2^1 \cdot 3^{1-1}=2$ 를 갖는다.



답 (1) 최댓값 : 25, 최솟값 : -1

(2) 최댓값 : 6, 최솟값 : $\frac{17}{4}$

(3) 최댓값 : 8, 최솟값 : 1

(4) 최댓값 : $\frac{9}{2}$, 최솟값 : 2

85

(1) $y=9^x-4 \cdot 3^x+6=(3^x)^2-4 \cdot 3^x+6$

$3^x=t$ ($t>0$)로 놓으면
 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $3^{-1} \leq 3^x \leq 3^1$

$\therefore \frac{1}{3} \leq t \leq 3$

이때 주어진 함수는

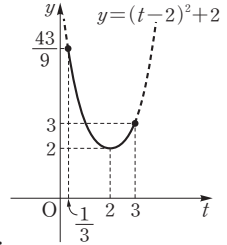
$$y=t^2-4t+6=(t-2)^2+2$$

따라서 $\frac{1}{3} \leq t \leq 3$ 일 때, 함수 $y=(t-2)^2+2$ 는

$t=\frac{1}{3}$ 에서 최댓값

$$\left(\frac{1}{3}-2\right)^2+2=\frac{43}{9},$$

$t=2$ 에서 최솟값 2를 갖는다.



(2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x+3$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2-2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x+3$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$-1 \leq x \leq 2$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$\therefore \frac{1}{4} \leq t \leq 2$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$$

따라서 $\frac{1}{4} \leq t \leq 2$ 일 때,

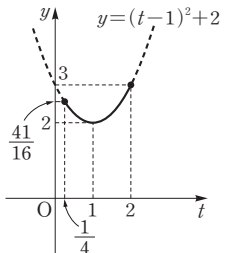
함수 $y=(t-1)^2+2$ 는

$t=2$ 에서 최댓값

$$(2-1)^2+2=3,$$

$t=1$ 에서 최솟값

$$0+2=2$$
를 갖는다.



(3) $y=4^x-2^{x+2}+2=(2^x)^2-2^x \cdot 2^2+2$

$$=(2^x)^2-4 \cdot 2^x+2$$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$x \leq 3$ 에서 $0 < 2^x \leq 2^3 \therefore 0 < t \leq 8$

이때 주어진 함수는 $y=t^2-4t+2=(t-2)^2-2$

따라서 $0 < t \leq 8$ 일 때, 함수

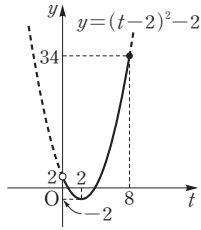
$$y=(t-2)^2-2$$

$t=8$ 에서 최댓값

$$(8-2)^2-2=34,$$

$t=2$ 에서 최솟값

$$0-2=-2$$



답 (1) 최댓값 : $\frac{43}{9}$, 최솟값 : 2

(2) 최댓값 : 3, 최솟값 : 2

(3) 최댓값 : 34, 최솟값 : -2

참고 (2) $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가하면 t 의 값은 감

소하는 함수이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$2 \geq t \geq \frac{1}{4} \quad \therefore \frac{1}{4} \leq t \leq 2$$

86

$$y=9^x+k \cdot 3^{x+1}+3=(3^x)^2+3k \cdot 3^x+3$$

$3^x=t$ ($t > 0$)로 놓으면 주어진 함수는

$$y=t^2+3kt+3=\left(t+\frac{3}{2}k\right)^2-\frac{9}{4}k^2+3$$

따라서 $t > 0$ 일 때, 함수

$$y=\left(t+\frac{3}{2}k\right)^2-\frac{9}{4}k^2+3$$

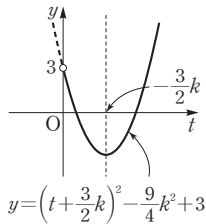
이 최솟값 -6 을 가지므로

$$-\frac{3}{2}k > 0$$

$$-\frac{9}{4}k^2+3=-6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{즉 } k < 0 \text{이고, } -\frac{9}{4}k^2=-9, k^2=4$$

$$\therefore k=-2$$



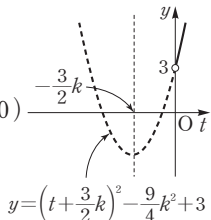
답 -2

참고 $\textcircled{1}$ 에서 $-\frac{3}{2}k \leq 0$ 이면

함수

$$y=\left(t+\frac{3}{2}k\right)^2-\frac{9}{4}k^2+3 \quad (t > 0)$$

은 최솟값을 갖지 않는다.



87

(1) $f(x)=x^2+4x+2$ 로 놓으면

$$y=3^{x^2+4x+2}$$

에서 $y=3^{f(x)}$

$y=3^{f(x)}$ 의 밑 3이 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최소일 때

$y=3^{f(x)}$ 도 최소가 된다.

$f(x)=x^2+4x+2=(x+2)^2-2$ 이므로

$f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최솟값 -2 를 갖는다.

따라서 함수 $y=3^{f(x)}$ 은 $x=-2$ 에서 최솟값

$$3^{-2}=\frac{1}{9}$$

(2) $f(x)=-x^2-2x+3$ 으로 놓으면

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}$$

에서 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$ 의 밑 $\frac{1}{3}$ 이 1보다 작은 양수이므로

$f(x)$ 가 최대일 때 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$ 은 최소가 된다.

$f(x)=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$ 이므로

$f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값 4를 갖는다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$ 은 $x=-1$ 에서 최솟값

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

$$\therefore a=-2, b=\frac{1}{9} \quad (2) a=-1, b=\frac{1}{81}$$

88

(1) $f(x)=-x^2-3x+5$ 로 놓으면

$$y=2^{-x^2-3x+5}$$

에서 $y=2^{f(x)}$ 의 밑 2가 1보다 크므로

$y=2^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 가 최대일 때 최대가 되고, $f(x)$

가 최소일 때 최소가 된다.

$f(x)=-x^2-3x+5=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$ 이므로

$-1 \leq x \leq 1$ 일 때, $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값 7,

$x=1$ 에서 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $-1 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y=2^{f(x)}$ 은 $x=-1$

에서 최댓값 $2^7=128$, $x=1$ 에서 최솟값 $2^1=2$ 를

갖는다.

(2) $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ 로 놓으면

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-7} \text{에서 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작은 양수이므로

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 가 최소일 때 최대가 되고,

$f(x)$ 가 최대일 때 최소가 된다.

$$f(x) = -x^2 + 4x - 7 = -(x-2)^2 - 3 \text{이므로}$$

$1 \leq x \leq 4$ 일 때, $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 -3 ,
 $x=4$ 에서 최솟값 -7 을 갖는다.

따라서 $1 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 $x=2$ 에

서 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$, $x=4$ 에서 최댓값

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 128 \text{을 갖는다.}$$

답 (1) 최댓값 : 128, 최솟값 : 2

(2) 최댓값 : 128, 최솟값 : 8

89

$f(x) = -x^2 - 2x + 1$ 로 놓으면 $y = a^{-x^2-2x+1}$ 에서

$$y = a^{f(x)}$$

$y = a^{-x^2-2x+1}$ 의 밑 a 가 $0 < a < 1$ 이므로 $y = a^{f(x)}$ 은

$f(x)$ 가 최대일 때 최소가 된다.

$$f(x) = -x^2 - 2x + 1 = -(x+1)^2 + 2 \text{이므로 } f(x)$$

는 $x = -1$ 에서 최댓값 2를 갖는다.

따라서 함수 $y = a^{f(x)}$ 은 $x = -1$ 에서 최솟값 a^2 을 갖는

다. 이때 최솟값이 $\frac{1}{16}$ 이므로

$$a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \frac{1}{4} \quad (\because 0 < a < 1)$$

답 $\frac{1}{4}$

90

실수 x 에 대하여 $5^x > 0$, $5^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5^x + 5^{-x} \geq 2\sqrt{5^x \cdot 5^{-x}} = 2$$

이때 등호는 $5^x = 5^{-x}$ 일 때 성립하므로

$$x = -x \quad \therefore x = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 2$$

$$\therefore a + b = 2$$

답 2

91

$$y = 10^{2x-1} + 10^{3-2x} \text{에서}$$

$10^{2x-1} > 0$, $10^{3-2x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$10^{2x-1} + 10^{3-2x} \geq 2\sqrt{10^{2x-1} \cdot 10^{3-2x}} \\ = 2\sqrt{10^2} = 20$$

이때 등호는 $10^{2x-1} = 10^{3-2x}$ 일 때 성립하므로

$$2x - 1 = 3 - 2x \quad \therefore x = 1$$

따라서 $\alpha = 1$, $\beta = 20$ 이므로

$$\alpha + \beta = 21$$

답 21

92

$$2^x + 2^{-x} = t \text{로 놓으면}$$

$2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $2^x = 2^{-x}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립)

$$\therefore t \geq 2$$

$$\text{또한 } 4^x + 4^{-x} = (2^x)^2 + (2^{-x})^2 = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \text{이므로}$$

$$y = 4^x + 4^{-x} + 2(2^x + 2^{-x}) + 5 \text{에서}$$

$$y = t^2 - 2 + 2t + 5 = (t+1)^2 + 2$$

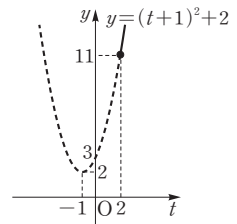
따라서 $t \geq 2$ 일 때, 함수

$$y = (t+1)^2 + 2 \text{는 } t = 2 \text{에서}$$

$$\text{최솟값 } (2+1)^2 + 2 = 11 \text{을}$$

갖는다.

답 11



93

$$(1) 2^x = 8 \text{에서 } 2^x = 2^3 \quad \therefore x = 3$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16} \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$\therefore x=4$

(3) $3^x = \frac{1}{81}$ 에서 $3^x = 3^{-4} \quad \therefore x = -4$

(4) $5^x = 125$ 에서 $5^x = 5^3 \quad \therefore x = 3$

(5) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$ 에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \therefore x = 2$

(6) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$ 에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \quad \therefore x = -2$

답 (1) $x=3$ (2) $x=4$ (3) $x=-4$
 (4) $x=3$ (5) $x=2$ (6) $x=-2$

94

(1) $2^{2x} = 2^{3-x}$ 에서 $2x = 3 - x$
 $3x = 3 \quad \therefore x = 1$

(2) $3^{-x+1} = 3^{2x-2}$ 에서 $-x + 1 = 2x - 2$
 $-3x = -3 \quad \therefore x = 1$

(3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2x-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4x+3}$ 에서
 $-2x - 3 = 4x + 3$
 $-6x = 6 \quad \therefore x = -1$

답 (1) $x=1$ (2) $x=1$ (3) $x=-1$

95

(1) $3^{2x-4} - 3^{3x+1} = 0$ 에서 $3^{2x-4} = 3^{3x+1}$
 $2x - 4 = 3x + 1$
 $\therefore x = -5$

(2) $\left(\frac{1}{81}\right)^{4x-4} - \left(\frac{1}{81}\right)^{x-1} = 0$ 에서
 $\left(\frac{1}{81}\right)^{4x-4} = \left(\frac{1}{81}\right)^{x-1}$
 $4x - 4 = x - 1, 3x = 3$
 $\therefore x = 1$

답 (1) $x=-5$ (2) $x=1$

96

(1) $2^{2x-3} = 128$ 에서 $2^{2x-3} = 2^7$
 $2x - 3 = 7, 2x = 10 \quad \therefore x = 5$

(2) $25^{x+3} = \left(\frac{1}{125}\right)^{2x-1}$ 에서
 $(5^2)^{x+3} = (5^{-3})^{2x-1}, 5^{2x+6} = 5^{-6x+3}$

$2x + 6 = -6x + 3, 8x = -3 \quad \therefore x = -\frac{3}{8}$

(3) $2^{-x+2} = 16^{2x}$ 에서 $2^{-x+2} = (2^4)^{2x}$
 $2^{-x+2} = 2^{8x}, -x + 2 = 8x, 9x = 2$
 $\therefore x = \frac{2}{9}$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = (\sqrt{2})^{x-3}$ 에서
 $(2^{-1})^{x+1} = (2^{\frac{1}{2}})^{x-3}, 2^{-x-1} = 2^{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$
 $-x - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$
 $\therefore x = \frac{1}{3}$

(5) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x+2} = 81\sqrt{3}$ 에서
 $(3^{-2})^{-x+2} = 3^{4 + \frac{1}{2}}, 3^{2x-4} = 3^{\frac{9}{2}}$
 $2x - 4 = \frac{9}{2}, 2x = \frac{17}{2} \quad \therefore x = \frac{17}{4}$

(6) $4^{x+2} - 8^{x-7} = 0$ 에서
 $4^{x+2} = 8^{x-7}, (2^2)^{x+2} = (2^3)^{x-7}$
 $2^{2x+4} = 2^{3x-21}, 2x + 4 = 3x - 21$
 $\therefore x = 25$

답 (1) $x=5$ (2) $x=-\frac{3}{8}$ (3) $x=\frac{2}{9}$
 (4) $x=\frac{1}{3}$ (5) $x=\frac{17}{4}$ (6) $x=25$

97

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ 이므로 방정식 $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ 은

$\boxed{t^2} - 3\boxed{t} + 2 = 0$

$(t-1)(t-2) = 0$

$\therefore t = \boxed{1}$ 또는 $t = \boxed{2}$

즉 $2^x = \boxed{1}$ 또는 $2^x = \boxed{2}$ 이므로

$x = \boxed{0}$ 또는 $x = \boxed{1}$

답 풀이 참조

98

(1) $9^{x^2+3x} = 3^{x^2+4x+3}$ 에서
 $(3^2)^{x^2+3x} = 3^{x^2+4x+3}, 3^{2x^2+6x} = 3^{x^2+4x+3}$

$$2x^2+6x=x^2+4x+3, x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

(2) $(2\sqrt{2})^{2x^2+12}=2^{-15x}$ 에서

$$(2^{\frac{3}{2}})^{2x^2+12}=2^{-15x}, 2^{3x^2+18}=2^{-15x}$$

$$3x^2+18=-15x, 3x^2+15x+18=0$$

$$3(x+3)(x+2)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=-2$$

(3) $\frac{3^{x^2+1}}{3^{x-1}}=81$ 에서 $3^{x^2+1-(x-1)}=3^4, 3^{x^2-x+2}=3^4$

$$x^2-x+2=4, x^2-x-2=0, (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

(4) $(\frac{2}{3})^{x^2}=(\frac{3}{2})^{2-3x}$ 에서

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{2-3x}, \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3x}$$

$$x^2=-2+3x, x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

답 (1) $x=-3$ 또는 $x=1$

(2) $x=-3$ 또는 $x=-2$

(3) $x=-1$ 또는 $x=2$

(4) $x=1$ 또는 $x=2$

99

(1) $9^x-6 \times 3^x-27=0$ 에서 $(3^x)^2-6 \times 3^x-27=0$

$$3^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-6t-27=0, (t+3)(t-9)=0$$

$$\therefore t=9 (\because t>0)$$

$$\text{즉 } 3^x=9 \quad \therefore x=2$$

(2) $4^{x+1}=4 \times 4^x=4 \times (2^x)^2,$

$$5 \times 2^{x+2}=5 \times 2^x \times 2^2=20 \times 2^x \text{이므로}$$

$$4^{x+1}-5 \times 2^{x+2}+16=0 \text{에서}$$

$$4 \times (2^x)^2-20 \times 2^x+16=0$$

$$2^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$4t^2-20t+16=0, t^2-5t+4=0$$

$$(t-1)(t-4)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=4$$

$$\text{즉 } 2^x=1 \text{ 또는 } 2^x=4 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

(3) $3^x-9 \times 3^{-x}=8$ 에서 $3^x-\frac{9}{3^x}=8$

$$3^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t-\frac{9}{t}=8$$

양변에 t 를 곱하면

$$t^2-9=8t (\because t \neq 0)$$

$$t^2-8t-9=0, (t+1)(t-9)=0$$

$$\therefore t=9 (\because t>0)$$

$$\text{즉 } 3^x=9 \quad \therefore x=2$$

(4) $(\frac{1}{9})^x=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2$ 이므로 $(\frac{1}{9})^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x=12$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+\left(\frac{1}{3}\right)^x=12$$

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+\left(\frac{1}{3}\right)^x-12=0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2+t-12=0, (t-3)(t+4)=0$$

$$\therefore t=3 (\because t>0)$$

$$\text{즉 } \left(\frac{1}{3}\right)^x=3$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \quad \therefore x=-1$$

답 (1) $x=2$ (2) $x=0$ 또는 $x=2$

(3) $x=2$ (4) $x=-1$

100

(1) $4^x-5 \times 2^x+2=0$ 에서 $(2^x)^2-5 \times 2^x+2=0$

$$2^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-5t+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $4^x-5 \times 2^x+2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha \cdot 2^\beta=2$$

$$2^{\alpha+\beta}=2 \quad \therefore \alpha+\beta=1$$

(2) $2^{2x+1}-2^x+k=0$ 에서 $2 \times (2^x)^2-2^x+k=0$

$$2^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$2t^2-t+k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $2^{2x+1}-2^x+k=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha \cdot 2^\beta=\frac{k}{2}, 2^{\alpha+\beta}=\frac{k}{2}$$

$$\alpha + \beta = -5 \text{이므로 } 2^{-5} = \frac{k}{2}$$

$$\therefore k = \frac{1}{16}$$

답 (1) 1 (2) $\frac{1}{16}$

101

(1) 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이다.

(i) $3x + 1 = 2x + 3$ 이면 $x = 2$

(ii) $x = 1$ 이면 $1^4 = 1^5$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x = 1$ 또는 $x = 2$

(2) 지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0이다.

(i) $x + 7 = 4$ 이면 $x = -3$

(ii) $x - 1 = 0$, 즉 $x = 1$ 이면 $8^0 = 4^0$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$

(3) 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이다.

(i) $x^2 = 2x + 3$ 에서

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 (\because x > 1)$$

(ii) $x - 1 = 1$, 즉 $x = 2$ 이면 $1^4 = 1^7$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x = 2$ 또는 $x = 3$

(4) 지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0이다.

(i) $2x - 1 = 3x - 5$ 이면 $x = 4$

(ii) $x - 3 = 0$, 즉 $x = 3$ 이면 $5^0 = 4^0$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = 4$

답 (1) $x = 1$ 또는 $x = 2$

(2) $x = -3$ 또는 $x = 1$

(3) $x = 2$ 또는 $x = 3$

(4) $x = 3$ 또는 $x = 4$

102

$3^x = X$ ($X > 0$), $3^y = Y$ ($Y > 0$)로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} -9X + Y = 26 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 54X + \frac{1}{3}Y = 15 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $X = \frac{1}{9}$, $Y = 27$

$$3^x = \frac{1}{9}, 3^y = 27 \quad \therefore x = -2, y = 3$$

따라서 $\alpha = -2$, $\beta = 3$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = (-2)^2 + 3^2 = 13$$

답 13

103

영양제 복용 후 1시간마다 체내에 잔류하는 A 물질의 양이 $\frac{1}{2}$ 로 줄어들고, t 시간 후 체내에 잔류하는 A 물질의 양이 12.5%, 즉 $\frac{1}{8}$ 로 줄어들었으므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{8} \quad \therefore t = 3$$

답 3

104

(1) $3^x < 9$ 에서 $3^x < 3^2$

밑이 1보다 크므로 $x < 2$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x < -3$

(3) $\left(\frac{5}{3}\right)^x \geq \left(\frac{5}{3}\right)^6$ 에서

밑이 1보다 크므로 $x \geq 6$

(4) $5^x \geq 125$ 에서 $5^x \geq 5^3$

밑이 1보다 크므로 $x \geq 3$

(5) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{81}$ 에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^4$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x \geq 4$

(6) $2^x < \frac{1}{64}$ 에서 $2^x < 2^{-6}$

밑이 1보다 크므로 $x < -6$

답 (1) $x < 2$ (2) $x < -3$

(3) $x \geq 6$ (4) $x \geq 3$

(5) $x \geq 4$ (6) $x < -6$

105

(1) $2^{3x} \leq 2^{4+x}$ 에서

밑이 1보다 크므로

$$3x \leq 4+x, 2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2$$

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-5x+1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-4x-1}$ 에서

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$-5x+1 < -4x-1$$

$$-x < -2 \quad \therefore x > 2$$

(3) $2^{2x} - 2^{x+1} < 0$ 에서 $2^{2x} < 2^{x+1}$

밑이 1보다 크므로

$$2x < x+1 \quad \therefore x < 1$$

(4) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-4x-5} - \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+1} \geq 0$ 에서

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{-4x-5} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+1}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$-4x-5 \leq 2x+1$$

$$-6x \leq 6 \quad \therefore x \geq -1$$

답 (1) $x \leq 2$ (2) $x > 2$

(3) $x < 1$ (4) $x \geq -1$

106

(1) $2^{-x+1} < 16$ 에서 $2^{-x+1} < 2^4$

밑이 1보다 크므로 $-x+1 < 4$

$$-x < 3 \quad \therefore x > -3$$

(2) $3^{3x-1} \leq 9$ 에서 $3^{3x-1} \leq 3^2$

밑이 1보다 크므로 $3x-1 \leq 2$

$$3x \leq 3 \quad \therefore x \leq 1$$

(3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} > \frac{1}{25}$ 에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} > \left(\frac{1}{5}\right)^2$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x+3 < 2$

$$\therefore x < -1$$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \leq \frac{1}{27}$ 에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x-2 \geq 3 \quad \therefore x \geq 5$$

답 (1) $x > -3$ (2) $x \leq 1$

(3) $x < -1$ (4) $x \geq 5$

107

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ 이므로

부등식 $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$ 은

$$t^2 - 3t + 2 < 0$$

$$(t-1)(t-2) < 0 \quad \therefore 1 < t < 2$$

즉 $1 < 2^x < 2$ 이므로

$$2^0 < 2^x < 2^1$$

밑이 1보다 크므로

$$0 < x < 1$$

답 풀이 참조

108

(1) $9^{-x} \geq (3\sqrt{3})^{-2-5x}$ 에서

$$(3^2)^{-x} \geq (3^{\frac{3}{2}})^{-2-5x}, 3^{-2x} \geq 3^{-3-\frac{15}{2}x}$$

밑이 1보다 크므로

$$-2x \geq -3 - \frac{15}{2}x, \frac{11}{2}x \geq -3$$

$$\therefore x \geq -\frac{6}{11}$$

(2) $\left(\frac{5}{4}\right)^{x+2} > \left(\frac{4}{5}\right)^{2-3x}$ 에서

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{x+2} > \left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}\right\}^{2-3x}, \left(\frac{5}{4}\right)^{x+2} > \left(\frac{5}{4}\right)^{-2+3x}$$

밑이 1보다 크므로

$$x+2 > -2+3x, -2x > -4 \quad \therefore x < 2$$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+x+12} \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{x^2+x}$ 에서

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+x+12} \leq \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}^{x^2+x}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+x+12} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2x^2+2x}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x^2+x+12 \geq 2x^2+2x$$

$$x^2+x-12 \leq 0, (x+4)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 3$$

(4) $4^x - 3 \times 2^{x+1} + 8 < 0$ 에서

$$(2^x)^2 - 6 \times 2^x + 8 < 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t + 8 < 0$$

$$(t-2)(t-4) < 0 \quad \therefore 2 < t < 4$$

즉 $2 < 2^x < 4$ 이므로 $2^1 < 2^x < 2^2$

밑이 1보다 크므로 $1 < x < 2$

(5) $9^x + 3^{x+1} \leq 3^{x+2} + 27$ 에서

$$(3^x)^2 + 3 \times 3^x \leq 9 \times 3^x + 27$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + 3t \leq 9t + 27, \quad t^2 - 6t - 27 \leq 0$$

$$(t+3)(t-9) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq t \leq 9$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t \leq 9$

즉 $3^x \leq 9$ 이므로 $3^x \leq 3^2$

밑이 1보다 크므로 $x \leq 2$

(6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 1$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + \frac{1}{9}t > 9t + 1, \quad 9t^2 + t > 81t + 9$$

$$9t^2 - 80t - 9 > 0, \quad (9t+1)(t-9) > 0$$

$$\therefore t < -\frac{1}{9} \quad \text{또는} \quad t > 9$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t > 9$

$$\text{즉} \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \text{이므로} \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x < -2$

답 (1) $x \geq -\frac{6}{11}$ (2) $x < 2$ (3) $-4 \leq x \leq 3$

(4) $1 < x < 2$ (5) $x \leq 2$ (6) $x < -2$

109

$4^x + a \times 2^x + b > 0$ 에서 $(2^x)^2 + a \times 2^x + b > 0$ ㉠

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + at + b > 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠의 해가 $x < -1$ 또는 $x > 2$ 이므로 ㉡의 해는

$$2^x < 2^{-1} \quad \text{또는} \quad 2^x > 2^2 \quad \leftarrow \text{밑이 1보다 크므로}$$

부등호 방향 그대로

$$\therefore t < \frac{1}{2} \quad \text{또는} \quad t > 4$$

해가 $t < \frac{1}{2}$ 또는 $t > 4$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)(t - 4) > 0$$

$$\therefore t^2 - \frac{9}{2}t + 2 > 0$$

따라서 $a = -\frac{9}{2}$, $b = 2$ 이므로

$$ab = -\frac{9}{2} \times 2 = -9$$

답 -9

110

(1) $x^{x+1} \leq x^5$ ($x > 0$)에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x+1 \geq 5 \quad \therefore x \geq 4$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $x = 1$ 일 때

$1^2 \leq 1^5$ 이므로 부등식이 성립한다.

(iii) $x > 1$ 일 때

밑이 1보다 크므로

$$x+1 \leq 5 \quad \therefore x \leq 4$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x \leq 4$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는

$$1 \leq x \leq 4$$

(2) $x^{2x-5} \geq x^9$ ($x > 0$)에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$2x-5 \leq 9, \quad 2x \leq 14 \quad \therefore x \leq 7$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로

$$0 < x < 1$$

(ii) $x = 1$ 일 때

$1^{-3} \geq 1^9$ 이므로 부등식이 성립한다.

(iii) $x > 1$ 일 때

밑이 1보다 크므로

$$2x-5 \geq 9, \quad 2x \geq 14 \quad \therefore x \geq 7$$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는

$$0 < x \leq 1 \quad \text{또는} \quad x \geq 7$$

(3) $(x+1)^{-2x-3} < (x+1)^5$ ($x > -1$)에서

(i) $0 < x+1 < 1$, 즉 $-1 < x < 0$ 일 때

밑이 1보다 작은 양수이므로
 $-2x-3 > 5, -2x > 8 \quad \therefore x < -4$
 그런데 $-1 < x < 0$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $x+1=1$, 즉 $x=0$ 일 때
 $1^{-3} < 1^5$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x+1 > 1$, 즉 $x > 0$ 일 때
 밑이 1보다 크므로
 $-2x-3 < 5, -2x < 8 \quad \therefore x > -4$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x > 0$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $x > 0$

- 답 (1) $1 \leq x \leq 4$
 (2) $0 < x \leq 1$ 또는 $x \geq 7$
 (3) $x > 0$

111

(1) $\left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1} < 625 < \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-12}$ 에서

$$(5^{-2})^{3x-1} < 5^4 < (5^{-1})^{4x-12}$$

$$5^{-6x+2} < 5^4 < 5^{-4x+12}$$

밑이 1보다 크므로

$$-6x+2 < 4 < -4x+12$$

(i) $-6x+2 < 4$ 에서 $-6x < 2$

$$\therefore x > -\frac{1}{3}$$

(ii) $4 < -4x+12$ 에서 $4x < 8$

$$\therefore x < 2$$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는

$$-\frac{1}{3} < x < 2$$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 에서

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$4x-3 > x^2 > x-1$$

$$\therefore x-1 < x^2 < 4x-3$$

(i) $x-1 < x^2$ 에서 $x^2-x+1 > 0$

$$\text{이때 } x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로 모}$$

든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $x^2 < 4x-3$ 에서 $x^2-4x+3 < 0$

$$(x-1)(x-3) < 0 \quad \therefore 1 < x < 3$$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는

$$1 < x < 3$$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \sqrt[3]{3} < \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}$ 에서 $3^{-x} < 3^{\frac{1}{3}} < (3^{-2})^{x-1}$

$$3^{-x} < 3^{\frac{1}{3}} < 3^{-2x+2}$$

밑이 1보다 크므로 $-x < \frac{1}{3} < -2x+2$

(i) $-x < \frac{1}{3}$ 에서 $x > -\frac{1}{3}$

(ii) $\frac{1}{3} < -2x+2$ 에서

$$2x < \frac{5}{3} \quad \therefore x < \frac{5}{6}$$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{6}$$

$$\text{답 (1) } -\frac{1}{3} < x < 2 \quad (2) 1 < x < 3$$

$$(3) -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{6}$$

112

(1) $25^x - 2 \times 5^{x+1} + k - 2 > 0$ 에서

$$(5^x)^2 - 10 \times 5^x + k - 2 > 0$$

$5^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 10t + k - 2 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(t) = t^2 - 10t + k - 2 = (t-5)^2 + k - 27$$

로 놓으면 $t > 0$ 인 모든 t 에

대하여 부등식 $\textcircled{1}$, 즉

$f(t) > 0$ 이 성립할 필요충

분조건은 $t > 0$ 에서 $f(t)$ 의

최솟값이 $f(5)$ 이므로 오른

쪽 그림과 같이 $f(5) > 0$ 이다.

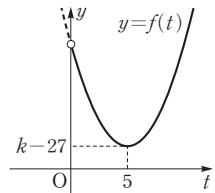
$$\text{즉 } f(5) = k - 27 > 0 \quad \therefore k > 27$$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + k + 1 \geq 0$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + k + 1 \geq 0$$

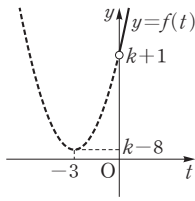
$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + 6t + k + 1 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



$$f(t) = t^2 + 6t + k + 1 = (t + 3)^2 + k - 8$$

로 놓으면 $t > 0$ 인 모든 t 에 대하여 부등식 ㉠, 즉 $f(t) \geq 0$ 이 성립할 필요충분 조건은 오른쪽 그림과 같이 $f(0) \geq 0$ 이다.



즉 $f(0) = k + 1 \geq 0 \quad \therefore k \geq -1$

(3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+2x} \leq 25^{x+k}$ 에서 $(5^{-1})^{x^2+2x} \leq (5^2)^{x+k}$

$$5^{-x^2-2x} \leq 5^{2x+2k}$$

밑이 1보다 크므로 $-x^2 - 2x \leq 2x + 2k$

$$\therefore x^2 + 4x + 2k \geq 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

모든 실수 x 에 대하여 ㉠이 항상 성립할 필요충분 조건은 이차방정식 $x^2 + 4x + 2k = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D \leq 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 2k \leq 0$$

$$2k \geq 4 \quad \therefore k \geq 2$$

답 (1) $k > 27$ (2) $k \geq -1$ (3) $k \geq 2$

113

2000만 원에 산 새 자동차의 1년 후의 가격이 1000만 원이므로 주어진 식에 $A=1000, A_0=2000, t=1$ 을 대입하면

$$1000 = 2000k^1 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

n 년 후에 자동차의 가격이 250만 원 이하로 떨어진다 고 하면 $A=250, A_0=2000, t=n$ 이므로

$$2000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 250$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{8}, \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \therefore n \geq 3$$

따라서 자동차의 가격이 250만 원 이하로 떨어지는 것은 최소 3년 후이다.

$$\therefore m = 3$$

답 3

114

(1) $f(4) = \log_2 4 = 2$

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

(3) $f(1) = \log_2 1 = 0$

(4) $g\left(\frac{1}{9}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2$

(5) $g(27) = \log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{3^{-1}} 3^3 = -3$

(6) $g(1) = \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$

답 (1) 2 (2) -1 (3) 0 (4) 2 (5) -3 (6) 0

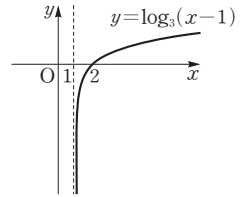
115

답 (1) 양의 실수 (2) 실수 (3) $<$ (4) $>$

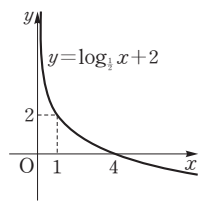
(5) y 축 (직선 $x=0$)

116

(1) 함수 $y = \log_3(x-1)$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x \mid x > 1\}$, 치역은 실수 전체의 집합, 점근선은 직선 $x=1$ 이다.



(2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 양의 실수 전체의 집합, 치역은 실수 전체의 집합, 점근선은 y 축 (직선 $x=0$)이다.



답 풀이 참조

117

(1) $y = \log_2(x+1) + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $[-1]$ 만큼, y 축의 방향으로 $[1]$ 만큼 평행이동한 것이다.

(2) $y = -\log_3 x$ 에서 $-y = \log_3 x$ 이므로 $y = -\log_3 x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 $[x]$ 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

답 (1) -1, 1 (2) x

118

답 양의 실수, 일대일대응, $\log_5 y, \log_5 x$

119

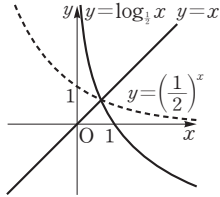
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3 \text{ 이므로}$$

$$(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = g(3) = \log_3 3^2 = 2$$

답 2

120

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 그래프는 점 (1, 0)을 지난다. (거짓)

ㄴ. 그래프의 점근선은 y 축이다. (참)

ㄷ. 양수 x 에 대하여 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다. (거짓)

ㄹ. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 양수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다. (참)

ㅁ. 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

121

$$(1) y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2) + 1$$

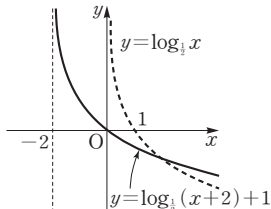
의 그래프는

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{의 그래프}$$

를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향

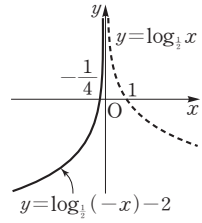
으로 1만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x \mid x > -2\}$, 치역은 실수 전체의 집합, 점근선은 직선 $x = -2$ 이다.



$$(2) y = \log_{\frac{1}{2}}(-x) - 2 \text{의 그래프}$$

는 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

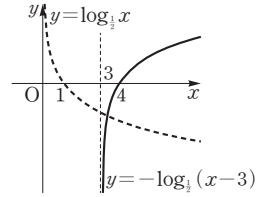


따라서 정의역은 $\{x \mid x < 0\}$, 치역은 실수 전체의 집합, 점근선은 y 축(직선 $x = 0$)이다.

$$(3) y = -\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \text{의}$$

그래프는 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의

그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x \mid x > 3\}$, 치역은 실수 전체의 집합, 점근선은 직선 $x = 3$ 이다.

답 풀이 참조

122

$$y = \log_3(27x+9)$$

$$= \log_3\left\{27\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\} = \log_3 27 + \log_3\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \log_3\left(x+\frac{1}{3}\right) + 3$$

따라서 함수 $y = \log_3(27x+9)$ 의 그래프는

$y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore m = -\frac{1}{3}, n = 3$$

$$\therefore mn = \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -1$$

답 -1

123

$y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y = \log_{\frac{1}{5}} x$

$$y = -\log_{\frac{1}{5}} x, y = -\log_5 x$$

$\therefore y = \log_5 x$ ㉠

㉠의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \log_5(x-2) - 3$

답 $y = \log_5(x-2) - 3$

124

(1) $\log_4 25 = \log_{2^2} 5^2 = \log_2 5 = \log_{2^3} 5^3 = \log_8 125$
 $\log_8 80$

$2 = \log_8 8^2 = \log_8 64$

이때 $64 < 80 < 125$ 이고, 로그함수 $y = \log_8 x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이므로

$\log_8 64 < \log_8 80 < \log_8 125$

$\therefore 2 < \log_8 80 < \log_4 25$

(2) $3 < 4 < 5$ 이고, 로그함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이므로

$\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 5$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} 4 < \log_{\frac{1}{2}} 3$

답 (1) $2 < \log_8 80 < \log_4 25$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} 4 < \log_{\frac{1}{2}} 3$

125

(1) 함수 $y = 2^{-x+1} - 3$ 은 실수 전체의 집합에서 집합 $\{y | y > -3\}$ 으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = 2^{-x+1} - 3$ 에서 $y + 3 = 2^{-x+1}$

로그의 정의에서

$-x + 1 = \log_2(y + 3)$

$\therefore x = -\log_2(y + 3) + 1$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y = -\log_2(x + 3) + 1$

$\therefore y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) + 1$

(2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2) + 1$ 은 $\{x | x > 2\}$ 에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2) + 1$ 에서 $y - 1 = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$

로그의 정의에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^{y-1} = x - 2 \quad \therefore x = \left(\frac{1}{3}\right)^{y-1} + 2$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$

답 (1) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) + 1$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$

126

$y = \log_4(x + a) - 3$ 에서 $y + 3 = \log_4(x + a)$

로그의 정의에서

$x + a = 4^{y+3}$

$\therefore x = 4^{y+3} - a$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

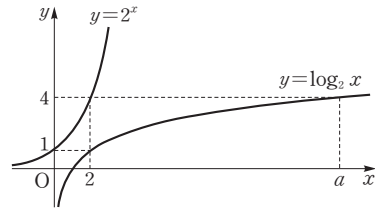
$y = 4^{x+3} - a$

$\therefore a = 1, b = 3$

$\therefore a + b = 4$

답 4

127



$y = \log_2 x$ 에서

$y = 1$ 일 때, $\log_2 x = 1 \quad \therefore x = 2$

$y = 2^x$ 에서 $x = 2$ 일 때, $y = 2^2 = 4$

$y = \log_2 x$ 의 그래프는 점 $(a, 4)$ 를 지나므로

$4 = \log_2 a$ 에서

$a = 2^4 = 16$

답 16

128

$y = \log_3 x + 1$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 직선

$$x=3\text{이}$$

$$y=\log_3 x+1,$$

$$y=\log_3 x\text{의 그래프와}$$

만나는 점을 각각 A,

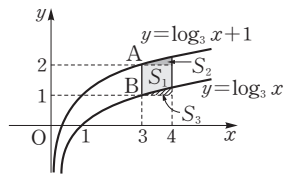
B라 하면

$$\text{점 B의 } y\text{좌표는 } \log_3 3=1$$

$$\text{점 A의 } y\text{좌표는 } \log_3 3+1=2$$

또한 위의 그림에서 $S_2=S_3$ 이므로 구하는 넓이는

$$S_1+S_2=S_1+S_3=(4-3)\times(2-1)=1$$



답 1

129

답 증가, 1, 0, $\frac{1}{2}$, -1

130

답 감소, $\frac{1}{9}$, 2, 3, -1

131

(1) $y=\log_3 x$ 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하는 함수이다.

따라서 $3\leq x\leq 9$ 일 때, 함수 $y=\log_3 x$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 $\log_3 3=1$, $x=9$ 에서 최댓값 $\log_3 9=2$ 를 갖는다.

(2) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $\frac{1}{16}\leq x\leq 4$ 일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ 는 $x=\frac{1}{16}$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}=\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^2=2$, $x=4$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{4}} 4=-1$ 을 갖는다.

(3) $y=\log_5 x$ 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하는 함수이다.

따라서 $x\leq 1$ 일 때, 함수 $y=\log_5 x$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $\log_5 1=0$ 을 갖고, 최솟값은 없다.

(4) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $x\leq \frac{1}{16}$ 일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 는 $x=\frac{1}{16}$

에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}=4$ 를 갖고, 최댓값은 없다.

답 (1) 최댓값 : 2, 최솟값 : 1

(2) 최댓값 : 2, 최솟값 : -1

(3) 최댓값 : 0, 최솟값은 없다.

(4) 최솟값 : 4, 최댓값은 없다.

132

(1) $y=\log_2(x+1)-3$ 은 밑 2가 $2>1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이다.

따라서 $1\leq x\leq 7$ 일 때, 함수 $y=\log_2(x+1)-3$ 은 $x=1$ 에서 최솟값 $\log_2(1+1)-3=-2$, $x=7$ 에서 최댓값 $\log_2(7+1)-3=0$ 을 갖는다.

(2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)+3$ 은 밑 $\frac{1}{3}$ 이 $0<\frac{1}{3}<1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $1\leq x\leq 4$ 일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)+3$ 은 $x=1$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}}(2+1)+3=2$, $x=4$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}}(8+1)+3=1$ 을 갖는다.

답 (1) 최댓값 : 0, 최솟값 : -2

(2) 최댓값 : 2, 최솟값 : 1

133

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$ 는 밑 $\frac{1}{2}$ 이 $0<\frac{1}{2}<1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $6\leq x\leq 8$ 일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$ 는 $x=6$ 에서 최대이고, $x=8$ 에서 최소이다.

이때 최솟값이 -2 이므로

$$\log_{\frac{1}{2}}(8-a)=-2$$

$$4=8-a \quad \therefore a=4$$

따라서 구하는 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{2}}(6-4) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

답 -1

134

$f(x) = -x^2 + 6x + 7$ 로 놓으면
 $y = \log_2(-x^2 + 6x + 7)$ 에서 $y = \log_2 f(x)$
 함수 $y = \log_2 f(x)$ 의 밑 2가 1보다 크므로 함수
 $y = \log_2 f(x)$ 는 $f(x)$ 가 최대일 때 최대가 된다.
 $f(x) = -x^2 + 6x + 7 = -(x-3)^2 + 16$ 이므로
 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 16을 갖는다.
 따라서 함수 $y = \log_2 f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값
 $\log_2 16 = 4$ 를 갖는다.
 $\therefore a=3, b=4$
 $\therefore a+b=7$

답 7

135

$a > 1$ 이면 함수 $y = \log_a(x^2 - 2x + 5)$ 는 $x^2 - 2x + 5$
 가 최대일 때 최대가 된다. 그런데 $x^2 - 2x + 5$ 의 최댓
 값은 존재하지 않으므로 함수 $y = \log_a(x^2 - 2x + 5)$
 의 최댓값도 존재하지 않는다.
 $\therefore 0 < a < 1$
 함수 $y = \log_a(x^2 - 2x + 5)$ 는 $x^2 - 2x + 5$ 가 최소일
 때 최대가 되고,
 $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$ 이므로
 $x^2 - 2x + 5$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 4를 갖는다.
 따라서 함수 $y = \log_a(x^2 - 2x + 5)$ 는 $x=1$ 에서 최댓
 값 $\log_a 4$ 를 갖고, 이 최댓값이 -2 이므로
 $\log_a 4 = -2$
 $a^{-2} = 4, a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2} (\because 0 < a < 1)$

답 $\frac{1}{2}$

136

$f(x) = x^2 + 2x + 5$ 로 놓으면
 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x + 5)$ 에서
 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 의 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작은 양수이므로
 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 는 $f(x)$ 가 최소일 때 최대가 되
 고, $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값이 된다.
 $f(x) = x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$ 이므로 $-2 \leq x \leq 1$
 일 때, $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최솟값 4, $x=1$ 에서 최댓
 값 8을 갖는다.
 따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 는
 $x=-1$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, $x=1$ 에서 최솟값
 $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ 을 갖는다.

답 최댓값: -2, 최솟값: -3

137

(1) $y = (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^2 + 2$
 $= (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 2 \log_{\frac{1}{3}} x + 2$
 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면
 $3 \leq x \leq 9$ 에서 $\log_{\frac{1}{3}} 9 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 3$
 $\therefore -2 \leq t \leq -1$
 이때 주어진 함수는
 $y = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 따라서 $-2 \leq t \leq -1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 은
 $t = -2$ 에서 최댓값 $(-2-1)^2 + 1 = 10$,
 $t = -1$ 에서 최솟값 $(-1-1)^2 + 1 = 5$
 를 갖는다.
 (2) $y = \left(\log_3 \frac{x}{9}\right) \left(\log_3 \frac{3}{x}\right)$
 $= (\log_3 x - \log_3 9)(\log_3 3 - \log_3 x)$
 $= (\log_3 x - 2)(1 - \log_3 x)$
 $= -(\log_3 x)^2 + 3 \log_3 x - 2$
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면
 $1 \leq x \leq 27$ 에서 $\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 27$
 $\therefore 0 \leq t \leq 3$
 이때 주어진 함수는
 $y = -t^2 + 3t - 2 = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 따라서 $0 \leq t \leq 3$ 일 때, $\textcircled{1}$ 은

$t = \frac{3}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{1}{4}$,

$t = 0$ 또는 $t = 3$ 에서 최솟값 $-\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = -2$ 를 갖는다.

답 (1) 최댓값 : 10, 최솟값 : 5

(2) 최댓값 : $\frac{1}{4}$, 최솟값 : -2

138

$$y = 2(\log_3 x)^2 + a \log_3 \frac{1}{x^2} + b$$

$$= 2(\log_3 x)^2 - 2a \log_3 x + b$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = 2t^2 - 2at + b \quad \dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 이 $x = \frac{1}{3}$, 즉 $t = \log_3 \frac{1}{3} = -1$ 에서 최솟값 1을 가지므로 $\textcircled{1}$ 은

$$y = 2(t+1)^2 + 1$$

$$\therefore y = 2t^2 + 4t + 3$$

따라서 $-2a = 4$, $b = 3$ 이므로

$$a = -2, b = 3$$

$$\therefore a + b = 1$$

답 1

139

$x > 1$ 에서 $\log_4 x > 0$, $\log_x 256 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \log_4 x + \log_x 256 &\geq 2\sqrt{\log_4 x \times \log_x 256} \\ &= 2\sqrt{\log_4 256} \\ &= 2\sqrt{4} = 4 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $\log_4 x = \log_x 256$, 즉 $x = 16$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

답 4

140

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = \log_{\frac{1}{3}} xy$$

$\log_{\frac{1}{3}} xy$ 의 밑 $\frac{1}{3}$ 이 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 $\log_{\frac{1}{3}} xy$ 는 xy 가 최대일 때 최소가 된다.

이때 $x > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{일 때 성립})$$

$$6 \geq 2\sqrt{xy}, 3 \geq \sqrt{xy} \quad \therefore xy \leq 9$$

따라서 xy 의 최댓값이 9이므로 $\log_{\frac{1}{3}} xy$ 의 최솟값은 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ 이다.

답 -2

141

$y = (100x)^{6 - \log x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log y &= \log (100x)^{6 - \log x} \\ &= (6 - \log x) \log (100x) \\ &= (6 - \log x)(2 + \log x) \end{aligned}$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$1 \leq x \leq 1000 \text{에서 } \log 1 \leq \log x \leq \log 1000$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 3$$

이때 주어진 함수는

$$\begin{aligned} \log y &= (6 - t)(2 + t) = -t^2 + 4t + 12 \\ &= -(t - 2)^2 + 16 \end{aligned}$$

따라서 $0 \leq t \leq 3$ 일 때, $\log y$ 는

$t = 2$, 즉 $\log x = 2$, $x = 10^2 = 100$ 에서 최댓값 16을 가지므로 y 의 최댓값은

$$\log y = 16 \text{에서 } y = 10^{16}$$

$$\therefore a = 100, b = 10^{16}$$

$$\therefore ab = 100 \times 10^{16} = 10^{18}$$

답 10^{18}

142

(1) $\log_2 x = 3$ 에서 로그의 정의에 의하여 $x = 2^3 = 8$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$$

(3) $\log_5 x = 0$ 에서 로그의 정의에 의하여 $x = 5^0 = 1$

답 (1) $x = 8$ (2) $x = 27$ (3) $x = 1$

143

(1) 진수의 조건에서 $3x - 1 > 0 \quad \therefore x > \frac{1}{3}$

$\log_2(3x-1)=3$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$3x-1=2^3=8$$

$$3x=9 \quad \therefore x=3$$

(2) 진수의 조건에서 $-x+6>0 \quad \therefore x<6$

$\log_{\frac{1}{3}}(-x+6)=-2$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$-x+6=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9 \quad \therefore x=-3$$

(3) 진수의 조건에서 $x+2>0 \quad \therefore x>-2$

$\log_3(x+2)=2$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x+2=3^2=9 \quad \therefore x=7$$

(4) 진수의 조건에서 $-3x+4>0 \quad \therefore x<\frac{4}{3}$

$\log_{\frac{1}{2}}(-3x+4)=-1$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$-3x+4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$$

$$-3x=-2 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$$

(5) 진수의 조건에서 $x-2>0 \quad \therefore x>2$

$\log_{0.1}(x-2)=-1$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x-2=0.1^{-1}=10 \quad \therefore x=12$$

(6) 진수의 조건에서 $-3x+1>0 \quad \therefore x<\frac{1}{3}$

$\log_{\frac{1}{3}}(-3x+1)=-1$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$-3x+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$$

$$-3x=2 \quad \therefore x=-\frac{2}{3}$$

답 (1) $x=3$ (2) $x=-3$ (3) $x=7$

(4) $x=\frac{2}{3}$ (5) $x=12$ (6) $x=-\frac{2}{3}$

144

(1) 진수의 조건에서 $2-x>0, 2x+5>0$

$$x<2, x>-\frac{5}{2} \quad \therefore -\frac{5}{2}<x<2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변의 밑이 2로 같으므로 $2-x=2x+5$

$$-3x=3 \quad \therefore x=-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 방정식의 해는 $x=-1$

(2) 진수의 조건에서 $-3x+1>0, x+5>0$

$$x<\frac{1}{3}, x>-5 \quad \therefore -5<x<\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변의 밑이 $\frac{1}{5}$ 로 같으므로 $-3x+1=x+5$

$$-4x=4 \quad \therefore x=-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 방정식의 해는 $x=-1$

답 (1) $x=-1$ (2) $x=-1$

145

진수의 조건에서 $x>\boxed{0} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\log x=t$ 로 놓으면 $(\log x)^2-4 \log x+3=0$ 에서

$$\boxed{t^2}-4\boxed{t}+3=0, (t-1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=\boxed{1} \text{ 또는 } t=3$$

즉 $\log x=\boxed{1}$ 또는 $\log x=3$ 이므로

$$x=\boxed{10} \text{ 또는 } x=\boxed{1000} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 방정식 $(\log x)^2-4 \log x+3=0$ 의 해는

$$x=\boxed{10} \text{ 또는 } x=\boxed{1000}$$

답 풀이 참조

146

(1) 진수의 조건에서 $x^2+3x>0, x(x+3)>0$

$$\therefore x<-3 \text{ 또는 } x>0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log(x^2+3x)=1$ 에서

$$x^2+3x=10, x^2+3x-10=0$$

$$(x+5)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 방정식 $\log(x^2+3x)=1$ 의 해는

$$x=-5 \text{ 또는 } x=2$$

(2) 밑의 조건에서 $x-2>0, x-2 \neq 1$

$$\therefore 2<x<3 \text{ 또는 } x>3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_{x-2} 4=2$ 에서 $(x-2)^2=4$

$$x^2-4x+4=4, x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 방정식 $\log_{x-2} 4=2$ 의 해는 $x=4$

(3) 진수의 조건에서 $x>0, x-10>0$

$$\therefore x>10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log x+\log(x-10)=2+\log 2$ 에서

$$\log x(x-10)=\log 100+\log 2$$

$$\log(x^2-10x)=\log 200$$

양변의 밑이 10으로 같으므로

$$x^2 - 10x = 200, x^2 - 10x - 200 = 0$$

$$(x+10)(x-20) = 0$$

$$\therefore x = -10 \text{ 또는 } x = 20 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ②에서 방정식

$$\log x + \log(x-10) = 2 + \log 2 \text{의 해는}$$

$$x = 20$$

(4) 진수의 조건에서 $3x+1 > 0, x+1 > 0$

$$\therefore x > -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{H}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x+1) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x+1) = \log_{\frac{1}{4}}(x+1)^2$$

양변의 밑이 $\frac{1}{4}$ 로 같으므로

$$3x+1 = (x+1)^2, x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ②에서 방정식 $\log_{\frac{1}{4}}(3x+1) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 의 해는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

(5) 진수의 조건에서 $x-1 > 0, x+5 > 0$

$$\therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{H}$$

$$\log_{\sqrt{3}}(x-1) = \log_3(x+5) + 1 \text{에서}$$

$$\log_3(x-1)^2 = \log_3(x+5) + \log_3 3$$

$$\log_3(x-1)^2 = \log_3\{3(x+5)\}$$

양변의 밑이 3으로 같으므로

$$(x-1)^2 = 3(x+5)$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0, (x+2)(x-7) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 7 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ②에서 방정식 $\log_{\sqrt{3}}(x-1) = \log_3(x+5) + 1$ 의 해는 $x = 7$

(6) 진수의 조건에서 $2x-1 > 0, x^2+5 > 0$

$$\therefore x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{H}$$

$$\log_3(2x-1) = \frac{1}{2} \log_3(x^2+5) \text{에서}$$

$$2 \log_3(2x-1) = \log_3(x^2+5)$$

$$\log_3(2x-1)^2 = \log_3(x^2+5)$$

양변의 밑이 3으로 같으므로

$$(2x-1)^2 = x^2+5, 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$(3x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ②에서 방정식

$$\log_3(2x-1) = \frac{1}{2} \log_3(x^2+5) \text{의 해는 } x = 2$$

답 (1) $x = -5$ 또는 $x = 2$ (2) $x = 4$
 (3) $x = 20$ (4) $x = 0$ 또는 $x = 1$
 (5) $x = 7$ (6) $x = 2$

147

(1) 진수의 조건에서 $x > 0, x^2 > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{H}$$

$$(\log x)^2 = 3 + \log x^2 \text{에서}$$

$$(\log x)^2 - 2 \log x - 3 = 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉 $\log x = -1$ 또는 $\log x = 3$ 이므로

$$x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 1000 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ②에서 구하는 해는

$$x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 1000$$

(2) 진수와 밑의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$ $\dots\dots \textcircled{H}$

$$\log_x 100 = \log_x 10^2 = 2 \log_x 10 = \frac{2}{\log_{10} x}$$

이므로 $\log_{10} x - \log_x 100 = 1$ 에서

$$\log_{10} x - \frac{2}{\log_{10} x} = 1$$

$\log_{10} x = t$ 로 놓으면

$$t - \frac{2}{t} = 1$$

$$t^2 - t - 2 = 0, (t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

즉 $\log_{10} x = -1$ 또는 $\log_{10} x = 2$ 이므로

$$x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 100 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ②에서 구하는 해는

$$x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 100$$

(3) 진수의 조건에서 $x > 0, x^2 > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{H}$$

$$(2 + \log x)^2 + (\log x - 1)^2 = (1 + \log x^2)^2 \text{에서}$$

$$(2 + \log x)^2 + (\log x - 1)^2 = (1 + 2 \log x)^2$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$(2+t)^2 + (t-1)^2 = (1+2t)^2$$

$$t^2 + t - 2 = 0, (t+2)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 1$$

즉 $\log x = -2$ 또는 $\log x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{100} \text{ 또는 } x = 10 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는

$$x = \frac{1}{100} \text{ 또는 } x = 10$$

- (4) 진수의 조건에서 $2x > 0, \frac{x}{2} > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$(\log_2 2x) \left(\log_2 \frac{x}{2} \right) = 3 \text{에서}$$

$$(\log_2 2 + \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 2) = 3$$

$$(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 1) = 3$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$(t+1)(t-1) = 3, t^2 - 1 = 3$$

$$t^2 = 4 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

즉 $\log_2 x = -2$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x = \frac{1}{4} \text{ 또는 } x = 4 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는

$$x = \frac{1}{4} \text{ 또는 } x = 4$$

- (5) 진수의 조건에서 $x > 0$ \dots\dots \textcircled{A}

$$\log_8 x = \log_{2^3} x = \frac{1}{3} \log_2 x \text{이므로}$$

$$\log_2 x + \log_8 x = 2(\log_2 x)(\log_8 x) \text{에서}$$

$$\log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 2 \log_2 x \times \frac{1}{3} \log_2 x$$

$$3 \log_2 x + \log_2 x = 2(\log_2 x)^2$$

$$\therefore 4 \log_2 x = 2(\log_2 x)^2$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$4t = 2t^2, 2t(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

즉 $\log_2 x = 0$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 4 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

- (6) 진수의 조건에서 $x > 0$ \dots\dots \textcircled{A}

$$\log_9 x = \log_{3^2} x = \frac{1}{2} \log_3 x,$$

$$\log_{81} x = \log_{3^4} x = \frac{1}{4} \log_3 x$$

이므로 $(\log_3 x)^3 - 4(\log_3 x)^2 + \log_{81} x = 0$ 에서

$$(\log_3 x)^3 - 4\left(\frac{1}{2} \log_3 x\right)^2 + \frac{1}{4} \log_3 x = 0$$

$$\therefore 4(\log_3 x)^3 - 4(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$4t^3 - 4t^2 + t = 0, t(2t-1)^2 = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2}$$

즉 $\log_3 x = 0$ 또는 $\log_3 x = \frac{1}{2}$ 이므로

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

답 (1) $x = \frac{1}{10}$ 또는 $x = 1000$

(2) $x = \frac{1}{10}$ 또는 $x = 100$

(3) $x = \frac{1}{100}$ 또는 $x = 10$

(4) $x = \frac{1}{4}$ 또는 $x = 4$

(5) $x = 1$ 또는 $x = 4$

(6) $x = 1$ 또는 $x = \sqrt{3}$

148

- (1) 진수의 조건에서 $x > 0$ \dots\dots \textcircled{A}

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

$$(t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉 $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 8 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡에서 주어진 방정식의 해는

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 8$$

$$\therefore \alpha\beta = 2 \times 8 = 16$$

- (2) 진수와 밑의 조건에서

$$x > 0, x \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } \log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x} = \frac{1}{t} \text{이므로}$$

$$\log_2 x - 5 \log_x 2 - 2 = 0 \text{에서 } t - \frac{5}{t} - 2 = 0$$

$$\therefore t^2 - 2t - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

방정식 $\log_2 x - 5 \log_x 2 - 2 = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{8}$ 의 두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 2$$

$$\log_2 \alpha \beta = 2 \quad \therefore \alpha \beta = 4$$

답 (1) 16 (2) 4

참고 (2)에서 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{8}$ 의 두 근은 모두 0이 아닌 실수이므로 $x = 2^t > 0, x = 2^t \neq 1$ 이다. 즉 진수와 밑의 조건 $\textcircled{7}$ 을 만족시킨다.

다른풀이 (1) 방정식 $(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 3 = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 t 에 대한 이차방정식 (*)의 두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 4$
 $\log_2 \alpha \beta = 4 \quad \therefore \alpha \beta = 16$

149

(1) 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$$x^{\log x} = \frac{1000}{x^2} \text{의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log x^{\log x} = \log \frac{1000}{x^2}$$

$$(\log x)(\log x) = \log 1000 - \log x^2$$

$$(\log x)^2 + 2 \log x - 3 = 0$$

$$\log x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

즉 $\log x = -3$ 또는 $\log x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{1000} \text{ 또는 } x = 10 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 구하는 해는

$$x = \frac{1}{1000} \text{ 또는 } x = 10$$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$$2^{\log x} + 2^{2-\log x} = 4 \text{에서}$$

$$2^{\log x} + \frac{2^2}{2^{\log x}} = 4$$

$$2^{\log x} = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t + \frac{4}{t} = 4$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0, (t-2)^2 = 0 \quad \therefore t = 2$$

$$\text{즉 } 2^{\log x} = 2 \text{이므로 } \log x = 1$$

$$\therefore x = 10 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 구하는 해는 $x = 10$

(3) 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$$x^{\log 3} = 3^{\log x} \text{이므로}$$

$$x^{\log 3} \cdot 3^{\log x} - 5(x^{\log 3} + 3^{\log x}) + 9 = 0 \text{에서}$$

$$3^{\log x} \cdot 3^{\log x} - 5(3^{\log x} + 3^{\log x}) + 9 = 0$$

$$\therefore (3^{\log x})^2 - 10 \cdot 3^{\log x} + 9 = 0$$

$$3^{\log x} = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0, (t-1)(t-9) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 9$$

$$\text{즉 } 3^{\log x} = 1 \text{ 또는 } 3^{\log x} = 9 \text{이므로}$$

$$\log x = 0 \text{ 또는 } \log x = 2$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 100 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 구하는 해는

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 100$$

$$\text{답 (1) } x = \frac{1}{1000} \text{ 또는 } x = 10$$

$$(2) x = 10$$

$$(3) x = 1 \text{ 또는 } x = 100$$

150

진수의 조건에서 $x > 0, y > 0$

$$\log_3 x = X, \log_2 y = Y \text{로 놓으면}$$

$$\begin{cases} X + Y = 4 & \dots\dots \textcircled{7} \\ XY = 3 & \dots\dots \textcircled{8} \end{cases}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$X = 1, Y = 3 \text{ 또는 } X = 3, Y = 1$$

$$\text{즉 } \log_3 x = 1, \log_2 y = 3 \text{ 또는 } \log_3 x = 3, \log_2 y = 1$$

$$\therefore x = 3, y = 8 \text{ 또는 } x = 27, y = 2$$

그런데 $x > y$ 이므로 $\alpha = 27, \beta = 2$

$$\therefore \alpha - \beta = 27 - 2 = 25$$

답 25

151

이차방정식에서 x^2 의 계수는 0이 아니므로

$$5 \log_2 a - 1 \neq 0$$

$$\log_2 a \neq \frac{1}{5} \quad \therefore a \neq \sqrt[5]{2}$$

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, 중근을 가질 조건은 $D=0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (1 + \log_2 a)^2 - (5 \log_2 a - 1) = 0$$

$$(\log_2 a)^2 - 3 \log_2 a + 2 = 0$$

$$(\log_2 a - 1)(\log_2 a - 2) = 0$$

$$\log_2 a = 1 \text{ 또는 } \log_2 a = 2$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 4$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은 $2 \times 4 = 8$

답 8

152

$I_0 = 10^8$, $x = 100$, $I = a$ 이므로

$$100 = 10 \log \frac{a}{10^8}, \quad 10 = \log \frac{a}{10^8}$$

$$10 = \log a - \log 10^8$$

$$10 = \log a - 8$$

$$\log a = 18 \quad \therefore a = 10^{18}$$

답 10^{18}

153

물고기의 연령이 1.7세일 때의 길이가 10 cm이므로 주어진 식에 $a=1.7$, $l=10$ 을 대입하면

$$1.7 = -2 \log_k \left(1 - \frac{10}{30}\right) - 0.3$$

$$2 = -2 \log_k \frac{2}{3}, \quad -1 = \log_k \frac{2}{3}, \quad k^{-1} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

물고기의 연령이 3.7세일 때의 길이를 x (cm)라 하면

$$3.7 = -2 \log_{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{30}\right) - 0.3$$

$$4 = -2 \log_{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{30}\right), \quad -2 = \log_{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{30}\right)$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 1 - \frac{x}{30}, \quad \frac{4}{9} = 1 - \frac{x}{30}$$

$$\therefore x = \frac{50}{3}$$

따라서 물고기의 연령이 3.7세일 때의 길이는 $\frac{50}{3}$ cm이다.

답 ①

154

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\log_2 x < 3 \text{에서 } \log_2 x < \log_2 8$$

밑이 1보다 크므로 $x < 8$ ㉡

㉠, ㉡에서 부등식 $\log_2 x < 3$ 의 해는

$$0 < x < 8$$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2 \text{에서 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x \leq \frac{1}{9}$ ㉡

㉠, ㉡에서 부등식 $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$ 의 해는

$$0 < x \leq \frac{1}{9}$$

(3) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\log_5 x > 0 \text{에서 } \log_5 x > \log_5 1$$

밑이 1보다 크므로 $x > 1$ ㉡

㉠, ㉡에서 부등식 $\log_5 x > 0$ 의 해는

$$x > 1$$

답 (1) $0 < x < 8$ (2) $0 < x \leq \frac{1}{9}$ (3) $x > 1$

155

진수의 조건에서 $6x - 10 > 0$, $3x - 1 > 0$

$$x > \frac{5}{3}, \quad x > \frac{1}{3} \quad \therefore x > \boxed{\frac{5}{3}} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

부등식 $\log_3(6x - 10) > \log_3(3x - 1)$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$6x - 10 \boxed{>} 3x - 1, \quad 3x > 9$$

$$\therefore x > \boxed{3} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 부등식 $\log_3(6x - 10) > \log_3(3x - 1)$ 의 해는 $\boxed{x > 3}$

답 풀이 참조

156

(1) 진수의 조건에서 $x-1>0$, $-5x+11>0$

$$\therefore 1 < x < \frac{11}{5} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\log_2(x-1) \geq \log_2(-5x+11)$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$x-1 \geq -5x+11$$

$$6x \geq 12 \quad \therefore x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

\textcircled{A} , \textcircled{B} 에서 구하는 부등식의 해는

$$2 \leq x < \frac{11}{5}$$

(2) 진수의 조건에서 $2x-5>0$, $x-3>0$

$$\therefore x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) < \log_{\frac{1}{3}}(x-3)$ 에서 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$2x-5 > x-3 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

\textcircled{C} , \textcircled{D} 에서 구하는 부등식의 해는

$$x > 3$$

$$\text{답 (1) } 2 \leq x < \frac{11}{5} \quad (2) x > 3$$

157

(1) 진수의 조건에서 $2x-4>0$

$$\therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_2(2x-4) \leq 3 \text{에서 } \log_2(2x-4) \leq \log_2 8$$

밑이 1보다 크므로 $2x-4 \leq 8$

$$2x \leq 12 \quad \therefore x \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

\textcircled{A} , \textcircled{B} 에서 구하는 부등식의 해는

$$2 < x \leq 6$$

(2) 진수의 조건에서 $3-x>0$

$$\therefore x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(3-x) \geq 1 \text{에서 } \log_{\frac{1}{3}}(3-x) \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $3-x \leq \frac{1}{3}$

$$-x \leq -\frac{8}{3} \quad \therefore x \geq \frac{8}{3} \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

\textcircled{C} , \textcircled{D} 에서 구하는 부등식의 해는

$$\frac{8}{3} \leq x < 3$$

$$\text{답 (1) } 2 < x \leq 6 \quad (2) \frac{8}{3} \leq x < 3$$

158

진수의 조건에서 $x > \boxed{0}$ \textcircled{A}

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 \leq 0$ 에서

$$\boxed{t^2} + \boxed{t} - 2 \leq 0, (t+2)(t-1) \leq 0$$

$$\therefore \boxed{-2} \leq t \leq \boxed{1}$$

즉 $\boxed{-2} \leq \log_2 x \leq \boxed{1}$ 이므로

$$\log_2 \frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq \log_2 2$$

밑이 1보다 크므로

$$\boxed{\frac{1}{4}} \leq x \leq \boxed{2} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

\textcircled{A} , \textcircled{B} 에서 구하는 부등식의 해는

$$\boxed{\frac{1}{4}} \leq x \leq \boxed{2} \quad \text{답 풀이 참조}$$

159

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$ \textcircled{A}

$$-1 < \log_{\frac{1}{2}} x < 2 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} > x > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \therefore \frac{1}{4} < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

\textcircled{A} , \textcircled{B} 에서 구하는 부등식의 해는

$$\frac{1}{4} < x < 2$$

(2) 진수의 조건에서 $x-5>0$, $x-6>0$

$$x > 5, x > 6 \quad \therefore x > 6 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-5) + \log_{\frac{1}{2}}(x-6) > -1 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \{(x-5)(x-6)\} > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$(x-5)(x-6) < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$x^2 - 11x + 28 < 0, (x-4)(x-7) < 0$$

$$\therefore 4 < x < 7 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

\textcircled{C} , \textcircled{D} 에서 구하는 부등식의 해는

$$6 < x < 7$$

(3) 진수의 조건에서 $x-3>0$, $x-5>0$

$x > 3, x > 5 \quad \therefore x > 5$ ㉠
 $\log_{0.5}(x-3) > 2 \log_{0.5}(x-5)$ 에서
 $\log_{0.5}(x-3) > \log_{0.5}(x-5)^2$
 밑이 1보다 작은 양수이므로
 $x-3 < (x-5)^2$
 $x^2 - 11x + 28 > 0, (x-4)(x-7) > 0$
 $\therefore x < 4$ 또는 $x > 7$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 구하는 부등식의 해는
 $x > 7$
 (4) 진수의 조건에서 $11-x > 0, x > 0$
 $\therefore 0 < x < 11$ ㉢
 $\log(11-x) + \log x < 1$ 에서
 $\log\{x(11-x)\} < \log 10$
 밑이 1보다 크므로
 $x(11-x) < 10, x^2 - 11x + 10 > 0$
 $(x-1)(x-10) > 0$
 $\therefore x < 1$ 또는 $x > 10$ ㉣
 ㉢, ㉣에서 구하는 부등식의 해는
 $0 < x < 1$ 또는 $10 < x < 11$
 (5) 진수의 조건에서 $x-1 > 0, 2x+6 > 0$
 $\therefore x > 1$ ㉤
 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{4}}(2x+6)$ 에서
 $\log(\frac{1}{2})^2(x-1)^2 > \log_{\frac{1}{4}}(2x+6)$
 $\log_{\frac{1}{4}}(x-1)^2 > \log_{\frac{1}{4}}(2x+6)$
 밑이 1보다 작은 양수이므로
 $(x-1)^2 < 2x+6$
 $x^2 - 4x - 5 < 0, (x+1)(x-5) < 0$
 $\therefore -1 < x < 5$ ㉥
 ㉤, ㉥에서 구하는 부등식의 해는
 $1 < x < 5$
 (6) 진수의 조건에서
 $x+1 > 0, 2x-1 > 0, x-1 > 0$
 $\therefore x > 1$ ㉦
 $\log_2(x+1) - \log_4(2x-1) > \log_4(x-1)$ 에서
 $\log_2(x+1) > \log_4(x-1) + \log_4(2x-1)$
 $\log_2(x+1) > \log_4\{(x-1)(2x-1)\}$
 $\log_2(x+1)^2 > \log_4\{(x-1)(2x-1)\}$

$\therefore \log_4(x+1)^2 > \log_4\{(x-1)(2x-1)\}$
 밑이 1보다 크므로
 $(x+1)^2 > (x-1)(2x-1)$
 $x^2 - 5x < 0, x(x-5) < 0$
 $\therefore 0 < x < 5$ ㉧
 ㉦, ㉧에서 구하는 부등식의 해는
 $1 < x < 5$
 답 (1) $\frac{1}{4} < x < 2$ (2) $6 < x < 7$ (3) $x > 7$
 (4) $0 < x < 1$ 또는 $10 < x < 11$
 (5) $1 < x < 5$ (6) $1 < x < 5$

160

(1) 진수의 조건에서
 $x > 0, \log_2 x - 1 > 0$
 $\log_2 x > 1$, 즉 $\log_2 x > \log_2 2$ 에서 (밑) > 1 이므로
 $x > 2$
 $\therefore x > 2$ ㉠
 $\log_4(\log_2 x - 1) \leq 1$ 에서
 $\log_4(\log_2 x - 1) \leq \log_4 4$
 (밑) > 1 이므로 $\log_2 x - 1 \leq 4$
 $\log_2 x \leq 5, \log_2 x \leq \log_2 2^5$
 (밑) > 1 이므로 $x \leq 2^5$
 $x \leq 32$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 구하는 부등식의 해는
 $2 < x \leq 32$
 (2) 진수의 조건에서
 $x > 0, \log_3 x > 0$
 $\log_3 x > 0$, 즉 $\log_3 x > \log_3 1$ 에서 (밑) > 1 이므로
 $x > 1$
 $\therefore x > 1$ ㉢
 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) \geq -1$ 에서
 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-1}$
 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로
 $\log_3 x \leq (\frac{1}{2})^{-1}, \log_3 x \leq 2, \log_3 x \leq \log_3 3^2$
 (밑) > 1 이므로 $x \leq 3^2$
 $\therefore x \leq 9$ ㉣

㉠, ㉡에서 구하는 부등식의 해는

$$1 < x \leq 9$$

(3) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$2(\log_3 x)^2 + 5 \log_3 x - 3 < 0 \text{에서}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 + 5t - 3 < 0, (t+3)(2t-1) < 0$$

$$\therefore -3 < t < \frac{1}{2}$$

$$\text{즉 } -3 < \log_3 x < \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\log_3 3^{-3} < \log_3 x < \log_3 3^{\frac{1}{2}}$$

$$(\text{밑}) > 1 \text{이므로 } 3^{-3} < x < 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{1}{27} < x < \sqrt{3} \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 부등식의 해는

$$\frac{1}{27} < x < \sqrt{3}$$

(4) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 12 > 0 \text{에서}$$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 12 > 0, (t+3)(t-4) > 0$$

$$\therefore t < -3 \text{ 또는 } t > 4$$

$$\text{즉 } \log_{\frac{1}{2}} x < -3 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} x > 4 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로

$$x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \text{ 또는 } x < \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\therefore x > 8 \text{ 또는 } x < \frac{1}{16} \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 부등식의 해는

$$0 < x < \frac{1}{16} \text{ 또는 } x > 8$$

(5) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)(\log_{\frac{1}{3}} 9x) \leq 3 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x (\log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} x) \leq 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x (\log_{\frac{1}{3}} 3^2 + \log_{\frac{1}{3}} x) \leq 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x \left\{ \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \log_{\frac{1}{3}} x \right\} \leq 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x (-2 + \log_{\frac{1}{3}} x) \leq 3$$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면

$$t(-2+t) \leq 3, t^2 - 2t - 3 \leq 0$$

$$(t-3)(t+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 3$$

$$\text{즉 } -1 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq 3 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$0 < (\text{밑}) < 1 \text{이므로 } \left(\frac{1}{3}\right)^3 \leq x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$\therefore \frac{1}{27} \leq x \leq 3 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 부등식의 해는

$$\frac{1}{27} \leq x \leq 3$$

(6) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$(\log_2 8x^2) \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{x} \right) < 9 \text{에서}$$

$$(\log_2 8x^2) \left\{ \log_{2^{-1}} \left(\frac{x}{4}\right)^{-1} \right\} < 9$$

$$(\log_2 8x^2) \left(\log_2 \frac{x}{4} \right) < 9$$

$$(\log_2 8 + \log_2 x^2)(\log_2 x - \log_2 4) < 9$$

$$(3 + 2 \log_2 x)(\log_2 x - 2) < 9$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$(3 + 2t)(t - 2) < 9, 2t^2 - t - 15 < 0$$

$$(2t + 5)(t - 3) < 0 \quad \therefore -\frac{5}{2} < t < 3$$

$$\text{즉 } -\frac{5}{2} < \log_2 x < 3 \text{이므로}$$

$$\log_2 2^{-\frac{5}{2}} < \log_2 x < \log_2 2^3$$

(밑) > 1이므로

$$2^{-\frac{5}{2}} < x < 2^3 \quad \therefore \frac{\sqrt{2}}{8} < x < 8 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 부등식의 해는

$$\frac{\sqrt{2}}{8} < x < 8$$

답 (1) $2 < x \leq 32$ (2) $1 < x \leq 9$

$$(3) \frac{1}{27} < x < \sqrt{3}$$

$$(4) 0 < x < \frac{1}{16} \text{ 또는 } x > 8$$

$$(5) \frac{1}{27} \leq x \leq 3 \quad (6) \frac{\sqrt{2}}{8} < x < 8$$

161

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$(\log_3 x)^2 + \log_{\frac{1}{3}} x^2 > 8 \text{에서}$$

$$(\log_3 x)^2 + \log_{3^{-1}} x^2 > 8$$

$$(\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 8 > 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 8 > 0, (t+2)(t-4) > 0$$

$$\therefore t < -2 \text{ 또는 } t > 4$$

즉 $\log_3 x < -2$ 또는 $\log_3 x > 4$ 이므로

$$\log_3 x < \log_3 3^{-2} \text{ 또는 } \log_3 x > \log_3 3^4$$

(밑)>1이므로

$$x < 3^{-2} \text{ 또는 } x > 3^4$$

$$\therefore x < \frac{1}{9} \text{ 또는 } x > 81 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는

$$0 < x < \frac{1}{9} \text{ 또는 } x > 81$$

따라서 $a = \frac{1}{9}, \beta = 81$ 이므로 $a\beta = 9$

답 9

162

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log_3 x} < 27x^2$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

(밑)>1이므로

$$\log_3 x^{\log_3 x} < \log_3 27x^2$$

$$(\log_3 x)(\log_3 x) < \log_3 27 + \log_3 x^2$$

$$(\log_3 x)^2 < 3 + 2 \log_3 x$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 < 3 + 2t$

$$t^2 - 2t - 3 < 0, (t+1)(t-3) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 3$$

즉 $-1 < \log_3 x < 3$ 이므로

$$\log_3 3^{-1} < \log_3 x < \log_3 3^3$$

(밑)>1이므로

$$\frac{1}{3} < x < 27 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 부등식의 해는

$$\frac{1}{3} < x < 27$$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x - 2} \geq 2^{-4} \text{의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면}$$

(밑)>1이므로

$$\log_2 \left(\frac{1}{2}x\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x - 2} \geq \log_2 2^{-4}$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x - 2) \left(\log_2 \frac{1}{2}x\right) \geq -4$$

$$(-\log_2 x - 2) \left(\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 x\right) \geq -4$$

$$(-\log_2 x - 2)(-1 + \log_2 x) \geq -4$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$(-t - 2)(-1 + t) \geq -4$$

$$(t+2)(t-1) \leq 4$$

$$t^2 + t - 6 \leq 0, (t+3)(t-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq t \leq 2$$

즉 $-3 \leq \log_2 x \leq 2$ 이므로

$$\log_2 2^{-3} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^2$$

(밑)>1이므로

$$\frac{1}{8} \leq x \leq 4 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 부등식의 해는

$$\frac{1}{8} \leq x \leq 4$$

(3) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log_5 2} = 2^{\log_5 x}$ 이므로

$$2^{\log_5 x} \cdot x^{\log_5 2} \geq 10 \cdot 2^{\log_5 x} - 16 \text{에서}$$

$$2^{\log_5 x} \cdot 2^{\log_5 x} \geq 10 \cdot 2^{\log_5 x} - 16$$

$$\therefore (2^{\log_5 x})^2 - 10 \cdot 2^{\log_5 x} + 16 \geq 0$$

$2^{\log_5 x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 10t + 16 \geq 0$$

$$(t-2)(t-8) \geq 0$$

$$\therefore t \leq 2 \text{ 또는 } t \geq 8$$

즉 $2^{\log_5 x} \leq 2$ 또는 $2^{\log_5 x} \geq 8$ 이므로

$$2^{\log_5 x} \leq 2^1 \text{ 또는 } 2^{\log_5 x} \geq 2^3$$

(밑)>1이므로

$$\log_5 x \leq 1 \text{ 또는 } \log_5 x \geq 3$$

$$\log_5 x \leq \log_5 5 \text{ 또는 } \log_5 x \geq \log_5 125$$

(밑)>1이므로

$$x \leq 5 \text{ 또는 } x \geq 125 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 부등식의 해는
 $0 < x \leq 5$ 또는 $x \geq 125$

답 (1) $\frac{1}{3} < x < 27$

(2) $\frac{1}{8} \leq x \leq 4$

(3) $0 < x \leq 5$ 또는 $x \geq 125$

163

(1) (i) $2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

진수의 조건에서 $x-2 > 0, 2x-1 > 0$

$\therefore x > 2$ ㉠

$2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ 에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

$0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로

$(x-2)^2 \leq 2x-1$

$x^2 - 6x + 5 \leq 0, (x-1)(x-5) \leq 0$

$\therefore 1 \leq x \leq 5$ ㉡

㉠, ㉡에서 부등식

$2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ 의 해는

$2 < x \leq 5$

(ii) $\log_2(\log_4 x) \leq 0$

진수의 조건에서 $\log_4 x > 0, x > 0$

$\therefore x > 1$ ㉢

$\log_2(\log_4 x) \leq 0$ 에서

$\log_2(\log_4 x) \leq \log_2 1$

(밑) > 1 이므로 $\log_4 x \leq 1$

$\log_4 x \leq \log_4 4$

(밑) > 1 이므로 $x \leq 4$ ㉣

㉢, ㉣에서 부등식 $\log_2(\log_4 x) \leq 0$ 의 해는

$1 < x \leq 4$

(i), (ii)에서 구하는 연립부등식의 해는 $2 < x \leq 4$

(2) (i) $2^{x+3} > 4$ 에서 $2^{x+3} > 2^2$

(밑) > 1 이므로 $x+3 > 2$

$\therefore x > -1$

(ii) $2 \log(x+3) < \log(5x+15)$

진수의 조건에서 $x+3 > 0, 5x+15 > 0$

$\therefore x > -3$ ㉠

$2 \log(x+3) < \log(5x+15)$ 에서

$\log(x+3)^2 < \log(5x+15)$

(밑) > 1 이므로

$(x+3)^2 < 5x+15$

$x^2 + x - 6 < 0, (x+3)(x-2) < 0$

$\therefore -3 < x < 2$ ㉡

㉠, ㉡에서 부등식

$2 \log(x+3) < \log(5x+15)$ 의 해는

$-3 < x < 2$

(i), (ii)에서 구하는 연립부등식의 해는 $-1 < x < 2$

답 (1) $2 < x \leq 4$ (2) $-1 < x < 2$

164

$(\log_2 x)^2 \geq \log_2 \frac{x^4}{a}$ 에서

$(\log_2 x)^2 \geq 4 \log_2 x - \log_2 a$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $t^2 \geq 4t - \log_2 a$

$t^2 - 4t + \log_2 a \geq 0$ ㉠

모든 실수 t 에 대하여 ㉠이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 - 4t + \log_2 a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 한다. 즉

$\frac{D}{4} = 4 - \log_2 a \leq 0, \log_2 a \geq 4, \log_2 a \geq \log_2 16$

$\therefore a \geq 16$

따라서 양수 a 의 최솟값은 16이다.

답 16

165

진수의 조건에서 $a > 0$ ㉠

이차방정식 $x^2 - 2(1 - \log_2 a)x - 3(\log_2 a - 1) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (1 - \log_2 a)^2 - \{-3(\log_2 a - 1)\} < 0$

$(1 - \log_2 a)^2 + 3(\log_2 a - 1) < 0$

$(\log_2 a)^2 + \log_2 a - 2 < 0$

$\log_2 a = t$ 로 놓으면 $t^2 + t - 2 < 0$

$(t-1)(t+2) < 0 \therefore -2 < t < 1$

즉 $-2 < \log_2 a < 1$ 이므로

$$\log_2 2^{-2} < \log_2 a < \log_2 2^1$$

밑이 1보다 크므로

$$2^{-2} < a < 2^1 \quad \therefore \frac{1}{4} < a < 2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 실수 a 의 값의 범위는 $\frac{1}{4} < a < 2$

$$\text{답 } \frac{1}{4} < a < 2$$

166

n 년 후에 바닷속에 남은 화학 물질의 양이 5 kg 이하가 된다고 하면

$$500 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{50}} \leq 5$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{50}} \leq \frac{1}{100}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\frac{n}{50} \log \frac{1}{3} \leq \log \frac{1}{100}$$

$$-\frac{n}{50} \log 3 \leq -2, \quad n \log 3 \geq 100$$

$$\therefore n \geq \frac{100}{\log 3} = \frac{100}{0.48} = 208.\times\times\times$$

따라서 바닷속에 남은 화학 물질의 양이 5 kg 이하가 되려면 최소 209년이 지나야 한다.

$$\therefore m = 209$$

답 209

167

폐수 처리 기계를 1번 통과하면 오염 물질의 10%가 제거되므로 남은 오염 물질의 양은 처음 오염 물질의 양의 $\frac{9}{10}$ 이다.

따라서 폐수 처리 기계를 n 번 통과하면 남은 오염 물질의 양은 처음 있던 양의 $\left(\frac{9}{10}\right)^n$ 이고, 오염 물질의 양을

처음의 $\frac{2}{100}$ 이하로 줄여야 하므로

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n \leq \frac{2}{100}$$

$$\text{양변에 상용로그를 취하면 } n \log \frac{9}{10} \leq \log \frac{2}{100}$$

$$n(2 \log 3 - 1) \leq \log 2 - 2$$

$$\therefore n \geq \frac{\log 2 - 2}{2 \log 3 - 1} \quad \leftarrow 2 \log 3 - 1 < 0$$

$$= \frac{0.3010 - 2}{2 \times 0.4771 - 1}$$

$$= \frac{-1.699}{-0.0458} = 37.\times\times\times$$

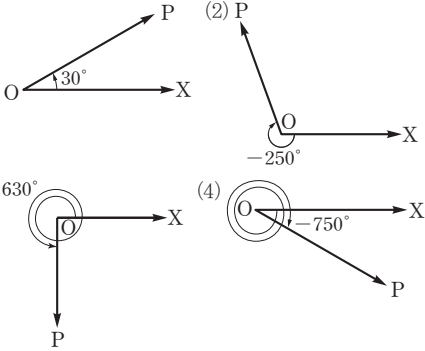
따라서 폐수 처리 기계를 최소 38번 통과시켜야 한다.

답 ③

II. 삼각함수

168

답 (1)



169

답 (1) $360^\circ \times n + 70^\circ$ (단, n 은 정수)

(2) $360^\circ \times n + 150^\circ$ (단, n 은 정수)

(3) $360^\circ \times n + 220^\circ$ (단, n 은 정수)

(4) $360^\circ \times n + 315^\circ$ (단, n 은 정수)

170

(1) $360^\circ \times n + 80^\circ$ (단, n 은 정수)

(2) $400^\circ = 360^\circ \times 1 + 40^\circ$ 이므로

$360^\circ \times n + 40^\circ$ (단, n 은 정수)

(3) $-1000^\circ = 360^\circ \times (-3) + 80^\circ$ 이므로

$360^\circ \times n + 80^\circ$ (단, n 은 정수)

(4) $-1300^\circ = 360^\circ \times (-4) + 140^\circ$ 이므로

$360^\circ \times n + 140^\circ$ (단, n 은 정수)

답 풀이 참조

171

(1) $620^\circ = 360^\circ \times 1 + 260^\circ$

따라서 620° 는 제 3 사분면의 각이다.

(2) $-680^\circ = 360^\circ \times (-2) + 40^\circ$

따라서 -680° 는 제 1 사분면의 각이다.

(3) $1230^\circ = 360^\circ \times 3 + 150^\circ$

따라서 1230° 는 제 2 사분면의 각이다.

(4) $-1500^\circ = 360^\circ \times (-5) + 300^\circ$

따라서 -1500° 는 제 4 사분면의 각이다.

답 (1) 제 3 사분면 (2) 제 1 사분면

(3) 제 2 사분면 (4) 제 4 사분면

172

① $-310^\circ = 360^\circ \times (-1) + 50^\circ$

③ $410^\circ = 360^\circ \times 1 + 50^\circ$

④ $660^\circ = 360^\circ \times 1 + 300^\circ$

⑤ $1130^\circ = 360^\circ \times 3 + 50^\circ$

따라서 같은 위치의 동경을 나타내는 것이 아닌 것은

④이다.

답 ④

173

θ 가 제 4 사분면의 각이므로 일반각으로 나타내면

$360^\circ \times n + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 360^\circ$ (n 은 정수)

각 변을 2로 나누어 $\frac{\theta}{2}$ 의 범위를 구하면

$180^\circ \times n + 135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 180^\circ$

(i) $n=0$ 일 때, $135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$

$\therefore \frac{\theta}{2}$ 는 제 2 사분면의 각

(ii) $n=1$ 일 때, $315^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ$

$\therefore \frac{\theta}{2}$ 는 제 4 사분면의 각

$n=2, 3, 4, \dots$ 에 대해서도 동경의 위치가 제 2, 4 사분면으로 반복된다.

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은

제 2 사분면, 제 4 사분면이다.

답 제 2 사분면, 제 4 사분면

174

3θ 가 제 2 사분면의 각이므로 일반각으로 나타내면

$360^\circ \times n + 90^\circ < 3\theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$ (n 은 정수)

각 변을 3으로 나누어 θ 의 범위를 구하면

$$120^\circ \times n + 30^\circ < \theta < 120^\circ \times n + 60^\circ$$

(i) $n=0$ 일 때, $30^\circ < \theta < 60^\circ$

$\therefore \theta$ 는 제 1 사분면의 각

(ii) $n=1$ 일 때, $150^\circ < \theta < 180^\circ$

$\therefore \theta$ 는 제 2 사분면의 각

(iii) $n=2$ 일 때, $270^\circ < \theta < 300^\circ$

$\therefore \theta$ 는 제 4 사분면의 각

$n=3, 4, 5, \dots$ 에 대해서도 동경의 위치가 제 1, 2, 4 사분면으로 반복된다.

따라서 θ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 4 사분면이다.

답 제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 4 사분면

175

각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일 직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$7\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \times n + 30^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$90^\circ < 60^\circ \times n + 30^\circ < 180^\circ$$

$$\therefore 1 < n < \frac{5}{2}$$

n 은 정수이므로 $n=2$

$n=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\theta = 60^\circ \times 2 + 30^\circ = 150^\circ$$

답 150°

176

각 5θ 를 나타내는 동경과 각 2θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$5\theta + 2\theta = 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수})$$

$$7\theta = 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = \frac{360^\circ}{7} \times n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$0^\circ < \frac{360^\circ}{7} \times n < 180^\circ$$

$$\therefore 0 < n < \frac{7}{2}$$

n 은 정수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$

$$n=1 \text{이면 } \textcircled{1} \text{에서 } \theta = \frac{360^\circ}{7}$$

$$n=2 \text{ 이면 } \textcircled{1} \text{에서 } \theta = \frac{720^\circ}{7}$$

$$n=3 \text{ 이면 } \textcircled{1} \text{에서 } \theta = \frac{1080^\circ}{7}$$

따라서 θ 는 $\frac{360^\circ}{7}, \frac{720^\circ}{7}, \frac{1080^\circ}{7}$ 의 3개이다.

답 3

177

각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$3\theta + \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

$$n=0 \text{ 이면 } \textcircled{1} \text{에서 } \theta = 45^\circ$$

$$n=1 \text{ 이면 } \textcircled{1} \text{에서 } \theta = 135^\circ$$

따라서 각 θ 의 크기를 모두 구하면 $45^\circ, 135^\circ$ 이다.

답 45°, 135°

178

$$(1) 120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$$

$$(2) -315^\circ = -315 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7}{4}\pi$$

$$(3) 135^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$$

$$(4) 330^\circ = 330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{6}\pi$$

답 (1) $\frac{2}{3}\pi$ (2) $-\frac{7}{4}\pi$ (3) $\frac{3}{4}\pi$ (4) $\frac{11}{6}\pi$

179

$$(1) \frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$$

$$(2) \frac{5}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 225^\circ$$

$$(3) -\frac{4}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -240^\circ$$

$$(4) -\frac{31}{6}\pi = -\frac{31}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -930^\circ$$

답 (1) 150° (2) 225° (3) -240° (4) -930°

180

$$(1) \frac{17}{6}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$2n\pi + \frac{5}{6}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$(2) -\frac{2}{3}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{4}{3}\pi \text{이므로}$$

$$2n\pi + \frac{4}{3}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$(3) \frac{8}{3}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{2}{3}\pi \text{이므로}$$

$$2n\pi + \frac{2}{3}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$(4) -\frac{15}{4}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$2n\pi + \frac{\pi}{4} \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$\text{답 (1) } 2n\pi + \frac{5}{6}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$(2) 2n\pi + \frac{4}{3}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$(3) 2n\pi + \frac{2}{3}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$(4) 2n\pi + \frac{\pi}{4} \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

181

$$(1) \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$l = r\theta = 4 \times \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

$$(2) l = r\theta = 3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{답 (1) } l = \frac{4}{3}\pi, S = \frac{8}{3}\pi \quad (2) l = \frac{\pi}{2}, S = \frac{3}{4}\pi$$

182

$$\textcircled{1} \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 135^\circ$$

$$\textcircled{2} -\frac{7}{6}\pi = -\frac{7}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -210^\circ$$

$$\textcircled{3} \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$$

$$\textcircled{4} 330^\circ = 330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{6}\pi$$

$$\textcircled{5} 165^\circ = 165 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{12}\pi$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

183

$$(1) 345^\circ = 345 \times \frac{\pi}{180} = \frac{23}{12}\pi$$

$$\therefore 2n\pi + \frac{23}{12}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$(2) 900^\circ = 360^\circ \times 2 + 180^\circ \text{이고}$$

$$180^\circ = 180 \times \frac{\pi}{180} = \pi$$

$$\therefore 2n\pi + \pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$(3) -960^\circ = 360^\circ \times (-3) + 120^\circ \text{이고}$$

$$120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore 2n\pi + \frac{2}{3}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$\text{답 (1) } 2n\pi + \frac{23}{12}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$(2) 2n\pi + \pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$(3) 2n\pi + \frac{2}{3}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

184

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면

중심각의 크기가 $\theta = \frac{4}{3}\pi$ 이고 넓이가 $S = 6\pi$ 이므로

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta \text{에서 } 6\pi = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{4}{3}\pi$$

$$r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 (\because r > 0)$$

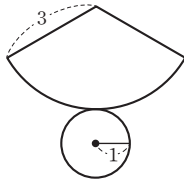
따라서 호의 길이가 $l = r\theta = 3 \times \frac{4}{3}\pi = 4\pi$ 이므로 구하는 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2r + l = 2 \cdot 3 + 4\pi = 6 + 4\pi$$

답 6 + 4π

185

원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같다. 옆면인 부채꼴의 호의 길이 l 은 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로



$$l = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 3 \times 2\pi = 3\pi$ 이고 밑면인 원의 넓이는 $\pi \cdot 1^2 = \pi$ 이므로 구하는 원뿔의 겉넓이는 $3\pi + \pi = 4\pi$ 이다.

답 4π

186

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 부채꼴의 호의 길이 l 은

$$l = 20 - 2r \quad (0 < r < 10)$$

부채꼴의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(20 - 2r)$$

$$= -r^2 + 10r = -(r - 5)^2 + 25$$

따라서 $r = 5$ 일 때, S 는 최댓값 25를 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하고 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ 에 $r = 5$, $S = 25$ 를 대입하면 $\theta = 2$

\therefore 최대 넓이 : 25, 중심각의 크기 : 2

답 최대 넓이 : 25, 중심각의 크기 : 2

187

$$(1) \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \tan \theta = \frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = -1$$

$$\text{답 (1) } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3) -1$$

188

$$(1) \overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{4}$$

$$(2) \overline{OP} = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = 17 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{8}{17}$$

$$\cos \theta = \frac{15}{17}$$

$$\tan \theta = -\frac{8}{15}$$

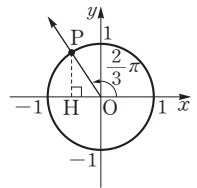
답 풀이 참조

189

(1) 오른쪽 그림과 같이 반지름의

길이가 1인 원에서 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 의

동경과 이 원의 교점을 P, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발



을 H라 하면 $\angle POH = \frac{\pi}{3}$ 이므로 점 P의 좌표는

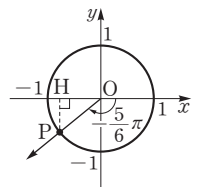
$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에서

$\theta = -\frac{5}{6}\pi$ 의 동경과 이 원의

교점을 P, 점 P에서 x 축에 내



린 수선의 발을 H라 하면 $\angle POH = \frac{\pi}{6}$ 이므로

점 P의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 풀이 참조

190

(1) $400^\circ = 360^\circ + 40^\circ$ 이므로

400° 는 제 1 사분면의 각이다.

$$\therefore \sin 400^\circ > 0, \cos 400^\circ > 0, \tan 400^\circ > 0$$

(2) $-\frac{17}{6}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{7}{6}\pi$ 이므로

$-\frac{17}{6}\pi$ 는 제 3 사분면의 각이다.

$$\therefore \sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right) < 0, \cos\left(-\frac{17}{6}\pi\right) < 0,$$

$$\tan\left(-\frac{17}{6}\pi\right) > 0$$

(3) $-760^\circ = 360^\circ \times (-3) + 320^\circ$ 이므로

-760° 는 제 4 사분면의 각이다.

$$\therefore \sin(-760^\circ) < 0, \cos(-760^\circ) > 0,$$

$$\tan(-760^\circ) < 0$$

(4) $\frac{29}{10}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{9}{10}\pi$ 이므로

$\frac{29}{10}\pi$ 는 제 2 사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \frac{29}{10}\pi > 0, \cos \frac{29}{10}\pi < 0, \tan \frac{29}{10}\pi < 0$$

답 풀이 참조

191

(1) $\sin \theta > 0$ 이면 제 1 사분면 또는 제 2 사분면의 각이고, $\cos \theta < 0$ 이면 제 2 사분면 또는 제 3 사분면의 각이므로 동시에 만족시키는 θ 는 제 2 사분면의 각이다.

(2) $\cos \theta > 0$ 이면 제 1 사분면 또는 제 4 사분면의 각이고, $\tan \theta < 0$ 이면 제 2 사분면 또는 제 4 사분면의 각이므로 동시에 만족시키는 θ 는 제 4 사분면의 각이다.

(3) $\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

따라서 θ 는 제 2 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.

답 (1) 제 2 사분면 (2) 제 4 사분면

(3) 제 2 사분면 또는 제 4 사분면

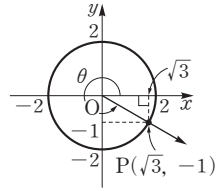
192

$$OP = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

이므로

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$(1) \frac{\tan \theta - \cos \theta}{\sqrt{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{5}{6}$$

$$(2) 4\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta = 4\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3$$

답 (1) $-\frac{5}{6}$ (2) -3

193

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에서

$\theta = -\frac{\pi}{3}$ 의 동경과 이 원의

교점을 P, 점 P에서 x 축에

내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle POH = \frac{\pi}{3}$ 이므로 점 P의

좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2},$$

$$\tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{\cos \theta}{\sin \theta - \tan \theta} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

194

(i) $\sin \theta \tan \theta > 0$ 에서 $\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$

또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이다.

$\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제 1 사분면의 각

$\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제 3 사분면의 각

(ii) $\cos \theta \tan \theta < 0$ 에서 $\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

또는 $\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이다.

$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제 4 사분면의 각

$\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제 3 사분면의 각

(i), (ii)에서 주어진 조건을 동시에 만족시키는 θ 는

제 4 사분면의 각이다.

답 제 4 사분면

195

θ 가 제 4 사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$

따라서 $\sin \theta - \cos \theta < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} - |\sin \theta| - \sqrt[3]{\cos^3 \theta} \\ &= -(\sin \theta - \cos \theta) + \sin \theta - \cos \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 0

196

$\frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} = -\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$ 에서 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$

따라서 θ 는 제 2 사분면의 각이므로

$\tan \theta < 0, \cos \theta + \tan \theta < 0,$

$\tan \theta - \sin \theta < 0$

$$\begin{aligned} \therefore |\cos \theta + \tan \theta| + \sqrt{\sin^2 \theta} - \sqrt{(\tan \theta - \sin \theta)^2} \\ &= -(\cos \theta + \tan \theta) + \sin \theta + (\tan \theta - \sin \theta) \\ &= -\cos \theta \end{aligned}$$

답 $-\cos \theta$

197

$$\begin{aligned} (1) \frac{1 - \sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \\ &= \frac{(1 + \sin^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \\ &= \frac{(1 + \sin^2 \theta)\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \\ &= 1 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$(2) \left(\sin \theta - \frac{1}{\sin \theta}\right)^2 + \left(\cos \theta - \frac{1}{\cos \theta}\right)^2 - \left(\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta}\right)^2$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sin^2 \theta - 2 + \frac{1}{\sin^2 \theta}\right) + \left(\cos^2 \theta - 2 + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) \\ &\quad - \left(\tan^2 \theta - 2 + \frac{1}{\tan^2 \theta}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -2 + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}\right) + \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) \end{aligned}$$

$$= -2 + 1 + \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= -2 + 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= -2 + 1 + 1 + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{1 + \sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 - \sin \theta}{1 + \cos \theta} - \frac{2}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{(1 + \sin \theta)(1 + \cos \theta) + (1 - \sin \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \end{aligned}$$

$$- \frac{2}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{2 + 2 \sin \theta \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} - \frac{2}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} = 2 \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2}{\tan \theta}$$

$$(4) \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{\sin \theta - \sin^2 \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta(1 + \sin \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}$$

$$- \frac{\sin \theta(1 - \sin \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$$

$$= \frac{\sin \theta(1 + \cos \theta + \sin \theta + \sin \theta \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$- \frac{\sin \theta(1 - \cos \theta - \sin \theta + \sin \theta \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \theta(\sin \theta + \cos \theta)}{\sin^2 \theta}$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{\tan \theta}\right)$$

답 (1) 2 (2) 1 (3) $\frac{2}{\tan \theta}$ (4) $2 \left(1 + \frac{1}{\tan \theta}\right)$

198

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

그런데 θ 가 제 3 사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0$

따라서 $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\frac{1}{\cos \theta} = -\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \text{또 } \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로} \\ \tan \theta &= \frac{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2 \\ \therefore \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta &= 2 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

답 $2 - \sqrt{5}$

199

$$\begin{aligned} \sin \theta + 2 \cos \theta &= 0 \text{에서 } \sin \theta = -2 \cos \theta \\ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= -2 \quad \therefore \tan \theta = -2 \\ \text{이때 } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \text{의 양변을 } \cos^2 \theta \text{로 나누면} \\ \tan^2 \theta + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \text{이므로} \\ \cos^2 \theta &= \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{1}{(-2)^2 + 1} = \frac{1}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi &\text{이므로 } \cos \theta < 0 \\ \therefore \cos \theta &= -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} &\text{를 } \sin \theta = -2 \cos \theta \text{에 대입하면} \\ \sin \theta &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \therefore \sin \theta + \cos \theta &= \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

200

$$\begin{aligned} &\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}{\sin \theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{2(1 + \cos \theta)}{\sin \theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{2}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉 } \frac{2}{\sin \theta} &= -3 \text{에서 } \sin \theta = -\frac{2}{3} \\ \text{이때 } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \text{에서} \\ \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi &\text{이므로 } \cos \theta > 0 \\ \therefore \cos \theta &= \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \therefore \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \therefore \sin \theta + \tan \theta &= -\frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{10 + 6\sqrt{5}}{15} \\ \text{답 } &-\frac{10 + 6\sqrt{5}}{15} \end{aligned}$$

201

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} &= \frac{1}{3} \text{에서} \\ 3 - 3 \tan \theta &= 1 + \tan \theta \\ \therefore \tan \theta &= \frac{1}{2} \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \text{의 양변을 } \sin^2 \theta \text{로 나누면} \\ 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ \text{이므로 } \frac{1}{\sin^2 \theta} &= 1 + 2^2 = 5 \\ \therefore \sin^2 \theta &= \frac{1}{5} \\ \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi &\text{이므로 } \sin \theta < 0 \\ \therefore \sin \theta &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

답 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

202

$$\begin{aligned} \sin \theta - \cos \theta &= \frac{1}{2} \text{의 양변을 제곱하면} \\ (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ 1 - 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{4} \\ \therefore \sin \theta \cos \theta &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{8}\right) = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

답 $\frac{11}{16}$

203

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta < 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{8}} = -4\sqrt{5} \end{aligned}$$

답 $-4\sqrt{5}$

204

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{4}$ 의 양변을 제곱하면

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{16}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{15}{32}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 4 \sin \theta \cos \theta \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{15}{32}\right) = \frac{31}{16} \end{aligned}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{31}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{31}}{4}$

205

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -2 \text{이므로}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \end{aligned}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

206

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{2}{3} \quad \cdots \text{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{3} \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18} \quad \cdots \text{㉢}$$

$$\text{㉡, ㉢에서 } \frac{k}{3} = -\frac{5}{18} \quad \therefore k = -\frac{5}{6}$$

답 $-\frac{5}{6}$

207

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\cos \theta + \tan \theta = -\frac{k}{5} \quad \cdots \text{㉠}$$

$$\cos \theta \tan \theta = -\frac{3}{5} \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠에서 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$\cos \theta = -\frac{4}{5}$ 를 ㉠에 대입하면

$$-\frac{4}{5} \tan \theta = -\frac{3}{5} \quad \therefore \tan \theta = \frac{3}{4}$$

따라서 ㉡에서

$$\begin{aligned} k &= -5(\cos \theta + \tan \theta) = -5\left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{4}\right) \\ &= -5 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

208

이차방정식 $2x^2 - \sqrt{2}x + k = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉡, ㉢에서 } \frac{k}{2} = -\frac{1}{4} \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

따라서 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이

$\frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\cos \theta}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} -a &= \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{4}} \\ &= -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2}$$

$$b = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8 + 16 = 24$$

답 24

209

답 (1) 실수 전체의 집합 (2) 3, -3 (3) 원점

(4) 2π (5) $y, 3$

210

답 (1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ (3) y 축

(4) 4π (5) $x, 2$

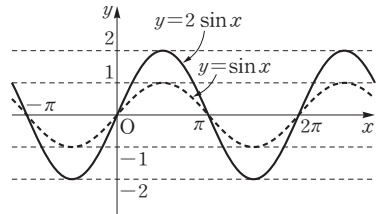
211

답 (1) $3n\pi + \frac{3}{2}\pi$ (2) 원점 (3) 3π

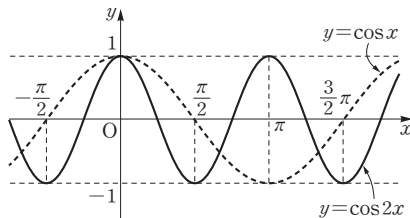
(4) $x = 3n\pi + \frac{3}{2}\pi$ (5) $x, 3$

212

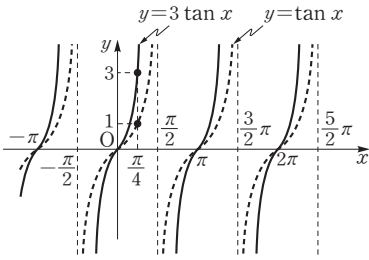
(1) $y = 2 \sin x$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배한 것이다.



(2) $y = \cos 2x$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배한 것이다.



(3) $y=3 \tan x$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3배한 것이다.



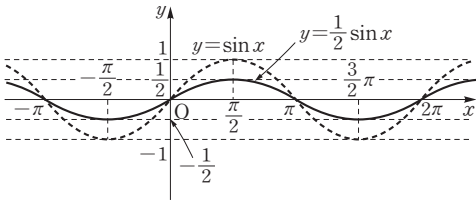
답 풀이 참조

213

(1) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$

주기: $\frac{2\pi}{1}=2\pi$

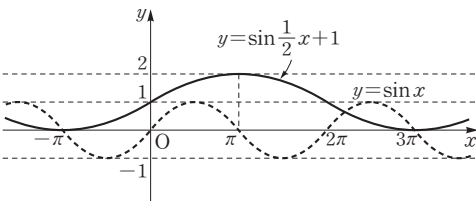
$y=\frac{1}{2} \sin x$ 의 그래프는 $y=\sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배한 것이므로 다음 그림과 같다.



(2) 최댓값: $1+1=2$, 최솟값: $-1+1=0$

주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

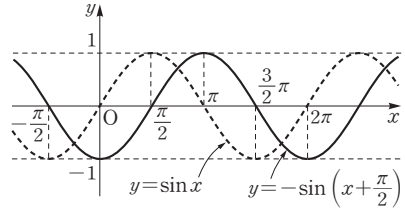
$y=\sin \frac{1}{2}x+1$ 의 그래프는 $y=\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2배하고, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



(3) 최댓값: $|-1|=1$, 최솟값: $-|-1|=-1$

주기: $\frac{2\pi}{1}=2\pi$

$y=-\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 의 그래프는 $y=\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

214

주기: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6 \quad \therefore p=6$

최댓값: $1+3=4 \quad \therefore M=4$

최솟값: $-1+3=2 \quad \therefore m=2$

$\therefore p+M+m=6+4+2=12$

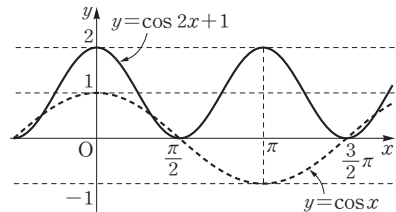
답 12

215

(1) 최댓값: $1+1=2$, 최솟값: $-1+1=0$

주기: $\frac{2\pi}{2}=\pi$

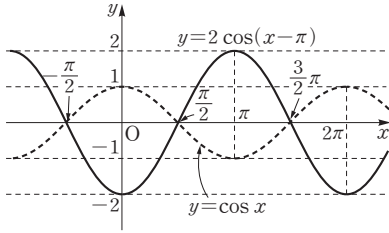
$y=\cos 2x+1$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배하고, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



(2) 최댓값: 2, 최솟값: -2

주기: $\frac{2\pi}{1}=2\pi$

$y=2\cos(x-\pi)$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 π 만큼 평행이동한 후 y 축의 방향으로 2배한 것이므로 다음 그림과 같다.

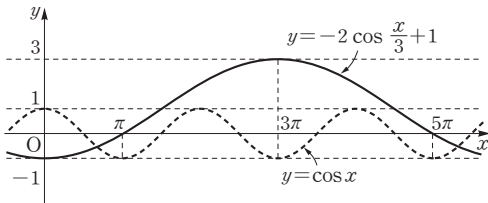


(3) 최댓값: $|-2|+1=3$

최솟값: $-|-2|+1=-1$

주기: $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$

$y=-2\cos\frac{x}{3}+1$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 3배, y 축의 방향으로 2배한 다음 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

216

주기: $\frac{2\pi}{|-2\pi|}=1 \quad \therefore p=1$

최댓값: $|-3|+6=9 \quad \therefore M=9$

최솟값: $-|-3|+6=3 \quad \therefore m=3$

$\therefore p+M+m=1+9+3=13$

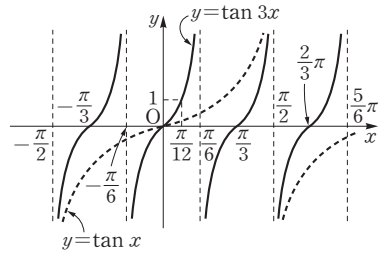
답 13

217

(1) 주기: $\frac{\pi}{3}$

$y=\tan 3x$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 x 축

의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 배한 것이므로 다음 그림과 같다.

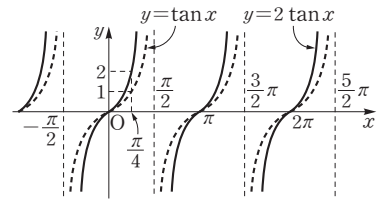


점근선의 방정식: $3x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 에서

$x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ (n 은 정수)

(2) 주기: $\frac{\pi}{1}=\pi$

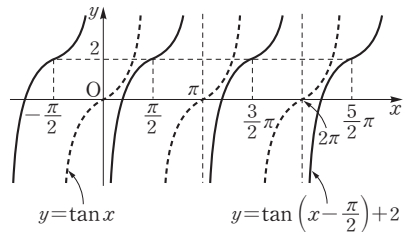
$y=2\tan x$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배한 것이므로 다음 그림과 같다.



점근선의 방정식: $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)

(3) 주기: $\frac{\pi}{1}=\pi$

$y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



점근선의 방정식: $x-\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 에서

$x=n\pi+\pi$ (n 은 정수)

$\therefore x=n\pi$ (n 은 정수)

답 풀이 참조

218

주기 : $\frac{\pi}{2}$ $\therefore a = \frac{1}{2}$

접근선의 방정식 : $2x - \frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$x = \frac{n+1}{2}\pi$ (n 은 정수)

$\therefore x = \frac{n}{2}\pi$ (n 은 정수) $\therefore b = \frac{1}{2}$

$\therefore a+b=1$

219

(1) $y = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

$= -2 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

\therefore 최댓값 : $|-2| + 1 = 3$

최솟값 : $-|-2| + 1 = -1$

주기 : $\frac{2\pi}{2} = \pi$

(2) $y = -\frac{1}{4} \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) - 4$

$= -\frac{1}{4} \cos 3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 4$

\therefore 최댓값 : $\left|-\frac{1}{4}\right| - 4 = -\frac{15}{4}$

최솟값 : $-\left|-\frac{1}{4}\right| - 4 = -\frac{17}{4}$

주기 : $\frac{2}{3}\pi$

(3) $y = -2 \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$

$= -2 \tan \pi\left(x + \frac{1}{3}\right)$

\therefore 최댓값 : 없다., 최솟값 : 없다.

주기 : $\frac{\pi}{\pi} = 1$

답 1

답 풀이 참조

220

$y = \cos 2x + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{8}$ 만큼

평행이동하면

$y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + 1 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

이것을 x 축에 대하여 대칭이동하면

$-y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

$\therefore y = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

답 $y = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

221

주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{\frac{1}{b}} = 4\pi$

$\therefore b = 2$

최댓값이 3이고 $a > 0$ 이므로

$a - c = 3$ ㉠

$f(x) = a \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - c$ 에서

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - c = 0$

$-\frac{a}{2} - c = 0$ $\therefore a + 2c = 0$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2, c = -1$

$\therefore f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

따라서 $f(x)$ 의 최솟값은 $-2 + 1 = -1$

답 -1

222

$f(x) = a \tan(bx + c) + d$

$= a \tan b\left(x + \frac{c}{b}\right) + d$ ㉠

주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore b = 2$

또 $y = a \tan bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼,

y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$y = a \tan b\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\pi < c < 0$ 이므로 $\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore c = -\frac{\pi}{2}$ 이고 $d = -1$

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= a \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) - 1 \\
 &= a \tan \frac{\pi}{6} - 1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}}a - 1 = \sqrt{3} - 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore abcd = 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot (-1) = 3\pi$$

답 3π

223

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -3 이고 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

주기는 $\frac{13}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = 2\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = 1$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y = 3 \cos(x - c)$ 이고,

그 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$ 을 지나므로

$$3 = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - c\right), \cos\left(\frac{\pi}{6} - c\right) = 1$$

$$0 \leq c \leq 2\pi \text{이므로 } \frac{\pi}{6} - c = 0 \quad \therefore c = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore y = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{답 } y = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

224

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -1 이고 $a > 0$ 이므로

$$a + d = 3, -a + d = -1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, d = 1$

또 주기가 $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y = 2 \sin(2x + c) + 1$ 이고, 그 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = 2 \sin(0 + c) + 1, \sin c = 1$$

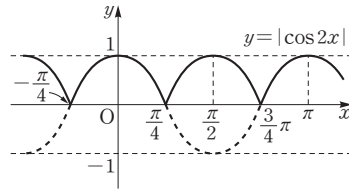
$$0 < c < \pi \text{이므로 } c = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore abcd = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = 2\pi$$

답 2π

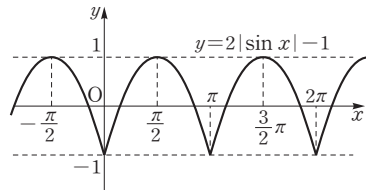
225

(1) $y = |\cos 2x|$ 의 그래프는 $y = \cos 2x$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



\therefore 최댓값 : 1, 최솟값 : 0, 주기 : $\frac{\pi}{2}$

(2) $y = 2|\sin x| - 1$ 의 그래프는 $y = |\sin x|$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배한 다음 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



\therefore 최댓값 : 1, 최솟값 : -1, 주기 : π

답 (1) 최댓값 : 1, 최솟값 : 0, 주기 : $\frac{\pi}{2}$

(2) 최댓값 : 1, 최솟값 : -1, 주기 : π

참고 $y = 2|\sin x|$ 의 그래프와 $y = |2 \sin x|$ 의 그래프는 서로 같다.

226

$$\text{주기는 } \frac{\pi}{\pi} = 1 \quad \therefore a = 1$$

또 $0 \leq |\cos \pi x| \leq 1$ 이므로

$$3 \leq 7|\cos \pi x| + 3 \leq 10$$

따라서 $M = 10, m = 3$ 이므로

$$a + M + m = 1 + 10 + 3 = 14$$

답 14

227

$f(x) = a|\sin bx| + c$ 에서 최댓값이 5이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore b = 3$$

$f\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{7}{2}$ 에서

$$a\left|\sin \frac{\pi}{6}\right| + c = \frac{a}{2} + c = \frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $c = 2$

$$\therefore abc = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

답 18

228

$$(1) \sin 750^\circ = \sin (360^\circ \times 2 + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(2) \sin \frac{13}{3}\pi = \sin \left(2\pi \times 2 + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \cos 420^\circ = \cos (360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(4) \tan \frac{7}{3}\pi = \tan \left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{답 (1) } 30^\circ, 30^\circ, \frac{1}{2} \quad (2) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) \sqrt{3}$$

229

$$(1) \tan \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(4) \tan \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\text{답 (1) } \frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2) -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4) -\sqrt{3}$$

230

$$(1) \cos \frac{3}{4}\pi = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(3) \cos 225^\circ = \cos (180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(4) \tan \frac{4}{3}\pi = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{답 (1) } \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4) \sqrt{3}$$

231

$$(1) \sin 135^\circ = \sin (90^\circ \times 2 - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \sin \frac{11}{6}\pi = \sin \left(\frac{\pi}{2} \times 3 + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \cos \frac{7}{4}\pi = \cos \left(\frac{\pi}{2} \times 4 - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(4) \tan 300^\circ = \tan (90^\circ \times 4 - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\text{답 (1) } 2, 45^\circ, 45^\circ, \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) -\frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4) -\sqrt{3}$$

232

(1) $\sin 760^\circ = \sin (360^\circ \times 2 + 40^\circ) = \sin 40^\circ$
삼각함수표에서 $\sin 40^\circ = 0.6428$ 이므로
 $\sin 760^\circ = 0.6428$

(2) $\cos 1000^\circ = \cos (360^\circ \times 3 - 80^\circ) = \cos 80^\circ$
삼각함수표에서 $\cos 80^\circ = 0.1736$ 이므로
 $\cos 1000^\circ = 0.1736$

(3) $\tan (-410^\circ) = -\tan 410^\circ = -\tan (360^\circ + 50^\circ)$

$$= -\tan 50^\circ$$

삼각함수표에서 $\tan 50^\circ = 1.1918$ 이므로

$$\tan(-410^\circ) = -1.1918$$

답 (1) 0.6428 (2) 0.1736 (3) -1.1918

233

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right) &= -\sin\frac{17}{6}\pi = -\sin\left(2\pi + \frac{5}{6}\pi\right) \\ &= -\sin\frac{5}{6}\pi = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\begin{aligned} \cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right) &= \cos\frac{10}{3}\pi = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right) \\ = -\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -2 \end{aligned}$$

답 -2

234

$$\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \theta\right) = \cos\theta, \cos(3\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\sin\theta, \sin(5\pi - \theta) = \sin\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin\left(\frac{5}{2}\pi + \theta\right) \cos(3\pi + \theta) \\ + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \sin(5\pi - \theta) \\ = \cos\theta(-\cos\theta) + (-\sin\theta)\sin\theta \\ = -(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ = -1 \end{aligned}$$

답 -1

235

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right)} \\ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{2}$

236

$$(1) \cos 0^\circ = \cos(90^\circ - 90^\circ) = \sin 90^\circ$$

$$\cos 1^\circ = \cos(90^\circ - 89^\circ) = \sin 89^\circ$$

$$\cos 2^\circ = \cos(90^\circ - 88^\circ) = \sin 88^\circ$$

⋮

$$\cos 44^\circ = \cos(90^\circ - 46^\circ) = \sin 46^\circ$$

∴ (주어진 식)

$$= \sin^2 90^\circ + \sin^2 89^\circ + \sin^2 88^\circ + \cdots$$

$$+ \cos^2 89^\circ + \cos^2 90^\circ$$

$$= (\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ) + (\sin^2 89^\circ + \cos^2 89^\circ)$$

$$+ \cdots + (\sin^2 46^\circ + \cos^2 46^\circ) + \cos^2 45^\circ$$

$$= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{45\text{개}} + \frac{1}{2}$$

$$= 45 \times 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{91}{2}$$

$$(2) \tan 89^\circ = \tan(90^\circ - 1^\circ) = \frac{1}{\tan 1^\circ}$$

$$\tan 88^\circ = \tan(90^\circ - 2^\circ) = \frac{1}{\tan 2^\circ}$$

$$\tan 87^\circ = \tan(90^\circ - 3^\circ) = \frac{1}{\tan 3^\circ}$$

⋮

$$\tan 46^\circ = \tan(90^\circ - 44^\circ) = \frac{1}{\tan 44^\circ}$$

$$\therefore \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots$$

$$\times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ$$

$$= \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots$$

$$\begin{aligned} & \times \tan 45^\circ \times \cdots \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \times \frac{1}{\tan 1^\circ} \\ & = \left(\tan 1^\circ \times \frac{1}{\tan 1^\circ} \right) \times \left(\tan 2^\circ \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \right) \times \\ & \quad \cdots \times \left(\tan 44^\circ \times \frac{1}{\tan 44^\circ} \right) \times \tan 45^\circ \\ & = \underbrace{1 \times \cdots \times 1}_{44\text{개}} \times \tan 45^\circ \\ & = 1 \times \tan 45^\circ \\ & = 1 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{91}{2}$ (2) 1

237

$$\begin{aligned} \cos(\pi + \theta) &= -\cos \theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \\ \cos(2\pi + \theta) &= \cos \theta, \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin \theta \\ \therefore \cos^2(\pi + \theta) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ & \quad + \cos^2(2\pi + \theta) + \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) \\ & = (-\cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ & = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ & = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

답 2

238

답 $|t-2|+1, -1, 1, t-1, -t+3, -1, 4, 1, 2$

239

답 $-|t-3|+2, -1, 1, -t+5, t-1, 1, 0, -1, -2$

240

$$\begin{aligned} (1) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x \\ \therefore y &= 3 \cos(x + \pi) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3 \\ &= -3 \cos x + \cos x - 3 \\ &= -2 \cos x - 3 \end{aligned}$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-2 \leq -2 \cos x \leq 2$$

$$\therefore -5 \leq -2 \cos x - 3 \leq -1$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 -1 ,

최솟값은 -5 이다.

(2) $y = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| + 1$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$y = \left| t - \frac{1}{2} \right| + 1$$

$$t \geq \frac{1}{2} \text{ 일 때, } y = t + \frac{1}{2}$$

$$t < \frac{1}{2} \text{ 일 때, } y = -t + \frac{3}{2}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프

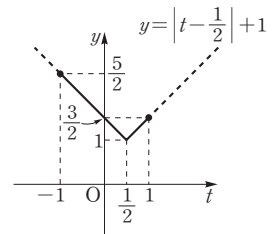
프는 오른쪽 그림과

같으므로

$t = -1$ 일 때,

최댓값은 $\frac{5}{2}$

$t = \frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값은 1



(3) $y = |2 \sin x - 5| - 1$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$y = |2t - 5| - 1$$

$$t \geq \frac{5}{2} \text{ 일 때, } y = 2t - 6$$

$$t < \frac{5}{2} \text{ 일 때, } y = -2t + 4$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는

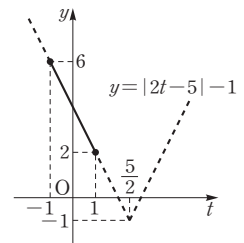
오른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때,

최댓값은 6

$t = 1$ 일 때,

최솟값은 2



(4) $y = |2 - 3 \cos x| + 1$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$y = |2 - 3t| + 1$$

$$t \geq \frac{2}{3} \text{ 일 때, } y = 3t - 1$$

$$t < \frac{2}{3} \text{ 일 때, } y = -3t + 3$$

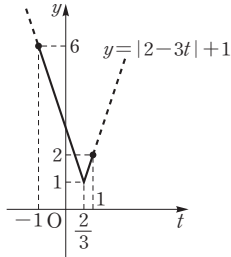
$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는
오른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때,

최댓값은 6

$t = \frac{2}{3}$ 일 때,

최솟값은 1



답 (1) 최댓값 : -1, 최솟값 : -5

(2) 최댓값 : $\frac{5}{2}$, 최솟값 : 1

(3) 최댓값 : 6, 최솟값 : 2

(4) 최댓값 : 6, 최솟값 : 1

241

$y = a|\cos x - 1| + b$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면
 $-1 \leq t \leq 1$

$y = a|t - 1| + b$

$t \geq 1$ 일 때, $y = at - a + b$

$t < 1$ 일 때, $y = -at + a + b$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때,

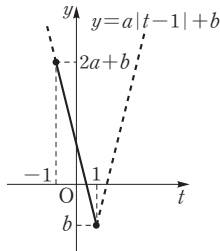
최댓값은 $2a + b$

$t = 1$ 일 때, 최솟값은 b

따라서 $2a + b = 6$, $b = -2$

이므로 $a = 4$, $b = -2$

$\therefore a + b = 2$



답 2

다른풀이 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서

$-2 \leq \cos x - 1 \leq 0$

$\therefore 0 \leq |\cos x - 1| \leq 2$

이때 $a > 0$ 이므로

$0 \leq a|\cos x - 1| \leq 2a$

$\therefore b \leq a|\cos x - 1| + b \leq 2a + b$

따라서 최댓값은 $2a + b$, 최솟값은 b 이다.

242

(1) $y = -\cos^2 x + 2 \sin x + 1$

$$= -(1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 1$$

$$= \sin^2 x + 2 \sin x$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

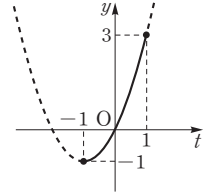
$$y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$t = 1$ 일 때, 최댓값은 3

$t = -1$ 일 때, 최솟값은 -1

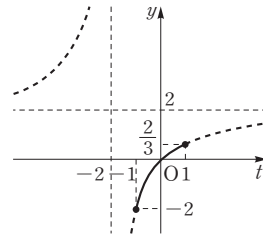


(2) $y = \frac{2 \sin x}{\sin x + 2}$ 에서

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{2t}{t+2} = -\frac{4}{t+2} + 2$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는 다음 그림과 같으므로



$t = 1$ 일 때, 최댓값은 $\frac{2}{3}$

$t = -1$ 일 때, 최솟값은 -2

(3) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$

이므로

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2(x + \pi)$$

$$= \cos x - \cos^2 x$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

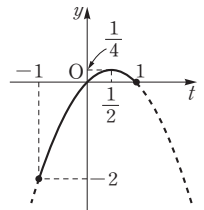
$$y = t - t^2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로

$t = \frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{1}{4}$

$t = -1$ 일 때, 최솟값은 -2



(4) $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 \cos^2 x + 4 \sin(\pi + x)$

$= \sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x) - 4 \sin x$

$= 4 \sin^2 x - 4 \sin x - 3$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$-1 \leq t \leq 1$ 이고

$y = 4t^2 - 4t - 3$

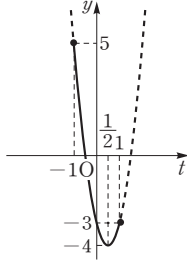
$= 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 4$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때, 최댓값은 5

$t = \frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값은 -4



답 (1) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1

(2) 최댓값 : $\frac{2}{3}$, 최솟값 : -2

(3) 최댓값 : $\frac{1}{4}$, 최솟값 : -2

(4) 최댓값 : 5, 최솟값 : -4

243

답 $\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

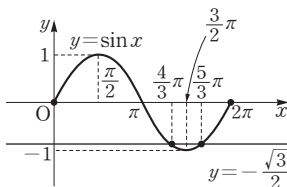
244

답 $\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, 0 \leq x < \frac{\pi}{4},$

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

245

(1) $2 \sin x = -\sqrt{3}$ 에서 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



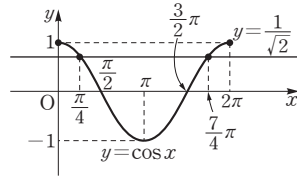
위의 그림에서 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표를 구하면 $\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$ 이므로

로 주어진 방정식의 해는

$x = \frac{4}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(2) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

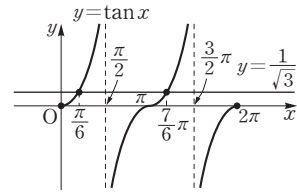


위의 그림에서 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

의 교점의 x 좌표를 구하면 $\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$ 이므로 주어진

방정식의 해는 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$

(3) $\sqrt{3} \tan x = 1$ 에서 $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$



위의 그림에서 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

의 교점의 x 좌표를 구하면 $\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi$ 이므로 주어진

방정식의 해는 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$

답 (1) $x = \frac{4}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(2) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$

(3) $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$

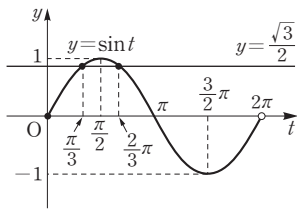
246

(1) $2x = t$ 로 놓으면 $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

한편, $0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq 2x < 2\pi$

$\therefore 0 \leq t < 2\pi$

..... ㉠



㉠의 범위에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 t 좌표를 구하면

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \text{이므로}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2x = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{3}$$

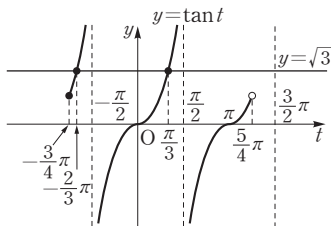
(2) $x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $\tan t = \sqrt{3}$

한편, $-\pi \leq x < \pi$ 에서

$$-\frac{3}{4}\pi \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{4}\pi$$

$$\therefore -\frac{3}{4}\pi \leq t < \frac{5}{4}\pi$$

..... ㉡



㉡의 범위에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 직선

$y = \sqrt{3}$ 의 교점의 t 좌표를 구하면

$$-\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x = -\frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{12}$$

(3) $2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ 에서

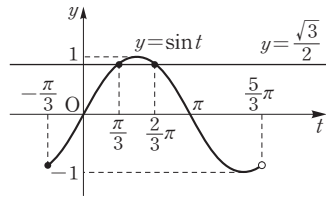
$$\sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = t \text{로 놓으면 } \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

한편, $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$$

..... ㉢



㉢의 범위에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 t 좌표를 구하면

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \text{이므로}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \pi$$

(4) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ 에서

$$(\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0$$

$$\therefore \cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = 2$$

그런데 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$\cos x = -1$$

$$\therefore x = \pi$$

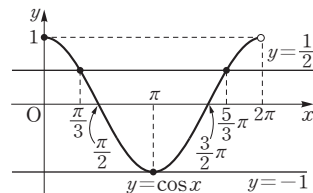
(5) $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ 에서

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$(\cos x + 1)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$



(i) $\cos x = -1$ 일 때, $x = \pi$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

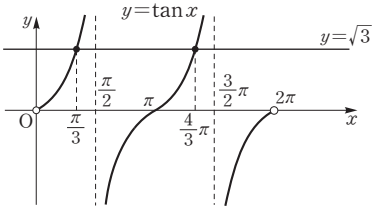
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

(6) $\tan x + \frac{3}{\tan x} = 2\sqrt{3}$ 의 양변에 $\tan x$ 를 곱하면

$$\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$$

$$(\tan x - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \therefore \tan x = \sqrt{3}$$



$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 의 교점의 x 좌표를 구하면 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

답 (1) $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{\pi}{3}$

(2) $x = -\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x = \frac{\pi}{12}$

(3) $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \pi$

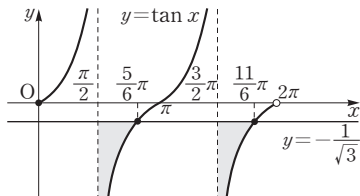
(4) $x = \pi$

(5) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(6) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

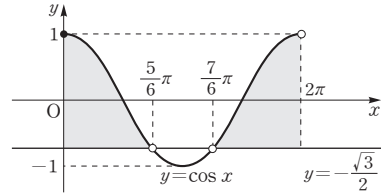
247

(1) $\sqrt{3}\tan x \leq -1$ 에서 $\tan x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$



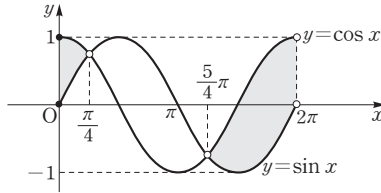
$$\therefore \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{11}{6}\pi$$

(2) $2\cos x > -\sqrt{3}$ 에서 $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\therefore 0 \leq x < \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi < x < 2\pi$$

(3) $\sin x < \cos x$



$$\therefore 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$$

(4) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$ 에서

$$x + \frac{\pi}{6} = t \text{ 로 놓으면}$$

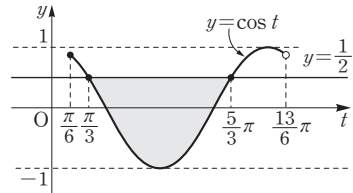
$$\cos t \leq \frac{1}{2}$$

..... ㉠

한편, $0 \leq x < 2\pi$ 에서

$$\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi$$



$\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi$ 에서 함수 $y = \cos t$ 의 그래프와 직선

$$y = \frac{1}{2} \text{의 교점의 } t \text{좌표를 구하면 } \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

㉠의 해는 $y = \cos t$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 보다

아래쪽(경계선 포함)에 있는 t 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5}{3}\pi$$

이때 $t = x + \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{3}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$

(5) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서 $x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면

$\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

한편, $0 \leq x \leq \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{3}\pi$

$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$

$-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ 에서

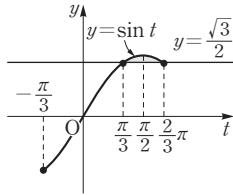
$\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$

이때 $t = x - \frac{\pi}{3}$ 이므로

$\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{3}\pi$

$\therefore \frac{2}{3}\pi \leq x \leq \pi$

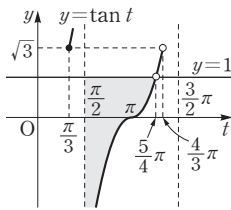


(6) $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < 1$ 에서 $x + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면

$\tan t < 1$

한편, $0 \leq x < \pi$ 에서 $\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{4}{3}\pi$



$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{4}{3}\pi$ 에서 $\tan t < 1$ 의 해는

$\frac{\pi}{2} < t < \frac{5}{4}\pi$

이때 $t = x + \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{5}{4}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{12}\pi$

답 풀이 참조

248

(1) $2 \sin^2\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) + 3 \sin x - 3 \geq 0$ 에서

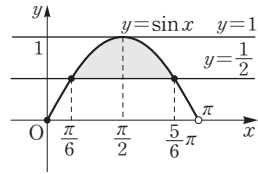
$2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 \geq 0$

$2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x - 3 \geq 0$

$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 \leq 0$

$(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$



$\therefore \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$

(2) $2 \cos x > 3 \tan x$ 에서

$2 \cos x > 3 \frac{\sin x}{\cos x}$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x > 0$ 이므로 양변에

$\cos x$ 를 곱하면

$2 \cos^2 x > 3 \sin x$

$2(1 - \sin^2 x) > 3 \sin x$

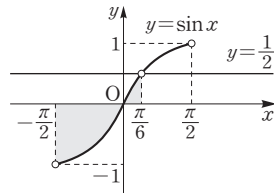
$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 < 0$

$(2 \sin x - 1)(\sin x + 2) < 0$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin x + 2 > 0$ 이므로

$2 \sin x - 1 < 0$

$\therefore \sin x < \frac{1}{2}$



$\therefore -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$

(3) $\tan^2 x + (\sqrt{3} + 1)\tan x > -\sqrt{3}$ 에서

$\tan^2 x + (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} > 0$

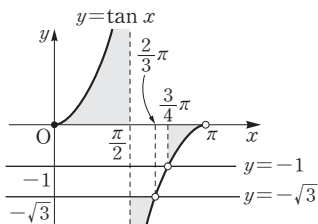
$\tan x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + (\sqrt{3} + 1)t + \sqrt{3} > 0$$

$$(t + \sqrt{3})(t + 1) > 0$$

$$\therefore t < -\sqrt{3} \text{ 또는 } t > -1$$

$$\text{즉 } \tan x < -\sqrt{3} \text{ 또는 } \tan x > -1$$



$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 두 직선 $y = -\sqrt{3}$, $y = -1$ 의 교점의 x 좌표를 구하면 각각

$$\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi$$

따라서 주어진 부등식의 해는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi \text{ 또는}$$

$$\frac{3}{4}\pi < x < \pi$$

답 풀이 참조

249

이차함수 $y = x^2 + 2\sqrt{2}x \sin \theta - 3 \cos \theta$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 + 2\sqrt{2}x \sin \theta - 3 \cos \theta = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉 이차방정식 $x^2 + (2\sqrt{2} \sin \theta)x - 3 \cos \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D > 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{2} \sin \theta)^2 + 3 \cos \theta > 0$$

$$2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta > 0$$

$$2(1 - \cos^2 \theta) + 3 \cos \theta > 0$$

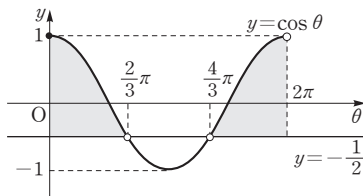
$$2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 2 < 0$$

$$(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 2) < 0$$

그런데 $\cos \theta - 2 < 0$ 이므로

$$2 \cos \theta + 1 > 0$$

$$\therefore \cos \theta > -\frac{1}{2}$$



위의 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$0 \leq \theta < \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$$

$$\text{답 } 0 \leq \theta < \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$$

250

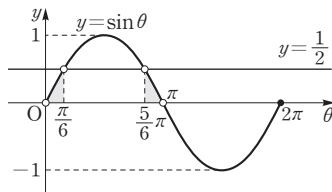
모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - (2 \sin \theta)x + \frac{1}{2} \sin \theta > 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식

$$x^2 - (2 \sin \theta)x + \frac{1}{2} \sin \theta = 0 \text{이 허근을 가져야 한다.}$$

즉 이차방정식 $x^2 - (2 \sin \theta)x + \frac{1}{2} \sin \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \sin \theta < 0$$

$$\sin \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right) < 0 \quad \therefore 0 < \sin \theta < \frac{1}{2}$$



위의 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$0 < \theta < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$$

$$\text{답 } 0 < \theta < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$$

251

삼각형 ABC에서 $A + B + C = 180^\circ$ 이므로 $C = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$ 이고,

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{20}{\sin 30^\circ} \quad \therefore a = 20\sqrt{2}$$

$$\text{답 } 20\sqrt{2}$$

252

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{15}{\sin 30^\circ} = \frac{30}{\sin C} \quad \therefore \sin C = 1$$

$$\therefore C = 90^\circ$$

이때 삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} B &= 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 이므로

$$\frac{15}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore b = 15\sqrt{3}$$

답 (1) 60° (2) $15\sqrt{3}$

253

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$B = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라

하면 사인법칙에 의하여 $2R = \frac{b}{\sin B}$ 이므로

$$R = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = 2$$

따라서 외접원의 넓이는 $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$

답 4π

254

$$a + b - 2c = 0 \quad \dots \textcircled{A}$$

$$2a - 3b + 3c = 0 \quad \dots \textcircled{B}$$

\textcircled{A} , \textcircled{B} 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{3}{5}c, \quad b = \frac{7}{5}c$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

$$= \frac{3}{5}c : \frac{7}{5}c : c$$

$$= 3 : 7 : 5$$

답 $3 : 7 : 5$

255

$A+B+C=180^\circ$ 이고, $A : B : C = 3 : 2 : 1$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{3}{6} = 90^\circ$$

$$B = 180^\circ \times \frac{2}{6} = 60^\circ$$

$$C = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ$$

$$\therefore a : b : c = \sin 90^\circ : \sin 60^\circ : \sin 30^\circ$$

$$= 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2}$$

$$= 2 : \sqrt{3} : 1$$

답 $2 : \sqrt{3} : 1$

256

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$a \cdot \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = b \cdot \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$a^3 = b^3 \quad \therefore a = b \quad (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

답 $a=b$ 인 이등변삼각형

257

원 모양의 스케이트장의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{10}{\sin 45^\circ} = 2R \quad \therefore R = 5\sqrt{2} \text{ (m)}$$

따라서 스케이트장의 둘레의 길이는

$$2\pi \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\pi \text{ (m)}$$

답 $10\sqrt{2}\pi \text{ m}$

258

(1) 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= (\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cos 135^\circ$$

$$= 2 + 9 - 6\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 17$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{17}$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

그런데 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 60^\circ$

답 (1) $\sqrt{17}$ (2) 60°

259

삼각형 ABC에서 b 가 가장 짧은 변의 길이이므로 B 가 최소각의 크기이다.

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{6}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

그런데 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 45^\circ$

따라서 최소각의 크기는 45° 이다.

답 45°

260

삼각형 ABC에서 $B+C=180^\circ-A$ 이므로

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{B+C-A}{2}\right) &= \sin\left(\frac{180^\circ-A-A}{2}\right) \\ &= \sin(90^\circ-A) = \cos A\end{aligned}$$

한편, 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 7 : 5 : 3$$

따라서 $a=7k, b=5k, c=3k$ ($k>0$)로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 3k} = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

261

$a \cos B = b \cos A + c$ 에서

$$a \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + c$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2 + 2c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

262

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos 120^\circ \\ &= 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cos 120^\circ \\ &= 36 + 100 - 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 196\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BC} = 14 \text{ (m)} \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

연못의 반지름의 길이를 R 라 하면 R 는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이이므로 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{14}{\sin 120^\circ}$$

$$\therefore R = \frac{14\sqrt{3}}{3} \text{ (m)}$$

따라서 연못의 반지름의 길이는 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ m이다.

답 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ m

263

$$(1) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$$

$$(2) S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 45^\circ = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) S = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = \frac{15}{2}$$

답 (1) $5\sqrt{3}$ (2) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{15}{2}$

264

$$(1) S = \frac{abc}{4R} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot \frac{25}{8}} = 12$$

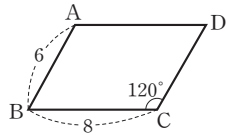
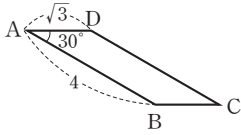
$$\begin{aligned}(2) S &= \frac{1}{2} r(a+b+c) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7}(10+12+8) = 15\sqrt{7}\end{aligned}$$

답 (1) 12 (2) $15\sqrt{7}$

265

$$\begin{aligned} (1) \square ABCD &= \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin A \\ &= 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \square ABCD &= \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin B \\ &= 6 \cdot 8 \cdot \sin (180^\circ - 120^\circ) \\ &= 24\sqrt{3} \end{aligned}$$



답 (1) $2\sqrt{3}$ (2) $24\sqrt{3}$

266

$$(1) \square ABCD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

$$(2) \square ABCD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ = 20\sqrt{3}$$

답 (1) $6\sqrt{3}$ (2) $20\sqrt{3}$

267

삼각형 ABC의 넓이가 7이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \sin A = 7$$

$$\therefore \sin A = \frac{1}{2}$$

그런데 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 30^\circ \text{ 또는 } A = 150^\circ$$

답 30° 또는 150°

268

$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ 이고, $\sin C > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 16 \end{aligned}$$

답 16

269

$\overline{AD} = x$ 로 놓으면

$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$ 에서

$$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot x \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot x \cdot \sin 30^\circ$$

$$9\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x$$

$$\therefore x = \frac{18}{5}$$

답 $\frac{18}{5}$

270

(1) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{5}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \\ &= \frac{12}{13} \quad (\because \sin C > 0) \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 \cdot \frac{12}{13} \\ &= 84 \end{aligned}$$

(2) 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\begin{aligned} S = \frac{abc}{4R} \text{에서 } 84 &= \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4R} \\ \therefore R &= \frac{65}{8} \end{aligned}$$

(3) 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} r(a+b+c) \text{에서} \\ 84 &= \frac{1}{2} r(13+14+15) \\ \therefore r &= 4 \end{aligned}$$

답 (1) 84 (2) $\frac{65}{8}$ (3) 4

다른풀이 (1) 헤론의 공식을 이용하면

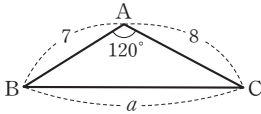
$$s = \frac{13+14+15}{2} = 21 \text{이므로}$$

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$

$$= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$$

271

코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cos 120^\circ$$


$$= 64 + 49 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 169$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 13$

한편, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \sin 120^\circ = 14\sqrt{3}$$

따라서 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$S = \frac{1}{2} r(a+b+c) \text{에서 } 14\sqrt{3} = \frac{1}{2} r(13+8+7)$$

$$\therefore r = \sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

272

$\overline{AD} = \overline{BC} = 7$ 이고, 평행사변형 ABCD의 넓이가 $21\sqrt{3}$ 이므로

$$6 \cdot 7 \cdot \sin A = 21\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

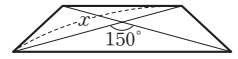
그런데 $90^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 120^\circ$$

답 120°

273

등변사다리꼴은 두 대각선의 길이가 같으므로 한 대각선의



의 길이를 x라 하면 등변사다리꼴의 넓이는 8이므로

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \sin 150^\circ = 8, x^2 = 32$$

$$\therefore x = 4\sqrt{2} (\because x > 0)$$

답 $4\sqrt{2}$

Ⅲ. 수열

274

(1) 수열 $\{3n\}$ 의 일반항은 $a_n=3n$ 이므로 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_1=3 \cdot 1=3, a_2=3 \cdot 2=6, a_3=3 \cdot 3=9$$

(2) 수열 $\{2^n+1\}$ 의 일반항은 $a_n=2^n+1$ 이므로 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_1=2^1+1=3, a_2=2^2+1=5, a_3=2^3+1=9$$

(3) 수열 $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$ 의 일반항은 $a_n=\frac{1}{2n-1}$ 이므로 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_1=\frac{1}{2-1}=1, a_2=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}, a_3=\frac{1}{6-1}=\frac{1}{5}$$

(4) 수열 $\left\{\cos \frac{n\pi}{2}\right\}$ 의 일반항은 $a_n=\cos \frac{n\pi}{2}$ 이므로 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_1=\cos \frac{\pi}{2}=0, a_2=\cos \pi=-1,$$

$$a_3=\cos \frac{3\pi}{2}=0$$

답 (1) 3, 6, 9 (2) 3, 5, 9 (3) 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ (4) 0, -1, 0

275

(1) $a_1=\frac{1}{1}, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{3}, a_4=\frac{1}{4}, \dots$

이므로

$$a_n=\frac{1}{n}$$

(2) $a_1=1 \cdot 3=(2 \cdot 1-1)(2 \cdot 1+1),$

$$a_2=3 \cdot 5=(2 \cdot 2-1)(2 \cdot 2+1),$$

$$a_3=5 \cdot 7=(2 \cdot 3-1)(2 \cdot 3+1),$$

$$a_4=7 \cdot 9=(2 \cdot 4-1)(2 \cdot 4+1), \dots$$

이므로

$$a_n=(2n-1)(2n+1)$$

(3) $a_1=\log 3=\log 3^1, a_2=\log 9=\log 3^2,$

$$a_3=\log 27=\log 3^3, a_4=\log 81=\log 3^4, \dots$$

이므로

$$a_n=\log 3^n$$

답 (1) $a_n=\frac{1}{n}$ (2) $a_n=(2n-1)(2n+1)$

(3) $a_n=\log 3^n$

276

(1) $0-6=-6$ 에서 공차가 -6 이므로 주어진 수열은 6, 0, -6 , $\boxed{-12}$, $\boxed{-18}$

(2) $33-27=6$ 에서 공차가 6이므로 주어진 수열은 $\boxed{9}$, 15, $\boxed{21}$, 27, 33

(3) $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$ 에서 공차가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 수열은 $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\boxed{-\frac{1}{4}}$, $-\frac{3}{4}$, $\boxed{-\frac{5}{4}}$

(4) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 에서 공차가 $\frac{1}{6}$ 이므로 주어진 수열은 $\boxed{\frac{1}{6}}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\boxed{\frac{2}{3}}$, $\frac{5}{6}$

답 (1) -12, -18 (2) 9, 21

(3) $-\frac{1}{4}$, $-\frac{5}{4}$ (4) $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$

277

(1) 첫째항이 2, 공차가 $4-2=2$ 이므로

$$a_n=2+(n-1) \cdot 2=2n$$

(2) 첫째항이 10, 공차가 $7-10=-3$ 이므로

$$a_n=10+(n-1) \cdot (-3)=-3n+13$$

(3) 첫째항이 1, 공차가 $\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$ 이므로

$$a_n=1+(n-1) \cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$$

(4) 첫째항이 3, 공차가 $\frac{8}{3}-3=-\frac{1}{3}$ 이므로

$$a_n=3+(n-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}n+\frac{10}{3}$$

답 (1) $a_n=2n$ (2) $a_n=-3n+13$

(3) $a_n=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$ (4) $a_n=-\frac{1}{3}n+\frac{10}{3}$

278

(1) 첫째항 $a=2$, 공차를 d 라 하면

$$a_4=a+3d=2+3d=11$$

$$\therefore d=3$$

(2) 첫째항 $a=3$, 공차를 d 라 하면

$$a_5 = a + 4d = 3 + 4d = -5$$

$$\therefore d = -2$$

답 (1) 3 (2) -2

279

(1) $a_n = 3n - 5$ 에서

$$\text{첫째항은 } a_1 = 3 \cdot 1 - 5 = -2$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 - 5 = 1 \text{ 이므로 공차는}$$

$$a_2 - a_1 = 1 - (-2) = 3$$

(2) $a_n = -7n + 9$ 에서

$$\text{첫째항은 } a_1 = -7 \cdot 1 + 9 = 2$$

$$a_2 = -7 \cdot 2 + 9 = -5 \text{ 이므로 공차는}$$

$$a_2 - a_1 = -5 - 2 = -7$$

답 (1) 첫째항 : -2, 공차 : 3

(2) 첫째항 : 2, 공차 : -7

280

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_6 + a_{15} = (a + 5d) + (a + 14d) = 61$$

$$\therefore 2a + 19d = 61 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_8 + a_{16} = (a + 7d) + (a + 15d) = 70$$

$$\therefore a + 11d = 35 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 2, d = 3$$

$$\therefore a_{31} = a + 30d = 2 + 30 \cdot 3 = 92$$

답 92

281

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\text{제 2 항이 3이므로 } a_2 = a + d = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{제 7 항이 13이므로 } a_7 = a + 6d = 13 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 1, d = 2$

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$$

199를 제 n 항이라 하면

$$2n - 1 = 199 \quad \therefore n = 100$$

따라서 199는 제 100 항이다.

답 $a_n = 2n - 1$, 제 100 항

282

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_7 = 70 \text{에서 } a + 6d = 70 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{10} = 61 \text{에서 } a + 9d = 61 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 88, d = -3$$

제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$$a_n = 88 - 3(n-1) = 91 - 3n < 0$$

$$\therefore n > \frac{91}{3} = 30.\times\times\times$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제 31 항이다.

답 제 31 항

283

공차를 d 라 하면

$$a_5 - a_3 = (2 + 4d) - (2 + 2d) = 2d = -4$$

$$\therefore d = -2$$

제 n 항에서 처음으로 -50보다 작아진다고 하면

$$a_n = 2 - 2(n-1) = 4 - 2n < -50$$

$$\therefore n > 27$$

따라서 처음으로 -50보다 작아지는 항은 제 28 항이다.

답 제 28 항

284

주어진 수열은 첫째항이 -8, 제 $n+2$ 항이 30인 등차수열이므로

$$-8 + \{(n+2) - 1\} \times 2 = 30$$

$$2n = 36 \quad \therefore n = 18$$

답 18

285

나머지정리에 의하여 $f(x) = x^2 + ax + 2$ 를 $x+1$, $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각

$$f(-1) = 3 - a, f(1) = 3 + a, f(2) = 6 + 2a$$

세 수 $f(-1), f(1), f(2)$ 가 이 순서대로 등차수열을

이루면 $f(1)$ 은 $f(-1)$ 과 $f(2)$ 의 등차중항이므로
 $2f(1) = f(-1) + f(2)$
 $2(3+a) = (3-a) + (6+2a)$
 $\therefore a = 3$

답 3

286

세 수를 $a-d, a, a+d$ 라 하면
 $(a-d) + a + (a+d) = 15$ 에서

$3a = 15 \quad \therefore a = 5$ ㉠

$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 83$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $d^2 = 4$

$\therefore d = \pm 2$

따라서 세 수는 3, 5, 7이다.

답 3, 5, 7

287

(1) 각 항의 역수를 구하면

$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$

즉 수열 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{6}$, 공차가 $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

인 등차수열이므로 일반항 $\frac{1}{a_n}$ 은

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(n-1) = \frac{n}{6}$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{6}{n}$ 이므로

$a_{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

(2) 각 항의 역수를 구하면

$\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \dots$

즉 수열 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{5}$, 공차가

$\frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ 인 등차수열이므로 일반항 $\frac{1}{a_n}$ 은

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}(n-1) = \frac{n+1}{10}$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{10}{n+1}$ 이므로

$a_{10} = \frac{10}{11}$

답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{10}{11}$

288

$\frac{1}{15}, x, y, z, \frac{1}{5}$ 이 이 순서대로 조화수열을 이루므로

각 항의 역수 $15, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, 5$ 는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 공차를 d 라 하면

$5 = 15 + 4d \quad \therefore d = -\frac{5}{2}$

$\therefore \frac{1}{x} = 15 - \frac{5}{2} = \frac{25}{2},$

$\frac{1}{y} = \frac{25}{2} - \frac{5}{2} = 10,$

$\frac{1}{z} = 10 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 30$

답 30

289

등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

(1) $S_{20} = \frac{20(2+18)}{2} = 200$

(2) $S_8 = \frac{8(-2+15)}{2} = 52$

(3) $S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 1 + (10-1) \cdot 2\}}{2} = 100$

(4) $S_{15} = \frac{15\{2 \cdot (-3) + (15-1) \cdot (-5)\}}{2} = -570$

(5) $S_{11} = \frac{11\left\{2 \cdot \frac{1}{2} + (11-1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}}{2} = -77$

(6) 끝항 20을 제 n 항이라 하면

$-10 + 2(n-1) = 20 \quad \therefore n = 16$

$\therefore S_{16} = \frac{16(-10+20)}{2} = 80$

답 (1) 200 (2) 52 (3) 100

(4) -570 (5) -77 (6) 80

290

등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

- (1) 첫째항이 1, 공차가 $2-1=1$ 이므로 10을 제 n 항이라 하면

$$a_n = 1 + (n-1) = 10 \quad \therefore n = 10$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(1+10)}{2} = 55$$

- (2) 첫째항이 1, 공차가 $3-1=2$ 이므로 23을 제 n 항이라 하면

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 23$$

$$2n-1=23 \quad \therefore n=12$$

$$\therefore S_{12} = \frac{12(1+23)}{2} = 144$$

- (3) 첫째항이 -12 , 공차가 $-9+12=3$ 이므로 15를 제 n 항이라 하면

$$a_n = -12 + 3(n-1) = 15$$

$$3n-15=15 \quad \therefore n=10$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(-12+15)}{2} = 15$$

- (4) 첫째항이 15, 공차가 $11-15=-4$ 이므로 -41 을 제 n 항이라 하면

$$a_n = 15 - 4(n-1) = -41$$

$$-4n+19=-41 \quad \therefore n=15$$

$$\therefore S_{15} = \frac{15\{15+(-41)\}}{2} = -195$$

- (5) 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공차가 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로 10을 제 n 항이라 하면

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = 10$$

$$\frac{n}{2} = 10 \quad \therefore n = 20$$

$$\therefore S_{20} = \frac{20\left(\frac{1}{2}+10\right)}{2} = 105$$

- (6) 첫째항이 $-\frac{1}{3}$, 공차가 $-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$ 이므로 -5 를 제 n 항이라 하면

$$a_n = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(n-1) = -5$$

$$-\frac{1}{3}n = -5 \quad \therefore n = 15$$

$$\therefore S_{15} = \frac{15\left\{-\frac{1}{3}+(-5)\right\}}{2} = -40$$

답 (1) 55 (2) 144 (3) 15

(4) -195 (5) 105 (6) -40

291

첫째항이 50, 끝항이 -10 , 항수가 n 인 등차수열의 합이 220이므로

$$\frac{n(50-10)}{2} = 220$$

$$20n = 220 \quad \therefore n = 11$$

즉 제 11 항이 -10 이므로 공차를 d 라 하면

$$50 + 10d = -10 \quad \therefore d = -6$$

따라서 주어진 등차수열의 제 10 항 a_{10} 은

$$a_{10} = 50 + 9 \cdot (-6) = -4$$

답 -4

292

첫째항이 -5 , 끝항이 15, 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합이 100이므로

$$\frac{(n+2)(-5+15)}{2} = 100$$

$$5(n+2) = 100 \quad \therefore n = 18$$

따라서 15는 제 20 항이므로

$$-5 + 19d = 15 \quad \therefore d = \frac{20}{19}$$

답 $n=18, d=\frac{20}{19}$

293

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_8 = \frac{8\{2a+(8-1)d\}}{2} = 104$$

$$\therefore 2a+7d=26 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{16}-S_8 = \frac{16\{2a+(16-1)d\}}{2} - 104 = 360$$

$$\therefore 2a+15d=58 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, d=4$

따라서 제 17 항부터 제 24 항까지의 합은

$$S_{24} - S_{16} = \frac{24\{-2 + (24-1) \cdot 4\}}{2} - 464$$

$$= 1080 - 464 = 616$$

답 616

294

일반항 a_n 은

$$a_n = -29 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 33$$

$a_n = 4n - 33 < 0$ 이 되는 n 의 최댓값은 8이므로 첫째 항부터 제 8 항까지의 합이 최소가 된다.

$$\therefore S_8 = \frac{8\{2 \cdot (-29) + 7 \cdot 4\}}{2} = -120$$

답 제 8 항, 최솟값: -120

다른풀이 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot (-29) + (n-1) \cdot 4\}}{2}$$

$$= 2n^2 - 31n$$

$$= 2\left(n - \frac{31}{4}\right)^2 - \frac{961}{8}$$

n 이 $\frac{31}{4}$ 에 가장 가까운 자연수일 때 S_n 은 최소가 되므로 $n=8$ 일 때 최솟값은 $2 \cdot 8^2 - 31 \cdot 8 = -120$ 이다.

295

100과 200 사이에 있는 자연수 중에서 5로 나누었을 때 나머지가 2인 수를 작은 것부터 순서대로 나열하면 102, 107, 112, ..., 197

이것은 첫째항이 102, 공차가 5인 등차수열이므로 197을 제 n 항이라 하면

$$197 = 102 + 5(n-1)$$

$$\therefore n = 20$$

즉 197은 제 20 항이다.

따라서 첫째항이 102, 끝항이 197, 항수가 20인 등차수열의 합을 구하면

$$\frac{20(102+197)}{2} = 2990$$

답 2990

296

(i) 2의 배수의 합을 $S_{(2)}$ 라 하면

$$S_{(2)} = 2 + 4 + \dots + 100$$

이것은 첫째항이 2, 끝항이 100, 항수가 50인 등차수열의 합이므로

$$S_{(2)} = \frac{50(2+100)}{2} = 2550$$

(ii) 3의 배수의 합을 $S_{(3)}$ 이라 하면

$$S_{(3)} = 3 + 6 + \dots + 99$$

이것은 첫째항이 3, 끝항이 99, 항수가 33인 등차수열의 합이므로

$$S_{(3)} = \frac{33(3+99)}{2} = 1683$$

(iii) 2와 3의 최소공배수인 6의 배수의 합을 $S_{(6)}$ 이라 하면

$$S_{(6)} = 6 + 12 + \dots + 96$$

이것은 첫째항이 6, 끝항이 96, 항수가 16인 등차수열의 합이므로

$$S_{(6)} = \frac{16(6+96)}{2} = 816$$

따라서 2 또는 3의 배수의 총합 S 는

$$S = S_{(2)} + S_{(3)} - S_{(6)}$$

$$= 2550 + 1683 - 816 = 3417$$

답 3417

297

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2n^2 - 3n) - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\}$$

$$= 4n - 5 \quad (n \geq 2)$$

그런데 S_n 에서 상수항이 0이므로 이 수열은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

$$\therefore a_n = 4n - 5$$

$$\therefore a_{10} = 35$$

답 35

다른풀이 $a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$ 이므로

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$= (2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10) - (2 \cdot 9^2 - 3 \cdot 9)$$

$$= 170 - 135 = 35$$

298

$$S_n = n^2 - 2n + 3 \text{이므로}$$

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$= (10^2 - 2 \cdot 10 + 3) - (9^2 - 2 \cdot 9 + 3) = 17$$

$$\therefore a_1 + a_{10} = 2 + 17 = 19$$

답 19

299

$n=1$ 일 때 삼각형 P'F'F의 세 변 위에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ 의 4개이므로

$$a_1 = 4$$

$n=2$ 일 때 삼각형 P'F'F의 세 변 위에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ 의 8개이므로

$$a_2 = 8$$

∴

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공차가 4인 등차수열이므로 첫째항부터 제 5항까지의 합은

$$\frac{5\{2 \cdot 4 + (5-1) \cdot 4\}}{2} = 60$$

답 60

300

$$a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n + a_1 - 2$$

이때 수열 $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, ...의 일반항은

$$a_n + a_{n+1} = (2n + a_1 - 2) + \{2(n+1) + a_1 - 2\} \\ = 4n + 2a_1 - 2$$

따라서 등차수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 의 공차는 4이다.

답 4

참고 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하고 각 항을 나열해 보면

$$a, a+2, a+4, a+6, \dots$$

수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 의 각 항을 나열해 보면

$$2a+2, 2a+6, 2a+10, 2a+14, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 $2a+2$, 공차가 4인 등차수열이다.

301

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

수열 $\{3a_{n+1} - a_n\}$ 의 공차는

$$3d - d = 2d = 6$$

$$\therefore d = 3$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$$

$$a_k > 100 \text{에서 } 3k - 1 > 100$$

$$\therefore k > \frac{101}{3} = 33.\times\times\times$$

따라서 $a_k > 100$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 34이다.

답 34

302

(1) $-2 \div 1 = -2$ 에서 공비가 -2 이므로 주어진 수열은 1, -2 , $\boxed{4}$, -8 , $\boxed{16}$

(2) $\frac{1}{32} \div \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$ 에서 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 수열은 $\frac{1}{2}$, $\boxed{\frac{1}{4}}$, $\boxed{\frac{1}{8}}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$

(3) $-54 \div 18 = -3$ 에서 공비가 -3 이므로 주어진 수열은 $\boxed{2}$, $\boxed{-6}$, 18, -54

(4) $-1 \div \sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 공비가 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 주어진 수열은 $\sqrt{2}$, -1 , $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\boxed{-\frac{1}{2}}$, $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

(5) $1 \div (\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ 에서 공비가 $\sqrt{2}+1$ 이므로 주어진 수열은 $\sqrt{2}-1$, 1, $\sqrt{2}+1$, $\boxed{3+2\sqrt{2}}$

$$\text{답 (1) } 4, 16 \quad (2) \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \quad (3) 2, -6$$

$$(4) -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (5) 3+2\sqrt{2}$$

303

(1) 첫째항이 1, 공비가 $2 \div 1 = 2$ 이므로

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

(2) 첫째항이 4, 공비가 $-4 \div 4 = -1$ 이므로

$$a_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}$$

(3) 첫째항이 3, 공비가 $-1 \div 3 = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(4) 첫째항이 -2 , 공비가 $3 \div (-2) = -\frac{3}{2}$ 이므로

$$a_n = -2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

(5) 첫째항이 2, 공비가 $2\sqrt{3} \div 2 = \sqrt{3}$ 이므로

$$a_n = 2 \cdot (\sqrt{3})^{n-1}$$

답 (1) $a_n = 2^{n-1}$ (2) $a_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}$

(3) $a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(4) $a_n = -2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

(5) $a_n = 2 \cdot (\sqrt{3})^{n-1}$

304

첫째항을 a_1 , 공비를 r 라 하면

(1) $a_1 = 2 \cdot 3^0 = 2$, $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2 \cdot 3^1}{2 \cdot 3^0} = 3$

(2) $a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{\left(\frac{1}{2}\right)^0} = \frac{1}{2}$

(3) $a_1 = (-2)^1 = -2$, $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{(-2)^2}{(-2)^1} = -2$

(4) $a_1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(5) $a_1 = 4^{-1} = \frac{1}{4}$, $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4^{-3}}{4^{-1}} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$

답 (1) 첫째항 : 2, 공비 : 3

(2) 첫째항 : 1, 공비 : $\frac{1}{2}$

(3) 첫째항 : -2 , 공비 : -2

(4) 첫째항 : $\frac{3}{4}$, 공비 : $\frac{1}{4}$

(5) 첫째항 : $\frac{1}{4}$, 공비 : $\frac{1}{16}$

305

$a_n = 2^{2-n}$ 에서

$$a_1 = 2^{2-1} = 2, a_2 = 2^{2-2} = 1$$

$$\therefore (\text{공비}) = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$$

답 첫째항 : 2, 공비 : $\frac{1}{2}$

306

공비를 r 라 하면 제 4 항이 -8 이므로

$$a_4 r^3 = -8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

제 7 항이 64이므로

$$a_1 r^6 = 64 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3 = -8 \quad \therefore r = -2$$

$r = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a_1 = 1$

$$\therefore a_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$$

$$\therefore a_5 = (-2)^{5-1} = (-2)^4 = 16$$

답 $a_n = (-2)^{n-1}$, $a_5 = 16$

307

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 - a_4 = a - ar^3 = a(1 - r^3) = 56 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a + ar + ar^2 = a(1 + r + r^2) = 14 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{a(1-r^3)}{a(1+r+r^2)} = \frac{a(1-r)(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{56}{14}$$

$$1-r=4 \quad \therefore r=-3$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } a(1-3+9)=14 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore a_5 = ar^4 = 2 \cdot (-3)^4 = 162$$

답 162

308

첫째항이 1, 공비가 -4 이므로 -1024 를 제 n 항이라 하면

$$1 \cdot (-4)^{n-1} = -1024 = (-4)^5$$

$$n-1=5 \quad \therefore n=6$$

따라서 -1024는 제 6 항이다.

답 제 6 항

309

첫째항을 a 라 하면 제 2 항이 6이므로

$$a \cdot 3 = 6 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

a_n 이 10000보다 크려면

$$2 \cdot 3^{n-1} > 10000 \quad \therefore 3^{n-1} > 5000$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 3^{n-1} > \log 5000, (n-1)\log 3 > \log 5000$$

$$n-1 > \frac{\log 5000}{\log 3} = \frac{\log \frac{10}{2} + 3}{\log 3} = \frac{4 - \log 2}{\log 3} \\ = 7. \times \times \times$$

$$\therefore n > 8. \times \times \times$$

따라서 처음으로 10000보다 커지는 항은 제 9 항이다.

답 제 9 항

310

공비를 r 라 하면 첫째항은 3이고 729는 제 6 항이므로

$$729 = 3r^5, r^5 = 243 \quad \therefore r = 3$$

이때 a_2, a_4 는 각각 제 3 항, 제 5 항이므로

$$a_2 + a_4 = 3r^2 + 3r^4 \\ = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^4 = 270$$

답 270

311

나머지정리에 의하여 $f(x) = x^2 + 2x + a$ 를 $x+1,$

$x-1, x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 각각

$$f(-1) = a-1, f(1) = a+3, f(2) = a+8$$

$f(-1), f(1), f(2)$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루면 $f(1)$ 은 $f(-1)$ 과 $f(2)$ 의 등비중항이므로

$$\{f(1)\}^2 = f(-1)f(2)$$

$$(a+3)^2 = (a-1)(a+8)$$

$$a^2 + 6a + 9 = a^2 + 7a - 8$$

$$\therefore a = 17$$

따라서 $f(x) = x^2 + 2x + 17$ 을 $x+2$ 로 나누었을 때의

나머지는

$$f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 17 = 17$$

답 17

312

2, a, b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = 2b \quad \dots \textcircled{1}$$

$a, b, 30$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + 30 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a^2 = a + 30, a^2 - a - 30 = 0$$

$$(a+5)(a-6) = 0 \quad \therefore a = -5 \text{ 또는 } a = 6$$

그런데 a, b 는 양수이므로

$$a = 6, b = 18 \quad \therefore b - a = 12$$

답 12

313

세 실수가 등비수열을 이루므로 세 수를 차례대로

a, ar, ar^2 이라 하면

세 실수의 합이 $\frac{3}{2}$ 이므로

$$a + ar + ar^2 = a(1 + r + r^2) = \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

세 실수의 곱이 -1이므로

$$a \cdot ar \cdot ar^2 = (ar)^3 = -1$$

$$\therefore ar = -1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{a(1+r+r^2)}{ar} = \frac{1+r+r^2}{r} = -\frac{3}{2}$$

$$2(1+r+r^2) = -3r, 2r^2 + 5r + 2 = 0$$

$$(2r+1)(r+2) = 0$$

$$\therefore r = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } r = -2$$

$$r = -\frac{1}{2} \text{ 이면 } a = 2$$

$$r = -2 \text{ 이면 } a = \frac{1}{2}$$

따라서 등비수열을 이루는 세 실수는 2, -1, $\frac{1}{2}$ 이다.

답 2, -1, $\frac{1}{2}$

314

$$x^3 - 2x^2 + x = k \text{에서 } x^3 - 2x^2 + x - k = 0 \quad \cdots \textcircled{A}$$

①의 세 근을 a, ar, ar^2 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = 2$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = 2 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$$a^2r + a^2r^2 + a^2r^3 = 1$$

$$\therefore a^2r(1+r+r^2) = 1 \quad \cdots \textcircled{C}$$

$$a \cdot ar \cdot ar^2 = k \quad \therefore (ar)^3 = k \quad \cdots \textcircled{D}$$

$$\textcircled{C} \div \textcircled{B} \text{을 하면 } ar = \frac{1}{2}$$

$$\text{이것을 } \textcircled{D} \text{에 대입하면 } k = (ar)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

315

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 의 한 변의 길이를 l_n 이라 하면 정사각형 $ABCD$ 의 각 변의 중점을 이어서 만든 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 한 변의 길이 l_1 은

$$l_1 = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 각 변의 중점을 이어서 만든 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이 l_2 는

$$l_2 = l_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

⋮

즉 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 $4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, 공비가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 인 등비 수열이므로

$$l_n = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

따라서 정사각형 $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$ 의 한 변의 길이 l_{10} 은

$$l_{10} = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10} = \frac{1}{8}$$

이므로 정사각형 $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$ 의 둘레의 길이는

$$4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

316

$$(1) S_5 = \frac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = 243 - 1 = 242$$

$$(2) S_5 = \frac{\sqrt{2} \cdot \{(\sqrt{2})^5 - 1\}}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)(8 - \sqrt{2}) \\ = 6 + 7\sqrt{2}$$

$$(3) S_5 = \frac{1 \cdot \{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = \frac{244}{4} = 61$$

$$(4) S_5 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \{1 - (-2)^5\}}{1 - (-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{33}{3} = \frac{11}{2}$$

$$(5) S_5 = \frac{-2 \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = -4 \cdot \frac{31}{32} = -\frac{31}{8}$$

답 (1) 242 (2) $6 + 7\sqrt{2}$

(3) 61 (4) $\frac{11}{2}$ (5) $-\frac{31}{8}$

317

첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$(1) a = 1, r = 3 \text{이므로}$$

$$S_n = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$(2) S_n = 2 + 2 + \cdots + 2 = 2n$$

$$(3) a = \frac{1}{2}, r = -1 \text{이므로}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \{1 - (-1)^n\}}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)^n}{4}$$

$$(4) a = 1, r = -2 \text{이므로}$$

$$S_n = \frac{1 \cdot \{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)} = \frac{1 - (-2)^n}{3}$$

$$(5) a = 0.1, r = 0.1 \text{이므로}$$

$$S_n = \frac{0.1 \cdot (1 - 0.1^n)}{1 - 0.1} = \frac{1}{9} \left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$$

답 (1) $\frac{3^n - 1}{2}$ (2) $2n$ (3) $\frac{1 - (-1)^n}{4}$

(4) $\frac{1 - (-2)^n}{3}$ (5) $\frac{1}{9} \left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$

318

첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

(1) $a=1, r=2$ 이므로 256을 제 n 항이라 하면

$$1 \cdot 2^{n-1} = 256 \quad \therefore n=9$$

$$\therefore S_9 = \frac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = 2^9 - 1 = 511$$

(2) $a = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$ 이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 을 제 n 항이라 하면

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad \therefore n=10$$

$$\therefore S_{10} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024}$$

(3) $a = \frac{2}{3}, r = -\frac{1}{3}$ 이고 $\frac{2}{243}$ 는 제 5 항이므로

$$S_5 = \frac{\frac{2}{3} \cdot \left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{2} \left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}$$

$$= \frac{122}{243}$$

(4) $a=5, r=2$ 이므로 160을 제 n 항이라 하면

$$5 \cdot 2^{n-1} = 160 \quad \therefore n=6$$

$$\therefore S_6 = \frac{5(2^6 - 1)}{2 - 1} = 315$$

(5) $\log_2 4 + \log_2 4^3 + \log_2 4^9 + \log_2 4^{27} + \log_2 4^{81}$
 $= \log_2 2^2 + \log_2 2^6 + \log_2 2^{18} + \log_2 2^{54} + \log_2 2^{162}$
 $= 2 + 6 + 18 + 54 + 162$

에서 $a=2, r=3$ 이고 162는 제 5 항이므로

$$S_5 = \frac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = 242$$

답 (1) 511 (2) $\frac{1023}{1024}$ (3) $\frac{122}{243}$

(4) 315 (5) 242

319

공비를 r 라 하면

$$a_4 = a_1 r^3 = 2r^3 = -54$$

$$r^3 = -27 \quad \therefore r = -3$$

$$\therefore S_{10} = \frac{2 \cdot \{1 - (-3)^{10}\}}{1 - (-3)} = \frac{1 - 3^{10}}{2}$$

답 $\frac{1 - 3^{10}}{2}$

320

첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$a_1 + a_3 = a + ar^2 = a(1 + r^2) = -10 \quad \text{..... } \textcircled{1}$$

이때 $r=1$ 이면 $a=-5$

이것은 $S_4=20$ 을 만족시키지 않으므로 $r \neq 1$

$$S_4 = \frac{a(1-r^4)}{1-r} = \frac{a(1+r^2)(1+r)(1-r)}{1-r}$$

$$= a(1+r^2)(1+r) = 20 \quad \text{..... } \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } 1+r = -2$$

$$\therefore r = -3$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a\{1 + (-3)^2\} = -10$$

$$\therefore a = -1$$

답 -1

321

첫째항이 x , 공비가 $(x+1)^2$ 이므로 첫째항부터

제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{x[\{(x+1)^2\}^n - 1]}{(x+1)^2 - 1}$$

$$= \frac{x\{(x+1)^{2n} - 1\}}{x^2 + 2x}$$

$$= \frac{(x+1)^{2n} - 1}{x+2} \quad (\because x > 0)$$

답 $\frac{(x+1)^{2n} - 1}{x+2}$

322

첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_6 = \frac{a(1-r^6)}{1-r} = 4 \quad \text{..... } \textcircled{1}$$

$$S_{12} = \frac{a(1-r^{12})}{1-r} = 12 \quad \text{..... } \textcircled{2}$$

$$\textcircled{C} \text{에서 } \frac{a(1-r^6)(1+r^6)}{1-r} = 12$$

이 식에 \textcircled{A} 을 대입하면

$$1+r^6=3 \quad \therefore r^6=2$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{18} &= \frac{a(1-r^{18})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^6)(1+r^6+r^{12})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^6)}{1-r} \cdot (1+r^6+r^{12}) \\ &= 4(1+r^6+r^{12}) \quad (\because \textcircled{A}) \\ &= 4(1+2+2^2) \\ &= 28 \end{aligned}$$

답 28

다른풀이 $S_6=4, S_{12}-S_6=r^6S_6$ 이므로 $4r^6=8$

$$\therefore r^6=2$$

이때 $S_{18}-S_{12}=r^{12}S_6$ 이므로

$$\begin{aligned} S_{18} &= S_{12} + r^{12}S_6 = (r^6+1)S_6 + r^{12}S_6 \\ &= (r^6+r^6+1)S_6 = (2^2+2+1) \cdot 4 \\ &= 7 \cdot 4 = 28 \end{aligned}$$

323

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\frac{a(1-r^{10})}{1-r} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

제 21 항부터 제 30 항까지의 합은 첫째항이 $a_{21}=ar^{20}$, 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합과 같으므로

$$\frac{ar^{20}(1-r^{10})}{1-r} = 8 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

\textcircled{B} 을 \textcircled{A} 에 대입하면 $2r^{20}=8, r^{20}=4$

$$\therefore r^{10}=2 \quad (\because r \text{는 실수})$$

따라서 제 11 항부터 제 20 항까지의 합은 첫째항이

$a_{11}=ar^{10}$, 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터

제 10 항까지의 합과 같으므로

$$\frac{ar^{10}(1-r^{10})}{1-r} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r} \cdot r^{10} = 2 \cdot 2 = 4$$

답 4

324

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = ar = 4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a_5 = ar^4 = 32 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \div \textcircled{A} \text{을 하면 } r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

$$r = 2 \text{를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } 2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

$$S_n > 1000 \text{에서 } 2^{n+1} - 2 > 1000$$

$$\therefore 2^{n+1} > 1002$$

$$\text{이때 } 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \text{이므로}$$

$$n+1 \geq 10 \quad \therefore n \geq 9$$

따라서 첫째항부터 제 9 항까지의 합이 처음으로

1000보다 커진다.

답 제9항

325

$$\log_3(S_n + 3) = n + 1 \text{에서 } S_n + 3 = 3^{n+1}$$

$$\therefore S_n = 3^{n+1} - 3$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^{n+1} - 3) - (3^n - 3) \\ &= 2 \cdot 3^n \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\text{첫째항 } a_1 = S_1 = 3^2 - 3 = 6$$

이때 $a_1=6$ 은 위의 $a_n=2 \cdot 3^n$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같다.

$$\therefore a_n = 2 \cdot 3^n$$

답 $a_n = 2 \cdot 3^n$

326

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2 \cdot 3^n + k) - (2 \cdot 3^{n-1} + k) \\ &= 4 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots \textcircled{A} \end{aligned}$$

$$\text{첫째항 } a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 + k = 6 + k \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 \textcircled{A} 에 $n=1$ 을 대입한 것과 \textcircled{B} 이 같아야 하므로

$$6 + k = 4 \quad \therefore k = -2$$

답 -2

다른풀이 $S_n = 2 \cdot 3^n + k$ 에서 $2 + k = 0$

$$\therefore k = -2$$

327

구하는 적립금의 원리합계를 S 만 원이라 하면

$$S = 1 \times (1+0.05) + 1 \times (1+0.05)^2 + \dots + 1 \times (1+0.05)^{10}$$

이므로 첫째항이 $1 \times (1+0.05)$, 공비가 $1+0.05$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합이다.

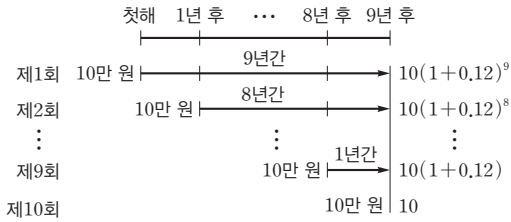
$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1 \times (1+0.05) \{ (1+0.05)^{10} - 1 \}}{(1+0.05) - 1} \\ &= \frac{1 \times 1.05(1.6 - 1)}{0.05} = 12.6(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 구하는 적립금의 원리합계는 12만 6000원이다.

답 12만 6000원

328

매년 말에 10만 원씩 10년 동안 적립한 적립금의 원리합계는 다음과 같다.



구하는 적립금의 원리합계를 S 만 원이라 하면

$$S = 10 + 10(1+0.12) + 10(1+0.12)^2 + \dots + 10(1+0.12)^9$$

이므로 첫째항이 10, 공비가 $1+0.12$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합이다.

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{10 \{ (1+0.12)^{10} - 1 \}}{(1+0.12) - 1} \\ &= \frac{10(3.1 - 1)}{0.12} = 175(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 구하는 적립금의 원리합계는 175만 원이다.

답 175만 원

329

매년 초에 적립해야 하는 금액을 a 원이라 하면 10년 말까지의 적립금의 원리합계는

$$a(1+0.06) + a(1+0.06)^2 + \dots + a(1+0.06)^{10}$$

이므로 첫째항이 $a(1+0.06)$, 공비가 $1+0.06$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합이다.

따라서 원리합계가 100만 원이 되려면

$$\frac{a(1+0.06) \{ (1+0.06)^{10} - 1 \}}{(1+0.06) - 1} = 10^6$$

$$\begin{aligned} \therefore a &= \frac{10^6 \times 0.06}{1.06(1.06^{10} - 1)} \\ &= \frac{60000}{1.06(1.8 - 1)} = 70754. \times \times \times \end{aligned}$$

이때 백의 자리에서 반올림하므로 매년 7만 1000원씩 적립해야 한다.

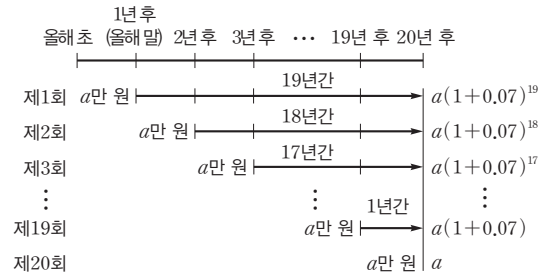
답 7만 1000원

330

1000만 원의 20년 동안의 원리합계는

$$1000 \times (1+0.07)^{20} = 1000 \times 3.87 = 3870(\text{만 원}) \quad \dots \textcircled{1}$$

또한 올해 말부터 매년 a 만 원씩 적립할 때의 원리합계는 다음과 같다.



따라서 a 만 원씩 20년 동안 적립할 때의 원리합계는

$$\begin{aligned} a + a(1+0.07) + a(1+0.07)^2 + \dots + a(1+0.07)^{19} \\ &= \frac{a(1.07^{20} - 1)}{1.07 - 1} = \frac{a(3.87 - 1)}{0.07} \\ &= 41a(\text{만 원}) \end{aligned}$$

이것이 ①과 같아야 하므로

$$3870 = 41a \quad \therefore a = \frac{3870}{41} = 94. \times \times \times (\text{만 원})$$

이때 만 원 미만은 버리므로 지현이가 매년 갚아야 할 금액은 94만 원이다.

답 94만 원

331

2억 원(20000만 원)을 20년 동안 예금할 때의 원리합계는

$$\begin{aligned} 20000(1+0.05)^{20} &= 20000 \times 1.05^{20} \\ &= 20000 \times 2.6 \\ &= 52000(\text{만 원}) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

또한 매년 지급받을 금액을 a 만 원이라 하면 a 만 원씩 20년 동안 적립할 때의 원리합계는

$$\begin{aligned} a + a(1+0.05) + \dots + a(1+0.05)^{19} \\ = \frac{a\{(1+0.05)^{20}-1\}}{(1+0.05)-1} = \frac{a(2.6-1)}{0.05} \\ = 32a(\text{만 원}) \end{aligned}$$

이것이 ①과 같아야 하므로

$$32a = 52000 \quad \therefore a = \frac{52000}{32} = 1625(\text{만 원})$$

따라서 매년 말에 받을 금액은 1625만 원이다.

답 1625만 원

332

(1) 주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면 $a_k = 2k - 1$

$$\therefore 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$$

(2) 주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면 $a_k = 2^k$

$$\therefore 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} 2^k$$

(3) 주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면 $a_k = \frac{1}{k+1}$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

(4) 주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} a_k &= 2 + 3(k-1) = 3k - 1 \\ 3k - 1 &= 29 \text{에서 } k = 10 \end{aligned}$$

$$\therefore 2 + 5 + 8 + \dots + 29 = \sum_{k=1}^{10} (3k - 1)$$

(5) 4를 5개 더했으므로

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = \sum_{k=1}^5 4$$

(6) 주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면 $a_k = k(k+1)$

$$10 \cdot 11 = k(k+1) \text{에서 } k = 10$$

$$\therefore 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 10 \cdot 11 = \sum_{k=1}^{10} k(k+1)$$

답 풀이 참조

333

(1) 일반항 $5k+1$ 에 $k=1, 2, 3, \dots, 10$ 을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (5k+1) \\ = (5 \cdot 1 + 1) + (5 \cdot 2 + 1) + (5 \cdot 3 + 1) + \dots + (5 \cdot 10 + 1) \\ = 6 + 11 + 16 + \dots + 51 \end{aligned}$$

(2) 일반항 3^{i-1} 에 $i=1, 2, 3, \dots, 8$ 을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^8 3^{i-1} &= 3^{1-1} + 3^{2-1} + 3^{3-1} + \dots + 3^{8-1} \\ &= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^7 \end{aligned}$$

(3) $\sum_{k=1}^5 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

(4) 일반항 $(-1)^n \cdot n$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, 7$ 을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^7 (-1)^n \cdot n \\ = (-1) \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + \dots + (-1)^7 \cdot 7 \\ = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 \end{aligned}$$

(5) 일반항 2^k 에 $k=3, 4, 5, \dots, n$ 을 차례대로 대입하면

$$\sum_{k=3}^n 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$$

(6) 일반항 $\frac{1}{j(j+1)}$ 에 $j=1, 2, 3, \dots, n$ 을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \\ = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

답 풀이 참조

334

$$(1) \sum_{k=1}^{20} (4a_k - 1) = 4 \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{20} 1$$

$$= 4 \cdot 10 - 1 \cdot 20 = 20$$

$$(2) \sum_{k=1}^{20} (3a_k - 2b_k) = 3 \sum_{k=1}^{20} a_k - 2 \sum_{k=1}^{20} b_k$$

$$= 3 \cdot 10 - 2 \cdot (-30) = 90$$

답 (1) 20 (2) 90

335

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k+1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}\right)$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right)$$

$$= 1$$

답 1

336

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + a_{k+1})$$

$$= (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_9 + a_{10}) + (a_{10} + a_{11})$$

$$= a_1 + 2(a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) + a_{11} = 30 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 10 \text{에서 } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 10$$

$$\therefore a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 10 - a_1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a_1 + 2(10 - a_1) + a_{11} = 30, \quad -a_1 + a_{11} = 10$$

이때 $a_1 = 1$ 이므로 $-1 + a_{11} = 10$

$$\therefore a_{11} = 11$$

답 11

337

$$\sum_{k=0}^9 (2k+2)^2 + \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2$$

$$= (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2) + (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 19^2)$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2 = \sum_{k=1}^{20} k^2$$

답 ②

338

$$\sum_{k=1}^{10} (3a_k - 1)^2 - \sum_{k=1}^{10} (a_k + 2)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \{(3a_k - 1)^2 - (a_k + 2)^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (8a_k^2 - 10a_k - 3)$$

$$= 8 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 10 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 3$$

$$= 8 \cdot 15 - 10 \cdot 5 - 3 \cdot 10 = 40$$

답 40

339

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

이므로 $60 = 40 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k b_k = 10$$

답 10

340

$$(1) \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k - \sum_{k=11}^n 3 \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{10} 3 \cdot 2^k$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{10} 2^k$$

$$= 3 \cdot \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$= 6(2^{10} - 1)$$

$$(2) \sum_{k=1}^{10} \frac{5^k + (-3)^k}{4^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{5}{4}\right)^k + \sum_{k=1}^{10} \left(-\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= \frac{\frac{5}{4} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^{10} - 1 \right]}{\frac{5}{4} - 1} + \frac{-\frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{10} \right]}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)}$$

$$= 5 \left\{ \left(\frac{5}{4}\right)^{10} - 1 \right\} - \frac{3}{7} \left[1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{10} \right]$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{10} - 5 - \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{10} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - \frac{38}{7}$$

답 (1) $6(2^{10}-1)$ (2) $5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{10} + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - \frac{38}{7}$

341

(1) $\sum_{k=1}^{10} (2k+1) = 2\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1$

$$= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 1 \cdot 10$$

$$= 110 + 10 = 120$$

(2) $\sum_{k=1}^8 (2k+1)(3k-1)$

$$= \sum_{k=1}^8 (6k^2 + k - 1) = 6\sum_{k=1}^8 k^2 + \sum_{k=1}^8 k - \sum_{k=1}^8 1$$

$$= 6 \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + \frac{8 \cdot 9}{2} - 1 \cdot 8$$

$$= 1224 + 36 - 8$$

$$= 1252$$

(3) $\sum_{k=1}^6 k(k^2+2) = \sum_{k=1}^6 (k^3+2k) = \sum_{k=1}^6 k^3 + 2\sum_{k=1}^6 k$

$$= \left(\frac{6 \cdot 7}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2}$$

$$= 441 + 42$$

$$= 483$$

(4) $\sum_{k=1}^5 (3^k+2k) = \sum_{k=1}^5 3^k + 2\sum_{k=1}^5 k$

$$= \frac{3(3^5-1)}{3-1} + 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2}$$

$$= 363 + 30$$

$$= 393$$

(5) $\sum_{k=0}^n (3+4k) = 3 + \sum_{k=1}^n (3+4k)$

$$= 3 + \sum_{k=1}^n 3 + 4\sum_{k=1}^n k$$

$$= 3 + 3n + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 3 + 3n + 2n(n+1)$$

$$= 2n^2 + 5n + 3$$

(6) $\sum_{k=1}^{n-1} (2k+3)$

$$= 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 3 = 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 3(n-1)$$

$$= (n-1)n + 3(n-1) = (n-1)(n+3)$$

(7) $\sum_{k=n+1}^{2n} k^2$

$$= \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}n(2n+1)\{2(4n+1) - (n+1)\}$$

$$= \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$$

답 (1) **120** (2) **1252** (3) **483** (4) **393**

(5) $2n^2+5n+3$ (6) $(n-1)(n+3)$

(7) $\frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$

342

(1) $\sum_{k=1}^5 (k+1)^3 - \sum_{k=1}^5 (k-1)^3$

$$= \sum_{k=1}^5 \{(k+1)^3 - (k-1)^3\}$$

$$= \sum_{k=1}^5 (6k^2+2) = 6\sum_{k=1}^5 k^2 + \sum_{k=1}^5 2$$

$$= 6 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + 2 \cdot 5 = 330 + 10 = 340$$

(2) $\sum_{k=1}^{10} (k^2-k+1) + \sum_{i=1}^{10} (i^2+i-1)$

$$= \sum_{k=1}^{10} (k^2-k+1) + \sum_{k=1}^{10} (k^2+k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \{(k^2-k+1) + (k^2+k-1)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} 2k^2 = 2\sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 770$$

(3) $\sum_{k=1}^8 \frac{(k+1)^3}{k} + \sum_{n=1}^8 \frac{(n-1)^3}{n}$

$$= \sum_{k=1}^8 \frac{(k+1)^3}{k} + \sum_{k=1}^8 \frac{(k-1)^3}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^8 \left\{ \frac{(k+1)^3}{k} + \frac{(k-1)^3}{k} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^8 (2k^2+6) = 2\sum_{k=1}^8 k^2 + \sum_{k=1}^8 6$$

$$= 2 \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 6 \cdot 8$$

$$= 408 + 48 = 456$$

$$\begin{aligned} (4) \sum_{k=1}^5 (2^k+1)^2 - \sum_{k=1}^5 (2^k-1)^2 \\ = \sum_{k=1}^5 \{(2^k+1)^2 - (2^k-1)^2\} = \sum_{k=1}^5 2^{k+2} \\ = \frac{2^3(2^5-1)}{2-1} = 248 \end{aligned}$$

답 (1) 340 (2) 770 (3) 456 (4) 248

343

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=2}^n k = \sum_{k=1}^n k - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \\ = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = -1$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=5}^{n+5} 4(k-3) = \sum_{k=1}^{n+1} 4(k+1) = 4 \sum_{k=1}^{n+1} k + \sum_{k=1}^{n+1} 4 \\ = 4 \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 4(n+1) \\ = 2(n+1)(n+2) + 4(n+1) \\ = 2n^2 + 10n + 8 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2, b = 10, c = 8$$

답 (1) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = -1$

(2) $a = 2, b = 10, c = 8$

344

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3}{k+3} + \sum_{k=1}^{10} \frac{k(4k+3)}{k+3} \\ = \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3 + 4k^2 + 3k}{k+3} \\ = \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)(k+3)}{k+3} \\ = \sum_{k=1}^{10} k(k+1) = \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k) \\ = \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \\ = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \\ = 385 + 55 = 440 \end{aligned}$$

답 440

345

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \text{이므로} \\ \sum_{k=1}^5 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) \\ = \sum_{k=1}^5 \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \sum_{k=1}^5 \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} \\ = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^5 k^3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^5 k \\ = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5 \cdot 6}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} \\ = 75 + \frac{55}{2} + \frac{5}{2} = 105 \end{aligned}$$

답 105

346

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (2j^2 + 1) - \sum_{j=1}^n (j-1)(2j+1) \\ = \sum_{j=1}^n \{(2j^2 + 1) - (2j^2 - j - 1)\} \\ = \sum_{j=1}^n (j+2) = \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 2 \\ = \frac{n(n+1)}{2} + 2n = \frac{n^2 + 5n}{2} \\ \approx \frac{n^2 + 5n}{2} = 102 \text{이므로} \end{aligned}$$

$$n^2 + 5n = 204, n^2 + 5n - 204 = 0$$

$$(n+17)(n-12) = 0 \quad \therefore n = -17 \text{ 또는 } n = 12$$

그런데 n 은 자연수이므로 구하는 n 의 값은 12이다.

답 12

347

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^n (2^k - 1) \\ = \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 1 \\ = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \\ = 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

답 $2^{n+1} - n - 2$

348

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하면 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n$ 이므로

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2n + 2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

$n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 4$

이때 $a_1 = 4$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$a_n = 2n + 2$ ($n \geq 1$)

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 ka_{3k} &= \sum_{k=1}^5 k(6k+2) \leftarrow a_{3k} = 2 \cdot 3k + 2 = 6k + 2 \\ &= \sum_{k=1}^5 (6k^2 + 2k) \\ &= 6 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} \\ &= 330 + 30 = 360 \end{aligned}$$

답 360

349

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하면 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 3^n - 1$ 이므로

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \\ &= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

$n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2$

이때 $a_1 = 2$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 1$)

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{2 \cdot 3^{2k-1}}{2 \cdot 3^{2k-2}} = 3 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \sum_{k=1}^{10} 3 = 30$$

답 30

350

$$\begin{aligned} (1) \sum_{l=1}^{10} \left(\sum_{k=1}^{10} kl \right) &= \sum_{l=1}^{10} \left(l \sum_{k=1}^{10} k \right) = \sum_{l=1}^{10} \left(l \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= 55 \sum_{l=1}^{10} l = 55 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 55^2 = 3025 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^4 \left[\sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{i=1}^j (i+1) \right\} \right] \\ &= \sum_{k=1}^4 \left\{ \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^j i + \sum_{i=1}^j 1 \right) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^4 \left[\sum_{j=1}^k \left\{ \frac{j(j+1)}{2} + j \right\} \right] \\ &= \sum_{k=1}^4 \left(\sum_{j=1}^k \frac{j^2 + 3j}{2} \right) = \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k j^2 + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^k j \right) \\ &= \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{3}{2} \cdot \frac{k(k+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{12} k(k+1)(2k+1+9) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^4 k(k+1)(k+5) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^4 (k^3 + 6k^2 + 5k) \\ &= \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^4 k^3 + 6 \sum_{k=1}^4 k^2 + 5 \sum_{k=1}^4 k \right) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{4 \cdot 5}{2} \right)^2 + 6 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} + 5 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{6} (100 + 180 + 50) = 55 \end{aligned}$$

답 (1) 3025 (2) 55

351

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\sum_{i=1}^n i \right) &= \sum_{n=1}^m \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m n(n+1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^m n^2 + \sum_{n=1}^m n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{m(m+1)(m+2)}{6} = 56 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } m(m+1)(m+2) = 336 = 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$\therefore m = 6$$

답 6

352

$$\begin{aligned} (1) a_n &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \\
 (2) a_n &= \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} \\
 &= \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1} \\
 &\quad \text{답 (1)} \frac{n}{2n+1} \quad (2) \frac{2n}{n+1}
 \end{aligned}$$

353

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{10} \frac{90}{(4k+1)(4k+5)} \\
 &= \frac{90}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right) \\
 &= \frac{90}{4} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \dots + \left(\frac{1}{41} - \frac{1}{45} \right) \right\} \\
 &= \frac{90}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{45} \right) \\
 &= \frac{90}{4} \cdot \frac{8}{45} = 4
 \end{aligned}$$

답 4

354

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하면 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 4n$ 이므로

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= (n^2 + 4n) - \{(n-1)^2 + 4(n-1)\} \\
 &= 2n + 3 \quad \dots \ominus
 \end{aligned}$$

$n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 5$

이때 $a_1 = 5$ 는 \ominus 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$a_n = 2n + 3$ ($n \geq 1$)

$$\therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+5} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+5} \right) \\
 &= \frac{n}{5(2n+5)} \\
 &\quad \text{답 } \frac{n}{5(2n+5)}
 \end{aligned}$$

355

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\sqrt{2n+2} + \sqrt{2n}} \\
 &= \frac{2(\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n})}{(\sqrt{2n+2} + \sqrt{2n})(\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n})} \\
 &= \sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}
 \end{aligned}$$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 15 항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{15} a_k &= \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}) \\
 &= (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{32} - \sqrt{30}) \\
 &= \sqrt{32} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

답 $3\sqrt{2}$

356

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
 &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\
 &= -1 + \sqrt{100} = 9
 \end{aligned}$$

답 9

357

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\
 &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\
 &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\
 &= \sqrt{n+2} - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

이때 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} = 2\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{n+2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
 $\sqrt{n+2} = 3\sqrt{2}$, $n+2=18$
 $\therefore n=16$

답 16

358

(1) $\sum_{k=1}^{99} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
 $= \sum_{k=1}^{99} \log \frac{k+1}{k}$
 $= \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \dots + \log \frac{100}{99}$
 $= \log \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99}\right) = \log 100 = 2$

(2) $\sum_{k=2}^{10} \left(\frac{2}{9} + \log \frac{k^2-1}{k^2}\right)$
 $= \sum_{k=2}^{10} \frac{2}{9} + \sum_{k=2}^{10} \log \frac{k^2-1}{k^2}$
 $= \frac{2}{9} \cdot 9 + \sum_{k=2}^{10} \log \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k}$
 $= 2 + \log \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} + \log \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} + \log \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} +$
 $\dots + \log \frac{9 \cdot 11}{10 \cdot 10}$
 $= 2 + \log \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10}\right)$
 $= 2 + \log \frac{11}{20} = \log 55$

답 (1) 2 (2) log 55

359

$S = 10 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 2^2 + \dots + 1 \cdot 2^9$
 $-) 2S = \frac{10 \cdot 2 + 9 \cdot 2^2 + \dots + 2 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^{10}}{10 \cdot 2 + 9 \cdot 2^2 + \dots + 2 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^{10}}$
 $-S = 10 - (2 + 2^2 + \dots + 2^9 + 2^{10})$
 $= 10 - \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = -2^{11} + 12$
 $\therefore S = 2^{11} - 12 = 2036$

답 2036

360

$S = \sum_{k=1}^{10} (2k-1) \cdot 3^k$ 이라 하면

$S = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \dots + 19 \cdot 3^{10}$
 $-) 3S = \frac{1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + 17 \cdot 3^{10} + 19 \cdot 3^{11}}{1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + 17 \cdot 3^{10} + 19 \cdot 3^{11}}$
 $-2S = 1 \cdot 3 + 2(3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10}) - 19 \cdot 3^{11}$
 $= 3 + 2 \cdot \frac{3^2(3^9-1)}{3-1} - 19 \cdot 3^{11}$
 $= 3 + 3^{11} - 9 - 19 \cdot 3^{11} = -6 - 18 \cdot 3^{11}$
 $\therefore S = 9 \cdot 3^{11} + 3 = 3^{13} + 3$

답 $3^{13} + 3$

361

주어진 수열을

제 1군 제 2군 제 3군 제 4군 ...
 $(1), (1, 3), (1, 3, 5), (1, 3, 5, 7), \dots$
 과 같이 군수열로 생각하면 제 n 군의 항의 개수는 n 이고 제 1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

제 1군부터 제 13군까지의 항의 개수는 $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$

이므로 제 100 항은 제 14군의 9번째 항,
 즉 $2 \cdot 9 - 1 = 17$ 이다.

또한 제 n 군의 합은

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n\{1 + (2n-1)\}}{2} = n^2$$

이므로 제 1군부터 제 n 군까지의 합은

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

따라서 첫째항부터 제 100 항까지의 합을 S_{100} 이라 하면

$S_{100} = (\text{제 1군부터 제 13군까지의 합})$
 $+ (\text{제 14군의 첫째항부터 9번째 항까지의 합})$
 $= \sum_{k=1}^{13} k^2 + \sum_{k=1}^9 (2k-1)$
 $= \sum_{k=1}^{13} k^2 + 2 \sum_{k=1}^9 k - \sum_{k=1}^9 1$
 $= \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} - 1 \cdot 9$
 $= 819 + 90 - 9$
 $= 900$

답 제 100 항 : 17

첫째항부터 제 100 항까지의 합 : 900

362

(1) 주어진 수열을 (분자)+(분모)의 값이 같은 항끼리
군으로 묶으면

$$\begin{array}{cccc} \text{제1군} & \text{제2군} & \text{제3군} & \dots \\ \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right) & \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right) & \dots \end{array}$$

제 n 군의 분자와 분모의 합은 $n+1$ 이므로 $\frac{5}{8}$ 는

제 12 군의 5번째 항이다.

한편, 제 n 군의 항의 개수는 n 이므로 제 1 군부터
제 11 군까지의 항의 개수는

$$1+2+\dots+11 = \sum_{k=1}^{11} k = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$$

따라서 $66+5=71$ 이므로 $\frac{5}{8}$ 는 제 71 항이다.

(2) 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

제 1 군부터 제 13 군까지의 항의 개수는

$$\frac{13 \cdot 14}{2} = 91, \text{ 제 1 군부터 제 14 군까지의 항의 개수}$$

는 $\frac{14 \cdot 15}{2} = 105$ 이므로 제 99 항은 제 14 군의 8번째 항이다.

따라서 제 n 군의 k 번째 항은 $\frac{k}{n+1-k}$ 이므로

제 99 항은 $\frac{8}{7}$ 이다.

답 (1) 제 71 항 (2) $\frac{8}{7}$

363

위에서 2번째 줄 : 1, 2, 3, 4, ...

⇨ 공차가 1인 등차수열

위에서 3번째 줄 : 1, 3, 5, 7, ...

⇨ 공차가 2인 등차수열

위에서 4번째 줄 : 1, 4, 7, 10, ...

⇨ 공차가 3인 등차수열

:

이므로 위에서 10번째 줄에 있는 수는 공차가 9인 등차수열을 이룬다.

위에서 10번째 줄의 수를 왼쪽부터 차례대로 나열한 것을 수열 $\{a_n\}$ 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (n-1) \cdot 9 \\ &= 9n - 8 \end{aligned}$$

따라서 위에서 10번째 줄의 왼쪽에서 9번째에 있는 수는

$$a_9 = 9 \cdot 9 - 8 = 73$$

답 73

364

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 3$ 에서

$$a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7,$$

$$a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \cdot 7 + 3 = 17,$$

$$a_4 = 2a_3 + 3 = 2 \cdot 17 + 3 = 37$$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} + a_n = 3$ 에서 $a_{n+1} = -a_n + 3$ 이므로

$$a_2 = -a_1 + 3 = -1 + 3 = 2,$$

$$a_3 = -a_2 + 3 = -2 + 3 = 1,$$

$$a_4 = -a_3 + 3 = -1 + 3 = 2$$

(3) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ 에서

$$a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$$

(4) $a_1 = \frac{1}{3}, \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 2$ 에서

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} + 2 = \frac{1}{\frac{1}{3}} + 2 = 5 \quad \therefore a_2 = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 2 = \frac{1}{\frac{1}{5}} + 2 = 7 \quad \therefore a_3 = \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{a_4} = \frac{1}{a_3} + 2 = \frac{1}{\frac{1}{7}} + 2 = 9 \quad \therefore a_4 = \frac{1}{9}$$

(5) $a_1 = 5, a_2 = 2, 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0$ 에서

$$3a_3 - 2a_2 - a_1 = 3a_3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0 \quad \therefore a_3 = 3$$

$$3a_4 - 2a_3 - a_2 = 3a_4 - 2 \cdot 3 - 2 = 0 \quad \therefore a_4 = \frac{8}{3}$$

(6) $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 에서

$$\frac{2}{a_2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3}, \frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_3} = 3$$

$$\therefore a_3 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{a_3} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}, \frac{2}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_4} = 4$$

$$\therefore a_4 = \frac{1}{4}$$

답 (1) 7, 17, 37 (2) 2, 1, 2 (3) $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ (5) 2, 3, $\frac{8}{3}$ (6) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

365

(1) $a_1=1, a_{n+1}=a_n+2$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_{11} = 1 + 2 \cdot 10 = 21$$

(2) $a_1=-4, a_{n+1}-a_n=4$, 즉 $a_{n+1}=a_n+4$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -4, 공차가 4인 등차수열이므로

$$a_{11} = -4 + 4 \cdot 10 = 36$$

(3) $a_1=12, a_2=9, 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 12, 공차가 $9-12=-3$ 인 등차수열이므로

$$a_{11} = 12 + (-3) \cdot 10 = -18$$

(4) $a_1=1, a_{n+1}=3a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_{11} = 1 \cdot 3^{10} = 3^{10}$$

(5) $a_1=4, \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$

은 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_{11} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{256}$$

(6) $a_1=2, a_2=-4, a_{n+1}^2=a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{-4}{2}=-2$ 인 등비수열이므로

$$a_{11} = 2 \cdot (-2)^{10} = 2^{11} = 2048$$

답 (1) 21 (2) 36 (3) -18

(4) 3^{10} (5) $\frac{1}{256}$ (6) 2048

366

$a_{n+1}+3=a_n$ 에서 $a_{n+1}-a_n=-3$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은

첫째항이 50이고 공차가 -3인 등차수열이다.

$$\therefore a_n = 50 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 53$$

따라서 $a_k = -3k + 53 = 14$ 에서 $k=13$

답 13

367

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \text{ 즉 } 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \text{ 이므로 수열}$$

$\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 첫째항이 -5, 공차가 $a_2 - a_1 = -3 - (-5) = 2$

이므로

$$a_n = -5 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 7$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} (2k - 7) = 2 \sum_{k=1}^{20} k - 7 \cdot 20$$

$$= 2 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - 140 = 280$$

답 280

368

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

공비를 r 라 하면 $\frac{a_6}{a_1} = \frac{a_8}{a_3} = \frac{a_{10}}{a_5} = r^5$ 이므로

$$\frac{a_6}{a_1} + \frac{a_8}{a_3} + \frac{a_{10}}{a_5} = 15 \text{ 에서 } r^5 + r^5 + r^5 = 15$$

$$3r^5 = 15 \quad \therefore r^5 = 5$$

$$\therefore \frac{a_{20}}{a_{10}} = r^{10} = (r^5)^2 = 5^2 = 25$$

답 25

369

$a_{n+1} = a_n + 3^n - 1$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 3^1 - 1$$

$$a_3 = a_2 + 3^2 - 1$$

$$a_4 = a_3 + 3^3 - 1$$

⋮

$$+) a_{10} = a_9 + 3^9 - 1$$

$$a_{10} = a_1 + (3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^9) - 9$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^9 3^k - 9$$

$$= \frac{3(3^9-1)}{3-1} - 8 = \frac{3}{2}(3^9-1) - 8$$

$$= \frac{1}{2}(3^{10}-19)$$

답 $\frac{1}{2}(3^{10}-19)$

370

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 19를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \\ a_3 &= a_2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \\ a_4 &= a_3 + \frac{1}{3 \cdot 4} \\ &\vdots \\ +) a_{20} &= a_{19} + \frac{1}{19 \cdot 20} \\ \hline a_{20} &= a_1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 20} \\ &= 3 + \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right) \right\} \\ &= 3 + 1 - \frac{1}{20} = \frac{79}{20} \end{aligned}$$

답 $\frac{79}{20}$

371

$a_{n+1} = a_n + 2n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 \cdot 1 \\ a_3 &= a_2 + 2 \cdot 2 \\ a_4 &= a_3 + 2 \cdot 3 \\ &\vdots \\ +) a_n &= a_{n-1} + 2(n-1) \\ \hline a_n &= a_1 + 2\{1+2+3+\dots+(n-1)\} \\ &= 5 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k \end{aligned}$$

$$= 5 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= n^2 - n + 5$$

따라서 $a_k = k^2 - k + 5 = 115$ 에서
 $k^2 - k - 110 = 0, (k-11)(k+10) = 0$
 $\therefore k = 11$ ($\because k$ 는 자연수)

답 11

372

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) a_{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} a_{n-1} \end{aligned}$$

위의 식의 n 에 2, 3, 4, ..., 20을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} a_1 \\ a_3 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} a_2 \\ a_4 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} a_3 \\ &\vdots \\ \times) a_{20} &= \frac{19}{20} \cdot \frac{21}{20} a_{19} \\ \hline a_{20} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{21}{20} \cdot a_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{20} \cdot 2 = \frac{21}{20} \end{aligned}$$

답 $\frac{21}{20}$

373

$a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2} a_1 \\ a_3 &= \frac{2}{3} a_2 \\ a_4 &= \frac{3}{4} a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\times \left) a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} a_1$$

$$= \frac{1}{n} \cdot 2 = \frac{2}{n}$$

따라서 $a_k = \frac{2}{k} = \frac{1}{15}$ 에서 $k=30$

답 30

374

$S_n = -a_n + n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)에서

$$S_{n+1} = -a_{n+1} + n + 1$$

한편, $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = -a_{n+1} + n + 1 - (-a_n + n)$$

$$= -a_{n+1} + a_n + 1$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$$

$n=1, 2, 3, \dots, 9$ 를 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$ 에 차례로 대입

하면

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

⋮

$$a_{10} = \frac{1}{2}a_9 + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \cdots + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

답 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

375

(1) 농도가 5%인 소금물 100g에서 소금물 20g을 덜어 내고 물 20g을 넣고 잘 섞은 후의 소금물의 소

금의 양은

$$\frac{5}{100} \times (100 - 20) = 4 \text{ (g)}$$

이때 소금물의 농도는 $\frac{4}{100} \times 100 = 4$ (%)

$\therefore a_1 = 4$

같은 방법으로 한 번 더 시행한 후의 소금물의 소금의 양은

$$\frac{4}{100} \times (100 - 20) = \frac{16}{5} \text{ (g)}$$

이때 소금물의 농도는 $\frac{16}{100} \times 100 = \frac{16}{5}$ (%)

$\therefore a_2 = \frac{16}{5}$

(2) n 번 반복한 후 소금물의 농도가 a_n %이므로 한 번 더 시행한 후의 소금물의 소금의 양은

$$\frac{a_n}{100} \times (100 - 20) = \frac{4}{5} a_n \text{ (g)}$$

이때 소금물의 농도는

$$a_{n+1} = \frac{\frac{4}{5} a_n}{100} \times 100 = \frac{4}{5} a_n$$

답 (1) $a_1 = 4, a_2 = \frac{16}{5}$ (2) $a_{n+1} = \frac{4}{5} a_n$

376

조건 (가)에서 $p(1)$ 이 참이므로

조건 (나)에 의하여 $p(3)$ 이 참이다.

$p(3)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(6)$ 이 참이다.

$p(6)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(10)$ 이 참이다.

$p(10)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(16)$ 이 참이다.

⋮

따라서 반드시 참이라고 할 수 있는 명제는 $p(16)$ 이다.

답 ⑤

377

(i) $p(n)$ 이 참일 때 $p(n+2)$ 가 참이므로

$p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5), p(7), \dots$ 이 참

$p(2)$ 가 참이면 $p(4), p(6), p(8), \dots$ 이 참

- (ii) $p(n+1)$ 이 참일 때 $p(n+2)$ 가 참이므로
 $p(2)$ 가 참이면 $p(3), p(4), p(5), \dots$ 가 참
 이때 모든 자연수 n 에 대하여 명제 $p(n)$ 이 참이러
 면 $p(1)$ 이 참이어야 한다.
 (i), (ii)에서 $p(1), p(2)$ 가 참이면 모든 자연수 n 에 대
 하여 명제 $p(n)$ 이 참이 된다.

답 ①

378

(1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ①

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변) $= 1^2 = 1$, (우변) $= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$

따라서 (좌변) = (우변)이므로 $n=1$ 일 때

①이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, ①이 성립한다고 가정하면

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

이 등식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2$

$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$

$= \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}$

$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6)$

$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성
 립한다.

(2) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
 $= \frac{n}{2n+1}$ ①

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변) $= \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$, (우변) $= \frac{1}{3}$

따라서 (좌변) = (우변)이므로 $n=1$ 일 때

①이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, ①이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$

$+ \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$

이 등식의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면

$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$

$+ \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{k+1}{2k+3} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ①이 성
 립한다.

답 풀이 참조

379

(1) $2^n > n^2$ ①

(i) $n=5$ 일 때,

(좌변) $= 2^5 = 32$, (우변) $= 5^2 = 25$

따라서 (좌변) > (우변)이므로 $n=5$ 일 때 ①이
 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 5$)일 때, ①이 성립한다고 가정하면

$2^k > k^2$

위 부등식의 양변에 2를 곱하면

$2 \cdot 2^k > 2k^2$, 즉 $2^{k+1} > 2k^2$

그런데 $k \geq 5$ 이면

$k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 > 0$

이므로 $k^2 > 2k+1$

$\therefore 2^{k+1} > 2k^2 = k^2 + k^2$

$> k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

$$(2) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 $\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ 이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이 부등식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \dots\dots \text{㉢} \end{aligned}$$

그런데 ㉢의 우변에 k 대신 $k+1$ 을 대입하면

$$2 - \frac{1}{k+1} \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉢ - (㉣의 우변)을 계산하여 정리하면

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{1}{k+1} \right) - \left\{ 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \right\} \\ = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \\ = \frac{1}{k(k+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ < 2 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다. 답 풀이 참조

I. 지수함수와 로그함수

1

- ① $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2^2 = 4$
 ② $\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{3}$
 ③ $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^6} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
 ④ $-\sqrt[3]{-0.008} = -\sqrt[3]{(-0.2)^3}$
 $= -(-0.2) = 0.2$
 ⑤ $-\sqrt[6]{(-3)^6} = -\sqrt[6]{3^6} = -3$

답 ④

2

- ① $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{25 \times 5} = \sqrt[3]{5^3} = 5$
 ② $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$
 ③ $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
 ④ $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[4]{2^{\frac{4}{3}}} = \sqrt[3]{2}$
 ⑤ $\frac{\sqrt[6]{27} \times \sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}} = \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[12]{3^2} \div \sqrt[6]{3^4}$
 $= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} \div 3^{\frac{2}{3}}$
 $= 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}} = 3^0 = 1$

다른풀이

$$\begin{aligned} \text{⑤ } \frac{\sqrt[6]{27} \times \sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}} &= \frac{\sqrt[6]{27} \times \sqrt[12]{3^2}}{\sqrt[6]{81}} = \frac{\sqrt[6]{27} \times \sqrt[6]{3}}{\sqrt[6]{81}} \\ &= \sqrt[6]{\frac{27 \times 3}{81}} = 1 \end{aligned}$$

3

- (1) $\sqrt[3]{2^6} \div \sqrt[5]{32^2} + 2\sqrt[3]{64} = 2^2 \div \sqrt[5]{(2^5)^2} + 2\sqrt[3]{2^6}$
 $= 4 \div (\sqrt[5]{2^5})^2 + 2 \times 2$
 $= 4 \div 4 + 4$
 $= 1 + 4 = 5$

$$\begin{aligned} \text{(2) } \sqrt{\frac{16^2 + 4^5}{8^4 + 4^5}} &= \sqrt{\frac{2^8 + 2^{10}}{2^{12} + 2^{10}}} = \sqrt{\frac{2^8(1 + 2^2)}{2^{10}(2^2 + 1)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3) } \sqrt[4]{81a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} &= \{81 \times (a \times a^{\frac{1}{2}})\}^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}} \\ &= (3^4)^{\frac{1}{4}} \times (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}} \\ &= 3 \times a^{\frac{3}{8}} \div a^{\frac{3}{8}} \\ &= 3a^{\frac{3}{8} - \frac{3}{8}} \\ &= 3a^0 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(4) } \frac{1}{2} \sqrt[6]{4} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{-\frac{1}{4}} &= \frac{1}{2} \sqrt[6]{2^2} + \sqrt[3]{2^4} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \\ &= 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{4}{3}} - 3\sqrt[3]{2^{-2}} \\ &= 2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{4}{3}} - 2^{-\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{(5) } (a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$$

답 (1) 5 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 3 (4) $2^{\frac{4}{3}}$ (5) a^5

다른풀이 (3) $\sqrt[4]{81a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} = \sqrt[8]{(81a\sqrt{a})^2} \div \sqrt[8]{a^3}$
 $= \frac{\sqrt[8]{81^2 a^3}}{\sqrt[8]{a^3}} = \sqrt[8]{\frac{81^2 a^3}{a^3}}$
 $= \sqrt[8]{81^2} = \sqrt[8]{(3^4)^2}$
 $= \sqrt[8]{3^8}$
 $= 3$

$$\begin{aligned} \text{(4) } \frac{1}{2} \sqrt[6]{4} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{-\frac{1}{4}} &= \frac{1}{2} \sqrt[6]{2^2} + \sqrt[3]{2^4} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2^4} - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^4} - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^4} - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt[3]{2^4} - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

4

$$A = \sqrt{2^3 \sqrt{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt{2} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{2^3 \times \sqrt[6]{3}}$$

$$= \sqrt[6]{2^3 \times 3} = \sqrt[6]{24}$$

$$B = \sqrt[3]{3 \sqrt{2}} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{3^2 \times \sqrt[6]{2}}$$

$$= \sqrt[6]{3^2 \times 2} = \sqrt[6]{18}$$

$$C = \sqrt[3]{2 \sqrt{3}} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{2^2 \times \sqrt[6]{3}}$$

$$= \sqrt[6]{2^2 \times 3} = \sqrt[6]{12}$$

따라서 $\sqrt[6]{12} < \sqrt[6]{18} < \sqrt[6]{24}$ 이므로

$$C < B < A$$

5

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{6} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times 6^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{1}{4}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$$

$$= 2^{\frac{7}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore a = \frac{7}{6}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{5}{3}$$

6

$$(9 \times \sqrt[3]{3})^3 \times (3^2)^{\frac{8}{5}} \times \frac{1}{\sqrt[5]{9^3}}$$

$$= (3^2 \times 3^{\frac{1}{3}})^3 \times 3^{\frac{16}{5}} \times \{(3^2)^{\frac{3}{5}}\}^{-1}$$

$$= 3^6 \times 3 \times 3^{\frac{16}{5}} \times 3^{-\frac{6}{5}}$$

$$= 3^{6+1+\frac{16}{5}-\frac{6}{5}} = 3^9$$

$$\therefore k = 9$$

7

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[4]{a \sqrt{a^k}} \text{에서}$$

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[4]{a \sqrt{a^k}} = (a \times a^{\frac{k}{2}})^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{2+k}{2}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2+k}{8}}$$

따라서 $a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2+k}{8}}$ 이므로

$$\frac{2}{3} = \frac{2+k}{8}, 16 = 3(2+k)$$

$$10 = 3k \quad \therefore k = \frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

8

$$\sqrt[3]{a \sqrt{a^4 \sqrt{a^3 a}}} = [a \times \{a \times (a \times a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}$$

$$= [a \times \{a \times (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \{a \times (a \times a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \{a \times (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (a \times a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (a^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{9}}$$

$$\therefore k = \frac{5}{9}$$

답 ⑤

다른풀이 $\sqrt[3]{a \sqrt{a^4 \sqrt{a^3 a}}} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{\sqrt{a^4 \sqrt{a^3 a}}}$

$$= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a^4 \sqrt{a^3 a}}$$

$$= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[6]{\sqrt{a^3 a}}$$

$$= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[24]{a^3 a}$$

$$= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[24]{a^4} \times \sqrt[24]{a^3}$$

$$= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[24]{a^4} \times \sqrt[24]{a^3}$$

$$= a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72}}$$

$$= a^{\frac{5}{9}}$$

답 $\frac{5}{3}$

9

8의 세제곱근 중 실수인 것은

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2 \quad \therefore a = 2$$

-64의 세제곱근 중 실수인 것은

$$\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4 \quad \therefore b = -4$$

$$\therefore a + b = 2 + (-4) = -2$$

$a + b$ 가 실수 x 의 세제곱근이므로

$$x = (a + b)^3 = (-2)^3 = -8$$

답 -8

10

- ㄱ. $\sqrt{16}=4$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=4$ 이므로
 $x^4-4=0, (x^2-2)(x^2+2)=0$
 $\therefore x = \pm\sqrt{2}$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}i$ (거짓)
- ㄴ. $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$ (거짓)
- ㄷ. -49 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = -49 < 0$ 이므로
 -49 의 네제곱근 중 실수인 것은 없다. (거짓)
- ㄹ. 5 의 n 제곱근을 x 라 하면 $x^n = 5$
 자연수 n ($n \geq 2$)이 홀수일 때, $x^n = 5$ 를 만족시키
 는 실수 x 는 $x = \sqrt[n]{5}$ 의 1개이다. (참)
- ㅁ. -5 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-5}$ 이다. 이때
 $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$ (참)
- 따라서 옳은 것은 ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄹ, ㅁ

11

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x}{3}} = (2^{-3})^{\frac{x}{3}} = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

12

- $(\sqrt[3]{3^4})^{\frac{1}{3}}$ 이 어떤 자연수 x 의 n 제곱근이면
 $x = \{(\sqrt[3]{3^4})^{\frac{1}{3}}\}^n = \{(3^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}}\}^n = (3^{\frac{4}{9}})^n = 3^{\frac{4}{9}n}$
 이므로 $\frac{4}{9}n$ 이 자연수이어야 한다.
 따라서 자연수 n ($n \geq 2$)은 9의 배수이므로 두 자리 자
 연수 n 은 18, 27, 36, ..., 90, 99의 10개이다.

답 10

13

- 자연수 a, b 에 대하여 $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$ 가 자연수이므로 \sqrt{a}
 와 $\sqrt[3]{b}$ 는 각각 자연수이다. 즉 a 는 어떤 자연수의 제곱
 꼴, b 는 어떤 자연수의 세제곱 꼴이다.
 이때 $30 \leq a \leq 40$ 이므로 $a = 6^2 = 36$
 $150 \leq b \leq 294$ 이므로 $b = 6^3 = 216$
 $\therefore a + b = 36 + 216 = 252$

답 252

14

$$\begin{aligned} \sqrt[7]{\sqrt{a} \times \sqrt[4]{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}} &= \{a^{\frac{1}{2}} \times (a \div a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{7}} \\ &= \{a^{\frac{1}{2}} \times (a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{7}} \\ &= (a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{12}})^{\frac{1}{7}} \\ &= (a^{\frac{7}{12}})^{\frac{1}{7}} \\ &= a^{\frac{1}{12}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

15

$a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 세제곱하면

$$(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^3 = 3^3$$

$$a^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot a \cdot a^{-\frac{1}{2}} + 3 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-1} - a^{-\frac{3}{2}} = 27$$

$$a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} - 3(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) = 27$$

$$a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} - 3 \cdot 3 = 27$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = 36$$

..... ㉠

또한 $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 제곱하면

$$(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2 = 3^2$$

$$a - 2 + a^{-1} = 9$$

$$\therefore a + a^{-1} = 11$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} + 9}{a + a^{-1} + 4} = \frac{36 + 9}{11 + 4} = \frac{45}{15} = 3$$

답 3

16

$x = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$ 의 양변을 세제곱하면

$$\begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3})^3 \\ &= 9 - 3 \cdot (\sqrt[3]{9})^2 \cdot \sqrt[3]{3} + 3 \sqrt[3]{9} \cdot (\sqrt[3]{3})^2 - 3 \\ &= 6 - 3 \cdot \sqrt[3]{9^2 \cdot 3} (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}) \\ &= 6 - 3 \cdot \sqrt[3]{27} (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}) \\ &= 6 - 9(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}) \\ &= 6 - 9x \end{aligned}$$

$$\therefore x^3 + 9x = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^3 + 18x - 5 &= 2(x^3 + 9x) - 5 \\ &= 2 \times 6 - 5 \\ &= 7 \end{aligned}$$

답 7

17

분모, 분자에 각각 a^{11} 을 곱하면

$$\begin{aligned} &\frac{a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10}}{a^{-1} + a^{-3} + a^{-5} + a^{-7} + a^{-9}} \\ &= \frac{a^{11}(a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10})}{a^{11}(a^{-1} + a^{-3} + a^{-5} + a^{-7} + a^{-9})} \\ &= \frac{a^{11}(a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10})}{a^{10} + a^8 + a^6 + a^4 + a^2} \\ &= a^{11} \end{aligned}$$

답 ②

18

(1) $2^x + 2^{-x} = 4$ 의 양변을 세제곱하면

$$\begin{aligned} (2^x + 2^{-x})^3 &= 4^3 \\ 2^{3x} + 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-x} + 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-2x} + 2^{-3x} &= 64 \\ 8^x + 8^{-x} + 3(2^x + 2^{-x}) &= 64 \\ 8^x + 8^{-x} + 3 \cdot 4 &= 64 \\ \therefore 8^x + 8^{-x} &= 52 \end{aligned}$$

(2) $29^x = 2$ 에서 $29 = 2^{\frac{1}{x}}$

..... ㉠

$$(4 \times 29)^y = 2^2 \text{에서 } 4 \times 29 = 2^{\frac{2}{y}}$$

..... ㉡

㉠ \div ㉡을 하면

$$\frac{29}{4 \times 29} = 2^{\frac{1}{x}} \div 2^{\frac{2}{y}} \quad \therefore 2^{\frac{1}{x} - \frac{2}{y}} = \frac{1}{4}$$

(3) 분모, 분자에 각각 3^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{3^{3x} + 3^{-3x}}{3^x + 3^{-x}} &= \frac{3^x(3^{3x} + 3^{-3x})}{3^x(3^x + 3^{-x})} = \frac{3^{4x} + 3^{-2x}}{3^{2x} + 1} \\ &= \frac{(3^{2x})^2 + (3^{2x})^{-1}}{3^{2x} + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}-1}}{(\sqrt{2}-1) + 1} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

답 (1) 52 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $2\sqrt{2} - 1$

다른풀이 (1) 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$\begin{aligned} 8^x + 8^{-x} &= (2^x)^3 + (2^{-x})^3 \\ &= (2^x + 2^{-x})^3 - 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} (2^x + 2^{-x}) \\ &= 4^3 - 3 \times 4 \\ &= 52 \end{aligned}$$

19

$2^x = 5^y = 10^z = k$ ($k > 0$)라 하면

$xyz \neq 0$ 이므로 $k \neq 1$

$$2^x = k \text{에서 } 2 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$5^y = k \text{에서 } 5 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$10^z = k \text{에서 } 10 = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠ \times ㉡ \div ㉢을 하면

$$2 \times 5 \div 10 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{1}{z}}$$

$$\therefore k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}} = 1$$

$$k \neq 1 \text{이므로 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$$

$$\therefore \frac{yz + zx - xy}{xyz} = 0$$

$xyz \neq 0$ 이므로 $yz + zx - xy = 0$

$$\therefore xy - yz - zx = 0$$

답 0

20

$$5^x = 10 \text{에서 } 5 = 10^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$80^y = 10 \text{에서 } 80 = 10^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$a^z = 10 \text{에서 } a = 10^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠ \times ㉡ \div ㉢을 하면

$$5 \times 80 \div a = 10^{\frac{1}{x}} \times 10^{\frac{1}{y}} \div 10^{\frac{1}{z}}$$

$$\frac{400}{a} = 10^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}}$$

$$\frac{400}{a} = 10^2 \left(\because \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 2 \right)$$

$$\therefore a = 4$$

답 4

21

주어진 식의 지수 부분을 계산하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} \\ &= \frac{(c-a) + (a-b) + (b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0 \\ \therefore x^{\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}} &= x^0 = 1 \end{aligned}$$

답 1

22

$a^6=5, b^5=7, c^2=11$ 에서

$$a=5^{\frac{1}{6}}, b=7^{\frac{1}{5}}, c=11^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore (abc)^n &= (5^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{1}{5}} \times 11^{\frac{1}{2}})^n \\ &= 5^{\frac{n}{6}} \times 7^{\frac{n}{5}} \times 11^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

$(abc)^n$, 즉 $5^{\frac{n}{6}} \times 7^{\frac{n}{5}} \times 11^{\frac{n}{2}}$ 이 자연수가 되려면

$\frac{n}{6}, \frac{n}{5}, \frac{n}{2}$ 이 모두 자연수이어야 한다.

따라서 자연수 n 의 최솟값은 세 수 6, 5, 2의 최소공배수인 30이다.

답 30

23

이차방정식 $x^2 - 6x + 2 = 0$ 의 두 근이 $2^a, 2^b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^a + 2^b = 6, 2^a \cdot 2^b = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore 8^a + 8^b &= (2^a)^3 + (2^b)^3 \\ &= (2^a + 2^b)^3 - 3 \cdot 2^a \cdot 2^b (2^a + 2^b) \\ &= 6^3 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 180 \end{aligned}$$

답 180

24

$$\begin{aligned} \frac{a^{6x} + a^{-6x}}{a^{2x} + a^{-2x}} &= \frac{(a^{2x})^3 + (a^{-2x})^3}{a^{2x} + a^{-2x}} \\ &= \frac{(a^{2x} + a^{-2x})(a^{4x} - a^{2x} \cdot a^{-2x} + a^{-4x})}{a^{2x} + a^{-2x}} \\ &= a^{4x} - 1 + a^{-4x} \\ &= (\sqrt{2} + 1) - 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 1$$

답 $2\sqrt{2} - 1$

다른풀이 $a^{4x} = \sqrt{2} + 1, a^{-4x} = \frac{1}{a^{4x}} = \sqrt{2} - 1$ 이고

$\frac{a^{6x} + a^{-6x}}{a^{2x} + a^{-2x}}$ 의 분모, 분자에 각각 a^{2x} 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{a^{6x} + a^{-6x}}{a^{2x} + a^{-2x}} &= \frac{a^{2x}(a^{6x} + a^{-6x})}{a^{2x}(a^{2x} + a^{-2x})} = \frac{a^{8x} + a^{-4x}}{a^{4x} + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{2} + 1)^2 + \sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1) + 1} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \\ &= \frac{(2 + 3\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = 2\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

25

$$f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^x(a^x - a^{-x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} \text{이므로}$$

$$f(p) = \frac{a^{2p} - 1}{a^{2p} + 1} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$2(a^{2p} - 1) = a^{2p} + 1$$

$$\therefore a^{2p} = 3$$

$$f(q) = \frac{a^{2q} - 1}{a^{2q} + 1} = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$3(a^{2q} - 1) = a^{2q} + 1 \quad \therefore a^{2q} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore f(p+q) &= \frac{a^{2(p+q)} - 1}{a^{2(p+q)} + 1} = \frac{a^{2p} \times a^{2q} - 1}{a^{2p} \times a^{2q} + 1} \\ &= \frac{3 \times 2 - 1}{3 \times 2 + 1} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{7}$

26

조건 (가)에서 $16^x = 9^y = 48^z = k$ ($k > 0$)라 하면

$$16^x = k \text{에서 } 16 = k^{\frac{1}{x}}$$

$$9^y = k \text{에서 } 9 = k^{\frac{1}{y}}$$

$$48^z = k \text{에서 } 48 = k^{\frac{1}{z}}$$

조건 (나)에서 $\frac{2a}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ 이므로 $k^{\frac{2a}{x} + \frac{1}{y}} = k^{\frac{2}{z}}$, 즉

$$k^{\frac{2a}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} = k^{\frac{2}{z}}$$

$$(k^{\frac{1}{x}})^{2a} \times k^{\frac{1}{y}} = (k^{\frac{1}{z}})^2$$

$$16^{2a} \times 9 = 48^2$$

$$(2^4)^{2a} \times 3^2 = (2^4 \times 3)^2$$

$$2^{8a} \times 3^2 = 2^8 \times 3^2, 2^{8a} = 2^8$$

$$8a = 8 \quad \therefore a = 1$$

답 1

27

① $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{2^{-1}} 2^2 = -2$ (거짓)

② $\log_{10} \sqrt[4]{0.001} = \log_{10} \left(\frac{1}{1000} \right)^{\frac{1}{4}}$
 $= \frac{1}{4} \log_{10} 10^{-3}$
 $= -\frac{3}{4}$ (참)

③ $\log_9 3 + \log_9 27 = \log_9 (3 \times 27) = \log_9 81$
 $= \log_9 9^2 = 2$ (거짓)

④ $\log_{10} 12 - \log_{10} 2 = \log_{10} \frac{12}{2} = \log_{10} 6$ (거짓)

⑤ $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{-2} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} \log_3 3 = -4$ (거짓)

답 ②

28

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1$$

$$\therefore \log_3(a^3-1) - \log_3(a^2+a+1)$$

$$= \log_3 \frac{a^3-1}{a^2+a+1}$$

$$= \log_3 \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$$

$$= \log_3(a-1)$$

$$= \log_3(\sqrt{3}+1-1) = \log_3 \sqrt{3}$$

$$= \log_3 3^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

29

(1) $\log_2(4^{\frac{3}{4}} \times \sqrt{2^5})^{\frac{1}{2}} = \log_2 \{ (2^2)^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{5}{2}} \}^{\frac{1}{2}}$
 $= \log_2(2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$$= \log_2(2^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_2 2^2 = 2$$

(2) $8^{\log_2 3} - 100^{\log_{10} 5} = 3^{\log_2 8} - 5^{\log_{10} 100}$
 $= 3^{\log_2 2^3} - 5^{\log_{10} 10^2}$
 $= 3^3 - 5^2$
 $= 27 - 25$
 $= 2$

(3) $(\log_9 2 + \log_3 4)(\log_2 3 + \log_4 9)$
 $= (\log_{3^2} 2 + \log_3 2^2)(\log_2 3 + \log_{2^2} 3^2)$
 $= \left(\frac{1}{2} \log_3 2 + 2 \log_3 2 \right) (\log_2 3 + \log_2 3)$
 $= \frac{5}{2} \log_3 2 \times 2 \log_2 3$
 $= 5 \times \log_3 2 \times \log_2 3$
 $= 5$

(4) $3 \log_2 \sqrt[3]{3} + \frac{1}{2} \log_2 \sqrt{2} + \log_2 \frac{\sqrt{2}}{3}$
 $= 3 \log_2 3^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \log_2 2^{\frac{1}{2}} + \log_2 \frac{\sqrt{2}}{3}$
 $= \log_2 3 + \frac{1}{4} \log_2 2 + \log_2 \frac{\sqrt{2}}{3}$
 $= \log_2 \left(3 \times \frac{\sqrt{2}}{3} \right) + \frac{1}{4}$
 $= \log_2 \sqrt{2} + \frac{1}{4}$
 $= \log_2 2^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

답 (1) 2 (2) 2 (3) 5 (4) $\frac{3}{4}$

30

$$a = (\sqrt{3})^{\log_5 4} = (\sqrt{3})^{2 \log_5 2}$$

$$= \{ (\sqrt{3})^2 \}^{\log_5 2} = 3^{\log_5 2} = 2$$

$$b = 2^{\log_3 3} = 3$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

답 13

31

$$\log_5 \sqrt{2.4} = \log_5 2.4^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log_5 2.4 = \frac{1}{2} \log_5 \frac{12}{5}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\log_5 12 - \log_5 5) \\ &= \frac{1}{2}\{\log_5(2^2 \times 3) - 1\} \\ &= \frac{1}{2}(2 \log_5 2 + \log_5 3 - 1) \\ &= \frac{1}{2}(2a + b - 1) \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}(2a + b - 1)$

32

$2^x = 24$ 에서 $x = \log_2 24$

$3^y = 24$ 에서 $y = \log_3 24$

$$\begin{aligned} \therefore (x-3)(y-1) &= (\log_2 24 - 3)(\log_3 24 - 1) \\ &= (\log_2 24 - \log_2 8)(\log_3 24 - \log_3 3) \\ &= \log_2 \frac{24}{8} \times \log_3 \frac{24}{3} = \log_2 3 \times \log_3 8 \\ &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3} \\ &= \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \end{aligned}$$

답 ③

33

$A = \frac{1}{2} \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

$B = \frac{1}{6} \log_4 32 = \frac{1}{6} \log_{2^2} 2^5 = \frac{1}{6} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{12}$

$C = \log_{25} 5\sqrt{5} = \log_{5^2} 5^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$

따라서 $\frac{1}{4} < \frac{5}{12} < \frac{3}{4}$ 이므로 $A < B < C$

답 ①

34

$\log_{a-1}(ax^2 - ax + 2)$ 가 정의되려면

밑의 조건에서 $a - 1 > 0$, $a - 1 \neq 1$

$\therefore a > 1$, $a \neq 2$ ㉠

진수의 조건에서 $ax^2 - ax + 2 > 0$ ㉡

㉠에서 $a > 0$ 이므로 부등식 ㉡이 모든 실수 x 에 대해

여 성립하려면 이차방정식 $ax^2 - ax + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D < 0$ 이어야 한다. 즉

$D = a^2 - 8a < 0$, $a(a - 8) < 0$

$\therefore 0 < a < 8$ ㉢

㉠, ㉢의 공통 범위를 구하면

$1 < a < 2$ 또는 $2 < a < 8$

따라서 정수 a 는 3, 4, 5, 6, 7이므로 그 합은

$3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$

답 25

35

(1) $x = \log_2(2 + \sqrt{3})$ 에서 $2^x = 2 + \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \therefore 2^x + 2^{-x} &= 2^x + \frac{1}{2^x} \\ &= 2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \\ &= 2 + \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \\ &= 4 \end{aligned}$$

(2) $\log_2(a + b) = 3$ 에서 $a + b = 2^3 = 8$

$\log_2 a + \log_2 b = 3$ 에서 $\log_2 ab = 3$

$\therefore ab = 2^3 = 8$

$\therefore (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 8^2 - 4 \times 8 = 32$

(3) $\log_a x = \frac{1}{4}$, $\log_b x = \frac{1}{5}$, $\log_c x = \frac{1}{6}$ 에서

$\log_x a = 4$, $\log_x b = 5$, $\log_x c = 6$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2}{\log_{abc} x} &= 2 \log_x abc \\ &= 2(\log_x a + \log_x b + \log_x c) \\ &= 2(4 + 5 + 6) \\ &= 30 \end{aligned}$$

답 (1) 4 (2) 32 (3) 30

36

$3.45^x = 100$ 에서 $x = \log_{3.45} 100$

$\therefore \frac{1}{x} = \log_{100} 3.45$

$0.00345^y = 100$ 에서 $y = \log_{0.00345} 100$

$\therefore \frac{1}{y} = \log_{100} 0.00345$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \log_{100} 3.45 - \log_{100} 0.00345 \\ &= \log_{100} \frac{3.45}{0.00345} \\ &= \log_{100} 1000 \\ &= \log_{10^2} 10^3 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ㉔

다른풀이 $3.45^x = 100$ 에서 $100^{\frac{1}{x}} = 3.45$ ㉓
 $0.00345^y = 100$ 에서 $100^{\frac{1}{y}} = 0.00345$ ㉔

㉓ ÷ ㉔을 하면

$$100^{\frac{1}{x}} \div 100^{\frac{1}{y}} = 3.45 \div 0.00345$$

$$100^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = 1000$$

$$10^{2(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})} = 10^3$$

$$2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 3 \quad \therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$$

37

$5^x = 2^y = (\sqrt[3]{10})^z = k$ ($k > 0$)라 하면

$$5^x = k \text{에서 } x = \log_5 k \quad \therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_5 k} = \log_k 5$$

$$2^y = k \text{에서 } y = \log_2 k \quad \therefore \frac{1}{y} = \frac{1}{\log_2 k} = \log_k 2$$

$$(\sqrt[3]{10})^z = k \text{에서 } z = \log_{\sqrt[3]{10}} k = \log_{10^{\frac{1}{3}}} k = 3 \log_{10} k$$

$$\therefore \frac{1}{z} = \frac{1}{3 \log_{10} k} = \frac{1}{3} \log_k 10$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} &= \log_k 5 + \log_k 2 - 3\left(\frac{1}{3} \log_k 10\right) \\ &= \log_k 5 + \log_k 2 - \log_k 10 \\ &= \log_k \frac{5 \times 2}{10} \\ &= \log_k 1 = 0 \end{aligned}$$

답 0

38

이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 실근이 $\log_{10} \alpha$, $\log_{10} \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_{10} \alpha + \log_{10} \beta = 3, (\log_{10} \alpha)(\log_{10} \beta) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore 2 \log_{\alpha^2} \beta + \frac{1}{3} \log_{\beta} \alpha^3 &= \log_{\alpha} \beta + \log_{\beta} \alpha \\ &= \frac{\log_{10} \beta}{\log_{10} \alpha} + \frac{\log_{10} \alpha}{\log_{10} \beta} \\ &= \frac{(\log_{10} \beta)^2 + (\log_{10} \alpha)^2}{(\log_{10} \alpha)(\log_{10} \beta)} \\ &= \frac{(\log_{10} \alpha + \log_{10} \beta)^2 - 2(\log_{10} \alpha)(\log_{10} \beta)}{(\log_{10} \alpha)(\log_{10} \beta)} \\ &= \frac{3^2 - 2 \times 1}{1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

답 ㉓

39

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{3})^{\log_2 12 - \log_2 3} = (\sqrt{3})^{\log_2 \frac{12}{3}} \\ &= (\sqrt{3})^{\log_2 4} = (\sqrt{3})^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (4\sqrt{2})^{-\log_2 \frac{\sqrt{3}}{3}} = (4\sqrt{2})^{\log_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}} \\ &= (4\sqrt{2})^{\log_2 \frac{3}{\sqrt{3}}} = (4\sqrt{2})^{\log_2 \sqrt{3}} \\ &= (\sqrt{3})^{\log_2 4\sqrt{2}} = (\sqrt{3})^{\log_2 2^{\frac{5}{2}}} \\ &= (\sqrt{3})^{\frac{5}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}} \\ &= 3^{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \log_4 2 + \log_9 3 \\ &= \log_{2^2} 2 + \log_{3^2} 3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

따라서 $1 < 3 < 3^{\frac{5}{4}}$ 이므로

$$C < A < B$$

답 ㉕

40

$$\log_a b = \frac{1}{5} \text{에서 } \log_b a = 5$$

$$\therefore \log_{b^5} a = \frac{1}{2} \log_b a = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

따라서 $\log_{b^5} a$ 의 정수 부분은 2이다.

답 2

41

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{3230} &= \log 3230^{-1} = -\log 3230 \\ &= -\log(32.3 \times 10^2) \\ &= -(\log 32.3 + 2) \\ &= -(1.5092 + 2) \\ &= -3.5092 \end{aligned}$$

답 ①

42

$$\begin{aligned} \log 6 + \log \sqrt{2} - \log 18 \\ &= \log(2 \times 3) + \log 2^{\frac{1}{2}} - \log(2 \times 3^2) \\ &= \log 2 + \log 3 + \frac{1}{2} \log 2 - (\log 2 + 2 \log 3) \\ &= \frac{1}{2} \log 2 - \log 3 \\ &= \frac{1}{2} \times 0.3010 - 0.4771 \\ &= -0.3266 \end{aligned}$$

답 ①

43

$$\begin{aligned} \log A = 1.2 \text{ 이므로} \\ \log \frac{1}{\sqrt[4]{A}} &= \log(\sqrt[4]{A})^{-1} = \log A^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \log A \\ &= -\frac{1}{4} \times 1.2 = -0.3 \\ &= -1 + 0.7 \end{aligned}$$

따라서 $\log \frac{1}{\sqrt[4]{A}}$ 의 정수 부분은 -1 , 소수 부분은 0.7 이므로 $a = -1, b = 0.7$
 $\therefore 100ab = 100 \times (-1) \times 0.7 = -70$

답 -70

44

9는 정수 부분이 한 자리인 수이므로 $\log 9$ 의 정수 부분은 0
 $\therefore f(9) = 0$
 99는 정수 부분이 두 자리인 수이므로 $\log 99$ 의 정수 부분은 1

$$\therefore f(99) = 1$$

999는 정수 부분이 세 자리인 수이므로 $\log 999$ 의 정수 부분은 2

$$\therefore f(999) = 2$$

$$\therefore f(9) + f(99) + f(999) = 0 + 1 + 2 = 3$$

답 3

45

50은 정수 부분이 두 자리인 수이므로 $\log 50$ 의 정수 부분은 1이다.

따라서 $\log 50$ 의 소수 부분 a 는

$$a = \log 50 - 1 = \log 50 - \log 10 = \log 5$$

$$\therefore 1000^a = 1000^{\log 5} = 5^{\log 1000} = 5^3 = 125$$

답 125

46

$$\log 3^{100} = 100 \log 3 = 100 \times 0.4771 = 47.71$$

따라서 $\log 3^{100}$ 의 정수 부분이 47이므로 3^{100} 은 48자리의 정수이다.

$$\therefore a = 48$$

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{2}\right)^{200} &= 200 \log \frac{1}{2} = 200 \log 2^{-1} \\ &= -200 \log 2 \\ &= -200 \times 0.3010 = -60.20 \\ &= -61 + 0.80 \end{aligned}$$

따라서 $\log \left(\frac{1}{2}\right)^{200}$ 의 정수 부분이 -61 이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{200}$ 을 소수로 나타내면 소수점 아래 61째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$$\therefore b = 61$$

$$\therefore a + b = 48 + 61 = 109$$

답 109

47

$$\begin{aligned} \log 200 &= \log(2 \times 10^2) = \log 2 + \log 10^2 \\ &= 2 + \log 2 \end{aligned}$$

이므로 $\log 200$ 의 정수 부분은 2이고 소수 부분은 $\log 2$ 이다.

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 2, $\log 2$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $2+\log 2=-a$, $2\log 2=b$ $\therefore a=-2-\log 2$
 $\therefore 2a+b=2(-2-\log 2)+2\log 2$
 $=-4-2\log 2+2\log 2=-4$

답 -4

48

$0.7781=0.3010+0.4771$
 $=\log 2+\log 3=\log 6$
 $\therefore \log x=3.7781$
 $=3+0.7781=\log 10^3+\log 6$
 $=\log(10^3 \times 6)=\log 6000$
 $\therefore x=6000$

답 6000

49

$\log x=-0.4260=-1+0.5740$
 $=-1+\log 3.75$
 $=\log 10^{-1}+\log 3.75$
 $=\log(10^{-1} \times 3.75)$
 $=\log 0.375$
 $\therefore x=0.375$

답 0.375

다른풀이 $\log x=-0.4260=-1+(1-0.4260)$
 $=-1+0.5740$

에서 $\log 3.75$ 와 소수 부분이 같으므로 x 는 3.75와 숫자 배열이 같고, 정수 부분이 -1이므로 x 는 소수점 아래 첫째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
 $\therefore x=0.375$

50

$\log_3 x=20$ 이므로 $x=3^{20}$
 $\therefore \log \frac{1}{x}=\log \frac{1}{3^{20}}=\log \left(\frac{1}{3}\right)^{20}=\log 3^{-20}$
 $=-20 \log 3=-20 \times 0.4771$
 $=-9.542=-10+0.458$

따라서 $a=0.458$ 이므로
 $1000a=458$

답 458

51

12는 정수 부분이 두 자리인 수이므로 $\log 12$ 의 정수 부분은 1이다.

$\therefore x=1$

따라서 $\log 12$ 의 소수 부분 y 는

$y=\log 12-1=\log 12-\log 10=\log \frac{6}{5}$
 $\therefore 10^x+10^{-y}=10^1+10^{-\log \frac{6}{5}}$
 $=10+10^{\log \frac{5}{6}}$
 $=10+\frac{5}{6}=\frac{65}{6}$

답 ⑤

52

A^{50} 이 67자리의 정수이므로 $\log A^{50}$ 의 정수 부분은 66이다.

즉 $66 \leq \log A^{50} < 67$ 이므로

$66 \leq 50 \log A < 67$

$\therefore \frac{66}{50} \leq \log A < \frac{67}{50}$

각 변에 20을 곱하면

$20 \times \frac{66}{50} \leq 20 \log A < 20 \times \frac{67}{50}$

$\therefore 26.4 \leq \log A^{20} < 26.8$

따라서 $\log A^{20}$ 의 정수 부분이 26이므로 A^{20} 은 27자리의 정수이다.

답 ②

53

처음 세균의 수를 A 라 하면

2시간 후의 세균의 수는 $3A$

4시간 후의 세균의 수는 3^2A

6시간 후의 세균의 수는 3^3A

⋮

48시간 후의 세균의 수는 $3^{24}A$

따라서 $x=3^{24}$ 이므로

$$\log x = 24 \log 3 = 24 \times 0.4771 = 11.4504$$

따라서 $\log x$ 의 정수 부분이 11이므로 x 는 12자리의 정수이다.

답 ②

54

$\left(\frac{3}{5}\right)^n$ 을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 15째 자리에 서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나면 $\log\left(\frac{3}{5}\right)^n$ 의 정수 부분은 -15 이다. 즉

$$-15 \leq \log\left(\frac{3}{5}\right)^n < -14$$

$$-15 \leq \log\left(\frac{6}{10}\right)^n < -14$$

$$-15 \leq n(\log 2 + \log 3 - 1) < -14$$

$$-15 \leq n(0.3010 + 0.4771 - 1) < -14$$

$$-15 \leq -0.2219n < -14$$

각 변을 -0.2219 로 나누면

$$\frac{14}{0.2219} < n \leq \frac{15}{0.2219}$$

$$\therefore 63.\times\times\times < n \leq 67.\times\times\times$$

따라서 자연수 n 은 64, 65, 66, 67의 4개이다.

답 4

55

이차방정식 $x^2 - 8x + 10 = 0$ 의 두 실근이 $\log a$, $\log b$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log a + \log b = 8, (\log a)(\log b) = 10$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a$$

$$= \frac{\log b}{\log a} + \frac{\log a}{\log b}$$

$$= \frac{(\log b)^2 + (\log a)^2}{(\log a)(\log b)}$$

$$= \frac{(\log a + \log b)^2 - 2(\log a)(\log b)}{(\log a)(\log b)}$$

$$= \frac{8^2 - 2 \times 10}{10} = \frac{22}{5}$$

답 $\frac{22}{5}$

56

$\log x^4$ 의 소수 부분과 $\log x^2$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\begin{aligned} \log x^4 - \log x^2 &= 4 \log x - 2 \log x \\ &= 2 \log x = (\text{정수}) \end{aligned}$$

$2 < \log x < 3$ 에서 $4 < 2 \log x < 6$ 이고, $2 \log x$ 는 정수이므로

$$2 \log x = 5, \log x = \frac{5}{2} \quad \therefore x = 10^{\frac{5}{2}}$$

답 ⑤

57

상품의 판매 가격이 P_1 일 때의 수요량이 D_1 이므로

$$\log D_1 = \log c - \frac{1}{3} \log P_1$$

상품의 판매 가격이 $4P_1$ 일 때의 수요량이 D_2 이므로

$$\log D_2 = \log c - \frac{1}{3} \log 4P_1$$

$$\therefore \log \frac{D_2}{D_1}$$

$$= \log D_2 - \log D_1$$

$$= \left(\log c - \frac{1}{3} \log 4P_1\right) - \left(\log c - \frac{1}{3} \log P_1\right)$$

$$= -\frac{1}{3}(\log 4P_1 - \log P_1)$$

$$= -\frac{1}{3} \log \frac{4P_1}{P_1} = -\frac{1}{3} \log 4$$

$$= \log 4^{-\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \frac{D_2}{D_1} = 4^{-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

답 ①

58

처음 물의 높이가 64 cm이고, 실험을 시작한 지 40분 후의 물의 높이가 16 cm이므로

$$k = \frac{C}{40}(\log 64 - \log 16)$$

$$k = \frac{C}{40} \times \log \frac{64}{16}, k = \frac{C}{40} \times \log 4$$

$$\therefore k = \frac{C}{20} \times \log 2 \quad \dots\dots ①$$

실험을 시작한 지 x 분 후의 물의 높이가 2 cm이므로

$$k = \frac{C}{x}(\log 64 - \log 2)$$

$$k = \frac{C}{x} \times \log \frac{64}{2}, k = \frac{C}{x} \times \log 32$$

$$\therefore k = \frac{C}{x} \times 5 \log 2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

동일한 흙의 투수계수(k)는 같은 실험 조건에서 일정하므로 \textcircled{A} , \textcircled{B} 에서

$$\frac{C}{20} \times \log 2 = \frac{C}{x} \times 5 \log 2$$

$$\frac{1}{20} = \frac{5}{x} \quad \therefore x = 20 \times 5 = 100$$

답 ②

59

(1) $\log 2^{15} = 15 \log 2 = 15 \times 0.3010 = 4.5150$

$\log 2^{15}$ 의 정수 부분이 4이므로 2^{15} 은 5자리의 정수이다.

$$\therefore a = 5$$

한편, $\log 2^{15}$ 의 소수 부분이 0.5150이고

$$\log 3 = 0.4771,$$

$$\log 4 = 2 \log 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020 \text{이므로}$$

$$\log 3 < 0.5150 < \log 4$$

$$\log 3 + 4 < 4.5150 < \log 4 + 4$$

$$\log(3 \times 10^4) < \log 2^{15} < \log(4 \times 10^4)$$

$$\therefore 3 \times 10^4 < 2^{15} < 4 \times 10^4$$

따라서 2^{15} 의 최고 자리의 숫자는 3이다.

$$\therefore b = 3$$

$$\therefore a - b = 5 - 3 = 2$$

(2) $\log(27^{100} \div 5^{200})$

$$= \log 27^{100} - \log 5^{200}$$

$$= 100 \log 3^3 - 200 \log \frac{10}{2}$$

$$= 300 \log 3 - 200(1 - \log 2)$$

$$= 300 \times 0.4771 - 200(1 - 0.3010)$$

$$= 3.33$$

$\log(27^{100} \div 5^{200})$ 의 정수 부분이 3이므로

$27^{100} \div 5^{200}$ 은 정수 부분이 4자리인 수이다.

$$\therefore a = 4$$

한편, $\log(27^{100} \div 5^{200})$ 의 소수 부분이 0.33이고

$\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ 이므로

$$\log 2 < 0.33 < \log 3$$

$$\log 2 + 3 < 3.33 < \log 3 + 3$$

$$\log(2 \times 10^3) < \log(27^{100} \div 5^{200}) < \log(3 \times 10^3)$$

$$\therefore 2 \times 10^3 < 27^{100} \div 5^{200} < 3 \times 10^3$$

따라서 $27^{100} \div 5^{200}$ 의 최고 자리의 숫자는 2이다.

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore ab = 4 \times 2 = 8$$

답 (1) 2 (2) 8

60

$\log z = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 < \alpha < 1$)라 하면 n, α 가 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = a \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$n\alpha = b \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\log \frac{1}{z} = -n - \alpha = (-1 - n) + (1 - \alpha) \text{에서}$$

$0 < 1 - \alpha < 1$ 이므로 $\log \frac{1}{z}$ 의 정수 부분은 $-1 - n$,

소수 부분은 $1 - \alpha$ 이다.

따라서 $-1 - n, 1 - \alpha$ 가 이차방정식

$$x^2 + ax + b - \frac{3}{2} = 0 \text{의 두 근이므로 근과 계수의 관계}$$

에 의하여

$$(-1 - n) + (1 - \alpha) = -a \quad \therefore n + \alpha = a$$

$$(-1 - n)(1 - \alpha) = b - \frac{3}{2}$$

$$\therefore -1 + \alpha - n + n\alpha = b - \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{C} \text{을 } \textcircled{A} \text{에 대입하여 정리하면 } -n + \alpha = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

이때 $0 < \alpha < 1$ 이고 n 은 정수이므로

$$-n + \alpha = -\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2}$$

$$\text{에서 } n = 1, \alpha = \frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 대입하면

$$a = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, b = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

답 $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$

61

$\log x$ 의 소수 부분을 a 라 하면

$$\log x = 3 + a \quad (0 \leq a < 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \sqrt{x} &= \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2}(3+a) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{a}{2} = 1 + \frac{1+a}{2} \end{aligned}$$

이때 $0 \leq a < 1$ 이므로 $\frac{1}{2} \leq \frac{1+a}{2} < 1$

따라서 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은 $\frac{1+a}{2}$ 이다.

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 $\frac{3}{4}$ 이므로

$$a + \frac{1+a}{2} = \frac{3}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{6}$$

따라서 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은

$$\frac{1+a}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{12}$$

답 ④

62

$\log x^3$ 과 $\log x^2$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\begin{aligned} \log x^3 + \log x^2 &= 3 \log x + 2 \log x \\ &= 5 \log x = (\text{정수}) \end{aligned}$$

이고 $\log x^3 \neq (\text{정수})$, $\log x^2 \neq (\text{정수})$

$\log x$ 의 정수 부분이 2이므로

$$2 < \log x < 3$$

($\because \log x = 2$ 이면 $\log x^3$, $\log x^2$ 도 정수가 되므로 $\log x \neq 2$)

각 변에 5를 곱하면

$$10 < 5 \log x < 15$$

$5 \log x$ 는 정수이므로

$$5 \log x = 11 \text{ 또는 } 5 \log x = 12 \text{ 또는 } 5 \log x = 13$$

$$\text{또는 } 5 \log x = 14$$

$$\therefore \log x = \frac{11}{5} \text{ 또는 } \log x = \frac{12}{5} \text{ 또는 } \log x = \frac{13}{5}$$

$$\text{또는 } \log x = \frac{14}{5}$$

따라서 $\log x$ 의 최댓값은 $\frac{14}{5}$ 이므로 $k = \frac{14}{5}$

$$\therefore 100k = 100 \times \frac{14}{5} = 280$$

답 280

63

밀폐된 용기 속의 온도가 30°C 일 때의 포화증기압이 P_1 이므로

$$\log P_1 = 9 - \frac{2200}{30+180}$$

밀폐된 용기 속의 온도가 40°C 일 때의 포화증기압이 P_2 이므로

$$\log P_2 = 9 - \frac{2200}{40+180}$$

$$\therefore \log \frac{P_2}{P_1} = \log P_2 - \log P_1$$

$$= \left(9 - \frac{2200}{40+180}\right) - \left(9 - \frac{2200}{30+180}\right)$$

$$= -10 + \frac{220}{21} = \frac{10}{21}$$

$$\therefore \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{10}{21}}$$

답 ③

64

$$f(2) = 16 \text{이므로 } a^2 = 16$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

따라서 $f(x) = 4^x$ 이므로

$$\frac{f(-1)f(3)}{f(1)} = \frac{4^{-1} \times 4^3}{4} = \frac{4^2}{4} = 4$$

답 4

65

① 치역은 $\{y \mid y > 1\}$ 이다. (거짓)

② x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다. (거짓)

$$\textcircled{3} y = 3^{2x-1} + 1 = 3^{2(x-\frac{1}{2})} + 1$$

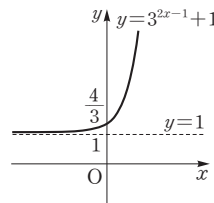
$$= 9^{x-\frac{1}{2}} + 1$$

이므로 $y = 3^{2x-1} + 1$ 의 그

래프는 $y = 9^x$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼,

y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (거짓)



- ④ 그래프의 점근선은 직선 $y=1$ 이다. (참)
 ⑤ $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭인 그래프는 $y=9^x$ 의 그래프이다. (거짓)

답 ④

66

$y=3^{-x+a}+b$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y=b$ 이므로 $b=-2$

$y=3^{-x+a}-2$ 의 그래프가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1=3^{-1+a}-2$$

$$3^{-1+a}=3, \quad -1+a=1 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore a+b=2+(-2)=0$$

답 ③

67

함수 $y=5^{x-1}-2$ 의 그래프의 점근선은 직선

$y=-2$ 이고, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$y=5^{x-1}-2$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다.

답 ④

68

(1) 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행 이동한 그래프의 식은 $y=3^{x-1}$ ㉠

㉠의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$y=3^{-x-1} \quad \text{..... ㉡}$$

㉡의 그래프가 점 $(2, k)$ 를 지나므로

$$k=3^{-2-1}=3^{-3}=\frac{1}{27}$$

(2) 함수 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=a^x \quad \therefore y=-a^x \quad \text{..... ㉢}$$

㉢의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 10만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-a^{x-2}+10 \quad \text{..... ㉣}$$

㉣의 그래프가 점 $(4, 1)$ 을 지나므로

$$1=-a^2+10$$

$$a^2=9 \quad \therefore a=3 (\because a>0)$$

답 (1) $\frac{1}{27}$ (2) 3

69

함수 $y=3^{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3^{2(x-m)}+n$$

$$y=3^{2x-2m}+n \quad \therefore y=3^{-2m} \cdot 3^{2x}+n$$

이 함수가 $y=\frac{1}{9} \cdot 3^{2x}-1$ 과 일치하므로

$$3^{-2m}=\frac{1}{9}, \quad n=-1 \quad \therefore m=1, \quad n=-1$$

$$\therefore m+n=0$$

답 0

70

함수 $y=3^x$ 의 그래프가 점 $(a, a), (b, \beta)$ 를 지나므로

$$3^a=a, \quad 3^b=\beta$$

그런데 $a\beta=27$ 이므로

$$a\beta=3^a \cdot 3^b=3^{a+b}=27$$

$$\therefore a+b=3$$

답 ③

71

$f(x+2)=a^{x+2}, f(x+1)=a^{x+1}$ 이므로

$f(x+2)=2f(x+1)+8f(x)$ 에서

$$a^{x+2}=2a^{x+1}+8a^x$$

$a^x > 0$ 이므로 양변을 a^x 으로 나누면

$$a^2=2a+8, \quad a^2-2a-8=0$$

$$(a+2)(a-4)=0 \quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=4$$

$$\therefore a=4 (\because a>0)$$

$$\therefore f(x)=4^x$$

$$\therefore f(3)=4^3=64$$

답 64

72

㉠. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x=4^{-x}$ 이므로 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프는

$y=4^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$$\text{㉡. } y=\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-(x-3)}=4^{x-3} \text{이므로}$$

$y = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$ 의 그래프는 $y = 4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = -\left(\frac{1}{4}\right)^x = -4^{-x}$ 이므로

$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ 의 그래프는 $y = 4^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄹ. $y = 2^{2x-1} = 2^{2(x-\frac{1}{2})} = 4^{x-\frac{1}{2}}$ 이므로 $y = 2^{2x-1}$ 의 그래프는 $y = 4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프를 평행이동하여 $y = 4^x$ 의 그래프와 겹칠 수 있는 함수는 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

73

$y = a^{2x-4} + 3$ 에서 $y - 3 = a^{2(x-2)}$ 이므로

$y = a^{2x-4} + 3$ 의 그래프는 $y = a^{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. 이때 $y = a^{2x}$ 의 그래프는 양수 a 의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$(0, 1) \xrightarrow[\text{각각 2, 3만큼 평행이동}]{x\text{축, }y\text{축의 방향으로}} (2, 4)$

따라서 $y = a^{2x-4} + 3$ 의 그래프는 양수 a 의 값에 관계없이 점 $(2, 4)$ 를 지난다.

$$\therefore \alpha = 2, \beta = 4$$

$$\therefore \alpha\beta = 8$$

답 ②

74

$y = 3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y = 3^{-x}$ ㉠

㉠의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 3^{-(x-a)} + b \quad \dots\dots ㉡$$

㉡의 그래프의 점근선이 직선 $y = -3$ 이므로 $b = -3$

또한 ㉡의 그래프가 원점, 즉 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 3^a - 3, 3^a = 3 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$$

답 ③

75

$f(b) = 3, f(c) = 6$ 이므로 $a^b = 3, a^c = 6$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{b+c}{2}\right) &= a^{\frac{b+c}{2}} = (a^{b+c})^{\frac{1}{2}} = (a^b a^c)^{\frac{1}{2}} \\ &= (3 \times 6)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ③

76

$$(1) A = \sqrt[4]{9} = 9^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$B = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = (3^{-1})^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}$$

$$C = \sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

이때 $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ 이고, 지수함수 $y = 3^x$ 은 x 의 값이

증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이므로

$$3^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{9} < \sqrt{27}$ 이므로 $B < A < C$

$$(2) A = 0.1^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{5}}$$

$$B = \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{3}} = \left\{\left(\frac{1}{10}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$C = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{2}}$$

이때 $\frac{2}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{2}$ 이고, 지수함수 $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ 은 x 의

값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이므로

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{5}} > \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $0.1^{\frac{2}{5}} > \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{2}}$ 이므로

$$A > B > C \quad \therefore C < B < A$$

답 (1) $B < A < C$ (2) $C < B < A$

77

그래프에서 $g(k) = 3$ 이고 $f(x) = 2^x$ 이라 하면

$f(x)$ 와 $g(x)$ 는 각각 서로의 역함수이므로

$$g(k)=3 \iff f(3)=k$$

$$f(3)=2^3=8 \quad \therefore k=8$$

답 8

78

$f(x)$ 와 $g(x)$ 는 각각 서로의 역함수이므로

$$g(8)=a, g(b)=1 \text{에서}$$

$$f(a)=8, f(1)=b$$

$$f(a)=\left(\frac{1}{3}\right)^{a-1}-1=8 \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{a-1}=9, 3^{-a+1}=3^2$$

$$-a+1=2 \quad \therefore a=-1$$

$$f(1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1}-1=0 \text{이므로 } b=0$$

$$\therefore a+b=-1+0=-1$$

답 -1

79

$$y=2^{x+1} \cdot 5^{1-x} = (2^x \cdot 2) \cdot \left(5 \cdot \frac{1}{5^x}\right) = 10 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $0 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y=2^{x+1} \cdot 5^{1-x}$ 은 $x=0$ 에서 최댓값 $2 \cdot 5=10$, $x=1$ 에서 최솟값 $2^2 \cdot 5^0=4$ 를 갖는다.

$$\therefore M=10, m=4$$

$$\therefore M-m=10-4=6$$

답 ④

80

$y=3^{-x}+b=\left(\frac{1}{3}\right)^x+b$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $a \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y=3^{-x}+b$ 는 $x=3$ 에서

최솟값을 갖고, 최솟값이 $\frac{1}{9}$ 이므로

$$3^{-3}+b=\frac{1}{27}+b=\frac{1}{9} \quad \therefore b=\frac{2}{27}$$

$a \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y=3^{-x}+b$ 는 $x=a$ 에서 최댓값

을 갖고, 최댓값이 $\frac{5}{27}$ 이므로

$$3^{-a}+\frac{2}{27}=\frac{5}{27}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^a=\frac{1}{9} \quad \therefore a=2$$

$$\text{답 } a=2, b=\frac{2}{27}$$

81

$$(1) y=-4x+2^{x+2}+1=-(2^x)^2+4 \cdot 2^x+1$$

$$2^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } -1 \leq x \leq 3 \text{에서}$$

$$2^{-1} \leq 2^x \leq 2^3 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq t \leq 8$$

이때 주어진 함수는

$$y=-t^2+4t+1=-(t-2)^2+5$$

따라서 $\frac{1}{2} \leq t \leq 8$ 일 때,

$$\text{함수 } y=-(t-2)^2+5$$

는 $t=2$ 에서 최댓값 5,

$t=8$ 에서 최솟값

$$-(8-2)^2+5=-31 \text{을}$$

갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값

의 합은

$$5+(-31)=-26$$

$$(2) y=4^x-4 \cdot 2^x+k=(2^x)^2-4 \cdot 2^x+k$$

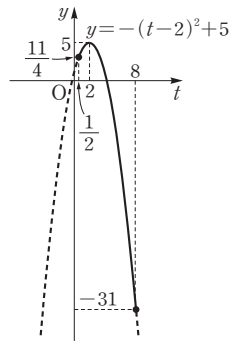
$$2^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 주어진 함수는}$$

$$y=t^2-4t+k=(t-2)^2+k-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $t>0$ 일 때, 함수 $\textcircled{1}$ 은 $t=2$ 에서 최솟값

$k-4$ 를 갖고, 최솟값이 2이므로

$$k-4=2 \quad \therefore k=6$$



답 (1) -26 (2) 6

82

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))$$

$$=a^{f(x)}$$

$$=a^{x^2-6x+3}$$

$a>1$ 이면 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 x^2-6x+3 이 최대일 때 최대가 되고, 최소일 때 최소가 된다.

$$x^2-6x+3=(x-3)^2-6 \text{이므로 } 1 \leq x \leq 4 \text{일 때,}$$

x^2-6x+3 은 $x=3$ 에서 최솟값 -6 , $x=1$ 에서 최댓

값 -2 를 갖는다.

따라서 $1 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 a^{-6} , $x=1$ 에서 최댓값 a^{-2} 을 갖는다.

그런데 최댓값이 27 이므로

$$a^{-2} = 27, a^2 = \frac{1}{27} < 1$$

이것은 $a > 1$ 임에 모순이다. 즉 $a > 1$ 이 아니다.

$$\therefore 0 < a < 1$$

$0 < a < 1$ 이므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $x^2 - 6x + 3$ 이 최
대일 때 최소가 되고, 최소일 때 최대가 된다.

따라서 $1 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $x=3$ 에서
최댓값 a^{-6} , $x=1$ 에서 최솟값 a^{-2} 을 갖는다.

그런데 최댓값이 27 이므로

$$a^{-6} = 27, a^6 = \frac{1}{27}, (a^2)^3 = \frac{1}{27}, a^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3} (\because 0 < a < 1)$$

따라서 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값은

$$a^{-2} = (a^2)^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

$$\therefore m = 3$$

답 ④

83

$$(1) y = 3^{x+k} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-k} = 3^{x+k} + 3^{-x+k}$$

$3^{x+k} > 0$, $3^{-x+k} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의
관계에 의하여

$$3^{x+k} + 3^{-x+k} \geq 2\sqrt{3^{x+k} \cdot 3^{-x+k}} = 2\sqrt{3^{2k}} = 2 \cdot 3^k$$

(단, 등호는 $3^{x+k} = 3^{-x+k}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

그런데 주어진 함수의 최솟값이 18 이므로

$$2 \cdot 3^k = 18, 3^k = 9$$

$$\therefore k = 2$$

$$(2) y = 16^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+2} = 2^{4x} + 2^{-4x-2}$$

$2^{4x} > 0$, $2^{-4x-2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의
관계에 의하여

$$2^{4x} + 2^{-4x-2} \geq 2\sqrt{2^{4x} \cdot 2^{-4x-2}} = 2\sqrt{2^{-2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

이때 등호는 $2^{4x} = 2^{-4x-2}$ 일 때 성립하므로

$$4x = -4x - 2, 8x = -2 \quad \therefore x = -\frac{1}{4}$$

따라서 주어진 함수는 $x = -\frac{1}{4}$ 에서 최솟값 1 을 갖
는다.

$$\therefore p = -\frac{1}{4}, q = 1$$

$$\therefore p + q = \frac{3}{4}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{3}{4}$

84

(1) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ 로 놓으면

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-5} \text{에서 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1 보다 작은 양수이므로

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 가 최대일 때 최소, $f(x)$ 가 최
소일 때 최대가 된다.

$$f(x) = -x^2 + 4x - 5 = -(x-2)^2 - 1 \text{이므로}$$

$1 \leq x \leq 4$ 일 때, $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 -1 ,
 $x=4$ 에서 최솟값 -5 를 갖는다.

따라서 $1 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 $x=2$ 에
서 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$, $x=4$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$
를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $32 + 2 = 34$

(2) $f(x) = x^2 - 2x - 2$ 로 놓으면

$$y = a^{x^2-2x-2} \text{에서 } y = a^{f(x)}$$

$y = a^{f(x)}$ 에서 $0 < a < 1$ 이므로 $y = a^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 가
최소일 때 최대가 된다.

$f(x) = x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$ 이므로 $f(x)$ 는
 $x=1$ 에서 최솟값 -3 을 갖는다.

따라서 함수 $y = a^{f(x)}$ 은 $x=1$ 에서 최댓값 a^{-3} 을 갖
고, 최댓값이 8 이므로

$$a^{-3} = 8, a^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

답 (1) 34 (2) $\frac{1}{2}$

85

(1) $3^x - 9\sqrt{3} = 0$ 에서 $3^x = 9\sqrt{3}$, $3^x = 3^{\frac{5}{2}}$

$$\therefore x = \frac{5}{2}$$

(2) $2^{2x} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ 에서 $2^{2x} = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}$, $2^{2x} = 2^{-\frac{5}{2}}$

$$2x = -\frac{5}{2} \quad \therefore x = -\frac{5}{4}$$

(3) $\frac{2^{x^2-2x}}{2^{x-1}} = 32$ 에서

$$2^{x^2-2x-(x-1)} = 32, \quad 2^{x^2-3x+1} = 2^5$$

$$x^2 - 3x + 1 = 5, \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

(4) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2+6} = \left(\frac{7}{5}\right)^{-2x^2-5x}$ 에서

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2+6} = \left\{ \left(\frac{5}{7}\right)^{-1} \right\}^{-2x^2-5x}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2+6} = \left(\frac{5}{7}\right)^{2x^2+5x}$$

$$x^3 + 6 = 2x^2 + 5x, \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x+2)(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

(5) $x^x = x^{2x+3}$ 에서

밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이다.

(i) $x^2 = 2x + 3$ 에서 $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 \quad (\because x > 0)$$

(ii) $x = 1$ 이면 $1^1 = 1^5$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x = 1$ 또는 $x = 3$

답 (1) $x = \frac{5}{2}$ (2) $x = -\frac{5}{4}$

(3) $x = -1$ 또는 $x = 4$

(4) $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

(5) $x = 1$ 또는 $x = 3$

86

$f(2x) = 2f(x+1) + 27$ 에서

$$3^{2x} = 2 \cdot 3^{x+1} + 27$$

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$$

$$(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t - 27 = 0, \quad (t+3)(t-9) = 0$$

$$\therefore t = 9 \quad (\because t > 0)$$

$$\text{즉 } 3^x = 9 \quad \therefore x = 2$$

답 2

87

$\frac{1}{4^x} - 3 \cdot \frac{1}{2^{x-2}} + 32 = 0$ 에서

$$2^{-2x} - 3 \cdot 2^{-x+2} + 32 = 0$$

$$(2^{-x})^2 - 3 \cdot 2^{-x} \cdot 2^2 + 32 = 0$$

$$\therefore (2^{-x})^2 - 12 \cdot 2^{-x} + 32 = 0$$

$2^{-x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 12t + 32 = 0, \quad (t-4)(t-8) = 0$$

$$\therefore t = 4 \text{ 또는 } t = 8$$

$$\text{즉 } 2^{-x} = 4 \text{ 또는 } 2^{-x} = 8$$

$$2^{-x} = 2^2 \text{ 또는 } 2^{-x} = 2^3$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -3$$

따라서 모든 근의 합은 $-2 + (-3) = -5$ 답 ②

88

$9^x - 11 \times 3^x + 28 = 0$ 에서 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 11t + 28 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(t-4)(t-7) = 0 \quad \therefore t = 4 \text{ 또는 } t = 7$$

방정식 $9^x - 11 \times 3^x + 28 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $3^\alpha, 3^\beta$ 이다.

$$\text{즉 } 3^\alpha = 4, \quad 3^\beta = 7 \text{ 또는 } 3^\alpha = 7, \quad 3^\beta = 4 \text{이므로}$$

$$9^\alpha + 9^\beta = (3^\alpha)^2 + (3^\beta)^2 = 4^2 + 7^2 = 65 \quad \text{답 ④}$$

89

$a^{2x} - a^x = 2$ 에서 $(a^x)^2 - a^x - 2 = 0$

$a^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - t - 2 = 0, \quad (t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

즉 $a^x = 2$ 이고 이때의 x 의 값이 $\frac{1}{7}$ 이므로

$$a^{\frac{1}{7}} = 2$$

$$\therefore a = (a^{\frac{1}{7}})^7 = 2^7 = 128$$

답 128

90

$4 \cdot 3^{2x} - 3^x - k = 0$ 에서

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$4t^2 - t - k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $4 \cdot 3^{2x} - 3^x - k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $\alpha + \beta = -4$ 이고, 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $3^\alpha, 3^\beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3^\alpha \cdot 3^\beta = -\frac{k}{4}$$

$$3^{\alpha+\beta} = -\frac{k}{4}, 3^{-4} = -\frac{k}{4} \quad (\because \alpha + \beta = -4)$$

$$\therefore k = -\frac{4}{81} \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

91

$9^x = 2 \cdot 3^{x+1} - 2k$ 에서 $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 2k = 0$

$$(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + 2k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t + 2k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{2}$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

따라서 $\textcircled{2}$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 2k > 0 \quad \therefore k < \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

또한 $\textcircled{2}$ 의 두 실근이 모두 양수이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\textcircled{2} \text{의 두 근의 합}) = 6 > 0$$

$$(\textcircled{2} \text{의 두 근의 곱}) = 2k > 0 \quad \therefore k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에서 } 0 < k < \frac{9}{2}$$

$$\text{답 } 0 < k < \frac{9}{2}$$

92

(1) $3^x + 3^{-x} = t$ 로 놓으면

$3^x > 0, 3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(단, 등호는 $3^x = 3^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

또한

$$9^x + 9^{-x} = (3^x)^2 + (3^{-x})^2 = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$$

이므로 $3(9^x + 9^{-x}) - (3^x + 3^{-x}) - 24 = 0$ 에서

$$3(t^2 - 2) - t - 24 = 0$$

$$3t^2 - t - 30 = 0$$

$$(t+3)(3t-10) = 0$$

$$\therefore t = \frac{10}{3} \quad (\because \textcircled{1} \text{에서 } t \geq 2)$$

$$\text{즉 } 3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3} \text{이므로}$$

$3^x = u$ ($u > 0$)로 놓으면

$$u + \frac{1}{u} = \frac{10}{3}, 3u^2 - 10u + 3 = 0$$

$$(3u-1)(u-3) = 0$$

$$\therefore u = \frac{1}{3} \text{ 또는 } u = 3$$

$$\text{즉 } 3^x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } 3^x = 3 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

(2) $2^x + 2^{-x} = t$ 로 놓으면

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(단, 등호는 $2^x = 2^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

또한

$$4^x + 4^{-x} = (2^x)^2 + (2^{-x})^2 = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$$

이므로 $2(4^x + 4^{-x}) - (2^x + 2^{-x}) - 6 = 0$ 에서

$$2(t^2 - 2) - t - 6 = 0$$

$$2t^2 - t - 10 = 0, (t+2)(2t-5) = 0$$

$$\therefore t = \frac{5}{2} \quad (\because \textcircled{1} \text{에서 } t \geq 2)$$

$$\text{즉 } 2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$2^x = u$ ($u > 0$)로 놓으면

$$u + \frac{1}{u} = \frac{5}{2}, 2u^2 - 5u + 2 = 0$$

$$(2u-1)(u-2) = 0 \quad \therefore u = \frac{1}{2} \text{ 또는 } u = 2$$

$$\text{즉 } 2^x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } 2^x = 2 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

답 (1) $x = -1$ 또는 $x = 1$

(2) $x = -1$ 또는 $x = 1$

93

$3^x = X, 3^y = Y (X > 0, Y > 0)$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} 3X + Y = 18 & \dots \textcircled{A} \\ \frac{XY}{3} = 9 & \dots \textcircled{B} \end{cases}$$

\textcircled{A} 에서 $Y = 18 - 3X$

이 식을 \textcircled{B} 에 대입하면

$$\frac{X(18 - 3X)}{3} = 9, 18X - 3X^2 = 27$$

$$X^2 - 6X + 9 = 0, (X - 3)^2 = 0$$

$$\therefore X = 3, Y = 9$$

$$3^x = 3, 3^y = 9$$

$$\therefore x = 1, y = 2$$

따라서 $a = 1, \beta = 2$ 이므로

$$a^2 + \beta^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

답 ②

94

10시간 후 미생물의 수가 처음의 16배가 되므로

$$10^{10a} = 16 \quad \dots \textcircled{A}$$

n 시간 후 미생물의 수가 처음의 64배가 되므로

$$10^{na} = 64 \quad \dots \textcircled{B}$$

$$16 = 2^4, 64 = 2^6 \text{이므로}$$

$$64 = 2^6 = (2^4)^{\frac{3}{2}} = 16^{\frac{3}{2}} = (10^{10a})^{\frac{3}{2}} (\because \textcircled{A})$$

$$= 10^{15a} \quad \dots \textcircled{C}$$

따라서 $\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 에서 $10^{na} = 10^{15a}$ 이므로

$$na = 15a \quad \therefore n = 15 (\because a > 0)$$

답 15

95

$T_1 = 1200, T = 960$ 이고, 1월부터 7월까지 6개월이 지났으므로 $t = 6$

이를 주어진 등식에 대입하면

$$960 = 1200 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{12}{5}k}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{12}{5}k} = \frac{960}{1200}, \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{12}{5}k} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{12}{5}k = 1 \quad \therefore k = \frac{5}{12}$$

답 $\frac{5}{12}$

96

(1) $2^{-5x+3} > (16\sqrt{2})^{-2x+1}$ 에서

$$2^{-5x+3} > (2^{\frac{9}{2}})^{-2x+1}, 2^{-5x+3} > 2^{-9x+\frac{9}{2}}$$

$$-5x+3 > -9x+\frac{9}{2}, 4x > \frac{3}{2}$$

$$\therefore x > \frac{3}{8}$$

(2) $(2\sqrt{2})^{x+1} \geq 8^{-10x-2}$ 에서

$$(2^{\frac{3}{2}})^{x+1} \geq (2^3)^{-10x-2}, 2^{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}} \geq 2^{-30x-6}$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \geq -30x - 6, \frac{63}{2}x \geq -\frac{15}{2}$$

$$\therefore x \geq -\frac{5}{21}$$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leq \left(\frac{1}{27}\right)^{x+2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ 에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leq \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}^{x+2} \times \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^x$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{7}{2}x+6}$$

$$2x \geq \frac{7}{2}x + 6, -\frac{3}{2}x \geq 6 \quad \therefore x \leq -4$$

(4) $x^{2x+5} > x^{3x-2} (x > 0)$ 에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$$2x + 5 < 3x - 2 \quad \therefore x > 7$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $x = 1$ 일 때

$1^7 > 1^1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때

$$2x + 5 > 3x - 2 \quad \therefore x < 7$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 7$

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $1 < x < 7$

답 (1) $x > \frac{3}{8}$ (2) $x \geq -\frac{5}{21}$

(3) $x \leq -4$ (4) $1 < x < 7$

97

$$4^x \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8x} \text{에서}$$

$$(2^2)^x \leq (2^{-\frac{1}{2}})^{8x}, 2^{2x} \leq 2^{-4x}$$

$$2x^2 \leq -4x$$

$$2x^2 + 4x \leq 0, 2x(x+2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 0$$

따라서 정수 x 의 최댓값은 0, 최솟값은 -2이므로

$$M=0, m=-2$$

$$\therefore M+m=0+(-2)=-2$$

답 -2

98

(i) $48 \leq 3^{2x} + 21$ 에서

$$27 \leq 3^{2x}, 3^3 \leq 3^{2x}$$

$$3 \leq 2x \quad \therefore x \geq \frac{3}{2}$$

(ii) $3^{2x} + 21 \leq 4 \times 3^{x+1} - 6$ 에서

$$3^{2x} - 4 \times 3^{x+1} + 27 \leq 0$$

$$\therefore (3^x)^2 - 12 \times 3^x + 27 \leq 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 12t + 27 \leq 0, (t-3)(t-9) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq t \leq 9$$

즉 $3 \leq 3^x \leq 9$ 이므로 $3^1 \leq 3^x \leq 3^2$

$$\therefore 1 \leq x \leq 2$$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 이므로 정수 x 는 2의 1개이다.

답 ①

99

$$(2^x - 32) \left(\frac{1}{3^x} - 27\right) > 0 \text{에서}$$

$$2^x - 32 > 0, \frac{1}{3^x} - 27 > 0 \text{ 또는 } 2^x - 32 < 0, \frac{1}{3^x} - 27 < 0$$

(i) $2^x - 32 > 0, \frac{1}{3^x} - 27 > 0$ 일 때

$$2^x > 32 \text{에서 } 2^x > 2^5$$

$$\therefore x > 5 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\frac{1}{3^x} > 27, \text{ 즉 } \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \text{에서}$$

$$x < -3 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

(ii) $2^x - 32 < 0, \frac{1}{3^x} - 27 < 0$ 일 때

$$2^x < 32 \text{에서 } 2^x < 2^5 \quad \therefore x < 5 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\frac{1}{3^x} < 27, \text{ 즉 } \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \text{에서}$$

$$x > -3 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉢, ㉣에서 $-3 < x < 5$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $-3 < x < 5$ 이므로 정수 x 는 -2, -1, 0, ..., 3, 4의 7개이다.

답 ①

100

$$a \times 36^x - b \times 6^x + 6 \leq 0 \text{에서}$$

$$a \times (6^x)^2 - b \times 6^x + 6 \leq 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$6^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$at^2 - bt + 6 \leq 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠의 해가 $-1 \leq x \leq 1$ 이므로 ㉡의 해는

$$\frac{1}{6} \leq t \leq 6 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉢을 해로 갖고 t^2 의 계수가 a 인 이차부등식은

$$a\left(t - \frac{1}{6}\right)(t - 6) \leq 0 \quad \therefore at^2 - \frac{37}{6}at + a \leq 0$$

따라서 $-b = -\frac{37}{6}a, 6 = a$ 이므로

$$a=6, b=37$$

$$\therefore a+b=6+37=43$$

답 43

101

(i) $3^{2x+2} - 82 \times 3^x + 9 = 0$ 에서

$$9 \times (3^x)^2 - 82 \times 3^x + 9 = 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$9t^2 - 82t + 9 = 0, (9t-1)(t-9) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{9} \text{ 또는 } t = 9$$

즉 $3^x = \frac{1}{9}$ 또는 $3^x = 9$ 이므로

$x = -2$ 또는 $x = 2$

(ii) $(\frac{1}{4})^x + 2 \times (\frac{1}{2})^x > 8$ 에서

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^x \right\}^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 8 > 0$$

$(\frac{1}{2})^x = u$ ($u > 0$)로 놓으면

$$u^2 + 2u - 8 > 0, (u+4)(u-2) > 0$$

$\therefore u < -4$ 또는 $u > 2$

그런데 $u > 0$ 이므로 $u > 2$

$$\text{즉 } \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2 \text{이므로 } \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \therefore x < -1$$

(i), (ii)에서 $A \cap B = \{-2\}$

따라서 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은 -2 이다.

답 -2

102

(1) 부등식 $x^2 - (2^{k+1} - 4)x + 2^k > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 이차방정식

$x^2 - (2^{k+1} - 4)x + 2^k = 0$ 의 판별식 D 에 대하여

$$D < 0 \text{이어야 하므로 } \frac{D}{4} = (2^k - 2)^2 - 2^k < 0$$

$$2^{2k} - 5 \times 2^k + 4 < 0$$

$2^k = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 5t + 4 < 0, (t-1)(t-4) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 4$$

$$\text{즉 } 1 < 2^k < 4 \text{이므로 } 2^0 < 2^k < 2^2$$

$$\therefore 0 < k < 2$$

(2) $4^x - 2^{x+3} + k + 1 > 0$ 에서 $(2^x)^2 - 8 \times 2^x + k + 1 > 0$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 8t + k + 1 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(t) = t^2 - 8t + k + 1 = (t-4)^2 + k - 15$ 로 놓으면

$t > 0$ 인 모든 t 에 대하여

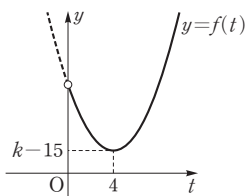
부등식 $\textcircled{1}$, 즉

$f(t) > 0$ 이 성립할 필요

충분조건은 $t > 0$ 에

서 $f(t)$ 의 최솟값이

$f(4)$ 이므로 오른쪽 그



림과 같이 $f(4) > 0$ 이다.

$$\text{즉 } f(4) = k - 15 > 0$$

$$\therefore k > 15$$

답 (1) $0 < k < 2$ (2) $k > 15$

103

오른쪽 그림에서 두 곡선

$y = 2^x, y = 2^{x-2}$ 과 두 직선

$y = 1, y = 3$ 으로 둘러싸인 부

분의 넓이는 $A + C$ 이다.

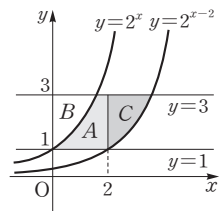
그런데 $y = 2^{x-2}$ 의 그래프는

$y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 2만큼 평행이동한 것이므로 B 와 C 의 넓이는 같

다. 즉 $A + C = A + B$

따라서 구하는 넓이는 $2 \times 2 = 4$



답 4

104

$3^x > 0, 3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $3^x = 3^{-x}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립)

따라서 $3^x + 3^{-x}$ 의 최솟값은 2이다.

그런데 함수 $f(x) = \frac{6}{3^x + 3^{-x}}$ 은 $3^x + 3^{-x}$ 이 최소일 때

최대가 되므로 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{6}{2} = 3$ 이다.

답 3

105

$2^x + 2^{-x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $2^x = 2^{-x}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립)

$$\therefore t \geq 2$$

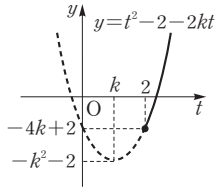
또한 $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로

함수 $y = 4^x + 4^{-x} - 2k(2^x + 2^{-x})$ 에서

$$y = t^2 - 2 - 2kt$$

$$= (t-k)^2 - k^2 - 2 \dots \textcircled{1}$$

이때 $k < 2$ 이므로 $t \geq 2$ 일 때,
함수 ①은 오른쪽 그림과 같
이 $t=2$ 에서 최솟값 $-4k+2$
를 갖는다. 그런데 최솟값이 -2 이므로
 $-4k+2 = -2$



$$\therefore k=1$$

답 1

106

$x+y=3$ 에서 $3^{x+y} = 3^x \cdot 3^y = 27$
 $3^x = X, 3^y = Y (X > 0, Y > 0)$ 로 놓으면

$$\begin{cases} XY=27 & \dots \textcircled{1} \\ X+Y=12 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$X=3, Y=9 \text{ 또는 } X=9, Y=3$$

$$\text{즉 } 3^\alpha = 3, 3^\beta = 9 \text{ 또는 } 3^\alpha = 9, 3^\beta = 3$$

$$\therefore \alpha=1, \beta=2 \text{ 또는 } \alpha=2, \beta=1$$

$$\therefore \alpha\beta=2$$

답 2

107

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} > (\sqrt{2})^{kx} \text{에서 } (2^{-2})^{x^2} > (2^{\frac{1}{2}})^{kx}$$

$$2^{-2x^2} > 2^{\frac{1}{2}kx}$$

$$-2x^2 > \frac{1}{2}kx, 2x^2 + \frac{1}{2}kx < 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}x(4x+k) < 0 \dots \textcircled{1}$$

그런데 k 가 자연수이므로 ①의 해는

$$-\frac{k}{4} < x < 0$$

이를 만족시키는 정수 x 의 개수가 3이므로 정수 x 는

$$-3, -2, -1 \text{이다. 즉}$$

$$-4 \leq -\frac{k}{4} < -3 \quad \therefore 12 < k \leq 16$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 16, 최솟값은 13이므로

$$M=16, m=13$$

$$\therefore M+m=16+13=29$$

답 29

108

$3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$9^x - 2k \times 3^x + 16 \geq 0 \text{에서}$$

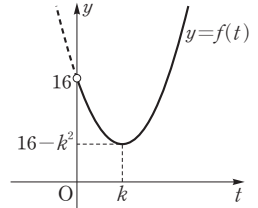
$$t^2 - 2kt + 16 \geq 0 \dots \textcircled{1}$$

$f(t) = t^2 - 2kt + 16 = (t-k)^2 + 16 - k^2$ 로 놓으면

$t > 0$ 인 모든 t 에 대하여 부등식 ①, 즉 $f(t) \geq 0$ 이 성립할 필요충분조건은

(i) $k > 0$ 일 때

$t > 0$ 에서 $f(t)$ 의 최솟
값이 $f(k)$ 이므로 오른
쪽 그림과 같이
 $f(k) \geq 0$ 이다.



$$\text{즉 } f(k) = 16 - k^2 \geq 0$$

$$(k+4)(k-4) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq k \leq 4$$

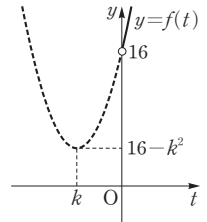
그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 4$

(ii) $k = 0$ 일 때

임의의 양수 t 에 대하여 $f(t) = t^2 + 16 \geq 0$ 이므로
부등식이 성립한다.

(iii) $k < 0$ 일 때

오른쪽 그림과 같이
 $f(0) = 16 \geq 0$ 이므로 임의의
양수 t 에 대하여 부등식이
성립한다.



(i) ~ (iii)에서 구하는 k 의 값의
범위는 $k \leq 4$

답 $k \leq 4$

109

미생물 A, B를 각각 10마리씩 동시에 배양했을 때, n
주 후 미생물 A, B의 수의 합이 2720마리 이상이 된
다고 하면

$$10 \cdot 2^n + 10 \cdot 4^n \geq 2720$$

$$2^n + 4^n \geq 272 \quad \therefore (2^n)^2 + 2^n - 272 \geq 0$$

$2^n = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 272 \geq 0, (t+17)(t-16) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -17 \text{ 또는 } t \geq 16$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t \geq 16$

$$\text{즉 } 2^n \geq 16 \quad \therefore n \geq 4$$

따라서 미생물 A, B의 수의 합이 2720마리 이상이 되는 것은 최소 4주 후이다.

$$\therefore m=4$$

답 4

110

$$\begin{aligned} f(27) &= \log_3 27 + k \log_{27} 81 = 3 + k \log_3 3^4 \\ &= 3 + \frac{4}{3}k \end{aligned}$$

$$f(9) = \log_3 9 + k \log_9 81 = 2 + 2k$$

$f(27) = f(9)$ 이므로

$$3 + \frac{4}{3}k = 2 + 2k, \quad \frac{2}{3}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

111

②, ④ $y = \log_3(x-5) + 2$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 치역은 실수 전체의 집합이다. (참)

③ $y = \log_3(x-5) + 2$ 에서 $y-2 = \log_3(x-5)$

$$3^{y-2} = x-5 \quad \therefore x = 3^{y-2} + 5$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 함수 $y = \log_3(x-5) + 2$ 의 역함수는

$$y = 3^{x-2} + 5 \text{ (거짓)}$$

⑤ 밑 3이 1보다 크므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다. (참)

답 ③

112

함수 $y = \log_2(x-a) + b$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x=a$ 이므로

$$a = -2$$

$$\therefore y = \log_2(x+2) + b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 그래프가 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \log_2 2 + b \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore ab = (-2) \times (-1) = 2$$

답 2

113

$$\begin{aligned} y &= \log_3\left(\frac{x}{9} - 1\right) = \log_3\left\{\frac{1}{9}(x-9)\right\} \\ &= \log_3 \frac{1}{9} + \log_3(x-9) = \log_3(x-9) - 2 \end{aligned}$$

따라서 함수 $y = \log_3\left(\frac{x}{9} - 1\right)$ 의 그래프는 함수

$y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 9만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore m=9, n=-2$$

$$\therefore 10(m+n) = 10 \times \{9 + (-2)\} = 70$$

답 70

114

$$\neg. y = \log_{\frac{1}{2}} 4x = \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}} x = -2 - \log_2 x$$

따라서 $y = \log_{\frac{1}{2}} 4x$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하여 만들 수 있다.

$$\cup. y = \log_2 \sqrt{x} = \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 x$$

따라서 $y = \log_2 \sqrt{x}$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 만들 수 없다.

ㄷ. $y = 2^x$ 은 $y = \log_2 x$ 의 역함수이므로 $y = 2^{x-1}$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동하여 만들 수 있다.

$$\kappa. y = \log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x \text{에서}$$

$$-y = \log_2 x$$

따라서 $y = \log_2 \frac{1}{x}$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하여 만들 수 있다.

따라서 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 만들 수 있는 그래프의 식은 \neg , \cup , κ 이다.

답 \neg, \cup, κ

115

$$A = 2 \log_{0.1} 3\sqrt{3} = \log_{0.1} (3\sqrt{3})^2 = \log_{0.1} 27$$

$$B = \log \frac{1}{25} = \log_{10} 25^{-1} = \log_{10^{-1}} 25 = \log_{0.1} 25$$

$$C = \log_{0.1} 3 - 1 = \log_{0.1} 3 - \log_{0.1} 0.1 = \log_{0.1} \frac{3}{0.1}$$

$$= \log_{0.1} 30$$

이때 $25 < 27 < 30$ 이고, 로그함수 $y = \log_{0.1} x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이므로 $\log_{0.1} 30 < \log_{0.1} 27 < \log_{0.1} 25$
 $\therefore C < A < B$

답 ④

116

$$y = g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x+1}$$

함수 $y = 2^{x+1}$ 은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$$y = 2^{x+1} \text{에서 로그의 정의에 의하여 } \log_2 y = x + 1$$

$$\therefore x = \log_2 y - 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \log_2 x - 1$$

답 $y = \log_2 x - 1$

117

오른쪽 그림에서 $\overline{AB} = 2$

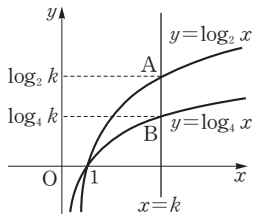
이므로

$$\log_2 k - \log_4 k = 2$$

$$\log_2 k - \frac{1}{2} \log_2 k = 2$$

$$\frac{1}{2} \log_2 k = 2, \log_2 k = 4$$

$$\therefore k = 2^4 = 16$$



답 16

118

$y = \log_2 x + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_2(x - a) + 1 + b \text{이므로}$$

$$f(x) = \log_2(x - a) + 1 + b$$

$$f(7) = 0, f(11) = 1 \text{이므로}$$

$$\log_2(7 - a) + 1 + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2(11 - a) + 1 + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면

$$\log_2(11 - a) - \log_2(7 - a) = 1$$

$$\log_2 \frac{11 - a}{7 - a} = 1$$

$$2 = \frac{11 - a}{7 - a} \quad \therefore a = 3$$

$a = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\log_2 4 + 1 + b = 0 \quad \therefore b = -3$$

$$\therefore a + b = 3 + (-3) = 0$$

답 0

119

$$A = \log_2 a$$

$$B = \log_2 \frac{1}{a} = \log_2 a^{-1} = -\log_2 a$$

$$C = \log_a 2 = \frac{1}{\log_2 a}$$

이때 $1 < a < 2$ 이고, 로그함수 $y = \log_2 x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이므로

$$\log_2 1 < \log_2 a < \log_2 2$$

$$\therefore 0 < \log_2 a < 1$$

따라서 $-1 < -\log_2 a < 0, \frac{1}{\log_2 a} > 1$ 이므로

$$0 < A < 1, -1 < B < 0, C > 1$$

$$\therefore B < A < C$$

답 ③

120

두 함수 $y = 100^{kx}, y = \frac{k}{288} \log x$ 의 그래프가 직선

$y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y = 100^{kx},$

$y = \frac{k}{288} \log x$ 는 각각 서로의 역함수이다.

$y = 100^{kx}$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$kx = \log_{100} y, kx = \log_{10^2} y$$

$$kx = \frac{1}{2} \log y \quad \therefore x = \frac{1}{2k} \log y \quad (\because k < 0)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 함수 $y = 100^{kx}$ 의 역함수는

$$y = \frac{1}{2k} \log x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 이 $y = \frac{k}{288} \log x$ 와 일치하므로

$$\frac{1}{2k} = \frac{k}{288}, 2k^2 = 288, k^2 = 144$$

$$\therefore k = -12 (\because k < 0)$$

답 -12

121

사각형 ABCD는 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로 $\overline{CD} = 4$ 이고, 점 C의 x 좌표를 k 라 하면

$$\log_2 k = 4 \quad \therefore k = 2^4 = 16$$

$\overline{BC} = 4$ 이므로 점 B의 x 좌표는 $16 - 4 = 12$

$$\therefore \overline{BE} = \log_2 12 = \log_2 (2^2 \times 3)$$

$$= 2 + \log_2 3$$

답 ③

122

점 A의 y 좌표가 1이므로 점 A의 x 좌표를 a 라 하면

$$1 = \log_2 a \quad \therefore a = 2 \quad \therefore A(2, 1)$$

점 B의 x 좌표는 2이므로 점 B의 y 좌표는 $2^2 = 4$

$$\therefore B(2, 4)$$

점 C의 y 좌표는 4이므로 점 C의 x 좌표를 c 라 하면

$$4 = \log_2 c \quad \therefore c = 2^4 = 16 \quad \therefore C(16, 4)$$

점 D의 x 좌표는 16이므로 점 D의 y 좌표는 2^{16}

답 2^{16}

123

$y = g(x)$ 의 그래프와 $y = \log_2(x-1)$ 의 그래프가 직

선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 $y = g(x)$ 는

$y = \log_2(x-1)$ 의 역함수이다.

즉 $y = \log_2(x-1)$ 에서 $2^y = x-1$

$$\therefore x = 2^y + 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \log_2(x-1)$ 의 역함수는

$$y = 2^x + 1$$

$$\therefore g(x) = 2^x + 1$$

$y = g(x)$ 의 그래프가 점 P(2, b)를 지나므로

$$b = 2^2 + 1 = 5$$

$y = \log_2(x-1)$ 의 그래프가 점 Q(a , b), 즉

Q(a , 5)를 지나므로

$$5 = \log_2(a-1)$$

$$a-1 = 2^5 \quad \therefore a = 33$$

$$\therefore a+b = 33+5 = 38$$

답 38

124

점 D의 y 좌표는 $\log_2 2 = 1$

$$\therefore D(0, 1)$$

점 F의 y 좌표는 $\log_2 16 = 4$

$$\therefore F(0, 4)$$

점 E가 선분 DF를 1:2로 내분하는 점이므로

$$E(0, 2)$$

따라서 점 B의 x 좌표를 a 라 하면

$$\log_2 a = 2 \text{에서 } a = 4$$

즉 점 B의 x 좌표는 4이다.

답 4

125

$y = \log_2(x+1) + 2$ 의 그래프는 $y = \log_2(x+1)$ 의

그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

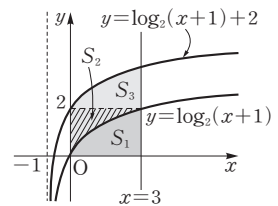
따라서 오른쪽 그림에서

$$S_1 = S_3 \text{이므로}$$

구하는 넓이는

$$S_2 + S_3 = S_2 + S_1$$

$$= 3 \times 2 = 6$$



답 6

126

$f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x^2 = -\log_{3^{-1}} x^2 = \log_3 x^2$ 의 밑 3이 1

보다 크므로 $f(x)$ 는 x^2 이 최대일 때 최대가 된다.

즉 $21 \leq x \leq 27$ 일 때, $f(x)$ 는 $x=27$ 에서 최댓값

$f(27) = \log_3 27^2 = 6$ 을 갖는다.

$$\therefore M = 6$$

한편, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-18) + 2$ 의 밑 $\frac{1}{3}$ 이 1보다 작

은 양수이므로 $g(x)$ 는 x 가 최대일 때 최소가 된다. 즉

$21 \leq x \leq 27$ 일 때, $g(x)$ 는 $x=27$ 에서 최솟값

$g(27) = \log_{\frac{1}{3}} 9 + 2 = 0$ 을 갖는다.

$\therefore m = 0$

$\therefore M + m = 6$

답 6

127

$y = \log_2(x+3) - 1$ 은 밑 2가 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이다.

따라서 $1 \leq x \leq 5$ 일 때, 함수 $y = \log_2(x+3) - 1$ 은 $x=1$ 에서 최솟값 $\log_2 4 - 1 = 1$,

$x=5$ 에서 최댓값 $\log_2 8 - 1 = 2$ 를 갖는다.

$\therefore M = 2, m = 1$

$\therefore Mm = 2 \times 1 = 2$

답 2

128

$y = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) + k$ 는 밑이 1보다 작은 양수이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) + k$ 는 $x = -2$ 에서 최댓값 1을 가지므로

$\log_{\frac{1}{2}}(-2+3) + k = 1 \quad \therefore k = 1$

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) + 1$ 은 $x=1$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}}(1+3) + 1 = \log_{\frac{1}{2}} 4 + 1$

$= -2 + 1 = -1$

을 갖는다.

답 ①

129

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 3)$ 의 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작은 양수이므로 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x^2 - 2x + 3$ 이 최소일 때 최대가 된다.

이때 $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ 이므로 $x^2 - 2x + 3$ 은 $x=1$ 에서 최솟값 2를 갖는다.

따라서 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ 을 갖는다.

답 -1

130

$f(x) = x^2 - 4x + 8$ 로 놓으면 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 8)$ 에서 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$

$y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 의 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작은 양수이므로 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 는 $f(x)$ 가 최대일 때 최소가 된다.

따라서 $1 \leq x \leq 4$ 일 때,

$f(x) = x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 8을 가지므로 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{2^{-1}} 2^3 = -3$

을 갖는다.

답 ②

131

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x + 3y \geq 2\sqrt{3xy}$ (단, 등호는 $x = 3y = 100$ 일 때 성립)

$200 \geq 2\sqrt{3xy} \quad (\because x + 3y = 200)$

$\sqrt{3xy} \leq 100 \quad \therefore 3xy \leq 10000$

$\therefore \log 3x + \log y = \log 3xy \leq \log 10000 = 4$

따라서 $\log 3x + \log y$ 의 최댓값은 4이다.

답 ④

132

$y = \log_a(x+1) + \log_a(3-x)$ 가 정의되는 x 의 값의 범위는

$x+1 > 0, 3-x > 0$

$\therefore -1 < x < 3$

이때 주어진 함수는

$y = \log_a(x+1) + \log_a(3-x)$

$= \log_a(x+1)(3-x)$

$= \log_a(-x^2 + 2x + 3)$

$= \log_a\{-(x-1)^2 + 4\}$

..... ㉠

(i) $a > 1$ 이면

㉠은 $-(x-1)^2 + 4$ 가 최소일 때 최소가 된다.

그러나 $-1 < x < 3$ 일 때, $-(x-1)^2 + 4$ 의 최솟값은 존재하지 않으므로 ㉠의 최솟값도 존재하지 않는다.

(ii) $0 < a < 1$ 이면

⊖은 $-(x-1)^2+4$ 가 최대일 때 최소가 된다.
 $-1 < x < 3$ 일 때, $-(x-1)^2+4$ 는 $x=1$ 에서 최
 댓값 4를 가지므로 ⊖의 최솟값은 $\log_a 4$ 이다.
 그런데 최솟값이 -2 이므로 $\log_a 4 = -2$
 $a^{-2} = 4, a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

133

$$y = (\log_2 x)^2 + a \log_2 x + 2$$

$$= (\log_2 x)^2 + \frac{a}{2} \log_2 x + 2$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = t^2 + \frac{a}{2}t + 2 \quad \dots \dots \text{⊖}$$

따라서 ⊖이 $x = \frac{1}{4}$, 즉 $t = \log_2 \frac{1}{4} = -2$ 에서 최솟값
 b 를 가지므로 ⊖은 $y = (t+2)^2 + b$

$$\therefore y = t^2 + 4t + 4 + b$$

따라서 $\frac{a}{2} = 4, 2 = 4 + b$ 이므로

$$a = 8, b = -2$$

$$\therefore a + b = 8 + (-2) = 6$$

답 6

134

$$y = (\log_3 3x) \left(\log_3 \frac{9}{x} \right)$$

$$= (\log_3 3 + \log_3 x) (\log_3 9 - \log_3 x)$$

$$= (1 + \log_3 x) (2 - \log_3 x)$$

$$= -(\log_3 x)^2 + \log_3 x + 2$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = -t^2 + t + 2$$

$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

⊖은 $t = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

따라서 ⊖은 $t = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

답 $\frac{9}{4}$

참고 주어진 함수는 $\log_3 x = \frac{1}{2}$, 즉 $x = \sqrt{3}$ 에서 최댓

값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

135

$$\log_3 \left(x + \frac{1}{y}\right) + \log_3 \left(y + \frac{4}{x}\right)$$

$$= \log_3 \left\{ \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{4}{x}\right) \right\}$$

$$= \log_3 \left(xy + \frac{4}{xy} + 5\right) \quad \dots \dots \text{⊖}$$

⊖의 밑 3이 1보다 크므로 ⊖은 $xy + \frac{4}{xy} + 5$ 가 최소
 일 때 최소가 된다.

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계
 에 의하여

$$xy + \frac{4}{xy} + 5 \geq 2\sqrt{xy \times \frac{4}{xy}} + 5 = 9$$

(단, 등호는 $xy = 2$ 일 때 성립)

따라서 $xy + \frac{4}{xy} + 5$ 의 최솟값이 9이므로

$$\log_3 \left(xy + \frac{4}{xy} + 5\right) \text{의 최솟값은 } \log_3 9 = 2$$

답 2

136

$a > 1, b > 1$ 이므로 $\log_a b > 0, \log_b a > 0$

따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \log_a b + \log_b a &= \log_a b + \frac{1}{\log_a b} \\ &\geq 2\sqrt{\log_a b \times \frac{1}{\log_a b}} \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

(단, 등호는 $\log_a b = \frac{1}{\log_a b}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

답 $\sqrt{2}$

137

$y = x^{4-\log x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log y = \log x^{4-\log x} = (4 - \log x) \log x$$

$$= -(\log x)^2 + 4 \log x$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$1 \leq x \leq 1000 \text{에서 } \log 1 \leq \log x \leq \log 1000$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 3$$

이때 주어진 함수는

$\log y = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$
 따라서 $0 \leq t \leq 3$ 일 때, $\log y$ 는 $t=2$ 에서 최댓값 4,
 $t=0$ 에서 최솟값 0을 가지므로
 y 의 최댓값은 10^4 , 최솟값은 $10^0=1$ 이다.
 $\therefore M=10000, m=1$
 $\therefore Mm=10000$

답 10000

138

$y=16x^{-6+\log_2 x^3}$ 의 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취
 하면

$$\begin{aligned}
 \log_2 y &= \log_2 (16x^{-6+\log_2 x^3}) \\
 &= \log_2 16 + \log_2 x^{-6+\log_2 x^3} \\
 &= 4 + (-6 + 3 \log_2 x) \log_2 x \\
 &= 3(\log_2 x)^2 - 6 \log_2 x + 4
 \end{aligned}$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$1 \leq x \leq 4 \text{에서 } \log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 4$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 2$$

이때 주어진 함수는

$$\log_2 y = 3t^2 - 6t + 4 = 3(t-1)^2 + 1$$

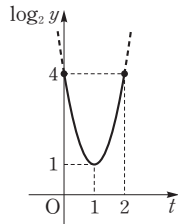
따라서 $0 \leq t \leq 2$ 일 때, $\log_2 y$ 는

$t=1$ 에서 최솟값 1,

$t=0$ 또는 $t=2$ 에서 최댓값 4를 가
 지므로 y 의 최솟값은 $2^1=2$, 최댓
 값은 $2^4=16$ 이다.

$$\therefore M=16, m=2$$

$$\therefore M+m=18$$



답 18

139

(1) 진수의 조건에서 $-5x+2 > 0$

$$\therefore x < \frac{2}{5} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\log_3(-5x+2) = 3$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$-5x+2=27, -5x=25$$

$$\therefore x = -5 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는

$$x = -5$$

(2) 진수의 조건에서 $x-4 > 0, x-2 > 0$

$$\therefore x > 4 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$\log_2(x-4) = \log_4(x-2)$ 에서

$$\log_4(x-4)^2 = \log_4(x-2)$$

양변의 밑이 4로 같으므로

$$(x-4)^2 = x-2$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0, (x-3)(x-6) = 0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=6 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉢, ㉣에서 구하는 해는

$$x=6$$

(3) 진수의 조건에서 $x > 0$ \dots\dots \text{㉤}

$\log_2 x - \log_4 x = 3(\log_2 x)(\log_8 x)$ 에서

$$\log_2 x - \log_2 x = 3(\log_2 x)(\log_2 x)$$

$$\log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 x = 3(\log_2 x) \left(\frac{1}{3} \log_2 x \right)$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x = (\log_2 x)^2$$

$$\therefore 2(\log_2 x)^2 - \log_2 x = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } 2t^2 - t = 0$$

$$t(2t-1) = 0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2}$$

즉 $\log_2 x = 0$ 또는 $\log_2 x = \frac{1}{2}$ 이므로

$$x=1 \text{ 또는 } x=2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad \dots\dots \text{㉥}$$

㉢, ㉥에서 구하는 해는

$$x=1 \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

(4) 진수의 조건에서 $x > 0$ \dots\dots \text{㉦}

$$(\log_{16} x^2)^2 - 5 \log_{16} x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$(2 \log_{16} x)^2 - 5 \log_{16} x + 1 = 0$$

$\log_{16} x = t$ 로 놓으면

$$(2t)^2 - 5t + 1 = 0, 4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$(4t-1)(t-1) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{4} \text{ 또는 } t=1$$

즉 $\log_{16} x = \frac{1}{4}$ 또는 $\log_{16} x = 1$ 이므로

$$x = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2 \text{ 또는 } x=16 \quad \dots\dots \text{㉧}$$

㉢, ㉧에서 구하는 해는

$$x=2 \text{ 또는 } x=16$$

(5) 밑과 진수의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$ \dots\dots \text{㉨}

$$\log_x 10 = \frac{1}{\log_{10} x} \text{이므로}$$

$\log_{10} x = t$ 로 놓으면

$\log_x 10 + 3 \log_{10} x = 4$ 에서

$$\frac{1}{t} + 3t = 4$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$(3t-1)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{3} \text{ 또는 } t = 1$$

즉 $\log_{10} x = \frac{1}{3}$ 또는 $\log_{10} x = 1$ 이므로

$$x = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} \text{ 또는 } x = 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉓, ㉔에서 구하는 해는

$$x = \sqrt[3]{10} \text{ 또는 } x = 10$$

(6) 밑과 진수의 조건에서 $x > 0, x \neq 1,$

$$2x + 4 > 0, x - 2 > 0$$

$$\therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$\log_x(2x+4) + \log_x(x-2) = 2$ 에서

$$\log_x(2x+4)(x-2) = 2$$

로그의 정의에 의하여

$$(2x+4)(x-2) = x^2, x^2 = 8$$

$$\therefore x = -2\sqrt{2} \text{ 또는 } x = 2\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

㉓, ㉖에서 구하는 해는

$$x = 2\sqrt{2}$$

- 답 (1) $x = -5$ (2) $x = 6$
 (3) $x = 1$ 또는 $x = \sqrt{2}$
 (4) $x = 2$ 또는 $x = 16$
 (5) $x = \sqrt[3]{10}$ 또는 $x = 10$
 (6) $x = 2\sqrt{2}$

140

밑의 조건에서 $k > 0, k \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉗}$

$\log_3\{\log_2(\log_k x)\} = 0$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$\log_2(\log_k x) = 3^0 = 1$$

$$\log_k x = 2^1 = 2$$

$$\therefore x = k^2$$

그런데 $x = 49$ 이므로

$$k^2 = 49$$

$$\therefore k = 7 (\because \textcircled{㉗})$$

답 7

141

방정식 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 + k = 0$ 의 한 근이 2이므로 $x = 2$ 를 대입하면

$$(\log_2 2)^2 - \log_2 2^4 + k = 0$$

$$1 - 4 + k = 0$$

$$\therefore k = 3$$

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉘}$

$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 + 3 = 0$ 에서

$$(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 3 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉 $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉙}$$

㉓, ㉙에서 구하는 해는

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 8$$

따라서 나머지 한 근은 8이다.

답 8

142

(1) 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉚}$

$$(\log_3 x)^2 - 6 \log_3 \sqrt{x} + 2 = 0$$
에서

$$(\log_3 x)^2 - 6 \log_3 x^{\frac{1}{2}} + 2 = 0$$

$$(\log_3 x)^2 - 3 \log_3 x + 2 = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

즉 $\log_3 x = 1$ 또는 $\log_3 x = 2$ 이므로

$$x = 3 \text{ 또는 } x = 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉛}$$

㉓, ㉛에서 방정식의 해는

$$x = 3 \text{ 또는 } x = 9$$

따라서 $\alpha = 3, \beta = 9$ 또는 $\alpha = 9, \beta = 3$ 이므로

$$\alpha\beta = 3 \times 9 = 27$$

(2) 진수의 조건에서 $3x > 0, 9x > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉜}$$

$$\begin{aligned}
 &(\log_3 3x)(\log_3 9x) - 1 = 0 \text{에서} \\
 &(1 + \log_3 x)(2 + \log_3 x) - 1 = 0 \\
 &\log_3 x = t \text{로 놓으면} \\
 &(1+t)(2+t) - 1 = 0 \\
 &t^2 + 3t + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{L}
 \end{aligned}$$

방정식 $(\log_3 3x)(\log_3 9x) - 1 = 0$ 의 두 근이 α , β 이므로 t 에 대한 이차방정식 \textcircled{L} 의 두 근은 $\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\log_3 \alpha + \log_3 \beta = -3$

$$\log_3 \alpha\beta = -3 \quad \therefore \alpha\beta = \frac{1}{27}$$

답 (1) 27 (2) $\frac{1}{27}$

참고 (2) t 에 대한 이차방정식 \textcircled{L} 의 두 근은 모두 실수이므로 $x = 3^t > 0$ 이다. 즉 진수의 조건 \textcircled{L} 을 만족시킨다.

다른풀이 (1) $t^2 - 3t + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{H}$

방정식 $(\log_3 x)^2 - 6 \log_3 \sqrt{x} + 2 = 0$ 의 두 근이 α , β 이므로 t 에 대한 이차방정식 \textcircled{H} 의 두 근은 $\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 3$

$$\log_3 \alpha\beta = 3 \quad \therefore \alpha\beta = 27$$

143

$(\log x)^2 - k \log x - 2 = 0$ 의 두 근을 α , β 라 하면 $\alpha\beta = 10$ 이고, $\log x = t$ 로 놓으면 $t^2 - kt - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{H}$

t 에 대한 이차방정식 \textcircled{H} 의 두 근은 $\log \alpha$, $\log \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = k \quad \therefore k = \log \alpha\beta = \log 10 = 1 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

144

(1) 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{H}$

$x^{\log_{0.1} x} = \frac{1}{1000x^2}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{\log_{0.1} x} = \log \frac{1}{1000x^2}$$

$$(\log_{0.1} x)(\log x) = \log (1000x^2)^{-1}$$

$$(\log_{10^{-1}} x)(\log x) = -\log 1000x^2$$

$$(-\log x)(\log x) = -(\log 1000 + \log x^2)$$

$$(\log x)^2 = 3 + 2 \log x$$

$$\therefore (\log x)^2 - 2 \log x - 3 = 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉 $\log x = -1$ 또는 $\log x = 3$ 이므로

$$x = 10^{-1} = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 10^3 = 1000 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

\textcircled{L} , \textcircled{L} 에서 구하는 해는

$$x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 1000$$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{H}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log x} = (2^{-1})^{\log x} = (2^{\log x})^{-1} = \frac{1}{2^{\log x}} \text{이므로}$$

$$2^{\log x} = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$2^{\log x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\log x} = \frac{5}{2} \text{에서}$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$(t-2)(2t-1) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2$$

$$\text{즉 } 2^{\log x} = \frac{1}{2} \text{ 또는 } 2^{\log x} = 2 \text{이므로}$$

$$\log x = -1 \text{ 또는 } \log x = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 10 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

\textcircled{L} , \textcircled{L} 에서 구하는 해는

$$x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 10$$

답 (1) $x = \frac{1}{10}$ 또는 $x = 1000$

(2) $x = \frac{1}{10}$ 또는 $x = 10$

145

진수의 조건에서 $x > 0, y > 0$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 - 2 \log_2 y = 3 \\ \log_2 x^3 + \log_2 y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{에서}$$

$$\begin{cases} 2 \log_2 x - 2 \log_2 y = 3 \\ 3 \log_2 x + \log_2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\log_2 x = X, \log_2 y = Y$ 로 놓으면

$$\begin{cases} 2X - 2Y = 3 & \dots \text{㉠} \\ 3X + Y = \frac{1}{2} & \dots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$X = \frac{1}{2}, Y = -1$$

즉 $\log_2 x = \frac{1}{2}, \log_2 y = -1$ 이므로

$$x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \sqrt{2}, \beta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a^2}{\beta^2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 8$$

답 8

146

$\log_x 4 = \log_x 2^2 = 2 \log_x 2 = \frac{2}{\log_2 x}$ 이므로

$\log_2 x + a \log_x 4 = b$ 에서

$$\log_2 x + \frac{2a}{\log_2 x} = b$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - b \log_2 x + 2a = 0 \quad \dots \text{㉠}$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - bt + 2a = 0 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠의 두 근이 2와 $\frac{1}{8}$ 이므로 ㉡의 두 근은 $\log_2 2$ 와

$\log_2 \frac{1}{8}$, 즉 1과 -3이다.

따라서 ㉡에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + (-3) = b \quad \therefore b = -2$$

$$1 \times (-3) = 2a \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore ab = -\frac{3}{2} \times (-2) = 3$$

답 ③

147

$$(\log x)^2 - 6 \log x - 2 = 0 \quad \dots \text{㉠}$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 6t - 2 = 0 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠의 두 근이 α, β 이므로 ㉡의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$ 이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = 6, (\log \alpha)(\log \beta) = -2$$

$$\text{한편, } (\log x)^2 - a \log x + b = 0 \quad \dots \text{㉢}$$

$\log x = k$ 로 놓으면

$$k^2 - ak + b = 0 \quad \dots \text{㉣}$$

㉢의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이므로 ㉣의 두 근은 $\log \frac{1}{\alpha}, \log \frac{1}{\beta}$

이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \frac{1}{\alpha} + \log \frac{1}{\beta} = a, \left(\log \frac{1}{\alpha}\right)\left(\log \frac{1}{\beta}\right) = b$$

$$\therefore a = \log \frac{1}{\alpha} + \log \frac{1}{\beta}$$

$$= -\log \alpha - \log \beta$$

$$= -(\log \alpha + \log \beta)$$

$$= -6$$

$$b = \left(\log \frac{1}{\alpha}\right)\left(\log \frac{1}{\beta}\right)$$

$$= (-\log \alpha)(-\log \beta)$$

$$= (\log \alpha)(\log \beta) = -2$$

$$\therefore b - a = -2 - (-6) = 4$$

답 4

148

밑과 진수의 조건에서 $x + 9 > 0, x + 9 \neq 1, x^2 - 2x + 5 > 0, x^2 - 2x + 5 \neq 1, x - 1 > 0$

$$\therefore x > 1 \quad \dots \text{㉠}$$

$\log_{x+9}(x-1) = \log_{x^2-2x+5}(x-1)$ 에서

$$x + 9 = x^2 - 2x + 5 \text{ 또는 } x - 1 = 1$$

(i) $x + 9 = x^2 - 2x + 5$ 에서

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4 \quad \dots \text{㉡}$$

(ii) $x-1=1$ 에서 $x=2$ ㉞

㉠, ㉡, ㉞에서 구하는 해는

$x=2$ 또는 $x=4$

따라서 방정식의 모든 근의 합은

$2+4=6$

답 6

참고 $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$
 ≥ 4 ($\because (x-1)^2 \geq 0$)

즉 $\log_{x^2-2x+5}(x-1)$ 에서 밑의 조건은 항상 성립한다.

149

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log 5} = 5^{\log x}$ 이므로 $5^{\log x} \cdot x^{\log 5} - 6 \cdot 5^{\log x} + 5 = 0$ 에서

$5^{\log x} \cdot 5^{\log x} - 6 \cdot 5^{\log x} + 5 = 0$

$(5^{\log x})^2 - 6 \cdot 5^{\log x} + 5 = 0$

$5^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$t^2 - 6t + 5 = 0, (t-1)(t-5) = 0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

즉 $5^{\log x} = 1$ 또는 $5^{\log x} = 5$ 이므로

$\log x = 0$ 또는 $\log x = 1$

$\therefore x=1$ 또는 $x=10$ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $x=1$ 또는 $x=10$

(2) $\left(\frac{x}{4}\right)^{\log_5 4} = \left(\frac{x}{3}\right)^{\log_5 3}$ 의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5 \left(\frac{x}{4}\right)^{\log_5 4} = \log_5 \left(\frac{x}{3}\right)^{\log_5 3}$

$\log_5 4 (\log_5 x - \log_5 4) = \log_5 3 (\log_5 x - \log_5 3)$

$(\log_5 4)(\log_5 x) - (\log_5 4)^2$
 $= (\log_5 3)(\log_5 x) - (\log_5 3)^2$

$(\log_5 4 - \log_5 3)\log_5 x = (\log_5 4)^2 - (\log_5 3)^2$

$\log_5 x = \frac{(\log_5 4)^2 - (\log_5 3)^2}{\log_5 4 - \log_5 3}$

$= \frac{(\log_5 4 + \log_5 3)(\log_5 4 - \log_5 3)}{\log_5 4 - \log_5 3}$

$= \log_5 4 + \log_5 3$

$= \log_5 12$

$\therefore x=12$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=10$ (2) $x=12$

150

$t=30, C=2$ 를 주어진 식에 대입하면

$\log(10-2) = 1 - 30k$

$30k = 1 - \log 8$

$\therefore k = \frac{1}{30} \log \frac{5}{4}$

$\therefore \log(10-C) = 1 - \frac{t}{30} \log \frac{5}{4}$

위의 식에 $t=60, C=a$ 를 대입하면

$\log(10-a) = 1 - 2 \log \frac{5}{4}$

$= \log 10 - \log \left(\frac{5}{4}\right)^2$

$= \log \left(10 \times \frac{16}{25}\right)$

$= \log \frac{32}{5}$

양변의 밑이 10으로 같으므로

$10-a = \frac{32}{5}$

$\therefore a = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$

답 ④

151

정수 시설을 1번 가동하면 불순물의 양의 $x\%$ 가 제거되므로 남은 불순물의 양은 전체의 $1 - \frac{x}{100}$ 이다. 정수 시설을 10번 가동하였더니 남은 불순물의 양이 처음 불순물의 양의 10% 이므로

$\left(1 - \frac{x}{100}\right)^{10} = \frac{10}{100}$

$\left(\frac{100-x}{100}\right)^{10} = \frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log \left(\frac{100-x}{100}\right)^{10} = \log \frac{1}{10}$

$10 \log \frac{100-x}{100} = -1$

$10\{\log(100-x) - 2\} = -1$

$\log(100-x) - 2 = -\frac{1}{10}$

$\log(100-x) = \frac{19}{10} = 1.9$

이때 $\log 80 = 1.9$ 이므로
 $100 - x = 80$
 $\therefore x = 20$

답 20

152

- (1) 진수의 조건에서 $x - 2 > 0, x^2 + 1 > 0$
 $\therefore x > 2$ ㉠
 $2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$ 에서
 $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$
 밑이 1보다 작은 양수이므로
 $(x-2)^2 < x^2+1, x^2-4x+4 < x^2+1$
 $4x > 3 \quad \therefore x > \frac{3}{4}$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 구하는 부등식의 해는 $x > 2$
- (2) 진수의 조건에서 $-5x + 1 > 0$
 $\therefore x < \frac{1}{5}$ ㉢
 $\log_3(-5x+1) < 4$ 에서
 $\log_3(-5x+1) < \log_3 81$
 밑이 1보다 크므로 $-5x+1 < 81$
 $-5x < 80$
 $\therefore x > -16$ ㉣
 ㉢, ㉣에서 구하는 부등식의 해는
 $-16 < x < \frac{1}{5}$
- (3) 진수의 조건에서
 $\log_2(\log_2 x) > 0, \log_2 x > 0, x > 0$ ㉤
 $\log_2(\log_2 x) > 0$ 에서 $\log_2(\log_2 x) > \log_2 1$
 밑이 1보다 크므로 $\log_2 x > 1$
 $\log_2 x > \log_2 2$
 밑이 1보다 크므로 $x > 2$ ㉥
 $\log_2 x > 0$ 에서 $\log_2 x > \log_2 1$
 밑이 1보다 크므로 $x > 1$ ㉦
 ㉤, ㉥, ㉦에서 $x > 2$ ㉧
 $\log_2 \{\log_2(\log_2 x)\} \leq 1$ 에서
 $\log_2 \{\log_2(\log_2 x)\} \leq \log_2 2$
 밑이 1보다 크므로 $\log_2(\log_2 x) \leq 2$
 $\log_2(\log_2 x) \leq \log_2 4$

- 밑이 1보다 크므로 $\log_2 x \leq 4$
 $\log_2 x \leq \log_2 16$
 밑이 1보다 크므로 $x \leq 16$ ㉨
 ㉧, ㉨에서 구하는 부등식의 해는
 $2 < x \leq 16$
- (4) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉩
 $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 \geq 0$ 에서
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 + t - 2 \geq 0, (t+2)(t-1) \geq 0$
 $\therefore t \leq -2$ 또는 $t \geq 1$
 즉 $\log_2 x \leq -2$ 또는 $\log_2 x \geq 1$ 이므로
 $\log_2 x \leq \log_2 \frac{1}{4}$ 또는 $\log_2 x \geq \log_2 2$
 밑이 1보다 크므로 $x \leq \frac{1}{4}$ 또는 $x \geq 2$ ㉪
 ㉩, ㉪에서 구하는 부등식의 해는
 $0 < x \leq \frac{1}{4}$ 또는 $x \geq 2$
 답 (1) $x > 2$ (2) $-16 < x < \frac{1}{5}$
 (3) $2 < x \leq 16$ (4) $0 < x \leq \frac{1}{4}$ 또는 $x \geq 2$

153

- 진수의 조건에서 $2x^2 - 11x + 14 > 0$
 $(x-2)(2x-7) > 0$
 $\therefore x < 2$ 또는 $x > \frac{7}{2}$ ㉫
 밑의 조건에서
 $x-2 > 0, x-2 \neq 1$
 $\therefore x > 2, x \neq 3$ ㉬
 ㉫, ㉬에서 $x > \frac{7}{2}$ ㉭
 $\log_{x-2}(2x^2-11x+14) < 2$ 에서
 $\log_{x-2}(2x^2-11x+14) < \log_{x-2}(x-2)^2$
 ㉭에서 $x > \frac{7}{2}$ 이므로 (밑) $= x-2 > 1$
 $\therefore 2x^2-11x+14 < (x-2)^2$
 $x^2-7x+10 < 0$
 $(x-2)(x-5) < 0$
 $\therefore 2 < x < 5$ ㉮

㉔, ㉕에서 구하는 부등식의 해는

$$\frac{7}{2} < x < 5$$

답 $\frac{7}{2} < x < 5$

154

진수의 조건에서 $x-4 > 0, x-2 > 0$

$$x > 4, x > 2$$

$$\therefore x > 4$$

..... ㉑

$$2 \log_{\frac{1}{3}}(x-4) > \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-4)^2 > \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$(x-4)^2 < x-2$$

$$x^2 - 9x + 18 < 0$$

$$(x-3)(x-6) < 0$$

$$\therefore 3 < x < 6$$

..... ㉒

㉑, ㉒에서 주어진 부등식의 해는 $4 < x < 6$

따라서 $a=4, b=6$ 이므로

$$ab = 4 \times 6 = 24$$

답 ④

155

진수의 조건에서 $|x| > 0$

$$\therefore x \neq 0$$

..... ㉑

$$\log_{0.2}|x| < 2 \text{에서}$$

$$\log_{0.2}|x| < \log_{0.2}0.2^2$$

$$0 < (\text{밑}) < 1 \text{이므로 } |x| > 0.2^2$$

$$|x| > 0.04$$

$$\therefore x < -0.04 \text{ 또는 } x > 0.04$$

..... ㉒

㉑, ㉒에서 구하는 부등식의 해는

$$x < -0.04 \text{ 또는 } x > 0.04$$

답 $x < -0.04 \text{ 또는 } x > 0.04$

156

진수의 조건에서 $x > 0$

..... ㉑

$$(\log_{\frac{1}{2}} 8x) \left(\log_2 \frac{x}{2} \right) > 0 \text{에서}$$

$$-(\log_2 8x) \left(\log_2 \frac{x}{2} \right) > 0$$

$$-(3 + \log_2 x) (\log_2 x - 1) > 0$$

$$(\log_2 x + 3) (\log_2 x - 1) < 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$(t+3)(t-1) < 0$$

$$\therefore -3 < t < 1$$

즉 $-3 < \log_2 x < 1$ 이므로

$$\log_2 2^{-3} < \log_2 x < \log_2 2^1$$

밑이 1보다 크므로

$$2^{-3} < x < 2^1$$

$$\therefore \frac{1}{8} < x < 2$$

..... ㉒

㉑, ㉒에서 주어진 부등식의 해는 $\frac{1}{8} < x < 2$

따라서 $a = \frac{1}{8}, \beta = 2$ 이므로

$$\frac{\beta}{a} = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16$$

답 ④

157

주어진 부등식의 해가 $\frac{1}{3} < x < 9$ 이므로 각 변에 밑이

3인 로그를 취하면 밑이 1보다 크므로

$$\log_3 \frac{1}{3} < \log_3 x < \log_3 9$$

$$\therefore -1 < \log_3 x < 2$$

..... ㉑

㉑에서 $(\log_3 x + 1)(\log_3 x - 2) < 0$

$$(\log_3 x + 1)(2 - \log_3 x) > 0$$

$$\therefore (1 + \log_3 x)(2 - \log_3 x) > 0$$

$$\therefore a = 2$$

답 2

다른풀이 주어진 부등식의 해가 $\frac{1}{3} < x < 9$ 이므로 방

정식 $(1 + \log_3 x)(a - \log_3 x) = 0$ 의 근이 $x = \frac{1}{3}$ 또는

$x = 9$ 이다.

$$(1 + \log_3 x)(a - \log_3 x) = 0 \text{에서}$$

$$\log_3 x = -1 \text{ 또는 } \log_3 x = a$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 3^a$$

$$\text{따라서 } 3^a = 9 \text{이므로 } 3^a = 3^2 \quad \therefore a = 2$$

158

진수의 조건에서 $x^2 - 4x > 0, x - 3 > 0$

$x^2 - 4x > 0$ 에서 $x(x - 4) > 0$

$\therefore x < 0$ 또는 $x > 4$ ㉠

$x - 3 > 0$ 에서 $x > 3$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x > 4$ ㉢

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2 + \log_2(x^2 - 4x)} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2(x - 3)}$ 에서

$0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로

$-2 + \log_2(x^2 - 4x) \leq \log_2(x - 3)$

$\log_2(x^2 - 4x) \leq \log_2(x - 3) + 2$

$\log_2(x^2 - 4x) \leq \log_2\{4(x - 3)\}$

(밑) > 1 이므로

$x^2 - 4x \leq 4(x - 3)$

$x^2 - 8x + 12 \leq 0$

$(x - 2)(x - 6) \leq 0$

$\therefore 2 \leq x \leq 6$ ㉣

㉢, ㉣에서 구하는 부등식의 해는 $4 < x \leq 6$

따라서 x 의 최댓값은 6이다.

답 6

159

진수의 조건에서 $x + 3 > 0, 1 - x > 0$ 이므로

$x > -3, x < 1$

$\therefore -3 < x < 1$ ㉠

$\log_a(x + 3) - \log_a(1 - x) > 1$ 에서

$\log_a(x + 3) > \log_a(1 - x) + 1$

$\log_a(x + 3) > \log_a\{a(1 - x)\}$

(i) $a > 1$ 일 때 \leftarrow (밑) > 1 인 경우

$x + 3 > a(1 - x)$ 에서 $(a + 1)x > a - 3$

$\therefore x > \frac{a - 3}{a + 1} (\because a + 1 > 0)$ ㉡

이때 부등식의 해가 $-\frac{1}{3} < x < 1$ 이므로 ㉠, ㉡에서

$\frac{a - 3}{a + 1} = -\frac{1}{3}, 3a - 9 = -a - 1$

$\therefore a = 2$

(ii) $0 < a < 1$ 일 때 \leftarrow $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 경우

$x + 3 < a(1 - x)$ 에서 $(a + 1)x < a - 3$

$\therefore x < \frac{a - 3}{a + 1} (\because a + 1 > 0)$ ㉢

그런데 ㉠, ㉢으로 부등식의 해 $-\frac{1}{3} < x < 1$ 을 만

족시킬 수 없다.

(i), (ii)에서 $a = 2$

답 2

160

진수의 조건에서 $4x > 0, x > 0$

$\therefore x > 0$ ㉠

$(\log_2 4x)^2 - 4 \log_{\sqrt{2}} x - 1 < 0$ 에서

$(\log_2 x + 2)^2 - 8 \log_2 x - 1 < 0$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$(t + 2)^2 - 8t - 1 < 0$

$t^2 - 4t + 3 < 0$

$(t - 1)(t - 3) < 0$

$\therefore 1 < t < 3$

즉 $1 < \log_2 x < 3$ 이므로

$\log_2 2 < \log_2 x < \log_2 8$

밑이 1보다 크므로 $2 < x < 8$ ㉡

㉠, ㉡에서 부등식 $(\log_2 4x)^2 - 4 \log_{\sqrt{2}} x - 1 < 0$ 의

해는

$2 < x < 8$ ㉢

㉢이 부등식 $x^2 + mx + n < 0$ 의 해이므로

$(x - 2)(x - 8) < 0$

$\therefore x^2 - 10x + 16 < 0$

따라서 $m = -10, n = 16$ 이므로

$m + n = -10 + 16 = 6$

답 6

161

(i) $2 \log_{\frac{1}{2}}(x - 5) > \log_{\frac{1}{2}}(x + 7)$

진수의 조건에서 $x - 5 > 0, x + 7 > 0$

$x > 5, x > -7 \therefore x > 5$ ㉠

$2 \log_{\frac{1}{2}}(x - 5) > \log_{\frac{1}{2}}(x + 7)$ 에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x - 5)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(x + 7)$

$0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} (x-5)^2 &< x+7 \\ x^2-11x+18 &< 0 \\ (x-2)(x-9) &< 0 \\ \therefore 2 < x < 9 & \dots\dots \textcircled{A} \end{aligned}$$

①, ②에서 부등식 $2 \log_{\frac{1}{2}}(x-5) > \log_{\frac{1}{2}}(x+7)$ 의 해는 $5 < x < 9$

(ii) $\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)^2 - \log_2 x^2 + 2 < 0$

진수의 조건에서 $\frac{x}{2} > 0, x^2 > 0$
 $\therefore x > 0$ ㉠

$\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)^2 - \log_2 x^2 + 2 < 0$ 에서

$(\log_2 x - 1)^2 - 2 \log_2 x + 2 < 0$

$(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 3 < 0$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$t^2 - 4t + 3 < 0, (t-1)(t-3) < 0$

$\therefore 1 < t < 3$

즉 $1 < \log_2 x < 3$ 이므로 $\log_2 2^1 < \log_2 x < \log_2 2^3$

(밑) > 1 이므로

$2 < x < 8$ ㉡

㉠, ㉡에서 부등식 $\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)^2 - \log_2 x^2 + 2 < 0$ 의

해는 $2 < x < 8$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는 $5 < x < 8$

따라서 $a=5, \beta=8$ 이므로

$a\beta=40$

답 40

162

진수의 조건에서 $x^2 - 2kx + 36 > 0$ ㉠

$\log_3(x^2 - 2kx + 36) \geq 3$ 에서

$\log_3(x^2 - 2kx + 36) \geq \log_3 27$

밑이 1보다 크므로

$x^2 - 2kx + 36 \geq 27$

$\therefore x^2 - 2kx + 9 \geq 0$ ㉡

모든 실수 x 에 대하여 ㉡이 성립하면 ㉠도 성립하므로

모든 실수 x 에 대하여 ㉡이 성립할 조건만 구하면 된다.

모든 실수 x 에 대하여 ㉡이 성립할 필요충분조건은 이

차방정식 $x^2 - 2kx + 9 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$D \leq 0$ 이므로

$\frac{D}{4} = k^2 - 9 \leq 0$

$(k+3)(k-3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq k \leq 3$

따라서 $M=3, m=-3$ 이므로

$Mm = 3 \times (-3) = -9$

답 -9

163

진수의 조건에서 $a > 0$ ㉠

$8^{x^2 + \log_8 a} > a^{-2x}$ 의 양변에 8을 밑으로 하는 로그를 취하면

$x^2 + \log_8 a > -2x \log_8 a$

$x^2 + 2x \log_8 a + \log_8 a > 0$

임의의 실수 x 에 대하여 이 부등식이 성립할 필요충분

조건은 이차방정식 $x^2 + 2x \log_8 a + \log_8 a = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D < 0$ 이다. 즉

$\frac{D}{4} = (\log_8 a)^2 - \log_8 a < 0$

$(\log_8 a)(\log_8 a - 1) < 0$

$0 < \log_8 a < 1$

밑이 1보다 크므로

$1 < a < 8$ ㉡

㉠, ㉡에서 $1 < a < 8$ 이므로 정수 a 는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다.

답 6

164

이차방정식에서 x^2 의 계수는 0이 아니므로

$3 + \log_2 a \neq 0$

$\log_2 a \neq -3 \quad \therefore a \neq \frac{1}{8}$ ㉠

진수의 조건에서 $a > 0$ ㉡

이차방정식 $(3 + \log_2 a)x^2 + 2(1 + \log_2 a)x + 1 = 0$

이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이다. 즉

$\frac{D}{4} = (1 + \log_2 a)^2 - (3 + \log_2 a) > 0$

$(\log_2 a)^2 + \log_2 a - 2 > 0$
 $\log_2 a = t$ 로 놓으면
 $t^2 + t - 2 > 0$
 $(t+2)(t-1) > 0$
 $\therefore t < -2$ 또는 $t > 1$
 즉 $\log_2 a < -2$ 또는 $\log_2 a > 1$ 이므로
 $\log_2 a < \log_2 2^{-2}$ 또는 $\log_2 a > \log_2 2$
 (밑) > 1 이므로 $a < \frac{1}{4}$ 또는 $a > 2$ ㉔
 ㉑, ㉒, ㉔의 공통 범위는
 $0 < a < \frac{1}{8}$ 또는 $\frac{1}{8} < a < \frac{1}{4}$ 또는 $a > 2$
 따라서 a 의 값이 될 수 있는 것은 ㉕이다.

..... ㉔

답 ㉕

165

한 번 클릭할 때마다 파일의 크기가 2배로 커지므로 n
 번을 클릭한 후의 파일의 크기는
 1000×2^n (바이트)
 파일의 크기가 5기가바이트, 즉 5×10^9 바이트보다 커
 지면 시스템이 다운되므로
 $1000 \times 2^n > 5 \times 10^9$
 $\therefore 2^n > 5 \times 10^6$
 양변에 상용로그를 취하면
 $\log 2^n > \log(5 \times 10^6)$
 $n \log 2 > \log 5 + 6$
 $n \log 2 > \log \frac{10}{2} + 6$
 $n \log 2 > 7 - \log 2$
 $\therefore n > \frac{7 - \log 2}{\log 2} = \frac{6.6990}{0.3010} = 22. \times \times \times$
 따라서 마우스를 23번 클릭하면 시스템이 다운된다.

답 23번

166

두 직선 $x=b$, $y=\log_2 a$ 의 교점을 H라 하면
 삼각형 AHB의 넓이가 4이므로
 $\frac{1}{2}(b-a)(\log_2 b - \log_2 a) = 4$
 $\therefore (b-a)(\log_2 b - \log_2 a) = 8$ ㉑

한편, 직선 l 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로
 $\frac{\log_2 b - \log_2 a}{b-a} = \frac{1}{2}$
 $\therefore b-a = 2(\log_2 b - \log_2 a)$ ㉒
 ㉑, ㉒을 연립하여 풀면
 $b-a=4$, $\log_2 b - \log_2 a = 2$ ($\because a < b$)
 $\log_2 b - \log_2 a = 2$ 에서 $\log_2 \frac{b}{a} = 2$
 $\frac{b}{a} = 4$ $\therefore b = 4a$
 이때 $b-a=4$ 이므로
 $4a-a=4$, $3a=4$
 $\therefore a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{16}{3}$
 $\therefore a+b = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$

..... ㉒

답 ㉓

167

진수의 조건에서 $x > 0$
 $y = 3^{\log x} \cdot x^{\log 3} - 3(3^{\log x} + x^{\log 3}) + 7$ 에서
 $x^{\log 3} = 3^{\log x}$ 이므로
 $y = 3^{\log x} \cdot 3^{\log x} - 3(3^{\log x} + 3^{\log x}) + 7$
 $3^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $y = t^2 - 3 \cdot 2t + 7 = t^2 - 6t + 7 = (t-3)^2 - 2$ ㉑
 ㉑은 $t=3$ 에서 최솟값 -2 를 가지므로
 주어진 함수는 $t=3$, 즉 $3^{\log x} = 3$ 일 때 최솟값 -2 를
 갖는다.
 $\therefore b = -2$
 $3^{\log x} = 3$ 에서 $\log x = 1$ $\therefore x = 10$
 $\therefore a = 10$
 $\therefore \frac{a}{b} = \frac{10}{-2} = -5$

답 -5

168

밑의 조건에서 $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$
 $\begin{cases} \log_x 4 - \log_y 3 = 5 \\ \log_x 2 - \log_y 27 = 5 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} 2 \log_x 2 - \log_y 3 = 5 \\ \log_x 2 - 3 \log_y 3 = 5 \end{cases}$
 $\log_x 2 = X$, $\log_y 3 = Y$ 로 놓으면

$$\begin{cases} 2X - Y = 5 & \dots\dots \textcircled{A} \\ X - 3Y = 5 & \dots\dots \textcircled{B} \end{cases}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $X=2, Y=-1$

즉 $\log_x 2=2, \log_y 3=-1$ 이므로

$$x^2=2, y^{-1}=3$$

$$\therefore x=\sqrt{2}, y=\frac{1}{3} (\because x>0)$$

따라서 $a=\sqrt{2}, \beta=\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{a^2}{\beta} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$$

답 6

169

진수의 조건에서 $a > 0$ ①

(i) $1 + 2 \log a < 0$ 에서 $\log a < -\frac{1}{2}$

(ii) 이차방정식

$$(1 + 2 \log a)x^2 + 2(2 + \log a)x + \log a = 0$$

의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2 + \log a)^2 - (1 + 2 \log a)\log a < 0$$

$$(\log a)^2 - 3 \log a - 4 > 0$$

$$(\log a + 1)(\log a - 4) > 0$$

$$\therefore \log a < -1 \text{ 또는 } \log a > 4$$

(i), (ii)에서 $\log a < -1$

$$\therefore a < \frac{1}{10} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②에서 a 의 값의 범위는 $0 < a < \frac{1}{10}$

$$\text{답 } 0 < a < \frac{1}{10}$$

170

이상기체 1몰의 부피가 V_0 에서 V_1 로 a 배 변할 때,

$$S_1 = 6.02 \text{이므로}$$

$$S_1 = C \log \frac{V_1}{V_0} \text{에서 } 6.02 = 20 \log \frac{aV_0}{V_0}$$

$$\therefore 20 \log a = 6.02 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이상기체 1몰의 부피가 V_0 에서 V_2 로 b 배 변할 때,

$$S_2 = 36.02 \text{이므로}$$

$$S_2 = C \log \frac{V_2}{V_0} \text{에서 } 36.02 = 20 \log \frac{bV_0}{V_0}$$

$$\therefore 20 \log b = 36.02 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

②-①을 하면

$$20(\log b - \log a) = 36.02 - 6.02$$

$$20 \log \frac{b}{a} = 30, \log \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10}$$

답 ③

II. 삼각함수

171

$$\textcircled{1} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$$

$$\textcircled{2} -\frac{5}{3}\pi = -\frac{5}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -300^\circ$$

$$\therefore -300^\circ = 360^\circ \times (-1) + 60^\circ$$

$$\textcircled{3} \frac{7}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 420^\circ$$

$$\therefore 420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$$

$$\textcircled{4} -660^\circ = 360^\circ \times (-2) + 60^\circ$$

$$\textcircled{5} 5\pi = 5\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 900^\circ$$

$$\therefore 900^\circ = 360^\circ \times 2 + 180^\circ$$

따라서 각을 나타내는 동경의 위치가 다른 하나는 ⑤이다.

답 ⑤

172

$$\text{ㄱ. } 1 = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\text{ㄴ. } \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ$$

$$\text{ㄷ. } -\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -60^\circ$$

$$\text{ㄹ. } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{45^\circ}{\pi}$$

$$\text{ㅁ. } \pi = \pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ$$

따라서 옳은 것의 개수는 ㄴ, ㄷ, ㅁ의 3이다.

답 3

173

각 3θ 를 나타내는 동경과 각 θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$3\theta + \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{8} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$0 < \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{8} < \frac{2}{3}\pi \quad \therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{13}{12}$$

n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

$$n=0 \text{이면 } \textcircled{1} \text{에서 } \theta = \frac{\pi}{8}$$

$$n=1 \text{이면 } \textcircled{1} \text{에서 } \theta = \frac{5}{8}\pi$$

따라서 각 θ 의 크기를 모두 구하면 $\frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi$ 이다.

답 $\frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi$

174

$$l = r\theta = 3 \cdot \frac{\pi}{5} = \frac{3}{5}\pi$$

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{5} = \frac{9}{10}\pi$$

$$\therefore l + S = \frac{3}{5}\pi + \frac{9}{10}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

답 $\frac{3}{2}\pi$

175

중심각의 크기가 $50^\circ = 50 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{18}\pi$ 이고 반지름

의 길이가 6 cm인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{5}{18}\pi = 5\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

또 중심각의 크기가 θ 이고 반지름의 길이가 10 cm인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10^2 \times \theta = 50\theta \text{ (cm}^2\text{)}$$

이때 두 부채꼴의 넓이가 같으므로

$$5\pi = 50\theta \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{10}$$

답 $\frac{\pi}{10}$

176

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

(i) $\textcircled{1}$ 의 각 변을 3으로 나누어 $\frac{\theta}{3}$ 의 범위를 구하면

$$120^\circ \times n + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 60^\circ$$

$$n=0\text{일 때, } 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 60^\circ$$

$\therefore \frac{\theta}{3}$ 는 제 1 사분면의 각

$$n=1\text{일 때, } 150^\circ < \frac{\theta}{3} < 180^\circ$$

$\therefore \frac{\theta}{3}$ 는 제 2 사분면의 각

$$n=2\text{일 때, } 270^\circ < \frac{\theta}{3} < 300^\circ$$

$\therefore \frac{\theta}{3}$ 는 제 4 사분면의 각

$n=3, 4, 5, \dots$ 에 대해서도 동경의 위치가 제 1, 2, 4 사분면으로 반복된다.

이상에서 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제 1, 2, 4 사분면이다.

(ii) ㉠의 각 변을 4로 나누어 $\frac{\theta}{4}$ 의 범위를 구하면

$$90^\circ \times n + 22.5^\circ < \frac{\theta}{4} < 90^\circ \times n + 45^\circ$$

$$n=0\text{일 때, } 22.5^\circ < \frac{\theta}{4} < 45^\circ$$

$\therefore \frac{\theta}{4}$ 는 제 1 사분면의 각

$$n=1\text{일 때, } 112.5^\circ < \frac{\theta}{4} < 135^\circ$$

$\therefore \frac{\theta}{4}$ 는 제 2 사분면의 각

$$n=2\text{일 때, } 202.5^\circ < \frac{\theta}{4} < 225^\circ$$

$\therefore \frac{\theta}{4}$ 는 제 3 사분면의 각

$$n=3\text{일 때, } 292.5^\circ < \frac{\theta}{4} < 315^\circ$$

$\therefore \frac{\theta}{4}$ 는 제 4 사분면의 각

$n=4, 5, 6, \dots$ 에 대해서도 동경의 위치가 제 1, 2, 3, 4 사분면으로 반복된다.

이상에서 $\frac{\theta}{4}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제 1, 2, 3, 4 사분면이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경과 $\frac{\theta}{4}$ 를 나타내는 동경이 모두 존재하는 사분면은 제 1, 2, 4 사분면이다.

답 ㉢

177

각 5θ 를 나타내는 동경을 180° 만큼 회전하면 각 2θ 를 나타내는 동경과 일치하므로

$$5\theta - 2\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n\text{은 정수})$$

$$3\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 120^\circ \times n + 60^\circ \quad \dots\dots \text{㉠}$$

그런데 $180^\circ < \theta < 360^\circ$ 이므로

$$180^\circ < 120^\circ \times n + 60^\circ < 360^\circ$$

$$\therefore 1 < n < \frac{5}{2}$$

n 은 정수이므로 $n=2$

$n=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$\theta = 300^\circ$$

답 300°

178

원뿔에서 옆면의 부채꼴의 호의 길이는 밑면의 원의 둘레의 길이와 같으므로 부채꼴의 호의 길이는

$$2\pi \times 8 = 16\pi \text{ (cm)}$$

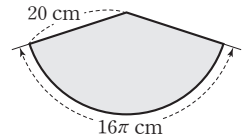
즉 종이의 모양은 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 20 cm이고, 호의 길이가

16π cm인 부채꼴이므로

넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 20 \times 16\pi = 160\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

답 ㉠



179

부채꼴의 반지름의 길이를 x 라 하면

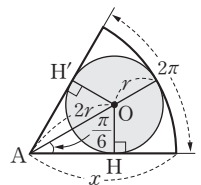
$$\frac{\pi}{3}x = 2\pi \text{에서 } x = 6$$

오른쪽 그림과 같이 부채꼴에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r

라 하면

$\triangle OAH \equiv \triangle OAH'$ 이므로

$$\angle OAH = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$



$$\therefore \overline{OA} = \frac{r}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{r}{\frac{1}{2}} = 2r$$

한편, 부채꼴의 반지름의 길이가 6이므로
 $2r + r = 6 \quad \therefore r = 2$

따라서 부채꼴에 내접하는 원의 넓이는
 $\pi \times 2^2 = 4\pi$

답 ③

180

θ 가 제 1 사분면의 각이므로 일반각으로 나타내면

$$2n\pi < \theta < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수})$$

각 변을 2로 나누어 $\frac{\theta}{2}$ 의 범위를 구하면

$$n\pi < \frac{\theta}{2} < n\pi + \frac{\pi}{4}$$

(i) $n=0$ 일 때, $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{\theta}{2}$ 는 제 1 사분면의 각

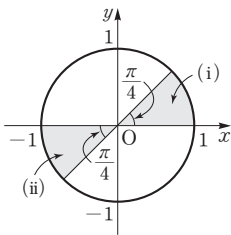
(ii) $n=1$ 일 때, $\pi < \frac{\theta}{2} < \frac{5}{4}\pi$

$\therefore \frac{\theta}{2}$ 는 제 3 사분면의 각

$n=2, 3, 4, \dots$ 에 대해서도 동경의 위치가 제 1, 3 사분면으로 반복된다.

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 범위를 단위원 안에 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 그 넓이는

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$$



답 풀이 참조

181

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면
 부채꼴의 둘레의 길이가 24π 이므로

$$2r + l = 24\pi$$

$$\therefore l = 24\pi - 2r \quad (0 < r < 12\pi)$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(24\pi - 2r)$$

$$= -r^2 + 12\pi r$$

$$= -(r^2 - 12\pi r + 36\pi^2) + 36\pi^2$$

$$= -(r - 6\pi)^2 + 36\pi^2$$

즉 $r=6\pi$ 일 때, S 는 최댓값 $36\pi^2$ 을 갖는다.

한편, $r=6\pi$ 일 때,

$$l = 24\pi - 2 \times 6\pi = 12\pi$$

오른쪽 그림과 같이 이 부채꼴로 만든 원뿔의 밑면인 원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$2\pi R = 12\pi$$

$$\therefore R = 6$$

또한 원뿔의 높이를 h 라 하면

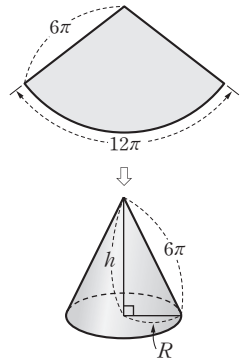
$$h = \sqrt{(6\pi)^2 - 6^2}$$

$$= 6\sqrt{\pi^2 - 1}$$

따라서 구하는 원뿔의 부피는

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 6\sqrt{\pi^2 - 1}$$

$$= 72\pi\sqrt{\pi^2 - 1}$$



답 $72\pi\sqrt{\pi^2 - 1}$

182

$\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서 $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이다.

(i) $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 일 때

θ 는 제 2 사분면의 각이다.

(ii) $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 일 때

θ 는 제 3 사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제 2 사분면 또는 제 3 사분면의 각이므로 항상 $\cos \theta < 0$ 이다.

답 ②

183

(1) $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\sin x < 0, \cos x < 0, \tan x > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin x + \cos x + \tan x + |\sin x| \\ + |\cos x| + |\tan x| \\ = \sin x + \cos x + \tan x - \sin x \\ - \cos x + \tan x \\ = 2 \tan x \end{aligned}$$

(2) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0 \\ \therefore \sqrt{\sin^2 \theta} + \sqrt{\cos^2 \theta} + |\tan \theta| - \sqrt{(\cos \theta + \tan \theta)^2} \\ = |\sin \theta| + |\cos \theta| + |\tan \theta| \\ - |\cos \theta + \tan \theta| \\ = \sin \theta - \cos \theta - \tan \theta + \cos \theta + \tan \theta \\ = \sin \theta \end{aligned}$$

답 (1) $2 \tan x$ (2) $\sin \theta$

184

$$\sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta \text{에서 } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \sqrt{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 의 양변을 $\cos^2 \theta$ 로 나누면

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(\sqrt{3})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$4 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\cos \theta < 0$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 을 $\sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta$ 에 대입하면

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{1 - \sin \theta} - \frac{1}{1 + \sin \theta} &= \frac{1 + \sin \theta - (1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2 \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= -4\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 $-4\sqrt{3}$

185

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \end{aligned}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

따라서 $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin^3 \theta - \cos^3 \theta$$

$$\begin{aligned} &= (\sin \theta - \cos \theta)^3 \\ &\quad + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) \end{aligned}$$

$$= (\sqrt{2})^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

186

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} &= \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 - 2 \\ &= \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 - 2 \\ &= \left(\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}\right)^2 - 2 \end{aligned}$$

한편, $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ 에서

$$\frac{1}{2} = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -4$$

$$\therefore \tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} = (-4)^2 - 2 = 14$$

답 14

187

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{4} \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$-\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{4} \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{k}{4} \quad \dots \textcircled{㉢}$$

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{32} \quad \dots \textcircled{㉣}$$

㉢, ㉣에서

$$-\frac{k}{4} = \frac{7}{32} \quad \therefore k = -\frac{7}{8}$$

답 $-\frac{7}{8}$

188

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \cos^4 \theta - \sin^4 \theta &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } (1 + \sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta - 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \cos \theta \\ &= 2(1 + \sin \theta - \cos \theta - \sin \theta \cos \theta) \\ &= 2(1 + \sin \theta)(1 - \cos \theta) \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} &= \frac{\cos \theta(1 + \sin \theta) - \cos \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta + \cos \theta \sin \theta - \cos \theta + \cos \theta \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= 2 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2 \tan \theta \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

189

$$\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = 2 + \sqrt{3} \text{에서}$$

$$1 - \tan \theta = (2 + \sqrt{3})(1 + \tan \theta)$$

$$(3 + \sqrt{3}) \tan \theta = -(1 + \sqrt{3})$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{-(1 + \sqrt{3})}{3 + \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 의 양변을 $\cos^2 \theta$ 로 나누면

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{이므로}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{3}{4}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\cos \theta < 0$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

190

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\cos \theta < 0$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)} \\ &= \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

191

$\sin \theta + \cos \theta = \sin \theta \cos \theta$ 의 양변을 제곱하면

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = (\sin \theta \cos \theta)^2$$

$$(\sin \theta \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta - 1 = 0$$

$\sin \theta \cos \theta = t \ (-1 \leq t \leq 1)$ 라 하면
 $t^2 - 2t - 1 = 0 \quad \therefore t = 1 - \sqrt{2} \ (\because -1 \leq t \leq 1)$
 따라서 $\sin \theta \cos \theta = 1 - \sqrt{2}$ 이므로
 $a = 1, b = -1$
 $\therefore 10a - b = 11$

답 11

192

$\sqrt{\sin \theta} \sqrt{\cos \theta} = -\sqrt{\sin \theta \cos \theta}$ 에서

$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

이므로 θ 는 제 3 사분면의 각이다.

$\therefore a < 0, b < 0$

$|a| - |b| = 1$ 에서 $-a + b = 1$

$\therefore b = a + 1$ ㉠

$\overline{OP} = 5$ 에서 $a^2 + b^2 = 25$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2 + (a+1)^2 = 25, a^2 + a - 12 = 0$

$(a+4)(a-3) = 0$

$\therefore a = -4 \ (\because a < 0)$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $b = -3$

$\sin \theta = \frac{b}{OP} = -\frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{a}{OP} = -\frac{4}{5},$

$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

$\therefore \sin \theta + \cos \theta + \tan \theta = -\frac{13}{20}$

답 $-\frac{13}{20}$

193

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin \theta + \cos \theta + \tan \theta = -\frac{a}{4}$ ㉠

$\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \tan \theta + \tan \theta \sin \theta = \frac{b}{4}$ ㉡

$\sin \theta \cos \theta \tan \theta = \frac{3}{4}$ ㉢

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 이므로 ㉢에서

$\sin^2 \theta = \frac{3}{4}$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\sin \theta > 0$

$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2} \ (\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\sqrt{3}$

즉 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$ 이므로

이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$a = -4(\sin \theta + \cos \theta + \tan \theta)$

$= -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)$

$= 2\sqrt{3} + 2$

$b = 4(\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \tan \theta + \tan \theta \sin \theta)$

$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right)$

$= \sqrt{3} - 6$

$\therefore a + b = 3\sqrt{3} - 4$

답 $3\sqrt{3} - 4$

194

① $y = a \cos(bx + c) + d$ 꼴인 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$

이므로 주어진 함수의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.

② 최댓값은 $2 + 1 = 3$ 이다.

③ 최솟값은 $-2 + 1 = -1$ 이다.

④ $x = 0$ 을 대입하면 $y = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1$

따라서 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

⑤ $y = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 2 \cos 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

따라서 $y = 2 \cos 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$\frac{\pi}{6}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

195

① $y = \sin 2x + 3$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$

② $y = 2 \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

③ $y = 3 \cos(x - 2)$ 의 주기는 2π

④ $y = \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

⑤ $y = \tan 2x - 5$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$

따라서 주어진 함수 중 주기가 가장 긴 것은 ④이다.

답 ④

196

$y = \sin 3x$ 의 주기는 $p = \frac{2}{3}\pi$

따라서 $y = \sin \frac{2}{3}\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$ 이므로 점

A의 좌표는 (3, 0)이다.

답 (3, 0)

197

$f(x) = a \sin\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) + c$ 의 최댓값이 4, 최솟값이 -2 이고 $a > 0$ 이므로

$a + c = 4, -a + c = -2$

두 식을 연립하여 풀면

$a = 3, c = 1$

또 주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$

따라서 $f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1$

답 ④

198

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 1, 최솟값이 -3 이고 $a > 0$ 이므로

$a + b = 1, -a + b = -3$

두 식을 연립하여 풀면

$a = 2, b = -1$

주기는 $\frac{2\pi}{-1} = -2\pi$ 이고, 그래프에서 주기는 $c - 1$ 이므로

$c - 1 = 3 \quad \therefore c = 4$

$\therefore a + b + c = 5$

답 5

199

주어진 함수의 식을

$y = a \sin bx + c$ 또는 $y = a \cos bx + c$

($a > 0, b > 0$)

로 놓으면 주어진 함수의 최댓값이 1, 최솟값이 -3 이므로

$a + c = 1, -a + c = -3$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, c = -1$

주어진 함수의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$ 이고, $b > 0$ 이므로

$\frac{2\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore b = 3$

$\therefore y = 2 \sin 3x - 1$ 또는 $y = 2 \cos 3x - 1$

그런데 주어진 함수의 그래프가 점 (0, -1)을 지나므로 구하는 함수의 식은

$y = 2 \sin 3x - 1$

답 ②

200

\overline{CD} 가 x 축에 평행하고 함수 $y = \cos \frac{\pi}{4}x$ 의 그래프는

y 축에 대하여 대칭이므로 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.

함수 $y = \cos \frac{\pi}{4}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$ 이므로

$\overline{OA} = \overline{OB} = 2$

$\overline{CD} = 2$ 이므로 등변사다리꼴 ABCD의 높이를 h 라 하면

$h = \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 1\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

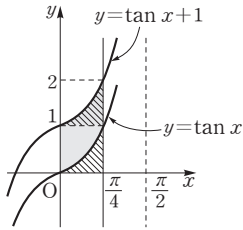
$$\begin{aligned} \therefore \square ABCD &= \frac{1}{2} \times (\overline{AB} + \overline{CD}) \times h \\ &= \frac{1}{2} \times (4+2) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

201

함수 $y = \tan x + 1$ 의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 같으



므로 구하는 도형의 넓이는 네 점 $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, 1)$, $(0, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

202

주어진 함수에서 $a > 0$ 이므로 최댓값은 $a+c$, 최솟값은 $-a+c$ 이다.

이때 조건 (가)에서 최댓값과 최솟값의 합이 6이므로

$$a+c+(-a+c)=6$$

$$2c=6 \quad \therefore c=3$$

조건 (나)에서 함수의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b=4$$

따라서 주어진 함수의 식은 $f(x) = a \cos 4x + 3$ 이고,

조건 (다)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(\frac{\pi}{12}, 4)$ 를

지나므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= a \cos \frac{\pi}{3} + 3 \\ &= \frac{a}{2} + 3 = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore a=2$$

$$\therefore a+b+c=9$$

답 9

203

주어진 함수에서 $a > 0$ 이므로

최댓값은 $a+c$, 최솟값은 c 이다.

이때 조건 (가)에서 최댓값과 최솟값의 차가 3이므로

$$a+c-c=3 \quad \therefore a=3$$

또 $b > 0$ 에서 주어진 함수의 주기는 $\frac{\pi}{b}$ 이고, 함수

$y = \cos 4x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 조건 (나)에서

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b=2$$

따라서 주어진 함수의 식은 $f(x) = 3|\sin 2x| + c$ 이고 조건 (다)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 5)$ 를 지나므로

$$\begin{aligned} f(0) &= 3|\sin 0| + c \\ &= c = 5 \end{aligned}$$

$$\therefore a+b+c=10$$

답 10

204

$y = \cos \frac{x}{2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 π 만큼 평행이동하면

$$\begin{aligned} y &= \cos \frac{x-\pi}{2} = \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \cos \left\{ -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \right\} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \\ &= \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$-y = \sin \frac{x}{2} \quad \therefore y = -\sin \frac{x}{2}$$

답 ④

205

주기가 2이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = 2 \quad \therefore a = \frac{\pi}{2}$$

따라서 주어진 함수의 식은 $f(x) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{2}x + b\right)$

이고, $f(2) = 2$ 이므로 $2 \tan(\pi + b) = 2$

$$\tan(\pi + b) = 1 \quad \therefore \tan b = 1$$

$$-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } b = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore a + b = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

답 $\frac{3}{4}\pi$

206

$\triangle ABC$ 에서 $A + B + C = \pi$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \tan \frac{A+B}{2} &= \tan \frac{\pi-C}{2} \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \end{aligned}$$

$\textcircled{2} A = \pi - (B + C)$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sin \left\{ \frac{\pi - (B + C)}{2} \right\} \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B + C}{2} \right) \\ &= \cos \left(\frac{B + C}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \cos A &= \cos \{ \pi - (B + C) \} \\ &= -\cos(B + C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \sin A &= \sin \{ \pi - (B + C) \} \\ &= \sin(B + C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \cos \frac{A}{2} &= \cos \left\{ \frac{\pi - (B + C)}{2} \right\} \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B + C}{2} \right) \\ &= \sin \left(\frac{B + C}{2} \right) \end{aligned}$$

따라서 성립하지 않는 것은 $\textcircled{3}$ 이다.

답 $\textcircled{3}$

207

$$\textcircled{1} \cos 750^\circ = \cos(360^\circ \times 2 + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 420^\circ = \sin(360^\circ \times 1 + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ \times 1 + 45^\circ)$$

$$= -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 1125^\circ = \sin(360^\circ \times 3 + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 330^\circ = \cos(90^\circ \times 3 + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \\ &= 3 + \sqrt{6} - \sqrt{6} + 2 = 5 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \cos(3\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin \theta, \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

\therefore (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\cos \theta (-\cos \theta)}{-\cos \theta} \right]^2 + \left(\frac{\sin \theta \sin \theta}{-\sin \theta} \right)^2 \\ &= \cos^2 \theta + (-\sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta, \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cos \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta, \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin \theta$$

\therefore (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{-\cos \theta}{-\cos \theta (-\cos \theta)^2} + \frac{-\sin \theta (-\tan \theta)^2}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1 \end{aligned}$$

답 (1) 5 (2) 1 (3) 1

208

$$\theta = \frac{\pi}{12} \text{이므로 } 12\theta = \pi$$

$$\cos 11\theta = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \text{이므로}$$

$$\cos \theta + \cos 11\theta = 0$$

이와 같은 방법으로

$$\cos 2\theta + \cos 10\theta = 0$$

$$\cos 3\theta + \cos 9\theta = 0$$

$$\cos 4\theta + \cos 8\theta = 0$$

$$\cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \cos 6\theta + \cos 12\theta$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi$$

$$= 0 + (-1) = -1$$

답 -1

209

$$\textcircled{1} y = \sin(2x - \pi) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{이므로}$$

$y = \sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{2} y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$= \cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right\} + 1$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 1$$

$$= \sin 2x + 1$$

이므로 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$\textcircled{3} y = 2 \sin 2x$ 의 그래프는 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배한 것이므로 겹쳐지지 않는다.

$\textcircled{4} y = \sin 2x + 2$ 의 그래프는 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{5} y = -\sin(2x + \pi) - 1 = \sin 2x - 1 \text{이므로}$$

$y = \sin 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동하여 겹쳐지지 않는 것은 $\textcircled{3}$ 이다.

답 $\textcircled{3}$

210

함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이므로

$$f(x+p) = f(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 에 $x = \frac{2}{3}\pi$ 를 대입하면

$$f\left(p + \frac{2}{3}\pi\right) = f\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= \sin \frac{4}{3}\pi + 3 \cos^2 \frac{2}{3}\pi + \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$+ \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= -\sin \frac{\pi}{3} + 3\left(-\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 + \sqrt{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}$$

211

$$A + B + C = \pi \text{이므로 } A + C = \pi - B$$

$$\therefore 2 \sin\left(\frac{A - B + C}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi - 2B}{2}\right)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$$

$$= 2 \cos B$$

$$\cos A \cos(\pi - A) + \sin A \sin(\pi + A)$$

$$= \cos A(-\cos A) + \sin A(-\sin A)$$

$$= -\cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= -(\cos^2 A + \sin^2 A) = -1$$

따라서 $2 \cos B = -1$ 이므로

$$\cos B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{답 } -\frac{1}{2}$$

212

$$(1) \sin 50^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \sin 70^\circ &= \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ \\ \sin 80^\circ &= \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ \\ \therefore \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \cdots + \sin^2 80^\circ + \sin^2 90^\circ \\ &= (\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ) + \sin^2 90^\circ \\ &= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) + \sin^2 90^\circ \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos 100^\circ &= \cos(180^\circ - 80^\circ) = -\cos 80^\circ \\ \cos 110^\circ &= \cos(180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ \\ &\quad \vdots \\ \cos 170^\circ &= \cos(180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ \\ \therefore \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cdots + \cos 170^\circ + \cos 180^\circ \\ &= \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cdots + \cos 90^\circ \\ &\quad + (-\cos 80^\circ) + (-\cos 70^\circ) + \cdots \\ &\quad + (-\cos 10^\circ) + \cos 180^\circ \\ &= \cos 90^\circ + \cos 180^\circ \\ &= 0 + (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \tan 85^\circ &= \tan(90^\circ - 5^\circ) = \frac{1}{\tan 5^\circ} \\ \tan 80^\circ &= \tan(90^\circ - 10^\circ) = \frac{1}{\tan 10^\circ} \\ &\quad \vdots \\ \tan 50^\circ &= \tan(90^\circ - 40^\circ) = \frac{1}{\tan 40^\circ} \\ \therefore \tan 5^\circ \times \tan 10^\circ \times \tan 15^\circ \times \cdots \\ &\quad \times \tan 80^\circ \times \tan 85^\circ \\ &= (\tan 5^\circ \times \tan 85^\circ) \times (\tan 10^\circ \times \tan 80^\circ) \\ &\quad \times \cdots \times (\tan 40^\circ \times \tan 50^\circ) \times \tan 45^\circ \\ &= \left(\tan 5^\circ \times \frac{1}{\tan 5^\circ}\right) \times \left(\tan 10^\circ \times \frac{1}{\tan 10^\circ}\right) \\ &\quad \times \cdots \times \left(\tan 40^\circ \times \frac{1}{\tan 40^\circ}\right) \times \tan 45^\circ \\ &= 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 (1) 5 (2) -1 (3) 1

213

주어진 그래프에서 함수의 그래프의 점근선 사이의 거리가 $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$ 이므로 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

$$\text{즉 } \frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 2$$

이때 주어진 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{12}, 5\right)$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y = a \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$ 만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것과 같다.

$$\therefore y = a \tan 2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + 5$$

또 주어진 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = a \tan 2\left(0 - \frac{\pi}{12}\right) + 5$$

$$2 = -a \tan \frac{\pi}{6} + 5$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}a = 3 \quad \therefore a = 3\sqrt{3}$$

따라서 주어진 함수의 식이

$$y = 3\sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 5 \text{ 이므로}$$

$$a = 3\sqrt{3}, b = 2, c = -\frac{\pi}{6}, d = 5$$

$$\therefore abcd = 3\sqrt{3} \times 2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) \times 5 = -5\sqrt{3}\pi$$

답 $-5\sqrt{3}\pi$

214

$4\theta = \pi$ 이므로

$$\begin{aligned} &\sin \theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin 8\theta \\ &= \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta \\ &\quad + \sin(4\theta + \theta) + \sin(4\theta + 2\theta) + \sin(4\theta + 3\theta) \\ &\quad + \sin(4\theta + 4\theta) \\ &= \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin(\pi + \theta) \\ &\quad + \sin(\pi + 2\theta) + \sin(\pi + 3\theta) + \sin(\pi + 4\theta) \\ &= \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta - \sin \theta \\ &\quad - \sin 2\theta - \sin 3\theta - \sin 4\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 0

215

$y = a|\sin 2x + 2| + b$ 에서
 $\sin 2x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = a|t + 2| + b$$

$a > 0$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$ 에서

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서

$t = 1$ 일 때, 최댓값은

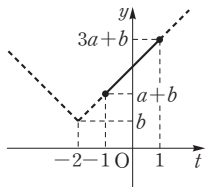
$$3a + b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$t = -1$ 일 때, 최솟값은

$$a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = 1, b = 1$

$$\therefore ab = 1$$



답 1

216

$$\begin{aligned} (1) y &= -2 \sin^2 x + 2 \cos x + 1 \\ &= -2(1 - \cos^2 x) + 2 \cos x + 1 \\ &= 2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 \end{aligned}$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = 2t^2 + 2t - 1 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로

$t = 1$ 일 때, 최댓값은 $M = 3$

$t = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$\text{최솟값은 } m = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore M + m = 3 + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$(2) y = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

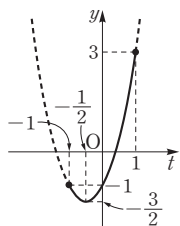
$$= \cos^2 x + \sin x$$

$$= (1 - \sin^2 x) + \sin x$$

$$= -\sin^2 x + \sin x + 1$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서

$-1 \leq t \leq 1$ 이고



$$y = -t^2 + t + 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

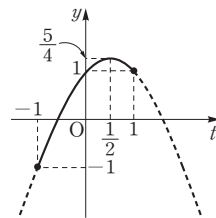
$t = \frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값은

$$M = \frac{5}{4}$$

$t = -1$ 일 때, 최솟값은

$$m = -1$$

$$\therefore Mm = -\frac{5}{4}$$



$$\text{답 (1) } \frac{3}{2} \quad (2) -\frac{5}{4}$$

217

$$(1) y = \sin^2 x + \cos x + a - 2$$

$$= (1 - \cos^2 x) + \cos x + a - 2$$

$$= -\cos^2 x + \cos x + a - 1$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 + t + a - 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{3}{4}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때,

최솟값은 $a - 3$

$t = \frac{1}{2}$ 일 때,

최댓값은 $a - \frac{3}{4}$

이때 최솟값이 $-\frac{1}{4}$ 이므로 $a - 3 = -\frac{1}{4}$ 에서

$$a = \frac{11}{4}$$

따라서 최댓값은 $a - \frac{3}{4} = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} = 2$

$$(2) y = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + a$$

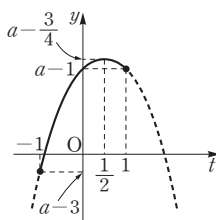
$$= (-\sin x)^2 - 2(-\cos x) + a$$

$$= \sin^2 x + 2 \cos x + a$$

$$= (1 - \cos^2 x) + 2 \cos x + a$$

$$= -\cos^2 x + 2 \cos x + a + 1$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고



$$y = -t^2 + 2t + a + 1 = -(t-1)^2 + a + 2$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$t=1$ 일 때, 최댓값은 $a+2$

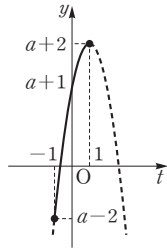
$t=-1$ 일 때, 최솟값은 $a-2$

이때 최댓값이 7이므로

$$a+2=7 \quad \therefore a=5$$

따라서 최솟값은

$$a-2=5-2=3$$



답 (1) 2 (2) 3

218

$$y = \frac{2 \tan x + 1}{\tan x + 2} \text{에서 } \tan x = t \text{로 놓으면}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } 0 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$y = \frac{2t+1}{t+2} = \frac{2(t+2)-3}{t+2} = -\frac{3}{t+2} + 2$$

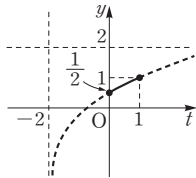
$0 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로

$t=1$ 일 때, 최댓값은 $M=1$

$t=0$ 일 때, 최솟값은 $m=\frac{1}{2}$

$$\therefore M-m = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



답 $\frac{1}{2}$

219

$$y = \frac{|\sin x| + 1}{2|\sin x| + 1} \text{에서 } |\sin x| = t \text{로 놓으면}$$

$$0 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

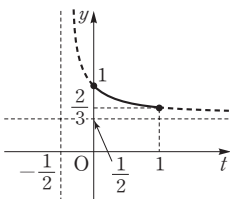
$$y = \frac{t+1}{2t+1} = \frac{\frac{1}{2}(2t+1) + \frac{1}{2}}{2t+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2t+1)}$$

$0 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는 오른

쪽 그림과 같으므로

$t=1$ 일 때, 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

답 $\frac{2}{3}$



220

$$y = \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x - 4 \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 4$$

$$= \tan^2 x + \tan x - 4$$

$\tan x = t$ 로 놓으면 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$y = t^2 + t - 4 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로

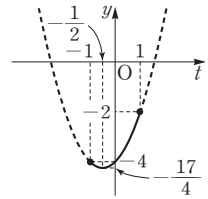
$t=1$ 일 때, 최댓값은 $M=-2$

$t=-\frac{1}{2}$ 일 때,

$$\text{최솟값은 } m = -\frac{17}{4}$$

$$\therefore M+m = (-2) + \left(-\frac{17}{4}\right) = -\frac{25}{4}$$

답 $-\frac{25}{4}$



221

$$4x^2 + 2(\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} = 0 \text{에서}$$

$$(2x + \sqrt{3})(2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

이때 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ 에서 $\cos \theta \leq 0$, $\sin \theta \geq 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{5}{6}\pi$$

답 $\frac{5}{6}\pi$

222

$$f(x) = \cos x, g(x) = \sin x \text{이므로 } g^{-1}(f(x)) = \frac{\pi}{6}$$

에서

$$f(x) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } x = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{3}$$

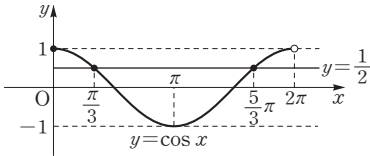
$$\text{답 } x = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{3}$$

223

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \cos(\pi - x) = -\cos x \text{ 이므로}$$

$$\text{주어진 방정식은 } \cos x - (-\cos x) = 1$$

$$2 \cos x = 1 \quad \therefore \cos x = \frac{1}{2}$$



$$\text{이때 } 0 \leq x < 2\pi \text{ 이므로 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{따라서 모든 근의 합은 } \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi$$

224

$$\tan^2 x - (\sqrt{3}-1)\tan x < \sqrt{3} \text{ 에서}$$

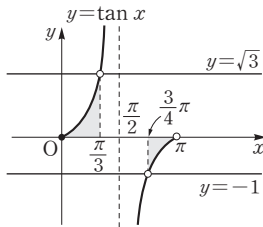
$$\tan^2 x - (\sqrt{3}-1)\tan x - \sqrt{3} < 0$$

$$\tan x = t \text{ 로 놓으면}$$

$$t^2 - (\sqrt{3}-1)t - \sqrt{3} < 0$$

$$(t - \sqrt{3})(t + 1) < 0 \quad \therefore -1 < t < \sqrt{3}$$

$$\text{즉 } -1 < \tan x < \sqrt{3}$$



$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 두 직선

$y = -1, y = \sqrt{3}$ 의 교점의 x 좌표를 구하면 각각

$$\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}$$

따라서 주어진 부등식의 해는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi < x < \pi$$

$$\therefore A = \left\{ x \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi < x < \pi \right\}$$

$$\textcircled{4} \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi < \frac{3}{4}\pi \text{ 이므로 } \frac{2}{3}\pi \notin A$$

답 ④

225

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$2 \cos x + 3 \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

양변에 $\cos x$ 를 곱하면

$$2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 0$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$$

$$(2 \sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

$$\therefore \sin x = -\frac{1}{2} \quad (\because \sin x \neq 2)$$

따라서 $0 < x < 2\pi$ 에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

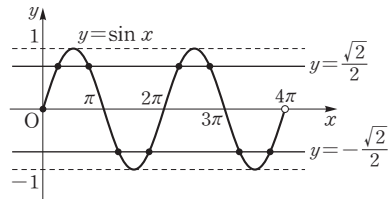
$$\text{이므로 모든 실근의 합은 } \frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi = 3\pi$$

답 3π

226

$$2|\sin x| = \sqrt{2}, \text{ 즉 } |\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 에서}$$

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$



위의 그림에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 의 교점이 모두 8개이므로 방정식}$$

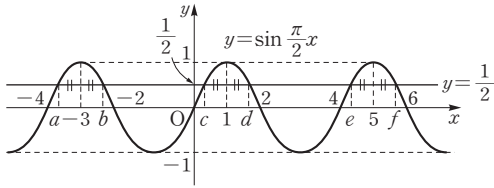
$|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 실근의 개수는 8이다.

답 8

227

$y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의

그래프는 다음 그림과 같다.



$$\frac{a+b}{2} = -3 \text{이므로}$$

$$a+b = -6 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$\frac{c+d}{2} = 1 \text{이므로}$$

$$c+d = 2 \quad \cdots \text{㉡}$$

$$\frac{e+f}{2} = 5 \text{이므로}$$

$$e+f = 10 \quad \cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$a+b+c+d+e+f = -6+2+10=6$$

답 6

228

(i) $2 \cos x < 1$ 에서 $\cos x < \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$$

(ii) $2 \sin x > 1$ 에서 $\sin x > \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$$

(i), (ii)에서 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{6}\pi$ 이므로

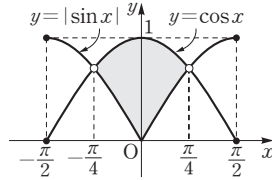
$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi\right)$$

$$= \sin \frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

229



$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 부등식 $|\sin x| < \cos x$ 의 해는

$y = |\sin x|$ 의 그래프가 $y = \cos x$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

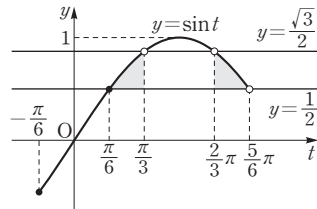
답 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

230

(1) $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면

$$\frac{1}{2} \leq \sin t < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \text{㉠}$$

한편, $-\pi \leq x < \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{5}{6}\pi$



$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{5}{6}\pi$ 에서 $y = \sin t$ 의 그래프와 두 직선

$y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 t 좌표를 구하면

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi$$

따라서 ㉠의 해는

$$\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{\pi}{3} \quad \text{또는} \quad \frac{2}{3}\pi < t < \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{즉} \quad \frac{\pi}{6} \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3} \quad \text{또는} \quad \frac{2}{3}\pi < \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} < \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq x < 0 \text{ 또는 } \frac{2}{3}\pi < x < \pi$$

(2) $\theta - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $\theta + \frac{\pi}{6} = t + \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$2 \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \geq 0 \text{에서}$$

$$2 \cos^2 t - \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \geq 0$$

$$2 \cos^2 t + \sin t - 1 \geq 0$$

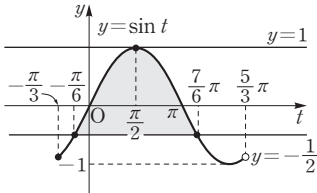
$$2(1 - \sin^2 t) + \sin t - 1 \geq 0$$

$$2 \sin^2 t - \sin t - 1 \leq 0$$

$$(2 \sin t + 1)(\sin t - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

한편, $0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$



$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 두 직선 $y = -\frac{1}{2}$, $y = 1$ 의 교점의 t 좌표를 구하면

$$-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi$$

따라서 ①의 해는 $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{7}{6}\pi$

$$\text{즉 } -\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$$

답 (1) $-\frac{\pi}{3} \leq x < 0$ 또는 $\frac{2}{3}\pi < x < \pi$

(2) $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$

231

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 - 2 \sin^2 \theta = 0$ 이 부호가 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 근의 곱이 음수이다.

즉 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 - 2 \sin^2 \theta < 0, \sin^2 \theta > \frac{1}{2}$$

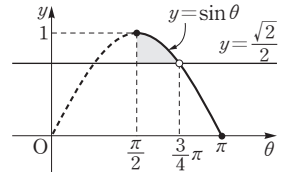
$$\therefore \sin \theta < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } \sin \theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

한편, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ 에서 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ 이므로

$$\sin \theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

오른쪽 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3}{4}\pi$$



답 ③

232

$\cos^2 \theta - 3 \cos \theta - a + 9 \geq 0$ 에서

$\cos \theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$t^2 - 3t - a + 9 \geq 0$$

$f(t) = t^2 - 3t - a + 9$ 로 놓으면

$$f(t) = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - a + \frac{27}{4}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 $f(t)$ 는 $t = 1$ 일 때 최솟값을 가지므로 $-1 \leq t \leq 1$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $f(t) \geq 0$ 이려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉 } f(1) = 1 - 3 - a + 9 = 7 - a \geq 0$$

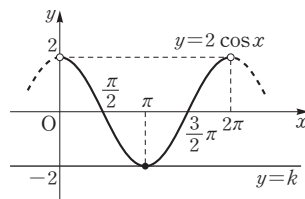
$$\therefore a \leq 7$$

답 $a \leq 7$

233

$\cos(\pi + x) = -\cos x$ 이므로 두 함수 $y = \cos x$,

$y = -\cos x + k$ 의 그래프가 한 점에서 만나려면 방정식 $\cos x = -\cos x + k$, 즉 $2 \cos x = k$ 가 한 개의 실근을 가져야 한다.



따라서 앞의 그림에서 $y=2\cos x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점이 1개이면 되므로 $k=-2$

답 -2

234

(1) $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-\pi \leq \pi \cos x \leq \pi$$

$$\cos(\pi \cos x) = 0 \text{에서 } \pi \cos x = \pm \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\cos x = \pm \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

(i) $\cos x = \frac{1}{2}$ 이면 $x = \frac{\pi}{3}$

(ii) $\cos x = -\frac{1}{2}$ 이면 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

(i), (ii)에서 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

(2) $0 \leq \theta < \pi$ 에서 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ 이므로

$$0 \leq \frac{2}{3}\pi \sin \theta \leq \frac{2}{3}\pi$$

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi \sin \theta\right) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\frac{2}{3}\pi \sin \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < \pi \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \pi$$

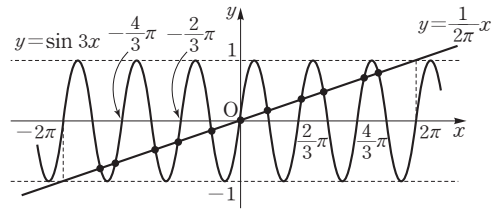
답 (1) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$ (2) π

235

(i) $n=3$ 일 때

$$y = \sin 3x \text{의 주기는 } \frac{2}{3}\pi \text{이므로 함수 } y = \sin 3x$$

의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2\pi}x$ 는 다음 그림과 같다.

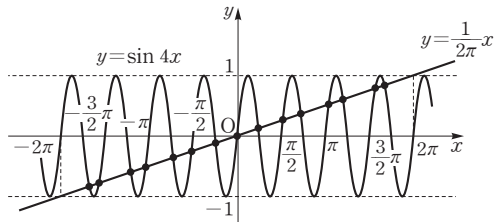


$$\therefore f(3) = 11$$

(ii) $n=4$ 일 때

$$y = \sin 4x \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{이므로 함수}$$

$y = \sin 4x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2\pi}x$ 는 다음 그림과 같다.



$$\therefore f(4) = 15$$

(i), (ii)에서 $f(3) + f(4) = 26$

답 26

236

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{3} \sin x + 1 \text{에서}$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = \sqrt{3} \sin x + 1$$

$$\sin x(2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{이므로}$$

$$\sin x = 0 \text{일 때, } x = 0 \text{ 또는 } x = \pi$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{일 때, } x = \frac{\pi}{6}$$

따라서 모든 실근의 합은 $0 + \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$

답 ①

237

$$y = x^2 - 2x \sin \theta + \cos^2 \theta$$

$$= (x - \sin \theta)^2 - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

이므로 꼭짓점의 좌표는

$$(\sin \theta, -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

(1) 이 점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\begin{aligned} -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= \sin \theta \\ -\sin^2 \theta + (1 - \sin^2 \theta) &= \sin \theta \\ 2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 1 &= 0 \\ (2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 1) &= 0 \\ \therefore \sin \theta &= \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin \theta = -1 \end{aligned}$$

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

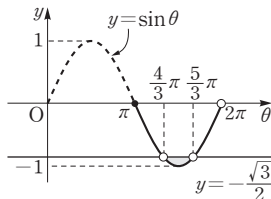
$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

(2) 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점이 직선

$$\begin{aligned} y = \sqrt{3}x + 1 \text{의 아래쪽에 있으므로} \\ -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta &< \sqrt{3} \sin \theta + 1 \\ -2 \sin^2 \theta + 1 &< \sqrt{3} \sin \theta + 1 \\ 2 \sin^2 \theta + \sqrt{3} \sin \theta &> 0 \\ \sin \theta (2 \sin \theta + \sqrt{3}) &> 0 \\ \therefore \sin \theta &< -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } \sin \theta > 0 \end{aligned}$$

오른쪽 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$



$$\text{답 (1) } \frac{\pi}{6} \quad (2) \frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

238

$$\sin^2 \theta - \cos \theta - a + 1 = 0 \text{에서}$$

$$(1 - \cos^2 \theta) - \cos \theta - a + 1 = 0$$

$$\cos^2 \theta + \cos \theta + a - 2 = 0$$

$$\cos^2 \theta + \cos \theta - 2 = -a$$

이 방정식이 실근을 가지려면 직선 $y = -a$ 와 함수 $y = \cos^2 \theta + \cos \theta - 2$ 의 그래프가 교점을 가져야 한다.

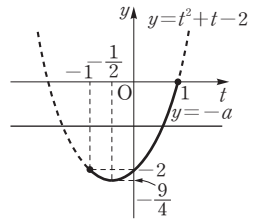
이때 $\cos \theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t^2 + t - 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

오른쪽 그림에서 θ 가 존재하려면, 즉 주어진 방정식의 실근이 존재하려면

$$-\frac{9}{4} \leq -a \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{9}{4}$$



$$\text{답 } 0 \leq a \leq \frac{9}{4}$$

239

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$ 이므로 $C=180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{10\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore a = 30$$

답 30

240

사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{4}{\sin B} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore \sin B = \frac{1}{2}$$

그런데 $C=60^\circ$ 에서 $0^\circ < B < 120^\circ$ 이므로 $B=30^\circ$

$$\therefore A = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

따라서 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{a}{\sin 90^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \quad \therefore a = 8$$

답 ③

241

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 $R=3, a+b+c=12$

사인법칙에 의하여

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}$$

$$= \frac{a+b+c}{2R}$$

$$= \frac{12}{6} = 2$$

답 2

242

코사인법칙에 의하여

$$b^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos 60^\circ$$

$$= 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 39$$

그런데 $b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{39}$

또한 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{39}}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{13}$$

$$\therefore R = \sqrt{13}$$

따라서 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = 13\pi$$

답 13 π

243

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$B + D = 180^\circ \text{에서 } D = 180^\circ - B$$

$$\therefore \cos D = \cos(180^\circ - B)$$

$$= -\cos B = -\frac{1}{4}$$

따라서 삼각형 DAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos D$$

$$= 4 + 9 - 12 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= 16$$

$$\therefore \overline{AC} = 4 \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

답 4

244

$\sin A = \sqrt{2} \sin B = 2 \sin C$ 의 각 변을 2로 나누면

$$\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{\sqrt{2}} = \sin C$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

$$= 2 : \sqrt{2} : 1$$

$a = 2k, b = \sqrt{2}k, c = k (k > 0)$ 로 놓으면

a 가 가장 긴 변의 길이이므로 최대각의 크기는 A 이다.

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \cos A = \frac{(\sqrt{2}k)^2 + k^2 - (2k)^2}{2 \cdot \sqrt{2}k \cdot k}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ③

245

$$a - 2b + c = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$3a + b - 2c = 0 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{3}{7}c, b = \frac{5}{7}c$$

$$\therefore a : b : c = \frac{3}{7}c : \frac{5}{7}c : c = 3 : 5 : 7$$

따라서 $a = 3k, b = 5k, c = 7k (k > 0)$ 로 놓으면

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 5k} = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

246

꼭짓점 A에서 \overline{BC} 에 내

린 수선의 발을 H라 하

면 삼각형 AHC는 직각

이등변삼각형이므로

$$\overline{AH} = \overline{HC} = 1$$

또 직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BH}^2 = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 4$$

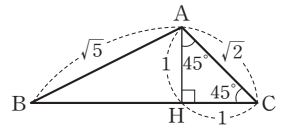
$$\therefore \overline{BH} = 2 \quad (\because \overline{BH} > 0)$$

$$\therefore a = \overline{BH} + \overline{HC} = 2 + 1 = 3$$

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3}{\sin A} = \frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ} \quad \therefore \sin A = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

답 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$



247

드론의 높이를 h m라 하면

직각삼각형 PAQ에서

$$h = \overline{AP} \sin 30^\circ \quad \therefore \overline{AP} = 2h \text{ (m)}$$

삼각형 PAB에서

$$\angle APB = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{2h}{\sin 60^\circ} = \frac{40}{\sin 45^\circ} \quad \therefore h = 10\sqrt{6} \text{ (m)}$$

따라서 드론의 높이는 $10\sqrt{6}$ m이다.

답 $10\sqrt{6}$ m

248

오른쪽 직육면체에서

$$\overline{AF} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

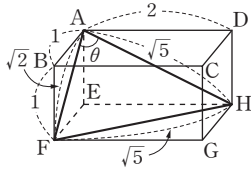
$$\overline{AH} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\overline{FH} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

이므로 코사인법칙에

의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{AF}^2 + \overline{AH}^2 - \overline{FH}^2}{2 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AH}} = \frac{2 + 5 - 5}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$



답 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

249

$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 4 : 3$ 이므로

$a = 2k, b = 4k, c = 3k$ ($k > 0$)로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(4k)^2 + (3k)^2 - (2k)^2}{2 \cdot 4k \cdot 3k} = \frac{7}{8}$$

이때 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 이고, $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

한편, $A + B + C = 180^\circ$ 에서 $B + C = 180^\circ - A$ 이므로

$$\sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\therefore \sin A + \sin(B + C) = 2 \sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

답 ③

250

삼각형 ABC에서 $A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$A + C = 180^\circ - B$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin\left(\frac{A - B + C}{2}\right) &= \sin\left(\frac{180^\circ - 2B}{2}\right) \\ &= \sin(90^\circ - B) \\ &= \cos B \end{aligned}$$

따라서 주어진 등식은

$$2 \cos B \sin A = \sin C \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 나타낼 수 있다.

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R} \text{ 이고,}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{ 이므로 이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$2 \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \cdot \frac{a}{2R} = \frac{c}{2R}$$

$$a^2 = b^2 \quad \therefore a = b \quad (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

답 ④

251

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{2\sqrt{b} \sin(B + C)\}^2 - 4a \sin^2 A = 0$$

$$4b \sin^2(B + C) - 4a \sin^2 A = 0$$

$$4b \sin^2(\pi - A) - 4a \sin^2 A = 0$$

$$4b \sin^2 A - 4a \sin^2 A = 0$$

$$4(b - a) \sin^2 A = 0$$

$$\therefore a = b \text{ 또는 } \sin^2 A = 0$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$\sin A \neq 0$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

답 ③

252

원에 내접하는 사각형 ABCD에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 이므로

$$A + C = 180^\circ$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cos A \\ &= 1 + 16 - 8 \cos A \\ &= 17 - 8 \cos A \end{aligned} \quad \dots \textcircled{A}$$

또 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cos C \\ &= 4 + 9 - 12 \cos (180^\circ - A) \\ &= 13 + 12 \cos A \end{aligned} \quad \dots \textcircled{B}$$

\textcircled{A} , \textcircled{B} 이 같아야 하므로

$$17 - 8 \cos A = 13 + 12 \cos A$$

$$20 \cos A = 4$$

$$\therefore \cos A = \frac{1}{5}$$

답 ①

253

$$\overline{AC} = 6\sqrt{2} \text{이므로 } \overline{AD} = \frac{1}{3} \overline{AC} = 2\sqrt{2}$$

삼각형 ABD에서 $A = 45^\circ$, $\overline{AD} = 2\sqrt{2}$ 이므로 코사인 법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cos 45^\circ \\ &= 36 + 8 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BD} = 2\sqrt{5} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

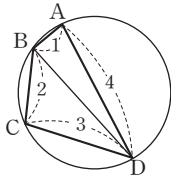
이때 $\triangle ABD \cong \triangle CBE$ (SAS 합동)이므로

$$\overline{BE} = \overline{BD} = 2\sqrt{5}$$

따라서 $\triangle DBE$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 - \overline{DE}^2}{2 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BE}} \\ &= \frac{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{4}{5}$



254

각 변의 길이는 양수이므로 $2x+1 > 0$, $x^2-1 > 0$ 에서 $x > 1$

이때

$$x^2 + x + 1 - (2x + 1) = x(x - 1) > 0 \text{이므로}$$

$$x^2 + x + 1 > 2x + 1$$

$$x^2 + x + 1 - (x^2 - 1) = x + 2 > 0 \text{이므로}$$

$$x^2 + x + 1 > x^2 - 1$$

즉 가장 긴 변의 길이가 $x^2 + x + 1$ 이므로 최대각은 길이가 $x^2 + x + 1$ 인 변의 대각이다.

최대각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(2x+1)^2 + (x^2-1)^2 - (x^2+x+1)^2}{2(2x+1)(x^2-1)} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\theta = 120^\circ$

따라서 최대각의 크기는 120° 이다.

답 120°

255

$$\sin A : \sin B = a : b = \sqrt{2} : 1 \text{이므로}$$

$$a = \sqrt{2}b$$

한편, $c^2 = b^2 + ac$ 이고 $a = \sqrt{2}b$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + (b^2 + ac) - 2b^2}{2bc} \\ &= \frac{\sqrt{2}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

그런데 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 45^\circ$

이때 $a : b = \sqrt{2} : 1$ 에서 $a = \sqrt{2}k$, $b = k$ ($k > 0$)로 놓으면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{2}k}{\sin 45^\circ} = \frac{k}{\sin B} \quad \therefore \sin B = \frac{1}{2}$$

그런데 $0^\circ < B < 135^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$$

답 ④

256

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cos 60^\circ = 52$$

$$\therefore \overline{BC} = 2\sqrt{13} \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 60^\circ$$

이므로

$$\overline{AH} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{39}}{13}$$

답 $\frac{12\sqrt{39}}{13}$

257

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{4^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

($\because \sin C > 0$)

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$$

답 $4\sqrt{6}$

258

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 + 15 \\ &= 49 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 7 \quad (\because a > 0)$$

한편, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} bc \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

따라서 $S = \frac{1}{2} r(a+b+c)$ 에서

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} r(7+3+5)$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

259

사각형 ABCD의 넓이가 3이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin \theta = 3, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{3}$$

따라서 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

260

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로

사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = 8 \quad \therefore a = 4$$

$$\frac{b}{\sin 45^\circ} = 8 \quad \therefore b = 4\sqrt{2}$$

코사인법칙에 의하여 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ 이므로

$$32 = 16 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cos 45^\circ$$

$$c^2 - 4\sqrt{2}c - 16 = 0$$

$$\therefore c = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \quad (\because c > 0)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

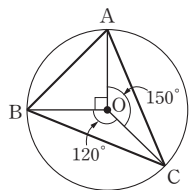
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} bc \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot \sin 30^\circ \\ &= 4(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

답 $4(1 + \sqrt{3})$

261

부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로 원의 중심을 O라 할 때

$$\begin{aligned} \angle AOB : \angle BOC : \angle COA \\ = 3 : 4 : 5 \end{aligned}$$



$$\therefore \angle AOB = 360^\circ \times \frac{3}{12} = 90^\circ,$$

$$\angle BOC = 360^\circ \times \frac{4}{12} = 120^\circ,$$

$$\angle COA = 360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COA$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot \sin 150^\circ$$

$$= 200 + 100\sqrt{3} + 100$$

$$= 100(3 + \sqrt{3})$$

답 100(3+√3)

262

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 8이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{16}, \sin B = \frac{b}{16}, \sin C = \frac{c}{16}$$

이때 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{a}{16} + \frac{b}{16} + \frac{c}{16} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore a + b + c = 20$$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

삼각형 ABC의 넓이가 20이므로

$$\frac{1}{2}r(a+b+c) = 20$$

$$\frac{1}{2}r \cdot 20 = 20$$

$$\therefore r = 2$$

답 ①

263

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{7})^2 = \overline{AB}^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\overline{AB} \cdot \sqrt{3} \cos 30^\circ$$

$$7 = \overline{AB}^2 + 3 - 2\overline{AB} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\overline{AB}^2 - 3\overline{AB} - 4 = 0$$

$$(\overline{AB} - 4)(\overline{AB} + 1) = 0$$

$$\therefore \overline{AB} = 4 (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

답 ③

264

삼각형 APB는 $\angle P = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$= 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

또한 삼각형 QAB는

$\angle Q = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각

형이므로

$$\overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 = \overline{AB}^2$$

$$= (2\sqrt{5})^2 = 20$$

$$\therefore \overline{QA} = \overline{QB} = \sqrt{10} \text{ (cm)}$$

$$\therefore \square APBQ = \triangle PAB + \triangle QAB$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 9 \text{ (cm}^2\text{)}$$

한편, $\angle ABQ = \angle APQ = 45^\circ$,

$\angle BAQ = \angle BPQ = 45^\circ$ 이므로

$\overline{PQ} = x$ cm라 하면

$$\square APBQ = \triangle PAQ + \triangle PBQ$$

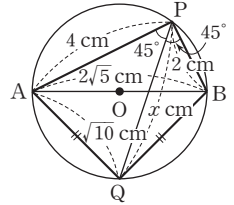
$$9 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} x$$

$$\therefore x = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

따라서 선분 PQ의 길이는 $3\sqrt{2}$ cm이다.

답 ①



265

$\overline{BD} : \overline{CD} = 3 : 4 = \overline{AB} : \overline{AC}$ 이므로 \overline{AD} 는

$\angle BAC$ 의 이등분선이다.

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 60^\circ$$

이때 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$ 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \overline{AD} \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \overline{AD} \cdot \sin 60^\circ$$

$$75\sqrt{3} = \frac{15\sqrt{3}}{4}\overline{AD} + 5\sqrt{3}\overline{AD}$$

$$\frac{35\sqrt{3}}{4}\overline{AD} = 75\sqrt{3} \quad \therefore \overline{AD} = \frac{60}{7} \text{ (km)}$$

따라서 구하는 직선도로의 길이는 $\frac{60}{7}$ km이다.

답 $\frac{60}{7}$ km

266

$\overline{AP} = x$, $\overline{AQ} = y$ 라 하면 $\triangle APQ = \frac{1}{2}\triangle ABC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}xy = 3\sqrt{3} \quad \therefore xy = 12$$

삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ$$

$$= x^2 + y^2 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= x^2 + y^2 - 12$$

이때 $x^2 > 0$, $y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + y^2 - 12 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} - 12$$

$$= 2 \cdot 12 - 12$$

$$= 12 \text{ (단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립)}$$

$$\therefore \overline{PQ} \geq \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

답 $2\sqrt{3}$

Ⅲ. 수열

267

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면
 $a_5 - a_2 = a_7$ 에서
 $a_5 - a_2 = (9 + 4d) - (9 + d) = 3d$,
 $a_7 = 9 + 6d$ 이므로
 $3d = 9 + 6d$
 $\therefore d = -3$
 $\therefore a_{10} = 9 + 9d = 9 + 9 \cdot (-3) = -18$

답 -18

268

제2항과 제6항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로
 제2항과 제6항의 합은 0이다.
 즉 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $(a + d) + (a + 5d) = 0$, $2a + 6d = 0$
 $\therefore a + 3d = 0$ ㉠
 또 제3항이 -2 이므로
 $a + 2d = -2$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a = -6$, $d = 2$

답 첫째항 : -6, 공차 : 2

269

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_2 = a + d = -37$
 $a_5 - a_2 = (a + 4d) - (a + d) = 3d = 9$
 $\therefore a = -40$, $d = 3$
 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면
 $a_n = -40 + 3(n - 1) = 3n - 43 > 0$
 $\therefore n > \frac{43}{3} = 14.\times\times\times$
 따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제15항이다.

답 제15항

270

a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
 $b = \frac{a+c}{2}$ ㉠
 $-c, 2b, 4a$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
 $2b = \frac{-c+4a}{2} \therefore b = \frac{4a-c}{4}$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 $\frac{a+c}{2} = \frac{4a-c}{4}$
 $2(4a-c) = 4(a+c)$
 $4a = 6c \therefore a = \frac{3}{2}c$ ㉢
 ㉢을 ㉠에 대입하면 $b = \frac{5}{4}c$
 $\therefore \frac{a+b}{c} = \frac{\frac{3}{2}c + \frac{5}{4}c}{c} = \frac{\frac{11}{4}c}{c} = \frac{11}{4}$

답 $\frac{11}{4}$

271

직각삼각형의 세 변의 길이가 등차수열을 이루므로 세
 변의 길이를 각각 $a-d, a, a+d$ 라 하면 피타고라스
 정리에 의하여
 $(a+d)^2 = (a-d)^2 + a^2$, $a(a-4d) = 0$
 $\therefore a = 4d$ ($\because a \neq 0$)
 따라서 세 변의 길이는 각각 $3d, 4d, 5d$ 이다.
 이때 삼각형의 넓이 S 는
 $S = \frac{1}{2} \cdot 3d \cdot 4d = 6d^2 = 54$
 $d^2 = 9 \therefore d = 3$ ($\because d > 0$)
 따라서 이 삼각형의 세 변의 길이의 합은
 $3d + 4d + 5d = 12d = 36$

답 36

272

투구 수는 첫째항이 50, 공차가 2인 등차수열을 이루
 므로 30일 동안의 투구 수의 합은
 $\frac{30\{2 \cdot 50 + (30-1) \cdot 2\}}{2} = 2370$

답 ㉡

273

$S_n = n^2 + kn + 1$, $T_n = 2n^2 - 3n - 1$ 이라 하면
 $S_{10} - S_9 = T_{10} - T_9$ 이므로
 $(10^2 + 10k + 1) - (9^2 + 9k + 1)$
 $= (2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 - 1) - (2 \cdot 9^2 - 3 \cdot 9 - 1)$
 $19 + k = 35 \quad \therefore k = 16$

답 16

274

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_2^2 = a_1 a_7 + 5$ 에서
 $(a + d)^2 = a(a + 6d) + 5$
 $2ad + d^2 = 6ad + 5$, $d(d - 4a) = 5$
 이때 a 와 d 는 자연수이므로
 $d = 1$, $d - 4a = 5$ 또는 $d = 5$, $d - 4a = 1$
 (i) $d = 1$, $d - 4a = 5$ 일 때
 $a = -1$ 이 되어 a 는 자연수가 아니므로 모순이다.
 (ii) $d = 5$, $d - 4a = 1$ 일 때
 $4a = 4 \quad \therefore a = 1$
 (i), (ii)에서 $a = 1$, $d = 5$ 이므로
 $a_{20} = 1 + 19 \cdot 5 = 96$

답 96

275

수열 $1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 2$ 는 첫째항이 1, 끝항이 2,
 항수가 $n + 2$ 인 등차수열이고
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 27$ 이므로
 $1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + 2 = 30$
 $\therefore \frac{(n+2)(1+2)}{2} = 30 \quad \therefore n = 18$
 이때 2는 제 $n + 2$ 항이므로 $1 + (n + 1)d = 2$ 에서
 $1 + 19d = 2 \quad \therefore d = \frac{1}{19}$
 $\therefore n + 19d = 18 + 19 \cdot \frac{1}{19} = 19$

답 19

276

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 10$ 에서

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 10$$

$$\therefore 2a + 9d = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{20} = 50$ 에서

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a + 19d)}{2} - 10 = 50$$

$$\therefore 2a + 19d = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -\frac{4}{5}$, $d = \frac{2}{5}$

$$\therefore a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{40}$$

$$= S_{40} - S_{20}$$

$$= \frac{40(2a + 39d)}{2} - (10 + 50)$$

$$= \frac{40 \left\{ 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 39 \cdot \frac{2}{5} \right\}}{2} - 60$$

$$= 280 - 60 = 220$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{1}{10} \times 220 = 22$$

답 22

277

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = 17 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_2 : a_7 = 4 : 1 \text{이므로}$$

$$(a + d) : (a + 6d) = 4 : 1$$

$$4(a + 6d) = a + d$$

$$\therefore 3a + 23d = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 23, d = -3$$

제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$$a_n = 23 - 3(n - 1) = -3n + 26 < 0$$

$$\therefore n > \frac{26}{3} = 8.\times\times\times$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제 9 항에서 처음으로 음수가
 되므로 첫째항부터 제 8 항까지의 합이 최대가 된다.

답 제8항

278

두 자리의 자연수 중에서 4의 배수의 합은

$$12+16+20+\dots+96=\frac{22(12+96)}{2}=1188$$

두 자리의 자연수 중에서 7의 배수의 합은

$$14+21+28+\dots+98=\frac{13(14+98)}{2}=728$$

두 자리의 자연수 중에서 28의 배수의 합은

$$28+56+84=168$$

따라서 구하는 총합은

$$1188+728-168=1748$$

답 1748

279

$S_n=2f(n)$ 에서 $f(n)=-\frac{1}{2}n^2+3n$ 이므로

$$S_n=2\left(-\frac{1}{2}n^2+3n\right)=-n^2+6n$$

$$\begin{aligned} \therefore a_6 &= S_6 - S_5 \\ &= (-6^2+6\cdot 6) - (-5^2+6\cdot 5) = -5 \end{aligned}$$

답 ③

280

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_n = a + 2(n-1) = 2n + a - 2$$

$$b_n = a - 3(n-1) = -3n + a + 3$$

$$\begin{aligned} \therefore 3a_n + 4b_n &= 3(2n + a - 2) + 4(-3n + a + 3) \\ &= -6n + 7a + 6 \\ &= 7a + (n-1)\cdot(-6) \end{aligned}$$

따라서 등차수열 $\{3a_n + 4b_n\}$ 의 공차는 -6 이다.

답 -6

281

세 수 $a, b, 2$ 와 세 수 $2, d, f$ 가 각각 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2d = 2 + f \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } 2(b-d) = a-f$$

또한 세 수 $b, c, 6$ 과 세 수 $1, c, d$ 가 각각 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2c = b + 6, 2c = 1 + d$$

$$b + 6 = 1 + d \quad \therefore b - d = -5$$

$$\begin{aligned} \therefore a + b - (d + f) &= (a - f) + (b - d) \\ &= 2(b - d) + (b - d) \\ &= 3(b - d) \\ &= 3 \cdot (-5) = -15 \end{aligned}$$

답 -15

282

첫째항이 a 이고 공차가 -4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째 항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2a - 4(n-1)\}}{2} = -2n^2 + (a+2)n$$

이때 $S_n < 200$ 이므로

$$-2n^2 + (a+2)n < 200, 2n^2 + 200 > (a+2)n$$

n 이 자연수이므로 양변을 n 으로 나누면

$$2n + \frac{200}{n} > a + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$n > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2n + \frac{200}{n} \geq 2\sqrt{2n \cdot \frac{200}{n}} = 2 \cdot 20 = 40$$

(단, 등호는 $2n = \frac{200}{n}$, 즉 $n = 10$ 일 때 성립)

모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립하려면

$$a + 2 < 40 \quad \therefore a < 38$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 37이다.

답 37

283

조건 (가)에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 134 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + a_n &= a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} \\ &= 2a + (n-1)d \end{aligned}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 160$$

$$4(a_1 + a_n) = 160 \quad \therefore a_1 + a_n = 40$$

조건 (다)에서

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 260$$

$$\frac{40n}{2} = 260 \quad \therefore n = 13$$

답 13

284

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - 20n) - \{(n-1)^2 - 20(n-1)\} \\ &= 2n - 21 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\text{첫째항 } a_1 = S_1 = -19$$

이때 $a_1 = -19$ 는 위의 $a_n = 2n - 21$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같다.

$$\therefore a_n = 2n - 21$$

제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면

$$2n - 21 > 0 \text{에서 } n > \frac{21}{2} = 10.5$$

즉 첫째항부터 제 10 항까지는 음수이고 제 11 항부터 양수이다.

$$\begin{aligned} \therefore |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{15}| \\ &= -(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) + (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{15}) \\ &= -S_{10} + (S_{15} - S_{10}) \\ &= S_{15} - 2S_{10} \\ &= (15^2 - 20 \cdot 15) - 2(10^2 - 20 \cdot 10) \\ &= -75 + 200 \\ &= 125 \end{aligned}$$

답 125

285

삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a , $a+d$ ($d > 0$)라 하면 세 변의 길이의 합은

$$(a-d) + a + (a+d) = 3a = 30$$

$$\therefore a = 10$$

즉 삼각형의 세 변의 길이는 $10-d$, 10 , $10+d$ 이고, $\angle C = 120^\circ$ 이므로 $\angle C$ 의 대변의 길이가 $10+d$ 이다.

코사인법칙에 의하여

$$\cos 120^\circ = \frac{10^2 + (10-d)^2 - (10+d)^2}{2 \cdot 10(10-d)}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{100 - 40d}{20(10-d)}$$

$$20(10-d) = -2(100 - 40d)$$

$$\therefore d = 4$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10(10-4) \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

답 $15\sqrt{3}$

286

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$k_1 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$= a + (a+d) + (a+2d) = 3a + 3d$$

$$k_2 = a_4 + a_5 + a_6$$

$$= (a+3d) + (a+4d) + (a+5d)$$

$$= 3a + 12d$$

$$k_3 = a_7 + a_8 + a_9$$

$$= (a+6d) + (a+7d) + (a+8d)$$

$$= 3a + 21d$$

⋮

따라서 수열 $\{k_n\}$ 은 첫째항이 $3a+3d$, 공차가 $9d$ 인

등차수열이므로

$$k_n = 3a + 3d + (n-1) \cdot 9d = 3a + (9n-6)d$$

그런데 $a_{10} - a_8 = 6$ 이므로

$$(a+9d) - (a+7d) = 6$$

$$2d = 6 \quad \therefore d = 3$$

$$\therefore k_{10} - k_8 = (3a + 84d) - (3a + 66d)$$

$$= 18d = 18 \cdot 3 = 54$$

답 ③

287

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_5 = 8a_2 \text{이므로}$$

$$ar^4 = 8ar, r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2$$

$$\therefore \frac{a_3 a_4}{a_2 a_6} = \frac{ar^2 \cdot ar^3}{ar \cdot ar^5} = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

288

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_{10} = ar^9 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{15} = ar^{14} = 192 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^5 = 32 \quad \therefore r = 2$$

$$\therefore a_9 = a_{10} \div 2 = 6 \div 2 = 3$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 제 9 항부터 제 16 항까지의 합은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 8 항까지의 합과 같으므로

$$\frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 765$$

답 765

289

첫째항이 1, 공비가 $\frac{5}{2}$ 이므로 일반항은

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

제 n 항에서 처음으로 1000보다 커진다고 하면

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} > 1000$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} > \log 1000, (n-1) \log \frac{5}{2} > 3$$

$$(n-1)(\log 5 - \log 2) > 3$$

$$(n-1)\left(\log \frac{10}{2} - \log 2\right) > 3$$

$$(n-1)(1 - 2 \log 2) > 3$$

$$n-1 > \frac{3}{1-2 \log 2}$$

$$\therefore n > \frac{3}{1-2 \log 2} + 1 = 8. \times \times \times$$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제 9 항이다.

답 제 9 항

290

공비를 r 라 하면 첫째항이 1, 제 5 항이 100이므로

$$1 \cdot r^4 = 100 \quad \therefore r^2 = 10$$

따라서 $a_2 = 1 \cdot r^2 = 10$ 이므로

$$4 \log a_2 = 4 \log 10 = 4$$

답 4

291

세 수 $f(a)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a+2)$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $f(\sqrt{3})$ 은 $f(a)$ 와 $f(a+2)$ 의 등비중항이다.

즉 $\{f(\sqrt{3})\}^2 = f(a)f(a+2)$ 이므로

$$\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{p}{a} \times \frac{p}{a+2}$$

이때 $p > 1$ 이므로 양변을 p^2 으로 나누면

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{a(a+2)}, a(a+2) = 3$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0, (a-1)(a+3) = 0$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0)$$

답 ①

292

공비를 r 라 하면 $b = ar$, $c = ar^2$

조건 (가)에서

$$a + b + c = a + ar + ar^2 = \frac{7}{2}$$

$$\therefore a(1 + r + r^2) = \frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$abc = a \cdot ar \cdot ar^2 = 1$$

$$a^3 r^3 = (ar)^3 = 1 \quad \therefore ar = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{1+r+r^2}{r} = \frac{7}{2}, 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(r-2)(2r-1) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} (\because a > b > c \text{에서 } 0 < r < 1)$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $a = 2$

즉 $a = 2$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$ 이므로

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

답 $\frac{21}{4}$

293

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로
 $a_n = 2^{n-1}$

$$\therefore a_n a_{n+1} = 2^{n-1} \cdot 2^n = 2^{2n-1} = 2 \cdot 4^{n-1}$$

즉 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 2이고 공비가 4인 등비수열이다.

따라서 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\frac{2(4^{10}-1)}{4-1} = \frac{2}{3}(4^{10}-1)$$

답 ④

294

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3이고 공비가 -2인 등비수열이므로

$$a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{10}| \\ &= |3| + |3 \cdot (-2)| + |3 \cdot (-2)^2| \\ &\quad + |3 \cdot (-2)^3| + \dots + |3 \cdot (-2)^9| \\ &= 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 3 \cdot 2^9 \\ &= \frac{3(2^{10}-1)}{2-1} = 3(2^{10}-1) = 3069 \end{aligned}$$

답 3069

295

$$S_n = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} a_{20} &= S_{20} - S_{19} = \left\{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right\} - \left\{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{19}\right\} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{19} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{19} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{19}$

296

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore 2a_{n+1} + a_n = 2ar^n + ar^{n-1} = a(2r+1)r^{n-1}$$

이때 수열 $\{2a_{n+1} + a_n\}$ 의 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$a(2r+1) = 4, r = \frac{1}{2}$$

$$2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

따라서 $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$a_2 = 1$$

답 1

297

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= a + ar + ar^2 \\ &= a(1+r+r^2) = 6 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} a_4 + a_5 + a_6 &= ar^3 + ar^4 + ar^5 \\ &= ar^3(1+r+r^2) = 48 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a_1 + a_3 + a_5}{a_2 + a_4 + a_6} &= \frac{a + ar^2 + ar^4}{ar + ar^3 + ar^5} \\ &= \frac{a + ar^2 + ar^4}{r(a + ar^2 + ar^4)} \\ &= \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

298

세 수 x, y, z 는 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이루므로

$$y = xr, z = xr^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

또 세 수 $x, 2y, 3z$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$4y = x + 3z \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$4xr = x + 3xr^2 \quad \therefore 3xr^2 - 4xr + x = 0$$

이때 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$3r^2 - 4r + 1 = 0, (3r-1)(r-1) = 0$$

$$x \neq y \text{이므로 } r \neq 1 \quad \therefore r = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

299

주어진 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned}
& 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999 \cdots 9}_{n\text{개}} \\
&= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \cdots + (10^n-1) \\
&= (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) - n \\
&= \frac{10(10^n-1)}{10-1} - n \\
&= \frac{10^{n+1}-10}{9} - n \\
&= \frac{1}{9}(10^{n+1}-9n-10)
\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{9}(10^{n+1}-9n-10)$

300

첫째항을 a 라 하면 공비는 2이므로

$$a_n = a \cdot 2^{n-1} = 400 \quad \dots \textcircled{A}$$

$$S_n = \frac{a(2^n-1)}{2-1} = 750 \quad \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} \div \textcircled{B}$ 을 하면

$$\frac{2^n-1}{2^{n-1}} = \frac{750}{400} = \frac{15}{8}$$

$$8(2^n-1) = 15 \cdot 2^{n-1}$$

$$16 \cdot 2^{n-1} - 8 = 15 \cdot 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 8 = 2^3, n-1 = 3$$

$$\therefore n = 4$$

답 4

301

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

$$= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5$$

$$= a(1+r+r^2+r^3+r^4+r^5) = \frac{63}{8}$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = a \cdot ar \cdot ar^2 \cdot ar^3 \cdot ar^4 \cdot ar^5$$

$$= a^6 r^{1+2+3+4+5} = a^6 r^{15}$$

$$= (a^2 r^5)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\therefore a^2 r^5 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \frac{1}{ar^3} + \frac{1}{ar^4} + \frac{1}{ar^5} \\
&= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} \right) \\
&= \frac{1}{a} \cdot \frac{1+r+r^2+r^3+r^4+r^5}{r^5} \\
&= \frac{a(1+r+r^2+r^3+r^4+r^5)}{a^2 r^5} = \frac{\frac{63}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{4}
\end{aligned}$$

답 $\frac{63}{4}$

302

주어진 등비수열의 공비를 r , 일반항을 b_n 이라 하면

$$b_1 = 3 \text{이므로}$$

$$b_n = 3r^{n-1}$$

$$\therefore 3 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} + 40 = \frac{3(r^{12}-1)}{r-1}$$

또한 수열 $\left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{b_1} = \frac{1}{3}$ 이고 공비가 $\frac{1}{r}$

인 등비수열이므로

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{10}} + \frac{1}{40}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{r} \right)^{12} \right\}}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{r^{12}-1}{3r^{11}(r-1)}$$

이때

$$3 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} + 40$$

$$= k \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{10}} + \frac{1}{40} \right)$$

이므로

$$\frac{3(r^{12}-1)}{r-1} = \frac{k(r^{12}-1)}{3r^{11}(r-1)} \quad \therefore k = 9r^{11}$$

그런데 $b_{12} = 3r^{11} = 40$ 이므로

$$k = 9r^{11} = 3 \times 3r^{11} = 3 \times 40 = 120$$

답 120

303

첫째항을 a 라 하면

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{a(r^{3n}-1)}{r-1} = 7, \frac{r^{3n}-1}{r^n-1} = 7$$

$$\frac{(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r^n-1} = 7, r^{2n}+r^n+1=7$$

$$(r^n)^2+r^n-6=0, (r^n+3)(r^n-2)=0$$

$$\therefore r^n=2 (\because r>1)$$

$$\therefore \frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{a(r^{2n}-1)}{r-1} = \frac{r^{2n}-1}{r^n-1}$$

$$= \frac{(r^n+1)(r^n-1)}{r^n-1}$$

$$= r^n+1=3$$

답 3

304

첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$|S_n - 1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-3} = \frac{1}{1000} \text{이므로}$$

$$2^n > 1000$$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$ 이므로 $n \geq 10$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10이다.

답 10

305

$\log_2(S_n+k) = n+1$ 에서

$$S_n+k=2^{n+1} \quad \therefore S_n=2^{n+1}-k$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2^{n+1}-k) - (2^n-k)$$

$$= 2^{n+1}-2^n$$

$$= 2^n (n \geq 2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{첫째항 } a_1 = S_1 = 4-k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되기 위해서는 $\textcircled{1}$

에 $n=1$ 을 대입한 것이 $\textcircled{2}$ 과 같아야 하므로

$$4-k=2 \quad \therefore k=2$$

답 ②

다른풀이 $S_n=2^{n+1}-k=2 \cdot 2^n-k$ 에서

$$2-k=0 \quad \therefore k=2$$

306

$$S_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2}, T_n = -\frac{1}{2}n^2 + kn$$

이라 하면

$$a_3 = S_3 - S_2 = \left(2^2 - \frac{1}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 2,$$

$$b_1 = T_1 = -\frac{1}{2} + k$$

이므로 $a_3 = b_1$ 에서

$$2 = -\frac{1}{2} + k \quad \therefore k = \frac{5}{2}$$

이때

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(2^{n-1} - \frac{1}{2}\right) - \left(2^{n-2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2^{n-2} (n \geq 2)$$

$$\text{첫째항 } a_1 = S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

이므로 $a_n = 2^{n-2}$

또

$$b_n = T_n - T_{n-1}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n\right) - \left\{-\frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{5}{2}(n-1)\right\}$$

$$= -n + 3 (n \geq 2)$$

$$\text{첫째항 } b_1 = T_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

이므로 $b_n = -n + 3$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$ 이고 공비가 2인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공차가 -1인 등차수열이므로

$$\{a_n\} : \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$\{b_n\} : 2, 1, 0, -1, -2, \dots$$

따라서 $a_m = b_l$ 을 만족시키는 두 자연수 m, l 의 순서쌍 (m, l) 은 $(2, 2), (3, 1)$ 뿐이다.

이때 $m \neq 3$ 이므로 $m=2, l=2$

$$\therefore k(m+l) = \frac{5}{2}(2+2) = 10$$

답 10

307

12개월 동안 20만 원씩 적립한 적립금의 원리합계를 S만 원이라 하면

$$S = 20 + 20(1+0.015) + \dots + 20(1+0.015)^{11}$$

이것은 첫째항이 20이고 공비가 1+0.015인 등비수열의 첫째항부터 제12항까지의 합이므로

$$S = \frac{20(1.015^{12}-1)}{1.015-1}$$

$$= \frac{20 \times 0.2}{0.015}$$

$$= 266. \times \times \times (\text{만 원})$$

이때 만 원 미만은 버리므로 12개월 말의 원리합계는 266만 원이다.

답 266만 원

308

세 수 a^n , 576, b^n 이 이 순서대로 등비수열을 이루면

576은 a^n 과 b^n 의 등비중항이므로

$$576^2 = a^n b^n$$

$$2^{12} \cdot 3^4 = (ab)^n$$

이때 ab 의 값이 최소가 되려면 자연수 n 이 최대이어야 하므로 n 의 최댓값은 4와 12의 최대공약수인 4이다.

따라서 $(ab)^4 = 2^{12} \cdot 3^4 = (2^3 \cdot 3)^4$ 이므로

$$ab = 2^3 \cdot 3 = 24$$

답 24

309

직사각형 R_1 의 짧은 변의 길이를 x 라 하면

정사각형 T_1 의 한 변의 길이도 x 이므로

직사각형 R_2 의 긴 변의 길이는 x , 짧은 변의 길이는

$$1-x \text{이다.}$$

두 직사각형 R_1, R_2 가 닮음이므로

$$1 : x = x : (1-x)$$

$$x^2 = 1-x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} (\because x > 0)$$

따라서 직사각형 R_1 의 넓이 S_1 은

$$S_1 = 1 \times x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

자연수 n 에 대하여 두 직사각형 R_n, R_{n+1} 의 닮음비는

$$1 : \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{이므로}$$

두 직사각형 R_n, R_{n+1} 의 넓이 S_n, S_{n+1} 의 비는

$$S_n : S_{n+1} = 1 : \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 이고, 공비가

$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ 인 등비수열이므로

$$S_{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left\{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}^9$$

$$= \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{19}$$

$$\text{답 } \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{19}$$

310

공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}$$

$$= 1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2n-2} = 91 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}$$

$$= r + r^3 + r^5 + \dots + r^{2n-1} = 273 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{r + r^3 + r^5 + \dots + r^{2n-1}}{1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2n-2}}$$

$$= \frac{r(1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2n-2})}{1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2n-2}}$$

$$= r = 3$$

$r = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$1 + 3^2 + 3^4 + \dots + 3^{2n-2} = \frac{1 \cdot (9^n - 1)}{9 - 1} = 91$$

$$9^n = 729 = 9^3$$

$$\therefore n = 3$$

$$\therefore r + n = 3 + 3 = 6$$

답 6

311

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 36 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{2n} \\ &= ar^n + ar^{n+1} + ar^{n+2} + \dots + ar^{2n-1} \\ &= \frac{ar^n(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \times r^n = 18 \quad \dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$36 \times r^n = 18 \quad \therefore r^n = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \dots + a_{3n} \\ &= ar^{2n} + ar^{2n+1} + ar^{2n+2} + \dots + ar^{3n-1} \\ &= \frac{ar^{2n}(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \times r^{2n} \\ &= 36r^{2n} = 36 \times (r^n)^2 \\ &= 36 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 36 \times \frac{1}{4} = 9 \end{aligned}$$

답 9

312

윤모와 동원이가 적립하여 받는 금액을 각각 A 만 원, B 만 원이라 하면

$$\begin{aligned} A &= 20(1+0.05) + 20(1+0.05)^2 + \dots \\ &\quad + 20(1+0.05)^{10} \\ &= \frac{20(1+0.05)\{(1+0.05)^{10}-1\}}{(1+0.05)-1} \end{aligned}$$

$$= 420(1.05^{10}-1) \text{ (만 원)}$$

$$\begin{aligned} B &= 40(1+0.05) + 40(1+0.05)^2 + \dots \\ &\quad + 40(1+0.05)^5 \\ &= \frac{40(1+0.05)\{(1+0.05)^5-1\}}{(1+0.05)-1} \end{aligned}$$

$$= 840(1.05^5-1) \text{ (만 원)}$$

$$\begin{aligned} \therefore A - B &= 420(1.05^{10}-1) - 840(1.05^5-1) \\ &= 420 \times 1.05^{10} - 420 - 840 \times 1.05^5 + 840 \\ &= 420(1.05^{10} - 2 \times 1.05^5 + 1) \\ &= 420 \times (1.05^5 - 1)^2 \\ &= 420 \times 0.28^2 = 32.928 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

따라서 윤모가 동원이보다 약 329000원 더 많다.

답 ⑤

313

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \dots + (a_{59} + a_{60}) \\ &= \sum_{k=1}^{60} a_k = 35 \\ \therefore \sum_{k=1}^{60} 2a_k &= 2 \sum_{k=1}^{60} a_k = 2 \times 35 = 70 \end{aligned}$$

답 70

314

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k^4 + 1) - \sum_{k=1}^{n-1} k^4 \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} (k^4 + 1) + n^4 + 1 \right\} - \sum_{k=1}^{n-1} k^4 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \{(k^4 + 1) - k^4\} + n^4 + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 1 + n^4 + 1 \\ &= (n-1) + n^4 + 1 = n^4 + n \end{aligned}$$

따라서 $n^4 + n = n^4 + 8$ 이므로

$$n = 8$$

답 ④

315

$$\neg. \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2$$

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$$

$$\therefore \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \neq \sum_{k=1}^n a_k^2 \text{ (거짓)}$$

$$\cup. \sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$$

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k b_k \neq \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k \text{ (거짓)}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ㄷ. } \sum_{k=1}^{2n} a_k \\
 &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\
 &\quad + (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n}) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

316

$$\begin{aligned}
 & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 \\
 &= \sum_{k=1}^9 a_k = \sum_{k=1}^9 \{2^k + (-1)^k\} \\
 &= \sum_{k=1}^9 2^k + \sum_{k=1}^9 (-1)^k \\
 &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} + \frac{-1 \cdot \{1 - (-1)^9\}}{1 - (-1)} \\
 &= 2^{10} - 2 - 1 \\
 &= 2^{10} - 3
 \end{aligned}$$

답 ①

317

주어진 수열의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} \frac{7}{9}(10^k - 1) &= \frac{7}{9} \left(\sum_{k=1}^{10} 10^k - \sum_{k=1}^{10} 1 \right) \\
 &= \frac{7}{9} \left\{ \frac{10(10^{10} - 1)}{10 - 1} - 1 \cdot 10 \right\} \\
 &= \frac{7}{9} \cdot \frac{10^{11} - 100}{9} \\
 &= \frac{7(10^{11} - 100)}{81}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{7(10^{11} - 100)}{81}$

318

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{10} (3k^2 + 2) + \sum_{k=2}^{10} (3k^2 - 2) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 + 2) + \left\{ \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2) - (3 \cdot 1^2 - 2) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{10} \{(3k^2 + 2) + (3k^2 - 2)\} - 1 \\
 &= \sum_{k=1}^{10} 6k^2 - 1 = 6 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 1 \\
 &= 6 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 1 \\
 &= 2310 - 1 = 2309
 \end{aligned}$$

답 2309

319

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하면 $S_n = \frac{n}{n+1}$ 이므로

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \\
 &= \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n(n+1)} \\
 &= \frac{1}{n(n+1)} \quad \dots\dots \text{㉠}
 \end{aligned}$$

$n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$

이때 $a_1 = \frac{1}{2}$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

320

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= S_{10} - S_9 \\
 &= \left\{ \sum_{k=1}^{11} (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 1) \right\} \\
 &\quad - \left\{ \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^9 (k^2 - 1) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \sum_{k=1}^{11} (k^2+1) - \sum_{k=1}^{10} (k^2+1) \right\} \\
 &\quad - \left\{ \sum_{k=1}^{10} (k^2-1) - \sum_{k=1}^9 (k^2-1) \right\} \\
 &= (11^2+1) - (10^2-1) = 23
 \end{aligned}$$

답 23

321

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=2}^{10} k^2 + \sum_{k=3}^{10} k^2 + \dots + \sum_{k=10}^{10} k^2 \\
 &= 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + \dots + 10 \cdot 10^2 \\
 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 \\
 &= \sum_{k=1}^{10} k^3 = \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 \\
 &= 55^2 = 3025
 \end{aligned}$$

답 3025

322

곡선 $y=x^2+x$ 와 직선 $y=nx-2$ 가 만나는 두 점 A, B의 좌표를 각각

$$A(\alpha_n, \alpha_n^2 + \alpha_n), B(\beta_n, \beta_n^2 + \beta_n)$$

이라 하면

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= \frac{\alpha_n^2 + \alpha_n - 0}{\alpha_n - 0} = \frac{\alpha_n(\alpha_n + 1)}{\alpha_n} = \alpha_n + 1 \\
 \beta_n &= \frac{\beta_n^2 + \beta_n - 0}{\beta_n - 0} = \frac{\beta_n(\beta_n + 1)}{\beta_n} = \beta_n + 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha_n + \beta_n = \alpha_n + \beta_n + 2$$

이때 이차방정식 $x^2+x=nx-2$,

즉 $x^2-(n-1)x+2=0$ 의 두 실근이 α_n, β_n 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = n - 1$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=4}^{20} (\alpha_n + \beta_n) &= \sum_{n=4}^{20} (\alpha_n + \beta_n + 2) \\
 &= \sum_{n=4}^{20} (n+1) \\
 &= \sum_{n=1}^{20} (n+1) - \sum_{n=1}^3 (n+1) \\
 &= \left(\frac{20 \cdot 21}{2} + 20 \right) - \left(\frac{3 \cdot 4}{2} + 3 \right) \\
 &= 230 - 9 = 221
 \end{aligned}$$

답 ③

323

$$\begin{aligned}
 (1) &1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \dots + 19 \cdot 1 \\
 &= 1 \cdot (20-1) + 2(20-2) + 3(20-3) + \dots + 19(20-19)
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{19} k(20-k)$$

$$= \sum_{k=1}^{19} (20k - k^2)$$

$$= 20 \cdot \frac{19 \cdot 20}{2} - \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6}$$

$$= 3800 - 2470 = 1330$$

$$(2) a_n = (2n-1) \cdot 2n = 4n^2 - 2n \text{이고}$$

$$(2n-1) \cdot 2n = 99 \cdot 100 \text{에서}$$

$$2n = 100$$

$$\therefore n = 50$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \sum_{k=1}^{50} (4k^2 - 2k)$$

$$= 4 \cdot \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} - 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2}$$

$$= 171700 - 2550 = 169150$$

답 (1) 1330 (2) 169150

324

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^5 (3k-1)2^{j-1} &= 2^{j-1} \sum_{k=1}^5 (3k-1) \\
 &= 2^{j-1} \left(3 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 1 \cdot 5 \right) \\
 &= 40 \cdot 2^{j-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{j=1}^5 40 \cdot 2^{j-1} \\
 &= 40 \cdot \frac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 1240
 \end{aligned}$$

답 1240

325

겹쳐지는 A의 번호와 B의 번호의 곱들의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \dots + n \cdot 1$$

이때 제 k 번째 항 a_k 는

$$a_k = k \{ n - (k-1) \} = k(n-k+1)$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k(n-k+1) \\
&= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k\} \\
&= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)\sum_{k=1}^n k \\
&= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\
&\quad \text{답 } \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}$$

326

수열 $\{na_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하면 $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
na_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= n^2 \quad \dots\dots \text{㉠}
\end{aligned}$$

$$n=1\text{일 때, } a_1 = S_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

이때 $a_1 = 1$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$na_n = n^2$$

$$\therefore a_n = n \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

답 55

327

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= \frac{n}{2n+1}
\end{aligned}$$

따라서 $\frac{n}{2n+1} = \frac{25}{51}$ 이므로

$$51n = 25(2n+1)$$

$$\therefore n = 25$$

답 25

328

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{2+2^2} + \frac{1}{3+3^2} + \dots + \frac{1}{n+n^2} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+k^2} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \geq 0.99
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq 0.01 \text{에서}$$

$$n+1 \geq 100$$

$$\therefore n \geq 99$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 99이다.

답 99

329

$f(x) = a_n x^2 - a_n - 3$ 으로 놓으면

$f(x)$ 가 $x-n$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(n) = a_n n^2 - a_n - 3 = 0$$

$$(n^2-1)a_n = 3$$

$$n \geq 2\text{일 때, } a_n = \frac{3}{n^2-1}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=2}^{10} a_k &= \sum_{k=2}^{10} \frac{3}{k^2-1} \\
&= \sum_{k=2}^{10} \frac{3}{(k-1)(k+1)} \\
&= \frac{3}{2} \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\beta} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \right) + \right. \\
&\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\
&= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\
&= \frac{108}{55}
\end{aligned}$$

답 $\frac{108}{55}$

330

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k S_{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\
&= \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{S_{10}} - \frac{1}{S_{11}} \right) \\
&= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

이때 $S_1 = a_1 = 2$ 이므로

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S_{11}} &= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\
\therefore S_{11} &= 6
\end{aligned}$$

답 ①

331

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = 2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\
\therefore \sum_{k=1}^{48} f(k) &= 2 \sum_{k=1}^{48} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
&= 2\{(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{49}-\sqrt{48})\} \\
&= 2(\sqrt{49}-1) = 12
\end{aligned}$$

답 12

332

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{20} \log a_k &= \sum_{k=2}^{20} \log \left(1 + \frac{1}{k^2-1} \right) = \sum_{k=2}^{20} \log \frac{k^2}{k^2-1} \\
&= \sum_{k=2}^{20} \log \frac{k \cdot k}{(k-1)(k+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \log \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \log \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \dots + \log \frac{20 \cdot 20}{19 \cdot 21} \\
&= \log \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{\beta} \cdot \frac{3}{\beta} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{20}{19} \cdot \frac{20}{21} \right) \\
&= \log \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{20}{21} \right) = \log \frac{40}{21}
\end{aligned}$$

따라서 $p=21$, $q=40$ 이므로 $p+q=61$

답 ②

333

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_8 : a_{15} = 8 : 15 \text{에서}$$

$$(a+7d) : (a+14d) = 8 : 15$$

$$15(a+7d) = 8(a+14d)$$

$$\therefore a = d \quad \dots \text{㉠}$$

$$S_{10} = 110 \text{에서 } \frac{10(2a+9d)}{2} = 110$$

$$\therefore 2a+9d = 22 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=d=2$ 이므로

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{100} \frac{4}{a_k a_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \frac{4}{2k \cdot 2(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

답 $\frac{100}{101}$

334

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^3 - n) - \{(n-1)^3 - (n-1)\}$$

$$= 3n^2 - 3n = 3n(n-1) \quad \dots \text{㉠}$$

$$n=1\text{일 때, } a_1=S_1=0$$

이때 $a_1=0$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n=3n(n-1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{3k(k-1)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$$\frac{n-1}{3n} = \frac{3}{10} \text{에서 } 10n-10=9n$$

$$\therefore n=10$$

답 10

335

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2+2^2} + \frac{7}{1^2+2^2+3^2} + \dots + \frac{21}{1^2+2^2+\dots+10^2} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{2k+1}{k(k+1)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{6}{k(k+1)} = 6 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{60}{11} \end{aligned}$$

$$\therefore 11S=60$$

답 60

336

직선 $y=x+a_n$ 이 원 $(x-2n)^2+(y-2n^2)^2=n^2$ 을 이등분하려면 직선 $y=x+a_n$ 은 원의 중심 $(2n, 2n^2)$

을 지나야 한다.

$$2n^2=2n+a_n$$

$$\therefore a_n=2n^2-2n=2n(n-1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{2k(k-1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{20}$

337

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 2n$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - 2n) - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= 2n - 3 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

$n=1$ 일 때, $a_1=S_1=-1$

이때 $a_1=-1$ 은 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n=2n-3$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{2k-3} + \sqrt{2k-1}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^n (\sqrt{2k-3} - \sqrt{2k-1}) \\ &= -\frac{1}{2} \{ (1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - \sqrt{7}) + \dots + (\sqrt{2n-3} - \sqrt{2n-1}) \} \\ &= -\frac{1}{2} (1 - \sqrt{2n-1}) = 2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{2n-1}=5, 2n-1=25$$

$$\therefore n=13$$

답 ③

338

주어진 수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합을 S라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{10}{2^9} \\
 -\frac{1}{2}S &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{9}{2^9} + \frac{10}{2^{10}} \\
 \frac{1}{2}S &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^9}\right) - \frac{10}{2^{10}} \\
 &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{10}{2^{10}} \\
 &= 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right] - \frac{10}{2^{10}} \\
 &= 2 - \frac{12}{2^{10}} \\
 \therefore S &= 2 \left(2 - \frac{12}{2^{10}}\right) = 4 - \frac{3}{128} = \frac{509}{128}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{509}{128}$

339

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=1}^{100} \left\{x - \frac{1}{k(k+1)}\right\}^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{100} \left[x^2 - 2x \cdot \frac{1}{k(k+1)} + \left\{\frac{1}{k(k+1)}\right\}^2 \right] \\
 &= 100x^2 - 2x \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2(k+1)^2}
 \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}
 \end{aligned}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = A$ (A 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 100x^2 - \frac{200}{101}x + A \\
 &= 100 \left(x - \frac{1}{101}\right)^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 상수})
 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{101}$ 일 때 최소가 된다.

답 $\frac{1}{101}$

340

수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항이 -9 , 공차가 2인 등차수열이므로

$$\begin{aligned}
 a_n &= -9 + 2(n-1) \\
 &= 2n - 11
 \end{aligned}$$

$2n - 11 > 0$ 에서 $n > \frac{11}{2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 제 6 항부터 양수이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore S &= \sum_{k=1}^{10} \left| \frac{1}{a_k a_{k+1}} \right| \\
 &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(2k-11)(2k-9)} \\
 &\quad + \left| \frac{1}{(-1) \cdot 1} \right| + \sum_{k=6}^{10} \frac{1}{(2k-11)(2k-9)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{2k-11} - \frac{1}{2k-9} \right) + 1 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=6}^{10} \left(\frac{1}{2k-11} - \frac{1}{2k-9} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{1}\right) \right\} + 1 + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9} + 1\right) + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{11}\right) \\
 &= \frac{4}{9} + 1 + \frac{5}{11} \\
 \therefore 99S &= 99 \left(\frac{4}{9} + 1 + \frac{5}{11}\right) \\
 &= 44 + 99 + 45 = 188
 \end{aligned}$$

답 188

341

$\{2^x - 2f(x)\}(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) + 2 = 0$ 에서

$$2^x - 2f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= 2^{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \\
 &= 2^{x-1} + (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9) \\
&= \sum_{k=1}^9 \{2^{k-1}+(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})\} \\
&= \sum_{k=1}^9 2^{k-1} + \sum_{k=1}^9 (\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) \\
&= \frac{1 \cdot (2^9-1)}{2-1} + \{(\sqrt{1}-0) + (\sqrt{2}-\sqrt{1}) \\
&\quad + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{9}-\sqrt{8})\} \\
&= (2^9-1) + \sqrt{9} \\
&= 514
\end{aligned}$$

답 514

342

$A_n(n, \sqrt{n}), B_n(n, 2\sqrt{n})$ 이므로

$$a_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{1}{(n+1)a_n + na_{n+1}} &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n - n^2(n+1)} \\
&= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
\therefore \sum_{n=1}^{80} \frac{1}{(n+1)a_n + na_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{80} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{80}} - \frac{1}{\sqrt{81}} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

따라서 $p=9, q=8$ 이므로

$$p+q=17$$

답 ①

343

$a_n \neq 0$ 이므로 $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n$ 의 양변을 a_n 으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n + 3$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \sum_{k=1}^{30} \log(a_k + 3) \\
&= \sum_{k=1}^{30} \log \frac{a_{k+1}}{a_k} \\
&= \log \frac{a_2}{a_1} + \log \frac{a_3}{a_2} + \log \frac{a_4}{a_3} + \cdots + \log \frac{a_{31}}{a_{30}} \\
&= \log \left(\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdots \frac{a_{31}}{a_{30}} \right) \\
&= \log \frac{a_{31}}{a_1} \\
&= \log a_{31} - \log a_1 \\
&= \log a_{31} - \log 10 \\
&= \log a_{31} - 1
\end{aligned}$$

답 ④

344

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ 에서

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 공차가 $a_2 - a_1 = 2a_1 - a_1 = a_1$ 이므로

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot a_1$$

$$= na_1$$

..... ㉠

$a_{10} = 20$ 이므로

$$10a_1 = 20$$

$$\therefore a_1 = 2$$

따라서 ㉠에서 $a_n = 2n$ 이므로

$$a_6 = 2 \cdot 6 = 12$$

답 12

345

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = 3$ 이므로

$$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

$$\therefore \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9$$

답 9

346

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$= a_n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., 17을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \\ a_3 &= a_2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) \\ a_4 &= a_3 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) \\ &\vdots \\ +) a_{18} &= a_{17} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{52} \right) \\ a_{18} &= a_1 + \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{52} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{52} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{51}{52} = \frac{15}{26} \end{aligned}$$

답 $\frac{15}{26}$

347

$\sqrt{n+1} a_{n+1} = \sqrt{n} a_n$ 에서 $a_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} a_n$ 이므로 n 에 1, 2, 3, ..., 15를 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} a_1 \\ a_3 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_2 \\ a_4 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} a_3 \\ &\vdots \\ \times) a_{16} &= \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} a_{15} \\ a_{16} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \cdots \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} a_1 \\ &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} a_1 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \end{aligned}$$

다른풀이 $\sqrt{n+1} a_{n+1} = \sqrt{n} a_n$ 이므로

답 1

$$\sqrt{n} a_n = \sqrt{n-1} a_{n-1} = \sqrt{n-2} a_{n-2} = \dots = \sqrt{1} a_1 = a_1$$

$$\therefore a_n = \frac{a_1}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore a_{16} = \frac{4}{\sqrt{16}} = 1$$

348

$S_n = 3 - 2a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)에서 $S_{n+1} = 3 - 2a_{n+1}$

한편, $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3 - 2a_{n+1} - (3 - 2a_n) \\ &= -2a_{n+1} + 2a_n \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n$$

$a_1 = S_1 = 3 - 2a_1$ 에서 $a_1 = 1$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비

수열이므로 $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{3} a_k &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \end{aligned}$$

답 $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

349

n 일 후에 수족관에 물을 넣은 뒤 남아 있는 물의 양을 a_n L라 하면

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 30$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot 100 + 30 = 80$$

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 + 30 = \frac{1}{2} \cdot 80 + 30 = 70$$

$$a_3 = \frac{1}{2} a_2 + 30 = \frac{1}{2} \cdot 70 + 30 = 65$$

$$a_4 = \frac{1}{2} a_3 + 30 = \frac{1}{2} \cdot 65 + 30 = \frac{125}{2}$$

$$a_5 = \frac{1}{2} a_4 + 30 = \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{2} + 30 = \frac{245}{4}$$

따라서 5일 후에 수족관에 물을 넣은 뒤 남아 있는 물의 양은 $\frac{245}{4}$ L이다.

$$\text{답 } \frac{245}{4} \text{ L}$$

350

$n=1, 2, 3, \dots, 12$ 를 $a_{n+1}=3a_n+1$ 에 차례로 대입하면

$$a_2=3a_1+1=3+1$$

$$a_3=3a_2+1=3(3+1)+1=3^2+3+1$$

$$a_4=3a_3+1=3(3^2+3+1)+1=3^3+3^2+3+1$$

⋮

$$a_{13}=3a_{12}+1=3^{12}+3^{11}+3^{10}+\dots+3+1$$

$$=\frac{1 \cdot (3^{13}-1)}{3-1} = \frac{1}{2}(3^{13}-1)$$

$$\text{답 } \frac{1}{2}(3^{13}-1)$$

351

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})} \\ &= \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \end{aligned}$$

위의 식의 n 에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2-a_1 = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$a_3-a_2 = \sqrt{4}-\sqrt{3}$$

$$a_4-a_3 = \sqrt{5}-\sqrt{4}$$

⋮

$$+) \frac{a_n-a_{n-1}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{a_n-a_1 = \sqrt{n+1}-\sqrt{2}}$$

$$\therefore a_n = \sqrt{n+1}$$

$$a_n = \sqrt{n+1} > 10 \text{에서 } n+1 > 100$$

$$\therefore n > 99$$

따라서 $a_n > 10$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 100이다.

답 100

352

$a_{n+1}=(\sqrt{2})^n a_n$ 의 n 에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2 = \sqrt{2} \cdot a_1$$

$$a_3 = (\sqrt{2})^2 \cdot a_2$$

$$a_4 = (\sqrt{2})^3 \cdot a_3$$

⋮

$$\begin{aligned} \times) a_n &= (\sqrt{2})^{n-1} \cdot a_{n-1} \\ a_n &= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^3 \cdot \dots \cdot (\sqrt{2})^{n-1} \cdot a_1 \\ &= (\sqrt{2})^{1+2+3+\dots+(n-1)} \cdot \sqrt{2} \\ &= (\sqrt{2})^{\frac{(n-1)n}{2}} \cdot \sqrt{2} \\ &= (\sqrt{2})^{\frac{n^2-n+2}{2}} \end{aligned}$$

$$a_k = 2^{23} \text{에서 } (\sqrt{2})^{\frac{k^2-k+2}{2}} = 2^{23} = (\sqrt{2})^{46} \text{이므로}$$

$$\frac{k^2-k+2}{2} = 46, k^2-k-90=0$$

$$(k+9)(k-10)=0$$

$$\therefore k=10 (\because k \text{는 자연수})$$

답 10

353

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_{n-1} \text{이므로}$$

$$S_n = a_{n+1}$$

한편, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n=2, 3, 4, \dots$)이므로

$$a_n = a_{n+1} - a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n \quad (n \geq 2)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=1, a_2=S_1=1$ 이고 둘째항부터 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_1=1, a_n=2^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{11} \frac{1}{a_n} &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9}\right) \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 \end{aligned}$$

$$\text{답 } 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

354

$a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ 이므로 n 에 1, 2, 3, ..., 8을 차례로 대입하면

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8$$

$$a_7 = a_5 + a_6 = 5 + 8 = 13$$

$$a_8 = a_6 + a_7 = 8 + 13 = 21$$

$$a_9 = a_7 + a_8 = 13 + 21 = 34$$

$$a_{10} = a_8 + a_9 = 21 + 34 = 55$$

답 ③

355

$a_{n+1} = a_n + 3^n - p$ 의 n 에 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$$a_3 = a_2 + 3^2 - p = 13 - p$$

$$a_4 = a_3 + 3^3 - p = 40 - 2p$$

$$a_5 = a_4 + 3^4 - p = 121 - 3p$$

$$a_6 = a_5 + 3^5 - p = 364 - 4p$$

따라서 $a_6 = 364 - 4p = 356$ 이므로

$$4p = 8 \quad \therefore p = 2$$

답 2

356

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad \alpha\beta = \frac{1}{a_{n-1}}$$

이므로

$$3\alpha - \alpha\beta + 3\beta = 3(\alpha + \beta) - \alpha\beta$$

$$= 3 \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-1}} = 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}$$

n 에 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

$$a_5 = \frac{1}{3}a_4 + \frac{1}{3} = \frac{5}{27} + \frac{1}{3} = \frac{14}{27}$$

답 $\frac{14}{27}$

357

조건 (가)에서 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ 이고 조건 (나)에서 a_3 부터 각 항을 차례로 구하면

a_3 은 $a_1 + a_2$, 즉 3을 4로 나눈 나머지가므로 $a_3 = 3$

a_4 는 $a_2 + a_3$, 즉 5를 4로 나눈 나머지가므로 $a_4 = 1$

a_5 는 $a_3 + a_4$, 즉 4를 4로 나눈 나머지가므로 $a_5 = 0$

a_6 은 $a_4 + a_5$, 즉 1을 4로 나눈 나머지가므로 $a_6 = 1$

a_7 은 $a_5 + a_6$, 즉 1을 4로 나눈 나머지가므로 $a_7 = 1$

a_8 은 $a_6 + a_7$, 즉 2를 4로 나눈 나머지가므로 $a_8 = 2$

⋮

따라서 자연수 n 에 대하여 $a_n = a_{n+6}$ 이고 $\sum_{k=1}^6 a_k = 8$ 이

$$\text{므로 } \sum_{k=1}^{6n} a_k = 8n$$

$n = 20$ 일 때

$$\sum_{k=1}^{120} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{120} = 160$$

이고, $a_{121} = a_1 = 1$, $a_{122} = a_2 = 2$, $a_{123} = a_3 = 3$ 이므로

$$\sum_{k=1}^m a_k = 166 \text{을 만족시키는 } m \text{의 값은 } 123 \text{이다.}$$

답 123

358

$n \geq 2$ 일 때

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

① + ②을 하면 $a_{n+1} + a_n = S_{n+1} - S_{n-1}$

이 식을 $(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$ 에 대입하면

$$(a_{n+1} + a_n)^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$$

$$\therefore (a_{n+1} - a_n)^2 = 4$$

그런데 $a_{n+1} > a_n$ 이므로

$$a_{n+1} - a_n = 2 \quad (n \geq 2)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차

수열이므로

$$a_{20} = 1 + (20 - 1) \cdot 2 = 39$$

답 ①

359

$\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n$ ($n \geq 1$)이므로

$$\begin{aligned} \log_2 a_{n+1} &= \log_2 2 + \log_2 a_n \\ &= \log_2 2a_n \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $a_1 = 2$, 공비가 2인 등비 수열이므로

$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8 \\ &= 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^7 \times 2^8 \\ &= 2^{1+2+3+\cdots+8} = 2^{\frac{8 \cdot 9}{2}} = 2^{36} \end{aligned}$$

$$\therefore k = 36$$

답 ①

360

$2S_n = S_{n+1} + S_{n-1} - 2n$ 에서

$$(S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1}) = 2n$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 2n \quad (n \geq 2)$$

그런데 $a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$ 이므로

$$a_{n+1} - a_n = 2n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2 - a_1 = 2 \cdot 1$$

$$a_3 - a_2 = 2 \cdot 2$$

$$a_4 - a_3 = 2 \cdot 3$$

⋮

$$+) a_{10} - a_9 = 2 \cdot 9$$

$$a_{10} - a_1 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot 9$$

$$\therefore a_{10} = a_1 + 2(1 + 2 + \cdots + 9)$$

$$= 2 + 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2}$$

$$= 92$$

답 92

361

$$S_n = \frac{n^2}{n^2 - 1} S_{n-1}$$

$$= \frac{n \cdot n}{(n-1)(n+1)} S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

위의 식의 n 에 2, 3, 4, ..., n 을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$S_2 = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} S_1$$

$$S_3 = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} S_2$$

$$S_4 = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} S_3$$

⋮

$$\times) S_n = \frac{n \cdot n}{(n-1)(n+1)} S_{n-1}$$

$$S_n = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{n \cdot n}{(n-1)(n+1)} S_1$$

$$= \frac{2n}{n+1} S_1 \quad (n \geq 2)$$

$$S_1 = 1 \text{이므로 } S_n = \frac{2n}{n+1}$$

$$\therefore a_{12} = S_{12} - S_{11}$$

$$= \frac{24}{13} - \frac{22}{12}$$

$$= \frac{1}{78}$$

답 $\frac{1}{78}$

362

$$a_{n-1}a_{n+1} = a_n a_{n+2} \text{에}$$

$n=2$ 를 대입하면 $a_1 a_3 = a_2 a_4$ 이므로

$$1 \times 4 = 2 \times a_4 \quad \therefore a_4 = 2$$

$n=3$ 을 대입하면 $a_2 a_4 = a_3 a_5$ 이므로

$$2 \times 2 = 4 \times a_5 \quad \therefore a_5 = 1$$

$n=4$ 를 대입하면 $a_3 a_5 = a_4 a_6$ 이므로

$$4 \times 1 = 2 \times a_6 \quad \therefore a_6 = 2$$

$n=5$ 를 대입하면 $a_4 a_6 = a_5 a_7$ 이므로

$$2 \times 2 = 1 \times a_7 \quad \therefore a_7 = 4$$

$n=6$ 을 대입하면 $a_5 a_7 = a_6 a_8$ 이므로

$$1 \times 4 = 2 \times a_8 \quad \therefore a_8 = 2$$

$\therefore \{a_n\} : 1, 2, 4, 2, 1, 2, 4, 2, \dots$
따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 2, 4, 2가 반복되므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} a_k &= a_1 + a_2 + \dots + a_{20} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots \\ &\quad + (a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20}) \\ &= 5 \cdot (1 + 2 + 4 + 2) = 45 \end{aligned}$$

답 45

363

n 번째의 계단을 오르는 방법의 수를 a_n 이라 하자.
먼저 첫 번째 계단을 오르는 방법이 1가지, 두 번째 계단을 오르는 방법이 2가지이므로

$$a_1 = 1, a_2 = 2$$

$(n+2)$ 번째의 계단을 오르는 방법은

n 번째 계단까지 올라와서 두 계단을 오르는 방법과
 $(n+1)$ 번째 계단까지 올라와서 한 계단을 오르는 방법이 있으므로

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

$$a_1 = 1, a_2 = 2 \text{이므로}$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 2 + 3 = 5$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 3 + 5 = 8$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 5 + 8 = 13$$

$$a_7 = a_5 + a_6 = 8 + 13 = 21$$

$$a_8 = a_6 + a_7 = 13 + 21 = 34$$

$$a_9 = a_7 + a_8 = 21 + 34 = 55$$

$$a_{10} = a_8 + a_9 = 34 + 55 = 89$$

따라서 최종이가 10개의 계단을 오르는 방법의 수는 89이다.

답 ④

364

$p(n)$ 이 참이면 $p(n+3)$ 이 참이므로

ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 $p(4)$ 가 참이다.

$p(4)$ 가 참이면 $p(7)$ 이 참이다.

$p(7)$ 이 참이면 $p(10)$ 이 참이다.

$p(10)$ 이 참이면 $p(13)$ 이 참이다. (참)

ㄴ. $p(2)$ 가 참이면 $p(5)$ 가 참이다.

$p(5)$ 가 참이면 $p(8)$ 이 참이다.

⋮

$p(17)$ 이 참이면 $p(20)$ 이 참이다. (참)

ㄷ. $p(9)$ 가 참이면 $p(12)$ 가 참이다.

$p(12)$ 가 참이면 $p(15)$ 가 참이다.

⋮

따라서 $p(3)$ 이 참인지는 알 수 없다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

365

$p(1)$ 이 참이고 $p(n)$ 이 참이면 $p(2n)$ 과 $p(3n)$ 이 참이므로 $n = 2^\alpha 3^\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots$)일 때, $p(n)$ 은 반드시 참이다.

① $p(24) = p(2^3 \cdot 3)$ 이므로 참이다.

② $p(30) = p(2 \cdot 3 \cdot 5)$ 이므로 반드시 참이라고 할 수 없다.

③ $p(36) = p(2^2 \cdot 3^2)$ 이므로 참이다.

④ $p(48) = p(2^4 \cdot 3)$ 이므로 참이다.

⑤ $p(96) = p(2^5 \cdot 3)$ 이므로 참이다.

답 ②

366

(ii) $n = k$ 일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k$$

$$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 \quad \dots \text{㉠}$$

등식 ㉠의 양변에 $[(k+1) \cdot 2^{k+1}]$ 을 더하면

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k + [(k+1) \cdot 2^{k+1}]$$

$$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + [(k+1) \cdot 2^{k+1}]$$

$$= 2k \cdot 2^{k+1} + 2$$

$$= [k] \cdot 2^{k+2} + 2$$

따라서 $n = k+1$ 일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

답 (가) $(k+1) \cdot 2^{k+1}$ (나) k

367

(i) $n=1$ 일 때, $9-1=8$ 이므로 9^n-1 은 8의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때, 9^n-1 이 8의 배수라고 가정하면

$$9^k-1=8N \quad (\text{단, } N \text{은 자연수})$$

이때 $n=k+1$ 이면

$$\begin{aligned} 9^{k+1}-1 &= \boxed{9} \times 9^k - 1 \\ &= 8 \times 9^k + 9^k - 1 \\ &= 8 \times 9^k + 8N \\ &= \boxed{8} \times (9^k + N) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 9^n-1 은 8의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 9^n-1 은 8의 배수이다.

답 (가) 9 (나) 8

368

주어진 식 (*)의 양변을 $\frac{n(n+1)}{2}$ 로 나누면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1} \quad \dots \textcircled{1}$$

이다. $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}, \quad (\text{우변}) = \frac{4}{3} \text{이므로 } \textcircled{1} \text{이 성립한다.}$$

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

이다. $\textcircled{2}$ 의 양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2k+1}{k+1}$$

이 성립한다. 한편,

$$\frac{2k+1}{k+1} - \frac{2k+2}{k+2} = \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0$$

이므로

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \boxed{\frac{2k+2}{k+2}}$$

이다. 따라서 $n=k+1$ 일 때도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립하므로 (*)도 성립한다.

$$\text{따라서 } p = \frac{3}{2}, \quad f(k) = \frac{2k+2}{k+2} \text{이므로}$$

$$8p \times f(10) = 8 \times \frac{3}{2} \times \frac{22}{12} = 22$$

답 ⑤

369

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 2 + a_1 = 2 + 1 = 3,$$

$$(\text{우변}) = 2a_2 = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 3$$

따라서 $n=2$ 일 때 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$k + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{k-1} = ka_k \text{이므로}$$

$$(k+1) + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{k-1} + a_k$$

$$= ka_k + \boxed{a_k + 1}$$

$$= (k+1)a_{k+1}$$

$$= (k+1) \left(a_{k+1} - \frac{1}{k+1} \right) + 1 \leftarrow a_{k+1} = a_k + \frac{1}{k+1}$$

$$= (k+1)a_{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

$$\text{답 (가) } \frac{1}{2} \quad (\text{나}) a_k + 1 \quad (\text{다}) \frac{1}{k+1}$$

370

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad \dots \textcircled{★}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{4}} \text{이므로 } \textcircled{★} \text{이 성립한다.}$$

(ii) $n=k$ 일 때, $\textcircled{★}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k+1}{2k+2}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{1}{\frac{2k+2}{2k+1}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2k+1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3k+1 + 2(3k+1) \cdot \left(\frac{1}{2k+1}\right) + (3k+1) \cdot \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\
 &< \frac{1}{\sqrt{3k+1 + 2(3k+1) \cdot \left(\frac{1}{2k+1}\right) + (2k+1) \cdot \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3k+1 + 2(3k+1) \cdot \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+1}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3k+1 + \frac{3(2k+1)}{2k+1}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3(k+1) + 1}}
 \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 (★)이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $f(k) = \frac{1}{2k+1}$, $g(k) = 2k+1$ 이므로

$$f(4) \times g(13) = \frac{1}{9} \cdot 27 = 3$$

답 ③

