유 형 + 내 신

고쟁이

수학 개념과 원리를 꿰뚫는
내신 대비 집중 훈련서

수학 <상>

정답과 풀이

I 다항식

01 다항식의 뜻과 연산

001 ····· 답 ③

$2(A-B)+3B$
$=2A+B=2(3x^2+6x+3)+(2x^2-1)$
$=8x^2+12x+5$

002 ····· 답 ②

$2A+B-\{A-(C-3B)\}$
$=2A+B-(A-C+3B)$
$=2A+B-A+C-3B=A-2B+C$
$=(3x^3-x+6)-2(x^3-x^2+2x-1)+(-x^2+5x-10)$
$=x^3+x^2-2$

003 ····· 답 ④

$A-2(X-B)=5A$에서
$-2(X-B)=4A$, $X-B=-2A$
$\therefore X=B-2A=(3x^2-x+2)-2(x^2+2x-5)$
$=x^2-5x+12$

004 ····· 답 ①

$(x+3y-1)(2x-y+3)$
$=(2x^2-xy+3x)+(6xy-3y^2+9y)+(-2x+y-3)$
$=2x^2-3y^2+5xy+x+10y-3$

005 ····· 답 풀이 참조

(1) $x^2+2x=t$라 하면
$(x^2+2x-1)(x^2+2x-4)$
$=(t-1)(t-4)=t^2-5t+4$
$=(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+4$
$=(x^4+4x^3+4x^2)+(-5x^2-10x)+4$
$=x^4+4x^3-x^2-10x+4$

(2) $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$
$=(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)$
이때, $x^2+x=t$라 하면
$(t-2)(t-6)=t^2-8t+12$
$=(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$
$=(x^4+2x^3+x^2)+(-8x^2-8x)+12$
$=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

(3) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-6)$
$=(x+1)(x-6)(x-2)(x+3)$
$=(x^2-5x-6)(x^2+x-6)$
이때, $x^2-6=t$라 하면
$(t-5x)(t+x)=t^2-4xt-5x^2$
$=(x^2-6)^2-4x(x^2-6)-5x^2$
$=(x^4-12x^2+36)+(-4x^3+24x)-5x^2$
$=x^4-4x^3-17x^2+24x+36$

006 ····· 답 ②

$(2x-3)(x^2+ax+5)$의 전개식에서 x^2의 계수는
(x의 계수)$\times$(x의 계수)$+$(상수항)$\times$(x^2의 계수)이므로
$2\times a+(-3)\times 1=5$에서 $a=4$이다.
따라서 $(2x-3)(x^2+4x+5)$의 전개식에서 x의 계수는
(x의 계수)$\times$(상수항)$+$(상수항)$\times$(x의 계수)이므로
$2\times 5+(-3)\times 4=-2$이다.

007 ····· 답 ④

ㄱ. $(2x+1)^3=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 1+3\times 2x\times 1^2+1^3$
$=8x^3+12x^2+6x+1$ (참)
ㄴ. $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$ (거짓)
ㄷ. $(a-b+c)^2$
$=a^2+(-b)^2+c^2+2\times a\times(-b)+2\times(-b)\times c+2ca$
$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

008 ····· 답 29

$(5x^3-3x^2+2x)^2=(5x^3-3x^2+2x)(5x^3-3x^2+2x)$의 전개식에서
x^4의 계수는
(x^3의 계수)$\times$(x의 계수)$+$(x^2의 계수)$\times$(x^2의 계수)
$+$(x의 계수)$\times$(x^3의 계수)이므로
$5\times 2+(-3)\times(-3)+2\times 5=29$이다.

다른 풀이

$(5x^3-3x^2+2x)^2$
$=25x^6+9x^4+4x^2+2(-15x^5-6x^3+10x^4)$
$=25x^6-30x^5+29x^4-12x^3+4x^2$
에서 x^4의 계수는 29이다.

009 ····· 답 7

$(x-2)(x+1)(x+3)$
$=x^3+(-2+1+3)x^2+\{(-2)\times 1+1\times 3+3\times(-2)\}x$
$+(-2)\times 1\times 3$
$=x^3+2x^2-5x-6$
에서 x^2의 계수는 $a=2$, x의 계수는 $b=-5$이다.
$\therefore a-b=2-(-5)=7$

아뿌혀어느새시ㅣㄴㄱㅗ조재어ㅅ시(사ㅇ)_ㅎ새ㅅ서르.indb 2 22. 9. 14. 오후 8:19

다른 풀이

$(x-2)(x+1)(x+3)$의 전개식에서 x^2의 계수는
(x의 계수)×(x의 계수)×(상수항)
+(x의 계수)×(상수항)×(x의 계수)
+(상수항)×(x의 계수)×(x의 계수)이므로
$a=1\times1\times3+1\times1\times1+(-2)\times1\times1=2$
x의 계수는
(x의 계수)×(상수항)×(상수항)
+(상수항)×(x의 계수)×(상수항)
+(상수항)×(상수항)×(x의 계수)이므로
$b=1\times1\times3+(-2)\times1\times3+(-2)\times1\times1=-5$
$\therefore a-b=2-(-5)=7$

010 ····· 답 ③

분배법칙에 의하여 $(x-1)(x+1)=x^2-1$,
$(x-1)(\boxed{x^2+x+1})=x^3-1$,
$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=\boxed{x^4-1}$이고,
마찬가지 방법으로 자연수 n $(n\geq2)$에 대하여
$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=\boxed{x^n-1}$
이 성립함을 알 수 있다.
$\therefore$ (가) : x^2+x+1, (나) : x^4-1, (다) : x^n-1

011 ····· 답 38

$x+y=2$, $xy=-5$이므로
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=2^3-3\times(-5)\times2=38$

012 ····· 답 ③

$a-b=2$, $a^2+b^2=6$이므로
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$에서 $6=2^2+2ab$ $\therefore ab=1$
$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=2^3+3\times1\times2=14$

013 ····· 답 ⑤

$x=1+\sqrt{3}$, $y=1-\sqrt{3}$이므로
$x-y=(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$
$xy=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$
$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(2\sqrt{3})^3+3\times(-2)\times2\sqrt{3}$
$=24\sqrt{3}-12\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

014 ····· 답 198

$x=3-2\sqrt{2}$에서
$\frac{1}{x}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$이므로
$x+\frac{1}{x}=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$
$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=6^3-3\times6=198$

015 ····· 답 ④

$x^2-3x-1=0$에서 $x\neq0$이므로
양변을 각각 x로 나누면
$x-3-\frac{1}{x}=0$ $\therefore x-\frac{1}{x}=3$
$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=3^3+3\times3=36$

016 ····· 답 ①

$a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=21$이므로
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$3^2=21+2(ab+bc+ca)$
$\therefore ab+bc+ca=-6$

017 ····· 답 ⑤

다항식 $2x^3+3x^2-7x+4$를 $2x-3$으로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & x^2+3x+1 \quad \text{: 몫} \\ \hline 2x-3 & 2x^3+3x^2-7x+4 \\ & \underline{2x^3-3x^2} \\ & \quad 6x^2-7x+4 \\ & \quad \underline{6x^2-9x} \\ & \quad\quad 2x+4 \\ & \quad\quad \underline{2x-3} \\ & \quad\quad\quad 7 \quad \text{: 나머지} \end{array}$$

따라서 구하는 몫은 x^2+3x+1, 나머지는 7이다.

018 ····· 답 ⑤

다항식 $4x^2-5x+3$을 $x+a$로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & \boxed{4x+(-5-4a)} \quad \text{: 몫} \\ \hline x+a & 4x^2-5x\quad\quad +3 \\ & \underline{\boxed{4x^2+4ax}} \\ & \quad (-5-4a)x+3 \quad \cdots\cdots ㉠ \\ & \quad \underline{\boxed{(-5-4a)x+a(-5-4a)}} \\ & \quad\quad \boxed{4a^2+5a+3} \quad \text{: 나머지} \end{array}$$

····· TIP

① ㉠에서 $(-5-4a)x+3$은 $3x+3$과 같으므로
$-5-4a=3$에서 $a=-2$이다. (참)
② $a=-2$이므로 (가)에 알맞은 식은
$4x+(-5-4a)=4x+3$이다. (참)

아까하이노내시시노구소재이시(사이)_하내시서르.indb 3 22. 9. 14. 오후 8:19

③ $a=-2$이므로 (나)에 알맞은 식은 $4x^2+4ax=4x^2-8x$이다. (참)
④ $a=-2$이므로 (다)에 알맞은 식은
$(-5-4a)x+a(-5-4a)=3x-6$이다. (참)
⑤ $a=-2$이므로 (라)에 알맞은 값은 $4a^2+5a+3=9$이다. (거짓)

TIP

㉠에서 $a=-2$임을 알 수 있으므로 다항식 $4x^2-5x+3$을 $x-2$로 나누어 다음과 같이 빈칸을 좀 더 빨리 알아낼 수 있다.

$$\begin{array}{r} \boxed{4x+3} \quad \text{: 몫} \\ x-2\overline{)\,4x^2-5x+3} \\ \boxed{4x^2-8x} \\ \hline 3x+3 \\ \boxed{3x-6} \\ \hline \boxed{9} \quad \text{: 나머지} \end{array}$$

019 ⓑ ⑤

다항식 $3x^4-x^2+5x+1$을 x^2+x+1로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 3x^2-3x-1 \quad \text{: 몫} \\ x^2+x+1\overline{)\,3x^4\quad -x^2+5x+1} \\ 3x^4+3x^3+3x^2 \\ \hline -3x^3-4x^2+5x+1 \\ -3x^3-3x^2-3x \\ \hline -x^2+8x+1 \\ -x^2-x-1 \\ \hline 9x+2 \quad \text{: 나머지} \end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x^2-3x-1$, $R(x)=9x+2$이므로
$Q(2)=3\times2^2-3\times2-1=5$, $R(1)=9\times1+2=11$
$\therefore Q(2)+R(1)=5+11=16$

020 ⓑ 9

다항식 $f(x)$를 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $2x-1$, $-x+3$이므로 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.
$f(x)=(4x^2+2x+1)(2x-1)-x+3$
$\therefore f(1)=(4\times1^2+2\times1+1)(2\times1-1)-1+3=9$

참고

$$\begin{aligned} f(x)&=(2x-1)(4x^2+2x+1)-x+3 \\ &=(8x^3-1)-x+3 \\ &=8x^3-x+2 \end{aligned}$$

021 ⓑ $2x-7$

다항식 A를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $6x+5$, -2이므로 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.
$A=(x-1)(6x+5)-2$
$=6x^2-x-7$
$=(3x+1)(2x-1)-6$
따라서 다항식 A를 $3x+1$로 나누었을 때의 몫은 $2x-1$, 나머지는 -6이므로
구하는 합은 $(2x-1)+(-6)=2x-7$이다.

다른 풀이

다항식 A를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $6x+5$, -2이므로 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.
$A=(x-1)(6x+5)-2$
$=6x^2-x-7$
이때, 다항식 A를 $3x+1$로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2x-1 \quad \text{: 몫} \\ 3x+1\overline{)\,6x^2-x-7} \\ 6x^2+2x \\ \hline -3x-7 \\ -3x-1 \\ \hline -6 \quad \text{: 나머지} \end{array}$$

따라서 다항식 A를 $3x+1$로 나누었을 때의 몫은 $2x-1$, 나머지는 -6이므로
구하는 합은 $(2x-1)+(-6)=2x-7$이다.

022 ⓑ ④

다항식 $P(x)$를 $4x+6$으로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $Q(x)$, R이므로 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.
$P(x)=(4x+6)Q(x)+R$
$=\left(x+\frac{3}{2}\right)\times4Q(x)+R$
따라서 다항식 $P(x)$를 $x+\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의 몫은 $4Q(x)$, 나머지는 R이다.

023 ⓑ ④

다항식 $f(x)$를 x^2+3x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x-4$이므로 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.
$f(x)=(x^2+3x-1)Q(x)+2x-4$
$xf(x)=x(x^2+3x-1)Q(x)+x(2x-4)$
$=x(x^2+3x-1)Q(x)+2(x^2+3x-1)-10x+2$
$=(x^2+3x-1)\{xQ(x)+2\}-10x+2$
따라서 $R(x)=-10x+2$이므로 $R(2)=-10\times2+2=-18$이다.

024 ⓑ (1) 16 (2) 10^8-1

(1) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^8-1)(2^8+1)$
$=2^{16}-1$
따라서 $n=16$이다.

아끄ㅎㅕㅇㄴㅐㅅㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 4 22. 9. 14. 오후 8:19

(2) $9\times11\times101\times10001$
$=(10-1)(10+1)(10^2+1)(10^4+1)$
$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$
$=(10^4-1)(10^4+1)$
$=10^8-1$

TIP

(1)에서 주어진 등식의 양변에 각각 $2-1=1$을 곱하면 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ 꼴을 반복하여 간단하게 계산할 수 있다.
마찬가지로 (2)에서 주어진 숫자를 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ 꼴을 사용할 수 있도록 적절하게 변형하여 계산하면 편리하다.

025 ····· 답 ⑤

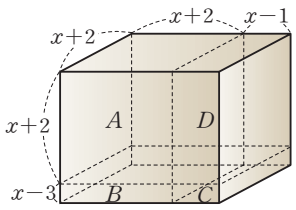
$(a+b+c)^2=3ab+3bc+3ca$에서
$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=3ab+3bc+3ca$
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{2}(b^2-2bc+c^2)+\frac{1}{2}(c^2-2ca+a^2)=0$
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore a=b=c$
따라서 이 삼각형은 세 변의 길이가 모두 같으므로 정삼각형이다.

026 ····· 답 ③

주어진 직육면체의
밑면의 가로의 길이는 $(x+2)+(x-1)=2x+1$,
밑면의 세로의 길이는 $x+2$,
높이는 $(x+2)+(x-3)=2x-1$이다.
$\therefore$ (구하는 직육면체의 부피)
$=(2x+1)(x+2)(2x-1)$
$=(4x^2-1)(x+2)$
$=4x^3+8x^2-x-2$

다른 풀이

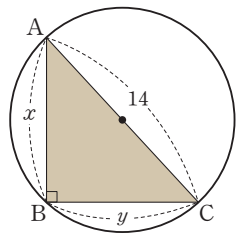
주어진 직육면체는 그림과 같이 4개의 직육면체 A, B, C, D로 이루어져 있다.



직육면체 A의 부피는 $(x+2)^3$
직육면체 B의 부피는 $(x+2)^2(x-3)$
직육면체 C의 부피는 $(x+2)(x-1)(x-3)$
직육면체 D의 부피는 $(x+2)^2(x-1)$
$\therefore$ (구하는 직육면체의 부피)
$=(x+2)^3+(x+2)^2(x-3)+(x+2)(x-1)(x-3)$
$+(x+2)^2(x-1)$
$=4x^3+8x^2-x-2$

027 ····· 답 32

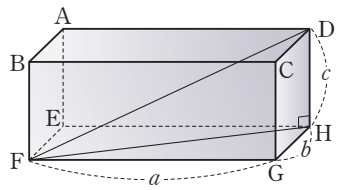
원에 내접하는 직각삼각형의 빗변은 원의 지름이다.
그림과 같이 직각삼각형 ABC의 빗변을 AC라 하면
원의 지름의 길이가 14이므로 $\overline{AC}=14$



이때, $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=y$ $(x>0, y>0)$라 하면
직각삼각형 ABC에서
$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$이므로 $x^2+y^2=14^2$ ····· ㉠
직각삼각형의 둘레의 길이가 32이므로
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=32$에서
$x+y+14=32$ $\therefore x+y=18$ ····· ㉡
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로 ㉠, ㉡에서
$18^2=14^2+2xy$
$xy=\frac{1}{2}(18^2-14^2)=\frac{1}{2}(18+14)(18-14)$
$=\frac{1}{2}\times32\times4=64$
이므로 $xy=64$이다.
$\therefore$ (직각삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$
$=\frac{1}{2}xy$
$=\frac{1}{2}\times64=32$

028 ····· 답 34

$\overline{FG}=a$, $\overline{GH}=b$, $\overline{HD}=c$ $(a>0, b>0, c>0)$라 하자.



모든 모서리의 길이의 합이 32이므로
$4(a+b+c)=32$에서 $a+b+c=8$
$\overline{DF}=\sqrt{30}$이므로
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{30}$에서 $a^2+b^2+c^2=30$
$(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로 ㉠, ㉡에서
$\therefore$ (직육면체의 겉넓이)
$=2(ab+bc+ca)$
$=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$
$=8^2-30=34$

아까하이노래시니그고재이시(사이)_해설서로.indb 5 22. 9. 14. 오후 8:19

029 답 ⑤

㈎, ㈏의 등식을 변끼리 더하면
$3A=3x^2+3xy+6y^2$이므로 $A=x^2+xy+2y^2$
이를 ㈎의 등식에 대입하면 $B=-xy+3y^2$
$\therefore A+3B=(x^2+xy+2y^2)+3(-xy+3y^2)$
$=x^2-2xy+11y^2$

030 답 24

주어진 세 등식을 변끼리 더하면
$(3A-B)+(3B-C)+(3C-A)$
$=2(A+B+C)$
$=(x^3+2x-1)+(3x^2+x+7)+(3x^3-x^2+5x)$
$=4x^3+2x^2+8x+6$
따라서 $A+B+C=2x^3+x^2+4x+3$이므로
$a=2$, $b=1$, $c=4$, $d=3$이다.
$\therefore abcd=2\times1\times4\times3=24$

031 답 풀이 참조

다음과 같이 일부 빈칸의 다항식을 각각 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$라 하자.

$B(x)$	$f(x)$	$C(x)$
$A(x)$	$2x^2+3x$	$4x^2+5x+2$
$5x^2+6x+3$		

두 번째 가로의 합에서
$A(x)+(2x^2+3x)+(4x^2+5x+2)=6x^2+9x$이므로
$A(x)=x-2$ …… ㉠
첫 번째 세로의 합에서
$A(x)+B(x)+(5x^2+6x+3)=6x^2+9x$이므로
$B(x)=x^2+2x-1$ ($\because$ ㉠) …… ㉡
$C(x)$를 포함한 대각선의 합에서
$(5x^2+6x+3)+(2x^2+3x)+C(x)=6x^2+9x$이므로
$C(x)=-x^2-3$ …… ㉢
첫 번째 가로의 합에서
$B(x)+C(x)+f(x)=6x^2+9x$이므로
$f(x)=6x^2+7x+4$ ($\because$ ㉡, ㉢)
$\therefore f(2)=6\times2^2+7\times2+4=42$

채점 요소	배점
세 다항식 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ 구하기	60 %
다항식 $f(x)$ 구하기	30 %
$f(2)$의 값 구하기	10 %

032 답 ②

$(x^2-4)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$
$=(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$
$=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$
$=(x^3+8)(x^3-8)=x^6-64$

다른 풀이

$(x^2-4)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$
$=(x^2-4)\{(x^2+4)^2-(2x)^2\}$
$=(x^2-4)(x^4+4x^2+16)$
$=(x^2)^3-4^3=x^6-64$

033 답 ③

$(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})^3$
$=(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})\times(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})$
$\times(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})$ …… ㉠
의 전개식에서 x의 계수는 …… TIP
(x의 계수)$\times$(상수항)$\times$(상수항)
+(상수항)$\times$(x의 계수)$\times$(상수항)
+(상수항)$\times$(상수항)$\times$(x의 계수)
이므로 $2\times1\times1+1\times2\times1+1\times1\times2=6$이다.

다른 풀이

구하는 것이 x의 계수이므로
$(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})^3$에서
$3x^2$, $4x^3$, …, $101x^{100}$은 고려하지 않아도 된다.
따라서 $(1+2x)^3$의 전개식에서 x의 계수를 구하면
$(1+2x)^3=1+6x+12x^2+8x^3$이므로 6이다.

TIP

$(1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100})^3$은
$1+2x+3x^2+\cdots+101x^{100}$을 3번 곱한 것이다.
따라서 ㉠의 전개식에서 x의 계수는
(x의 계수)$\times$(상수항)$\times$(상수항) $\leftarrow 2x\times1\times1$
+(상수항)$\times$(x의 계수)$\times$(상수항) $\leftarrow 1\times2x\times1$
+(상수항)$\times$(상수항)$\times$(x의 계수) $\leftarrow 1\times1\times2x$
로 같은 것을 3번 더한 것과 같다.
따라서 $3\times\{$(x의 계수)$\times$(상수항)$\times$(상수항)$\}$으로 계산하면 편리하다.
이와 같은 방법으로 다항식 $\{P(x)\}^3$ 꼴의 전개식에서 특정 계수를 간단하게 구할 수 있다.

034 답 ①

$(3a^2+2a+1)^3(a-1)$의 전개식에서 a^5의 계수는
다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.
(i) $(3a^2+2a+1)^3$의 전개식에서 a^4의 계수와 $a-1$에서 a의 계수를 곱하는 경우
$(3a^2+2a+1)^3=(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)$
의 전개식에서 a^4의 계수는
$3\times\{$(a^2의 계수)$\times$(a^2의 계수)$\times$(상수항)$\}$
$=3\times(3\times3\times1)=27$,

아쿠하이스내시니그고자이시(사이)_해시서르.indb 6 22. 9. 14. 오후 8:19

$3\times\{(a^2$의 계수$)\times(a$의 계수$)\times(a$의 계수$)\}$
$=3\times(3\times2\times2)=36$
의 합이므로 $27+36=63$ …… ㉠
$a-1$에서 a의 계수는 1 …… ㉡
㉠, ㉡에서 a^5의 계수는 $63\times1=63$

(ii) $(3a^2+2a+1)^3$의 전개식에서 a^5의 계수와 $a-1$에서 상수항을 곱하는 경우
$(3a^2+2a+1)^3=(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)$
의 전개식에서 a^5의 계수는
$3\times\{(a^2$의 계수$)\times(a^2$의 계수$)\times(a$의 계수$)\}$
$=3\times(3\times3\times2)=54$ …… ㉢
$a-1$에서 상수항은 -1 …… ㉣
㉢, ㉣에서 a^5의 계수는 $54\times(-1)=-54$

(i), (ii)에 의하여 주어진 다항식의 전개식에서 a^5의 계수는 $63+(-54)=9$이다.

035 ····· 답 108

$(x^3+2x^2+3y)^3+(x^3+2x^2-3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수는 $(x^3+2x^2+3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수와 $(x^3+2x^2-3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수의 합과 같다.

(i) $(x^3+2x^2+3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수
$3\times\{(x^2$의 계수$)\times(y$의 계수$)\times(y$의 계수$)\}$
$=3\times(2\times3\times3)=54$

(ii) $(x^3+2x^2-3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수
$3\times\{(x^2$의 계수$)\times(y$의 계수$)\times(y$의 계수$)\}$
$=3\times\{2\times(-3)\times(-3)\}=54$

(i), (ii)에 의하여 주어진 다항식의 전개식에서 x^2y^2의 계수는 $54+54=108$이다.

다른 풀이

$x^3+2x^2=A$, $3y=B$라 하면
$(x^3+2x^2+3y)^3+(x^3+2x^2-3y)^3$
$=(A+B)^3+(A-B)^3$
$=(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+(A^3-3A^2B+3AB^2-B^3)$
$=2A^3+6AB^2$
$=2(x^3+2x^2)^3+6(x^3+2x^2)(3y)^2$
이므로 x^2y^2의 계수는 $6(x^3+2x^2)(3y)^2$에서 $6\times2\times3^2=108$이다.

036 ····· 답 48

$(x+1)^3+(x-1)^2=x^3+4x^2+x+2$이므로
$\{(x+1)^3+(x-1)^2\}^4=(x^3+4x^2+x+2)^4$의 전개식에서
x의 계수는
$4\times\{(x$의 계수$)\times(상수항)\times(상수항)\times(상수항)\}$ …… TIP
$=4\times(1\times2\times2\times2)=32$
x^{11}의 계수는
$4\times\{(x^3$의 계수$)\times(x^3$의 계수$)\times(x^3$의 계수$)\times(x^2$의 계수$)\}$
$=4\times(1\times1\times1\times4)=16$
따라서 구하는 값은 $32+16=48$이다.

TIP

$(x^3+4x^2+x+2)^4$은 x^3+4x^2+x+2를 4번 곱한 것이므로
$(x^3+4x^2+x+2)^4$
$=(x^3+4x^2+x+2)(x^3+4x^2+x+2)(x^3+4x^2+x+2)$
$\times(x^3+4x^2+x+2)$
의 전개식에서 x의 계수는
$(x$의 계수$)\times(상수항)\times(상수항)\times(상수항)$ ← $x\times2\times2\times2$
$+(상수항)\times(x$의 계수$)\times(상수항)\times(상수항)$ ← $2\times x\times2\times2$
$+(상수항)\times(상수항)\times(x$의 계수$)\times(상수항)$ ← $2\times2\times x\times2$
$+(상수항)\times(상수항)\times(상수항)\times(x$의 계수$)$ ← $2\times2\times2\times x$
$=4\times\{(x$의 계수$)\times(상수항)\times(상수항)\times(상수항)\}$
이다.
이와 같은 방법으로 x^{11}의 계수도 구할 수 있다.

037 ····· 답 ②

$x+y=1$, $x^3+y^3=4$이므로
$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$에서 $1^3=4+3xy\times1$
$3xy=-3$ $\therefore xy=-1$ …… ㉠
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$에서
$1^2=x^2+y^2+2\times(-1)$ ($\because$ ㉠)
$\therefore x^2+y^2=3$ …… ㉡
$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2$이므로
$3^2=x^4+y^4+2\times(-1)^2$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$\therefore x^4+y^4=7$

038 ····· 답 112

$(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6=(a^2)^3-(b^2)^3$
$=(a^2-b^2)^3+3a^2b^2(a^2-b^2)$ …… ㉠
이때, $a^2=2\sqrt{2}+2$, $b^2=2\sqrt{2}-2$이므로
$a^2-b^2=(2\sqrt{2}+2)-(2\sqrt{2}-2)=4$
$a^2b^2=(2\sqrt{2}+2)(2\sqrt{2}-2)=4$
$\therefore (a^3+b^3)(a^3-b^3)=4^3+3\times4\times4$ ($\because$ ㉠)
$=112$

039 ····· 답 ②

$(x-a)(x+2b)(x+c)$
$=x^3+(-a+2b+c)x^2+\{(-a)\times2b+2b\times c+c\times(-a)\}x$
$+(-a)\times2b\times c$
$=x^3+(-a+2b+c)x^2+(-2ab+2bc-ca)x-2abc$
x^2의 계수가 5이므로
$-a+2b+c=5$ …… ㉠
x의 계수가 -3이므로
$-2ab+2bc-ca=-3$ …… ㉡
$(-a+2b+c)^2=a^2+4b^2+c^2+2(-2ab+2bc-ca)$
$5^2=a^2+4b^2+c^2+2\times(-3)$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$\therefore a^2+4b^2+c^2=31$

오퓨혀으느새스ㅣㄴㄱㅗ즈새으스ㅣ(스ㅏ으)_혀새스러르.indb 7 22. 9. 14. 오후 8:19

040 답 ④

$a^4-\sqrt{5}a^2-1=0$의 양변을 a^2으로 나누면

$a^2-\sqrt{5}-\frac{1}{a^2}=0 \quad \therefore a^2-\frac{1}{a^2}=\sqrt{5}$ …… ㉠

$\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^2+4=(\sqrt{5})^2+4=9$

$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}=3 \ (\because a^2>0)$

$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2=3-2=1$

$\therefore a-\frac{1}{a}=1 \ (\because a>1)$

$a^6-\frac{1}{a^6}=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^3+3\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)$

$=(\sqrt{5})^3+3\times\sqrt{5}=8\sqrt{5} \ (\because ㉠)$

$\therefore a^6+2a^2-3a+\frac{3}{a}+\frac{2}{a^2}-\frac{1}{a^6}$

$=\left(a^6-\frac{1}{a^6}\right)+2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-3\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=8\sqrt{5}+2\times3-3\times1$

$=3+8\sqrt{5}$

041 답 ④

$x+y=1$, $x^2+y^2=3$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$3=1^2-2xy \quad \therefore xy=-1$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1^3-3\times(-1)\times1=4$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=3^2-2\times(-1)^2=7$

$(x^3+y^3)(x^4+y^4)=x^7+x^3y^4+x^4y^3+y^7$

$=x^7+y^7+x^3y^3(x+y)$

$\therefore x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$

$=4\times7-(-1)^3\times1=29$

042 답 35

$a-2b-c=2ab-2bc+ca=5$이므로

$(a-2b-c)^2=a^2+4b^2+c^2+2(-2ab+2bc-ca)$에서

$a^2+4b^2+c^2=(a-2b-c)^2-2(-2ab+2bc-ca)$

$=5^2-2\times(-5)=35$

043 답 ②

0이 아닌 세 수 x, y, z에 대하여

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$에서 $\frac{yz-zx-xy}{xyz}=0$이므로

$-xy+yz-zx=0$이다.

한편, $x^2+y^2+z^2=4$이므로

$(x-y-z)^2=x^2+y^2+z^2+2(-xy+yz-zx)$

$=4+2\times0=4$

$\therefore (x-y-z)^{10}=\{(x-y-z)^2\}^5=4^5=2^{10}$

044 답 풀이 참조

(1) $x+y+z=4$, $x^2+y^2+z^2=10$이므로

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$10=4^2-2(xy+yz+zx)$

$xy+yz+zx=3$

$\therefore x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=4\times(10-3)+3\times(-2) \ (\because xyz=-2)$

$=22$

(2) $(xy+yz+zx)^2$

$=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2(xy^2z+yz^2x+zx^2y)$

$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$

(1)에서 $xy+yz+zx=3$이므로

$3^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\times(-2)\times4$

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=25$

$\therefore x^4+y^4+z^4=(x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2$

$=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

$=10^2-2\times25=50$

채점 요소	배점
$xy+yz+zx$의 값 구하기	10 %
$x^3+y^3+z^3$의 값 구하기	40 %
$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$의 값 구하기	10 %
$x^4+y^4+z^4$의 값 구하기	40 %

045 답 10

$a-b=1+\sqrt{3}$, $b-c=-2\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$a-c=1-\sqrt{3}$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2+(-1+\sqrt{3})^2\}$

$=10$

046 답 ⑤

$xy+yz+zx=1$, $xyz=-6$이고

$x+y+z=4$에서

$x+y=4-z$, $y+z=4-x$, $z+x=4-y$

$\therefore (x+y)(y+z)(z+x)$

$=(4-z)(4-x)(4-y)$

$=4^3-4^2(x+y+z)+4(xy+yz+zx)-xyz$

$=4^3-4^2\times4+4\times1-(-6)$

$=10$

아끄하ㅓㅇㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ새ㅅㅓㄹ.indb 8 22. 9. 14. 오후 8:19

047 ····· 답 12

다항식 $2x^3+3x^2-x+a$를 x^2-x+b로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2x+5 \\ x^2-x+b\overline{)\,2x^3+3x^2\qquad -x+a} \\ \underline{2x^3-2x^2\qquad +2bx} \\ 5x^2-(1+2b)x+a \\ \underline{5x^2-5x+5b} \\ (4-2b)x+a-5b \end{array}$$

이때, 나머지가 0이어야 하므로 나머지 $4-2b=0$, $a-5b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=10$, $b=2$

$\therefore a+b=10+2=12$

다른 풀이

항등식을 학습한 이후에는 다음과 같이 풀이할 수 있다.

$2x^3+3x^2-x+a$가 x^2-x+b로 나누어떨어지므로 다음 등식이 성립한다.

$2x^3+3x^2-x+a=(x^2-x+b)(2x+k)$ (k는 상수)

이는 x에 대한 항등식이므로

x^2의 계수를 비교하면 $3=k-2$ $\quad\therefore k=5$

따라서 $2x^3+3x^2-x+a=(x^2-x+b)(2x+5)$이므로

x의 계수를 비교하면 $-1=-5+2b$ $\quad\therefore b=2$

상수항을 비교하면 $a=5b=10$

$\therefore a+b=10+2=12$

048 ····· 답 ③

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $g(x)$, 2이고, 다항식 $g(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 $h(x)$라 하면 나머지가 $x+1$이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-1)g(x)+2 \\ &=(x-1)\{(x^2+x+1)h(x)+x+1\}+2 \\ &=(x-1)(x^2+x+1)h(x)+(x-1)(x+1)+2 \\ &=(x^3-1)h(x)+x^2+1 \end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 x^2+1이다.

049 ····· 답 풀이 참조

$f(x)=(3x^2+2x+5)(x^2-x+2)+2x^3-5x^2-6x-10$에서

$(3x^2+2x+5)(x^2-x+2)$는 x^2-x+2로 나누어떨어지므로

$f(x)$를 x^2-x+2로 나눈 나머지는 $2x^3-5x^2-6x-10$을 x^2-x+2로 나눈 나머지와 같다.

이때 다항식 $2x^3-5x^2-6x-10$을 x^2-x+2로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2x-3 \\ x^2-x+2\overline{)\,2x^3-5x^2-6x-10} \\ \underline{2x^3-2x^2+4x} \\ -3x^2-10x-10 \\ \underline{-3x^2+3x-6} \\ -13x-4 \end{array}$$

그러므로 $2x^3-5x^2-6x-10=(x^2-x+2)(2x-3)-13x-4$

이고, 다항식 $f(x)$는

$$\begin{aligned} f(x)&=(3x^2+2x+5)(x^2-x+2)+(x^2-x+2)(2x-3)-13x-4 \\ &=(x^2-x+2)\{(3x^2+2x+5)+(2x-3)\}-13x-4 \\ &=(x^2-x+2)(3x^2+4x+2)-13x-4 \end{aligned}$$

따라서 $Q(x)=3x^2+4x+2$, $R(x)=-13x-4$이므로

$Q(1)+R(2)=(3+4+2)+(-26-4)=-21$

채점 요소	배점
$f(x)$를 x^2-x+2로 나눈 나머지는 $2x^3-5x^2-6x-10$을 x^2-x+2로 나눈 나머지와 같음을 보이기	30 %
$Q(x)$, $R(x)$ 구하기	50 %
$Q(1)+R(2)$의 값 계산하기	20 %

050 ····· 답 ④

다항식 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x)$, $R(x)$이므로 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$이다.

ㄱ. $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$에서

$f(x)-R(x)=g(x)Q(x)$이므로

$f(x)-R(x)$는 $Q(x)$로 나누어떨어진다. (참)

ㄴ. $f(x)=x^3+x^2$, $g(x)=x^2+2x$인 경우,

$x^3+x^2=(x^2+2x)(x-1)+2x$이므로

$Q(x)=x-1$, $R(x)=2x$이다.

이때, $f(x)$를 $Q(x)$로 나누면

$x^3+x^2=(x-1)(x^2+2x+2)+2$이므로 몫은 x^2+2x+2이고

나머지는 2이므로 ㄴ이 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$에서

$2f(x)=2g(x)Q(x)+2R(x)$

이때, 양변에서 각각 $g(x)$를 빼면

$$\begin{aligned} 2f(x)-g(x)&=2g(x)Q(x)+2R(x)-g(x) \\ &=g(x)\{2Q(x)-1\}+2R(x) \end{aligned}$$ ····· TIP

따라서 다항식 $2f(x)-g(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)-1$, 나머지는 $2R(x)$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

TIP

($g(x)$의 차수)>($R(x)$의 차수)이므로

다항식 $2f(x)-g(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지는 $2R(x)$이다.

051 ····· 답 ④

다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{6}$로 나누었을 때의 몫과 나머지가 각각 $Q(x)$, R이므로

$f(x)=\left(x-\frac{1}{6}\right)Q(x)+R$ ····· ㉠

아끄하이노래시니그고재이시(사이)_하새서르.indb 9 22. 9. 14. 오후 8:19

㉠의 양변에 x를 곱하면

$$xf(x)=x\left(x-\frac{1}{6}\right)Q(x)+Rx$$
$$=\left(3x-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}\left(3x-\frac{1}{2}\right)+\frac{R}{6}$$
$$=\left(3x-\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}\right\}+\frac{R}{6}$$

이므로 다항식 $xf(x)$를 $3x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $\frac{x}{3}Q(x)+\frac{R}{3}$, $\frac{R}{6}$이다.

052 ····· 답 ⑤

다항식 $P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $Q(x)$, 5이므로

$$P(x)=(2x+1)Q(x)+5$$
$$=2Q(x)\left(x+\frac{1}{2}\right)+5$$
$$=\{2Q(x)-1\}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)+5$$
$$=\{2Q(x)-1\}\left(x+\frac{1}{2}\right)+x+\frac{11}{2}$$

이다. 이때, $P(x)$는 삼차다항식이고 $Q(x)$는 이차다항식이므로 다항식 $P(x)$를 $2Q(x)-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $x+\frac{1}{2}$, $x+\frac{11}{2}$이다.

따라서 구하는 합은 $\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{11}{2}\right)=2x+6$이다.

053 ····· 답 ⑤

최고차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지는 서로 같으므로

$f(x)=(x-2)^2(x+a)+x+a$ (a는 상수) ····· ㉠

라 할 수 있다.

이때, $f(2)=3$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$2+a=3$에서 $a=1$

$$f(x)=(x-2)^2(x+1)+x+1$$
$$=(x-2)^2(x-2+3)+x+1$$
$$=(x-2)^3+3(x-2)^2+x+1$$
$$=(x-2)^3+3x^2-11x+13$$

이므로 구하는 나머지는 $3x^2-11x+13$이다.

054 ····· 답 ②

다항식 $f(x)+g(x)$를 x^2-3x+7로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 다항식 $f(x)-2g(x)$를 $(x-1)(x^2-3x+7)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)+g(x)=(x^2-3x+7)Q_1(x)+2$ ····· ㉠

$f(x)-2g(x)=(x-1)(x^2-3x+7)Q_2(x)+x^2+6x-9$ ····· ㉡

$2\times$㉠+㉡을 하면

$$3f(x)=2\times\{(x^2-3x+7)Q_1(x)+2\}$$
$$+\{(x-1)(x^2-3x+7)Q_2(x)+x^2+6x-9\}$$
$$=2(x^2-3x+7)Q_1(x)+4+(x-1)(x^2-3x+7)Q_2(x)$$
$$+(x^2-3x+7)+9x-16$$
$$=(x^2-3x+7)\{2Q_1(x)+(x-1)Q_2(x)+1\}+9x-12$$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}(x^2-3x+7)\{2Q_1(x)+(x-1)Q_2(x)+1\}+3x-4$

따라서 구하는 나머지는 $3x-4$이다.

055 ····· 답 36

$a=9996=10^4-4$이므로

$$a^2=(10^4-4)^2$$
$$=10^8-8\times10^4+16$$
$$=100000000-80000+16$$
$$=99920016$$

따라서 a^2의 각 자리 숫자의 합은

$9+9+9+2+0+0+1+6=36$이다.

056 ····· 답 ②

$(\sqrt{3}+1)^{10}+(\sqrt{3}-1)^{10}=X$, $(\sqrt{3}+1)^{10}-(\sqrt{3}-1)^{10}=Y$라 하면

$X+Y=2(\sqrt{3}+1)^{10}$, $X-Y=2(\sqrt{3}-1)^{10}$이므로

$$\{(\sqrt{3}+1)^{10}+(\sqrt{3}-1)^{10}\}^2-\{(\sqrt{3}+1)^{10}-(\sqrt{3}-1)^{10}\}^2$$
$$=X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$$
$$=2(\sqrt{3}+1)^{10}\times2(\sqrt{3}-1)^{10}$$
$$=4\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\}^{10}$$
$$=4\{(\sqrt{3})^2-1^2\}^{10}$$
$$=4\times2^{10}=2^{12}$$

다른 풀이

$(\sqrt{3}+1)^{10}=A$, $(\sqrt{3}-1)^{10}=B$라 하면

$$\{(\sqrt{3}+1)^{10}+(\sqrt{3}-1)^{10}\}^2-\{(\sqrt{3}+1)^{10}-(\sqrt{3}-1)^{10}\}^2$$
$$=(A+B)^2-(A-B)^2=4AB$$
$$=4(\sqrt{3}+1)^{10}(\sqrt{3}-1)^{10}$$
$$=4\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\}^{10}$$
$$=4\{(\sqrt{3})^2-1^2\}^{10}$$
$$=4\times2^{10}=2^{12}$$

057 ····· 답 (1) 11 (2) 99

(1) 다항식 $x^4+x^3-9x^2-4x+13$을 x^2+3x-1로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} x^2-2x-2 \\ x^2+3x-1\overline{)\,x^4+\ x^3-9x^2-4x+13} \\ \underline{\ x^4+3x^3-\ x^2\ \ \ \ \ \ \ \ } \\ -2x^3-8x^2-4x+13 \\ \underline{-2x^3-6x^2+2x\ \ \ \ } \\ -2x^2-6x+13 \\ \underline{-2x^2-6x+2\ \ } \\ 11 \end{array}$$

어뀨혀어느내ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재어ㅅㅣ(ㅅㅏ어)_혀내ㅅ너르.indb 10 22. 9. 14. 오후 8:19

그러므로 이를 식으로 나타내면
$x^4+x^3-9x^2-4x+13=(x^2+3x-1)(x^2-2x-2)+11$
이고 $x^2+3x-1=0$이므로
$x^4+x^3-9x^2-4x+13=11$

(2) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$
$=(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)$
$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)$
$=\{(x^2+7x+1)+9\}\{(x^2+7x+1)+11\}$
$=(x^2+7x+1)^2+20(x^2+7x+1)+99$
$x^2+7x+1=0$이므로
$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=99$

058 ····· 답 ①

$x=\sqrt{7}-3$에서 $x+3=\sqrt{7}$이고, 이 식의 양변을 제곱하면
$(x+3)^2=7$이므로
$x^2+6x+2=0$ ····· ㉠
한편, 다항식 $x^5-34x^3-13x^2-5x+1$을 x^2+6x+2로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} x^3-6x^2-1 \\ x^2+6x+2\overline{)\,x^5-34x^3-13x^2-5x+1} \\ x^5+6x^4+2x^3 \\ \hline -6x^4-36x^3-13x^2-5x+1 \\ -6x^4-36x^3-12x^2 \\ \hline -x^2-5x+1 \\ -x^2-6x-2 \\ \hline x+3 \end{array}$$

$\therefore x^5-34x^3-13x^2-5x+1$
$=(x^2+6x+2)(x^3-6x^2-1)+x+3$
$=0+(\sqrt{7}-3)+3$ ($\because$ ㉠)
$=\sqrt{7}$

059 ····· 답 ①

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$ $(a>0, b>0)$라 하자.
직사각형 ABCD의 넓이가 1500이므로
$ab=1500$ ····· ㉠
원의 반지름의 길이를 r라 하면
원의 넓이가 850π이므로
$\pi r^2=850\pi$, $r^2=850$ ····· ㉡
삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여
$a^2+b^2=(2r)^2$, 즉 $a^2+b^2=4r^2$에서
$a^2+b^2=3400$ ($\because$ ㉡)이고,
$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$에서
$(a-b)^2=3400-2\times1500=400$ ($\because$ ㉠)
$\therefore |\overline{AB}-\overline{BC}|=|a-b|=\sqrt{400}=20$

060 ····· 답 ④

직사각형 OCDE의 대각선의 길이는 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{CE}=\overline{OD}=3\sqrt{3}$
이때, $\overline{OC}=x$, $\overline{OE}=y$ $(x>0, y>0)$라 하면
직각삼각형 OCE에서 $\overline{OC}^2+\overline{OE}^2=\overline{CE}^2$이므로
$x^2+y^2=27$ ····· ㉠
직사각형 OCDE의 넓이는 11이므로
$\overline{OC}\times\overline{OE}=11$ $\therefore xy=11$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$
$=27+2\times11=49$
$\therefore x+y=7$ ($\because x>0, y>0$)
따라서 A → C → E → B를 잇는 최단 거리는
$\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{EB}=(3\sqrt{3}-x)+3\sqrt{3}+(3\sqrt{3}-y)$
$=9\sqrt{3}-(x+y)$
$=9\sqrt{3}-7$

061 ····· 답 29

$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$ $(a>0, b>0, c>0)$라 하자.
조건 (나)에 의하여 $a+b+c=9$
조건 (가)에 의하여 세 삼각형 OAB, OBC, OCA는 직각삼각형이고,
조건 (다)에 의하여 이 세 삼각형의 넓이의 합이 13이므로
$\frac{1}{2}(ab+bc+ca)=13$에서 $ab+bc+ca=26$이다.
$\therefore \overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=a^2+b^2+c^2$
$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=9^2-2\times26=29$

062 ····· 답 ③

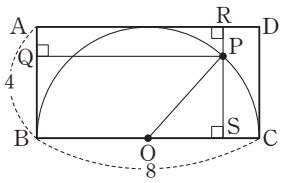
$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BF}=c$ $(a>0, b>0, c>0)$라 하자.
직육면체의 모든 모서리의 합이 60이므로
$4(a+b+c)=60$에서 $a+b+c=15$ ····· ㉠
피타고라스 정리에 의하여
$\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=a^2+b^2$
$\overline{BG}^2=\overline{BC}^2+\overline{CG}^2=b^2+c^2$
$\overline{GD}^2=\overline{CG}^2+\overline{CD}^2=c^2+a^2$
이므로 사면체 C-BGD의 모든 모서리의 길이의 제곱의 합은
$\overline{DB}^2+\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{CD}^2+\overline{BC}^2+\overline{CG}^2=249$
$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+a^2+b^2+c^2=249$
$3(a^2+b^2+c^2)=249$
$\therefore a^2+b^2+c^2=83$ ····· ㉡
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로 ㉠, ㉡에서
$15^2=83+2(ab+bc+ca)$
$\therefore ab+bc+ca=71$
그러므로 직육면체 ABCD-EFGH의 겉넓이는
$2(ab+bc+ca)=142$

어뀨혀어느새시ㅣㄴㄱㅗ즈새어시ㅣ(사ㅇ)_해시서르.indb 11 22. 9. 14. 오후 8:19

063 ····· 답 ①

$\overline{AQ}=a$, $\overline{AR}=b$ $(a>0,\ b>0)$라 하면 사각형 AQPR의 대각선의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 $a^2+b^2=32$ ····· ㉠

다음과 같이 점 P에서 선분 BC 위로 내린 수선의 발을 S, 반원의 중심을 O라 하자.



삼각형 POS에서

$\overline{OP}=4$, $\overline{PS}=\overline{RS}-\overline{PR}=\overline{AB}-\overline{AQ}=4-a$,

$\overline{OS}=\overline{BS}-\overline{BO}=\overline{AR}-\overline{BO}=b-4$

이고 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OP}^2=\overline{PS}^2+\overline{OS}^2$

$4^2=(4-a)^2+(b-4)^2$

$16=(a^2-8a+16)+(b^2-8b+16)$

$a^2+b^2-8(a+b)+16=0$

$32-8(a+b)+16=0$ $(\because$ ㉠$)$

$\therefore a+b=6$ ····· ㉡

사각형 AQPR의 넓이는 ab이므로

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서

$6^2=32+2ab$ $(\because$ ㉠, ㉡$)$

$\therefore ab=2$

064 ····· 답 ③

조건 (가)에서 $f_1(x)=x^3+x^2+1$

조건 (나)에 의하여

$f_2(x)=f_1(x+1)=(x+1)^3+(x+1)^2+1$

$f_3(x)=f_2(x+2)=(x+1+2)^3+(x+1+2)^2+1$

$f_4(x)=f_3(x+3)=(x+1+2+3)^3+(x+1+2+3)^2+1$

$f_5(x)=f_4(x+4)=(x+1+2+3+4)^3+(x+1+2+3+4)^2+1$

$=(x+10)^3+(x+10)^2+1$

따라서 $f_5(x)$의 x^2의 계수는 $3\times1^2\times10+1=31$이다.

065 ····· 답 50

다항식 $2f(x)+3g(x)$를 $h(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 할 때, 나머지가 $5x^2$이므로

$2f(x)+3g(x)=h(x)Q_1(x)+5x^2$ ····· ㉠

다항식 $4f(x)+3g(x)$를 $h(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 할 때, 나머지가 $3x^2$이므로

$4f(x)+3g(x)=h(x)Q_2(x)+3x^2$ ····· ㉡

$3\times$㉠$-5\times$㉡을 하면

$3\{2f(x)+3g(x)\}-5\{4f(x)+3g(x)\}=h(x)\{3Q_1(x)-5Q_2(x)\}$

$-14f(x)-6g(x)=h(x)\{3Q_1(x)-5Q_2(x)\}$ ····· ㉢

이므로 다항식 $-14f(x)-6g(x)$가 $h(x)$로 나누어떨어진다.

이때 다항식 $mf(x)+ng(x)$에서 m, n이 30 이하의 두 자연수이므로

㉢의 양변에 각각 $-\frac{1}{2}$을 곱해주면

$7f(x)+3g(x)=h(x)\times\frac{1}{2}\{5Q_2(x)-3Q_1(x)\}$

에서 $m+n$의 최솟값은 $m=7$, $n=3$일 때 $7+3=10$이다.

㉢의 양변에 각각 -2를 곱해주면

$28f(x)+12g(x)=h(x)\times\{10Q_2(x)-6Q_1(x)\}$

에서 $m+n$의 최댓값은 $m=28$, $n=12$일 때 $28+12=40$이다.

따라서 구하는 $m+n$의 최솟값과 최댓값의 합은 $10+40=50$이다.

066 ····· 답 112

$\{(x-2)^4+6(x-2)^3+12(x-2)^2\}^3$

$=[(x-2)^2\{(x-2)^2+6(x-2)+12\}]^3$

$=(x-2)^6\{(x-2)^2+6(x-2)+12\}^3$

$=(x-2)^6(x^2+2x+4)^3$

$=(x-2)^3\{(x-2)(x^2+2x+4)\}^3$

$=(x-2)^3(x^3-8)^3$

이므로 $m=3$, $n=8$이다.

$(x-2)^3(x^3-8)^3$

$=(x^3-6x^2+12x-8)(x^9-24x^6+192x^3-512)$

에서 x^{3m}, 즉 x^9의 계수는

(x^3의 계수)$\times$(x^6의 계수)$+$(상수항)$\times$(x^9의 계수)이므로

$1\times(-24)+(-8)\times1=-32$이다.

또한 x^n, 즉 x^8의 계수는 (x^2의 계수)$\times$(x^6의 계수)이므로

$(-6)\times(-24)=144$이다.

따라서 구하는 값은 $-32+144=112$이다.

067 ····· 답 ⑤

$a^3+b^3=4$, $a+b=1$이므로

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서

$4=1^3-3\times ab\times1$ $\therefore ab=-1$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=1^2-4\times(-1)=5$

이므로 $a-b=\sqrt{5}$ $(\because a>b)$

$\therefore (a^2+a-1)(b^2-b+1)$

$=a^2b^2-a^2b+a^2+ab^2-ab+a-b^2+b-1$

$=a^2b^2-a^2b+ab^2+a^2-b^2-ab+a+b-1$

$=(ab)^2-ab(a-b)+(a+b)(a-b)-ab+(a+b)-1$

$=(-1)^2-(-1)\times\sqrt{5}+1\times\sqrt{5}-(-1)+1-1$

$=2+2\sqrt{5}$

다른 풀이

위의 풀이에서 $ab=-1$, $a-b=\sqrt{5}$이므로

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=5\sqrt{5}+3\times(-1)\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

아끄하셔이노내서시니그고지재으서시(사이)_해서서르.indb 12 22. 9. 14. 오후 8:19

$\therefore\ (a^2+a-1)(b^2-b+1)$
$=(a^2-b)(b^2+a)\ (\because\ a+b=1)$
$=a^2b^2+a^3-b^3-ab$
$=(-1)^2+2\sqrt{5}-(-1)$
$=2+2\sqrt{5}$

068 ····· 답 135

조건 (가)에서 $(x-3)(y-3)(2z-3)=0$이므로
$(x-3)(y-3)(2z-3)$
$=(xy-3x-3y+9)(2z-3)$
$=2xyz-3xy-6xz+9x-6yz+9y+18z-27$
$=2xyz-3(xy+2yz+2zx)+9(x+y+2z)-27$
$=2xyz-3\times3(x+y+2z)+9(x+y+2z)-27\ (\because$ 조건 (나))
$=2xyz-27=0$

$2xyz=27,\ xyz=\frac{27}{2}$

$\therefore\ 10xyz=10\times\frac{27}{2}=135$

다른 풀이

조건 (가)에서 $x,\ y,\ 2z$ 중에서 적어도 하나는 3이므로
일반성을 잃지 않고 $x=3$이라 하면
조건 (나)의 $3(x+y+2z)=xy+2yz+2zx$에서

$3(3+y+2z)=3y+2yz+6z,\ 9=2yz,\ yz=\frac{9}{2}$

$\therefore\ 10xyz=10\times3\times\frac{9}{2}=135$

069 ····· 답 36

조건 (나)에서
$x^2+4y^2+z^2-2xy+2yz+zx=0$
$\frac{1}{2}\{(x-2y)^2+(2y+z)^2+(-z-x)^2\}=0$
이므로 $x=2y=-z$이다.
따라서 조건 (가)에 의하여 $x=2y=-z=4$이므로
$x=4,\ y=2,\ z=-4$이다.
$\therefore\ x^2+y^2+z^2=4^2+2^2+(-4)^2=36$

070 ····· 답 −4

$x+y+z=1,\ x^3+y^3+z^3=13$이므로
$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서
$1=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$
$x^2+y^2+z^2=1-2(xy+yz+zx)$ ····· ㉠
$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$에서
$13=1\times\{1-3(xy+yz+zx)\}+3xyz\ (\because$ ㉠)
$xy+yz+zx-xyz=-4$

$\therefore\ xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz$
$=xy(1-z)+yz(1-x)+zx(1-y)+2xyz\ (\because\ x+y+z=1)$
$=xy+yz+zx-xyz=-4$

071 ····· 답 18

주어진 두 식의 양변을 각각 더하면
$\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{a}\right)=6$에서 $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=6$이므로

$a+b+\frac{a+b}{ab}=6$ ····· ㉠

주어진 두 식의 양변을 각각 곱하면
$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=4$에서 $ab+1+1+\frac{1}{ab}=4$이므로

$ab+\frac{1}{ab}=2$ ····· ㉡

이때, $ab=t$라 하고 ㉡의 양변에 t를 곱하여 정리하면
$t^2-2t+1=0,\ (t-1)^2=0$ $\therefore\ t=1$, 즉 $ab=1$
이를 ㉠에 대입하면 $a+b=3$
$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=3^3-3\times1\times3=18$

072 ····· 답 ①

다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+2$이므로
$f(x)=(x^2+1)Q(x)+x+2$
$A=x^2+1,\ B=x+2$라 하면
$\{f(x)\}^3=\{A\times Q(x)+B\}^3$
$=A^3\{Q(x)\}^3+3A^2B\{Q(x)\}^2+3AB^2Q(x)+B^3$
$=A[A^2\{Q(x)\}^3+3AB\{Q(x)\}^2+3B^2Q(x)]+B^3$
에서 $\{f(x)\}^3$을 x^2+1로 나눈 나머지는 $B^3=(x+2)^3$을 x^2+1로 나눈 나머지와 같다.
$B^3=(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$에서
$x^3+6x^2+12x+8$을 x^2+1로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} x+6 \\ x^2+1\overline{)\,x^3+6x^2+12x+8} \\ \underline{x^3\qquad+x} \\ 6x^2+11x+8 \\ \underline{6x^2\qquad+6} \\ 11x+2 \end{array}$$

이를 식으로 나타내면 $B^3=(x^2+1)(x+6)+11x+2$이므로
$\{f(x)\}^3$을 x^2+1로 나눈 나머지는 $R(x)=11x+2$이다.
$\therefore\ R(2)=11\times2+2=24$

073 ····· 답 11

조건 (가)에서
$f(x)=g(x)\{g(x)+x^3\}+g(x)+x^3$ ····· ㉠
이고, $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는 $g(x)$의 차수보다 낮아야 하므

아끄하이노내시시노그고조재으시시(사수으)_하내시서르.indb 13 22. 9. 14. 오후 8:19

로 $g(x)+x^3$의 차수는 $g(x)$보다 낮다.
그러므로 $g(x)$는 $-x^3$을 반드시 포함하는 삼차식이다.
이때 조건 (나)에서 $g(x)$를 $g(x)+x^3$으로 나눈 몫이 이차식이려면
$g(x)+x^3$이 일차식이어야 하므로
$g(x)+x^3=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면
$g(x)=-x^3+ax+b$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$f(x)=(-x^3+ax+b)(ax+b)+ax+b$
이고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 2, 즉 $a=-2$이므로
$f(x)=(-x^3-2x+b)(-2x+b)-2x+b$ …… ㉢
조건 (다)에서 $f(0)+g(0)=-1$이므로 ㉡, ㉢에서
$f(0)+g(0)=(b^2+b)+b=b^2+2b=-1$
$b^2+2b+1=0$, $(b+1)^2=0$ $\therefore b=-1$
그러므로 $g(x)=-x^3-2x-1$이다.
$\therefore g(-2)=-(-2)^3-2\times(-2)-1=11$

074 ····· 답 21

$f(x)=(x^2+x+1)^3$
$=\{(x^2+2)+(x-1)\}^3$
$=(x^2+2)^3+3(x^2+2)^2(x-1)+3(x^2+2)(x-1)^2+(x-1)^3$
$=(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(x-1)+3(x-1)^2\}+(x-1)^3$
…… ㉠
이므로 $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는 $(x-1)^3$을 x^2+2로 나눈 나머지와 같다.
$(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$에서 x^3-3x^2+3x-1을 x^2+2로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x^2+2\overline{)\,x^3-3x^2+3x-1} \\ \underline{x^3\qquad +2x} \\ -3x^2+\ x-1 \\ \underline{-3x^2\qquad -6} \\ x+5 \end{array}$$

이를 식으로 나타내면
$x^3-3x^2+3x-1=(x^2+2)(x-3)+x+5$이므로 이를 ㉠에 대입하면
$f(x)=(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(x-1)+3(x-1)^2\}$
$+(x^2+2)(x-3)+x+5$
$=(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(x-1)+3(x-1)^2+(x-3)\}$
$+x+5$
$\therefore R_1(x)=x+5$
$xf(x)$
$=x(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(x-1)+3(x-1)^2+(x-3)\}$
$+x(x+5)$
$=x(x^2+2)\{(x^2+2)^2+3(x^2+2)(x-1)+3(x-1)^2+(x-3)\}$
$+(x^2+2)+5x-2$
$\therefore R_2(x)=5x-2$
$\therefore R_1(2)\times R_2(1)=(2+5)\times(5-2)$
$=21$

075 ····· 답 ④

$f(x)=(x+2)Q_1(x)+r_1$, $Q_1(x)=(x+2)Q_2(x)+r_2$이므로
$f(x)=(x+2)\{(x+2)Q_2(x)+r_2\}+r_1$
$=(x+2)^2Q_2(x)+r_2(x+2)+r_1$
에서 다항식 $f(x)$를 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는
$r_2(x+2)+r_1$이다.
또한
$f(x)=(x+2)^2\{(x+2)Q_3(x)+r_3\}+r_2(x+2)+r_1$
$=(x+2)^3Q_3(x)+r_3(x+2)^2+r_2(x+2)+r_1$
이므로 다항식 $f(x)$를 $(x+2)^3$으로 나누었을 때의 나머지는
$r_3(x+2)^2+r_2(x+2)+r_1$이다. …… ㉠
마찬가지 방법으로 다항식 $f(x)$를 $(x+2)^4$으로 나누었을 때의 나머지는
$R(x)=r_4(x+2)^3+r_3(x+2)^2+r_2(x+2)+r_1$이다.
조건 (나)에서
$R(8)=1000r_4+100r_3+10r_2+r_1=1024$이므로
조건 (가)에 의하여 $r_4=1$, $r_3=0$, $r_2=2$, $r_1=4$이다.
따라서 다항식 $f(x)$를 $(x+2)^3$으로 나누었을 때의 나머지는
$0\times(x+2)^2+2\times(x+2)+4=2x+8$ ($\because$ ㉠)

076 ····· 답 117

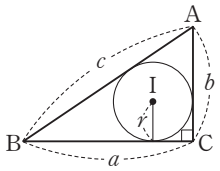
$\angle HPI=90^\circ$이므로 $\overline{HI}=\overline{OP}$이고, $\overline{OP}$는 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{HI}=5$이다.
$\overline{PH}=x$, $\overline{PI}=y$ ($x>0$, $y>0$)라 하면 삼각형 PIH에서 피타고라스 정리에 의하여
$x^2+y^2=25$ …… ㉠
삼각형 PIH의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 내접원의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\pi r^2=\frac{\pi}{4}$에서 $r=\frac{1}{2}$
삼각형 PIH의 넓이는 …… TIP
$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(x+y+5)$, $xy=\frac{1}{2}\times(x+y+5)$에서
$x+y=2xy-5$ …… ㉡
$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로 이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면
$(2xy-5)^2=25+2xy$
$4(xy)^2-20xy+25=25+2xy$
$4(xy)^2-22xy=0$, $xy(2xy-11)=0$
이때 $xy\neq0$이므로 $2xy-11=0$에서 $xy=\frac{11}{2}$
이를 ㉡에 대입하면
$x+y=2\times\frac{11}{2}-5=6$
$\therefore \overline{PH}^3+\overline{PI}^3=x^3+y^3$
$=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=6^3-3\times\frac{11}{2}\times6$
$=117$

아쁘허어느새시ㅣ느그ㅗ즈재어시ㅣ(사ㅇ)_해서ㄹ.indb 14 22. 9. 14. 오후 8:19

TIP

<내접원의 반지름의 길이와 삼각형의 넓이>

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면



(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

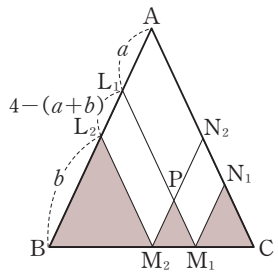
077

답 15

$\overline{AL_1}=a\ (a>1)$, $\overline{L_2B}=b$라 하면

$\overline{AL_1}\times\overline{L_2B}=1$에서 $ab=1$ …… ㉠

$\overline{AB}=4$에서 $\overline{L_1L_2}=4-(a+b)$ …… ㉡



이때, 두 선분 L_1M_1, M_2N_2의 교점을 P라 하면

네 삼각형 ABC, N_1M_1C, PM_2M_1, L_2BM_2는 서로 닮음이고, 닮음비는

$4:a:\{4-(a+b)\}:b$이므로 넓이의 비는

$4^2:a^2:\{4-(a+b)\}^2:b^2$이다.

그러므로 상수 k에 대하여

네 삼각형 ABC, N_1M_1C, PM_2M_1, L_2BM_2의 넓이를 각각

4^2k, a^2k, $\{4-(a+b)\}^2k$, b^2k라 하면

세 삼각형 N_1M_1C, PM_2M_1, L_2BM_2의 넓이의 합이

삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times4^2k=\{a^2+\{4-(a+b)\}^2+b^2\}k$

$8=a^2+b^2+\{4-(a+b)\}^2$

$8=\{(a+b)^2-2ab\}+\{4-(a+b)\}^2$

㉠에서 $ab=1$이므로

$8=\{(a+b)^2-2\}+\{4-(a+b)\}^2$

이때, $a+b=t$라 하면

$8=(t^2-2)+(4-t)^2$, $2t^2-8t+6=0$

$(t-1)(t-3)=0$이므로 $t=3$ ($\because a+b\geq2$)

즉, $a+b=3$이다.

$\therefore 15\overline{L_1L_2}=15\times\{4-(a+b)\}$

$=15\times1=15$ ($\because$ ㉡)

02 나머지정리

078

답 ⑤

$ax^2-3x+5=x^2+(1-b)x+c$가 x에 대한 항등식이므로

양변의 계수를 비교하면

$a=1$, $-3=1-b$에서 $b=4$, $5=c$

$\therefore a+b+c=1+4+5=10$

다른 풀이

$ax^2-3x+5=x^2+(1-b)x+c$가 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립한다.

따라서 주어진 등식의 양변에

$x=0$을 대입하면 $5=c$

$x=1$을 대입하면 $a+2=2-b+c$, $a+b=5$ …… ㉠

$x=-1$을 대입하면 $a+8=b+c$, $a-b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=4$

$\therefore a+b+c=1+4+5=10$

079

답 36

등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 정리하면

$3x^2-4x+7=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$=a(x^2-2x+1)+b(x-1)+c$

$=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$3=a$, $-4=-2a+b$, $7=a-b+c$에서

$a=3$, $b=2$, $c=6$

$\therefore abc=3\times2\times6=36$

다른 풀이

주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립한다.

따라서 주어진 등식의 양변에

$x=1$을 대입하면 $6=c$ …… ㉠

$x=0$을 대입하면 $7=a-b+c$ …… ㉡

$x=2$를 대입하면 $11=a+b+c$ …… ㉢

㉠을 ㉡, ㉢에 대입하면 $a-b=1$, $a+b=5$이므로

이를 연립하여 풀면

$a=3$, $b=2$

$\therefore abc=3\times2\times6=36$

080

답 3

주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립한다.

따라서 주어진 등식의 양변에

$x=-1$을 대입하면 $a-2=0$, $a=2$

$x=1$을 대입하면 $a-8=2(b-4)$, $b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$

아까하이노새시니그고재아시(사아)_하새서르.indb 15 22. 9. 14. 오후 8:19

다른 풀이

등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 정리하면

$x^3+ax^2-4x-5=(x+1)(x^2+bx-5)$

$=x^3+(b+1)x^2+(b-5)x-5$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a=b+1$, $-4=b-5$에서 $b=1$, $a=2$

$\therefore a+b=2+1=3$

081 ④

주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립한다.

따라서 주어진 등식의 양변에

$x=0$을 대입하면 $4=-2a$, $a=-2$

$x=2$를 대입하면 $6=6b$, $b=1$

$x=-1$을 대입하면 $6=3c$, $c=2$

$\therefore a+2b+3c=-2+2\times1+3\times2=6$

082 ③

$2kx+(k-2)y-(k+2)=0$이 k에 대한 항등식이므로

k에 대하여 정리하면

$(2x+y-1)k-2y-2=0$

양변의 계수를 비교하면

$2x+y-1=0$, $-2y-2=0$에서 $y=-1$, $x=1$

$\therefore x-y=1-(-1)=2$

083 13

$a(x+y)+b(2x-3y)+8x-7y=0$이

x, y에 대한 항등식이므로 x, y에 대하여 정리하면

$(a+2b+8)x+(a-3b-7)y=0$

양변의 계수를 비교하면

$a+2b+8=0$ …… ㉠

$a-3b-7=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-3$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+(-3)^2=13$

084 34

다항식 $3x^3+ax^2-22x+b$를 x^2+2x-5로 나누었을 때의 몫이 $3x-4$이고 나머지가 $x-3$이므로

$3x^3+ax^2-22x+b=(x^2+2x-5)(3x-4)+x-3$

$=3x^3+2x^2-22x+17$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a=2$, $b=17$

$\therefore ab=2\times17=34$

085 (1) -1 (2) -125

(1) $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$은

주어진 항등식의 우변에 $x=1$을 대입한 것이다.

따라서 주어진 항등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=(1+2-4)^3=-1$

(2) $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$은

주어진 항등식의 우변에 $x=-1$을 대입한 것이다.

따라서 주어진 항등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=(1-2-4)^3=-125$

086 (1) 5 (2) -6

(1) $f(x)=x^3-3x^2+5x+2$라 하면 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(1)=1^3-3\times1^2+5\times1+2=5$

(2) $f(x)=8x^3+4x-3$이라 하고 다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$f(x)=(2x+1)Q(x)+R=2\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$R=f\left(-\frac{1}{2}\right)=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3=-6$

087 ①

$f(x)=x^{12}+ax^5-3$이라 하자.

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

나머지정리에 의하여

$f(-1)=(-1)^{12}+a\times(-1)^5-3$

$=-a-2=6$

$\therefore a=-8$

088 ②

$f(x)=x^2+ax-4$, $g(x)=x^2-x+a$라 하자.

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 각각

$f(-2)=(-2)^2+a\times(-2)-4=-2a$,

$g(-2)=(-2)^2-(-2)+a=a+6$

이때, 두 나머지는 서로 같으므로 $-2a=a+6$

$\therefore a=-2$

089 ③

다항식 $P(x)$를 $(x+3)(x-1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $3x+5$이므로

$P(x)=(x+3)(x-1)Q(x)+3x+5$ …… ㉠

이때, 다항식 $(x+2)P(x-4)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

아쿠하이스내스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 16 22. 9. 14. 오후 8:19

$(1+2)P(1-4)=3P(-3)$이다.
㉠에서 $P(-3)=3\times(-3)+5=-4$
따라서 구하는 값은
$3P(-3)=3\times(-4)=-12$

090 ④

다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 4이므로
나머지정리에 의하여 $f(-2)=4$ …… ㉠
다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 -6이므로
나머지정리에 의하여 $f(3)=-6$ …… ㉡
한편, 다항식 $f(x)$를 $(x+2)(x-3)$으로 나누었을 때의
몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x+2)(x-3)Q(x)+ax+b$
이므로 ㉠, ㉡에서
$f(-2)=-2a+b=4$, $f(3)=3a+b=-6$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=0$
따라서 구하는 나머지는 $-2x$이다.

091 ⑤

다항식 $3f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여 $3f(-2)-g(-2)$이다.
다항식 $f(x)$를 $(x-2)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
나머지가 2이므로
$f(x)=(x-2)(x+2)Q_1(x)+2$ …… ㉠
다항식 $g(x)$를 $x(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
나머지가 $x-5$이므로
$g(x)=x(x+2)Q_2(x)+x-5$ …… ㉡
㉠, ㉡의 양변에 각각 $x=-2$를 대입하면
$f(-2)=2$, $g(-2)=-7$
$\therefore 3f(-2)-g(-2)=3\times2-(-7)=13$

092 11

다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
나머지가 5이므로
$f(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+5$ …… ㉠
다항식 $f(x)$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
나머지가 $2x+3$이므로
$f(x)=(x+2)(x+1)Q_2(x)+2x+3$ …… ㉡
다항식 $f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를
$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$
이 식의 양변에 $x=-2$, $x=1$을 각각 대입하면
$f(-2)=-2a+b$, $f(1)=a+b$이고
㉠에서 $f(1)=5$, ㉡에서 $f(-2)=-1$이므로
$a+b=5$, $-2a+b=-1$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$이므로
$R(x)=2x+3$
$\therefore R(4)=2\times4+3=11$

093 ③

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가
-3이므로
$f(x)=(x-1)Q(x)-3$ …… ㉠
다항식 $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 2이므로
나머지정리에 의하여 $Q(3)=2$
따라서 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
㉠에서 나머지정리에 의하여 $f(3)=2Q(3)-3=1$이다.

094 ①

다항식 $f(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가
$3x+5$이므로
$f(x)=(x^2+2)Q(x)+3x+5$ …… ㉠
다항식 $f(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
나머지가 $x-3$이므로
$f(x)=(x+1)(x-3)Q_1(x)+x-3$ …… ㉡
다항식 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에
의하여 $Q(-1)$이다.
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=3Q(-1)+2$
㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=-4$
따라서 $3Q(-1)+2=-4$이므로
$Q(-1)=-2$

095 ④

$x=50$이라 하면
$98\times99\times103=(2x-2)(2x-1)(2x+\boxed{3})$
이다. 이때,
$f(x)=(2x-2)(2x-1)(2x+\boxed{3})$
이라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여
$f(-2)=(-4-2)\times(-4-1)\times(-4+3)=\boxed{-30}$이므로
$f(x)=(x+2)Q(x)+\boxed{-30}$ (단, $Q(x)$는 다항식)
다시 $x=50$을 대입하면
$98\times99\times103=52Q(50)+\boxed{-30}$
$=52\{Q(50)-1\}+\boxed{22}$ …… TIP
이므로 $98\times99\times103$을 52로 나누었을 때의 나머지는 $\boxed{22}$이다.
따라서 $a=3$, $b=-30$, $c=22$이므로
$a-b+c=3-(-30)+22=55$

TIP
자연수 a를 자연수 b로 나누었을 때의 나머지를 r라 하면
r는 $0\le r<b$인 정수이다.
따라서 자연수의 나눗셈을 다항식의 나눗셈으로 변형하여
계산할 때 조건 $0\le r<b$에 맞는지 확인해야 한다.

아쿠하이스쿨시스템고3자이스키(사이)_해설지.indb 17 22. 9. 14. 오후 8:19

096 ····· 답 ④

다항식 $f(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지므로
인수정리에 의하여 $f(-2)=0$이다.
따라서 $f(x)=x^3+3x^2+ax-2$에서
$f(-2)=(-2)^3+3\times(-2)^2+a\times(-2)-2=0$
$\therefore a=1$

097 ····· 답 ②

다항식 $f(6x+1)$이 $3\left(x-\frac{1}{3}\right)$로 나누어떨어지므로

인수정리에 의하여 $f\left(6\times\frac{1}{3}+1\right)=f(3)=0$이다.

즉, $f(x)=x^3+ax^2-2x+6$에서
$f(3)=9a+27=0 \quad \therefore a=-3$
$f(x)=x^3-3x^2-2x+6$이므로
$f(1)=1^3-3\times1^2-2\times1+6=2$

098 ····· 답 13

다항식 $P(x)$가 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로
다항식 $P(x)$는 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어진다. ····· TIP
따라서 $P(x)=x^3+ax^2+bx-4$에서 인수정리에 의하여
$P(1)=a+b-3=0$, $a+b=3$
$P(2)=4a+2b+4=0$, $2a+b=-2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=8$
$\therefore b-a=8-(-5)=13$

TIP

다항식 $P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$이므로
다항식 $P(x)$는 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어진다.

099 ····· 답 ③

다항식 $P(x+2)$를 $x-4$로 나눈 나머지는 15이므로
나머지정리에 의하여
$P(4+2)=P(6)=15$ ····· ㉠
다항식 $P(x+2)$는 $x+1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
$P(-1+2)=P(1)=0$ ····· ㉡
다항식 $P(x)$를 $(x-1)(x-6)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$P(x)=(x-1)(x-6)Q(x)+ax+b$
㉠, ㉡에서 $P(1)=0$, $P(6)=15$이므로 이 식의 양변에 $x=1$, $x=6$을 각각 대입하면
$a+b=0$, $6a+b=15$
두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-3$이므로 $R(x)=3x-3$이다.
$\therefore R(5)=3\times5-3=12$

100 ····· 답 ③

조립제법을 이용하여 다항식 x^3-4x^2+5x-1을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정은 다음과 같다.

3	1	−4	5	−1
		3	−3	6
	1	−1	2	5

따라서 x^3-4x^2+5x-1을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)=x^2-x+2$, 나머지는 $r=5$이다.
$\therefore Q(r)=Q(5)=5^2-5+2=22$

다른 풀이

직접 나눗셈을 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & x^2-x+2 \quad \text{: 몫} \\ x-3 & \overline{x^3-4x^2+5x-1} \\ & \underline{x^3-3x^2} \\ & -x^2+5x-1 \\ & \underline{-x^2+3x} \\ & 2x-1 \\ & \underline{2x-6} \\ & 5 \quad \text{: 나머지} \end{array}$$

따라서 x^3-4x^2+5x-1을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)=x^2-x+2$, 나머지는 $r=5$이다.
$\therefore Q(r)=Q(5)=5^2-5+2=22$

101 ····· 답 ⑤

조립제법을 이용하여 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정은 다음과 같다.

−2	1	a	b	c
		−2	−10	4
	1	5	−2	−1

$a+(-2)=5$에서 $a=7$
$b+(-10)=-2$에서 $b=8$
$c+4=-1$에서 $c=-5$
$\therefore a+b+c=7+8+(-5)=10$

참고

위 과정은 다항식 x^3+7x^2+8x-5를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 x^2+5x-2이고 나머지는 -1임을 구한 것이다.

102 ····· 답 ③

조립제법을 이용하여 다항식 $3x^3+4x^2-13x+8$을 $x-\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정은 다음과 같다.

$\frac{2}{3}$	3	4	−13	8
		2	4	−6
	3	6	−9	2

아쿠형이내시니그고지이시(사이)_해설서로.indb 18 22. 9. 14. 오후 8:19

$\therefore\ 3x^3+4x^2-13x+8=\left(x-\frac{2}{3}\right)(3x^2+6x-9)+2$

$=(3x-2)(x^2+2x-3)+2$

따라서 $a=6$, $b=-9$, $c=-2$, $d=2$, $e=-3$이므로

$a+b+c+d+e=-6$

103 ····· 답 ④

주어진 조립제법 과정에서

삼차식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

다항식 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $2x-3$, 나머지는 1이므로 $Q(x)=(x+1)(2x-3)+1$

이때, 삼차식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 3이므로

$f(x)=(x-2)Q(x)+3$

$=(x-2)\{(x+1)(2x-3)+1\}+3$

$\therefore\ f(1)=-1\times\{2\times(-1)+1\}+3=4$

참고

주어진 조립제법 과정에서 빈칸을 채우면 다음과 같다.

2	2	−5	0	7
		4	−2	−4
−1	2	−1	−2	3
		−2	3	
	2	−3	1	

따라서 $f(x)=2x^3-5x^2+7$이므로

$f(1)=2\times1^3-5\times1^2+7=4$이다.

104 ····· 답 ②

$x^8+ax^3+b=x(x-1)f(x)-2x+5$ ····· ㉠

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 ····· TIP

$x=0$을 대입하면 $b=5$

$x=1$을 대입하면 $1+a+b=3$, $a=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$x^8-3x^3+5=x(x-1)f(x)-2x+5$이므로

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+3+5=2f(-1)+7$

$\therefore\ f(-1)=1$

TIP

주어진 등식에서 $f(x)$를 구체적으로 알 수 없으므로 $f(x)$에 곱해진 $x(x-1)$의 값이 0이 되도록 하는 x의 값, 즉 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하여 문제를 해결한다.

105 ····· 답 ②

$(x+y)a-(y-z)b-(y+z)c-3x+z=0$이

x, y, z에 대한 항등식이므로 x, y, z에 대하여 정리하면

$(a-3)x+(a-b-c)y+(b-c+1)z=0$

양변의 계수를 비교하면

$a-3=0$ ····· ㉠

$a-b-c=0$ ····· ㉡

$b-c+1=0$ ····· ㉢

㉠에서 $a=3$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$b+c=3$

이를 ㉢과 연립하여 풀면

$b=1$, $c=2$

$\therefore\ abc=3\times1\times2=6$

106 ····· 답 ⑤

$x-y=1$에서 $x=y+1$이므로 이를

$(a+b)x+(b-2a)y=9$에 대입하면

$(a+b)(y+1)+(b-2a)y=9$

$(-a+2b)y+a+b=9$

이 등식은 y에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$-a+2b=0$, $a+b=9$

두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=3$

$\therefore\ ab=6\times3=18$

다른 풀이 1

$x-y=1$에서 $9x-9y=9$이므로 이를

$(a+b)x+(b-2a)y=9$에 대입하면

$(a+b)x+(b-2a)y=9x-9y$

이 등식은 x, y에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a+b=9$, $b-2a=-9$

두 식을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=3$

$\therefore\ ab=6\times3=18$

다른 풀이 2

$x-y=1$을 만족시키는 임의의 x, y의 값을

$(a+b)x+(b-2a)y=9$에 대입하여 다음과 같이 문제를 해결할 수 있다.

$(a+b)x+(b-2a)y=9$의 양변에

$x=1$, $y=0$을 대입하면 $a+b=9$ ····· ㉠

$x=0$, $y=-1$을 대입하면 $2a-b=9$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=3$

$\therefore\ ab=6\times3=18$

107 ····· 답 ②

$\frac{2x-6y+a}{bx+3y+5}=k$ (k는 상수)로 일정한 값을 갖는다고 하면

$2x-6y+a=k(bx+3y+5)$

이 등식은 x, y에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$2=bk$, $-6=3k$, $a=5k$이므로

$k=-2$, $a=-10$, $b=-1$

$\therefore\ a+b=-10+(-1)=-11$

아까하이스쿨시스템고3수학Ⅰ(사이)_해설지.indb 19 22. 9. 14. 오후 8:19

108 ····· 답 ③

$f(x)=x^3-2x^2+5$에서
$f(a-2x)=(a-2x)^3-2(a-2x)^2+5$
$=(a^3-6a^2x+12ax^2-8x^3)-2(a^2-4ax+4x^2)+5$
$=-8x^3+(12a-8)x^2+(-6a^2+8a)x+a^3-2a^2+5$
$=-8x^3+4x^2+bx+c$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$12a-8=4$, $-6a^2+8a=b$, $a^3-2a^2+5=c$에서
$a=1$, $b=2$, $c=4$
$\therefore a-b+c=1-2+4=3$

109 ····· 답 90

$3x^2-4x-1=ab(x-2)+(a-b)(x-1)^2$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x=2$를 대입하면
$3\times2^2-4\times2-1=a-b$에서
$a-b=3$ ····· ㉠
양변에 $x=1$을 대입하면
$3\times1^2-4\times1-1=ab\times(-1)$에서
$ab=2$ ····· ㉡
$\therefore a^4b-ab^4=ab(a^3-b^3)=ab\{(a-b)^3+3ab(a-b)\}$
$=2(3^3+3\times2\times3)$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$=90$

110 ····· 답 22

다항식 $f(x)$를 $2x^3-6x^2+5x$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-2x^2+ax+7$이므로
$f(x)=(2x^3-6x^2+5x)Q(x)-2x^2+ax+7$
$=2x\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)Q(x)-2x^2+ax+7$

이때, 다항식 $f(x)$를 $x^2-3x+\frac{5}{2}$로 나누었을 때의 나머지가 $4x+b$이므로 다항식 $-2x^2+ax+7$을 $x^2-3x+\frac{5}{2}$로 나누었을 때의 나머지가 $4x+b$이다.

즉, $-2x^2+ax+7=-2\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)+4x+b$에서
$-2x^2+ax+7=-2x^2+10x+b-5$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$a=10$, $7=b-5$에서 $b=12$
$\therefore a+b=10+12=22$

111 ····· 답 ③

삼차식 $f(x)$는 x^2+x+1로 나누어떨어지므로 두 상수 a ($a\neq0$), b에 대하여
$f(x)=(x^2+x+1)(ax+b)$ ····· ㉠
삼차식 $f(x)+6$은 x^2+2로 나누어떨어지고,
㉠에서 $f(x)$의 삼차항의 계수가 a이므로 상수 c에 대하여
$f(x)+6=(x^2+2)(ax+c)$
$\therefore f(x)=(x^2+2)(ax+c)-6$ ····· ㉡
$f(0)=2$이므로 ㉠에서 $b=2$, ㉡에서 $c=4$
따라서 ㉠, ㉡에서
$(x^2+x+1)(ax+2)=(x^2+2)(ax+4)-6$ ····· ㉢
$ax^3+(a+2)x^2+(a+2)x+2=ax^3+4x^2+2ax+2$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$a+2=4$, $a+2=2a$에서 $a=2$
따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(2x+2)$이므로
$f(1)=12$

다른 풀이

㉢은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-a+2=3(-a+4)-6$에서 $a=2$
따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(2x+2)$이므로
$f(1)=12$

112 ····· 답 ①

조건 ㈎에서 $P(x)+Q(x)=3x-1$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면
$P(2)+Q(2)=3\times2-1=5$ ····· ㉠
조건 ㈏에서 $\{P(x)\}^2-\{Q(x)\}^2=3x^2-16x+5$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면
$\{P(2)\}^2-\{Q(2)\}^2=3\times2^2-16\times2+5=-15$ ····· ㉡
이때, $\{P(2)\}^2-\{Q(2)\}^2=\{P(2)+Q(2)\}\{P(2)-Q(2)\}$이므로
$-15=5\times\{P(2)-Q(2)\}$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$\therefore P(2)-Q(2)=-3$

다른 풀이

조건 ㈏에서
$\{P(x)\}^2-\{Q(x)\}^2=3x^2-16x+5$
$=(3x-1)(x-5)$ ····· ㉠
이고 곱셈법칙에 의하여
$\{P(x)\}^2-\{Q(x)\}^2=\{P(x)+Q(x)\}\{P(x)-Q(x)\}$
조건 ㈎에서 $P(x)+Q(x)=3x-1$이므로
$\{P(x)\}^2-\{Q(x)\}^2=(3x-1)\{P(x)-Q(x)\}$
이를 ㉠에 대입하면
$(3x-1)\{P(x)-Q(x)\}=(3x-1)(x-5)$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로
$P(x)-Q(x)=x-5$
$\therefore P(2)-Q(2)=2-5=-3$

113 ····· 답 21

$P_1(x)=x$,
$P_2(x)=x(x-1)$,
$P_3(x)=x(x-1)(x-2)$이므로
$(2x-1)^3=ax(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d$ ····· ㉠

아뿌하우스_내신_수학상(사이)_해설.indb 20 22. 9. 14. 오후 8:19

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에
$x=0$을 대입하면 $-1=d$
$x=1$을 대입하면 $1=c+d$, $c=2$
$x=2$를 대입하면 $27=2b+2c+d$, $b=12$
㉠의 양변의 x^3의 계수를 비교하면 $8=a$
$\therefore a+b+c+d=8+12+2+(-1)=21$

다른 풀이

㉠의 좌변을 전개하면 $8x^3-12x^2+6x-1$
이 식을 x, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 차례대로 조립제법을 이용하여 구하는 과정은 다음과 같다.

```
0 |  8   -12    6    -1
  |       0    0     0
  ------------------------
1 |  8   -12    6  |  -1  = d
  |       8   -4
  ------------------------
2 |  8    -4    |   2  = c
  |      16
  ------------------------
  |  8   |  12  = b
  |  =
  |  a
```

따라서 조립제법의 결과를 이용하면
$8x^3-12x^2+6x-1$
$=x(8x^2-12x+6)-1$
$=x\{(x-1)(8x-4)+2\}-1$
$=x[(x-1)\{8(x-2)+12\}+2]-1$
$=8x(x-1)(x-2)+12x(x-1)+2x-1$
이므로 $a=8$, $b=12$, $c=2$, $d=-1$
$\therefore a+b+c+d=21$

114

답 6

$(2x-1)^3(x+1)^2=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면
$4=a+b+c+d+e+f$
이때, $(2x-1)^3(x+1)^2=(8x^3-12x^2+6x-1)(x^2+2x+1)$
에서 x^2의 계수는
(x^2의 계수)$\times$(상수항)$+$(x의 계수)$\times$(x의 계수)
$+$(상수항)$\times$(x^2의 계수)
이므로 $(-12)\times1+6\times2+(-1)\times1=-1$
즉, $d=-1$
상수항은 (상수항)$\times$(상수항)에서 $(-1)\times1=-1$
즉, $f=-1$
$\therefore a+b+c+e=(a+b+c+d+e+f)-(d+f)$
$=4-\{(-1)+(-1)\}=6$

다른 풀이

$(2x-1)^3(x+1)^2=(8x^3-12x^2+6x-1)(x^2+2x+1)$
$=8x^5+4x^4-10x^3-x^2+4x-1$
이므로 $a=8$, $b=4$, $c=-10$, $e=4$
$\therefore a+b+c+e=6$

115

답 풀이 참조

$(x^3-2x-4)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12}$ …… ㉠
이는 x에 대한 항등식이다.
(1) a_0은 $(x^3-2x-4)^4$의 상수항과 같으므로
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_0=256$
a_{12}는 $(x^3-2x-4)^4$의 x^{12}의 계수와 같으므로 $a_{12}=1$
$\therefore a_0+a_{12}=256+1=257$
(2) ㉠의 양변에
$x=1$을 대입하면
$625=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{11}+a_{12}$ …… ㉡
$x=-1$을 대입하면
$81=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{11}+a_{12}$ …… ㉢
㉡, ㉢의 양변을 각각 더하면
$2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12})=706$
$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=353$
(3) (2)의 풀이에서 ㉡에서 ㉢을 변끼리 빼면
$2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11})=544$
$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=272$

채점 요소	배점
a_0+a_{12}의 값 구하기	20 %
$a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}$의 값 구하기	40 %
$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}$의 값 구하기	40 %

116

답 ③

$x^{10}+2=a_{10}(x+2)^{10}+a_9(x+2)^9+\cdots+a_1(x+2)+a_0$ …… ㉠
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에
$x=-1$을 대입하면 …… TIP
$3=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$
$x=-2$를 대입하면
$1026=a_0$
㉠의 양변의 x^{10}의 계수를 비교하면 $a_{10}=1$
$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}-(a_0+a_{10})$
$=3-(1026+1)$
$=-1024$

TIP

㉠의 우변에서 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$의 값을 구하려면
$x+2=1$이어야 하므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입해야 하고,
a_0의 값을 구하려면 $x+2=0$이어야 하므로 ㉠의 양변에
$x=-2$를 대입해야 한다.

117

답 ②

$(3x^2-x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에
$x=\frac{1}{3}$을 대입하면

아까하이노래시니그고자이시(사이)_해설서로.indb 21 22. 9. 14. 오후 8:19

$-1=a_0+\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_9}{3^9}+\frac{a_{10}}{3^{10}}$ …… ㉠

$x=-\frac{1}{3}$을 대입하면

$-\frac{1}{3^5}=a_0-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}-\cdots-\frac{a_9}{3^9}+\frac{a_{10}}{3^{10}}$ …… ㉡

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$\frac{-3^5+1}{3^5}=2\left(\frac{a_1}{3}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_5}{3^5}+\cdots+\frac{a_9}{3^9}\right)$

$\therefore \frac{a_1}{3}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_5}{3^5}+\cdots+\frac{a_9}{3^9}=\frac{1-3^5}{2\times 3^5}$

118 ⑤

다항식 $P(x)+3x$를 $x-1$로 나눈 나머지는 6이므로
나머지정리에 의하여
$P(1)+3=6$, $P(1)=3$ …… ㉠
이때, 등식 $P(x+3)=P(1-x)$가 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x=0$을 대입하면
$P(3)=P(1)$, $P(3)=3$ ($\because$ ㉠) …… ㉡
다항식 $(x+1)P(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$(x+1)P(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$
이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $2P(1)=a+b=6$ ($\because$ ㉠)
이 식의 양변에 $x=3$을 대입하면 $4P(3)=3a+b=12$ ($\because$ ㉡)
두 식을 연립하면 $a=3$, $b=3$이므로 $R(x)=3x+3$이다.
$\therefore R(4)=3\times 4+3=15$

119 3

다항식 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로
나머지정리에 의하여
$f(2)+g(2)=5$ …… ㉠
다항식 $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가
80이므로 나머지정리에 의하여
$\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3=80$ …… ㉡
다항식 $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여 $f(2)g(2)$이다.
$\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3=\{f(2)+g(2)\}^3-3f(2)g(2)\{f(2)+g(2)\}$
이므로 ㉠, ㉡에 의하여
$80=5^3-3\times f(2)g(2)\times 5$
$\therefore f(2)g(2)=3$

120 ①

다항식 $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지가 3이므로
나머지정리에 의하여 $f(0)=3$이다.
따라서 항등식 $f(x+1)=f(x)+3x^2-x$의 양변에
$x=0$을 대입하면 $f(1)=f(0)=3$ …… ㉠
$x=1$을 대입하면 $f(2)=f(1)+2=5$ …… ㉡
이때, 다항식 $f(x)$를 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의
몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$이므로
㉠에서 $f(1)=a+b=3$, ㉡에서 $f(2)=2a+b=5$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$
따라서 구하는 나머지는 $2x+1$이다.

121 −4

$\{f(x+3)\}^2-4=x^2(x+2)(x-2)$에서
$\{f(x+3)\}^2=x^2(x+2)(x-2)+4$
$=x^2(x^2-4)+4$
$=x^4-4x^2+4$
$=(x^2-2)^2$
이고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로
$f(x+3)=x^2-2$ …… ㉠
이때, 다항식 $f(x+1)$을 $x+k$로 나눈 나머지가 7이 되려면
$f(-k+1)=7$이어야 하므로 ㉠에 $x=-k-2$를 대입하면
$(-k-2)^2-2=7$, $k^2+4k+4-2=7$
$k^2+4k-5=0$, $(k+5)(k-1)=0$에서 $k=-5$ 또는 $k=1$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$(-5)+1=-4$

122 −170

$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$에서
$Q(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$ …… ㉠
$Q(-1)=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$ …… ㉡
㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면
$Q(1)-Q(-1)=2(a_1+a_3+a_5+a_7)$에서
$a_1+a_3+a_5+a_7=\frac{1}{2}\{Q(1)-Q(-1)\}$이다.
한편, $f(x)=x^9$이라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의
나머지는 나머지정리에 의하여 $f(-2)=-512$이므로
$f(x)=(x+2)Q(x)-512$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에
$x=1$을 대입하면
$f(1)=3Q(1)-512$
이때, $f(1)=1^9=1$이므로
$1=3Q(1)-512$ $\therefore Q(1)=171$
$x=-1$을 대입하면
$f(-1)=Q(-1)-512$
이때, $f(-1)=(-1)^9=-1$이므로
$-1=Q(-1)-512$
$\therefore Q(-1)=511$
$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7=\frac{1}{2}\{Q(1)-Q(-1)\}$
$=\frac{1}{2}(171-511)=-170$

아끄하이노내시니그고지재으시(사으)_하내시러.indb 22 22. 9. 14. 오후 8:19

123 ····· 답 1

다항식 $x^{20}+2x+5$를 x^2+x로 나누었을 때의
나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 몫이 $Q(x)$이므로
$x^{20}+2x+5=x(x+1)Q(x)+ax+b$ ····· ㉠
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에
$x=0$을 대입하면 $5=b$
$x=-1$을 대입하면 $4=-a+b$에서 $a=1$
이를 ㉠에 대입하면
$x^{20}+2x+5=x(x+1)Q(x)+x+5$ ····· ㉡
이때, 다항식 $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은
$Q(1)$과 같으므로 ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면
$8=2Q(1)+6$
$\therefore Q(1)=1$

124 ····· 답 20

조건 (나)에서 삼차식 $f(x)$를 $(x+3)^2$으로 나누었을 때의 몫은
일차식이므로 $ax+b$ ($a\neq0$, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x+3)^2(ax+b)+ax+b$ ····· ㉠
이때, 조건 (가)에서 $f(-3)=2$이므로
$f(-3)=-3a+b=2$, $b=3a+2$
이를 ㉠에 대입하면
$f(x)=(x+3)^2(ax+3a+2)+ax+3a+2$
$=(x+3)^2\{a(x+3)+2\}+ax+3a+2$
$=a(x+3)^3+2(x+3)^2+ax+3a+2$ ····· ㉡
따라서 다항식 $f(x)$를 $(x+3)^3$으로 나누었을 때의 나머지는
$R(x)=2(x+3)^2+ax+3a+2$이다.
$R(0)=3a+20$, $R(-2)=a+4$이므로
$R(0)=R(-2)$에서
$3a+20=a+4$ $\therefore a=-8$
이를 ㉡에 대입하면
$f(x)=-8(x+3)^3+2(x+3)^2-8x-22$
$\therefore f(-4)=20$

125 ····· 답 7

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
나머지가 $R(x)$ ($R(x)$는 이차 이하의 다항식)이므로
$f(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+R(x)$ ····· ㉠
이때, 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가
$x+3$이므로 다항식 $R(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는
$x+3$과 같다.
즉, $R(x)=a(x-2)^2+x+3$ (a는 상수) ····· ㉡
이를 ㉠에 대입하면
$f(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+a(x-2)^2+x+3$
이때, 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로
나머지정리에 의하여
$f(1)=a+4=5$, $a=1$
따라서 ㉡에서 $R(x)=(x-2)^2+x+3$이므로
$R(3)=7$

126 ····· 답 ③

다항식 $f(x)$를 $(x^3+5)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $R(x)$ ($R(x)$는 삼차 이하의 다항식)라 하면
$f(x)=(x^3+5)(x-1)Q(x)+R(x)$ ····· ㉠
이때, 다항식 $f(x)$를 x^3+5로 나누었을 때의 나머지가
x^2-2x이므로 다항식 $R(x)$를 x^3+5로 나누었을 때의 나머지는
x^2-2x와 같다.
즉, $R(x)=a(x^3+5)+x^2-2x$ (a는 상수)이므로
이를 ㉠에 대입하면
$f(x)=(x^3+5)(x-1)Q(x)+a(x^3+5)+x^2-2x$ ····· ㉡
한편, 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 11이므로
나머지정리에 의하여 $f(1)=11$이다.
㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=6a-1=11$이므로 $a=2$
따라서 $R(x)=2(x^3+5)+x^2-2x$이므로
$R(2)=26$

127 ····· 답 3

다항식 $\{P(x)\}^{999}$을 다항식 $P(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을
$Q_1(x)$라 할 때, 나머지 $R_1(x)$가 일차 이하의 다항식이므로
$R_1(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$\left\{\frac{1}{2}(x-1)\right\}^{999}=\frac{1}{2}(x^2-1)Q_1(x)+ax+b$
양변에 $x=1$을 대입하면
$0=a+b$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$(-1)^{999}=-a+b$, $-a+b=-1$
두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로
$R_1(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ····· ㉠
다항식 $\{P(x)\}^{1000}$을 다항식 $P(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을
$Q_2(x)$라 할 때, 나머지 $R_2(x)$가 일차 이하의 다항식이므로
$R_2(x)=cx+d$ (c, d는 상수)라 하면
$\left\{\frac{1}{2}(x-1)\right\}^{1000}=\frac{1}{2}(x^2-1)Q_2(x)+cx+d$
양변에 $x=1$을 대입하면
$0=c+d$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$(-1)^{1000}=-c+d$, $-c+d=1$
두 식을 연립하여 풀면 $c=-\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{2}$이므로
$R_2(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 값은
$R_1(3)+R_2(-3)=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=3$

아뿌리오니시스템스재오시(사이)_해설서류.indb 23 22. 9. 14. 오후 8:19

128 ····· 답 (1) 253 (2) 3

(1) $x=253$이라 하고 x^{11}을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.
$f(x)=x^{11}$이라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(-1)=-1$이므로
몫을 $Q(x)$라 하면
$x^{11}=(x+1)Q(x)-1$
다시 $x=253$을 대입하면
$253^{11}=254Q(253)-1$
$=254\{Q(253)-1\}+253$
따라서 구하는 나머지는 253이다.

(2) $x=8$이라 하고 $x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.
$f(x)=x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1$이라 하면
다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여 $f(1)=1+1+\cdots+1=101$이므로
몫을 $Q(x)$라 하면
$x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+101$
다시 $x=8$을 대입하면
$8^{100}+8^{99}+8^{98}+\cdots+8+1$
$=7Q(8)+101=7Q(8)+7\times14+3$
$=7\{Q(8)+14\}+3$
따라서 구하는 나머지는 3이다.

TIP

$5=3\times1+2$에서 5를 3으로 나누었을 때의 나머지는 2이고,
$7=3\times2+1$에서 7을 3으로 나누었을 때의 나머지는 1이다.
$5+7=(3\times1+2)+(3\times2+1)$에서
$5+7$을 3으로 나누었을 때의 나머지는
5와 7을 각각 3으로 나누었을 때의 나머지 2, 1을 합한 $2+1$을 3으로 나누었을 때의 나머지인 0과 같다.
$5\times7=(3\times1+2)\times(3\times2+1)$에서
5×7을 3으로 나누었을 때의 나머지는
5와 7을 각각 3으로 나누었을 때의 나머지 2, 1을 곱한 2×1을 3으로 나누었을 때의 나머지인 2와 같다.
이를 일반화하여
$A, B, C, \cdots$를 각각 P로 나누었을 때의 나머지를 $a, b, c, \cdots$라 하면
$A+B+C+\cdots$를 P로 나누었을 때의 나머지는 $a+b+c+\cdots$를 P로 나누었을 때의 나머지와 같고,
$A\times B\times C\times\cdots$를 P로 나누었을 때의 나머지는 $a\times b\times c\times\cdots$를 P로 나누었을 때의 나머지와 같다.
이를 이용하여 (2)를 다음과 같이 생각할 수 있다.
8을 7로 나누었을 때의 나머지가 1이므로
8^2을 7로 나누었을 때의 나머지는 $1^2=1$,
8^3을 7로 나누었을 때의 나머지는 $1^3=1$,
⋮
8^n을 7로 나누었을 때의 나머지는 $1^n=1$이다.
(단, n은 자연수)

따라서 $8^{100}+8^{99}+8^{98}+\cdots+8+1$을 7로 나누었을 때의 나머지는
$1+1+1+\cdots+1=101$을 7로 나누었을 때의 나머지와 같으므로
$101=7\times14+3$에서 3이다.

129 ····· 답 ④

$x=100$이라 하면
$10^{39}=10\times(10^2)^{19}=10x^{19}$, $99\times101=(x-1)(x+1)$
이므로 $10x^{19}$을 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.
$10x^{19}$을 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$10x^{19}=(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에
$x=1$을 대입하면 $10=a+b$ ····· ㉠
$x=-1$을 대입하면 $-10=-a+b$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $b=0$이므로
$10x^{19}=(x-1)(x+1)Q(x)+10x$
다시 $x=100$을 대입하면
$10^{39}=99\times101\times Q(100)+1000$
따라서 구하는 나머지는 1000이다.

다른 풀이

$x=10$이라 하면 $10^{39}=x^{39}$
$99\times101=(10^2-1)(10^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1$
이므로 x^{39}을 x^4-1로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.
$x^{39}=(x^4-1)(x^{35}+x^{31}+x^{27}+\cdots+x^3)+x^3$
다시 $x=10$을 대입하면
$10^{39}=99\times101\times(10^{35}+10^{31}+10^{27}+\cdots+10^3)+10^3$
따라서 구하는 나머지는 1000이다.

130 ····· 답 ②

다항식 $f(x)+2x$가 $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
$f(2)+2\times2=0$, $f(2)=-4$ ····· ㉠
$f(4)+2\times4=0$, $f(4)=-8$ ····· ㉡
다항식 $(x+2)f(x+5)$를 x^2+4x+3으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$(x+2)f(x+5)=(x^2+4x+3)Q(x)+ax+b$
$=(x+1)(x+3)Q(x)+ax+b$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$f(4)=-a+b$, $-a+b=-8$ ($\because$ ㉡)
양변에 $x=-3$을 대입하면
$-f(2)=-3a+b$, $-3a+b=4$ ($\because$ ㉠)
두 식을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=-14$이므로
$R(x)=-6x-14$
$\therefore R(-4)=-6\times(-4)-14=10$

오투해오내신시너고재오신(상오)_해설정답.indb 24 22. 9. 14. 오후 8:19

131 답 ③

$P(x)-2x$가 삼차식이고 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로
$P(x)-2x=(x+2)^2(ax+b)$ ($a\neq0$, b는 상수)
$\therefore P(x)=(x+2)^2(ax+b)+2x$ …… ㉠
한편, 다항식 $1-P(x)$가 $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$으로 나누어떨어지므로
$1-P(-1)=0$에서 $P(-1)=1$
$1-P(-3)=0$에서 $P(-3)=1$
㉠에 $x=-1$을 대입하면
$P(-1)=-a+b-2=1$에서 $-a+b=3$ …… ㉡
㉠에 $x=-3$을 대입하면
$P(-3)=-3a+b-6=1$에서 $-3a+b=7$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$이므로
$P(x)=(x+2)^2(-2x+1)+2x$
$\therefore P(2)=-44$

132 답 ④

$P(1)=1$, $P(2)=2$, $P(3)=3$에서
$P(1)-1=P(2)-2=P(3)-3=0$이다.
즉, 다항식 $P(x)-x$가 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누어떨어진다.
이때, 다항식 $P(x)$는 최고차항의 계수가 -2인 삼차식이므로
다항식 $P(x)-x$도 최고차항의 계수가 -2인 삼차식이다.
$P(x)-x=-2(x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore P(x)=-2(x-1)(x-2)(x-3)+x$
따라서 구하는 다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여
$P(-2)=-2\times(-3)\times(-4)\times(-5)-2=118$

133 답 ④

조건 ㈎에서 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 $\frac{1}{2}$이므로
나머지정리에 의하여
$f(1)=\frac{1}{2}$ …… ㉠
조건 ㈏에서 $4f(2)-3=0$, $f(3)=1$이므로
$f(2)=\frac{3}{4}$, $f(3)=1$ …… ㉡
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이고 ㉠, ㉡에서
$f(1)-\frac{2}{4}=f(2)-\frac{3}{4}=f(3)-\frac{4}{4}=0$이므로 인수정리에 의하여
$f(x)-\frac{x+1}{4}=(x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+\frac{x+1}{4}$
따라서 다항식 $f(x+3)$을 $x-4$로 나눈 나머지는
나머지정리에 의하여 $f(4+3)=f(7)$이므로
$f(7)=6\times5\times4+2=122$

134 답 풀이 참조

$f(1)-1=f(2)-2=f(3)-3=k$ (k는 상수)라 하면
$f(1)-1-k=0$, $f(2)-2-k=0$, $f(3)-3-k=0$이므로
인수정리에 의하여
$f(x)-x-k=a(x-1)(x-2)(x-3)$ (a는 상수)
$\therefore f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+x+k$ …… ㉠
한편, 다항식 $f(x)$를 $x(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
나머지가 $-17x-10$이므로
$f(x)=x(x+1)Q(x)-17x-10$에서
$f(-1)=7$, $f(0)=-10$이다.
㉠에 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=-24a-1+k=7$
$-24a+k=8$ …… ㉡
㉠에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=-6a+k=-10$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $k=-16$이므로
$f(x)=-(x-1)(x-2)(x-3)+x-16$
$\therefore f(-2)=42$

채점 요소	배점
$f(-1)$, $f(0)$의 값 구하기	20 %
$f(x)$의 식 세우기	70 %
$f(-2)$의 값 구하기	10 %

135 답 8

$(x-6)f(x+1)=(x+3)f(x-2)$는 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x=6$을 대입하면 $0=9f(4)$, $f(4)=0$
양변에 $x=-3$을 대입하면 $-9f(-2)=0$, $f(-2)=0$
양변에 $x=3$을 대입하면 $-3f(4)=6f(1)$, $f(1)=0$ ($\because f(4)=0$)
그러므로 삼차식 $f(x)$가 $f(4)=f(-2)=f(1)=0$이므로
인수정리에 의하여
$f(x)=a(x+2)(x-1)(x-4)$ (a는 상수) …… ㉠
이때, 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지가 10이므로
나머지정리에 의하여 $f(3)=10$이다.
$f(3)=a\times5\times2\times(-1)=10$, $a=-1$
이를 ㉠에 대입하면
$f(x)=-(x+2)(x-1)(x-4)$
$\therefore f(2)=-4\times1\times(-2)=8$

136 답 18

조건 ㈎에서
$3P(x)+Q(x)=0$, 즉 $Q(x)=-3P(x)$이므로
$P(x)Q(x)=P(x)\times\{-3P(x)\}=-3\{P(x)\}^2$ …… ㉠
조건 ㈏에서
$P(x)Q(x)$를 x^2+x-6으로 나눈 몫을 $A(x)$라 하면,
나누어떨어지므로
$P(x)Q(x)=(x^2+x-6)A(x)$

아쿠하이스내시ㅣ느그소재이시(사이)_해설서로.indb 25 22. 9. 14. 오후 8:19

$-3\{P(x)\}^2=(x+3)(x-2)A(x)$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \{P(x)\}^2=(x+3)(x-2)\left\{-\frac{1}{3}A(x)\right\}$

$P(x)$가 이차다항식이고 $\{P(x)\}^2$이 $(x+3)(x-2)$를 인수로 가지므로 $P(x)$도 $(x+3)(x-2)$를 인수로 가져야 한다.

$P(x)=a(x+3)(x-2)$(a는 상수)

이때, $P(1)=4$이므로

$P(1)=a\times4\times(-1)=4$, $a=-1$

그러므로 $P(x)=-(x+3)(x-2)$,

$Q(x)=3(x+3)(x-2)$ ($\because Q(x)=-3P(x)$)

$\therefore Q(3)=3\times6\times1=18$

137 ····· 답 6

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$를 x^2+4x-4로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $R(x)$이므로

$x^3+3x^2+ax+b=(x^2+4x-4)Q(x)+R(x)$

$f(x)$가 삼차식, x^2+4x-4는 이차식이므로

$Q(x)$는 일차식, $R(x)$는 일차 이하의 식이다.

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$를 x^2+4x-4로 나누는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x^2+4x-4\overline{)\,x^3+3x^2+ax\qquad+b} \\ \underline{\;x^3+4x^2-4x\qquad\qquad\;} \\ -x^2+(a+4)x+b \\ \underline{\;-x^2-4x\qquad+4\;} \\ (a+8)x+b-4 \end{array}$$

그러므로 이를 식으로 나타내면

$x^3+3x^2+ax+b=(x^2+4x-4)(x-1)+(a+8)x+b-4$

이고, $Q(x)=x-1$, $R(x)=(a+8)x+b-4$이다.

주어진 조건에서 $R(3)=-4$이므로

$R(3)=3(a+8)+b-4=-4$에서 $3a+b=-24$ ····· ㉠

이때, $f(x)$가 $Q(x)$로 나누어떨어지므로 $f(1)=0$이다.

$f(1)=0$에서 $1+3+a+b=0$, $a+b=-4$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 두 식을 연립하면 $a=-10$, $b=6$

그러므로 $f(x)=x^3+3x^2-10x+6$이다.

$\therefore f(2)=2^3+3\times2^2-10\times2+6=6$

138 ····· 답 ④

주어진 조립제법 과정에서

삼차식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 다항식 $Q_1(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $4x-12$, 나머지는 -2이므로

$Q_1(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x-12)-2$

이때, 삼차식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지는 6이므로

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q_1(x)+6$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x-12)-2\right\}+6$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(4x-12)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)+6$

$=(2x-1)^2(x-3)-2x+7$

따라서 $Q(x)=x-3$이고 $R(x)=-2x+7$이므로

$Q(1)+R(-1)=-2+9=7$

139 ····· 답 8

다항식 $3x^3+2x^2-x+1$을 $x+1$로 나누는 조립제법을 연속으로 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ & & -3 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 3 & -1 & 0 & 1=d \\ & & -3 & 4 & \\ \hline -1 & 3 & -4 & 4=c & \\ & & -3 & & \\ \hline & 3 & -7=b & & \\ & \| & & & \\ & a & & & \end{array}$$

따라서 조립제법의 결과를 이용하면

$3x^3+2x^2-x+1=(x+1)(3x^2-x)+1$

$=(x+1)\{(x+1)(3x-4)+4\}+1$

$=(x+1)[(x+1)\{3(x+1)-7\}+4]+1$

$=3(x+1)^3-7(x+1)^2+4(x+1)+1$

이므로 $a=3$, $b=-7$, $c=4$, $d=1$이다.

$\therefore 2a+b+2c+d=8$

다른 풀이

$3x^3+2x^2-x+1$

$=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$=a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^2+2x+1)+c(x+1)+d$

$=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a=3$, $3a+b=2$, $3a+2b+c=-1$, $a+b+c+d=1$

따라서 $b=-7$, $c=4$, $d=1$이므로

$2a+b+2c+d=8$

140 ····· 답 16

주어진 조립제법 과정에서 다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $G_1(x)$라 하면 나머지는 -1, 다항식 $G_1(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $G_2(x)$라 하면 나머지는 3, 다항식 $G_2(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫은 1이고 나머지는 -2이므로

$f(x)=(x+2)G_1(x)-1$

$=(x+2)\{(x-1)G_2(x)+3\}-1$

$=(x+2)[(x-1)\{(x-2)-2\}+3]-1$

$=(x+2)(x-1)(x-2)-2(x+2)(x-1)+3(x+2)-1$

아뿌려오내시스템고재오시스템(사오)_해설서류.indb 26 22. 9. 14. 오후 8:19

따라서 $f(1)=8$이고,
$P(x)=x+2$, $Q(x)=x-1$, $R(x)=x-2$이므로
$P(2)=4$, $Q(3)=2$, $R(4)=2$이다.
$\therefore f(1)+P(2)+Q(3)+R(4)=8+4+2+2=16$

참고

주어진 조립제법 과정에서 빈칸을 채우면 다음과 같다.

-2	1	-3	-3	13
		-2	10	-14
1	1	-5	7	-1
		1	-4	
2	1	-4	3	
		2		
	1	-2		

141 ····· 답 ④

$x=80$이라 하면
$2\times3^{79}=2\times(3^4)^{19}\times3^3=54\times(3^4)^{19}$
$=54\times81^{19}=54(x+1)^{19}$ ····· TIP
이므로 $54(x+1)^{19}$을 x로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.
$f(x)=54(x+1)^{19}$이라 하면
다항식 $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지는 $f(0)=54$이므로
몫을 $Q(x)$라 하면
$54(x+1)^{19}=xQ(x)+54$
다시 $x=80$을 대입하면
$54\times81^{19}=80Q(80)+54$
따라서 구하는 나머지는 54이다.

TIP

나머지정리를 이용하기 위해서 나누는 수를 x에 대한 일차식으로 변형하면 간단하게 풀 수 있다.
만약 $x=3$이라 하고 $2\times x^{79}$을 x^4-1로 나누었을 때의 나머지를 구하는 것으로 변형한다면 답을 구하는 것에 어려움이 있다.
따라서 위의 풀이와 같이 나누는 수인 80과 가장 차가 작은 $3^4=81$을 이용하여 식을 변형한다.

142 ····· 답 999

$A_1=9+99+999$,
$A_2=9\times99+99\times999+999\times9$,
$A_3=9\times99\times999$이므로
$(x+9)(x+99)(x+999)=x^3+A_1x^2+A_2x+A_3$
양변에 $x=1$을 대입하면
$10\times100\times1000=1+A_1+A_2+A_3$
$\therefore A_1+A_2+A_3=1000000-1=999999$
따라서 $A_1+A_2+A_3$을 1000으로 나누었을 때의 나머지는 999이다.

143 ····· 답 ③

$f(55)$에서 $\frac{55}{5}-1=10$이므로
$f(x)=a\left(\frac{1}{5}x-1\right)^3+b\left(\frac{1}{5}x-1\right)^2+c\left(\frac{1}{5}x-1\right)+d$
(a, b, c, d는 상수)로 나타내면
$f(55)=a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$로 값을 쉽게 구할 수 있다.
다항식 $x^3-14x^2+67x-105$를 $x-5$로 나누는 조립제법을 연속으로 이용하면 다음과 같다.

5	1	-14	67	-105
		5	-45	110
5	1	-9	22	5 $=d$
		5	-20	
5	1	-4	2 $=c$	
		5		
	1	1 $=b$		
	$\|\|$			
	a			

그러므로
$f(x)=(x-5)^3+(x-5)^2+2(x-5)+5$
$=5^3\left(\frac{1}{5}x-1\right)^3+5^2\left(\frac{1}{5}x-1\right)^2+2\times5\left(\frac{1}{5}x-1\right)+5$
$=125\left(\frac{1}{5}x-1\right)^3+25\left(\frac{1}{5}x-1\right)^2+10\left(\frac{1}{5}x-1\right)+5$
이고 양변에 $x=55$를 대입하면
$f(55)=125\times10^3+25\times10^2+10\times10+5$
$=125000+2500+100+5$
$=127605$
따라서 $f(55)$의 값의 각 자리의 숫자의 합은
$1+2+7+6+0+5=21$

144 ····· 답 풀이 참조

$f(x^2+x)=x^2f(x)+x(1+2x+3x^2)+1$ ····· ㉠
에서 다항식 $f(x)$가 n차식 (n은 자연수)일 때
$f(x^2+x)$의 최고차항은 x^{2n},
$x^2f(x)$의 최고차항은 x^{n+2}이므로
㉠에서 좌변의 최고차항은 x^{2n}이고
우변의 최고차항은 x^{n+2} 또는 x^3이다.
이때, 자연수 n에 대하여 $x^{2n}=x^3$은 가능하지 않으므로
$x^{2n}=x^{n+2}$에서 $2n=n+2$, $n=2$
따라서 다항식 $f(x)$가 이차식이므로
$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, b, c는 상수)라 하면
㉠에서
$a(x^2+x)^2+b(x^2+x)+c$
$=x^2(ax^2+bx+c)+x(1+2x+3x^2)+1$
$ax^4+2ax^3+(a+b)x^2+bx+c$
$=ax^4+(b+3)x^3+(c+2)x^2+x+1$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$2a=b+3$, $a+b=c+2$, $b=1$, $c=1$

아쁘형수나쉬시ㅣㄴㄱㅗ조재으시(사ㅇ)_해시서르.indb 27 22. 9. 14. 오후 8:19

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=1$이므로 $f(x)=2x^2+x+1$이다.
$\therefore f(2)=2\times2^2+2+1=11$

채점 요소	배점
다항식 $f(x)$의 차수 구하기	30 %
다항식 $f(x)$ 구하기	60 %
$f(2)$의 값 구하기	10 %

145 ····· 답 13

$P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로
$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수) ····· ㉠
조건 (나)에서 $P(x)=x^3P\left(\frac{1}{x}\right)$이므로 ㉠을 대입하면

$$x^3+ax^2+bx+c=x^3\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^3+a\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\left(\frac{1}{x}\right)+c\right\}$$
$$=x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c\right)$$
$$=cx^3+bx^2+ax+1$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$a=b$, $c=1$
이를 ㉠에 대입하면
$P(x)=x^3+ax^2+ax+1$ ····· ㉡
조건 (가)에서 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 -9이므로
나머지정리에 의하여 $P(2)=-9$이다.
$P(2)=2^3+a\times2^2+a\times2+1=-9$, $a=-3$
이를 ㉡에 대입하면
$P(x)=x^3-3x^2-3x+1$
다항식 $(x-2)P(x-3)$을 $x-1$로 나눈 나머지는
나머지정리에 의하여 $-P(-2)$이므로
$-P(-2)=-(-8-12+6+1)=13$

146 ····· 답 11

다항식 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의
몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $3^n(x-3)$이므로
$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$ ····· ㉠
㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면
$3^n(9+3a+b)=0$에서 $3^n\neq0$이므로
$b=-3a-9$ ····· ㉡
㉡을 x^2+ax+b에 대입하면
$x^2+ax+b=x^2+ax-3a-9=(x-3)(x+a+3)$
이므로 ㉠에서
$x^n(x-3)(x+a+3)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로
$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$
양변에 $x=3$을 대입하면
$3^n(a+6)=3^n$에서 $3^n\neq0$이므로
$a+6=1$ $\therefore a=-5$

이를 ㉡에 대입하면 $b=6$
$\therefore b-a=6-(-5)=11$

147 ····· 답 ⑤

$$f\left(x+3-\frac{1}{x}\right)=x^3+x^2+3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$$
$$=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3$$
$$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}+\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}+3$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x-\frac{1}{x}\right)+5$$

이때, $x-\frac{1}{x}=k$라 하면
$f(k+3)=k^3+k^2+3k+5$
$k+3=t$라 하면 $k=t-3$이므로
$f(t)=(t-3)^3+(t-3)^2+3(t-3)+5$
$=(t^3-9t^2+27t-27)+(t^2-6t+9)+(3t-9)+5$
$=t^3-8t^2+24t-22$
즉, $f(x)=x^3-8x^2+24x-22$이므로
$a=-8$, $b=24$, $c=-22$
$\therefore a+b-c=-8+24-(-22)=38$

148 ····· 답 ⑤

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$ ····· ㉠
이 등식은 x에 대한 항등식이다.
ㄱ. ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$0=a_0-2a_1+4a_2-\cdots+256a_8$ (참) ····· ㉡
ㄴ. ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$256=a_0+2a_1+4a_2+\cdots+256a_8$ ····· ㉢
㉡과 ㉢을 변끼리 더하면
$256=2(a_0+4a_2+16a_4+64a_6+256a_8)$
$a_0+4a_2+16a_4+64a_6+256a_8=128$ ····· ㉣
이때, $\left(\frac{x}{2}+1\right)^8$의 전개식에서
x^8의 계수는 $\frac{1}{2^8}$이므로 $a_8=\frac{1}{256}$
상수항은 1이므로 $a_0=1$
따라서 ㉣에서 $1+4a_2+16a_4+64a_6+1=128$이므로
$2a_2+8a_4+32a_6=63$ (참)
ㄷ. ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$\left(\frac{3}{2}\right)^8=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$ ····· ㉤
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$\left(\frac{1}{2}\right)^8=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$ ····· ㉥

아뿌하이스쿨시그니처시리즈(상하)_해설수정.indb 28 22. 9. 14. 오후 8:19

㉤에서 ㉣을 변끼리 빼면

$\left(\frac{3}{2}\right)^8-\left(\frac{1}{2}\right)^8=2(a_1+a_3+a_5+a_7)$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7=\frac{3^8-1}{2^9}$

$=\frac{(3^4+1)(3^2+1)(3+1)(3-1)}{2^9}$

$=\frac{205}{16}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

149 ····· 답 ①

x에 대한 항등식

$(x^3+x^2-2x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{18}x^{18}$에서 좌변은

$\{x(x^2+x-2)\}^6=x^6(x^2+x-2)^6$이므로

이 전개식에서 x에 대한 오차 이하의 항의 계수와 상수항은 모두 0이다.

따라서 $a_0=a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=0$이므로

$(x^3+x^2-2x)^6=a_6x^6+a_7x^7+a_8x^8+\cdots+a_{18}x^{18}$ ····· ㉠

또한 $x^6(x^2+x-2)^6$의 전개식에서 x^6의 계수는

$(x^2+x-2)^6$의 전개식에서 상수항과 같으므로

$a_6=(-2)^6=64$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{18}$ ····· ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2^6=a_6-a_7+a_8-\cdots+a_{18}$ ····· ㉢

㉡과 ㉢을 변끼리 더하면

$2^6=2(a_6+a_8+a_{10}+\cdots+a_{18})$이므로

$a_6+a_8+a_{10}+\cdots+a_{18}=32$

$\therefore a_5+a_8+a_{10}+a_{12}+\cdots+a_{18}$

$=a_5+(a_6+a_8+a_{10}+a_{12}+\cdots+a_{18})-a_6$

$=0+32-64=-32$

150 ····· 답 ②

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

나머지가 $-x^2+ax+b$이므로

$f(x)=(x-1)^3Q(x)-x^2+ax+b$

$=(x-1)^3Q(x)-(x-1)^2+(a-2)x+b+1$ ····· ㉠

$=(x-1)^3Q(x)-(x-1)^2+(a-2)(x-1)+a+b-1$ ····· ㉡

㉠에서 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는

$(a-2)x+b+1$이고,

㉡에서 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$a+b-1$이다. ····· TIP

따라서 두 나머지의 합은

$\{(a-2)x+b+1\}+(a+b-1)=(a-2)x+a+2b$

$=2x-6$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a-2=2$, $a+2b=-6$에서 $a=4$, $b=-5$

$\therefore ab=4\times(-5)=-20$

TIP

㉠에서

$(x-1)^3Q(x)-(x-1)^2+(a-2)x+b+1$

$=(x-1)^2\{(x-1)Q(x)-1\}+(a-2)x+b+1$

이므로 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $(a-2)x+b+1$이다.

또한, ㉡에서

$(x-1)^3Q(x)-(x-1)^2+(a-2)(x-1)+a+b-1$

$=(x-1)\{(x-1)^2Q(x)-(x-1)+(a-2)\}+a+b-1$

이므로 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $a+b-1$이다.

151 ····· 답 8

두 다항식 x^3-4x+5, x^3-3x^2+5x-1을 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면

나머지가 모두 $R(x)$이므로

$x^3-4x+5=(x-a)(x-b)Q_1(x)+R(x)$ ····· ㉠

$x^3-3x^2+5x-1=(x-a)(x-b)Q_2(x)+R(x)$ ····· ㉡

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$3x^2-9x+6=(x-a)(x-b)\{Q_1(x)-Q_2(x)\}$

이때, $3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$이므로

$Q_1(x)-Q_2(x)=3$이고, $a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$이다.

따라서 ㉠에서

$x^3-4x+5=(x-1)(x-2)(x+3)+3x-1$이므로

다항식 x^3-4x+5를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫은

$Q_1(x)=x+3$이고, 나머지는 $R(x)=3x-1$이다.

$\therefore R(a+b)=R(3)=8$

참고

다항식 x^3-3x^2+5x-1을 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫은 $Q_2(x)=x$이고, 나머지는 $R(x)=3x-1$이다.

152 ····· 답 ②

조건 (가)에서 다항식 x^3+3x^2+4x+2를 $f(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $g(x)$이므로

$x^3+3x^2+4x+2=f(x)Q_1(x)+g(x)$ ····· ㉠

이때, $f(x)$가 이차식이므로 나머지인 $g(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

조건 (나)에서 다항식 x^3+3x^2+4x+2를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $f(x)-x^2-2x$이므로

$x^3+3x^2+4x+2=g(x)Q_2(x)+f(x)-x^2-2x$ ····· ㉡

이때, $g(x)$가 일차 이하의 다항식이므로 나머지인 $f(x)-x^2-2x$는 상수이다.

아끄하이노내시니그고즈재으시(사으)_해시서르.indb 29 22. 9. 14. 오후 8:19

$f(x)=x^2+2x+a$ (a는 상수)라 하자. …… ㉢
다항식 x^3+3x^2+4x+2를 $f(x)=x^2+2x+a$로 나누었을 때의 몫이 $x+1$이고, 나머지가 $(2-a)x+(2-a)$이므로
㉠에서 $g(x)=(2-a)(x+1)$이다.
따라서 ㉡에서
$x^3+3x^2+4x+2=(2-a)(x+1)Q_2(x)+a$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면
$a=0$
따라서 $g(x)=2(x+1)$이므로
$g(1)=4$

153 ④

ㄱ. 다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 R이므로
나머지정리에 의하여 $R=P(-2)$이다.
그러므로 다항식 $P(x-1)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여
$P(-1-1)=P(-2)=R$이다. (참)

ㄴ. 다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 R이므로
$P(x)=(x+2)Q(x)+R$ …… ㉠
다항식 $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
나머지가 $\frac{1}{R}$이므로
$Q(x)=(x+2)Q_1(x)+\frac{1}{R}$
이를 ㉠에 대입하면
$P(x)=(x+2)\left\{(x+2)Q_1(x)+\frac{1}{R}\right\}+R$
$=(x+2)^2Q_1(x)+\frac{1}{R}(x+2)+R$
양변에 x 대신 $x-1$을 대입하면
$P(x-1)=(x+1)^2Q_1(x-1)+\frac{1}{R}(x+1)+R$ …… ㉡
그러므로 다항식 $P(x)$를 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{1}{R}(x+2)+R$이고, 다항식 $P(x-1)$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{1}{R}(x+1)+R$이므로 서로 다르다. (거짓)

ㄷ. $\{P(x-1)\}^2-R^2=\{P(x-1)-R\}\{P(x-1)+R\}$이다.
㉡에서
$P(x-1)-R=(x+1)^2Q_1(x-1)+\frac{1}{R}(x+1)$이므로
다항식 $P(x-1)-R$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{1}{R}(x+1)$이다.
또한 ㉡에서
$P(x-1)+R=(x+1)^2Q_1(x-1)+\frac{1}{R}(x+1)+2R$이므로
다항식 $P(x-1)+R$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{1}{R}(x+1)+2R$이다.
$\frac{1}{R}(x+1)\times\left\{\frac{1}{R}(x+1)+2R\right\}=\frac{1}{R^2}(x+1)^2+2(x+1)$
이므로 다항식 $\{P(x-1)\}^2-R^2$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $2(x+1)=2x+2$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

154 12

조건 (가)에서 나머지정리에 의하여 $f(4)=14$ …… ㉠
조건 (나)에서 다항식 $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지는 $-3x+1$이므로
$f(x)=(x+1)(x-3)Q_1(x)-3x+1$
양변에 $x-1$을 곱하면
$(x-1)f(x)=(x+1)(x-3)(x-1)Q_1(x)+(x-1)(-3x+1)$
이때, 다항식 $(x-1)f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $(x-1)(-3x+1)$을 $(x+1)(x-3)$, 즉 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로
$(x-1)(-3x+1)=-3x^2+4x-1$
$=-3(x^2-2x-3)-2x-10$
에서 나머지는 $-2x-10$이다.
즉, $(x-1)f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)-2x-10$이므로
양변에 $x=4$를 대입하면
$3f(4)=5Q(4)-18$, $5Q(4)=3\times14+18=60$ ($\because$ ㉠)
$\therefore Q(4)=12$

155 ④

$P(x)$가 이차 이하의 다항식이므로
$P(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$\{P(x)\}^2=(ax^2+bx+c)^2$
$=a^2x^4+b^2x^2+c^2+2abx^3+2acx^2+2bcx$
이고, $P(x^2)=ax^4+bx^2+c$이다.
$\{P(x)\}^2=P(x^2)+2x^2$에서
$a^2x^4+2abx^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2=ax^4+(b+2)x^2+c$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$a^2=a$, $2ab=0$, $2ac+b^2=b+2$, $2bc=0$, $c^2=c$를 모두 만족시켜야 한다.
$a^2=a$에서 $a=0$ 또는 $a=1$이므로 a의 값에 따라 경우를 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i) $a=0$인 경우
$2ab=0$을 만족시킨다.
$2ac+b^2=b+2$에서 $b^2-b-2=0$, $(b+1)(b-2)=0$
$b=-1$ 또는 $b=2$이므로
$2bc=0$에서 $c=0$이고, 이때 $c^2=c$를 만족시킨다.
따라서 $P(x)=-x$ 또는 $P(x)=2x$이다.

(ii) $a=1$인 경우
$2ab=0$에서 $b=0$이므로 $2ac+b^2=b+2$에서 $c=1$
이때, $2bc=0$, $c^2=c$를 모두 만족시킨다.
따라서 $P(x)=x^2+1$이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 다항식 $P(x)$는 $-x$, $2x$, x^2+1로 3개이다.

아끄하이노새시니그쇼재이시(사이)_해설서르.indb 30 22. 9. 14. 오후 8:19

156 ····· 답 4

조건 (가)의 $P(x^2)=kx^3P(x+1)-2x^4+2x^2$에서
$P(x)$가 n차 다항식 (n은 자연수)일 때
좌변의 차수는 $2n$이고, 우변의 차수는 $n+3$ 또는 4이다.
우변의 차수가 $n+3$인 경우 $2n=n+3$에서 $n=3$, 즉 $P(x)$는 삼차식이다.
우변의 차수가 4인 경우 $2n=4$에서 $n=2$, 즉 $P(x)$는 이차식이지만 우변에서 $n+3=5$가 되므로 모순이다.
따라서 $P(x)$는 삼차식이다. ····· ㉠

$$P(x^2)=kx^3P(x+1)-2x^4+2x^2$$
$$=x^2\{kxP(x+1)-2x^2+2\}$$

이고, 이 식이 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x=0$을 대입하면 $P(0)=0$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$P(1)=-kP(0)=0$ ($\because P(0)=0$)
양변에 $x=1$을 대입하면
$P(1)=kP(2)=0$ ($\because P(1)=0$)
양변에 $x=\sqrt{2}$를 대입하면
$P(2)=2\{\sqrt{2}kP(\sqrt{2}+1)-2\}=0$ ($\because P(2)=0$)
그러므로 $P(\sqrt{2}+1)=\frac{\sqrt{2}}{k}$이다. ····· ㉡
이때, $P(0)=P(1)=P(2)=0$이고, ㉠에서 $P(x)$는 최고차항의 계수가 양수 k인 삼차식이므로 인수정리에 의하여
$P(x)=kx(x-1)(x-2)$
양변에 $x=\sqrt{2}+1$을 대입하면
$P(\sqrt{2}+1)=k(\sqrt{2}+1)\times\sqrt{2}\times(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}k$
㉡에서 $\sqrt{2}k=\frac{\sqrt{2}}{k}$, $k^2=1$, $k=1$ ($\because k>0$)이므로
$P(x)=x(x-1)(x-2)$이다. ····· ㉢
조건 (나)에서 $P(x)+x^4-3x$를 다항식 $Q(x)$로 나누었을 때 몫을 $A(x)$라 하면 나머지가 이차식이므로 $Q(x)$는 삼차 이상의 다항식이다.
$x(x-1)(x-2)+x^4-3x=Q(x)A(x)+2x^2+x-8$
$x^4+x^3-3x^2-x=Q(x)A(x)+2x^2+x-8$
$x^4+x^3-5x^2-2x+8=Q(x)A(x)$
좌변에 $x=-2$를 대입하면
$(-2)^4+(-2)^3-5(-2)^2-2(-2)+8=0$
이므로 조립제법을 이용하면 다음과 같다.

-2	1	1	-5	-2	8
		-2	2	6	-8
	1	-1	-3	4	0

$(x+2)(x^3-x^2-3x+4)=Q(x)A(x)$
이때, $Q(-2)\neq0$이고 $Q(x)$가 최고차항의 계수가 -1인 삼차 이상의 다항식이므로 $Q(x)=-(x^3-x^2-3x+4)$이다.
$\therefore P(3)+Q(2)=3\times2\times1-(2^3-2^2-3\times2+4)$ ($\because$ ㉢)
$=6-2=4$

157 ····· 답 ④

조건 (가)에서 $f(x)$를 $x+2$, x^2+4로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면 나머지는 모두 $3p^2$이므로
$f(x)=(x+2)Q_1(x)+3p^2=(x^2+4)Q_2(x)+3p^2$ ····· ㉠
이때,
$(x+2)Q_1(x)=(x^2+4)Q_2(x)$
에서 양변은 각각 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이므로
$Q_1(x)$는 x^2+4를, $Q_2(x)$는 $x+2$를 인수로 가지고, 일차식의 계수가 1인 일차식을 공통인수로 갖는다. 그러므로
$Q_1(x)=(x^2+4)(x+a)$, $Q_2(x)=(x+2)(x+a)$ (a는 상수)이고 ㉠에서
$f(x)=(x+2)(x^2+4)(x+a)+3p^2$ ····· ㉡
조건 (나)에서 $f(1)=f(-1)$이므로
$f(1)=3\times5\times(1+a)+3p^2=15(1+a)+3p^2$
$f(-1)=1\times5\times(-1+a)+3p^2=5(-1+a)+3p^2$
에서 $15(1+a)+3p^2=5(-1+a)+3p^2$
$3(1+a)=-1+a$, $a=-2$
이를 ㉡에 대입하면
$f(x)=(x+2)(x-2)(x^2+4)+3p^2$
$=(x^2-4)(x^2+4)+3p^2$
조건 (다)에서 $x-\sqrt{p}$는 $f(x)$의 인수이므로 인수정리에 의하여
$f(\sqrt{p})=0$이다.
$f(\sqrt{p})=(p-4)(p+4)+3p^2=0$, $4p^2-16=0$,
$(p+2)(p-2)=0$ $\therefore p=2$ ($\because p>0$)

158 ····· 답 ④

조건 (가)에서 나머지정리에 의하여 $P(2)=-1$
조건 (나)에서 나머지정리에 의하여
$P(a)=a^3$, 즉 $P(a)-a^3=0$을 만족시키는
실수 a는 -1과 3뿐이므로 인수정리에 의하여
상수 k에 대하여 다음과 같은 식을 세울 수 있다.
(i) $P(x)-x^3=k(x+1)(x-3)$인 경우
$P(x)=x^3+k(x+1)(x-3)$
즉, 삼차항의 계수는 1이므로 최고차항의 계수가 음수라는 조건에 모순이다.
(ii) $P(x)-x^3=k(x+1)^2(x-3)$인 경우
양변에 $x=2$를 대입하면
$P(2)-8=-9k$에서 $k=1$이므로
$P(x)=(x+1)^2(x-3)+x^3=2x^3-x^2-5x-3$
즉, 삼차항의 계수는 2이므로 조건에 맞지 않다.
(iii) $P(x)-x^3=k(x+1)(x-3)^2$인 경우
양변에 $x=2$를 대입하면
$P(2)-8=3k$에서 $k=-3$이므로
$P(x)=-3(x+1)(x-3)^2+x^3=-2x^3+15x^2-9x-27$
삼차항의 계수는 -2, 즉 음수이므로 조건을 만족한다.
(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 다항식 $P(x)$는
$P(x)=-2x^3+15x^2-9x-27$이므로
$P(1)=-23$

어쌔너너내시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_해ㅐㅅㅓㄹ.indb 31 22. 9. 14. 오후 8:19

159 ····· 답 28

$P(4)=\frac{7}{4}$,

$P(3)=\frac{4}{3}P(4)=\frac{7}{3}$,

$P(2)=\frac{3}{2}P(3)=\frac{7}{2}$,

$P(1)=2P(2)=\frac{7}{1}$이므로

$n=1, 2, 3, 4$일 때, $P(n)=\frac{7}{n}$, 즉 $nP(n)-7=0$

이때, $xP(x)-7$은 사차식이므로 인수정리에 의하여

$xP(x)-7=k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ $(k\neq0)$

양변에 $x=0$을 대입하면 $-7=24k$에서 $k=-\frac{7}{24}$이므로

$xP(x)-7=-\frac{7}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ ····· ㉠

한편, 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

나머지정리에 의하여 $P(-1)$이므로

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-P(-1)-7=-\frac{7}{24}\times(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)$

$\therefore P(-1)=28$

160 ····· 답 15

$P(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차다항식이므로

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수) ····· ㉠

$Q(x)$는 일차항의 계수가 1인 일차다항식이므로

$Q(x)=x+c$ (c는 상수) ····· ㉡

조건 (가)에서 $P(x^2-1)-2Q(x+1)$이 $x+1$로 나누어떨어지므로

인수정리에 의하여 $P(0)-2Q(0)=0$이다.

㉠, ㉡에서 $P(0)=b$, $Q(0)=c$이므로

$P(0)-2Q(0)=b-2c=0$, $b=2c$

이를 ㉠에 대입하면

$P(x)=x^2+ax+2c$ ····· ㉢

그러므로

$P(x)-2Q(x)=(x^2+ax+2c)-2(x+c)$

$=x^2+(a-2)x$

조건 (나)에서 방정식 $P(x)-2Q(x)=0$이 중근을 가지므로

다항식 $P(x)-2Q(x)$는 완전제곱식이다.

$x^2+(a-2)x$가 완전제곱식이 되려면 일차항의 계수가 0이어야 하므로 $a=2$이고, 이를 ㉢에 대입하면

$P(x)=x^2+2x+2c$ ····· ㉣

이때, 다항식 $2P(x)+Q(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 13이므로

나머지정리에 의하여

$2P(2)+Q(2)=2(2^2+2\times2+2c)+(2+c)=13$

$5c=-5$, $c=-1$

이를 ㉡, ㉣에 각각 대입하면

$P(x)=x^2+2x-2$, $Q(x)=x-1$

$\therefore P(3)+Q(3)=(3^2+2\times3-2)+(3-1)=15$

161 ····· 답 ②

다항식 $f(x)$를 n차식 (n은 자연수)이라 하면

$f(x+1)+x^4f\left(\frac{1}{x^2}\right)=5x^4-x^2+x+6$ ····· ㉠

에서 $f\left(\frac{1}{x^2}\right)$은 $\frac{1}{x^{2n}}$항을 가진다.

이때, $n\geq3$이면 $x^4f\left(\frac{1}{x^2}\right)$에서

$x^4\times\frac{1}{x^{2n}}=\frac{1}{x^{2n-4}}$ ($\because 2n>4$)항이 생기므로

㉠은 항등식이 될 수 없다. ····· TIP

따라서 $f(x)$는 이차 이하의 다항식이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x+1)+x^4f\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$=a(x+1)^2+b(x+1)+c+x^4\left(\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^2}+c\right)$

$=cx^4+(a+b)x^2+(2a+b)x+2a+b+c$

이므로 ㉠에 의하여

$cx^4+(a+b)x^2+(2a+b)x+2a+b+c=5x^4-x^2+x+6$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$c=5$, $a+b=-1$, $2a+b=1$, $2a+b+c=6$에서

$a=2$, $b=-3$, $c=5$

따라서 $f(x)=2x^2-3x+5$이므로

$f(1)=4$

TIP

$n=3$인 경우, $f(x)$가 삼차식이면 $f(x+1)$도 삼차식이고

$x^4f\left(\frac{1}{x^2}\right)$은 $x^4\times\frac{1}{x^6}=\frac{1}{x^2}$항을 갖는다.

따라서 ㉠에서 좌변은 $\frac{1}{x^2}$항을 갖지만 우변은 $\frac{1}{x^2}$항을 갖지 않으므로 ㉠은 항등식이 될 수 없다.

마찬가지로 $n>3$인 경우, $x^4f\left(\frac{1}{x^2}\right)$은

$x^4\times\frac{1}{x^{2n}}=\frac{1}{x^{2n-4}}$ ($\because 2n>4$)항을 가지므로 ㉠은 항등식이 될 수 없다.

162 ····· 답 54

조건 (가)에서 $P(1)P(2)=0$이므로

$P(1)=0$ 또는 $P(2)=0$ ····· ㉠

이고, 조건 (나)에서 다항식 $P(x)\{P(x)-6\}$은 $x(x-3)$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$P(0)\{P(0)-6\}=0$, $P(3)\{P(3)-6\}=0$이다.

이를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $P(0)=0$, $P(3)=6$일 때

㉠에서 $P(1)=0$인 경우 $P(0)=P(1)=0$이므로

이차식 $P(x)$를 $P(x)=ax(x-1)$ (a는 상수)이라 하자.

이때, $P(3)=6$이므로 $6a=6$, $a=1$에서 $P(x)=x(x-1)$

아끄하ㅓㅇㄴ대ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ대ㅅㅓㄹ.indb 32 22. 9. 14. 오후 8:19

㉠에서 $P(2)=0$인 경우 $P(0)=P(2)=0$이므로
이차식 $P(x)$를 $P(x)=bx(x-2)$(b는 상수)라 하자.
이때, $P(3)=6$이므로 $3b=6$, $b=2$에서 $P(x)=2x(x-2)$

(ii) $P(0)=6$, $P(3)=0$일 때
㉠에서 $P(1)=0$인 경우 $P(1)=P(3)=0$이므로
이차식 $P(x)$를 $P(x)=c(x-1)(x-3)$ (c는 상수)이라 하자.
이때, $P(0)=6$이므로 $3c=6$, $c=2$에서
$P(x)=2(x-1)(x-3)$
㉠에서 $P(2)=0$인 경우 $P(2)=P(3)=0$이므로
이차식 $P(x)$를 $P(x)=d(x-2)(x-3)$ (d는 상수)이라 하자.
이때, $P(0)=6$이므로 $6d=6$, $d=1$에서
$P(x)=(x-2)(x-3)$

(iii) $P(0)=6$, $P(3)=6$일 때
$P(0)=P(3)=6$이므로 이차식 $P(x)$를
$P(x)-6=ex(x-3)$ (e는 상수)에서
$P(x)=ex(x-3)+6$이라 하자. …… ㉡
㉠에서 $P(1)=0$인 경우 ㉡에 대입하면
$P(1)=-2e+6=0$, $e=3$에서
$P(x)=3x(x-3)+6$
㉠에서 $P(2)=0$인 경우 ㉡에 대입하면
$P(2)=-2e+6=0$에서 $e=3$이므로 $P(1)=0$을 만족시키는 경우와 같다.

(iv) $P(0)=0$, $P(3)=0$일 때
$P(x)$는 이차식이므로 $P(0)=0$, $P(3)=0$일 때 ㉠에서
$P(1)=0$ 또는 $P(2)=0$을 만족시킬 수 없다.

(i)~(iv)에서 가능한 $P(x)$는 $x(x-1)$, $2x(x-2)$, $2(x-1)(x-3)$, $(x-2)(x-3)$, $3x(x-3)+6$이므로
$Q(x)=x(x-1)+2x(x-2)+2(x-1)(x-3)$
$+(x-2)(x-3)+3x(x-3)+6$
$\therefore Q(4)=4\times3+2\times4\times2+2\times3\times1+2\times1+3\times4\times1+6=54$

03 인수분해

163 ····· 답 풀이 참조

(1) $a^2+4a+4-b^2=(a+2)^2-b^2$
$=\{(a+2)+b\}\{(a+2)-b\}$
$=(a+b+2)(a-b+2)$

(2) $a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$
$=a^3+3\times a^2\times3b+3\times a\times(3b)^2+(3b)^3$
$=(a+3b)^3$

(3) $a^3+8b^3=a^3+(2b)^3=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$

(4) $a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$
$=a^2+(2b)^2+(-c)^2+2(2ab-2bc-ca)$
$=(a+2b-c)^2$

164 ····· 답 ③

① $x^3y-9xy^3=xy(x^2-9y^2)=xy(x+3y)(x-3y)$

② $64x^3-48x^2+12x-1$
$=(4x)^3+3\times(4x)^2\times(-1)+3\times(4x)\times(-1)^2+(-1)^3$
$=(4x-1)^3$

③ $8a^3-b^3=(2a)^3-b^3$
$=(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

④ $x^4-16y^4=(x^2+4y^2)(x^2-4y^2)$
$=(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$

⑤ $4a^2+b^2+9c^2+4ab+6bc+12ca$
$=(2a)^2+b^2+(3c)^2+2(2ab+3bc+6ca)$
$=(2a+b+3c)^2$

따라서 선지 중 인수분해가 옳지 않은 것은 ③이다.

참고
인수분해 공식은 항등식이므로 우변을 각각 곱셈 공식으로 전개하여 좌변과 비교해서 풀 수도 있다.

165 ····· 답 ③

$2a^3+3a^2b-3ab^2-2b^3$
$=2(a^3-b^3)+3ab(a-b)$
$=2(a-b)(a^2+ab+b^2)+3ab(a-b)$
$=(a-b)(2a^2+5ab+2b^2)$
$=(a-b)(a+2b)(2a+b)$

166 ····· 답 32

주어진 식을 인수분해하면
$x^3-xy^2-x^2y+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)$
$=(x^2-y^2)(x-y)$
$=(x-y)^2(x+y)$
이때, $x+y=4$, $xy=2$이므로

어쩌어느새시니그소재어스시(사어)_해설지르.indb 33 22. 9. 14. 오후 8:19

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=4^2-8=8$
따라서 $(x-y)^2(x+y)=8\times4=32$이므로
구하는 값은 32이다.

167 ····· 답 ③

$a+b+c=0$이므로
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=0$

168 ····· 답 풀이 참조

(1) $x^2+3=X$라 하면
$(x^2+x+3)(x^2+2x+3)-2x^2$
$=(X+x)(X+2x)-2x^2$
$=X^2+3xX=X(X+3x)$
$=(x^2+3)(x^2+3x+3)$
(2) $x^2+2x=X$라 하면
$(x^2+2x-2)(x^2+2x+5)+12$
$=(X-2)(X+5)+12$
$=X^2+3X+2=(X+1)(X+2)$
$=(x^2+2x+1)(x^2+2x+2)$
$=(x+1)^2(x^2+2x+2)$
(3) $x^2-2x=X$라 하면
$(x^2-2x)^2-2x^2+4x-3$
$=(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$
$=X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$
$=(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)$
$=(x-1)^2(x+1)(x-3)$

169 ····· 답 ⑤

$(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)-60$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-2)(x+3)\}-60$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)-60$
이때, $x^2+x=X$라 하면
$(x^2+x-2)(x^2+x-6)-60$
$=(X-2)(X-6)-60$
$=X^2-8X-48=(X-12)(X+4)$
$=(x^2+x-12)(x^2+x+4)$
$=(x+4)(x-3)(x^2+x+4)$
따라서 선지 중 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

TIP

$(x-3)(x^2+x+4)=x^3-2x^2+x-12$이므로
선지 ②의 식 x^3-2x^2+x-12는
다항식 $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)-60$의 인수이다.

170 ····· 답 14

$(x^2-4x+3)(x^2+6x+8)-56$
$=(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)-56$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}-56$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)-56$
이때, $x^2+x=X$라 하면
$(x^2+x-2)(x^2+x-12)-56$
$=(X-2)(X-12)-56$
$=X^2-14X-32=(X-16)(X+2)$
$=(x^2+x-16)(x^2+x+2)$
a, b는 양수이므로 $a=16$, $b=2$이다.
$\therefore a-b=16-2=14$

171 ····· 답 ③

$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=x^2\left(x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$
$=x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}$
$=x^2\left[\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right]$
$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right\}$

이때, $x+\frac{1}{x}=t$라 하면

$x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right\}=x^2(t^2-2t+1)$
$=x^2(t-1)^2$
$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^2$
$=\left\{x\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\right\}^2$
$=(x^2-x+1)^2$

따라서 선지 중 주어진 다항식의 인수인 것은 ③이다.

172 ····· 답 풀이 참조

(1) $x^2=X$라 하면
$x^4-7x^2+12=X^2-7X+12$
$=(X-3)(X-4)$
$=(x^2-3)(x^2-4)$
$=(x^2-3)(x+2)(x-2)$ ····· ㉠
이므로 유리수 범위까지 인수분해하면
$x^4-7x^2+12=(x^2-3)(x+2)(x-2)$이다.
(2) ㉠에서 $x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$이므로
실수 범위까지 인수분해하면
$x^4-7x^2+12=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(x-2)$이다.

아쁘허어느새시니그쇼재어시(사이)_해설서르.indb 34 22. 9. 14. 오후 8:19

173 ····· 답 ⑤

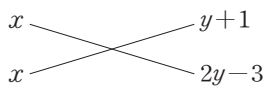
$x^4-6x^2y^2+y^4=(x^4-2x^2y^2+y^4)-4x^2y^2$
$=(x^2-y^2)^2-(2xy)^2$
$=(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)$
따라서 선지 중 주어진 다항식의 인수인 것은 ⑤이다.

174 ····· 답 풀이 참조

(1) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$
$=(x^2+2)^2-(2x)^2$
$=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}$
$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
(2) $x^4+7x^2+16=(x^4+8x^2+16)-x^2$
$=(x^2+4)^2-x^2$
$=(x^2+x+4)(x^2-x+4)$

175 ····· 답 ④

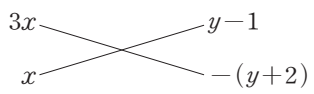
주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$x^2+3xy+2y^2-2x-y-3$
$=x^2+(3y-2)x+(2y^2-y-3)$
$=x^2+(3y-2)x+(y+1)(2y-3)$



$=(x+y+1)(x+2y-3)$
따라서 선지 중 주어진 다항식의 인수인 것은 ④이다.

176 ····· 답 ①

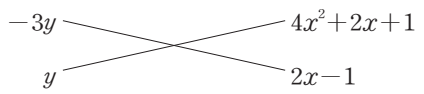
주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$3x^2-2xy-y^2-7x-y+2$
$=3x^2-(2y+7)x-(y^2+y-2)$
$=3x^2-(2y+7)x-(y+2)(y-1)$



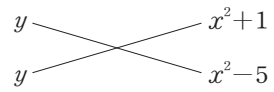
$=(3x+y-1)(x-y-2)$
$=(-3x-y+1)(-x+y+2)$
따라서 $a=-3$, $b=1$, $c=-1$, $d=1$이므로
$a-b+c-d=-3-1+(-1)-1=-6$

177 ····· 답 풀이 참조

(1) 주어진 식을 y에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$8x^3+4x^2y-4xy-3y^2+4y-1$
$=-3y^2+(4x^2-4x+4)y+8x^3-1$
$=-3y^2+(4x^2-4x+4)y+(2x-1)(4x^2+2x+1)$



$=\{-3y+(4x^2+2x+1)\}\{y+(2x-1)\}$
$=(4x^2+2x-3y+1)(2x+y-1)$
(2) 주어진 식을 y에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$x^4+2x^2y-4x^2+y^2-4y-5$
$=y^2+(2x^2-4)y+x^4-4x^2-5$
$=y^2+(2x^2-4)y+(x^2+1)(x^2-5)$



$=\{y+(x^2+1)\}\{y+(x^2-5)\}$
$=(x^2+y+1)(x^2+y-5)$

178 ····· 답 ②

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$
$=(b-c)a^2+(c^2-b^2)a+bc(b-c)$
$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=(a-b)(b-c)(a-c)$

179 ····· 답 $(x+1)(x+3)(x-2)$

$f(x)=x^3+2x^2-5x-6$이라 하면
$f(-1)=-1+2+5-6=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

−1	1	2	−5	−6
		−1	−1	6
	1	1	−6	0

$\therefore x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x^2+x-6)$
$=(x+1)(x+3)(x-2)$

180 ····· 답 풀이 참조

(1) 다항식 $f(x)=x^3-2x^2+kx+12$가
$x-1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
$f(1)=1-2+k+12=0$
$\therefore k=-11$
(2) (1)에 의하여 $f(x)=x^3-2x^2-11x+12$이고
$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	−2	−11	12
		1	−1	−12
	1	−1	−12	0

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-x-12)$
$=(x-1)(x+3)(x-4)$

채점요소	배점
인수정리를 이용하여 k의 값 구하기	30%
조립제법을 이용하여 다항식 $f(x)$ 인수분해하기	70%

아쿠하이스쿨시스템수학Ⅰ(상)_해설_2.indb 35 22. 9. 14. 오후 8:19

181

답 ④

$f(x)=2x^4-7x^3-6x^2+7x+4$라 하면
$f(1)=2-7-6+7+4=0$,
$f(-1)=2+7-6-7+4=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	2	−7	−6	7	4
		2	−5	−11	−4
−1	2	−5	−11	−4	0
		−2	7	4	
	2	−7	−4	0	

$2x^4-7x^3-6x^2+7x+4$
$=(x-1)(x+1)(2x^2-7x-4)$
$=(x-1)(x+1)(2x+1)(x-4)$
따라서 선지 중 주어진 식의 인수가 아닌 것은
④ $x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$이다.

182

답 (1) 729000 (2) 10000

(1) $x=89$라 하면
$89^3+3\times89^2+3\times89+1$
$=x^3+3x^2+3x+1$
$=(x+1)^3$
$=90^3=729000$
(2) $a=32$, $b=19$, $c=49$라 하면
$32^2+19^2+49^2+2(32\times19+19\times49+49\times32)$
$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$=(a+b+c)^2$
$=(32+19+49)^2=100^2=10000$

183

답 ②

$x=999$라 하면
$999^3-1=x^3-1$
$999\times1000+1=x(x+1)+1$
$=x^2+x+1$
이때, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로
$999^3-1=(999-1)(999^2+999+1)$
$=998\times(999\times1000+1)$
따라서 구하는 몫은 998이다.

184

답 (1) 10 (2) 11

(1) $x=38$이라 하면
$38^3+7\times38^2-17\times38+9=x^3+7x^2-17x+9$
$f(x)=x^3+7x^2-17x+9$라 하면
$f(1)=1^3+7-17+9=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	7	−17	9
		1	8	−9
	1	8	−9	0

$x^3+7x^2-17x+9=(x-1)(x^2+8x-9)$
$=(x-1)^2(x+9)$
다시 $x=38$을 대입하면
$38^3+7\times38^2-17\times38+9=37^2\times47$
에서 $a=37$, $b=47$
$\therefore b-a=47-37=10$
(2) $x=29$라 하면
$29^3+2\times29^2-5\times29-6=x^3+2x^2-5x-6$
$f(x)=x^3+2x^2-5x-6$이라 하면
$f(-1)=-1+2+5-6=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

−1	1	2	−5	−6
		−1	−1	6
	1	1	−6	0

$x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x^2+x-6)$
$=(x+1)(x+3)(x-2)$
다시 $x=29$를 대입하면
$29^3+2\times29^2-5\times29-6=30\times32\times27$
$=2^6\times3^4\times5$
에서 $a=6$, $b=4$, $c=1$
$\therefore a+b+c=6+4+1=11$

185

답 ④

직육면체 A, B, C, D의 부피는 각각 x^3, y^3, xy^2, x^2y이므로
직육면체 A, B, C, D를 각각 27개, 1개, 9개, 27개 사용하여
만든 정육면체의 부피는 $27x^3+y^3+9xy^2+27x^2y$이다.
이를 인수분해하면
$27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$
$=(3x)^3+3\times(3x)^2\times y+3\times(3x)\times y^2+y^3$
$=(3x+y)^3$
따라서 구하는 정육면체의 한 모서리의 길이는 $3x+y$이다.

186

답 ③

$a^3+b^3+c^3-3abc$에서 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$이므로
$a^3+b^3+c^3-3abc=(\boxed{a+b})^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$
$=(\boxed{a+b})^3+c^3-3ab(a+b+c)$
이때, $(a+b)^3+c^3=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}$이므로
$(\boxed{a+b})^3+c^3-3ab(a+b+c)$
$=(\boxed{a+b+c})\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$
$=(\boxed{a+b+c})(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$
$=(a+b+c)(\boxed{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca})$
따라서 $X=a+b$, $Y=a+b+c$,
$Z=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$이므로
$XY+Z=(a+b)(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=(a+b)^2+c(a+b)+(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=2a^2+2b^2+c^2+ab$

아쿠하이스쿨시스템수학상(사이)_해설지로.indb 36 22. 9. 14. 오후 8:19

187 ····· 답 ②

다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$라 하면
나머지가 $R(x)$($R(x)$는 이차 이하의 다항식)이므로
$f(x)=(x^3-1)Q(x)+R(x)$에서
$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+R(x)$ ····· ㉠
다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x-5$이므로
$R(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지도 $2x-5$이다.
즉, $R(x)=a(x^2+x+1)+2x-5$ (a는 상수) ····· ㉡
이를 ㉠에 대입하면
$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+a(x^2+x+1)+2x-5$
이때, 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 9이므로
나머지정리에 의하여 $f(1)=9$이다.
$3a-3=9$, $a=4$
이를 ㉡에 대입하면
$R(x)=4(x^2+x+1)+2x-5$
$\therefore R(2)=4(2^2+2+1)+4-5=27$

188 ····· 답 ④

다항식 $x^6+x^4-3x^3-x^2$을 다항식 $P(x)$로 나누면 몫은 $Q(x)$이고
나머지는 $-3x^3-2x^2$이므로
$x^6+x^4-3x^3-x^2=P(x)Q(x)-3x^3-2x^2$
$P(x)Q(x)=x^6+x^4+x^2$
$=x^2(x^4+x^2+1)$
$=x^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ ····· ㉠
$x^6+x^4-3x^3-x^2$을 다항식 $P(x)$로 나눈 나머지가 삼차식이므로
$P(x)$는 사차 이상의 다항식이고, $Q(x)$는 이차 이하의 다항식이다.
이때, 다항식 $Q(x-2)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이므로
나머지정리에 의하여 $Q(-1)=3$이다.
㉠에서 이를 만족시키는 경우는
$Q(x)=x^2-x+1$, $P(x)=x^2(x^2+x+1)$
$\therefore P(1)+Q(3)=3+7=10$

189 ····· 답 ③

$f(x)=x^8$이라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의
나머지는 나머지정리에 의하여
$R_1=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{2^8}$
따라서 $x^8=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+\frac{1}{2^8}$이므로
$x^8-\frac{1}{2^8}=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)$ ····· ㉠
㉠의 좌변을 인수분해하면
$x^8-\frac{1}{2^8}=\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^4-\frac{1}{2^4}\right)$
$=\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{2^2}\right)$
$=\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$
이므로 이를 ㉠에 대입하여 정리하면
$Q(x)=\left(x^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$
따라서 다항식 $Q(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여
$R_2=Q\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$
$=\frac{1}{2^3}\times\frac{1}{2}\times(-1)=-\frac{1}{2^4}$
$\therefore \frac{R_2}{R_1}=\left(-\frac{1}{2^4}\right)\div\frac{1}{2^8}=-2^4=-16$

190 ····· 답 ④

$x^{101}-1=(x-1)(x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1)$이므로
다항식 $x^{101}-1$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫은
$Q(x)=x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1$
$x=1$을 대입하면
$Q(1)=1+1+1+\cdots+1=101$
$x=-1$을 대입하면
$Q(-1)=1-1+1-1+\cdots-1+1=1$
$\therefore Q(1)+Q(-1)=101+1=102$

191 ····· 답 450

다항식 $x^{50}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$x^{50}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ····· ㉠
양변에 $x=1$을 대입하면 $0=a+b$ $\therefore b=-a$ ····· ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$x^{50}-1=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$
$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$
이때, $x^{50}-1=(x-1)(x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1)$이므로
$(x-1)(x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1)=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$
양변을 $x-1$로 나누면
$x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+a$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면
$a=50$, $b=-50$ ($\because$ ㉡)에서 $R(x)=50x-50$이다.
$\therefore R(10)=450$

192 ····· 답 ④

$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+k$
$=\{(x+2)(x+8)\}\{(x+4)(x+6)\}+k$
$=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+k$
$x^2+10x+16=X$라 하면 ····· TIP
$(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+k=X(X+8)+k$
$=X^2+8X+k$

아쿠형수Ⅰ해설_ㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해설서로.indb 37 22. 9. 14. 오후 8:19

이때, X^2+8X+k가 x에 대한 이차식의 완전제곱 꼴로
인수분해되기 위해서는
$X^2+8X+k=(X+4)^2$을 만족시켜야 하므로
$k=16$
다시 $X=x^2+10x+16$을 대입하면
$(X+4)^2=(x^2+10x+20)^2$이므로
$f(x)=x^2+10x+20$
따라서 선지 중 옳은 것은 ④이다.

TIP

$x^2+10x=X$라 하면
$(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+k$
$=(X+16)(X+24)+k=X^2+40X+384+k$
이때, $X^2+40X+384+k=(X+20)^2$을 만족시켜야 하므로
$384+k=400$에서 $k=16$임을 구할 수도 있으나,
본풀이와 같이 $x^2+10x+16=X$라 하면 큰 수의 곱셈 없이
좀 더 간단하게 풀 수 있다.

193 ····· 답 40

$x^2+x=X$라 하면
$(x^2+x)(x^2+x-4)+a(x^2+x)+12$
$=X(X-4)+aX+12$
$=X^2+(a-4)X+12$
이때, p, q는 자연수이고, $12=1\times12=2\times6=3\times4$이므로
$X^2+(a-4)X+12$
$=(X+1)(X+12)=(x^2+x+1)(x^2+x+12)$ ····· ㉠
$=(X+2)(X+6)=(x^2+x+2)(x^2+x+6)$ ····· ㉡
$=(X+3)(X+4)=(x^2+x+3)(x^2+x+4)$ ····· ㉢
로 인수분해 할 수 있다.
㉠에서 $(X+1)(X+12)=X^2+13X+12$이므로
$a-4=13$, $a=17$
㉡에서 $(X+2)(X+6)=X^2+8X+12$이므로
$a-4=8$, $a=12$
㉢에서 $(X+3)(X+4)=X^2+7X+12$이므로
$a-4=7$, $a=11$
따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은
$11+12+17=40$이다.

194 ····· 답 46

$(x-3)^4-5(x-3)^2+4$에서 $(x-3)^2=X$라 하면
$(x-3)^4-5(x-3)^2+4=X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$
$=\{(x-3)^2-1^2\}\{(x-3)^2-2^2\}$
$=\{(x-4)(x-2)\}\{(x-5)(x-1)\}$
$=(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$
$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=1^2+2^2+4^2+5^2=46$

195 ····· 답 (1) −1 (2) −3

(1) 주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2+(ky-1)x-6y^2-7y-2$
$=x^2+(ky-1)x-(3y+2)(2y+1)$
이 식이 인수분해 되므로
$(2y+1)-(3y+2)=ky-1$이다.
양변의 y항의 계수를 비교하면 $k=-1$이다.
(2) 주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2+3xy+2y^2-2x-5y+k$
$=x^2+(3y-2)x+2y^2-5y+k$ ····· ㉠
이 식이 인수분해되므로
$2y^2-5y+k=(2y+a)(y+b)$ (a, b는 상수) ····· ㉡
라 하면 양변의 y항의 계수에서 $-5=a+2b$ ····· ㉢
또한 ㉠에서
$x^2+(3y-2)x+2y^2-5y+k$
$=x^2+(3y-2)x+(2y+a)(y+b)$

x	$2y+a$
x	$y+b$

$=(x+2y+a)(x+y+b)$
의 양변의 x항의 계수에서
$3y-2=(2y+a)+(y+b)$
$=3y+a+b$
이므로 $-2=a+b$ ····· ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$
$\therefore k=ab=-3$ ($\because$ ㉡)

196 ····· 답 ④

ㄱ. $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca=(a-b+c)^2$
ㄴ. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$
$=(ab+ac+b^2+bc)(c+a)+abc$
$=abc+ac^2+b^2c+bc^2+a^2b+a^2c+ab^2+abc+abc$
이 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

a	$b+c$
$(b+c)a$	bc

$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$
ㄷ. 주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$a^2(b+c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)-abc$
$=(b+c)a^2-(b^2+bc-c^2)a+bc(b-c)$

a	$-(b-c)$
$(b+c)a$	$-bc$

$=\{a-(b-c)\}\{(b+c)a-bc\}$
$=(a-b+c)(ab-bc+ca)$
따라서 $a-b+c$를 인수로 갖는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

아까하이노새시니그고재이시(사이)_해설서로.indb 38 22. 9. 14. 오후 8:19

197 ····· 답 −1

$f(x)=x^4-4x^3-x^2+16x-12$라 하면
$f(1)=1-4-1+16-12=0$
$f(2)=16-32-4+32-12=0$
이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	−4	−1	16	−12
		1	−3	−4	12
2	1	−3	−4	12	0
		2	−2	−12	
	1	−1	−6	0	

$x^4-4x^3-x^2+16x-12$
$=(x-1)(x-2)(x^2-x-6)$
$=(x-1)(x-2)(x+2)(x-3)$
그러므로
$(x+k)(x-k)P(x)=(x+2)(x-2)(x-1)(x-3)$
에서 $k=2$ ($\because k>0$)이므로 $P(x)=(x-1)(x-3)$이다.
$\therefore P(2)=1\times(-1)=-1$

198 ····· 답 ①

$P(x)Q(x)=x^4+6x^3+9x^2-4x-12$에서
$P(1)Q(1)=1+6+9-4-12=0$
$P(-2)Q(-2)=16-48+36+8-12=0$
이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	6	9	−4	−12
		1	7	16	12
−2	1	7	16	12	0
		−2	−10	−12	
	1	5	6	0	

$P(x)Q(x)=(x-1)(x+2)(x^2+5x+6)$
$=(x-1)(x+3)(x+2)^2$
두 이차식 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x-k$로 나누어떨어지므로 $x-k$를 공통 인수로 갖는다.
그러므로 $k=-2$이고, 두 이차식은 각각 $x+2$를 인수로 갖는다.
이때, 두 다항식의 최고차항의 계수가 모두 1이므로
두 다항식은 $(x+2)(x-1)$, $(x+2)(x+3)$이고
구하고자 하는 합은
$(x+2)(x-1)+(x+2)(x+3)$
$=(x+2)\{(x-1)+(x+3)\}$
$=(x+2)(2x+2)=2x^2+6x+4$

199 ····· 답 $3x-6$

$P(x)Q(x)=x^4-5x^3+9x^2-8x+4$에서
$P(2)Q(2)=16-40+36-16+4=0$
이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	−5	9	−8	4
		2	−6	6	−4
	1	−3	3	−2	0

$P(x)Q(x)=(x-2)(x^3-3x^2+3x-2)$
이고 $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$라 할 때, $f(2)=0$이므로
다시 조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	−3	3	−2
		2	−2	2
	1	−1	1	0

그러므로
$P(x)Q(x)=(x-2)^2(x^2-x+1)$
이때, 다항식 $P(x)$의 차수가 다항식 $Q(x)$의 차수보다 크고,
두 다항식이 모두 일차 이상이므로
$P(x)$는 삼차식이고 $Q(x)$는 일차식이다.
$P(x)=(x-2)(x^2-x+1)$, $Q(x)=x-2$
이때,
$P(x)=(x-2)(x^2-x+1)$
$=(x-2)\{(x-2)(x+1)+3\}$
$=(x-2)^2(x+1)+3(x-2)$
이므로 다항식 $P(x)$를 $\{Q(x)\}^2=(x-2)^2$으로 나눈 나머지는
$3(x-2)$, 즉 $3x-6$이다.

200 ····· 답 ②

$x+2=t$라 하면
$(x+2)^3-3(x+2)^2-6x-4$
$=(x+2)^3-3(x+2)^2-6(x+2)+8$
$=t^3-3t^2-6t+8$
이때, $f(t)=t^3-3t^2-6t+8$이라 하면
$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	−3	−6	8
		1	−2	−8
	1	−2	−8	0

$t^3-3t^2-6t+8=(t-1)(t^2-2t-8)$
$=(t-1)(t+2)(t-4)$
$=(x+1)(x+4)(x-2)$ ($\because t=x+2$)
따라서 $a=-2$, $b=1$, $c=4$이다. ($\because a<b<c$)
$\therefore a+2b+3c=-2+2\times1+3\times4=12$

201 ····· 답 5

다항식 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로
다항식 x^4+ax^2+b는 $x-1$로 나누어떨어진다.
$f(x)=x^4+ax^2+b$라 하면 인수정리에 의하여
$f(1)=1+a+b=0$에서 $b=-a-1$ ····· ㉠
$f(x)=x^4+ax^2-a-1$
$=(x^2+a+1)(x^2-1)$
$=(x^2+a+1)(x+1)(x-1)$

어쩌다수학 I 드릴북(샤이)_해설.indb 39 22. 9. 14. 오후 8:19

이때, $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 하므로
x^2+a+1이 $x-1$을 인수로 가져야 한다.
따라서 $g(x)=x^2+a+1$이라 하면
인수정리에 의하여 $g(1)=1+a+1=0$이므로
$a=-2$, $b=1$ ($\because$ ㉠)
$\therefore a^2+b^2=5$

다른 풀이

다항식 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로
다항식 x^4+ax^2+b는 $x-1$로 나누어떨어진다.
그 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$x^4+ax^2+b=(x-1)Q(x)$
이때, 다항식 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로
다항식 $Q(x)$도 $x-1$로 나누어떨어진다.
따라서 이를 조립제법을 이용하여 나타내면

1	1	0	a	0	b
		1	1	$a+1$	$a+1$
1	1	1	$a+1$	$a+1$	$a+b+1=0$
		1	2	$a+3$	
	1	2	$a+3$	$2a+4=0$	

$2a+4=0$에서 $a=-2$이므로 $a+b+1=0$에서 $b=1$
$\therefore a^2+b^2=5$

202 ····· 답 240

$x=19$, $y=11$이라 하면

$$\frac{19^6-11^6}{19^4+19^2\times11^2+11^4}=\frac{x^6-y^6}{x^4+x^2y^2+y^4}$$
$$=\frac{(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)}{x^4+x^2y^2+y^4}$$
$$=x^2-y^2$$
$$=(x-y)(x+y)$$
$$=(19-11)\times(19+11)$$
$$=8\times30$$
$$=240$$

203 ····· 답 ④

$x=90$이라 하면

$$\frac{90^4+90^2+1}{90\times91+1}=\frac{x^4+x^2+1}{x(x+1)+1}$$
$$=\frac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \quad \cdots\cdots \text{TIP}$$
$$=x^2-x+1$$
$$=90^2-90+1$$
$$=8011$$

TIP

$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2$
$=\{(x^2+1)-x\}\{(x^2+1)+x\}$
$=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

204 ····· 답 ②

$x=2+\sqrt{6}$에서 $x-2=\sqrt{6}$이므로
양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=6$
$\therefore x^2-4x=2$ ····· ㉠
이때, $\frac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x}$에서
$f(x)=x^3-5x^2+5x-1$이라 하면
$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	-5	5	-1
		1	-4	1
	1	-4	1	0

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+1)$
또한 분모를 인수분해하면
$x^3-5x^2+4x=x(x^2-5x+4)$
$=x(x-1)(x-4)$
$\therefore \frac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x}=\frac{(x-1)(x^2-4x+1)}{x(x-1)(x-4)}$
$=\frac{x^2-4x+1}{x^2-4x}=\frac{3}{2}$ ($\because$ ㉠)

다른 풀이

$x=2+\sqrt{6}$에서 $x-2=\sqrt{6}$이므로 양변을 제곱하면
$x^2-4x+4=6$ $\therefore x^2-4x-2=0$
$\frac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x}$의 분자와 분모를 각각 x^2-4x-2로 나누었을 때의 몫은 모두 $x-1$이고, 나머지는 각각 $3x-3$, $2x-2$이므로
$\frac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x}=\frac{(x^2-4x-2)(x-1)+3x-3}{(x^2-4x-2)(x-1)+2x-2}$
$=\frac{0+3(x-1)}{0+2(x-1)}$ ($\because x^2-4x-2=0$)
$=\frac{3}{2}$

205 ····· 답 8

$x=1234$라 하면

$$\frac{1234^3-1234^2-3\times1234+2}{1234^2+1233}=\frac{x^3-x^2-3x+2}{x^2+x-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $f(x)=x^3-x^2-3x+2$라 하면
$f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	-1	-3	2
		2	2	-2
	1	1	-1	0

$f(x)=(x-2)(x^2+x-1)$
㉠에서
$\frac{x^3-x^2-3x+2}{x^2+x-1}=\frac{(x-2)(x^2+x-1)}{x^2+x-1}$
$=x-2$
$=1234-2$
$=1232$
따라서 구하는 합은 $1+2+3+2=8$이다.

아뿌하이노베이션그룹오이(사아)_하베스터르.indb 40 22. 9. 14. 오후 8:19

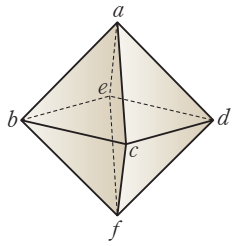
206 ····· 답 ④

$2^{12}-1=(2^6+1)(2^6-1)$
$=(2^6+1)(2^3+1)(2^3-1)$
$=(2^6+1)(2^3+1)(2-1)(2^2+2+1)$
$=65\times9\times7$
$=3^2\times5\times7\times13$

따라서 $2^{12}-1$을 나누어떨어지도록 하는 30보다 크고 40보다 작은 자연수는 $5\times7=35$, $3\times13=39$이므로 그 합은
$35+39=74$

207 ····· 답 19

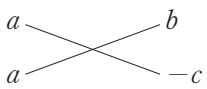
다음과 같이 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 자연수를 각각 a, b, c, d, e, f라 하자.



여덟 개의 면에 적힌 수는 각각의 삼각형의 꼭짓점에 적힌 세 수의 곱이고, 적힌 수들의 합이 165이므로
$abc+acd+ade+abe+fbc+fcd+fde+fbe=165$
좌변을 정리하면
$a(bc+cd+de+be)+f(bc+cd+de+be)$
$=(a+f)(bc+cd+de+be)$
$=(a+f)\{b(c+e)+d(c+e)\}$
$=(a+f)(c+e)(b+d)$
a, b, c, d, e, f는 모두 자연수이므로
$a+f$, $c+e$, $b+d$는 모두 2 이상의 자연수이다.
$165=3\times5\times11$이므로 구하는 값은
$a+b+c+d+e+f=3+5+11=19$

208 ····· 답 ③

$ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$에서
$ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)=0$이므로
좌변을 전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
$ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$
$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^2a+ca^2$
$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$



$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$

이때, $a+b\neq0$, $b+c\neq0$이므로 ($\because$ $a>0$, $b>0$, $c>0$)
$a-c=0$에서 $a=c$이다.
따라서 주어진 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다.

209 ····· 답 풀이 참조

조건 (가)에서 $a^3-ab^2-b^2c+a^2c+ac^2+c^3=0$이고
좌변을 인수분해하면
$a^3-ab^2-b^2c+a^2c+ac^2+c^3$
$=a^3+c^3-b^2(a+c)+ac(a+c)$
$=(a+c)(a^2-ac+c^2)-b^2(a+c)+ac(a+c)$
$=(a+c)\{(a^2-ac+c^2)-b^2+ac\}$
$=(a+c)(a^2+c^2-b^2)=0$
a, b, c는 양수이므로 $a+c>0$에서
$a^2+c^2=b^2$ ····· ㉠
그러므로 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.
이때, 삼각형 ABC의 넓이가 2이므로
$\frac{1}{2}ac=2$, $ac=4$ ····· ㉡

조건 (나)에서 $a+c=\frac{3}{5}\sqrt{5}b$이고 양변을 각각 제곱하면
$a^2+2ac+c^2=\frac{9}{5}b^2$
$b^2+8=\frac{9}{5}b^2$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$5b^2+40=9b^2$, $4b^2=40$, $b^2=10$ $\therefore$ $b=\sqrt{10}$ ($\because$ $b>0$)
이를 조건 (나)의 식에 대입하면
$a+c=\frac{3}{5}\sqrt{5}\times\sqrt{10}=3\sqrt{2}$
따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는
$(a+c)+b=3\sqrt{2}+\sqrt{10}$이다.

채점 요소	배점
조건 (가)로 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형임을 구하기	40 %
조건 (나)와 삼각형의 넓이를 이용하여 b의 값 구하기	40 %
삼각형 ABC의 둘레의 길이 구하기	20 %

210 ····· 답 ⑤

부피가 $(x^3+3x^2-9x+5)\pi$인 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r(x)$, 높이를 $h(x)$라 하면
$(x^3+3x^2-9x+5)\pi=\pi\{r(x)\}^2h(x)$
$\therefore$ $x^3+3x^2-9x+5=\{r(x)\}^2h(x)$ ····· ㉠
이때, $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$라 하면
$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	3	−9	5
		1	4	−5
	1	4	−5	0

아쿠하이스내스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해ㅅㅓㄹ.indb 41 22. 9. 14. 오후 8:19

$x^3+3x^2-9x+5=(x-1)(x^2+4x-5)$
$=(x-1)(x-1)(x+5)$
$=(x-1)^2(x+5)$
㉠에서 $r(x)=x-1$, $h(x)=x+5$
따라서 구하는 원기둥의 겉넓이는
$2\times\pi(x-1)^2+2\pi(x-1)\times(x+5)$
$=2\pi(x-1)\{(x-1)+(x+5)\}$
$=2\pi(x-1)(2x+4)$
$=4\pi(x-1)(x+2)$

211 ····· 답 ①

한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 부피는 x^3이고,
[그림1]에서 높이 방향으로 구멍을 뚫은 부분은
가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각
y, y, x인 직육면체 모양이므로
그 부피는 $y\times y\times x=xy^2$이다.
마찬가지로 [그림2]에서 각 면에 뚫은 구멍의 부피도 모두 xy^2이다.
이때, 뚫은 세 개의 구멍에서 겹치는 부분은
한 모서리의 길이가 y인 정육면체 모양이므로 그 부피는 y^3이다.
따라서 구하는 [그림2]의 입체의 부피는
$x^3-3xy^2+2y^3=x^3-y^3-3xy^2+3y^3$ ····· TIP
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)-3y^2(x-y)$
$=(x-y)(x^2+xy-2y^2)$
$=(x-y)(x-y)(x+2y)$
$=(x-y)^2(x+2y)$

다른 풀이

본 풀이에서 구한 [그림2]의 입체의 부피 $x^3-3xy^2+2y^3$을
다음과 같이 인수분해할 수도 있다.
$x^3-3xy^2+2y^3$을 x에 대한 식으로 보자.
$f(x)=x^3-3y^2x+2y^3$이라 하면
$f(y)=y^3-3y^3+2y^3=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

y	1	0	$-3y^2$	$2y^3$
		y	y^2	$-2y^3$
	1	y	$-2y^2$	0

$\therefore x^3-3xy^2+2y^3=(x-y)(x^2+xy-2y^2)$
$=(x-y)(x-y)(x+2y)$
$=(x-y)^2(x+2y)$

TIP

부피가 x^3인 정육면체에서
부피가 xy^2인 3개의 직육면체의 부피를 빼면
부피가 y^3인 정육면체의 부피가 3번 중복하여 빠진다.
따라서 [그림2]의 입체의 부피를 구하기 위해선
부피가 y^3인 정육면체의 부피를 다시 2번 더해야 한다.
따라서 [그림2]의 입체의 부피는
$x^3-3\times xy^2+2\times y^2=x^3-3xy^2+2y^3$이다.

212 ····· 답 30

$f(x)=x^2+2x-n$이 $(x-a)(x+b)$로 인수분해되면
$x^2+2x-n=(x-a)(x+b)$
$=x^2+(b-a)x-ab$
이므로 양변의 계수를 비교하면 $b-a=2$, $n=ab$이다.
즉, $n=ab=a(a+2)\le1000$
$a=30$이면 $a(a+2)=30\times32=960<1000$
$a=31$이면 $a(a+2)=31\times33=1023>1000$
이므로 조건을 만족시키는 자연수 a는 1, 2, 3, …, 30이다.
따라서 구하는 다항식 $f(x)$의 개수는 30이다.

213 ····· 답 풀이 참조

(1) 자연수 n부터 연속하는 네 자연수의 곱에 1을 더한 수를
식으로 나타내면 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$이다.
이를 인수분해하면
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$
$=\{n(n+3)\}\{(n+1)(n+2)\}+1$
$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$
$n^2+3n=X$라 하면
$(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$
$=X(X+2)+1=(X+1)^2=(n^2+3n+1)^2$
이때, n^2+3n+1은 자연수이므로
모든 연속하는 네 자연수의 곱에 1을 더한 수는
어떤 자연수의 제곱이 된다.
(2) (1)에서 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$이
성립하므로 $n=11$일 때
$\sqrt{11\times12\times13\times14+1}=\sqrt{(11^2+3\times11+1)^2}$
$=121+33+1=155$

채점 요소	배점
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$로 식 세우기	30 %
$(n^2+3n+1)^2$으로 인수분해하기	50 %
$\sqrt{11\times12\times13\times14+1}$의 값 구하기	20 %

214 ····· 답 8

주어진 조건에 의하여 다항식 x^3+ax^2+bx+3이
$x^3+ax^2+bx+3=(x+p)(x+q)(x+r)$ (p, q, r는 정수)와 같이
인수분해 되어야 하고, $pqr=3$이어야 하므로
다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.
(i) $(x+1)(x+1)(x+3)$으로 인수분해 되는 경우
$(x+1)^2(x+3)=x^3+5x^2+7x+3$에서
$a=5$, $b=7$이므로
$a+b=12$
(ii) $(x+1)(x-1)(x-3)$으로 인수분해 되는 경우
$(x+1)(x-1)(x-3)=x^3-3x^2-x+3$에서
$a=-3$, $b=-1$이므로
$a+b=-4$

아끄하ㅓ이ㄴ새ㅅ ㅣㄴㄱㅗ조재ㅇ시ㅣ(사ㅏ이)_ㅎ새ㅅ서ㄹ.indb 42 22. 9. 14. 오후 8:19

(iii) $(x-1)(x-1)(x+3)$으로 인수분해 되는 경우
$(x-1)^2(x+3)=x^3+x^2-5x+3$에서
$a=1$, $b=-5$이므로
$a+b=-4$
(i)~(iii)에서 $a+b$의 최댓값은 $M=12$, 최솟값은 $m=-4$이므로
$M+m=8$

215 ····· 답 96

다항식 $x^3-(1-6ab)x+n$이 $x-1$을 인수로 가지므로
$f(x)=x^3-(1-6ab)x+n$이라 할 때
인수정리에 의하여 $f(1)=0$이다.
조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	0	$6ab-1$	n
		1	1	$6ab$
	1	1	$6ab$	$n+6ab=0$

그러므로 $n=-6ab$이고 n이 100 이하의 자연수이므로
$-6ab\le 100$, $ab\ge -\frac{50}{3}$ ····· ㉠
$x^3-(1-6ab)x+n=(x-1)(x^2+x+6ab)$
이때, $(x-1)(x^2+x+6ab)=(x-1)(x-2a)(x-3b)$
로 인수분해 되는 경우는
$-2a-3b=1$에서 $2a+3b=-1$ ····· ㉡
을 만족시킬 때이다.
㉠, ㉡을 만족시키는 a, b의 값을 찾아보면
$a=4$, $b=-3$일 때 $2\times 4+3\times(-3)=-1$이고, $ab=-12\ge -\frac{50}{3}$
$a=1$, $b=-1$일 때 $2\times 1+3\times(-1)=-1$이고, $ab=-1\ge -\frac{50}{3}$
$a=-2$, $b=1$일 때 $2\times(-2)+3\times 1=-1$이고, $ab=-2\ge -\frac{50}{3}$
$a=-5$, $b=3$일 때 $2\times(-5)+3\times 3=-1$이고, $ab=-15\ge -\frac{50}{3}$
따라서 n의 최솟값은 $ab=-1$일 때 $n=-6\times(-1)=6$이고,
최댓값은 $ab=-15$일 때 $n=-6\times(-15)=90$이므로
구하는 값은 $6+90=96$이다.

216 ····· 답 ②

$(k^3+2k^2+3k+2)\div(k^2+4k+3)$의 값이 정수이므로
$\frac{k^3+2k^2+3k+2}{k^2+4k+3}$가 정수이다. ····· ㉠
$f(k)=k^3+2k^2+3k+2$라 하면 $f(-1)=-1+2-3+2=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	2	3	2
		-1	-1	-2
	1	1	2	0

$k^3+2k^2+3k+2=(k+1)(k^2+k+2)$이고, 이를 ㉠에 다시 대입하면

$$\frac{k^3+2k^2+3k+2}{k^2+4k+3}=\frac{(k+1)(k^2+k+2)}{(k+3)(k+1)}$$
$$=\frac{k^2+k+2}{k+3}$$
$$=\frac{(k+3)(k-2)+8}{k+3}$$
$$=k-2+\frac{8}{k+3}$$

k는 정수이므로 $k-2+\frac{8}{k+3}$이 정수이려면
$\frac{8}{k+3}$이 정수가 되어야 한다.
이때, 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이므로 분모인 $k+3$이 1, 2, 4, 8, -1, -2, -4, -8 중 하나가 되어야 한다.
$k=-2$일 때 $\frac{8}{-2+3}=8$,
$k=1$일 때 $\frac{8}{1+3}=2$, $k=5$일 때 $\frac{8}{5+3}=1$,
$k=-4$일 때 $\frac{8}{-4+3}=-8$, $k=-5$일 때 $\frac{8}{-5+3}=-4$,
$k=-7$일 때 $\frac{8}{-7+3}=-2$, $k=-11$일 때 $\frac{8}{-11+3}=-1$이므로
모든 정수 k의 값의 합은
$(-2)+1+5+(-4)+(-5)+(-7)+(-11)=-23$

217 ····· 답 ⑤

조건 (나)에서
$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$ ····· ㉠
곱셈공식을 이용하면
$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3$
$=\{P(x)+Q(x)\}^3-3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}$
이고, 조건 (가)에 의하여 $P(x)+Q(x)=4$이므로
$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=4^3-3\times 4\times P(x)Q(x)$
$=64-12P(x)Q(x)$
그러므로 ㉠에서
$64-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2+16$
$-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2-48$
$-P(x)Q(x)=x^4+2x^3+x^2-4$
이때, $-P(1)Q(1)=0$, $-P(-2)Q(-2)=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	2	1	0	-4
		1	3	4	4
-2	1	3	4	4	0
		-2	-2	-4	
	1	1	2	0	

$-P(x)Q(x)=(x-1)(x+2)(x^2+x+2)$
$=(x^2+x-2)(x^2+x+2)$
조건 (가)에서 $P(x)+Q(x)=4$이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로
두 이차식 $P(x)$, $Q(x)$는
$P(x)=-x^2-x+2$, $Q(x)=x^2+x+2$

아뿌하이스쿨시스템고등지원스쿨(사이)_하쌤수학.indb 43 22. 9. 14. 오후 8:19

$\therefore P(2)+Q(3)=(-2^2-2+2)+(3^2+3+2)$
$=-4+14=10$

218 ····· 답 ②

칠판의 오른쪽이 3 cm가 남으므로
$n^3+an^2+8n+7-3$, 즉 n^3+an^2+8n+4가 $n+2$로 나누어떨어진다.
$f(n)=n^3+an^2+8n+4$라 하면 인수정리에 의하여
$f(-2)=-8+4a-16+4=0$에서 $a=5$
따라서 $f(n)=n^3+5n^2+8n+4$, $f(-2)=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

-2	1	5	8	4
		-2	-6	-4
	1	3	2	0

$n^3+5n^2+8n+4=(n+2)(n^2+3n+2)$
$=(n+2)^2(n+1)$
따라서 칠판의 가로 방향으로 붙인 사진의 개수는
$(n+2)(n+1)$ ····· ㉠
또한 칠판의 아래쪽이 1 cm가 남으므로
$n^3+6n^2+bn+7-1$, 즉 n^3+6n^2+bn+6이 $n+2$로 나누어떨어진다.
$g(n)=n^3+6n^2+bn+6$이라 하면 인수정리에 의하여
$g(-2)=-8+24-2b+6=0$에서 $b=11$
따라서 $g(n)=n^3+6n^2+11n+6$, $g(-2)=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

-2	1	6	11	6
		-2	-8	-6
	1	4	3	0

$n^3+6n^2+11n+6=(n+2)(n^2+4n+3)$
$=(n+2)(n+1)(n+3)$
따라서 칠판의 세로 방향으로 붙인 사진의 개수는
$(n+1)(n+3)$ ····· ㉡
㉠, ㉡에 의하여 칠판에 붙인 모든 사진의 개수는
$(n+2)(n+1)\times(n+1)(n+3)=(n+1)^2(n+2)(n+3)$이다.

219 ····· 답 ②

$a^3+b^3-c^3-(b-c)a^2-(c+a)b^2-(a-b)c^2$
$=(a^3-ab^2-ac^2)+(b^3-ba^2+bc^2)+(-c^3+ca^2-cb^2)$
$=a(a^2-b^2-c^2)-b(a^2-b^2-c^2)+c(a^2-b^2-c^2)$
$=(a-b+c)(a^2-b^2-c^2)=0$ ····· ㉠
이때, 삼각형에서 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작으므로 $b<a+c$이다.
즉, $a-b+c>0$에서 $a-b+c\neq0$이므로
㉠에서 $a^2-b^2-c^2=0$, $a^2=b^2+c^2$이다.
그러므로 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.
따라서 이 삼각형의 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 b, c이므로
넓이는 $\frac{1}{2}bc$이다.

220 ····· 답 ⑤

$x^4+2ax^3+bx^2+2ax+1=x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b\right\}$
$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2\right\}$

ㄱ. $a=2$, $b=6$인 경우
$x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right\}=x^2\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^2$
$=(x^2+2x+1)^2$
$=(x+1)^4$
이므로 $N(2, 6)=4$
$a=0$, $b=-2$인 경우
$x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\right\}=x^2\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\left(x+\frac{1}{x}-2\right)$
$=(x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$
$=(x+1)^2(x-1)^2$
이므로 $N(0, -2)=4$
$\therefore N(2, 6)+N(0, -2)=8$ (거짓)

ㄴ. $a=k$, $b=2$인 경우
$x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2k\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}+2k\right)$
$=(x^2+1)(x^2+2kx+1)$
이므로 $N(k, 2)=2$를 만족시키려면 $x^2+2kx+1$이 계수가 모두 정수인 일차식으로 인수분해되어야 한다.
따라서 $k=1$ 또는 $k=-1$이다. (참) ····· TIP

ㄷ. $b=a^2+2$이면
$x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2a\left(x+\frac{1}{x}\right)+a^2\right\}=x^2\left(x+\frac{1}{x}+a\right)^2$
$=(x^2+ax+1)^2$
그러므로 $N(a, b)=4$를 만족시키려면
$a=2$ 또는 $a=-2$이어야 하므로
모든 a의 값의 곱은 -4이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

TIP
$x^2+2kx+1$의 상수항이 1이므로
$x^2+2kx+1=(x+1)^2$ 또는 $x^2+2kx+1=(x-1)^2$으로 인수분해 되어야 한다.
따라서 x항의 계수를 비교하면 $k=1$ 또는 $k=-1$이다.

221 ····· 답 74

$N=x^4-25x^2-50x-25$
$=x^4-25(x^2+2x+1)$
$=(x^2)^2-\{5(x+1)\}^2$
$=(x^2+5x+5)(x^2-5x-5)$
이므로 $|N|$이 소수가 되려면
x^2+5x+5가 1 또는 -1이고
x^2-5x-5가 $\pm$(2 이상의 소수)이거나,

아쿠하이스쿨시스템고등개념시리즈(상하)_해설수학.indb 44 22. 9. 14. 오후 8:19

x^2-5x-5가 1 또는 -1이고
x^2+5x+5가 $\pm$(2 이상의 소수)이어야 한다.
(i) x^2+5x+5가 1 또는 -1이고, x^2-5x-5가 $\pm$(2 이상의 소수)인 경우
$x^2+5x+5=1$일 때 $x^2+5x+4=(x+4)(x+1)=0$에서
$x=-4$ 또는 $x=-1$
$x=-4$일 때, $x^2-5x-5=16+20-5=31$에서 $N=31$
$x=-1$일 때, $x^2-5x-5=1+5-5=1$에서 $N=1$이므로
소수가 아니다.
$x^2+5x+5=-1$일 때, $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=-3$
$x=-2$일 때, $x^2-5x-5=4+10-5=9$에서 $N=9$이므로
소수가 아니다.
$x=-3$일 때, $x^2-5x-5=9+15-5=19$에서 $N=19$
(ii) x^2-5x-5가 1 또는 -1이고, x^2+5x+5가 $\pm$(2 이상의 소수)인 경우
$x^2-5x-5=1$일 때, $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)=0$에서
$x=6$ 또는 $x=-1$
$x=6$일 때, $x^2+5x+5=36+30+5=71$에서 $N=71$
$x=-1$일 때, $x^2+5x+5=1-5+5=1$에서 $N=1$이므로
소수가 아니다.
$x^2-5x-5=-1$일 때, $x^2-5x-4=0$에서 좌변이 정수범위에서 인수분해 되지 않으므로 조건을 만족시키는 정수 x의 값이 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 $|N|$이 소수가 되도록 하는 정수 x의 값은 $x=-4$, $x=-3$, $x=6$으로 개수는 $p=3$이고, 이때 소수 $|N|$의 최댓값은 $q=71$이다.
$\therefore p+q=3+71=74$

222 ····· 답 ⑤

$x^2=t$라 하면 $x^4-ax^2+36=t^2-at+36$
이 식을 계수가 모두 정수인 t에 대한 두 일차식으로 인수분해할 수 있는 경우는
$t^2-at+36=(t-1)(t-36)$
$t^2-at+36=(t-2)(t-18)$
$t^2-at+36=(t-3)(t-12)$
$t^2-at+36=(t-4)(t-9)$
$t^2-at+36=(t-6)^2$
의 5개이다. ($\because a>0$이므로 자연수 m, n에 대하여 $(t+m)(t+n)$으로 인수분해할 수 없다.)
이때, $(t-m)(t-n)=(x^2-m)(x^2-n)$에서
x에 대한 각 이차식이 계수가 모두 정수인 두 일차식으로 인수분해 되려면 m, n이 각각 어떤 자연수의 제곱이 되어야 한다.
따라서 가능한 경우는 다음과 같다.
$(t-1)(t-36)=(x^2-1)(x^2-36)$
$=(x+1)(x-1)(x+6)(x-6)$
$=x^4-37x^2+36$
$(t-4)(t-9)=(x^2-4)(x^2-9)$
$=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$
$=x^4-13x^2+36$
따라서 양수 a가 될 수 있는 값은 37 또는 13이므로
그 합은 $37+13=50$이다.

223 ····· 답 40

$n^4+2n^2-3=(n^2-1)(n^2+3)$
$=(n-1)(n+1)(n^2+3)$
$=(n-1)(n^3+n^2+3n+3)$
$=(n-1)\{(n-2)(n^2+3n+9)+21\}$
$=(n-1)(n-2)(n^2+3n+9)+21(n-1)$ ····· ㉠
$(n-1)(n-2)(n^2+3n+9)$는 $(n-1)(n-2)$의 배수이므로
㉠이 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되기 위해서는
$21(n-1)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되어야 한다.
즉, $n-2>0$이므로 $n-2$가 21의 양의 약수이어야 한다.
이때, 21의 양의 약수는 1, 3, 7, 21이므로
$n-2=21$일 때, $n=23$
$n-2=7$일 때, $n=9$
$n-2=3$일 때, $n=5$
$n-2=1$일 때, $n=3$
따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은
$23+9+5+3=40$이다.

224 ····· 답 ③

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2-y^2-ax-by-2=x^2-ax-(y^2+by+2)$ ····· ㉠
이 식이 계수가 정수인 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 x에 대한 다항식 ㉠의 상수항은 다음과 같아야 한다.
(i) $y^2+by+2=(y+1)(y+2)=y^2+3y+2$인 경우
y의 계수를 비교하면 $b=3$이다.
이때, ㉠에서
$x^2-ax-(y+1)(y+2)=\{x-(y+1)\}\{x+(y+2)\}$
$=x^2+x-(y+1)(y+2)$
인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=-1$이고,
$x^2-ax-(y+1)(y+2)=\{x+(y+1)\}\{x-(y+2)\}$
$=x^2-x-(y+1)(y+2)$
인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=1$이다.
(ii) $y^2+by+2=(y-1)(y-2)=y^2-3y+2$인 경우
y의 계수를 비교하면 $b=-3$이다.
이때, ㉠에서
$x^2-ax-(y-1)(y-2)=\{x-(y-1)\}\{x+(y-2)\}$
$=x^2-x-(y-1)(y-2)$
인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=1$이고,

아쁘허어니새시니그고재어시(사이)_해시서르.indb 45 22. 9. 14. 오후 8:19

$x^2-ax-(y-1)(y-2)=\{x+(y-1)\}\{x-(y-2)\}$
$=x^2+x-(y-1)(y-2)$
인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=-1$이다.
(i), (ii)에서 가능한 $a+b$의 값은
$a=-1$, $b=3$에서 $a+b=2$
$a=1$, $b=3$에서 $a+b=4$
$a=1$, $b=-3$에서 $a+b=-2$
$a=-1$, $b=-3$에서 $a+b=-4$
따라서 선지 중 $a+b$의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

225 ····· 답 181

$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)=138$에서
좌변을 전개하여 인수분해 하면
$a^3b-ab^3+b^3c-bc^3+ac^3-a^3c$
$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$
$=a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(b-c)(b+c)$
$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$
$=(b-c)(a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2)$
$=(b-c)\{(b^2c-ab^2)+(bc^2-abc)-(ac^2-a^3)\}$
$=(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c-a)(c+a)\}$
$=(b-c)(c-a)\{b^2+cb-a(c+a)\}$

b — $c+a$
b — $-a$

$=(b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$
$=(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)$
이때, $138=2\times3\times23$이므로
$(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)=1\times2\times3\times23$이다.
a, b, c는 10 이하의 자연수이므로 $a+b+c=23$
이고, $a>b>c$라 하면
$a-c=3$이고, $a-b=2$, $b-c=1$ 또는 $a-b=1$, $b-c=2$이다.
이를 만족시키는 a, b, c는 $a=9$, $b=8$, $c=6$이다.
$\therefore a^2+b^2+c^2=9^2+8^2+6^2=181$

226 ····· 답 98

다항식 $P(x)$가 일차식 $x-a$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여
$P(a)=0$이다.
$P(a)=a^4-250a^2+b=0$에서 $b=250a^2-a^4$이고 ····· ㉠
b가 자연수이므로 $b=250a^2-a^4=a^2(250-a^2)>0$에서
자연수 a로 가능한 값은 1, 2, 3, …, 15이다. ····· ㉡
㉠을 $P(x)$에 대입하면
$P(x)=x^4-250x^2+250a^2-a^4$이고
$P(-a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해 하면

a	1	0	-250	0	$250a^2-a^4$
		a	a^2	$-250a+a^3$	$-250a^2+a^4$
$-a$	1	a	$-250+a^2$	$-250a+a^3$	0
		$-a$	0	$250a-a^3$	
	1	0	$-250+a^2$	0	

그러므로
$P(x)=(x-a)(x+a)(x^2-250+a^2)$
$=(x-a)(x+a)\{x^2-(250-a^2)\}$
이고, 이 식이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 다항식의 곱으로 인수분해 되려면 $x^2-(250-a^2)$이 두 일차식으로 인수분해 되지 않아야 한다.
$x^2-(250-a^2)$이 두 일차식으로 인수분해 되는 경우는
$250-a^2$이 제곱수가 될 때이고, $250=5^2+15^2=9^2+13^2$이므로
$a=5$, $a=9$, $a=13$, $a=15$일 때 $250-a^2$이 제곱수가 된다.
㉡에서 a는 15 이하의 자연수이고 이 중에서 $a=5$, $a=9$, $a=13$, $a=15$일 때를 제외하고 만들어지는 모든 다항식 $P(x)$의 개수는
$p=15-4=11$이다.
또한 a의 최댓값은 14이고 그때의 b의 값은
$q=14^2(250-14^2)=14^2\times54$이다.
$\therefore \dfrac{q}{9(p+1)}=\dfrac{14^2\times54}{9(11+1)}=98$

227 ····· 답 3

$P(x^{12})=x^{24}+x^{12}+1$
$=\{(x^3)^8-1\}+\{(x^3)^4-1\}+3$
$=(x^3-1)\{(x^3)^7+(x^3)^6+(x^3)^5+\cdots+x^3+1\}$
$+(x^3-1)\{(x^3)^3+(x^3)^2+x^3+1\}+3$
이때, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)P(x)$이므로
다항식 x^3-1은 $P(x)$로 나누어떨어진다.
따라서 다항식 $P(x^{12})$을 $P(x)$로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

228 ····· 답 ①

$x^{27}+x^{26}+x^{24}+x^{23}+x+3$
$=x^{27}+x^{26}+x^{25}+x^{24}+x^{23}-x^{25}+x+3$
$=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)-x^{25}+x+3$
$=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)-(x^{25}-1)+x+2$
$=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)$
$-(x^5-1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)+x+2$ ····· TIP
$=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)$
$-(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)+x+2$
$=(x^4+x^3+x^2+x+1)\{x^{23}-(x-1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)\}$
$+x+2$
따라서 구하는 나머지는 $x+2$이다.

TIP
$x^{25}-1$에서 $x^5=t$라 하면
$x^{25}-1=t^5-1=(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)$이므로
$x^{25}-1=(x^5-1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)$이다.

아쿠하이스내스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_해ㅐㅅㅓㄹ.indb 46 22. 9. 14. 오후 8:19

229 ····· 답 ③

$f(x)=x^{10}-2x^5-3$이라 하면
다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여 $f(-1)=1-2\times(-1)-3=0$이다.
다항식 $x^{10}-2x^5-3$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이므로
$x^{10}-2x^5-3=(x+1)Q(x)$ ····· ㉠
이때, $x^5=X$라 하면
$x^{10}-2x^5-3=X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$
$=(x^5+1)(x^5-3)$
$=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^5-3)$ ····· TIP
이를 ㉠에 대입하면
$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^5-3)=(x+1)Q(x)$에서
$Q(x)=(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^5-3)$
따라서 다항식 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여
$Q(-1)=\{1-(-1)+1-(-1)+1\}\times(-1-3)$
$=-20$

TIP

3 이상의 홀수인 자연수 n에 대하여
$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)$
이 성립한다.
[증명]
2 이상의 자연수 n에 대하여
$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$ ····· ㉠
은 x에 대한 항등식이다.
따라서 n이 3 이상의 홀수일 때,
㉠에 x 대신 $-x$를 대입하면
$-x^n-1=(-x-1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)$
$\therefore x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)$

II 방정식과 부등식

01 복소수와 이차방정식

II

230 ····· 답 ④

① 허수는 대소 관계가 없으므로 양수, 음수를 판단할 수 없다.
② 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $b=0$이면 실수이다.
③ $2+3i$의 허수부분은 3이다.
④ 복소수의 허수부분은 실수이다.
⑤ 허수는 실수 a와 0이 아닌 실수 b에 대하여 $a+bi$ 꼴로 나타낼 수 있다.
따라서 선지 중 옳은 것은 ④이다.

231 ····· 답 (1) $5+2i$ (2) 1 (3) -1

(1) $(1+i)^2+(1+2i)(1-2i)=(1+2i+i^2)+\{1^2-(2i)^2\}$
$=(1+2i-1)+\{1-(-4)\}$
$=5+2i$

(2) $\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2(1+i)}{1-i^2}=\dfrac{2(1+i)}{2}=1+i$이고,
$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}$
$=\dfrac{1-2i-1}{1-(-1)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$
$\therefore \dfrac{2}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}=(1+i)+(-i)=1$

(3) $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2}$
$=\dfrac{1+2i-1}{1-(-1)}=\dfrac{2i}{2}=i$
$\therefore \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2=i^2=-1$

232 ····· 답 ②

$\alpha=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i-1}{1-(-1)}=i$
$\beta=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i-1}{1-(-1)}=-i$
$\therefore \dfrac{2\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{2i^2+(-i)^2}{i\times(-i)}=-3$

다른 풀이

$\alpha=\dfrac{1+i}{1-i}$, $\beta=\dfrac{1-i}{1+i}$에서
$\alpha^2=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2=\dfrac{1+2i-1}{1-2i-1}=\dfrac{2i}{-2i}=-1$
$\beta^2=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2=\dfrac{1-2i-1}{1+2i-1}=\dfrac{-2i}{2i}=-1$
$\alpha\beta=\dfrac{1+i}{1-i}\times\dfrac{1-i}{1+i}=1$이므로

아까하이노래서니노그고재이서니(사이)_해설서로.indb 47 22. 9. 14. 오후 8:19

$\dfrac{2\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{2\times(-1)+(-1)}{1}=-3$

233 ····· 답 풀이 참조

(1) $x^2-4x+5=0$이라 하면 이차방정식의 근의 공식에 의하여
$x=2\pm\sqrt{2^2-5}=2\pm i$이므로
$x^2-4x+5=\{x-(2+i)\}\{(x-(2-i)\}$
$=(x-2-i)(x-2+i)$
로 인수분해된다.

(2) $x^2+4=x^2-(-4)=x^2-(2i)^2=(x+2i)(x-2i)$

(3) $f(x)=x^3+x^2+x-3$이라 할 때 $f(1)=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	1	1	−3
		1	2	3
	1	2	3	0

그러므로 $x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)$이고,
$x^2+2x+3=0$에서 이차방정식의 근의 공식에 의하여
$x=-1\pm\sqrt{1^2-3}=-1\pm\sqrt{2}i$이므로
$x^2+2x+3=\{(x-(-1+\sqrt{2}i)\}\{(x-(-1-\sqrt{2}i)\}$
$=(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$
따라서 주어진 다항식은
$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$
로 인수분해 된다.

234 ····· 답 ⑤

$(3+i)a-2bi=6-4i$에서
$3a+(a-2b)i=6-4i$이므로
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3a=6$, $a-2b=-4$에서 $a=2$, $b=3$
$\therefore a+b=2+3=5$

235 ····· 답 6

$(1-i)^2=1-2i-1=-2i$
$(1+i)^2=1+2i-1=2i$이므로
$(1+i)^4=(2i)^2=-4$
$(1-i)^2-a(1+i)^4=-2i-a\times(-4)=4a-2i$
이고, $4a-2i=16+bi$이므로
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$4a=16$, $a=4$이고 $b=-2$
$\therefore a-b=4-(-2)=6$

236 ····· 답 21

$\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=\dfrac{a(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\dfrac{b(1-i)}{(1+i)(1-i)}$
$=\dfrac{a(1+i)}{2}+\dfrac{b(1-i)}{2}$
이고, $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}i=5+2i$이므로
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$\dfrac{a+b}{2}=5$, $\dfrac{a-b}{2}=2$
$a+b=10$, $a-b=4$에서 $a=7$, $b=3$
$\therefore ab=7\times3=21$

237 ····· 답 ①

$a^3-a^2b-ab^2+b^3=a^2(a-b)-b^2(a-b)$
$=(a^2-b^2)(a-b)$
$=(a+b)(a-b)^2$ ····· ㉠
한편, $a+b=(1+2i)+(1-2i)=2$,
$a-b=(1+2i)-(1-2i)=4i$이므로
이를 ㉠에 대입하면
$(a+b)(a-b)^2=2\times(4i)^2=-32$

238 ····· 답 ②

$x=\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$,
$y=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$이므로
$x+y=(1-i)+(1+i)=2$
$xy=(1-i)(1+i)=2$
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=2^3-3\times2\times2=-4$

다른 풀이

$x=\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$,
$y=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$이므로
$x^3=(1-i)^3=1-3i-3+i=-2-2i$
$y^3=(1+i)^3=1+3i-3-i=-2+2i$
$\therefore x^3+y^3=(-2-2i)+(-2+2i)=-4$

참고

$x=\dfrac{2}{1+i}$, $y=\dfrac{2}{1-i}$를 그대로 계산하기 보다는
분모가 실수가 되도록 $x=1-i$, $y=1+i$와 같이 정리한 뒤
계산하는 것이 더 편리하다.

239 ····· 답 ①

$z=(1+i)x^2-(1-i)x-2i$라 하면
$z=(x^2-x)+(x^2+x-2)i$
$=x(x-1)+(x+2)(x-1)i$에서
(실수부분)$=x(x-1)$ ····· ㉠
(허수부분)$=(x+2)(x-1)$ ····· ㉡
이므로 복소수 z가 실수가 되기 위해서는

아끄하이노새시니그소재이시(사이)_하새서르.indb 48 22. 9. 14. 오후 8:19

㉡에서 $x=-2$ 또는 $x=1$이어야 한다.
이때, $x=1$이면 ㉠에서 실수부분도 0이 되어 $z=0$이 되므로
z가 0이 아닌 실수가 되도록 하는 실수 x의 값은 -2이다.

TIP

$z=(1+i)x^2-(1-i)x-2i$의 값은
❶ $x=1$일 때, $z=0$ (실수)
❷ $x=-2$일 때, $z=6$ (실수)
❸ $x=0$일 때, $z=-2i$ (순허수)
그 이외의 실수 x에 대하여 z는 순허수가 아닌 허수이다.

참고

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에서 실수부분이 0이고
허수부분은 0이 아닌 경우 $z=bi$와 같이 나타낼 수 있고,
이러한 복소수를 순허수라 한다.

240

답 (1) $a=0, b\neq 0$ (2) $a=b=0$ (3) $a\neq 0, b=0$

$z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여
$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ …… ㉠
(1) $z^2<0$일 때,
㉠에서 $a^2-b^2+2abi<0$이므로
$a^2-b^2<0$이고 $2ab=0$이어야 한다.
(i) $a=0$이면 $-b^2<0$이어야 하므로 $b\neq 0$
(ii) $b=0$이면 $a^2<0$을 만족시키는 실수 a가 존재하지 않는다.
…… TIP
(i), (ii)에서 $a=0$이고 $b\neq 0$이다. 즉, z는 순허수이다.
(2) $z^2=0$일 때,
㉠에서 $a^2-b^2+2abi=0$이므로
$a^2-b^2=0$이고 $2ab=0$이어야 한다.
따라서 $a=b=0$이다. 즉, $z=0$이다.
(3) $z^2>0$일 때,
㉠에서 $a^2-b^2+2abi>0$이므로
$a^2-b^2>0$이고 $2ab=0$이어야 한다.
(i) $a=0$이면 $-b^2>0$을 만족시키는 실수 b가 존재하지 않는다.
(ii) $b=0$이면 $a^2>0$이어야 하므로 $a\neq 0$
(i), (ii)에서 $a\neq 0$이고 $b=0$이다.
즉, z는 0이 아닌 실수이다.

TIP

모든 실수 x에 대하여 $x^2\geq 0$이 성립한다.
즉, $x^2<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

참고

복소수 z에 대하여
❶ $z=0$이면 $z^2=0$이고, $z^2=0$이면 $z=0$이다.
❷ z가 0이 아닌 실수이면 $z^2>0$이고, $z^2>0$이면 z는 0이 아닌 실수이다.
❸ z가 순허수이면 $z^2<0$이고, $z^2<0$이면 z는 순허수이다.

241

답 ④

$z=2-3i$, $\overline{z}=2+3i$이므로
① $z+\overline{z}=(2-3i)+(2+3i)=4$ (참)
② $z-\overline{z}=(2-3i)-(2+3i)=-6i$ (참)
③ $z\overline{z}=(2-3i)(2+3i)=13$ (참)
④ $\frac{z}{\overline{z}}=\frac{2-3i}{2+3i}=\frac{-5-12i}{13}$ (거짓)
⑤ $z^2=(2-3i)^2=-5-12i$ (참)
따라서 선지 중 옳지 않은 것은 ④이다.

242

답 ⑤

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
z의 켤레복소수는 $\overline{z}=a-bi$이다.
① $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$이므로
$z+\overline{z}$는 실수이다. (참)
② $z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$이므로
$z-\overline{z}$는 실수부분이 0이다. (참)
③ $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\geq 0$이므로
$z\overline{z}$는 0 또는 양수이다. (참)
④ $z=\overline{z}$이면 $a+bi=a-bi$에서 $b=-b$, $b=0$
즉, $z=a$이므로 z는 실수이다. (참)
⑤ $z=-\overline{z}$이면 $a+bi=-(a-bi)=-a+bi$에서
$a=-a$, $a=0$
즉, $z=bi$이므로 z는 0 또는 순허수이다. (거짓)
따라서 선지 중 옳지 않은 것은 ⑤이다.

TIP

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여
$z+\overline{z}$와 $z\overline{z}$는 항상 실수이고, $z-\overline{z}$는 0 또는 순허수이다.

243

답 ④

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
z의 켤레복소수는 $\overline{z}=a-bi$이다.
$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$: 실수
$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$: 0이 아닌 실수 ($\because$ z는 0이 아닌 복소수)
$z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$: 0 또는 순허수
ㄱ. $(1+z)(1+\overline{z})=1+(z+\overline{z})+z\overline{z}=1+2a+a^2+b^2$이므로
항상 실수이다.
ㄴ. $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{2a}{a^2+b^2}$이므로 항상 실수이다.
ㄷ. $z^2-\overline{z}^2=(z+\overline{z})(z-\overline{z})=2a\times 2bi=4abi$이므로
0 또는 순허수이다.
ㄹ. $(z-\overline{z})^2=(2bi)^2=-4b^2$이므로 항상 실수이다.
따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

아쿠하이스내스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_해ㅅㅓㄹ.indb 49 22. 9. 14. 오후 8:19

244 ····· 답 ③

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=6$에서 $a=3$
$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=9+b^2=11$에서
$b^2=2$, $b=\pm\sqrt{2}$
$\therefore z=3\pm\sqrt{2}i$

245 ····· 답 ③

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$
ㄱ. $\overline{z}=a-bi$의 켤레복소수는 z이므로 $\overline{\overline{z}}=z$ (참)
ㄴ. $\overline{z\overline{z}}=\overline{z}\,\overline{\overline{z}}=\overline{z}z$ (거짓)
ㄷ. $z+\overline{\overline{z}}=\overline{z}+\overline{\overline{z}}=\overline{z}+z$ (거짓)
ㄹ. $\overline{z-\overline{z}}=\overline{z}-\overline{\overline{z}}=\overline{z}-z$ (참)
ㅁ. $\overline{\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{\overline{z}}}=\frac{\overline{z}}{z}$ (참)
따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ으로 3개이다.

TIP

0이 아닌 두 복소수 z, w와 각각의 켤레복소수 $\overline{z}$, $\overline{w}$에 대하여 다음이 성립한다.

$\overline{\overline{z}}=z$, $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

246 ····· 답 ⑤

$z=1-i$이므로 $\overline{z}=1+i$
$z+\overline{z}=(1-i)+(1+i)=2$
$z\overline{z}=(1-i)(1+i)=1-(-1)=2$
$\therefore \frac{z+1}{z}+\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}=1+\frac{1}{z}+1+\frac{1}{\overline{z}}$
$=2+\frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}}$
$=2+\frac{2}{2}=3$

다른 풀이

$\frac{z+1}{z}=\frac{(1-i)+1}{1-i}=\frac{2-i}{1-i}=\frac{3+i}{2}$
$\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}=\overline{\left(\frac{z+1}{z}\right)}=\frac{3-i}{2}$
$\therefore \frac{z+1}{z}+\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}=\frac{3+i}{2}+\frac{3-i}{2}=3$

247 ····· 답 26

$\alpha-\beta=(3-2i)-(2+3i)=1-5i$
이므로 $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}=1+5i$이다.
$\therefore \alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$
$=\alpha(\overline{\alpha}-\overline{\beta})-\beta(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$
$=(1-5i)(1+5i)=1+25=26$

TIP

주어진 식 $\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$에
$\alpha=3-2i$, $\beta=2+3i$, $\overline{\alpha}=3+2i$, $\overline{\beta}=2-3i$
를 먼저 대입하는 것보다 위의 풀이처럼 주어진 식을 변형하여 계산하는 것이 더 편리하다.

248 ····· 답 ④

$\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}=\overline{2-3i}=2+3i$
$\overline{z_1}\,\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=\overline{1+5i}=1-5i$
$\therefore (\overline{z_1}-2)(\overline{z_2}+2)=\overline{z_1}\,\overline{z_2}+2(\overline{z_1}-\overline{z_2})-4$
$=(1-5i)+2(2+3i)-4$
$=1+i$

다른 풀이

$(z_1-2)(z_2+2)=z_1z_2+2(z_1-z_2)-4$
$=(1+5i)+2(2-3i)-4$
$=1-i$
$\therefore (\overline{z_1}-2)(\overline{z_2}+2)=\overline{(z_1-2)(z_2+2)}$
$=\overline{1-i}=1+i$

249 ····· 답 ①

$z=\overline{z}$를 만족시키므로 z는 실수이다.
$z=x-4+(x^2+2x-24)i$
$=(x-4)+(x+6)(x-4)i$
에서 허수부분이 0이 되려면 $x=-6$ 또는 $x=4$이다.
이때, $z\neq0$에서 실수부분은 0이 아니므로 $x\neq4$이다.
$\therefore x=-6$

250 ····· 답 ④

$z+\overline{z}=0$을 만족시키므로 z가 순허수이다.
$z=x^2-(3+i)x+2+i$
$=(x^2-3x+2)-(x-1)i$
$=(x-1)(x-2)-(x-1)i$
에서 $(x-1)(x-2)=0$이고 $x-1\neq0$이므로 $x=2$이다.
따라서 $a=2$, $b=-i$이므로
$a+b=2-i$

251 ····· 답 ④

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$(1+i)z+i\overline{z}=(1+i)(a+bi)+i(a-bi)$
$=a+bi+ai-b+ai+b$
$=a+(2a+b)i$
$=3+8i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=3$, $2a+b=8$이므로 $a=3$, $b=2$
$\therefore z=3+2i$

아끄하이노새시니그소재이시(사이)_하새서르.indb 50 22. 9. 14. 오후 8:19

252 ⑤

$\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2=5-2i$에서 $\overline{\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2}=\alpha^2+\beta^2=5+2i$이다.
이때, $\alpha+\beta=4-i$이므로
$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$에 대입하면
$(4-i)^2=(5+2i)+2\alpha\beta$
$2\alpha\beta=10-10i$에서 $\alpha\beta=5-5i$이다.
따라서 $\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=\overline{\alpha\beta}=5+5i$이므로
$\alpha\beta+\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=(5-5i)+(5+5i)$
$=10$

253 ⑤

$i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, …이므로
자연수 n에 대하여 $i^n=i^{n+4}$이다.
$\therefore\ 1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{10}$
$=(1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+i^8+i^9+i^{10}$
$=\{1+i+(-1)+(-i)\}+\{1+i+(-1)+(-i)\}$
$+1+i+(-1)$
$=i$

254 ④

$i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, …이므로
자연수 n에 대하여 $i^n=i^{n+4}$이다.
$\therefore\ \dfrac{i^2+3i^4+5i^6+7i^8+9i^{10}+11i^{12}}{2i+4i^3+6i^5+8i^7+10i^9+12i^{11}}$
$=\dfrac{(-1+3)+(-5+7)+(-9+11)}{(2i-4i)+(6i-8i)+(10i-12i)}$
$=\dfrac{2+2+2}{(-2i)+(-2i)+(-2i)}$
$=\dfrac{6}{-6i}=i$

255 ①

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i-1}{1-(-1)}=i$
$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i-1}{1-(-1)}=-i$
$\therefore\ \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2n}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2n}=\left\{\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right\}^n+\left\{\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right\}^n$
$=(i^2)^n+\{(-i)^2\}^n$
$=(-1)^n+(-1)^n$
$=-2$ ($\because$ n은 홀수)

256 ④

$z^3=1-i$이므로 $\overline{z}^3=\overline{z^3}=\overline{1-i}=1+i$
$\overline{z}^6=(\overline{z}^3)^2=(1+i)^2=2i$, $\overline{z}^{12}=(\overline{z}^6)^2=(2i)^2=-4$이다.
$\therefore\ \overline{z}^{24}=(\overline{z}^{12})^2=(-4)^2=16$

257 ①

$z=1+i$이므로
$z^2=(1+i)^2=2i$
$z^{100}=(z^2)^{50}=(2i)^{50}=2^{50}\times(i^4)^{12}\times i^2=-2^{50}$
$\overline{z}^{100}=\overline{z^{100}}=-2^{50}$ …… TIP
$\therefore\ z^{100}+\overline{z}^{100}=(-2^{50})+(-2^{50})=-2^{51}$

TIP
두 복소수 z, w에 대하여 $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$이므로 $\overline{z}^n=\overline{z^n}$가 성립한다.
한편, $\overline{z}=1-i$이므로 $\overline{z}^2=(1-i)^2=-2i$
$\overline{z}^{100}=(\overline{z}^2)^{50}=(-2i)^{50}=-2^{50}$
으로 계산할 수도 있다.

258 ①

$\dfrac{1}{i}=-i$이므로
$\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\cdots+\dfrac{1}{i^{50}}$
$=-i+(-i)^2+(-i)^3+\cdots+(-i)^{50}$
$=(-i-1+i+1)+(-i-1+i+1)+\cdots-i-1$
$=12\times(-i-1+i+1)-i-1$
$=-1-i$
따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로
$a+b=-1+(-1)=-2$

259 ②

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i-1}{1-(-1)}=i$
$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i-1}{1-(-1)}=-i$
$\therefore\ \dfrac{1+i}{1-i}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^4+\cdots$
$+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{29}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{30}$
$=\{i+(-i)^2+i^3+(-i)^4\}$
$+\cdots+\{i^{25}+(-i)^{26}+i^{27}+(-i)^{28}\}+i^{29}+(-i)^{30}$
$=-1+i$

260 ②

복소수 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여
$z^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
$z^3=z\times z^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1-(-3)}{4}=1$
이므로 자연수 n에 대하여 $z^n=z^{n+3}$이다. …… ㉠
이때, $z+z^2+z^3=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}+1=0$이므로

아쿠하이스내시ㅣ느그조재으시ㅣ(사아)_흐내시너르.indb 51 22. 9. 14. 오후 8:19

$z+z^2+z^3+\cdots+z^{40}$
$=(z+z^2+z^3)+(z^4+z^5+z^6)+\cdots+(z^{37}+z^{38}+z^{39})+z^{40}$
$=(z+z^2+z^3)+(z+z^2+z^3)+\cdots+(z+z^2+z^3)+z$ ($\because$ ㉠)
$=z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

다른 풀이

복소수 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z=-1+\sqrt{3}i$이므로
$2z+1=\sqrt{3}i$
양변을 각각 제곱하면
$4z^2+4z+1=-3$에서 $z^2+z+1=0$
양변에 각각 $z-1$을 곱하면
$(z-1)(z^2+z+1)=0$에서 $z^3=1$
따라서 자연수 n에 대하여 $z^n=z^{n+3}$이므로 …… ㉠
$z+z^2+z^3+\cdots+z^{40}$
$=(z+z^2+z^3)+(z^4+z^5+z^6)+\cdots+(z^{37}+z^{38}+z^{39})+z^{40}$
$=(z+z^2+z^3)+(z+z^2+z^3)+\cdots+(z+z^2+z^3)+z$ ($\because$ ㉠)
$=z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

261 ····· 답 ⑤

① $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{4}i}{\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ (참)
② $\dfrac{\sqrt{-9}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{9}i}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}i$ (참)
③ $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\sqrt{5}i=-\sqrt{10}$ (참)
④ $\sqrt{-12}-\sqrt{-3}=2\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=\sqrt{3}i$ (참)
⑤ $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}i}=\dfrac{2}{i}=-2i$ (거짓)
따라서 선지 중 옳지 않은 것은 ⑤이다.

다른 풀이

① $\dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-4}{-2}}=\sqrt{2}$ (참)
② $\dfrac{\sqrt{-9}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{-9}{3}}=\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$ (참)
③ $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=-\sqrt{(-2)\times(-5)}=-\sqrt{10}$ (참)
⑤ $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\dfrac{8}{-2}}=-\sqrt{-4}=-2i$ (거짓)
따라서 선지 중 옳지 않은 것은 ⑤이다.

262 ····· 답 ③

$a<0$, $b>0$에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$이므로
$\sqrt{\dfrac{4}{-1}}=-\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{-1}}$이다.
따라서 등호를 잘못 사용한 곳은 ③이다.

263 ····· 답 ①

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\dfrac{\sqrt{-6}\sqrt{8}}{\sqrt{-3}}+\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{-2}}$
$=-\sqrt{(-2)\times(-8)}+\sqrt{\dfrac{-6}{-3}}\times\sqrt{8}-\sqrt{\dfrac{32}{-2}}$
$=-\sqrt{16}+\sqrt{2}\times2\sqrt{2}-\sqrt{-16}$
$=-4+4-4i=-4i$

다른 풀이

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\dfrac{\sqrt{-6}\sqrt{8}}{\sqrt{-3}}+\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{-2}}$
$=\sqrt{2}i\times2\sqrt{2}i+\dfrac{\sqrt{6}i\times2\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}$
$=-4+4-4i=-4i$

264 ····· 답 ①

$x^2-9x-36=0$에서 $(x+3)(x-12)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=12$
$\alpha=-3$, $\beta=12$라 하면
$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{12}}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{\dfrac{-3}{12}}-\sqrt{\dfrac{12}{-3}}$
$=\dfrac{i}{2}-2i=-\dfrac{3}{2}i$

다른 풀이

$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{12}}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}}+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}$
$=\dfrac{i}{2}+\dfrac{2}{i}=\dfrac{i}{2}+\dfrac{2i}{i^2}=-\dfrac{3}{2}i$

265 ····· 답 ④

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$이다.
따라서 복소수 $\sqrt{a}-\sqrt{-b}$의 허수부분은 $\sqrt{-a}$이므로
$\sqrt{a}-\sqrt{-b}$의 켤레복소수는 $-\sqrt{a}-\sqrt{-b}$이다.

266 ····· 답 ①

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$에서 $a<0$, $b>0$이므로
$-a>0$, $\dfrac{a}{b}<0$, $a^2b>0$이다.
따라서 $\sqrt{-a}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{a^2b}$에서
실수부분은 $\sqrt{-a}+\sqrt{a^2b}$이고, 허수부분은 $\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$이다.

267 ····· 답 ⑤

$a>b>0$에서 $-a<0$, $a-b>0$, $b-a<0$이므로
$\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}=\sqrt{\dfrac{-a}{a}}+\sqrt{\dfrac{a-b}{b-a}}=\sqrt{-1}+\sqrt{-1}$
$=i+i=2i$

아쿠하이스내스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 52 22. 9. 14. 오후 8:19

다른 풀이

$a>b>0$에서 $b-a<0$이므로

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}}=\frac{\sqrt{a}i}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}i}$$
$$=i-\frac{1}{i}=i-(-i)=2i$$

268 ⑤

$x^2+(m+2)x-2(m+1)=0$의 한 근이 1이므로

$x=1$을 대입하면

$1+(m+2)-2(m+1)=0$

에서 $m=1$이다. 주어진 이차방정식은

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

이므로 다른 한 근은 $x=-4$이다.

269 ②

$x^2-3x+3=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-3\alpha+3=0$, $\beta^2-3\beta+3=0$에서

$\alpha^2-3\alpha=-3$, $\beta^2-3\beta=-3$이다.

$$\therefore \frac{2+9\beta-3\beta^2}{2\alpha^2-6\alpha+9}=\frac{2-3(\beta^2-3\beta)}{2(\alpha^2-3\alpha)+9}$$
$$=\frac{2-3\times(-3)}{2\times(-3)+9}=\frac{11}{3}$$

270 (1) 1, 2 (2) 1

(1) 이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k^2-2=0$의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지려면 $D\geq 0$이어야 한다.

$D=(2k-1)^2-4(k^2-2)=-4k+9\geq 0$

즉, $k\leq\frac{9}{4}$이어야 한다.

따라서 자연수 k의 값은 1, 2이다.

(2) 이차방정식 $(1+k^2)x^2-2(1+k)x+2=0$의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지려면 $D\geq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(1+k)^2-2(1+k^2)=-(k-1)^2\geq 0$

즉, $(k-1)^2\leq 0$이어야 한다.

이때, 자연수 k에 대하여 $(k-1)^2\geq 0$이므로 $k-1=0$

$\therefore k=1$

271 ③

이차방정식 $x^2-4ax+4a^2+a+3=0$의 판별식을 D라 할 때, 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-(4a^2+a+3)<0$

$-a-3<0$에서 $a>-3$

따라서 정수 a의 최솟값은 -2이다.

다른 풀이

$x^2-4ax+4a^2+a+3=0$에서 $(x-2a)^2=-a-3$이므로

서로 다른 두 허근을 갖기 위해선

$-a-3<0$, 즉 $a>-3$이어야 한다.

따라서 정수 a의 최솟값은 -2이다.

272 ③

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $k\neq 0$

이차방정식 $kx^2-2kx+3=0$ …… ㉠

의 판별식을 D라 할 때, 중근을 가져야 하므로 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=k^2-3k=0$, $k(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k\neq 0$)

㉠에 $k=3$을 대입하면

$3x^2-6x+3=0$, $3(x-1)^2=0$

$\therefore \alpha=1$

$\therefore k+\alpha=3+1=4$

273 ②

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 주어진 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b>0$, 즉 $a^2>4b$이어야 한다.

이를 만족시키는 7 이하의 자연수 a, b는 다음과 같다.

$a=1$, 2일 때, 조건을 만족시키는 b의 값이 존재하지 않는다.

$a=3$일 때, $9>4b$에서 $b=1$, 2

$a=4$일 때, $16>4b$에서 $b=1$, 2, 3

$a=5$일 때, $25>4b$에서 $b=1$, 2, 3, 4, 5, 6

$a=6$일 때, $36>4b$에서 $b=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7

$a=7$일 때, $49>4b$에서 $b=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2+3+6+7+7=25$이다.

274 ①

$3|x|^2-5|x|-2=(3|x|+1)(|x|-2)=0$에서

$|x|=-\frac{1}{3}$ 또는 $|x|=2$

이때, $|x|\geq 0$이므로 $|x|=2$이다.

즉, $x=\pm 2$이므로 구하는 모든 실근의 곱은 -4이다.

275 ③

(i) $x\geq -1$일 때,

$x^2-2|x+1|-6=0$에서

$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x\geq -1$)

(ii) $x<-1$일 때,

$x^2-2|x+1|-6=0$에서

$x^2+2x-4=0$

아끄하이스내시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해ㅐㅅㅓㄹ.indb 53 22. 9. 14. 오후 8:19

$\therefore x=-1-\sqrt{5}\ (\because x<-1)$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실근의 합은

$4+(-1-\sqrt{5})=3-\sqrt{5}$

276 ····· 답 ④

이차방정식 $x^2+2x+a-2=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, 실근을 가지려면

$\frac{D_1}{4}=1^2-(a-2)\geq 0,\ a\leq 3$ ····· ㉠

이차방정식 $x^2-4x+3a+10=0$의 판별식을 D_2라 할 때, 실근을 가지려면

$\frac{D_2}{4}=(-2)^2-(3a+10)\geq 0,\ 3a\leq -6,\ a\leq -2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 둘 중 하나의 조건만 만족해야 하므로 $-2<a\leq 3$일 때, 이차방정식 $x^2+2x+a-2=0$은 실근을 가지고 이차방정식 $x^2-4x+3a+10=0$은 허근을 갖는다.

따라서 $-2<a\leq 3$인 모든 정수 a의 값의 합은

$-1+0+1+2+3=5$

277 ····· 답 ③

방정식 $-3x^2+6x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{3}$

① $\alpha+\beta=2$ (참)

② $\alpha\beta=-\frac{1}{3}$ (참)

③ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{3}$ (거짓)

④ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times 2=10$ (참)

⑤ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{-\frac{1}{3}}=-6$ (참)

따라서 선지 중 옳지 않은 것은 ③이다.

278 ····· 답 ④

방정식 $x^2-5x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=2$

$\therefore \left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\left(1+\frac{2}{\beta}\right)=1+\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{4}{\alpha\beta}$

$=1+\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+\frac{4}{\alpha\beta}$

$=1+\frac{2\times 5}{2}+\frac{4}{2}=8$

279 ····· 답 (1) 13 (2) $-\frac{1}{7}$

이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+3\alpha-5=0,\ \beta^2+3\beta-5=0$ ····· ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-5$ ····· ㉡

(1) $(\alpha^2+2\alpha-2)(\beta^2+2\beta-2)$

$=\{(\alpha^2+3\alpha-5)-\alpha+3\}\{(\beta^2+3\beta-5)-\beta+3\}$

$=(-\alpha+3)(-\beta+3)\ (\because ㉠)$

$=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$

$=-5-3\times(-3)+9=13\ (\because ㉡)$

(2) $\frac{1}{(\alpha^2+4\alpha-4)(\beta^2+4\beta-4)}$

$=\frac{1}{\{(\alpha^2+3\alpha-5)+\alpha+1\}\{(\beta^2+3\beta-5)+\beta+1\}}$

$=\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\ (\because ㉠)$

$=\frac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\frac{1}{-5+(-3)+1}\ (\because ㉡)$

$=-\frac{1}{7}$

280 ····· 답 4

이차방정식 $f(x)-3x+2=0$의 두 근 α, β에 대하여

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=-2$이므로

$f(x)-3x+2=a(x^2+4x-2)\ (a\neq 0)$

$f(x)=a(x^2+4x-2)+3x-2$ ····· ㉠

$f(0)=2$이므로

$f(0)=-2a-2=2$에서 $a=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=-2(x^2+4x-2)+3x-2$

$=-2x^2-5x+2$

$\therefore f(-2)=-2\times(-2)^2-5\times(-2)+2=4$

281 ····· 답 ④

이차방정식의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $2+i$이면 다른 한 근은 그 켤레복소수인 $2-i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$(2+i)+(2-i)=-(a+b)$에서 $a+b=-4$ ····· ㉠

두 근의 곱은

$(2+i)(2-i)=a^2+b^2$에서 $a^2+b^2=5$ ····· ㉡

이때, $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(-4)^2=5+2ab$에서 $ab=\frac{11}{2}$

$\therefore \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$

$=\frac{5}{\frac{11}{2}}=\frac{10}{11}$

아끄하ㅓ이ㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ새이ㅅㅣ(사ㅏ이)_하새ㅅㅓㄹ.indb 54 22. 9. 14. 오후 8:19

282 답 ④

이차방정식 $2x^2+8x-3k=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-\frac{3}{2}k$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이고 $|\alpha-\beta|=k$이므로

$k^2=(-4)^2-4\times\left(-\frac{3}{2}k\right)=16+6k$

$k^2-6k-16=0$, $(k+2)(k-8)=0$

$\therefore k=|\alpha-\beta|=8$ ($\because k>0$)

283 답 ③

주어진 이차방정식의 두 근의 비가 1 : 2이므로
두 근을 α, 2α (α는 실수)라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=2k+1$에서 $\alpha=\frac{2k+1}{3}$ …… ㉠

$\alpha\times2\alpha=k^2+1$에서 $2\alpha^2=k^2+1$ …… ㉡

㉠을 ㉡의 식에 대입하면 $2\left(\frac{2k+1}{3}\right)^2=k^2+1$

$2(2k+1)^2=9(k^2+1)$, $k^2-8k+7=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
구하는 모든 실수 k의 값의 합은 8이다.

284 답 ①

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=-5$
$f(3x+1)=0$의 두 근은 $3x+1=\alpha$, $3x+1=\beta$에서
$\frac{\alpha-1}{3}$, $\frac{\beta-1}{3}$이다.
이때, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=25+20=45$에서
$|\alpha-\beta|=3\sqrt{5}$이므로 방정식 $f(3x+1)=0$의 두 근의 차는

$\left|\frac{\alpha-1}{3}-\frac{\beta-1}{3}\right|=\frac{|\alpha-\beta|}{3}=\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

다른 풀이

$f(x)=x^2-5x-5$에서 x 대신 $3x+1$을 대입하면
$f(3x+1)=(3x+1)^2-5(3x+1)-5$
$=9x^2-9x-9$
따라서 이차방정식 $f(3x+1)=0$, 즉 $9x^2-9x-9=0$의 두 근을
α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$
$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$
$=\sqrt{1^2-4\times(-1)}=\sqrt{5}$

285 답 (1) $x^2-4x+3=0$ (2) $x^2-x-1=0$

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$이다.
(1) 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은
$(x-3)(x-1)=0$, 즉 $x^2-4x+3=0$이다.
(2) $(\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=3-2=1$,
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=1-3+1=-1$이므로
두 근이 $\alpha-1$, $\beta-1$이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-x-1=0$이다.

II

286 답 ⑤

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

따라서 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$, $x^2+\left(\boxed{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$

위 식에 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$를 대입하면

$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$

이때, 양변에 c를 곱하면 $cx^2+\boxed{b}x+\boxed{a}=0$이다.

따라서 (가): $-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$, (나): b, (다): a이다.

TIP

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($ac\neq0$)의 두 근이 α, β이면
이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 두 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이다.

287 답 ③

이차방정식 $x^2-kx+k+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$이다.
따라서 $\alpha\beta=k+1<0$이므로
$k<-1$

TIP

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을
가지면 판별식 $D>0$이고, 두 근의 곱이 음수이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 음수이면
$\frac{c}{a}<0$, 즉 $ac<0$이다.
이때, 판별식 $D=b^2-4ac$에서 $b^2\geq0$이고 $ac<0$에서
$-4ac>0$이므로 $D>0$을 만족시킨다.
따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두
실근을 가지기 위해서는 두 근의 곱이 음수인 것, 즉 $\frac{c}{a}<0$을
보이면 된다.

아끄하ㅓ이ㄴ내ㅅㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 55 22. 9. 14. 오후 8:19

288 ④

이차방정식 $x^2+(k^2-k-6)x-2k+3=0$의 두 실근을 α, β라 하면
두 실근의 절댓값은 같고 부호는 서로 다르므로
$\alpha\beta<0$, $\alpha+\beta=0$을 만족시켜야 한다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-(k^2-k-6)=0$ …… ㉠
$\alpha\beta=-2k+3<0$ …… ㉡
㉠에서 $(k+2)(k-3)=0$이므로
$k=-2$ 또는 $k=3$
㉡에서 $k>\frac{3}{2}$
$\therefore k=3$

TIP

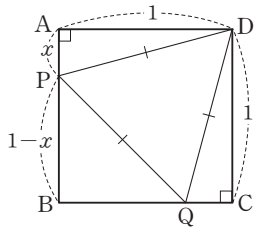
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 절댓값은 같고
부호가 서로 다르면 한 실근이 α일 때 다른 실근은 $-\alpha$이므로
두 근의 합은 0이고, 두 근의 곱은 음수이다.
따라서 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 절댓값은 같고 부호가 서로
다르면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$b=0$, $\frac{c}{a}<0$임을 보이면 된다.

289 ③

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로
이차방정식 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$
$c(x-2)^2+b(x-2)+a=0$에서 $t=x-2$라 하면 …… ㉠
$ct^2+bt+a=0$은 t에 대한 이차방정식이고,
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로
이차방정식 $ct^2+bt+a=0$의 두 근은 $t=\frac{1}{\alpha}$ 또는 $t=\frac{1}{\beta}$이다.
㉠에서 $x=t+2$이므로
이차방정식 $c(x-2)^2+b(x-2)+a=0$의 두 근은
$\frac{1}{\alpha}+2$, $\frac{1}{\beta}+2$이다.

290 $2-\sqrt{3}$

$\overline{AP}=x$ $(0<x<1)$라 하면 $\overline{BP}=1-x$



한편, 두 삼각형 PAD, QCD는
$\angle A=\angle C=90^\circ$, $\overline{PD}=\overline{QD}$, $\overline{AD}=\overline{CD}=1$
이므로 서로 합동이다.
따라서 $\overline{CQ}=\overline{AP}=x$이므로 $\overline{BQ}=1-x$
직각이등변삼각형 PBQ에서 $\overline{PQ}=\sqrt{2}(1-x)$
직각삼각형 PAD에서 $\overline{PD}=\sqrt{x^2+1}$
정삼각형 PQD에서 $\overline{PQ}=\overline{PD}$이므로
$\sqrt{2}(1-x)=\sqrt{x^2+1}$, $2(1-x)^2=x^2+1$
$x^2-4x+1=0$
$\therefore x=2-\sqrt{3}$ $(\because 0<x<1)$

291 ⑤

$z=\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$이므로
$z-1=-2i$에서 $(z-1)^3=(-2i)^3$
$z^3-3z^2+3z-1=8i$
$z^3-3z^2+4z+1=(z^3-3z^2+3z-1)+z+2$
$=8i+(1-2i)+2=3+6i$
$3+6i=a+bi$에서 $a=3$, $b=6$
$\therefore a+b=3+6=9$

다른 풀이

$z=\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$이므로
$(z-1)^2=(-2i)^2$에서 $z^2-2z+5=0$
$z^3-3z^2+4z+1=(z^2-2z+5)(z-1)-3z+6$
$=-3z+6$
$=3+6i$
$3+6i=a+bi$에서 $a=3$, $b=6$
$\therefore a+b=3+6=9$

292 4

$z=(1+2i)x^2-(7+16i)x+12+30i$
$=(x^2-7x+12)+(2x^2-16x+30)i$
$=(x-3)(x-4)+2(x-3)(x-5)i$
이므로 $z^2<0$이기 위해서는
(실수부분)$=(x-3)(x-4)=0$
(허수부분)$=2(x-3)(x-5)\neq0$
이어야 한다.
$\therefore x=4$

참고

$z^2>0$, 즉 z가 0이 아닌 실수이기 위해서는 $x=5$
$z^2=0$, 즉 $z=0$이기 위해서는 $x=3$
$z^2<0$, 즉 z가 순허수이기 위해서는 $x=4$이어야 한다.

293 18

조건 (가)에서 $(1-i+z)^2<0$이므로
$1-i+z$는 순허수이다.
즉, $1-i+a+bi=(a+1)+(b-1)i$가 순허수이므로

이끈해수능내신내공조재의시(상의)_해설서로.indb 56 22. 9. 14. 오후 8:19

$a=-1$, $b\neq1$
조건 (나)에서
$z^2=(a+bi)^2=(-1+bi)^2=1-b^2-2bi=c-8i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$1-b^2=c$, $-2b=-8$이므로 $b=4$, $c=-15$
$\therefore a+b-c=-1+4-(-15)=18$

294 ····· 답 ②

$\{a(1+i)+b(1-i)\}^2=-4<0$이므로
복소수 $a(1+i)+b(1-i)$는 순허수이다.
$a(1+i)+b(1-i)=(a+b)+(a-b)i$에서
$a+b=0$ ····· ㉠
이때, $\{(a-b)i\}^2=-4$이므로
$a-b=2$ 또는 $a-b=-2$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=-1$ 또는 $a=-1$, $b=1$이므로
$ab=(-1)\times1=-1$

다른 풀이

$a(1+i)+b(1-i)$가 -4의 제곱근이므로
$a(1+i)+b(1-i)$는 $2i$ 또는 $-2i$이다.
(i) $(a+b)+(a-b)i=2i$일 때
$a+b=0$이고 $a-b=2$이므로
$a=1$, $b=-1$
(ii) $(a+b)+(a-b)i=-2i$일 때
$a+b=0$이고 $a-b=-2$이므로
$a=-1$, $b=1$
(i), (ii)에 의하여 $ab=-1$이다.

295 ····· 답 ②

$2(k-2i)+k^2-35+ki=(k^2+2k-35)+(k-4)i$
이므로 이 복소수를 제곱해서 실수가 되려면
실수부분이 0이거나 허수부분이 0이 되어야 한다.
(i) (실수부분)=0인 경우
$k^2+2k-35=0$, $(k+7)(k-5)=0$에서
$k=-7$ 또는 $k=5$
(ii) (허수부분)=0인 경우
$k-4=0$에서 $k=4$
(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은
$-7+5+4=2$

296 ····· 답 ③

$z_1=1+i$
$z_2=iz_1=i(1+i)=i+i^2=i-1$
$z_3=iz_2=i(i-1)=i^2-i=-1-i$
$z_4=iz_3=i(-1-i)=-i-i^2=-i+1$
$z_5=iz_4=i(-i+1)=-i^2+i=1+i$
이므로 $z_n=z_{n+4}$이다.
$\therefore z_{1000}=z_{996}=z_{992}=\cdots=z_4=1-i$

다른 풀이

$z_2=iz_1$
$z_3=iz_2=i^2z_1$
$z_4=iz_3=i^3z_1$
$z_5=iz_4=i^4z_1=z_1$ ($\because i^4=1$)
그러므로 $z_{n+4}=z_n$이다.
이때, $1000=4\times250$이므로
$z_{1000}=z_4=i^3z_1=-i(1+i)=1-i$

297 ····· 답 ②

$z_1=2+i$
$z_2=\dfrac{1}{1-z_1}=\dfrac{1}{1-(2+i)}=\dfrac{-1+i}{2}$
$z_3=\dfrac{1}{1-z_2}=\dfrac{1}{1-\frac{-1+i}{2}}=\dfrac{3+i}{5}$
$z_4=\dfrac{1}{1-z_3}=\dfrac{1}{1-\frac{3+i}{5}}=2+i=z_1$
⋮
이므로 $z_n=z_{n+3}$이다.
이때, $50=3\times16+2$이므로
$z_{50}=z_2=\dfrac{i-1}{2}$

298 ····· 답 ③

자연수 n에 대하여 n번째 입력한 값을 z_n이라 하고,
처음 입력한 복소수를 $z_1=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.
$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i-1}{1-(-1)}=-i$
$z_2=-iz_1=-i(a+bi)=b-ai$
$z_3=-iz_2=-i(b-ai)=-a-bi$
$z_4=-iz_3=-i(-a-bi)=-b+ai$
$z_5=-iz_4=-i(-b+ai)=a+bi$
이므로 $z_n=z_{n+4}$이다.
이때, 22회 입력하여 출력된 결과는 z_{23}의 값과 같으므로
$z_{23}=z_{19}=z_{15}=\cdots=z_3=-a-bi$
즉, $-a-bi=2-i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=-2$, $b=1$이므로 입력한 복소수는 $-2+i$이다.

299 ····· 답 ③, ④

① $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$에서
$\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0$이므로
$\alpha=bi$이고 $\alpha^2=-b^2\leq0$ (거짓)
② (반례) $\alpha=1+i$, $\beta=2-i$ (거짓)

(048-074)해설2-1.indd 57 22. 9. 19. 오후 4:38

③ $\alpha\bar{\alpha}=1$이면 $\bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$이므로 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\alpha+\bar{\alpha}$는 실수이다. (참)

④ $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하면

$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i=0$에서

$ac-bd=0$ …… ㉠

$ad+bc=0$ …… ㉡

(i) $c\neq0$이면 ㉠에서 $a=\frac{bd}{c}$이고, 이를 ㉡에 대입하여 정리하면

$b(c^2+d^2)=0$, $c\neq0$이므로 $b=0$

$b=0$이면 ㉠에서 $a=0$이므로 $\alpha=0$이다.

(ii) $c=0$이면 ㉠, ㉡에서 $d=0$ 또는 $a=b=0$이므로

$\alpha=0$ 또는 $\beta=0$이다.

따라서 $\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$이다. (참)

⑤ (반례) $\alpha=1$, $\beta=i$ (거짓)

따라서 선지 중 옳은 것은 ③, ④이다.

300 ····· 답 ⑤

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $a>0$)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$z-\bar{z}=2bi=2i$에서 $b=1$이므로 $z=a+i$

$z^3-\bar{z}^3=(z-\bar{z})^3+3z\bar{z}(z-\bar{z})$

$=(2i)^3+3(a^2+1)\times2i$

$=-8i+6(a^2+1)i=\{-8+6(a^2+1)\}i$

$=22i$

이때, 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-8+6(a^2+1)=22$, $6(a^2+1)=30$, $a^2+1=5$

$a^2=4$ $\quad\therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 $z=2+i$이므로

$z^2-\bar{z}^2=(z+\bar{z})(z-\bar{z})=4\times2i=8i$

301 ····· 답 ⑤

$z=\frac{1+\sqrt{7}i}{2}$에서 $\bar{z}=\frac{1-\sqrt{7}i}{2}$이므로

$z+\bar{z}=1$, $z\bar{z}=2$

이때, $w=\frac{2z-1}{z+1}$이므로

$w\bar{w}=\frac{2z-1}{z+1}\times\frac{2\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=\frac{4z\bar{z}-2(z+\bar{z})+1}{z\bar{z}+(z+\bar{z})+1}$

$=\frac{4\times2-2\times1+1}{2+1+1}=\frac{7}{4}$

302 ····· 답 8

$z^2=4\sqrt{3}+4i$이므로 $\bar{z}^2=4\sqrt{3}-4i$이다.

$z^2\times\bar{z}^2=(4\sqrt{3}+4i)(4\sqrt{3}-4i)$

$=48+16=64$

$\therefore z\bar{z}=8$ ($\because z\bar{z}\geq0$) …… TIP

다른 풀이

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z^2=a^2-b^2+2abi=4\sqrt{3}+4i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=4\sqrt{3}$, $ab=2$

$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2$

$=(4\sqrt{3})^2+4\times2^2=64$

$\therefore z\bar{z}=a^2+b^2=8$ ($\because a$, b는 실수)

TIP

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에서 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\geq0$이다.

즉, 항상 $z\bar{z}\geq0$이 성립한다.

303 ····· 답 ②

$\bar{\alpha}\beta=4$에서 $\overline{\bar{\alpha}\beta}=\alpha\bar{\beta}=4$이므로

$\beta=\frac{4}{\bar{\alpha}}$, $\frac{4}{\bar{\beta}}=\alpha$

$\therefore \left(\beta+\frac{4}{\bar{\beta}}\right)^2=\left(\frac{4}{\bar{\alpha}}+\alpha\right)^2=(5i)^2=-25$

304 ····· 답 ④

$z+\frac{1}{z}$이 실수이므로 $z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}}$

$\overline{z+\frac{1}{z}}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}$이므로 $\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}=z+\frac{1}{z}$에서

$\bar{z}-z+\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}=0$

$\bar{z}-z-\frac{\bar{z}-z}{z\bar{z}}=(\bar{z}-z)\left(1-\frac{1}{z\bar{z}}\right)=0$

$\therefore z=\bar{z}$ 또는 $z\bar{z}=1$

이때, $z=\bar{z}$이면 z는 실수이므로

$z\bar{z}=1$

다른 풀이

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{1}{a+bi}$

$=a+bi+\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$

$=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}$

$=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$

이므로 $z+\frac{1}{z}$이 실수이기 위해서는 허수부분이 0이어야 한다.

즉, $b-\frac{b}{a^2+b^2}=0$에서 $b\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)=0$

$\therefore a^2+b^2=1$ ($\because b\neq0$)

$\therefore z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=1$

아끄하이노배스ㅣㄴㄱㅗ조재으스ㅣ(스ㅏ으)_하배스ㅓ르.indb 58 22. 9. 14. 오후 8:19

305 ····· 답 ①

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$$z\overline{z}+\frac{z}{\overline{z}}=(a+bi)(a-bi)+\frac{a+bi}{a-bi}$$
$$=(a^2+b^2)+\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$$
$$=\left(a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)+\frac{2ab}{a^2+b^2}i=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{2ab}{a^2+b^2}=0$에서 $a=0$ ($\because b\neq0$)

이를 ㉠에 대입하면

$b^2-1=5$이므로 $b^2=6$

$\therefore (z-\overline{z})^2=(2bi)^2=-4b^2=-24$

306 ····· 답 9

$z=(1+2i)x^2-2(1-i)x-3(1+4i)$
$=(x^2-2x-3)+(2x^2+2x-12)i$
$=(x+1)(x-3)+2(x+3)(x-2)i$

조건 (가)에서 $z\neq\overline{z}$이려면 z는 허수이어야 하므로 $a\neq-3$, $a\neq2$이다. ····· ㉠

조건 (나)에서 a는 실수이고, $z=a$, 즉 z가 실수이려면

$2(x+3)(x-2)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=2$이므로

$b=-3$ 또는 $b=2$이다.

이때, $b=2$이면 $a=-3$이므로 ㉠을 만족시키지 않고,

$b=-3$이면 $a=12$이므로 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

$\therefore a+b=12+(-3)=9$

307 ····· 답 ③

ㄱ. $z^4<0$이므로 z^2이 순허수이다.
$z^2=ki$ ($k\neq0$)라 하면
$\overline{z}^2=\overline{z^2}=-ki$이므로 $\overline{z}^2$은 순허수이다. (참)

ㄴ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여
$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=(a+b)(a-b)+2abi$가
순허수이므로 $(a+b)(a-b)=0$, $2ab\neq0$이다.
즉, 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여
$a=b$ 또는 $a=-b$이어야 한다.
그러므로 $z=a+ai$ 또는 $z=a-ai$이다.
이때, $z=a+ai$인 경우 z의 실수부분과 허수부분은 같지만,
$z=a-ai$인 경우 z의 실수부분과 허수부분은 같지 않다. (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $z=a\pm ai$ ($a\neq0$)라 하면 $\overline{z}=a\mp ai$ (복부호동순)이므로
$z+\overline{z}=4$에서 $2a=4$, $a=2$이다.
즉, $z=2\pm2i$, $\overline{z}=2\mp2i$ (복부호동순)이므로 $z\overline{z}=4+4=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

308 ····· 답 25

$$z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$
$$z^2=\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$$
$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$
$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

이므로 복소수 z의 거듭제곱은 z, z^2, …, z^8의 값이 반복된다.

따라서 $z^n=1$을 만족시키는 자연수 n은

$n=8k$ (k는 자연수) 꼴이므로 $1\leq n\leq200$을 만족시키는 자연수 n은 8×1, 8×2, …, 8×25로 모두 25개이다.

309 ····· 답 ②

$i-3i^2+5i^3-7i^4+\cdots-99i^{50}+101i^{51}$
$=\{i-3\times(-1)+5\times(-i)-7\}$
$+\{9i-11\times(-1)+13\times(-i)-15\}+\cdots+97i^{49}-99i^{50}+101i^{51}$
$=(-4i-4)\times12+97i+99-101i$
$=-48i-48-4i+99$
$=51-52i$

310 ····· 답 ①

$f(n)=ni^n-(n+1)i^{n+1}$에서
$f(1)=i-2i^2$
$f(2)=2i^2-3i^3$
$f(3)=3i^3-4i^4$
⋮
$f(16)=16i^{16}-17i^{17}$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(16)$
$=(i-2i^2)+(2i^2-3i^3)+(3i^3-4i^4)+\cdots+(16i^{16}-17i^{17})$
$=i-17i^{17}$
$=i-17i$
$=-16i$

311 ····· 답 ⑤

ㄱ. $f(2)=i^2+i^3+i^4=-1-i+1=-i$ (참)

ㄴ. $f(1)=i+i^2+i^3=i-1-i=-1$
$f(2)=i^2+i^3+i^4=-1-i+1=-i$
$f(3)=i^3+i^4+i^5=-i+1+i=1$
$f(4)=i^4+i^5+i^6=1+i-1=i$
$f(5)=i^5+i^6+i^7=i+i^2+i^3=f(1)$, …
이므로 $f(n+4)=f(n)$ (참)

ㄷ. $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-1-i+1+i=0$이므로
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(98)$
$=\{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\}+\cdots$
$+\{f(93)+f(94)+f(95)+f(96)\}+f(97)+f(98)$
$=f(97)+f(98)=f(1)+f(2)=-1-i$ (참)

아끄하이노래시니그고재으시(사으)_해서르.indb 59 22. 9. 14. 오후 8:19

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

참고

자연수 n에 대하여 $i^n+i^{n+2}=0$이므로
$f(n)=i^{n+1}$이다.
이를 이용하여 문제를 풀수도 있다.

312

답 13

8의 모든 양의 약수는 1, 2, 4, 8이므로
$f(8)=i^1+i^2+i^4+i^8=i-1+1+1=i+1$
2^m의 모든 양의 약수는 1, 2, 2^2, …, 2^m이므로
$f(2^m)=i^1+i^2+i^{2^2}+\cdots+i^{2^m}$
이때, 2^m의 모든 양의 약수의 개수는 $m+1$이고,
n이 2 이상의 자연수이면 $i^{2^n}=1$이므로
$f(2^m)=i-1+1+1+\cdots+1=i+m-2$
$f(2^m)-f(8)=10$에서
$(i+m-2)-(i+1)=10$
$\therefore m=13$

313

답 ④

두 실수 a, b $(b\neq0)$에 대하여
$z=a+bi$라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$z^2=\overline{z}$에서 $(a+bi)^2=a-bi$
$a^2-b^2+2abi=a-bi$
이때, 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2=a$ …… ㉠
$2ab=-b$ …… ㉡
㉡에서 $2ab+b=0$, $b(2a+1)=0$
$\therefore a=-\frac{1}{2}$ $(\because b\neq0)$

이를 ㉠에 대입하면 $b^2=\frac{3}{4}$
$\therefore z+\overline{z}=2a=-1$, $z\overline{z}=a^2+b^2=1$
한편, $z^2=\overline{z}$에서 $\overline{z}^2=z$이므로
$z^3=zz^2=z\overline{z}$, $z^4=zz^3=z^2\overline{z}=\overline{z}^2=z$
$z^5=zz^4=z^2=\overline{z}$, $z^6=zz^5=z\overline{z}$
$\therefore z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$
$=z\overline{z}+\overline{z}+z+z\overline{z}+\overline{z}+z+1$
$=2(z+\overline{z})+2z\overline{z}+1$
$=2\times(-1)+2\times1+1$
$=1$

314

답 144

$(1+i)^2=2i$
$(1+i)^4=(2i)^2=-4$
$(1+i)^8=(-4)^2=16=2^4$
$(1+i)^{8k}=2^{4k}$ (k는 자연수)
따라서 $m=8k$, $n=4k$이므로 $m=2n$ …… ㉠
$m\leq100$, $n\leq100$이므로 m이 최댓값을 가질 때,
$m+n$이 최댓값을 갖는다.
100보다 작은 8의 배수 중 최댓값은 $8\times12=96$이므로
m의 최댓값은 96이고, 그때의 n의 값은 48이다. ($\because$ ㉠)
따라서 $m+n$의 최댓값은 $96+48=144$이다.

315

답 75

$\frac{1}{i}=-i$, $\frac{1}{i^2}=-1$, $\frac{1}{i^3}=i$, $\frac{1}{i^4}=1$이므로
$\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$
$=(-i+1+i-1)+(-i+1+i-1)+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$
$=1-i$
에서 $n=4k+2$ (k는 음이 아닌 정수) 꼴이므로
$1\leq n\leq300$에서 $1\leq4k+2\leq300$
$\therefore -\frac{1}{4}\leq k\leq\frac{149}{2}=74.5$
위 부등식을 만족시키는 음이 아닌 정수 k의 개수가 75이므로
구하는 자연수 n의 개수는 75이다.

316

답 24

$z^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\frac{2}{-2i}=i$
$z^4=i^2=-1$
$z^8=(-1)^2=1$이고,
$w^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
$w^3=w\times w^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{1+3}{4}=1$
이때, 등식 $z^n=w^n$이 성립하려면
n은 3과 8의 공배수, 즉 24의 배수이어야 한다.
따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 24이다.

317

답 ③

$a>0$, $b<0$이므로
$\frac{\sqrt{25a^2}}{\sqrt{-a^2}}+2\sqrt{ab}\sqrt{ab}+\sqrt{(a+1)^2}\sqrt{-(a+1)^2}$
$=-\sqrt{\frac{25a^2}{-a^2}}+2\sqrt{(ab)^2}+(a+1)\times(a+1)i$
$=-5i-2ab+(a^2+2a+1)i$
$=-2ab+(a^2+2a-4)i$
즉, $-2ab+(a^2+2a-4)i=24+4i$이므로
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$-2ab=24$에서 $ab=-12$ …… ㉠
$a^2+2a-4=4$에서 $a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$
$\therefore a=2$ $(\because a>0)$, $b=-6$ $(\because$ ㉠)
$\therefore a+b=2+(-6)=-4$

아끄하ㅕㅇㄴ내ㅅㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 60 22. 9. 14. 오후 8:19

318 ····· 답 ②

$\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$에서 $x<0$, $y<0$이고,

$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}=-\sqrt{\frac{z}{y}}$에서 $z>0$이다.

따라서 $x+y<0$, $z-y>0$, $x-z<0$이므로

$|x+y|+\sqrt{(z-y)^2}-|x-z|$

$=-(x+y)+(z-y)-\{-(x-z)\}$

$=-2y$

319 ····· 답 ④

$\sqrt{x}\sqrt{x+4}=-\sqrt{x^2+4x}$가 성립하려면

$x<0$, $x+4<0$을 동시에 만족시키거나

$x=0$ 또는 $x=-4$이므로 $x=0$, $x\le -4$ ····· ㉠

$\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-5}}=-\sqrt{\frac{x+6}{x-5}}$이 성립하려면

$x+6>0$, $x-5<0$을 동시에 만족시키거나 $x=-6$이므로

$-6\le x<5$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $x=0$, $-6\le x\le -4$

이므로 이를 만족시키는 정수 x는 -6, -5, -4, 0으로 4개이다.

320 ····· 답 ③

$\sqrt{\frac{ab}{c}}=-\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}$에서 $c<0$, $ab>0$이고,

$\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{bc}$에서 $c<0$이므로 $b>0$이다.

$\therefore a>0$, $b>0$, $c<0$

ㄱ. $a>0$, $b>0$이므로 $|a+b|=a+b=|a|+|b|$ (참)

ㄴ. $a>0$, $b>0$, $c<0$이므로

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{bc}}=-\sqrt{\frac{a}{bc}}$ (참)

ㄷ. $a>0$, $b>0$, $c<0$이므로

$\sqrt{-a}\sqrt{-b}\sqrt{-c}=-\sqrt{(-a)\times(-b)}\sqrt{-c}$

$=-\sqrt{-abc}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

321 ····· 답 7

두 실수 x, y의 합이 음수이고 곱이 양수이므로

$x<0$, $y<0$이다.

$\therefore \sqrt{\frac{x}{3y}}+\sqrt{\frac{3y}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3y}}+\frac{\sqrt{3y}}{\sqrt{x}}$

$=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{3y}\sqrt{3y}}{\sqrt{3y}\sqrt{x}}$

$=\frac{x+3y}{-\sqrt{3xy}}=\frac{-21}{-3}=7$

다른 풀이

$x+3y=-21$ ····· ㉠

$xy=3$ ····· ㉡

이므로 $x<0$, $y<0$

㉠에서 $x=-21-3y$이므로 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+7y+1=0$

양변을 y로 나누면 $y+\frac{1}{y}=-7$ ····· ㉢

한편, ㉡에서 $x=\frac{3}{y}$이므로

$\sqrt{\frac{x}{3y}}+\sqrt{\frac{3y}{x}}=\sqrt{\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2}$

$=-\frac{1}{y}-y$ ($\because y<0$)

$=-\left(y+\frac{1}{y}\right)=7$ ($\because$ ㉢)

322 ····· 답 ④

이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2-4k+b=0$의 판별식을 D라 하면

중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2-4k+b)$

$=2k(2-a)+a^2-b=0$

위 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2-a=0$에서 $a=2$

$a^2-b=0$에서 $4-b=0$이므로 $b=4$

$\therefore ab=2\times 4=8$

323 ····· 답 ②

$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2+ac}}{a}$로 잘못 구한 한 근이 $1+i$이므로

나머지 한 근은 $1-i$이다.

$\frac{b+\sqrt{b^2+ac}}{a}+\frac{b-\sqrt{b^2+ac}}{a}=(1+i)+(1-i)$에서

$\frac{2b}{a}=2$ $\therefore b=a$

$\frac{b+\sqrt{b^2+ac}}{a}\times\frac{b-\sqrt{b^2+ac}}{a}=(1+i)\times(1-i)$에서

$\frac{b^2-(b^2+ac)}{a^2}=2$ $\therefore c=-2a$

$\therefore ax^2+bx+c=ax^2+ax-2a$

$=a(x^2+x-2)$

$=a(x+2)(x-1)=0$

따라서 바르게 구한 두 근은 $\alpha=1$, $\beta=-2$ ($\because \alpha>\beta$)이므로

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-2}{1}=-2$

324 ····· 답 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$

이차방정식 $x^2-2px+q=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이

중근을 가지므로

아쿠하이스내스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 61 22. 9. 14. 오후 8:19

$\frac{D}{4}=p^2-q=0$, $q=p^2$ ····· ㉠

이를 위의 이차방정식에 대입하면

$x^2-2px+p^2=(x-p)^2=0$에서 $\alpha=p$이다.

이차방정식 $3x^2-2px+q-5p+3=0$이 $\alpha=p$를 근으로 가지므로

이를 대입하면

$3p^2-2p\times p+p^2-5p+3=0$ ($\because$ ㉠)

$2p^2-5p+3=(2p-3)(p-1)=0$에서 $p=\frac{3}{2}$ 또는 $p=1$

이때, $p=1$이면 ㉠에서 $p=q=1$이므로 p, q가 서로 다른 실수라는 조건에 모순이다. 즉, $p=\frac{3}{2}$, $q=\frac{9}{4}$이다.

이를 방정식 $3x^2-2px+q-5p+3=0$에 대입하면

$3x^2-2\times\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-5\times\frac{3}{2}+3=0$

$3x^2-3x-\frac{9}{4}=0$, $4x^2-4x-3=0$

$(2x+1)(2x-3)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$

325 ····· 답 ③

x에 대한 방정식 $(1-n)x^2+2\sqrt{2}x-1=0$에 대하여

(i) $n=1$인 경우

주어진 방정식은 $2\sqrt{2}x-1=0$이므로 $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$이다.

$\therefore f(1)=1$

(ii) $n\neq1$인 경우

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{2})^2-(-1)\times(1-n)=3-n$이므로

$f(0)=f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=0$

(i), (ii)에 의하여

$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$

$=2+1+2+1+0=6$

326 ····· 답 ④

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 할 때, 두 허근을 가지므로

$D=a^2-4b<0$

$\therefore b>\frac{a^2}{4}$ ····· ㉠

ㄱ. 방정식 $x^2+2bx-a^2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=b^2+a^2>\frac{a^4}{16}+a^2$ ($\because$ ㉠)

$\therefore D_1>0$

즉, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $x^2+ax+3b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-12b<a^2-3a^2$ ($\because$ ㉠)

$=-2a^2\leq0$

즉, 중근 또는 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $x^2+2(a^2-4b)x-4b=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$\frac{D_3}{4}=(a^2-4b)^2+4b>0$ ($\because$ $(a^2-4b)^2>0$이고 $b>0$)

즉, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

327 ····· 답 4

$|x^2-(2a+1)x+3a+1|=2$의 한 근이 a가 되려면

$|a^2-(2a+1)a+3a+1|=2$

$|a^2-2a-1|=2$에서

$a^2-2a-1=2$ 또는 $a^2-2a-1=-2$

$a^2-2a-3=0$ 또는 $a^2-2a+1=0$

$(a+1)(a-3)=0$ 또는 $(a-1)^2=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 모든 양수 a의 값의 합은

$3+1=4$

328 ····· 답 $-\sqrt{5}$, 3

방정식 $x^2+2|x|-7=2\sqrt{(x+1)^2}$에서

$x^2+2|x|-7=2|x+1|$

(i) $x<-1$일 때

$x^2-2x-7=-2(x+1)$에서 $x^2=5$

$\therefore x=-\sqrt{5}$ ($\because$ $x<-1$)

(ii) $-1\leq x<0$일 때

$x^2-2x-7=2(x+1)$에서 $x^2-4x-9=0$

이때, 이차방정식의 근의 공식에 의하여 $x=2\pm\sqrt{13}$이므로

$-1\leq x<0$을 만족시키는 값은 존재하지 않는다.

(iii) $x\geq0$일 때

$x^2+2x-7=2(x+1)$에서 $x^2=9$ $\therefore x=3$ ($\because$ $x\geq0$)

(i)~(iii)에 의하여 구하는 모든 근은 $-\sqrt{5}$, 3이다.

329 ····· 답 ②

이차방정식 $x^2+px+q=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$ ····· ㉠

이 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지므로 $p^2-4q<0$이고,

α, β는 $\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$이고

이때 실수부분은 $-\frac{p}{2}$, 허수부분은 $\pm\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$이다.

실수부분 $-\frac{p}{2}$가 정수가 되도록 하는 소수 p의 값은 2뿐이므로

$p=2$이다.

허수부분에 이를 대입하면 $\pm\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}=\pm\frac{\sqrt{4q-4}}{2}=\pm\sqrt{q-1}$

허수부분도 정수가 되려면 제곱근 안의 수가 제곱수가 되어야 하므로

아끄하ㅓㅇㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(사ㅏㅇ)_해새ㅓㄹ.indb 62 22. 9. 14. 오후 8:19

$q-1=k^2$ (k는 자연수), $q=k^2+1$
이를 만족시키는 50 이하의 소수 q의 값은
$k=1$일 때 $q=2$, $k=2$일 때 $q=5$,
$k=4$일 때 $q=17$, $k=6$일 때 $q=37$
따라서 $p+q$의 최솟값은 $p=2$, $q=2$일 때 4이고,
최댓값은 $p=2$, $q=37$일 때 39이므로 구하는 합은
$4+39=43$

330 ····· 답 7

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$
$\begin{cases} f(\alpha)=2\beta=4-2\alpha \\ f(\beta)=2\alpha=4-2\beta \end{cases}$에서
$f(\alpha)+2\alpha-4=0$, $f(\beta)+2\beta-4=0$이다.
즉, 방정식 $f(x)+2x-4=0$의 두 근이 α, β이고
$f(x)$의 이차항의 계수는 1이므로
$f(x)+2x-4=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-2x-1$
$\therefore f(x)=(x^2-2x-1)-2x+4$
$=x^2-4x+3$
따라서 $a=-4$, $b=3$이므로
$b-a=3-(-4)=7$

331 ····· 답 $a\geq\frac{4}{3}$

이차방정식 $ax^2-5ax+a+4=0$ ($a>0$)의 판별식을 D라 하면
이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$D=25a^2-4a(a+4)>0$에서
$21a^2-16a>0$, $a\left(a-\frac{16}{21}\right)>0$
$\therefore a>\frac{16}{21}$ ($\because a>0$) ····· ㉠
주어진 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=\frac{5a}{a}=5$, $\alpha\beta=\frac{a+4}{a}=1+\frac{4}{a}$
이때, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이고 두 실근의 차가 3 이상이어야 하므로
$(\alpha-\beta)^2=5^2-4\times\left(1+\frac{4}{a}\right)\geq 9$
$12-\frac{16}{a}\geq 0$, $\frac{1}{a}\leq\frac{3}{4}$ $\therefore a\geq\frac{4}{3}$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 양의 실수 a의 값의 범위는 $a\geq\frac{4}{3}$이다.

332 ····· 답 ④

이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-5<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
이때, 두 근이 α, β이므로 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이다.
한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=5$이므로
$\alpha^2\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta^2=\alpha^3+\beta^3$
$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=4^3-3\times5\times4$
$=4$

참고
이차방정식의 한 근 α가 허수가 아닌 실수이면 $\overline{\alpha}=\alpha$이므로
이차방정식의 두 근을 α, $\overline{\alpha}$라 할 수 없다.
따라서 판별식을 통해 방정식의 근이 허수인지를 파악할 필요가 있다.

333 ····· 답 ④

이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근은 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-p$ ····· ㉠
$\alpha\beta=q$ ····· ㉡
이차방정식 $x^2+qx+r=0$의 두 근은 3α, 3β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$3(\alpha+\beta)=-q$ ····· ㉢
$9\alpha\beta=r$ ····· ㉣
㉠을 ㉢에 대입하면 $-3p=-q$에서 $p=\frac{q}{3}$
㉡을 ㉣에 대입하면 $9q=r$
$\therefore \frac{p}{r}=\frac{\frac{q}{3}}{9q}=\frac{1}{27}$

334 ····· 답 13

$z=p+qi$ (p, q는 실수)라 하자.
$(2i+z)^2>0$에서 $2i+z$는 실수이어야 한다.
따라서 $q=-2$이므로 $z=p-2i$이다.
한편, z는 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 허근이므로
그 켤레복소수인 $\overline{z}=p+2i$를 나머지 한 근으로 갖는다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$z+\overline{z}=-6$에서 $2p=-6$ $\therefore p=-3$
따라서 $z=-3-2i$, $\overline{z}=-3+2i$이므로
$a=z\overline{z}=(-3-2i)(-3+2i)=9+4=13$

335 ····· 답 ④

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-3<0$이므로 α는 허근이다.
따라서 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근은
α, $\overline{\alpha}$ ($\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수)이므로 $\alpha+\overline{\alpha}=2$, $\alpha\overline{\alpha}=3$이다.

오퓨쳐오너시스템구조재오시스템(사이)_해설서로.indb 63 22. 9. 14. 오후 8:19

$$\therefore\ z+\bar{z}=\frac{\alpha}{2\alpha-1}+\frac{\bar{\alpha}}{2\bar{\alpha}-1}$$
$$=\frac{\alpha(2\bar{\alpha}-1)+\bar{\alpha}(2\alpha-1)}{(2\alpha-1)(2\bar{\alpha}-1)}$$
$$=\frac{4\alpha\bar{\alpha}-(\alpha+\bar{\alpha})}{4\alpha\bar{\alpha}-2(\alpha+\bar{\alpha})+1}$$
$$=\frac{12-2}{12-4+1}=\frac{10}{9}$$

336 ····· 답 ②

이차방정식 $x^2+3kx+6k=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-3k,\ \alpha\beta=6k$ ····· ㉠
k가 양의 실수이므로 $\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$
$\therefore\ \alpha<0,\ \beta<0$
이때, $|\alpha|-|\beta|=3$에서 $-\alpha+\beta=3$이므로 $\beta=\alpha+3$이고,
β는 음수이므로 $\beta=\alpha+3<0$에서
$\alpha<-3$ ····· ㉡
㉠에서
$\alpha+\beta=\alpha+(\alpha+3)=-3k$
즉, $k=\frac{-2\alpha-3}{3}$이고 $\alpha\beta=\alpha(\alpha+3)=6k$이므로
$\alpha(\alpha+3)=2(-2\alpha-3),\ \alpha^2+7\alpha+6=0$
$(\alpha+6)(\alpha+1)=0$에서 $\alpha=-6$ ($\because$ ㉡)이므로
$\beta=-3,\ k=3$
$\therefore\ k-\alpha-2\beta=3-(-6)-2\times(-3)=15$

다른 풀이

이차방정식 $x^2+3kx+6k=0$에서
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-3k,\ \alpha\beta=6k$ ····· ㉢
이고, k가 양의 실수이므로
$\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$ $\therefore\ \alpha<0,\ \beta<0$
이때, $|\alpha|-|\beta|=3$에서 $\beta-\alpha=3$ ····· ㉣
$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$이므로 ㉢, ㉣에서
$(-3k)^2=3^2+4\times6k,\ 9k^2-24k-9=0$
$(3k+1)(k-3)=0$ $\therefore\ k=3$ ($\because\ k>0$)
이를 방정식에 대입하면
$x^2+9x+18=0,\ (x+3)(x+6)=0$
에서 $x=-3$ 또는 $x=-6$
즉, $\alpha=-6,\ \beta=-3$이다.
$\therefore\ k-\alpha-2\beta=3-(-6)-2\times(-3)=15$

337 ····· 답 ①

이차방정식의 계수가 모두 실수이므로
한 근이 $\frac{3}{1-\sqrt{3}i}=\frac{3(1+\sqrt{3}i)}{4}$이면
다른 한 근은 켤레복소수인 $\frac{3(1-\sqrt{3}i)}{4}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은
$\frac{3(1+\sqrt{3}i)}{4}+\frac{3(1-\sqrt{3}i)}{4}=-a,\ a=-\frac{3}{2}$ ····· ㉠
두 근의 곱은
$\frac{3(1+\sqrt{3}i)}{4}\times\frac{3(1-\sqrt{3}i)}{4}=b,\ b=\frac{9}{4}$ ····· ㉡
$\frac{3}{a+b}=\frac{3}{-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}}=4,\ \frac{5}{a-b}=\frac{5}{-\frac{3}{2}-\frac{9}{4}}=-\frac{4}{3}$이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\frac{3}{a+b},\ \frac{5}{a-b}$를 두 근으로 하는 이차방정식은
$(\text{두 근의 합})=\frac{3}{a+b}+\frac{5}{a-b}=4+\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3},$
$(\text{두 근의 곱})=\frac{3}{a+b}\times\frac{5}{a-b}=4\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{16}{3}$
즉, $x^2-\frac{8}{3}x-\frac{16}{3}=0$에서 $3x^2-8x-16=0$이므로
$p=-8,\ q=-16$
$\therefore\ p+q=-8+(-16)=-24$

338 ····· 답 $-1+\sqrt{2}$

이차방정식 $x^2-(2+\sqrt{2})x+\sqrt{2}k-3=0$의 정수인 근을 m,
다른 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $m+\alpha=2+\sqrt{2}$에서 $\alpha=2+\sqrt{2}-m$ ····· ㉠
두 근의 곱은 $m\alpha=\sqrt{2}k-3$ ····· ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$m(2+\sqrt{2}-m)=\sqrt{2}k-3$
$\sqrt{2}m+(-m^2+2m)=\sqrt{2}k-3$
m은 정수, k는 자연수이므로 $m=k$이고,
$-m^2+2m=-3$에서 $m^2-2m-3=0$
$(m+1)(m-3)=0$
$\therefore\ m=-1$ 또는 $m=3$
이때 $m=k$이고 k가 자연수이므로 $m=3$
이를 ㉠에 대입하면 구하는 다른 한 근은
$2+\sqrt{2}-3$, 즉 $-1+\sqrt{2}$이다.

339 ····· 답 ⑤

$|x^2-2x-k|=3$에서 ····· ㉠
$x^2-2x-k=3$ 또는 $x^2-2x-k=-3$
$x^2-2x-k-3=0$ 또는 $x^2-2x-k+3=0$
각각의 판별식을 D_1, D_2라 하면 ㉠이 네 실근을 갖기 위해서
$D_1\geq0,\ D_2\geq0$이어야 한다.
$\frac{D_1}{4}=1+k+3\geq0$에서 $k\geq-4$
$\frac{D_2}{4}=1+k-3\geq0$에서 $k\geq2$
$\therefore\ k\geq2$ ····· ㉡
㉠의 네 실근의 곱이 16이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(-k-3)(-k+3)=16$
$k^2-9=16$ $\therefore\ k=5$ 또는 $k=-5$
$\therefore\ k=5$ ($\because$ ㉡)

이끄하이스내시니그고재이시(사이)_해설2.indb 64 22. 9. 14. 오후 8:19

참고

$k=-5$일 때에도 방정식 $|x^2-2x-k|=3$의 네 근의 곱은 16이지만 모두 허근이다.

340 ····· 답 ①

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\frac{1-\sqrt{2}i}{3}$, $\frac{1+\sqrt{2}i}{3}$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$에서 $b=-\frac{2}{3}a$

(두 근의 곱)$=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$에서 $c=\frac{1}{3}a$

따라서 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{c}=2$, $\alpha\beta=\frac{a}{c}=3$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=2^2-4\times3=-8$

다른 풀이

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\frac{1-\sqrt{2}i}{3}$, $\frac{1+\sqrt{2}i}{3}$이므로

이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 두 근 α, β는

$\frac{3}{1-\sqrt{2}i}=1+\sqrt{2}i$, $\frac{3}{1+\sqrt{2}i}=1-\sqrt{2}i$이다.

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(2\sqrt{2}i)^2=-8$

341 ····· 답 ④

이차항의 계수를 0이 아닌 다른 실수로 잘못 보고 풀어서 $2+i$를 근으로 구했으므로 이때 구한 다른 한 근은 켤레복소수인 $2-i$이다.

이차항의 계수를 실수 p $(p\neq0)$로 잘못 보았다고 할 때,

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{p}=(2+i)+(2-i)=4$에서 $p=-\frac{b}{4}$,

$\frac{c}{p}=(2+i)(2-i)=5$에서 $p=\frac{c}{5}$이므로

$-\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$에서 $c=-\frac{5}{4}b$ ····· ㉠

상수항을 잘못 보고 풀어서 $1+3i$를 근으로 구했으므로 이때 구한 다른 한 근은 켤레복소수인 $1-3i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=(1+3i)+(1-3i)=2$에서 $a=-\frac{b}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은

$-\frac{b}{2}x^2+bx-\frac{5}{4}b=0$, 즉 $2x^2-4x+5=0$이다.

이 이차방정식의 서로 다른 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{5}{2}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times\frac{5}{2}=-1$

342 ····· 답 5

두 실수 a, b $(b\neq0)$에 대하여 $\alpha=a+bi$라 하면 $\beta=a-bi$이다.

$2\alpha+\beta^2=1$에서 $2(a+bi)+(a-bi)^2=1$

$(a^2+2a-b^2)+2b(1-a)i=1$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+2a-b^2=1$, $2b(1-a)=0$이어야 한다.

$2b(1-a)=0$에서 $a=1$ $(\because b\neq0)$이므로

$a^2+2a-b^2=1$에서 $b^2=2$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p=-(\alpha+\beta)=-2a=-2$

$q=\alpha\beta=a^2+b^2=1+2=3$

$\therefore q-p=3-(-2)=5$

참고

$b^2=2$에서 $b=-\sqrt{2}$ 또는 $b=\sqrt{2}$이므로

$\alpha=1+\sqrt{2}i$, $\beta=1-\sqrt{2}i$ 또는 $\alpha=1-\sqrt{2}i$, $\beta=1+\sqrt{2}i$이다.

343 ····· 답 풀이 참조

(1) 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$이다.

(2) $\frac{\beta^2}{1+\alpha}+\frac{\alpha^2}{1+\beta}=\frac{\beta^2(1+\beta)+\alpha^2(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$=\frac{\alpha^3+\beta^3+\alpha^2+\beta^2}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\frac{2^3-3\times(-1)\times2+2^2-2\times(-1)}{1+2+(-1)}$

$=10$

$\frac{\beta^2}{1+\alpha}\times\frac{\alpha^2}{1+\beta}=\frac{\alpha^2\beta^2}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$=\frac{(\alpha\beta)^2}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\frac{(-1)^2}{1+2+(-1)}$

$=\frac{1}{2}$

(3) $\frac{\beta^2}{1+\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{1+\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 합은 10,

두 근의 곱은 $\frac{1}{2}$이고, x^2의 계수가 2이므로

$2\left(x^2-10x+\frac{1}{2}\right)=0$에서 $2x^2-20x+1=0$이다.

아크하이스내시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해ㅐㅅㅓㄹ.indb 65 22. 9. 14. 오후 8:19

채점 요소	배점
$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	20%
$\frac{\beta^2}{1+\alpha}+\frac{\alpha^2}{1+\beta}$, $\frac{\beta^2}{1+\alpha}\times\frac{\alpha^2}{1+\beta}$의 값 구하기	40%
$\frac{\beta^2}{1+\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{1+\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식 구하기	40%

344 ····· 답 ⑤

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로
0이 아닌 실수 a에 대하여
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ····· ㉠
라 하자.
$f(2x-1)+4=a(2x-1-\alpha)(2x-1-\beta)+4$
$=a\{4x^2-2(\alpha+\beta+2)x+(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)\}+4$
$=a(4x^2-8x+8)+4$
$=4ax^2-8ax+8a+4$
이므로 이차방정식 $f(2x-1)+4=0$의 두 근의 곱은
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\frac{8a+4}{4a}=1$ $\therefore a=-1$
㉠에서
$f(x)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$
$=-(x^2-2x+5)$
$\therefore f(2)=-(4-4+5)=-5$

345 ····· 답 16

이차항의 계수가 1이므로 조건 (가)에 의하여
$f(x)=x^2+kx+8$ (k는 상수)
방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=3^2-2\times1=7$
조건 (나)에서
$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^2+k\alpha+8)+(\beta^2+k\beta+8)$
$=(\alpha^2+\beta^2)+k(\alpha+\beta)+16$
$=7+3k+16$
$=3k+23=2$
이므로 $k=-7$이고, $f(x)=x^2-7x+8$
$\therefore f(8)=64-56+8=16$

346 ····· 답 ④

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\alpha}{3}\right)-3=0$, $f\left(\frac{\beta}{3}\right)-3=0$이므로
이차방정식 $f\left(\frac{x}{3}\right)-3=0$의 두 근이 α, β이다.
따라서 $f(x)$의 이차항의 계수를 a ($a\neq0$)라 하면
$f\left(\frac{x}{3}\right)-3=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x^2+2x-1)$
$f\left(\frac{x}{3}\right)=a(x^2+2x-1)+3$
이때, 조건 (나)에서 $f(0)=1$이므로
$f(0)=a\times(-1)+3=1$에서 $a=2$
$\therefore f(1)=f\left(\frac{3}{3}\right)=2(3^2+2\times3-1)+3=31$

347 ····· 답 ③

두 실수 a, b ($b\neq0$)에 대하여
$\alpha=a+bi$라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$이고, 이차방정식
$x^2+4x+k=0$ ····· ㉠
의 두 근은 α, $\overline{\alpha}$이다.
ㄱ. ㉠의 판별식을 D라 하면 ㉠은 허근을 가지므로
$\frac{D}{4}=2^2-k<0$
$\therefore k>4$ (참)
ㄴ. ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a=-4$
즉, $a=-2$이므로 α의 실수부분은 -2이다. (거짓)
ㄷ. ㄱ에서 $\alpha\overline{\alpha}=k>4$이고,
ㄴ에서 $\alpha+\overline{\alpha}=-4$이므로
$(1+\alpha)(1+\overline{\alpha})=(\alpha+\overline{\alpha})+\alpha\overline{\alpha}+1>-4+4+1=1$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

348 ····· 답 ⑤

$x^2+px+1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-p$ ····· ㉠
$\alpha\beta=1$ ····· ㉡
ㄱ. $\alpha\beta=1>0$이므로 α, β의 부호는 서로 같다.
(i) $\alpha>0$, $\beta>0$인 경우
$|\alpha+\beta|=\alpha+\beta$, $|\alpha|+|\beta|=\alpha+\beta$이므로
$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$이다.
(ii) $\alpha<0$, $\beta<0$인 경우
$|\alpha+\beta|=-(\alpha+\beta)$,
$|\alpha|+|\beta|=(-\alpha)+(-\beta)$이므로
$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$이다.
$\therefore |\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ (참)
ㄴ. ㉡에서 $\beta=\frac{1}{\alpha}$이므로
$0<\alpha<1$이면 $\frac{1}{\alpha}>1$, 즉 $\beta>1$이다. (참)
ㄷ. 이차방정식 $x^2+px+1=0$은 두 실근을 가지므로
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=p^2-4\geq0$ ····· ㉢
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=p^2-2$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$=(p^2-4)+2\geq2$ ($\because$ ㉢)

아까하이노래시니그고재이시(사이)_해설서로.indb 66 22. 9. 14. 오후 8:19

즉, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 2이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

349 ····· 답 ③

α, β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이고,
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=7$이므로 $x^2-2x+7=0$ ····· ㉠
이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-7=-6<0$
이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 허근 α, β를 갖는다.
이때, 두 허근은 서로 켤레복소수 관계이므로
$\alpha=\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}=\beta$ ····· ㉡
ㄱ. ㉡에 의하여 $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}$ (참)
ㄴ. ㉡에 의하여
$\alpha+\overline{\beta}=\alpha+\alpha=2\alpha$, $\overline{\alpha}+\beta=\beta+\beta=2\beta$이다.
이때, $\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\overline{\beta}\neq\overline{\alpha}+\beta$ (거짓)
ㄷ. 이차방정식 ㉠의 한 근이 α이므로
$\alpha^2-2\alpha+7=0$에서 $\alpha^2=2\alpha-7=2\overline{\beta}-7$ ($\because$ ㉡) (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

350 ····· 답 ①

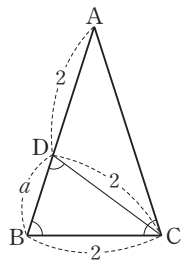
복소수 z에 대하여 $z+\overline{z}=-1$, $z\overline{z}=1$이므로 ····· ㉠
z, $\overline{z}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.
양변에 $x-1$을 곱하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3=1$이므로
$z^3=\overline{z}^3=1$이다. ····· ㉡
$\therefore \frac{\overline{z}}{z^5}-\frac{2\overline{z}^2}{z^4}+\frac{3\overline{z}^3}{z^3}-\frac{4\overline{z}^4}{z^2}+\frac{5\overline{z}^5}{z}$
$=\frac{\overline{z}}{z^2}-\frac{2\overline{z}^2}{z}+\frac{3}{1}-\frac{4\overline{z}}{z^2}+\frac{5\overline{z}^2}{z}$ ($\because$ ㉡)
$=\frac{3\overline{z}^2}{z}-\frac{3\overline{z}}{z^2}+3=\frac{3z^2\overline{z}^2}{z^3}-\frac{3z\overline{z}}{z^3}+3$
$=3$ ($\because$ ㉠, ㉡)

다른 풀이

복소수 z에 대하여 $z+\overline{z}=-1$, $z\overline{z}=1$이므로
z, $\overline{z}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.
양변에 $x-1$을 곱하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3=1$이므로
$z^3=\overline{z}^3=1$이다. ····· ㉢
$\frac{\overline{z}}{z^5}-\frac{2\overline{z}^2}{z^4}+\frac{3\overline{z}^3}{z^3}-\frac{4\overline{z}^4}{z^2}+\frac{5\overline{z}^5}{z}$
$=\frac{\overline{z}}{z^2}-\frac{2\overline{z}^2}{z}+\frac{3}{1}-\frac{4\overline{z}}{z^2}+\frac{5\overline{z}^2}{z}$ ($\because$ ㉢)
$=\frac{3\overline{z}^2}{z}-\frac{3\overline{z}}{z^2}+3$
이때 $z\overline{z}=1$에서 $\frac{1}{z}=\overline{z}$이므로
$\frac{3\overline{z}^2}{z}-\frac{3\overline{z}}{z^2}+3=3\overline{z}^2\times\overline{z}-3\overline{z}\times\overline{z}^2+3=3$

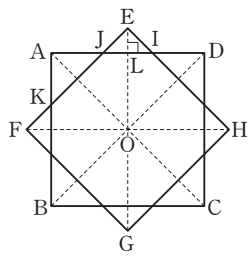
351 ····· 답 ②

조건 (가)에 의하여 삼각형 ABC는
$\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 $\angle ABC=\angle ACB$
조건 (나)에 의하여 삼각형 CBD는
$\overline{BC}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로 $\angle CBD=\angle CDB$
따라서 두 삼각형 ABC와 CBD는 서로 닮음이다.



$\overline{BD}=a$ ($a>0$)라 하면
조건 (나)에 의하여 $\overline{AB}=a+2$이므로
$(a+2):2=2:a$, $a(a+2)=4$, $a^2+2a-4=0$
$\therefore a=-1+\sqrt{5}$ ($\because a>0$)
$m=-(\overline{AB}+\overline{BC})=-a-4=-3-\sqrt{5}$
$n=\overline{AB}\times\overline{BC}=2(a+2)=2+2\sqrt{5}$
$\therefore m+n=(-3-\sqrt{5})+(2+2\sqrt{5})=-1+\sqrt{5}$

352 ····· 답 50



꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 하고
$\overline{JL}=x$라 하자.
삼각형 EJI는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{EL}=x$이고,
삼각형 EJI의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2x\times x=x^2$이다.
$\overline{AJ}=1-x$이므로 삼각형 AKJ의 넓이는 $\frac{(1-x)^2}{2}$이다.
삼각형 AKJ의 넓이가 삼각형 EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$배이므로
$\frac{(1-x)^2}{2}=\frac{3}{2}x^2$, $2x^2+2x-1=0$이고, 이차방정식의 근의 공식에
의하여 $x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ($\because x>0$)이다.
$\overline{OE}=\sqrt{2}k$이고,
$\overline{OE}=\overline{OL}+\overline{EL}=1+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
이므로 $\sqrt{2}k=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$이다.
$k=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$에서 $p=q=\frac{1}{4}$이므로
$100(p+q)=50$

아끄ㅎㅋㅇㄴㅐㅅㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 67 22. 9. 14. 오후 8:19

353 ····· 답 102

$z=\dfrac{3+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-3i}=\dfrac{(3+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+3i)}{(\sqrt{2}-3i)(\sqrt{2}+3i)}=i$이므로

$z-2z^2+3z^3-4z^4+\cdots+(-1)^{n+1}nz^n$

$=(i+2-3i-4)+(5i+6-7i-8)+\cdots+(-1)^{n+1}ni^n$

$=(-2-2i)+(-2-2i)+\cdots+(-1)^{n+1}ni^n$

$=52+51i$

에서

$52+51i=25(-2-2i)+(101i+102)$

$\therefore n=102$

354 ····· 답 ⑤

$z=a+bi$, $w=c+di$ (a, b, c, d는 실수이고, $abcd\neq0$)라 하자.

$z-w=(a-c)+(b-d)i$가 실수이므로 $b=d$

$zw=ac-b^2+(ab+bc)i$가 실수이므로 $b(a+c)=0$

따라서 $c=-a$이므로 $w=-a+bi$

ㄱ. $z+w=(a+bi)+(-a+bi)=2bi$ (참)

ㄴ. $zw=(a+bi)(-a+bi)=-a^2-b^2<0$ (참)

ㄷ. $z\overline{z}-w\overline{w}=(a+bi)(a-bi)-(-a+bi)(-a-bi)$

$=(a+bi)(a-bi)-(a-bi)(a+bi)$

$=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

355 ····· 답 ②

$a_n+b_ni=\dfrac{1-ni}{1+ni}=\dfrac{(1-ni)^2}{(1+ni)(1-ni)}=\dfrac{1-n^2-2ni}{1+n^2}$

$=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}-\dfrac{2n}{1+n^2}i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a_n=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}$, $b_n=-\dfrac{2n}{1+n^2}$

$(a_n)^2+(b_n)^2=\left(\dfrac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2+\left(-\dfrac{2n}{1+n^2}\right)^2$

$=\dfrac{(1-2n^2+n^4)+4n^2}{(1+n^2)^2}$

$=\dfrac{(1+n^2)^2}{(1+n^2)^2}=1$

$\therefore \{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2+\cdots+(a_{50})^2\}$

$+\{(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2+\cdots+(b_{50})^2\}$

$=\{(a_1)^2+(b_1)^2\}+\{(a_2)^2+(b_2)^2\}+\{(a_3)^2+(b_3)^2\}$

$+\cdots+\{(a_{50})^2+(b_{50})^2\}$

$=1+1+1+\cdots+1=50$

참고

임의의 두 실수 x, y ($x^2+y^2\neq0$)에 대하여

$\dfrac{x-yi}{x+yi}=\dfrac{(x-yi)^2}{(x+yi)(x-yi)}$

$=\dfrac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2}$

$=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}i$

이므로 실수부분은 $a=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, 허수부분은 $b=-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

이때,

$a^2+b^2=\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2+\left(-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2$

$=\dfrac{(x^4-2x^2y^2+y^4)+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$=\dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=1$

이 성립한다.

356 ····· 답 3

$(-1)^2=1$, $i^2=-1$, $(1+i)^2=2i$이므로

a_1, a_2, a_3, …, a_{30} 중에서 -1의 개수를 a, i의 개수를 b, $1+i$의 개수를 c라 하면

$a+b+c=30$ ····· ㉠

$(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2+\cdots+(a_{30})^2$

$=1\times a+(-1)\times b+2i\times c=7+10i$

이므로 $a-b=7$, $c=5$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=16$, $b=9$, $c=5$

따라서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}=(-1)\times16+i\times9+(1+i)\times5$

$=-11+14i$

이므로 구하는 답은 $-11+14=3$이다.

357 ····· 답 ④

$(z-2)^2=2-2i$이므로 $\overline{(z-2)^2}=(\overline{z}-2)^2=2+2i$이고,

$(z-2)^2(\overline{z}-2)^2=\{(z-2)(\overline{z}-2)\}^2$

$=\{z\overline{z}-2(z+\overline{z})+4\}^2$

이므로

$\{z\overline{z}-2(z+\overline{z})+4\}^2=(2-2i)(2+2i)=8$ ····· ㉠

이때, $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z\overline{z}-2(z+\overline{z})+4=(a+bi)(a-bi)-2(a+bi+a-bi)+4$

$=a^2+b^2-4a+4$

$=(a-2)^2+b^2\geq0$ ($\because$ $(a-2)^2\geq0$, $b^2\geq0$) ····· ㉡

㉠에서 $\{z\overline{z}-2(z+\overline{z})+4\}^2=8$이므로

$z\overline{z}-2(z+\overline{z})+4=2\sqrt{2}$ ($\because$ ㉡)

$\therefore z\overline{z}-2z-2\overline{z}=z\overline{z}-2(z+\overline{z})=2\sqrt{2}-4$

아끄하이노새시니그소재으시(사이)_하새서르.indb 68 22. 9. 14. 오후 8:19

358 ⑤

ㄱ. $\frac{z^2}{1-z}$이 실수이므로 그 켤레복소수인

$\overline{\left(\frac{z^2}{1-z}\right)}=\frac{\overline{z}^2}{1-\overline{z}}$은 실수이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\frac{z^2}{1-z}=\frac{\overline{z}^2}{1-\overline{z}}$이므로

$z^2(1-\overline{z})=\overline{z}^2(1-z)$, $z^2-\overline{z}^2-z^2\overline{z}+z\overline{z}^2=0$

$(z+\overline{z})(z-\overline{z})-z\overline{z}(z-\overline{z})=0$

$(z-\overline{z})(z+\overline{z}-z\overline{z})=0$이므로 $z=\overline{z}$ 또는 $z+\overline{z}=z\overline{z}$

한편, z는 실수가 아니므로 $z+\overline{z}=z\overline{z}$ (참)

ㄷ. 두 실수 a, b $(b\neq0)$에 대하여

$z=a+bi$라 하면 $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2>0$이고,

ㄴ에서 $z+\overline{z}=z\overline{z}$이므로

복소수 z의 실수부분은 양수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

359 ②

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 할 때, $z^4<0$을 만족시키려면

$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$가 순허수가 되어야 하므로

z^2의 실수부분은 $a^2-b^2=0$이고, 허수부분은 $2ab\neq0$이어야 한다.

즉, $a+b=0$ 또는 $a-b=0$이고, ……(i)

$a\neq0$, $b\neq0$이어야 한다. ……(ii)

주어진 복소수 z는

$(2+i)x^2+(3i-2)x-12+2i$

$=(2x^2-2x-12)+(x^2+3x+2)i$

$=2(x+2)(x-3)+(x+2)(x+1)i$

(i) $a+b=0$ 또는 $a-b=0$

$a+b=2(x+2)(x-3)+(x+2)(x+1)$

$=(x+2)(3x-5)=0$

이므로 $x=-2$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

$a-b=2(x+2)(x-3)-(x+2)(x+1)$

$=(x+2)(x-7)=0$

이므로 $x=-2$ 또는 $x=7$

따라서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=7$

(ii) $a=2x^2-2x-12=2(x+2)(x-3)\neq0$과

$b=x^2+3x+2=(x+2)(x+1)\neq0$에서

$x\neq-2$, $x\neq-1$, $x\neq3$

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 실수 x의 값은

$\frac{5}{3}$ 또는 7이므로 모든 실수 x의 값의 합은

$\frac{5}{3}+7=\frac{26}{3}$

360 ④

이차방정식 $x^2-ax+2p=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=2p$ ……㉠

조건 (나)에서 두 근이 서로 다른 자연수이고, 조건 (가)에서 p가 소수이므로 두 근의 곱이 $2p$이려면 두 근은 2, p 또는 1, $2p$이다.

(i) 두 근이 2, p인 경우

㉠에서 두 근의 합은 $2+p=a$이고, 조건 (가)에서 a가 9의 배수인 두 자리 자연수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, p)는 (45, 43), (63, 61), (81, 79), (99, 97)로 4개이다.

(ii) 두 근이 1, $2p$인 경우

㉠에서 두 근의 합은 $1+2p=a$이고, 조건 (가)에서 a가 9의 배수인 두 자리 자연수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, p)는 (27, 13), (63, 31)로 2개이다.

(i), (ii)에 의하여 순서쌍 (a, p)의 개수는 $4+2=6$이다.

361 ②

$z=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$에서 $z^2=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2=i$

$w=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$에서 $w^2=\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2=-i$

$zw=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\times\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=-1$

이므로

$zw^2=zw\times w=-w$

$z^2w=z\times zw=-z$

$z^2w^2=1$

$zw^3=zw\times w^2=(-1)\times(-i)=i$

따라서 $m=1$, $n=3$일 때, $m+n$은 최솟값 $1+3=4$를 갖는다.

참고

❶ $z=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$에서

$z^2=i$, $z^4=-1$, $z^6=-i$, $z^8=1$

❷ $w=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$에서

$w^2=-i$, $w^4=-1$, $w^6=i$, $w^8=1$

362 4

조건 (가)에서 $f(n)=(1-i)^{2n}+2^ni$라 하면

$f(n)=(1-i)^{2n}+2^ni=\{(1-i)^2\}^n+2^ni$

$=(-2i)^n+2^ni$

$=(-2)^ni^n+2^ni$

이고, 음이 아닌 정수 k에 대하여

$n=4k+1$일 때, $f(n)=-2^{4k+1}i+2^{4k+1}i=0$

$n=4k+2$일 때, $f(n)=-2^{4k+2}+2^{4k+2}i$

$n=4k+3$일 때, $f(n)=2^{4k+3}i+2^{4k+3}i=2^{4k+4}i$

$n=4k+4$일 때, $f(n)=2^{4k+4}+2^{4k+4}i$

$\{(1-i)^{2n}+2^ni\}^2<0$을 만족시키려면 $f(n)$이 순허수가 되어야 하므로 $n=4k+3$이면서 동시에 조건 (나)에 의하여 n은 3의 배수이다.

그러므로 조건 (가)를 만족시키는 40 이하의 자연수는 3, 7, 11, …, 39이고, 이 중 3의 배수는 3, 15, 27, 39로 4개이다.

(048-074)해설2-1.indd 69 22. 9. 19. 오후 2:30

363 ④

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i-1}{2}=i$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{1+2i-1}=-i$이므로

$z_n=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}-\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n-\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^n$

$=i^n-(-i)^n$

$\therefore z_{4k-3}=2i$, $z_{4k-2}=0$, $z_{4k-1}=-2i$, $z_{4k}=0$ (k는 자연수)

ㄱ. 서로 다른 z_n의 값은 $2i$, 0, $-2i$로 모두 3개이다. (거짓)

ㄴ. $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k-3}=2i$

$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k-2}=2i$

$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k-1}=0$

$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k}=0$

즉, $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n$으로 가능한 서로 다른 값은 $2i$, 0이고 그 총합은 $2i$이다. (참)

ㄷ. $z_l\times z_m<0$을 만족시키기 위해선

$2i\times 2i$ 또는 $(-2i)\times(-2i)$이어야 한다.

(i) $2i\times 2i$인 경우

l과 m이 모두 $4k-3$ 꼴이어야 하므로

가능한 10보다 작은 자연수는 1, 5, 9이다.

따라서 순서쌍 (l, m)은

(1, 1), (1, 5), (5, 1), (5, 5), (1, 9), (9, 1), (9, 9), (5, 9), (9, 5)의 9개이다.

(ii) $(-2i)\times(-2i)$인 경우

l과 m이 모두 $4k-1$ 꼴이어야 하므로

가능한 10보다 작은 자연수는 3, 7이다.

따라서 순서쌍 (l, m)은

(3, 3), (3, 7), (7, 3), (7, 7)의 4개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (l, m)의 개수는 13이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

364 ①

조건 (가)에서 $\frac{\sqrt{n-3}}{\sqrt{4-m}}=-\sqrt{\frac{n-3}{4-m}}$이므로

$4-m<0$, $n-3\geq 0$에서 $m>4$, $n>3$이거나 $m\neq 4$, $n=3$이다.

조건 (나)에서 $\sqrt{m-8}\sqrt{n-6}=\sqrt{(m-8)(n-6)}$이므로

$m-8\geq 0$, $n-6\geq 0$에서 $m\geq 8$, $n\geq 6$이거나

$m-8\geq 0$, $n-6<0$에서 $m\geq 8$, $n<6$이거나

$m-8<0$, $n-6\geq 0$에서 $m<8$, $n\geq 6$이다.

그러므로 조건 (가)와 조건 (나)를 모두 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는 다음과 같다.

(i) $m>4$, $n\geq 3$이고, $m\geq 8$, $n\geq 6$일 때

$m\geq 8$에서 m의 값은 3개이고, $n\geq 6$에서 n의 값은 5개이다.

즉, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3\times 5=15$

(ii) $m>4$, $n\geq 3$이고, $m\geq 8$, $n<6$일 때

$m\geq 8$이므로 m의 값은 3개이고, $3\leq n<6$이므로 n의 값은 3개이다.

즉, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3\times 3=9$

(iii) $m>4$, $n\geq 3$이고, $m<8$, $n\geq 6$일 때

$4<m<8$이므로 m의 값은 3개이고, $n\geq 6$이므로 n의 값은 5개이다.

즉, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $3\times 5=15$

(i)~(iii)에 의하여 순서쌍 (m, n)의 개수는

$15+9+15=39$

365 ②

주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(k-y)x-2y^2-3y+2$이다.

이때, x에 대한 이차방정식 $x^2+(k-y)x-2y^2-3y+2=0$의 근은

$x=\frac{-(k-y)\pm\sqrt{(k-y)^2+4(2y^2+3y-2)}}{2}$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k-y)^2+4(2y^2+3y-2)$이므로

$x^2+(k-y)x-2y^2-3y+2$

$=\left\{x-\frac{-(k-y)+\sqrt{D}}{2}\right\}\left\{x-\frac{-(k-y)-\sqrt{D}}{2}\right\}$

이때, x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되기 위해선

근호 안의 식 D가 완전제곱식이 되어야 하므로

$D=(k-y)^2+4(2y^2+3y-2)$

$=9y^2+(12-2k)y+k^2-8$

에서 y에 대한 이차방정식 $9y^2+(12-2k)y+k^2-8=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $D_1=0$을 만족시켜야 한다.

$\frac{D_1}{4}=(6-k)^2-9(k^2-8)=0$

$8k^2+12k-108=0$, $2k^2+3k-27=0$

$(2k+9)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$)

366 ④

$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i$

이므로

$z^n-z^{2n}+z^{3n}-z^{4n}+\cdots-z^{50n}$

$=i^n-(i^2)^n+(i^3)^n-(i^4)^n+\cdots-(i^{50})^n$

$=i^n-(-1)^n+(-i)^n-1^n+\cdots-(-1)^n$

음이 아닌 정수 k에 대하여

$n=4k+1$일 때

$i^{4k+1}-(-1)^{4k+1}+(-i)^{4k+1}-1^{4k+1}+\cdots-(-1)^{4k+1}$

$=(i+1-i-1)+(i+1-i-1)+\cdots+i+1=i+1$

$n=4k+2$일 때

$i^{4k+2}-(-1)^{4k+2}+(-i)^{4k+2}-1^{4k+2}+\cdots-(-1)^{4k+2}$

$=(-1-1-1-1)+(-1-1-1-1)+\cdots-1-1=-50$

$n=4k+3$일 때

$i^{4k+3}-(-1)^{4k+3}+(-i)^{4k+3}-1^{4k+3}+\cdots-(-1)^{4k+3}$

$=(-i+1+i-1)+(-i+1+i-1)+\cdots-i+1=-i+1$

$n=4k+4$일 때

$i^{4k+4}-(-1)^{4k+4}+(-i)^{4k+4}-1^{4k+4}+\cdots-(-1)^{4k+4}$

$=(1-1+1-1)+(1-1+1-1)+\cdots+1-1=0$

아끄하ㅓㅇㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ새ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ새ㅅㅓㄹ.indb 70 22. 9. 14. 오후 8:19

그러므로 $z^n-z^{2n}+z^{3n}-z^{4n}+\cdots-z^{50n}$의 값이 실수가 되려면
$n=4k+2$ 또는 $n=4k+4$이어야 한다.
$70=4\times17+2$이므로 $n=4k+2$를 만족시키는 n은 18개이고,
$n=4k+4$를 만족시키는 n은 17개이다.
따라서 구하는 자연수 n의 개수는 $18+17=35$

367 ····· 답 풀이 참조

이차방정식 $x^2-ax+a=0$이 허근 z를 가지므로
판별식을 D라 하면
$D=a^2-4a<0$에서 $0<a<4$ ····· ㉠
$z^2-az+a=0$에서 $z^2=az-a$이므로
$z^3=z^2\times z=az^2-az=a(az-a)-az$
$=(a^2-a)z-a^2$
a는 실수이고 z는 허수이므로 복소수 z^3이 실수이기 위해선
$a^2-a=0$이어야 한다.
$a(a-1)=0$ $\therefore a=1$ ($\because$ ㉠) ····· 참고

다른 풀이

이차방정식 $x^2-ax+a=0$이 허근 z를 가지므로
판별식을 D라 하면
$D=a^2-4a<0$에서 $0<a<4$ ····· ㉠
두 실수 p, q ($q\neq0$)에 대하여 $z=p+qi$라 하면
$\overline{z}=p-qi$도 이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 근이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$z+\overline{z}=a$에서 $2p=a$, $p=\frac{a}{2}$ ····· ㉡
$z\overline{z}=a$에서 $p^2+q^2=a$ ····· ㉢
$z^3=(p+qi)^3=p^3+3p^2qi-3pq^2-q^3i$
$=(p^3-3pq^2)+q(3p^2-q^2)i$
이므로 z^3이 실수가 되기 위해선
$q(3p^2-q^2)=0$, 즉 $3p^2-q^2=0$ ($\because q\neq0$)이어야 한다.
㉢을 대입하면 $3p^2-(a-p^2)=0$, $4p^2-a=0$
㉡을 대입하면 $4\times\left(\frac{a}{2}\right)^2-a=0$, $a^2-a=0$
$a(a-1)=0$ $\therefore a=1$ ($\because$ ㉠)

참고

$a=0$이면 주어진 방정식 $x^2-ax+a=0$은 $x^2=0$이므로
허근이 아닌 실근 0을 갖는다.

채점 요소	배점
z^3이 실수가 되기 위하여 $a^2-a=0$이어야 함을 구하기	70%
조건을 만족시키는 실수 a의 값 구하기	30%

368 ····· 답 ①

이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면
두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$이고,
양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 크므로
$\alpha+\beta>0$을 만족시켜야 한다.
$2(k-1)^2x^2+3(k-3)x-2k+1=0$이 x에 대한 이차방정식이므로
$2(k-1)^2\neq0$, 즉 $k\neq1$
한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=\frac{-3(k-3)}{2(k-1)^2}>0$ ····· ㉠
$\alpha\beta=\frac{-2k+1}{2(k-1)^2}<0$ ····· ㉡
이때, $2(k-1)^2>0$이므로
㉠에서 $-3(k-3)>0$ $\therefore k<3$
㉡에서 $-2k+1<0$ $\therefore k>\frac{1}{2}$
따라서 $\frac{1}{2}<k<3$, $k\neq1$이므로
조건을 만족시키는 정수 k는 2의 1개이다.

369 ····· 답 ②

$g(n)=i-i^2+i^3-\cdots+(-1)^{n+1}i^n$이라 하면
$g(n)=(i+1-i-1)+(i+1-i-1)+\cdots+(-1)^{n+1}i^n$
이므로 음이 아닌 정수 m에 대하여
$n=4m+1$일 때, $g(n)=i$
$n=4m+2$일 때, $g(n)=i+1$
$n=4m+3$일 때, $g(n)=1$
$n=4m+4$일 때, $g(n)=0$
$h(n)=\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$이라 하면
$h(n)=(-i+1+i-1)+(-i+1+i-1)+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$
이므로
$n=4m+1$일 때, $h(n)=-i$
$n=4m+2$일 때, $h(n)=-i+1$
$n=4m+3$일 때, $h(n)=1$
$n=4m+4$일 때, $h(n)=0$
그러므로
$n=4m+1$일 때, $f(n)=i\times(-i)=1$
$n=4m+2$일 때, $f(n)=(i+1)\times(-i+1)=2$
$n=4m+3$일 때, $f(n)=1\times1=1$
$n=4m+4$일 때, $f(n)=0\times0=0$
즉, $f(k)+f(k+1)=1$이 되려면 $k=4m+3$ 또는
$k=4m+4$이어야 한다.
30 이하의 자연수 중에서 $k=4m+3$을 만족시키는 k는 3, 7, 11, …, 27로 7개이고, $k=4m+4$를 만족시키는 k는 4, 8, 12, …, 28로 7개이므로 구하는 자연수 k의 개수는
$7+7=14$

370 ····· 답 32

다항식 $P_n(x)$를 x^2+x+1로 나눌 때 몫을 $A_n(x)$라 하면 다항식 $P_n(x)$가 x^2+x+1로 나누어떨어지므로
$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)-32$
$=(x^2+x+1)A_n(x)$ ····· ㉠

오쁘허오느새시느그소재오시(사오)_허새서로.indb 71 22. 9. 14. 오후 8:19

이때 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근을 w라 하면
$w^2+w+1=0$이고, ····· ㉡
양변에 $x-1$을 곱하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3=1$에서
$w^3=1$이다. ····· ㉢
㉠의 양변에 $x=w$를 대입하면
$(1+w)(1+w^2)(1+w^3)\cdots(1+w^{n-1})(1+w^n)-32=0$ ($\because$ ㉡)
즉, $(1+w)(1+w^2)(1+w^3)\cdots(1+w^{n-1})(1+w^n)=32$이므로
$Q(n)=(1+w)(1+w^2)(1+w^3)\cdots(1+w^{n-1})(1+w^n)$이라 하면
$Q(n)=32$가 되어야 한다.
음이 아닌 정수 k에 대하여
$n=3k+1$일 때, $1+w^n=1+w=-w^2$ ($\because$ ㉡)
$n=3k+2$일 때, $1+w^n=-w$ ($\because$ ㉡)
$n=3k+3$일 때, $1+w^n=2$ ($\because$ ㉢)
이므로
$Q(3k+1)=\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\cdots\times(-w^2)$
$=2^k\times(-w^2)$
$Q(3k+2)=\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\cdots\times(-w^2)\times(-w)$
$=2^k$
$Q(3k+3)=\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\{(-w^2)\times(-w)\times2\}\times\cdots\times\{(-w^2)\times(-w)\times2\}$
$=2^{k+1}$
이때, $32=2^5$이므로 $Q(n)=32$를 만족시키는 n은 15 또는 17이다.
따라서 구하는 자연수 n의 값의 합은 $15+17=32$이다.

371

답 ③

이차방정식 $x^2+x+1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$
$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면
$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$에서 $x^3=1$
즉, $\alpha^3=\beta^3=1$이다. ····· ㉠
$\beta f(\alpha^5)=3\beta+1$에서 $\beta f(\alpha^2)=3\beta+1$ ($\because$ ㉠)
양변을 β로 나누면 $f(\alpha^2)=3+\frac{1}{\beta}$에서 $f(\alpha^2)=3+\alpha$ ($\because$ $\alpha\beta=1$)
$\alpha f(\beta^5)=3\alpha+1$에서 $\alpha f(\beta^2)=3\alpha+1$ ($\because$ ㉠)
양변을 α로 나누면 $f(\beta^2)=3+\frac{1}{\alpha}$에서 $f(\beta^2)=3+\beta$ ($\because$ $\alpha\beta=1$)
이때, α, β는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$에서 $\alpha^2=-\alpha-1$, $\beta^2=-\beta-1$이다.
그러므로
$f(\alpha^2)=3+\alpha$에서 $f(-\alpha-1)=3+\alpha$, $f(\beta)=2-\beta$
$f(\beta^2)=3+\beta$에서 $f(-\beta-1)=3+\beta$, $f(\alpha)=2-\alpha$
즉, 이차방정식 $f(x)+x-2=0$의 두 근이 α, β이고,
$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)+x-2=x^2+x+1$
$f(x)=x^2+3$
$\therefore a+b=0+3=3$

372

답 16

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4<0$이므로
서로 다른 두 허근 z, $\overline{z}$ ($\overline{z}$는 z의 켤레복소수)를 갖는다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$z+\overline{z}=1$ ····· ㉠
$z\overline{z}=1$ ····· ㉡
$\therefore z^n(1-z)^{2n+1}=z^n\times\overline{z}^{2n+1}$ ($\because$ ㉠)
$=(z\overline{z})^n\times\overline{z}^{n+1}=\overline{z}^{n+1}$ ($\because$ ㉡) ····· ㉢
이때, $\overline{z}$는 방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로
$\overline{z}^2-\overline{z}+1=0$에서 $(\overline{z}+1)(\overline{z}^2-\overline{z}+1)=0$
$\therefore \overline{z}^3=-1$, $\overline{z}^6=1$
그러므로 $z^n(1-z)^{2n+1}$의 값이 양의 실수이기 위해서는
㉢에서 $n+1=6k$ (k는 자연수), 즉 $n=6k-1$ 꼴이어야 한다.
주어진 조건에 의하여 $n\le100$이므로
이를 만족시키는 k는 1, 2, 3, …, 16이다.
따라서 구하는 자연수 n의 개수는 16이다.

373

답 13

이차방정식 $x^2+\sqrt{2}x+1=0$의 두 근은 근의 공식에 의하여
$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}=\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$이므로 $\alpha=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\beta=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$라 하자.
$\alpha^2=\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$, $\alpha^3=(-i)\times\frac{-1+i}{\sqrt{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$,
$\alpha^4=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\times\frac{-1+i}{\sqrt{2}}=-1$이므로
$\alpha^5=\alpha\times\alpha^4=-\alpha=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $\alpha^6=\alpha^2\times\alpha^4=-\alpha^2=i$,
$\alpha^7=\alpha^3\times\alpha^4=-\alpha^3=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $\alpha^8=\alpha^4\times\alpha^4=1$
$\beta^2=\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$, $\beta^3=i\times\frac{-1-i}{\sqrt{2}}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$,
$\beta^4=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\times\frac{-1-i}{\sqrt{2}}=-1$이므로
$\beta^5=\beta\times\beta^4=-\beta=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\beta^6=\beta^2\times\beta^4=-\beta^2=-i$,
$\beta^7=\beta^3\times\beta^4=-\beta^3=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\beta^8=\beta^4\times\beta^4=1$
이므로 $\alpha^n=\alpha^{n+8}$, $\beta^n=\beta^{n+8}$이다.
음이 아닌 정수 k에 대하여
$n=8k+1$일 때, $\alpha^n+\beta^n=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}+\frac{-1-i}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$
$n=8k+2$일 때, $\alpha^n+\beta^n=(-i)+i=0$
$n=8k+3$일 때, $\alpha^n+\beta^n=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
$n=8k+4$일 때, $\alpha^n+\beta^n=(-1)+(-1)=-2$
$n=8k+5$일 때, $\alpha^n+\beta^n=\frac{1-i}{\sqrt{2}}+\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
$n=8k+6$일 때, $\alpha^n+\beta^n=i+(-i)=0$

아쿠하이스쿨시스템고등개념시리즈(상하)_해설정답.indb 72 22. 9. 14. 오후 8:19

$n=8k+7$일 때, $\alpha^n+\beta^n=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}+\frac{-1+i}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

$n=8k+8$일 때, $\alpha^n+\beta^n=1+1=2$

즉, $\alpha^n+\beta^n=0$을 만족시키는 경우는 $n=8k+2$ 또는 $n=8k+6$일 때이다.

따라서 50 이하의 자연수 중에 $n=8k+2$인 것은 2, 10, 18, …, 50으로 7개이고 $n=8k+6$인 것은 6, 14, 22, …, 46으로 6개이므로 구하는 자연수 n의 개수는 $7+6=13$

다른 풀이

$x^2+\sqrt{2}x+1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\sqrt{2}$, $\alpha\beta=1$

이차방정식 $x^2+\sqrt{2}x+1=0$의 계수가 모두 실수이고, 서로 다른 두 허근을 가지므로 $\beta=\overline{\alpha}$ ($\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수)

즉, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=0$, $\alpha^2=-\overline{\alpha}^2$

$\alpha\beta=1$에서 $\alpha^2\beta^2=1$, $\alpha^4=-1$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\sqrt{2}$

$\alpha^4+\beta^4=-2$

이므로 음이 아닌 정수 k에 대하여 $\alpha^n+\beta^n=0$을 만족시키려면 $n=4k+2$이다.

따라서 50 이하의 자연수 중에서 $n=4k+2$를 만족하는 n의 개수는 2, 6, 10, …, 50의 13이다.

374

답 ②

이차방정식 $x^2-(n+1)x+2n+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(n+1)^2-4(2n+1)=n^2-6n-3=(n-3)^2-12$

이므로 D의 부호는 다음과 같다.

n	…, −2, −1	0, 1, …, 6	7, 8, …
D	양수	음수	양수

ㄱ. $|\alpha|=|\beta|$에서

(i) $\alpha=\beta$인 경우

$D=(n-3)^2-12=0$을 만족시키는 정수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $\alpha=-\beta$인 경우

$\alpha+\beta=n+1=0$에서 $n=-1$이다.

(i), (ii)에서 $n=-1$이다. (참)

ㄴ. $(\alpha-\beta)^2<0$을 만족시키기 위해선 $\alpha-\beta$가 순허수이어야 하므로

$D=(n-3)^2-12<0$이어야 한다. …… TIP

이를 만족시키는 정수 n은 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로

모든 n의 값의 합은 $0+1+2+3+4+5+6=21$이다. (참)

ㄷ. $\alpha+\beta<|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$를 만족시키는 α, β는 부호가 다르고 음수의 절댓값이 양수의 절댓값보다 크다.

$\alpha+\beta=n+1<0$, $\alpha\beta=2n+1<0$에서 $n<-1$이므로

정수 n에 대하여 $|n|$의 최솟값은 2이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

TIP

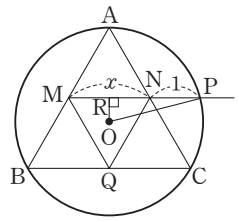
이차방정식의 두 근 α, β가 허근이면 α와 β는 서로 켤레복소수이므로 $\alpha-\beta$는 순허수이다.

375

답 4

정삼각형의 외접원의 중심을 O, 두 선분 BC, MN의 중점을 각각 Q, R라 하자.

다음과 같이 삼각형 MQN은 정삼각형 AMN과 합동이므로 세 점 A, O, Q는 한 직선 위에 있고 삼각형 BQO는 직각삼각형이다.



삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2x$인 정삼각형이고,

점 O는 정삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로

$\overline{AQ}=\sqrt{3}x$, $\overline{OQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

직각삼각형 BQO에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OB}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2+x^2=\frac{4}{3}x^2$, $\overline{OB}=\overline{OA}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

이때, $\overline{NR}=\frac{x}{2}$이고,

$\overline{OR}=\overline{OA}-\overline{AR}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x$

직각삼각형 OPR에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OP}^2=\overline{OR}^2+\overline{PR}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$

이때, $\overline{OP}^2=\overline{OB}^2$이므로 $\overline{OB}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$

$\frac{4}{3}x^2=\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{4}x^2+x+1$, $x^2-x-1=0$

양변을 x로 나누면

$x-1-\frac{1}{x}=0$, $x-\frac{1}{x}=1$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=1^3+3\times1=4$

376

답 150

$\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m=\left\{i^n+\left(\frac{1}{i^2}\right)^n\right\}^m=\{i^n+(-1)^n\}^m$

그러므로 음이 아닌 정수 a에 대하여

$n=4a+1$일 때, $i^n+(-1)^n=i-1$

$n=4a+2$일 때, $i^n+(-1)^n=0$

$n=4a+3$일 때, $i^n+(-1)^n=-i-1$

$n=4a+4$일 때, $i^n+(-1)^n=2$

$\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m$이 음의 실수가 되려면

$i^n+(-1)^n=i-1$ 또는 $i^n+(-1)^n=-i-1$인 경우만 가능하다.

(i) $i^n+(-1)^n=i-1$인 경우

$n=4a+1$일 때이므로 50 이하의 자연수 n은

1, 5, 9, …, 49로 13개이다.

$m=2$일 때, $(i-1)^2=-1-2i+1=-2i$

아뿌하이노베이션_노그노조재으스ㅣ(사으)_하베스터르.indb 73 22. 9. 14. 오후 8:19

$m=3$일 때, $(i-1)^3=-2i(i-1)=2+2i$
$m=4$일 때, $(i-1)^4=(-2i)^2=-4$
이므로 $(i-1)^m$이 음의 실수가 되는 경우는 음이 아닌 정수 b에 대하여 $m=8b+4$일 때이다.
그러므로 50 이하의 자연수 m의 개수는 4, 12, 20, …, 44로 6개이고, 순서쌍 (m, n)의 개수는 $6\times13=78$이다.

(ii) $i^n+(-1)^n=-i-1$인 경우
$n=4a+3$일 때이므로 50 이하의 자연수 n은 3, 7, 11, …, 47로 12개이다.
$m=2$일 때, $(-i-1)^2=-1+2i+1=2i$
$m=3$일 때, $(-i-1)^3=2i\times(-i-1)=2-2i$
$m=4$일 때, $(-i-1)^4=(2i)^2=-4$
이므로 $(-i-1)^m$이 음의 실수가 되는 경우는 음이 아닌 정수 b에 대하여 $m=8b+4$일 때이다.
그러므로 50 이하의 자연수 m의 개수는 4, 12, 20, …, 44로 6개이고 순서쌍 (m, n)의 개수는 $6\times12=72$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $78+72=150$이다.

377 ④

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$
$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ …… ㉠
이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$
$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq0$

ㄱ. 임의의 세 양수 a, b, c에 대하여 $D\geq0$이므로 주어진 방정식은 항상 실근을 갖는다. (거짓)
ㄴ. 주어진 방정식이 중근을 가지면 $D=0$이므로 $a=b=c$이다. (참)
ㄷ. 정육면체가 아닐 때, $D>0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, β라 하면 ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=\frac{2(a+b+c)}{3}$, $\alpha\beta=\frac{ab+bc+ca}{3}$이고,
$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이다.
그러므로 두 근은 모두 양수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 이차방정식과 이차함수

378 ①

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 실근과 같다.
즉, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 2이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $-a=(-1)+2=1$이므로 $a=-1$
두 근의 곱은 $b=(-1)\times2=-2$
$\therefore a+b=-1+(-2)=-3$

다른 풀이

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$을 지나므로
$0=1-a+b$, $0=4+2a+b$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$
$\therefore a+b=-3$

379 ③

이차함수 $y=2x^2-4x-10$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 A, B의 x좌표는 방정식 $2x^2-4x-10=0$의 두 실근이므로 방정식 $2x^2-4x-10=0$의 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-5$
이때, 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$이므로
$\overline{AB}=|\alpha-\beta|$
$\therefore \overline{AB}^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=2^2-4\times(-5)=24$

380 (1) $k<4$ (2) $k=4$ (3) $k>4$

이차함수 $y=x^2-4x+k$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 다음을 만족시키면 된다.
(1) x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^2-4x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=4-k>0$에서 $k<4$
(2) x축과 접하려면 방정식 $x^2-4x+k=0$이 중근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=4-k=0$에서 $k=4$
(3) x축과 만나지 않으려면 방정식 $x^2-4x+k=0$이 허근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=4-k<0$에서 $k>4$

아끄하이느내시니느그노즈재이시(사이)_하내시서르.indb 74 22. 9. 14. 오후 8:19

381 ····· 답 ⑤

이차함수 $y=-x^2+(2m-1)x-m^2+2$의 그래프가
x축과 만나지 않으려면 이차방정식
$-x^2+(2m-1)x-m^2+2=0$, 즉
$x^2-(2m-1)x+m^2-2=0$이 허근을 가져야 한다.
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(2m-1)^2-4(m^2-2)$
$=4m^2-4m+1-4m^2+8$
$=-4m+9<0$
이므로 $m>\frac{9}{4}$이다.
따라서 구하는 정수 m의 최솟값은 3이다.

382 ····· 답 20

이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 접하므로
방정식 $2x^2+ax+b=0$이 중근을 가져야 한다.
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-8b=0$이므로 $b=\frac{a^2}{8}$
$y=2x^2+ax+b=2x^2+ax+\frac{a^2}{8}$
이 함수의 그래프가 점 $(1, 8)$을 지나므로 대입하면
$8=2+a+\frac{a^2}{8}$, $a^2+8a-48=0$, $(a+12)(a-4)=0$
이므로 $a=4$ ($\because a>0$), $b=2$이다.
$\therefore a^2+b^2=4^2+2^2=20$

다른 풀이

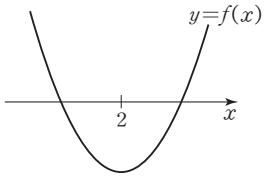
이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 접하므로
우변은 완전제곱식으로 표현가능하다.
$y=2(x-p)^2$ ($p<0$)이라 하면
이 이차함수의 그래프가 점 $(1, 8)$을 지나므로
$8=2(1-p)^2$, $(1-p)^2=4$, $1-p=\pm2$
$\therefore p=-1$ ($\because p<0$)
따라서 $y=2(x+1)^2=2x^2+4x+2$이므로
$a=4$, $b=2$
$\therefore a^2+b^2=4^2+2^2=20$

383 ····· 답 ④

① 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$이다.
또한 축이 y축 오른쪽에 존재하므로 $-\frac{b}{2a}>0$
$\therefore b>0$ (참)
② 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 y절편이 양수이므로
$f(0)=c>0$ (참)
③ 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$D=b^2-4ac>0$
$\therefore b^2>4ac$ (참)
④ $a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c=\frac{1}{4}(4a+2b+c)$이고
$f(2)=4a+2b+c>0$이므로
$a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c>0$ (거짓)
⑤ $f(5)=0$이므로 $25a+5b+c=0$
$\therefore 25a+c=-5b<0$ ($\because b>0$) (참)
따라서 선지 중 옳지 않은 것은 ④이다.

384 ····· 답 ②

이차방정식 $x^2+ax+4a-3=0$의 두 근 사이에 2가 있어야 하므로
$f(x)=x^2+ax+4a-3$이라 할 때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



즉, $x=2$에서의 함숫값 $f(2)$가 음수이어야 하므로
$f(2)=4+2a+4a-3<0$에서 $a<-\frac{1}{6}$이다.
따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 -1이다.

385 ····· 답 ⑤

이차함수 $y=2x^2-5x+3$의 그래프와 직선 $y=x+11$의 교점의
x좌표는 이차방정식 $2x^2-5x+3=x+11$의 실근과 같다.
$2x^2-6x-8=0$, $x^2-3x-4=0$ ····· TIP
$(x+1)(x-4)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=4$
따라서 구하는 값은 $-1+4=3$이다.

TIP

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 3임을 바로 구할 수도 있다.

386 ····· 답 ④

이차함수 $y=x^2-3x+a$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식
$x^2-3x+a=2x+1$, 즉 $x^2-5x+a-1=0$이
서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$D=5^2-4(a-1)=-4a+29>0$
이므로 $a<\frac{29}{4}$에서 구하는 정수 a의 최댓값은 7이다.

387 ····· 답 ①

이차함수 $f(x)=x^2-4x+6$의 그래프가 직선 $y=kx-5$와 서로 다른 두 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$에서 만나므로 방정식

아끄하이노래시니그고자이시(사이)_해설서로.indb 75 22. 9. 14. 오후 8:19

$f(x)=kx-5$에서 $f(x)-(kx-5)=0$의 서로 다른 두 실근이 x_1, x_2이다.
$x^2-4x+6-(kx-5)=0$에서 $x^2-(k+4)x+11=0$이고,
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$x_1+x_2=k+4=7$
$\therefore k=3$

388 답 ②

이차함수 $y=x^2+(a-1)x-b+2$의 그래프가 점 $(2, -2)$를 지나므로
$-2=2^2+(a-1)\times2-b+2$, $2a-b=-6$
$\therefore b=2a+6$ ..... ㉠
이차함수 $y=x^2+(a-1)x-b+2$의 그래프가 직선 $y=-2x+2$와 접하므로 방정식 $x^2+(a-1)x-b+2=-2x+2$가 중근을 갖는다.
이차방정식 $x^2+(a+1)x-b=0$의 판별식을 D라 할 때,
$D=(a+1)^2-4\times(-b)=0$에서 $(a+1)^2+4b=0$
$(a+1)^2+4\times(2a+6)=0$ ($\because$ ㉠)
$a^2+10a+25=0$, $(a+5)^2=0$ $\therefore a=-5$
㉠에서 $b=2\times(-5)+6=-4$
$\therefore a-b=-5-(-4)=-1$

389 답 ③

이차함수 $y=-x^2+3x+2$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점의 개수는 이차방정식 $-x^2+3x+2=x+k$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.
따라서 두 그래프가 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식 $-x^2+3x+2=x+k$가 실근을 가져야 하므로 방정식 $x^2-2x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1-(k-2)\geq0$
$\therefore k\leq3$

390 답 ④

직선의 방정식을 $y=ax+b$ (a, b는 상수)라 할 때, 이 직선이 점 $(-1, 1)$을 지나므로 $1=-a+b$, $b=a+1$에서 $y=ax+a+1$이다.
이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+a+1$이 접하면 방정식 $x^2-3x+1=ax+a+1$이 중근을 갖고 이때의 근이 접점의 x좌표이다.
$x^2-(a+3)x-a=0$ ..... ㉠
에서 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(a+3)\}^2-4\times(-a)=0$, $a^2+10a+9=0$
$(a+9)(a+1)=0$ $\therefore a=-9$ 또는 $a=-1$
㉠에서
$a=-9$일 때, $x^2+6x+9=(x+3)^2=0$이므로 접점의 x좌표는 -3이다.
$a=-1$일 때, $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$이므로 접점의 x좌표는 1이다.
따라서 두 접점의 x좌표의 합은 $-3+1=-2$

391 답 ③

방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$은 $ax^2+bx+c=mx+n$이므로 이 방정식의 실근은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표와 같다.
주어진 그림에서 두 그래프의 두 교점의 x좌표는 각각 -3, 4이므로 구하는 값은
$-3\times4=-12$

392 답 ①

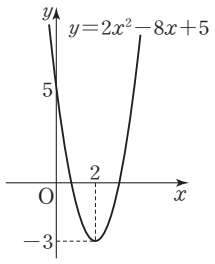
구하는 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+k$ (k는 실수)라 하면 이 직선이 곡선 $y=x^2-3x+4$에 접해야 하므로
방정식 $x^2-3x+4=2x+k$, 즉 $x^2-5x+4-k=0$이 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=25-4(4-k)=0$
$4k+9=0$ $\therefore k=-\frac{9}{4}$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=2x-\frac{9}{4}$이다.

393 답 6

이차함수 $y=x^2+a$의 그래프와 직선 $y=bx+1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2+a=bx+1$, 즉 $x^2-bx+a-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지며 그 중 한 근이 $2+\sqrt{3}$이다.
이때, a, b가 유리수이므로 나머지 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$, $a-1=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$
에서 $a=2$, $b=4$이다.
$\therefore a+b=2+4=6$

394 답 ②

$y=2x^2-8x+5$
$=2(x^2-4x+4)-8+5$
$=2(x-2)^2-3$
이므로 이 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(2, -3)$이고, 아래로 볼록하므로 다음과 같다.



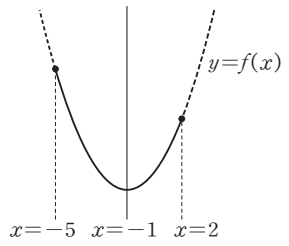
따라서 $x=2$일 때 최솟값 -3을 갖는다.
$\therefore a+b=2+(-3)=-1$

아끄하ㅕ이ㄴ새ㅅ시ㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅ시(사ㅇ)_해ㅐ서ㅓ르.indb 76 22. 9. 14. 오후 8:19

395 ····· 답 ③

$f(-5)=f(3)$이 성립하므로 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 축은 $x=\frac{-5+3}{2}$, 즉 $x=-1$이다.

$a>0$이므로 $-5\le x\le 2$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

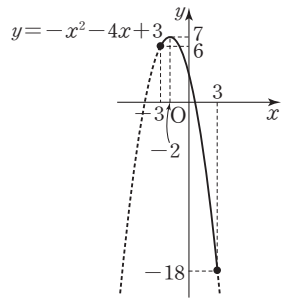


따라서 $-5\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-5)$, 최솟값은 $f(-1)$이다.

396 ····· 답 ①

$y=-x^2-4x+3=-(x^2+4x+4)+4+3$
$=-(x+2)^2+7$

$-3\le x\le 3$에서 함수 $y=-(x+2)^2+7$의 그래프는 다음과 같다.



$x=-2$일 때 최댓값 $M=-(-2+2)^2+7=7$을 갖고,
$x=3$일 때 최솟값 $m=-(3+2)^2+7=-18$을 갖는다.
$\therefore M+m=7+(-18)=-11$

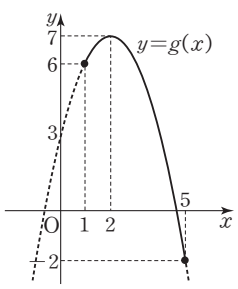
397 ····· 답 ②

$f(x)=x^2-2x+k=(x^2-2x+1)+k-1$
$=(x-1)^2+k-1$

$-2\le x\le 3$에서 $x=1$일 때 최솟값 $f(1)=k-1$을 가지므로
$k-1=3$에서 $k=4$

$g(x)=-x^2+4x+3=-(x^2-4x+4)+7$
$=-(x-2)^2+7$

이므로 $1\le x\le 5$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$x=2$일 때 최댓값 $g(2)=7$을 갖고,
$x=5$일 때 최솟값 $g(5)=-2$를 갖는다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$7+(-2)=5$

II

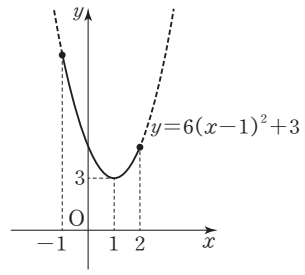
398 ····· 답 5

점 (a, b)가 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프 위의 점이므로
$b=a^2-2a-3$을 만족시킨다.
$2a^2-b+3=2a^2-(a^2-2a-3)+3$
$=a^2+2a+6=(a+1)^2+5$
따라서 $2a^2-b+3$은 $a=-1$일 때, 최솟값 5를 갖는다.

399 ····· 답 ⑤

$2x+y=3$, 즉 $y=-2x+3$에서
$2x^2+y^2=2x^2+(-2x+3)^2$
$=2x^2+(4x^2-12x+9)$
$=6(x-1)^2+3$

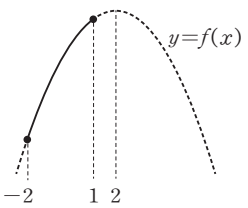
$-1\le x\le 2$에서 함수 $y=6(x-1)^2+3$의 그래프는 다음과 같다.



$x=-1$일 때 최댓값 $M=6\times(-2)^2+3=27$을 갖고,
$x=1$일 때 최솟값 $m=3$을 갖는다.
$\therefore M+m=27+3=30$

400 ····· 답 25

이차항의 계수가 -1이고 꼭짓점의 좌표가 $(2, k)$인 이차함수는
$f(x)=-(x-2)^2+k$이므로 $-2\le x\le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값을 갖고,
$x=1$일 때 최댓값을 갖는다.
$f(-2)=-16+k=-3$이므로 $k=13$
$m=f(1)=-1+k=12$
$\therefore k+m=13+12=25$

아쁘허어느새시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해설서ㄹ.indb 77 22. 9. 14. 오후 8:19

401

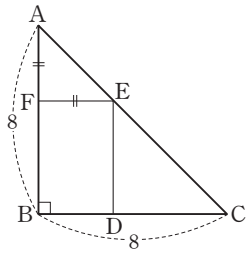
답 78

$y=-2t^2+24t=-2(t-6)^2+72$
에서 $t=6$일 때, 공의 높이가 72(m)로 가장 높이 올라가게 된다.
따라서 $a=6$, $b=72$이므로
$a+b=6+72=78$

402

답 20

$\overline{FB}=x$ $(0<x<8)$라 하면 두 삼각형 ABC, AFE가 서로 닮음이므로
$\overline{FE}=\overline{AF}=8-\overline{FB}=8-x$이다.



직사각형 BDEF의 넓이는
$\overline{FB}\times\overline{FE}=x(8-x)=-(x-4)^2+16$
이므로 $x=4$일 때, 최댓값 16을 갖는다.
따라서 $a=4$, $b=16$이므로
$a+b=4+16=20$

403

답 ④

두 정삼각형의 한 변의 길이를 각각 a, b $(a>0, b>0)$라 하면
$3a+3b=30$, $b=10-a$
두 정삼각형의 넓이의 합은

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\{a^2+(10-a)^2\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(2a^2-20a+100)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-5)^2+\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

이므로 $a=5$일 때, 두 정삼각형의 넓이의 합은 최솟값 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$을 갖는다.

404

답 ③

직사각형 모양의 닭장에서 닭장에 포함되는 벽을 가로로 하여 이 길이를 a(m)라 하고,
세로의 길이를 b(m)라 하면 두 양수 a, b에 대하여
$a+2b=20$이므로 $a=20-2b$
그러므로 닭장의 바닥의 넓이는
$ab=(20-2b)b=-2(b^2-10b)$
$=-2(b-5)^2+50$
이므로 $b=5$일 때 닭장의 바닥의 넓이가 최댓값 50을 갖는다.
따라서 구하는 닭장에 포함되는 벽의 길이는 $a=10$(m)이다.

405

답 ④

입장료를 50원 올릴 때마다 입장객의 수가 10명씩 감소하므로
이 박물관의 1인당 입장료를 $(2000+50x)$원이라 하면
하루 입장객의 수는 $(500-10x)$명이다.
하루 입장료의 총 판매액은
$(2000+50x)(500-10x)=-500x^2+5000x+1000000$
$=-500(x-5)^2+1012500$
이므로 $x=5$일 때 최대이다.
따라서 하루 입장료의 총 판매액이 최대가 되도록 하는
이 박물관의 1인당 입장료는 2250원이다.

406

답 ③

이차함수 $y=2x^2-4x+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 점 사이의 거리는 $|\alpha-\beta|$와 같으므로
$|\alpha-\beta|=4$이다. …… ㉠
또한 이차방정식 $2x^2-4x+k=0$의 두 실근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{k}{2}$$ …… ㉡

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ㉠, ㉡을 대입하면
$16=4-2k$
$\therefore k=-6$

407

답 ①

방정식 $x^2-2(a+2k)x+(a^2+4k^2+6k)=0$이 중근을 가지므로
이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+2k)^2-(a^2+4k^2+6k)=0$$이어야 한다.

$4ak-6k=0$, $2k(2a-3)=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$a=\frac{3}{2}$$

408

답 2

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표를 각각 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$이라 하자.
α, β는 방정식 $f(x)=0$의 두 실근이고,
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=2$이므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=2$$에서 $\alpha+\beta=4$ …… ㉠

방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근을 각각 p, q라 하면
$(3p-1)+(3q-1)=\alpha+\beta$이므로 ㉠을 대입하면
$3(p+q)-2=4$, $3(p+q)=6$
$\therefore p+q=2$

아끄하이나내시시니그고지에이시(사이)_해내서르.indb 78 22. 9. 14. 오후 8:19

409

답 ①

이차방정식 $x^2+3x+a=0$의 한 근은 -3보다 작고 다른 한 근은 1보다 크므로 $f(x)=x^2+3x+a$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 교점의 x좌표 중 하나는 -3보다 작고 다른 하나는 1보다 커야 한다.

그러므로 $f(-3)<0$이고, $f(1)<0$이다.

$f(x)=x^2+3x+a=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+a-\frac{9}{4}$이고,

이 이차함수의 그래프의 축이 직선 $x=-\frac{3}{2}$이므로

$f(1)<0$이면 반드시 $f(-3)<0$이다. …… TIP

즉, 한 교점의 x좌표가 1보다 크면 다른 한 교점의 x좌표는 반드시 -3보다 작게 된다.

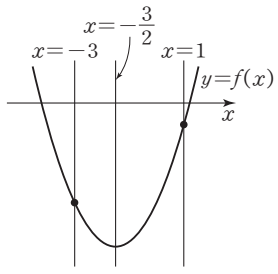
따라서 $f(1)<0$만 만족시키면 되므로

$f(1)=4+a<0$

$\therefore a<-4$

TIP

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



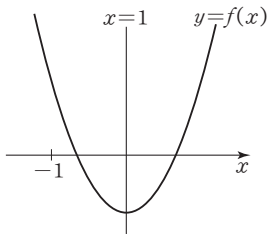
축과 더 멀리 떨어진 $x=1$에서의 함숫값이 음수이면 $x=-3$에서의 함숫값도 음수가 되므로 $f(1)<0$이면 $f(-3)<0$을 만족시킨다.

410

답 2

$f(x)=x^2-2x+k-1$이라 하면 $f(x)=(x-1)^2+k-2$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=1$이다.

그러므로 이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 두 근이 모두 -1보다 크려면 다음 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 모두 -1보다 커야 한다.



이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(k-1)\geq 0$에서 $k\leq 2$ …… ㉠

또한 $f(-1)>0$이므로

$f(-1)=1+2+k-1>0$에서 $k>-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-2<k\leq 2$이므로 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

$-1+0+1+2=2$

411

답 25

조건 (가)에서 $f(x)g(x)=x^4-9x^2+4x+12$에서

$f(-1)g(-1)=0$, $f(2)g(2)=0$이므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	0	-9	4	12
		-1	1	8	-12
2	1	-1	-8	12	0
		2	2	-12	
	1	1	-6	0	

그러므로 $f(x)g(x)=(x+1)(x-2)(x^2+x-6)$, 즉

$f(x)g(x)=(x+1)(x+3)(x-2)^2$이다.

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하고 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)(x+3)$이다.

$\therefore f(3)+g(3)=(3-2)^2+(3+1)\times(3+3)=25$

412

답 ⑤

세 이차함수의 최고차항의 계수의 절댓값이 모두 같으므로 아래로 볼록한 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a>0)$라 하면 두 함수 $g(x)$, $h(x)$의 최고차항의 계수는 각각 $-a$, a이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 $x=1$, $x=3$에서 만나므로

$f(x)=a(x-1)(x-3)$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 x축과 $x=-1$, $x=3$에서 만나므로

$g(x)=-a(x+1)(x-3)$

함수 $y=h(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 x축과 $x=3$, $x=4$에서 만나므로

$h(x)=a(x-3)(x-4)$

그러므로 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$에서

$a(x-1)(x-3)-a(x+1)(x-3)+a(x-3)(x-4)=0$

$a(x-3)\{(x-1)-(x+1)+(x-4)\}=0$

$a(x-3)(x-6)=0$

따라서 $x=3$ 또는 $x=6$이므로 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$의 모든 근의 합은 $3+6=9$이다.

413

답 ④

ㄱ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 접하므로 방정식 $f(x)=g(x)$는 중근을 갖는다.

이차방정식 $2x^2+(a-c)x+b-d=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=(a-c)^2-4\times 2(b-d)=0$

$\therefore (a-c)^2=8(b-d)$ (거짓)

ㄴ. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

오쁘후우느내스ㅣㄴㄱㅗ즈재으스ㅣ(스ㅏ으)_후배스너르.indb 79 22. 9. 14. 오후 8:20

이차방정식 $-x^2+cx+d=0$의 판별식을 D라 하면
$D=c^2+4d>0$에서 $c^2>-4d$이다.
이때, 함수 $y=f(x)$의 y절편 b가 함수 $y=g(x)$의 y절편 d보다 더 크므로 $b>d$이고 $-4b<-4d$이다.
그러므로 $c^2>-4b$이다. (참)

ㄷ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 제1사분면에서 서로 접하므로 x의 값이 접하는 점의 x좌표보다 작으면 항상 $f(x)>g(x)$가 성립한다.
그러므로 $f(-1)>g(-1)$에서 $1-a+b>-1-c+d$
$\therefore a-c-b+d<2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

414 ③

조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 축이 $x=-1$이므로
$f(x)=(x+1)^2+k$ (k는 상수)
$=x^2+2x+1+k$ …… ㉠
에서 $a=2$, $b=1+k$
조건 (나)에서 이차방정식 $x^2-3x-2=0$의 두 근 α, β에 대하여 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$ …… ㉡
$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^2+2\alpha+1+k)+(\beta^2+2\beta+1+k)$
$=(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+\beta)+2(1+k)$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+2(1+k)$
$=3^2-2\times(-2)+2\times3+2(1+k)$ ($\because$ ㉡)
$=21+2k$
$f(\alpha)+f(\beta)=5$에서 $21+2k=5$, $2k=-16$, 즉 $k=-8$
이를 ㉠에 대입하면 $f(x)=x^2+2x-7$이다.
$\therefore f(2)=2^2+2\times2-7=1$

415 $\frac{9}{4}$

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=(k-1)^2-(k^2-5)=-2k+6$
이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=3^2-4k=9-4k$
α, β는 음이 아닌 정수이므로 $\alpha^2+\beta^2=5$를 만족시키려면
$\alpha=2$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=2$이어야 한다. …… ㉠

(i) $\alpha=2$, $\beta=1$일 때
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나므로
$\frac{D_1}{4}=-2k+6>0$에서 $k<3$
함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 접하므로
$D_2=9-4k=0$에서 $k=\frac{9}{4}$
두 조건을 동시에 만족시키는 실수 k의 값은 $\frac{9}{4}$이다.

(ii) $\alpha=1$, $\beta=2$일 때
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 접하므로
$\frac{D_1}{4}=-2k+6=0$에서 $k=3$
함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나므로
$D_2=9-4k>0$에서 $k<\frac{9}{4}$
두 조건을 동시에 만족시키는 실수 k의 값이 존재하지 않는다.

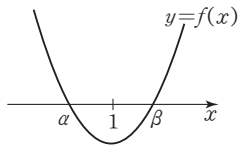
(i), (ii)에 이하여 구하는 실수 k의 값은 $\frac{9}{4}$이다.

416 ③

이차함수 $y=x^2-2kx+k^2+4k$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 접하려면 방정식 $x^2-2kx+k^2+4k=ax+b$가 중근을 가져야 한다.
즉, 방정식 $x^2-(2k+a)x+k^2+4k-b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(2k+a)^2-4(k^2+4k-b)=0$에서 등식
$4ak+a^2-16k+4b=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 한다.
즉, $(4a-16)k+a^2+4b=0$에서 $4a-16=0$, $a^2+4b=0$
따라서 $a=4$, $b=-4$이므로
$a+b=0$

417 $a\le-\frac{3}{2}$

이차함수 $y=x^2+2ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면
방정식 $x^2+2ax+3=2x-1$, 즉 $x^2+(2a-2)x+4=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이고, 점 (1, 1)이 선분 AB 위에 있어야 하므로
$\alpha\le1\le\beta$를 만족시켜야 한다. …… TIP
따라서 $f(x)=x^2+(2a-2)x+4$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 $x=1$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 한다.



즉, $f(1)=1+2a-2+4\le0$에서
$a\le-\frac{3}{2}$

TIP
점 (1, 1)이 선분 AB 위에 있으면 점 A 또는 B가 점 (1, 1)이 될 수 있으므로 $\alpha\le1\le\beta$이다.

418 ③

직선 $y=2x+a$가 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프와 만나지 않으므로 방정식 $x^2-3x+5=2x+a$, 즉 $x^2-5x+5-a=0$이 실근을 갖지 않는다.
이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

아끄하이노내시니그고재이시(사이)_하내서르.indb 80 22. 9. 14. 오후 8:20

$D_1=(-5)^2-4\times(5-a)<0$

$\therefore a<-\frac{5}{4}$ …… ㉠

직선 $y=2x+a$가 이차함수 $y=x^2-2x-1$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2-2x-1=2x+a$,

즉 $x^2-4x-1-a=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-2)^2-(-1-a)>0$

$\therefore a>-5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-5<a<-\frac{5}{4}$이므로 모든 정수 a는

-4, -3, -2로 3개이다.

419 ····· 답 ③

두 점 (a, b), (b, a)가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-5a-8$, $a=b^2-5b-8$ …… ㉠

위의 두 식의 양변을 각각 빼주면

$b-a=a^2-b^2-5(a-b)$, $(a+b)(a-b)-4(a-b)=0$

$\therefore (a-b)(a+b-4)=0$

$a>b$이므로 $a+b=4$, $b=4-a$를 ㉠의 첫 번째 식에 대입하면

$4-a=a^2-5a-8$, $a^2-4a-12=0$

$(a+2)(a-6)=0$에서 $a=6$ ($\because a>b$)이고, $b=-2$이다.

이때 함수 $y=x^2+k$의 그래프와 직선 $y=6x-2$가 접하므로

이차방정식 $x^2+k=6x-2$, 즉 $x^2-6x+k+2=0$이 중근을 가진다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(k+2)=0$

$\therefore k=7$

420 ····· 답 ④

두 함수 $f(x)=-x^2+5$, $g(x)=-2x+k$의 그래프가 접하면 방정식 $-x^2+5=-2x+k$, 즉 $x^2-2x+k-5=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-(k-5)=0$ $\therefore k=k_1=6$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha>\beta)$라 하면 α, β는 방정식 $x^2-2x+k-5=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=k-5$ …… ㉠

이때, 직선 $y=g(x)$의 기울기가 음수이므로 $g(\alpha)>g(\beta)$이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 y좌표의 차가 8이려면 $g(\alpha)-g(\beta)=8$이어야 한다.

$(-2\alpha+k)-(-2\beta+k)=8$, $-2(\alpha-\beta)=8$

$\therefore \alpha-\beta=-4$ …… ㉡

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서

$2^2=(-4)^2+4(k-5)$ ($\because$ ㉠, ㉡), 즉 $4k=8$이므로 $k=k_2=2$

$\therefore k_1+k_2=6+2=8$

421 ····· 답 −14

$g(x)=-x^2-2x+4$, $h(x)=x^2-4x-8$이라 하자.

$g(x)=-(x+1)^2+5$, $h(x)=(x-2)^2-12$이므로

두 함수의 꼭짓점의 좌표는 각각 $(-1, 5)$, $(2, -12)$이다.

$g(x)-h(x)=-x^2-2x+4-(x^2-4x-8)$

$=-2x^2+2x+12$

$=-2(x+2)(x-3)$

에서 방정식 $g(x)-h(x)=0$의 해가 $x=-2$ 또는 $x=3$이고,

$g(-2)=-(-2)^2-2(-2)+4=4$,

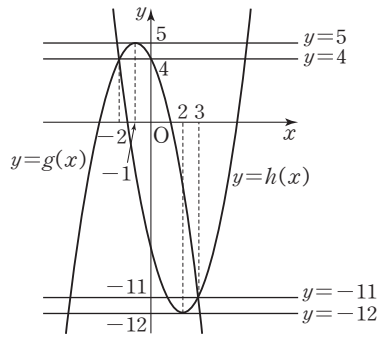
$g(3)=-3^2-2\times3+4=-11$이므로

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 두 점

$(-2, 4)$, $(3, -11)$

에서 만난다.

그러므로 $f(t)=3$에서 직선 $y=t$가 두 이차함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수가 3인 경우는 다음과 같다.



따라서 $f(t)=3$을 만족시키는 실수 t의 값의 합은

$5+4+(-11)+(-12)=-14$

422 ····· 답 ①

이차항의 계수가 2인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$에서 만나므로

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)$ …… ㉠

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$와 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\gamma, f(\gamma))$에서 만나므로

$f(x)-g(x)=2(x-\alpha)(x-\gamma)$ …… ㉡

이때, $\beta-\alpha=6$, $\gamma-\alpha=4$이므로

$\beta-\gamma=2$ …… ㉢

㉠에서 ㉡을 빼면

$g(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)-2(x-\alpha)(x-\gamma)$

$=2(x-\alpha)\{(x-\beta)-(x-\gamma)\}$

$=2(x-\alpha)(\gamma-\beta)$

$=-4(x-\alpha)$ ($\because$ ㉢)

$g(-2)=4$이므로

$g(-2)=-4(-2-\alpha)=4$에서 $\alpha=-1$이고,

이를 ㉢에 대입하면 $\beta=5$, $\gamma=3$

따라서 $f(x)=2(x+1)(x-5)$, $g(x)=-4(x+1)$이다.

$\therefore f(2\alpha)+g\left(\frac{\beta\gamma}{3}\right)=f(-2)+g(5)$

$=2\times(-1)\times(-7)+(-4)\times6=-10$

오쁘후우느새스ㅣㄴㄱㅗ조재으스ㅣ(스ㅏ으)_후새스러르.indb 81 22. 9. 14. 오후 8:20

423 ····· 답 ③

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$이고,
α, β는 이차방정식 $x^2=x+k$, 즉 $x^2-x-k=0$의 두 실근이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-k$ ····· ㉠
이때, $\alpha>0$, $\beta<0$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\alpha\times\alpha^2=\frac{1}{2}\alpha^3$, $S_2=\frac{1}{2}\times(-\beta)\times\beta^2=-\frac{1}{2}\beta^3$

$S_1-S_2=\frac{1}{2}\alpha^3-\left(-\frac{1}{2}\beta^3\right)=\frac{1}{2}(\alpha^3+\beta^3)$

$=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}$

$=\frac{1}{2}\times\{1^3-3\times(-k)\times1\}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{1+3k}{2}$

$S_1-S_2=14$에서 $\frac{1+3k}{2}=14$, $3k=27$

$\therefore k=9$

424 ····· 답 풀이 참조

이차함수 $y=x^2+2(k+4)x+4$의 그래프와 x축이 접하므로
이차방정식 $x^2+2(k+4)x+4=0$이 중근을 갖는다.
이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=(k+4)^2-4=0$
$k^2+8k+12=0$, $(k+6)(k+2)=0$
$\therefore k=-6$ 또는 $k=-2$ ····· ㉠
이차함수 $y=x^2+2(k+4)x+4$의 그래프와 직선 $y=kx+3$이
접하므로 이차방정식 $x^2+2(k+4)x+4-kx-3=0$, 즉
$x^2+(k+8)x+1=0$이 중근을 갖는다.
이 방정식의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(k+8)^2-4=0$
$k^2+16k+60=0$, $(k+10)(k+6)=0$
$\therefore k=-10$ 또는 $k=-6$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 실수 k의 값은 -6이다.

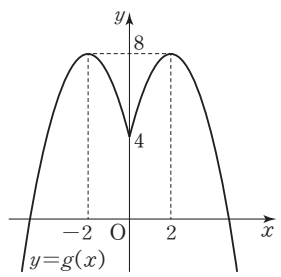
채점 요소	배점
이차함수 $y=x^2+2(k+4)x+4$의 그래프와 x축이 접하도록 하는 실수 k의 값 구하기	40%
이차함수 $y=x^2+2(k+4)x+4$의 그래프와 직선 $y=kx+3$이 접하도록 하는 실수 k의 값 구하기	40%
두 조건을 동시에 만족시키는 실수 k의 값 구하기	20%

425 ····· 답 14

두 이차함수 $y=x^2+2x+1$, $y=-(x-3)^2+k$의 그래프에 동시에
접하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=x^2+2x+1$과 접하므로 이차방정식
$x^2+2x+1=ax+b$, 즉 $x^2+(2-a)x+1-b=0$이 중근을 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=(2-a)^2-4(1-b)=0$, $a^2-4a+4b=0$
$\therefore 4b=-a^2+4a$ ····· ㉠
이차함수 $y=-(x-3)^2+k$와 직선이 접하므로 이차방정식
$-(x-3)^2+k=ax+b$, 즉 $x^2+(a-6)x+b-k+9=0$이 중근을
갖는다. 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(a-6)^2-4(b-k+9)=0$, $a^2-12a-4b+4k=0$
$2a^2-16a+4k=0$ ($\because$ ㉠) $\therefore a^2-8a+2k=0$
조건을 만족시키는 서로 다른 두 직선이 존재하려면 이
이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의
판별식을 D_3라 하면
$\frac{D_3}{4}=(-4)^2-2k>0$, $2k<16$ $\therefore k<8$
이때, 정수 k의 최댓값이 7이고, 두 직선의 기울기의 곱은
이차방정식 $a^2-8a+2k=0$에서 이차방정식과 근과 계수의 관계에
의하여 $2k$이므로 최댓값은 $2k=2\times7=14$이다.

426 ····· 답 ②

$f(x)=-x^2+4x+4=-(x-2)^2+8$
$x\geq0$일 때, $g(x)=-(x-2)^2+8$이고,
$x<0$일 때, $g(x)=-(-x-2)^2+8=-(x+2)^2+8$이므로
함수 $g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq0)\\ f(-x) & (x<0)\end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.



$h(t)=2$를 만족시키는 자연수 t의 값은 1, 2, 3, 8이므로
$\alpha=1+2+3+8=14$
$h(t)=4$를 만족시키는 자연수 t의 값은 5, 6, 7이므로
$\beta=5+6+7=18$
$\therefore \beta-\alpha=18-14=4$

427 ····· 답 −8

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(0, -2)$이므로
$f(x)=kx^2-2$ (k는 0이 아닌 상수)라 하자.
함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a, 2)$를 지나므로
$f(a)=ka^2-2=2$에서 $k=\frac{4}{a^2}$
$\therefore f(x)=\frac{4}{a^2}x^2-2$
이때, 직선 $y=g(x)$는 원점과 점 $(a, 2)$를 지나므로 $g(x)=\frac{2}{a}x$이다.

$f(x)-g(x)=\frac{4}{a^2}x^2-2-\frac{2}{a}x=\frac{2}{a^2}(2x^2-ax-a^2)$

$=\frac{2}{a^2}(2x+a)(x-a)=0$

아끄하ㅓㅇ느새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 82 22. 9. 14. 오후 8:20

이므로 $x=-\frac{a}{2}$ 또는 $x=a$

방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근의 차가 6이므로

$a-\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{2}a=6$ ($\because$ $a>0$)에서 $a=4$, $k=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2$이므로 방정식 $f(x)=0$, $\frac{1}{4}x^2-2=0$,

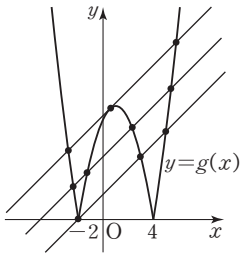
$x^2-8=0$의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -8이다.

428 ····· 답 $\frac{33}{2}$

$f(x)=x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 $x=-2$, $x=4$에서 만나고 아래로 볼록하므로

$-2<x<4$일 때 $f(x)<0$이고, $x\le-2$ 또는 $x\ge4$일 때 $f(x)\ge0$이다.

그러므로 $g(x)=\begin{cases}-f(x) & (-2<x<4)\\ f(x) & (x\le-2 \text{ 또는 } x\ge4)\end{cases}$이고 그 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나려면 직선이 $-2<x<4$에서 함수 $y=-f(x)$의 그래프와 접할 때 보다는 아래쪽에, 점 $(-2, 0)$을 지날 때보다는 위쪽에 위치해야 한다.

(i) 직선 $y=x+k$가 $-2<x<4$에서 함수 $y=-f(x)$의 그래프와 접할 때

방정식 $-x^2+2x+8=x+k$, 즉 $x^2-x+k-8=0$이 중근을 가지므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(k-8)=0$, $4k=33$ $\quad\therefore k=\frac{33}{4}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(-2, 0)$을 지날 때

직선 $y=x+k$에 점 $(-2, 0)$을 대입하면

$0=-2+k$ $\quad\therefore k=2$

(i), (ii)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $2<k<\frac{33}{4}$이다.

$\therefore pq=2\times\frac{33}{4}=\frac{33}{2}$

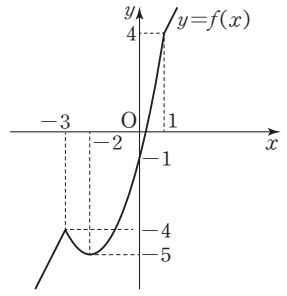
429 ····· 답 ②

함수 $f(x)=\begin{cases}2x+2 & (x<-3,\ x\ge1)\\ x^2+4x-1 & (-3\le x<1)\end{cases}$에서

방정식 $2x+2=x^2+4x-1$, 즉 $x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$이다. 그러므로 직선 $y=2x+2$와 이차함수 $y=x^2+4x-1$의 그래프가 두 점 $(-3, -4)$, $(1, 4)$에서 만나고,

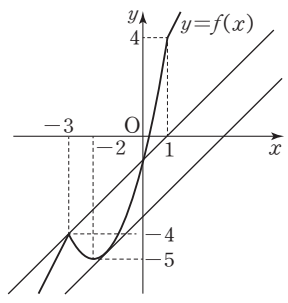
$y=x^2+4x-1=(x+2)^2-5$이므로 $x=-2$일 때, 최솟값 -5를 갖는다.

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 위의 그래프에서 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $k<-5$ 또는 $k>-4$ (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 다음 그림과 같이 a의 값이 함수 $y=x^2+4x-1$의 그래프와 접할 때보다는 크고 점 $(-3, -4)$를 지날 때보다는 작아야 한다.



이차방정식 $x^2+4x-1=x+a$, 즉 $x^2+3x-1-a=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=3^2-4(-1-a)=0$, $4a=-13$

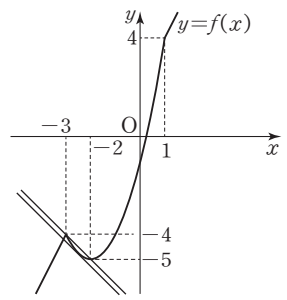
$\therefore a=-\frac{13}{4}$

직선 $y=x+a$에 점 $(-3, -4)$를 대입하면

$-4=-3+a$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $-\frac{13}{4}<a<-1$ (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+b$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 다음 그림과 같이 직선 $y=-x+b$가 점 $(-3, -4)$를 지나거나 이차함수 $y=x^2+4x-1$의 그래프와 접해야 한다.



이차방정식 $x^2+4x-1=-x+b$, 즉 $x^2+5x-1-b=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_2라 하면

$D_2=5^2-4(-1-b)=0$, $4b=-29$

아뜨홍이노래스ㅣ노그소재으스ㅣ(스ㅏ으)_홍태스터르.indb 83 22. 9. 14. 오후 8:20

$\therefore b=-\frac{29}{4}$

직선 $y=-x+b$에 점 $(-3, -4)$를 대입하면

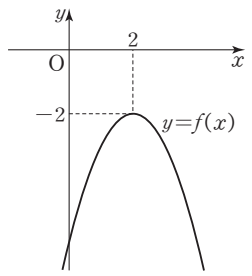
$-4=-(-3)+b$ $\quad\therefore b=-7$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+b$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 b의 값은 $-\frac{29}{4}$ 또는 -7 (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

430 ④

함수 $f(x)=-x^2+4x-6=-(x-2)^2-2$의 그래프는 다음과 같다.



$a\le2$이면 $a\le x\le5$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=-2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a>2$

이때, $a\le x\le5$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(a)$이므로

$f(a)=-3$이다.

$f(a)=-a^2+4a-6=-3$에서

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>2$)

431 29

$g(x)$는 일차식이고, $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차식이므로 $g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 -2인 이차식이다.

이때, 함수 $y=g(x)-f(x)$가 $x=3$에서 최댓값 4를 가지므로

$g(x)-f(x)=-2(x-3)^2+4$

$\quad=-2x^2+12x-14$

한편, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 만나므로 방정식 $g(x)-f(x)=0$의 두 근이 α, β이다.

따라서 이차방정식 $-2x^2+12x-14=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=7$

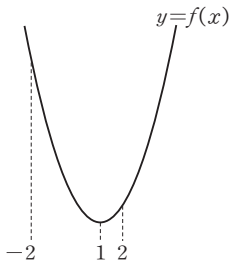
$\therefore \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=36-7=29$

432 ④

조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=\frac{-1+3}{2}=1$에 대하여 대칭이므로 꼭짓점의 x좌표가 1이다.

$\therefore a=-2$

즉, $f(x)=x^2-2x+b$이며 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이차함수 $f(x)$는 $-2\le x\le2$에서 축과 더 멀리 떨어진 점에서 최대가 되므로 $x=-2$일 때 최댓값을 갖는다.

$f(-2)=(-2)^2-2\times(-2)+b=12$이므로 $b=4$

따라서 $f(x)=x^2-2x+4$이므로

$f(3)=3^2-2\times3+4=7$

433 ④

이차방정식 $x^2+2(k+1)x+k^2-2k+5=0$이 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-2k+5)\ge0$, $4k\ge4$

$\therefore k\ge1$ ····· ㉠

또한 이차방정식 $x^2+2(k+1)x+k^2-2k+5=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2(k+1)=-2k-2$, $\alpha\beta=k^2-2k+5$

이때,

$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$

$\quad=k^2-2k+5-2(-2k-2)+4$

$\quad=k^2+2k+13$

$\quad=(k+1)^2+12$

이고, ㉠에서 $k\ge1$이므로

$(\alpha-2)(\beta-2)$는 $k=1$일 때, 최솟값 16을 갖는다.

434 45

조건 (가)에서 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지므로

이차방정식 $-x^2+ax-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(-1)(-b)=0$, $a^2=4b$ ····· ㉠

이때, $f(x)=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$에서

$a>0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로

$-a\le x\le a$에서 $x=\frac{a}{2}$일 때 최댓값을 가지고,

$x=-a$일 때 최솟값을 갖는다.

조건 (나)에서 최솟값이 -45이므로

$f(-a)=-(-a)^2+a(-a)-b$

$\quad=-2a^2-b$

$\quad=-2\times4b-b$ ($\because$ ㉠)

$\quad=-9b$

에서 $-9b=-45$, 즉 $b=5$이고 $a^2=20$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a^2+b^2=20+5^2=45$

아끄하이노래시니그고지재으시(사으)_하새서르.indb 84 22. 9. 14. 오후 8:20

435 ④

$f(-3)=f(9)$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=\frac{-3+9}{2}=3$이므로 $f(x)=x^2-6x+a$ (a는 상수)라 하자. …… ㉠

ㄱ. $f(x)=(x-3)^2+a-9$이므로 $x=3$일 때 최솟값을 갖는다.
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$이다. (참)

ㄴ. $1\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값을 갖고,
$x=6$일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 최댓값과 최솟값의 차는 ㉠에서
$f(6)-f(3)=(36-36+a)-(9-18+a)=9$ (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 조건은
방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=9-a<0$ ($\because$ ㉠) $\quad\therefore a>9$
즉, $f(0)=a>9$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

436 5

$f(x)=-2x^2+4kx-2k^2-1$
$\quad=-2(x-k)^2-1$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(k,\ -1)$이다.
k의 값의 범위에 따라 $2\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하면 다음과 같다.

(i) $k\le 2$일 때
$2\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로
$f(2)=-2\times 2^2+4k\times 2-2k^2-1=-2k^2+8k-9$
에서 $-2k^2+8k-9=-3$, $2k^2-8k+6=0$
$2(k-1)(k-3)=0 \quad\therefore k=1$ ($\because k\le 2$)

(ii) $2<k<3$일 때
$2\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 꼭짓점에서 최댓값을 갖는다.
그러나 $f(k)=-1$이므로 최댓값이 -3이 되도록 하는 실수 k의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $k\ge 3$일 때
$2\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가지므로
$f(3)=-2\times 3^2+4k\times 3-2k^2-1=-2k^2+12k-19$
에서 $-2k^2+12k-19=-3$, $2k^2-12k+16=0$
$2(x-2)(x-4)=0 \quad\therefore k=4$ ($\because k\ge 3$)

(i)~(iii)에서 모든 실수 k의 값의 합은
$1+4=5$

437 풀이 참조

함수 $y=(x^2-4x+3)^2-12(x^2-4x+3)+30$에서
$t=x^2-4x+3$으로 치환하면
$t=(x-2)^2-1$에서 $-1\le x\le 3$이므로
$x=2$일 때 $t=-1$로 최솟값을 갖고,
$x=-1$일 때 $t=8$로 최댓값을 갖는다.
그러므로 주어진 함수는
$y=(x^2-4x+3)^2-12(x^2-4x+3)+30$
$\quad=t^2-12t+30$
$\quad=(t-6)^2-6$
이므로 함수 $-1\le t\le 8$에서
$t=6$일 때 최솟값 $m=-6$을 갖고,
$t=-1$일 때 최댓값 $M=43$을 갖는다.

채점 요소	배점
$t=x^2-4x+3$으로 치환하여 t의 최댓값과 최솟값 구하기	40%
$-1\le t\le 8$에서 함수 $y=t^2-12t+30$의 최댓값 M과 최솟값 m 구하기	60%

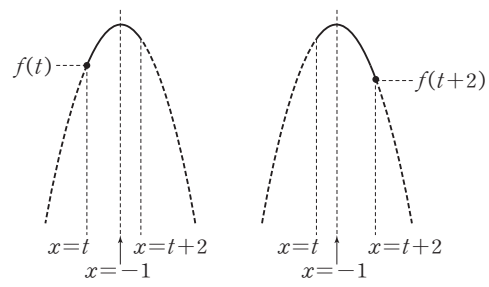
438 풀이 참조

방정식 $x^2-5x-6=0$, $(x+1)(x-6)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=6$이므로 B$(-1,\ 0)$, C$(6,\ 0)$이다.
점 P가 점 A에서 출발하여 점 C까지 움직이므로
$0\le a\le 6$이고, 점 P가 곡선 $y=x^2-5x-6$ 위의 점이므로
$b=a^2-5a-6$
따라서 주어진 식은
$a^2+4b-1=a^2+4(a^2-5a-6)-1$
$\quad=5a^2-20a-25$
$\quad=5(a-2)^2-45$
이고, $0\le a\le 6$에서
$a=2$일 때 최솟값 -45,
$a=6$일 때 최댓값 35를 갖는다.

채점 요소	배점
a의 값의 범위 구하기	20%
점 P가 곡선 $y=x^2-5x-6$ 위의 점이라는 것을 이용하여 a^2+4b-1을 a에 대한 식으로 나타내기	40%
a^2+4b-1의 최댓값과 최솟값 구하기	40%

439 ③

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 축이 $x=-1$이다. …… ㉠
$t\le x\le t+2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $g(t)$이므로
다음 그림과 같이 경우를 나누어 보자.



[$t\le -2$일 때] [$t>-2$일 때]

$t\le -2$일 때, $t\le x\le t+2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(t)$이므로

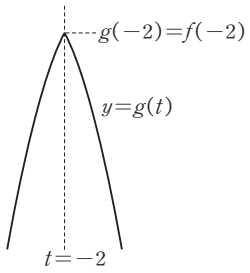
아쿠하이스내스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 85 22. 9. 14. 오후 8:20

$g(t)=f(t)$

$t>-2$일 때, $t\le x\le t+2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(t+2)$이므로 $g(t)=f(t+2)$

그러므로 함수 $g(t)=\begin{cases} f(t) & (t\le -2) \\ f(t+2) & (t>-2) \end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(t)$의 최댓값이 4이므로 $g(-2)=4$이고,

㉠에서 $f(-2)=f(0)=4$이므로

$f(x)-4=ax(x+2)(a<0)$

조건 ㈎에서 $f(-1)=7$이므로

$f(-1)-4=a\times(-1)\times(-1+2)$에서 $a=-3$

$\therefore f(x)=-3x(x+2)+4$

$\therefore f(-5)=-3(-5)(-5+2)+4=-41$

440 ····· 답 ②

조건 ㈎에서 $f(-1)=f(3)$이므로 이차함수 $f(x)$의 축이

$x=\dfrac{-1+3}{2}=1$이다.

$f(x)=a(x-1)^2+b$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)라 하자.

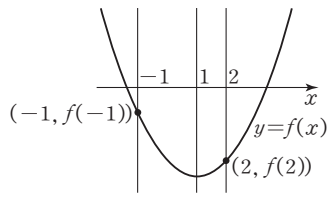
이차함수 $f(x)$의 축이 $x=1$이므로 $f(-1)\ne f(2)$

즉, 조건 ㈏에서 $f(-1)+|f(2)|=0$이므로

$f(-1)=-|f(2)|<0$에서 $f(2)>0$이고,

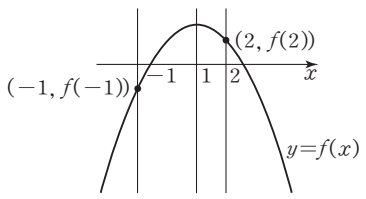
$|f(-1)|=|f(2)|$이다. ····· ㉠

(i) $a>0$인 경우



$f(2)<f(-1)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$인 경우



㉠에서 $f(-1)<0$, $f(2)>0$이므로 $f(-1)+|f(2)|=0$에서

$f(-1)+f(2)=\{a\times(-2)^2+b\}+(a\times 1^2+b)$

$=(4a+b)+(a+b)=5a+2b=0$ ····· ㉡

(i), (ii)에 의하여 $a<0$이므로 이차함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

그러므로 조건 ㈐에서 $-2\le x\le 2$일 때 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 -26을 가진다.

$f(-2)=a\times(-3)^2+b=9a+b=-26$, $b=-26-9a$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a=-4$이고 $b=10$이다.

따라서 $f(x)=-4(x-1)^2+10$이므로

$f(3)=-4\times(3-1)^2+10=-6$

441 ····· 답 ②

조건 ㈎에서 이차함수 $y=f(x)$의 축은 $x=2$이므로

$f(x)=ax^2-4ax+b$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)라 하자. ····· ㉠

조건 ㈏에서 이차방정식 $f(x)=4x-1$, 즉

$ax^2-2(2a+2)x+b+1=0$이 중근을 가지므로

판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2a+2)^2-a(b+1)=0$ ····· ㉡

조건 ㈐에서 $1\le x\le 4$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은 5이고, 최솟값은 -3이므로 a의 값의 부호에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $a>0$일 때

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하므로

$f(4)$가 최댓값, $f(2)$가 최솟값이다.

$f(4)=a\times 4^2-4a\times 4+b=5$에서 $b=5$

$f(2)=a\times 2^2-4a\times 2+b=-3$에서 $-4a+b=-3$

즉, $-4a=-8$ ($\because b=5$)에서 $a=2$이므로

$f(x)=2x^2-8x+5$ 이다.

㉡에서 $a=2$, $b=5$일 때, $\dfrac{D}{4}=6^2-2(5+1)=24\ne 0$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로

$f(2)$가 최댓값, $f(4)$가 최솟값이다.

$f(4)=b=-3$, $f(2)=-4a+b=5$에서 $-4a=8$ ($\because b=-3$)

즉 $a=-2$이므로 $f(x)=-2x^2+8x-3$이다.

㉡에서 $a=-2$, $b=-3$일 때,

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2+2(-3+1)=0$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=-2x^2+8x-3$이고,

α, β가 방정식 $f(x)=3$의 두 실근이므로

$-2x^2+8x-3=3$, $x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$

442 ····· 답 ⑤

네 꼭짓점 부분을 잘라내기 전의 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 x, y라 하자.

종이를 잘라내고 남은 부분의 둘레의 길이는 종이를 자르기 전의 직사각형의 둘레의 길이와 같으므로

$2(x+y)=40$에서 $x+y=20$이다. ····· ㉠

남은 종이의 넓이는 직사각형의 넓이에서

한 변의 길이가 2인 정사각형 4개의 넓이를 뺀 것과 같으므로

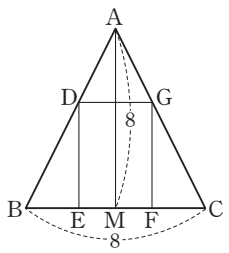
$xy-4\times 2^2=xy-16$ ····· ㉡

아끄하ㅓ이ㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ새이ㅅㅣ(사ㅏ이)_해새ㅅ서ㄹ.indb 86 22. 9. 14. 오후 8:20

㉡에 ㉠을 대입하면
$xy-16=x(20-x)-16=-x^2+20x-16$
$=-(x-10)^2+84$
따라서 구하는 남은 종이의 넓이의 최댓값은 84이다.

443 ····· 답 16

다음과 같이 이등변삼각형의 꼭짓점을 A, B, C,
직사각형의 꼭짓점을 D, E, F, G, 선분 EF의 중점을 M이라 하자.



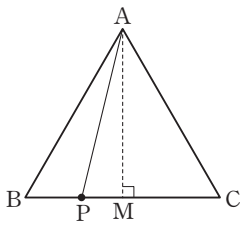
삼각형 ABM과 삼각형 DBE가 서로 닮음이고,
$\overline{BM}:\overline{AM}=1:2$이므로 $\overline{DE}=2\overline{BE}$이다.
$\overline{EM}=a\ (0<a<4)$라 하면
$\overline{BE}=4-a$, $\overline{DE}=2(4-a)$
이므로 직사각형 DEFG의 넓이는
$2a\times2(4-a)=-4(a^2-4a)$
$=-4(a-2)^2+16$
따라서 $0<a<4$에서 $a=2$일 때,
직사각형의 넓이는 최댓값은 16을 갖는다.

444 ····· 답 ①

사각형 PQRS의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이에서 네 삼각형 SAP, PBQ, QCR, RDS의 넓이를 뺀 것과 같다.
직사각형 ABCD의 넓이는 15이고,
$\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}=\overline{DS}=x$라 하면
두 삼각형 SAP, QCR의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}x(5-x)$이고,
두 삼각형 PBQ, RDS의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}x(3-x)$이다.
따라서 사각형 PQRS의 넓이는
$15-\{x(5-x)+x(3-x)\}=2x^2-8x+15$
$=2(x-2)^2+7$
이므로 $x=2$일 때, 최솟값 7을 갖는다.

445 ····· 답 ②

점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면
$\overline{AM}=2\sqrt{3}$이다.



이때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이 최소가 되려면 점 P가 선분 BM 위에 존재해야 한다. ····· 참고
$\overline{PM}=t\ (0\le t\le2)$라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{PM}^2+\overline{AM}^2+\overline{BP}^2$
$=t^2+(2\sqrt{3})^2+(2-t)^2$
$=2t^2-4t+16=2(t^2-2t+8)$
$=2(t-1)^2+14$
이므로 $t=1$일 때, 최솟값 14를 갖는다.

참고
점 P가 선분 CM 위에 존재할 경우
$\overline{AP}\ge\overline{AM}$, $\overline{BP}\ge\overline{BM}$이므로
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2\ge\overline{AM}^2+\overline{BM}^2$이 되어 점 P가 점 M일 때
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소이다.
따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최솟값을 갖도록 하는 점 P는 선분 BM 위에 존재해야 한다.

446 ····· 답 50

판매 금액이 a % 증가할 때, 판매 대수는 $2a$ 감소하므로
한 달 동안 총 판매 금액을 $f(a)$라 하면
$f(a)=100(1+0.01a)(300-2a)$
$=(100+a)(300-2a)$
$=-2a^2+100a+30000$
$=-2(a-25)^2+31250$
따라서 노트북의 이번 달의 판매 금액이 지난달의 판매 금액보다 25 % 증가할 때, 총 판매 금액이 31250(만 원)으로 최대가 된다.
$\therefore\ \frac{b}{a^2}=\frac{31250}{25^2}=50$

447 ····· 답 ⑤

두 직선 $y=x+4$, $y=-2x+7$이 만나는 점의 좌표는
$x+4=-2x+7$에서 $x=1$이므로 (1, 5)이다.
이때, 직선 $y=x+4$ 위에 있는 직사각형의 한 꼭짓점을 $A(a,\ a+4)$, 직선 $y=-2x+7$ 위에 있는 직사각형의 한 꼭짓점을 $B(b,\ -2b+7)$이라 하면 두 점의 y좌표가 서로 같으므로
$a+4=-2b+7$에서 $a=3-2b$ ····· ㉠
직사각형의 가로의 길이는 $b-a$, 세로의 길이는 $a+4$이므로
이 직사각형의 넓이는
$(b-a)(a+4)=\{b-(3-2b)\}\{(3-2b)+4\}\ (\because$ ㉠$)$
$=(3b-3)(-2b+7)$
$=-6b^2+27b-21$
$=-6\left(b-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{243}{8}-21$
$=-6\left(b-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{75}{8}$
따라서 $b=\frac{9}{4}$일 때, 직사각형의 넓이는 최댓값 $\frac{75}{8}$를 갖는다.

아끄하ㅓ이ㄴ내ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_하내ㅅㅓㄹ.indb 87 22. 9. 14. 오후 8:20

448 ····· 답 ①

네 점 A$(a,\ a^2-7)$, B$(a,\ -2a^2+5)$, C$(-a,\ -2a^2+5)$, D$(-a,\ a^2-7)$에서

$\overline{AD}=\overline{BC}=a-(-a)=2a$

$\overline{BA}=\overline{CD}=(-2a^2+5)-(a^2-7)$

$=-3a^2+12$

이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $h(a)$라 하면

$h(a)=\overline{AD}+\overline{BC}+\overline{BA}+\overline{CD}$

$=2(\overline{AD}+\overline{BA})$

$=2(2a-3a^2+12)$

$=-6\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{74}{3}$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는 $a=\frac{1}{3}$일 때 최대이다.

449 ····· 답 ③

$y=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$이므로 이 이차함수의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

점 A의 좌표를 $(a,\ -a^2+8a)$ $(0<a<4)$라 하면

점 D의 x좌표는 $8-a$이므로 $\overline{AD}=8-2a$이다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(\overline{AB}+\overline{AD})=2(-a^2+8a+8-2a)$

$=-2(a^2-6a-8)$

$=-2(a-3)^2+34$

이므로 $a=3$일 때, 최댓값 34를 갖는다.

450 ····· 답 ②

점 P에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x+1$과 만나는 점을 R라 하면 $\overline{PQ}=\overline{PR}$ ····· TIP

P$(a,\ b)$에서

$\overline{PR}=(a^2+3)-(a+1)$

$=a^2-a+2$

$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

이므로 $a=\frac{1}{2}$일 때, $\overline{PQ}$는 최솟값 $m=\frac{7}{4}$을 갖는다.

또한, 점 P$(a,\ b)$가 함수 $y=x^2+3$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2+3=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$

$\therefore\ a+b+m=\frac{1}{2}+\frac{13}{4}+\frac{7}{4}$

$=\frac{11}{2}$

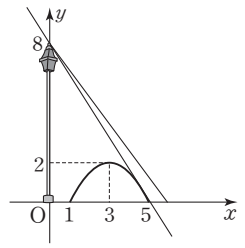
TIP

직선 RQ의 기울기는 $\frac{(y\text{의 증가량})}{(x\text{의 증가량})}=\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=1$

이므로 $\overline{PQ}=\overline{PR}$이다.

451 ····· 답 ②

다음과 같이 지면을 x축, 가로등을 y축으로 하여 좌표평면 위에 놓으면 가로등 불빛은 점 (0, 8)이고, 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (3, 2)이고, 점 (1, 0)을 지난다.



포물선의 방정식을 $y=k(x-3)^2+2$ $(k\neq0)$라 하고,

$x=1$, $y=0$을 대입하면 $k=-\frac{1}{2}$이므로

$y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$

지면에 비춘 빛이 비닐하우스와 가장 가까울 때는 빛이 지나는 경로가 포물선에 접할 때이다.

점 (0, 8)을 지나는 직선을 $y=mx+8$ $(m<0)$이라 하면

이차방정식 $-\frac{1}{2}(x-3)^2+2=mx+8$, 즉

$x^2+(2m-6)x+21=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(m-3)^2-21=0$, $m^2-6m-12=0$

$\therefore\ m=3-\sqrt{21}$ $(\because\ m<0)$

따라서 직선은 $y=(3-\sqrt{21})x+8$이고,

직선이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$\frac{8}{\sqrt{21}-3}=\frac{8(\sqrt{21}+3)}{12}=\frac{2(\sqrt{21}+3)}{3}$

452 ····· 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고, 꼭짓점은 $(a,\ b)$이므로 $x=a$일 때 최솟값 b를 갖는다.

ㄱ. $a=\frac{1}{2}$일 때, $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+b$이고 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 3을 가지므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=b=3$이다. (참)

ㄴ. $a>2$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값을 가지므로 $f(2)=(2-a)^2+b=3$이고 $b=-a^2+4a-1$이다. (참)

ㄷ. (i) $a\leq0$인 경우

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 가지므로

$f(0)=a^2+b=3$, $b=-a^2+3$에서

$a+b=-a^2+a+3=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

그러므로 $a+b$는 $a=0$에서 최댓값 3을 갖는다.

(ii) $0<a\leq2$인 경우

$f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $b=3$을 가지므로

$3<a+b\leq5$이고 $a+b$는 $a=2$에서 최댓값 5를 가진다.

(iii) $a>2$인 경우

ㄴ에서 $b=-a^2+4a-1$이고

아끄하ㅓㅇㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ새ㅅㅓㄹ.indb 88 22. 9. 14. 오후 8:20

$a+b=-a^2+5a-1=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{21}{4}$이고

$a+b$는 $a=\frac{5}{2}$에서 최댓값 $\frac{21}{4}$을 가진다.

(i)~(iii)에 의하여 $a+b$의 최댓값은 $\frac{21}{4}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

453 ····· 답 ④

이차함수 $y=x^2+2ax+a^2-12$의 그래프와 직선 $y=2x-n$이 서로 다른 두 점에서 만나므로
방정식 $x^2+2ax+a^2-12=2x-n$,
$x^2+2(a-1)x+a^2+n-12=0$이 서로 다른 두 실근을 가진다.
이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2+n-12)$

$=-2a-n+13>0$

에서 $n<13-2a$ ····· ㉠

ㄱ. $a=2$를 ㉠에 대입하면 $n<13-4=9$이고, 이 부등식을 만족시키는 자연수 n의 개수는 8이므로 $f(2)=8$이다. (참)

ㄴ. (반례) $x_1=0.1$, $x_2=0.2$이면 ㉠에 대입했을 때,
$n<13-0.2=12.8$에서 $f(0.1)=12$이고
$n<13-0.4=12.6$에서 $f(0.2)=12$이다.
즉, $x_1<x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$이다. (거짓)

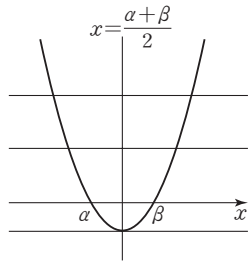
ㄷ. $a=0$일 때, $n<13$에서 $f(0)=12$
$a=1$일 때, $n<13-2=11$에서 $f(1)=10$
$a=2$일 때, $n<13-4=9$에서 $f(2)=8$
$a=3$일 때, $n<13-6=7$에서 $f(3)=6$
$a=4$일 때, $n<13-8=5$에서 $f(4)=4$
$a=5$일 때, $n<13-10=3$에서 $f(5)=2$
$a\geq 6$일 때, $n<13-2a\leq 1$이므로 $f(a)=0$이다.
$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(100)=12+10+8+6+4+2$
$=42$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

454 ····· 답 ②

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $\beta-\alpha=a$이고,
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$ $(k\neq 0)$이다.
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 두 점 사이의 거리가 $a+4$이므로 두 교점의 x좌표는 각각 $\alpha-2$, $\beta+2$이다.
즉, 방정식 $f(x)=2$의 두 실근이 $\alpha-2$, $\beta+2$이므로
$f(\beta+2)=2k(\beta-\alpha+2)=2$에서 $k(a+2)=1$ ····· ㉠
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=6$과 만나는 두 점 사이의 거리가 $a+8$이므로 두 교점의 x좌표는 각각 $\alpha-4$, $\beta+4$이다.
즉, 방정식 $f(x)=6$의 두 실근이 $\alpha-4$, $\beta+4$이므로
$f(\beta+4)=4k(\beta-\alpha+4)=6$에서 $2k(a+4)=3$ ····· ㉡
㉠, ㉡의 양변을 각각 나누면
$\frac{a+2}{2(a+4)}=\frac{1}{3}$, $3(a+2)=2(a+4)$
$\therefore a=2$
이를 ㉠에 대입하면 $k=\frac{1}{4}$
따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x-\alpha)(x-\beta)$이므로
$m=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{\beta-\alpha}{2}\times\frac{\alpha-\beta}{2}$ ····· TIP
$=-\frac{1}{16}a^2=-\frac{1}{4}$

TIP
이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 각각 α, β $(\alpha<\beta)$이면 이차함수의 그래프는 다음과 같다.



즉, 이 이차함수의 그래프는 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$에 대하여 대칭이다.

455 ····· 답 ③

조건 (가)에 의하여 $c=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx$
조건 (나)에 의하여
$f(-2)+f(2)=(4a-2b)+(4a+2b)=8a<0$
이므로 $a<0$
이때, 조건 (다)에 의하여 $-2\leq x\leq 2$에서 x의 값이 커질수록 함숫값 $f(x)$는 작아져야 하고, 축이 직선 $x=-\frac{b}{2a}$이므로

$-\frac{b}{2a}\leq -2$

ㄱ. $f(0)=0$이고, 조건 (다)에 의하여 $f(0)>f(1)$이므로 $f(1)<0$이다. (참)

ㄴ. $-\frac{b}{2a}\leq -2$에서 $a<0$이므로 양변에 $-2a$를 곱하면
$b\leq 4a$ ($\because -2a>0$)이다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$이고,
$-\frac{b}{2a}\leq -2$에서 $-\frac{b}{a}\leq -4$이다.
즉, 두 근의 합은 -4보다 작거나 같다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

456 ····· 답 ④

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 (p, kp)라 하면
$f(x)=(x-p)^2+kp$ ····· ㉠

아끄하이노내시니그노조재으시(사으)_하내시서르.indb 89 22. 9. 14. 오후 8:20

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 $\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\right)$이므로 ㉠에서

$p=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\right)$ …… ㉡

이때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+5$의 서로 다른 두 교점의 x좌표가 각각 α, β이므로 방정식 $f(x)=kx+5$의 서로 다른 두 실근이 α, β이다.

$f(x)-(kx+5)=(x-p)^2+kp-(kx+5)$

$=x^2-(2p+k)x+p^2+kp-5$

방정식 $x^2-(2p+k)x+p^2+kp-5=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2p+k$이므로

$\alpha+\beta=\alpha+\beta-\frac{1}{2}+k$ ($\because$ ㉡) $\therefore k=\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha+\beta=2p+\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=p^2+\frac{1}{2}p-5$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\left(2p+\frac{1}{2}\right)^2-4\left(p^2+\frac{1}{2}p-5\right)$

$=\left(4p^2+2p+\frac{1}{4}\right)-4\left(p^2+\frac{1}{2}p-5\right)$

$=\frac{1}{4}+20=\frac{81}{4}$

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$

457 ····· 답 24

최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 A(3, 0), B(k, 0)을 지나므로 $f(x)=-(x-3)(x-k)$라 하면

$f(x)=-\{x^2-(k+3)x+3k\}$

$=-\left(x-\frac{k+3}{2}\right)^2+\frac{(k+3)^2}{4}-3k$

$=-\left(x-\frac{k+3}{2}\right)^2+\frac{(k-3)^2}{4}$

이므로 꼭짓점의 좌표는 C$\left(\frac{k+3}{2}, \frac{(k-3)^2}{4}\right)$이다.

이때, 직선 BD는 직선 AC와 기울기가 같고,

직선 AC의 기울기는 $\frac{\frac{(k-3)^2}{4}}{\frac{k+3}{2}-3}=\frac{k-3}{2}$이므로

직선 BD의 방정식은 $y=\frac{k-3}{2}(x-k)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{k-3}{2}(x-k)$가 두 점 B, D에서 만나므로

$-(x-3)(x-k)=\frac{k-3}{2}(x-k)$, $(x-k)\left\{\frac{k-3}{2}+(x-3)\right\}=0$

$(x-k)\left(x+\frac{k-9}{2}\right)=0$에서 $x=k$ 또는 $x=\frac{9-k}{2}$

그러므로 점 D의 x좌표는 $x=\frac{9-k}{2}$이고,

y좌표는 $y=\frac{k-3}{2}\left(\frac{9-k}{2}-k\right)=-\frac{3(k-3)^2}{4}$

삼각형 AED의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{9-k}{2}\right)\times\frac{3(k-3)^2}{4}=12$, $(k-3)(k-3)^2=64$

$(k-3)^3=4^3$이므로 $k-3=4$에서 $k=7$

이때, 삼각형 ADB의 밑변의 길이는 $\overline{AB}=k-3=4$이고,

높이는 $\frac{3(k-3)^2}{4}=\frac{3}{4}\times4^2=12$이므로

넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times12=24$

458 ····· 답 8

함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=nx$가 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2=nx$, $x^2-nx=x(x-n)=0$에서

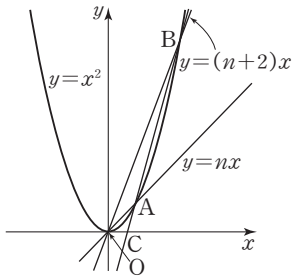
$x=0$ 또는 $x=n$이므로 A(n, n^2)이다.

함수 $y=x^2$과 직선 $y=(n+2)x$가 두 점에서 만나므로

$x^2=(n+2)x$, $x^2-(n+2)x=x\{x-(n+2)\}=0$에서

$x=0$ 또는 $x=n+2$이므로 B$((n+2, (n+2)^2)$이다.

그림과 같이 두 점 A, B를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하면 삼각형 OAB의 넓이는 삼각형 BOC의 넓이에서 삼각형 AOC의 넓이를 뺀 것과 같다.



두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{(n+2)^2-n^2}{(n+2)-n}=\frac{4n+4}{2}=2(n+1)$이고,

이 직선이 점 A(n, n^2)을 지나므로 직선의 방정식은

$y=2(n+1)(x-n)+n^2$

이 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$2(n+1)(x-n)+n^2=0$, $2(n+1)x=n^2+2n$에서

$x=\frac{n(n+2)}{2(n+1)}$이므로 C$\left(\frac{n(n+2)}{2(n+1)}, 0\right)$이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{n(n+2)}{2(n+1)}\times(n+2)^2-\frac{1}{2}\times\frac{n(n+2)}{2(n+1)}\times n^2$

$=\frac{n(n+2)}{4(n+1)}\{(n+2)^2-n^2\}$

$=\frac{n(n+2)}{4(n+1)}\times4(n+1)$

$=n(n+2)$

$n(n+2)=80$, $n^2+2n-80=0$

$(n+10)(n-8)=0$이므로 $n=8$ ($\because n>0$)이다.

아끄하셔이느내시시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 90 22. 9. 14. 오후 8:20

459 ····· 답 ④

조건 (가)에 의하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=-2$이고, 조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

따라서 조건을 만족시키는 이차함수는

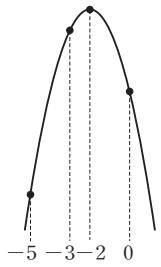
$f(x)=a(x+2)^2+b$ (a, b는 실수, $a<0$)이다.

① 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다. (참)

② $f(x)=a(x+2)^2+b$ ($a<0$)이므로 $x=-2$에서 최댓값을 갖는다. (참)

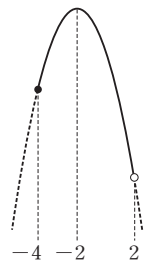
③ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같으므로

$f(-3)>f(0)>f(-5)$이다. (참)



④ $f(x)=a(x+2)^2+b=ax^2+4ax+4a+b$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합은 -4이다. (거짓)

⑤ $-4\le x<2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



그러므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 존재하지 않는다. (참)

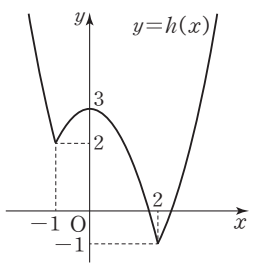
따라서 선지 중 옳지 않은 것은 ④이다.

460 ····· 답 5

방정식 $f(x)=g(x)$에서 $x^2-2x-1=-x^2+3$, $2x^2-2x-4=0$

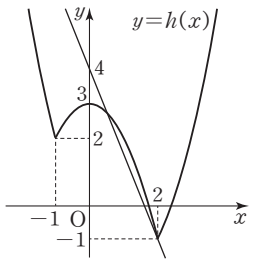
$2(x+1)(x-2)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(-1, 2)$, $(2, -1)$에서 만난다.

그러므로 함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ g(x) & (-1<x<2) \end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.



직선 $y=kx+4$는 점 $(0, 4)$를 지나는 직선이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+4$가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=kx+4$가 점 $(2, -1)$을 지나는 경우



직선 $y=kx+4$에 점 $(2, -1)$을 대입하면

$-1=2k+4$ $\quad\therefore k=-\frac{5}{2}$

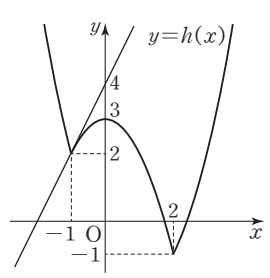
(ii) 직선 $y=kx+4$가 함수 $y=g(x)$의 그래프에 접하는 경우

방정식 $g(x)=kx+4$가 중근을 가지므로 방정식 $x^2+kx+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=k^2-4=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=-2$

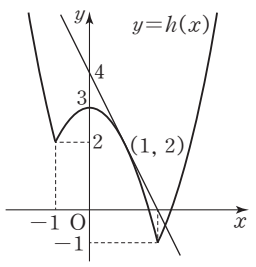
$k=2$일 때 직선은 $y=2x+4$이고, 방정식 $g(x)=2x+4$에서 $-x^2+3=2x+4$, $x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$이므로 $x=-1$이다.

즉, 접하는 점이 $(-1, 2)$이므로 다음과 같이 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+4$는 서로 다른 두 점에서 만난다.



$k=-2$일 때 직선은 $y=-2x+4$이고, 방정식 $g(x)=-2x+4$에서 $-x^2+3=-2x+4$, $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$이므로 $x=1$이다.

즉, 접하는 점이 $(1, 2)$이므로 다음과 같이 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=-2x+4$는 점 $(1, 2)$를 포함한 서로 다른 세 점에서 만난다.



(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은

$\left(-\frac{5}{2}\right)\times(-2)=5$

461 ····· 답 ③

조건 (가)에서 $f(x)g(x)=(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)$이고,

조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 차가 6이 되어야 하므로

아쁘형수나책시ㅣ느ㄱ쇼재으시ㅣ(사ㅇ)_해서설르.indb 91 22. 9. 14. 오후 8:20

0이 아닌 상수 a에 대하여

$f(x)=a(x+2)(x-4)$, $g(x)=\frac{1}{a}(x+4)(x-2)$ 또는

$f(x)=a(x+4)(x-2)$, $g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-4)$이다.

ㄱ. $f(2)=0$이면 $f(x)=a(x+4)(x-2)$,

$g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-4)$인 경우이므로 $g(4)=0$이다. (참)

ㄴ. $g(-2)>0$이면 $f(x)=a(x+2)(x-4)$,

$g(x)=\frac{1}{a}(x+4)(x-2)$이고,

함수 $y=g(x)$의 그래프가 위로 볼록해야 하므로 $a<0$이다.

함수 $f(x)=a(x+2)(x-4)$의 축은 $x=\frac{-2+4}{2}=1$이고,

$a<0$이므로 $-3\le x\le 3$에서 최솟값은 $f(-3)$이다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=a(x+2)(x-4)$, $g(x)=\frac{1}{a}(x+4)(x-2)$인 경우

방정식 $f(x)-g(x)=0$은

$a(x^2-2x-8)-\frac{1}{a}(x^2+2x-8)=0$

$\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2-2\left(a+\frac{1}{a}\right)x-8\left(a-\frac{1}{a}\right)=0$

$(a^2-1)x^2-2(a^2+1)x-8(a^2-1)=0$ ($\because a\neq 0$)

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}$, $mn=\frac{-8(a^2-1)}{a^2-1}=-8$

이므로 $a^2-1\neq 0$에서 $a\neq 1$, $a\neq -1$이다.

두 근의 곱이 -8이므로 가능한 순서쌍 (m, n)은

$(-1, 8)$, $(1, -8)$, $(8, -1)$, $(-8, 1)$, $(-2, 4)$, $(2, -4)$,

$(4, -2)$, $(-4, 2)$이다.

$(-1, 8)$, $(1, -8)$, $(8, -1)$, $(-8, 1)$인 경우 두 근의 합은

7 또는 -7이므로

$\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}=7$에서 $2a^2+2=7a^2-7$, $5a^2=9$, $a=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}=-7$에서 $2a^2+2=-7a^2+7$, $9a^2=5$, $a=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$(-2, 4)$, $(2, -4)$, $(4, -2)$, $(-4, 2)$인 경우 두 근의 합은

2 또는 -2이므로

$\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}=2$에서 $2a^2+2=2a^2-2$, $2\neq -2$, 즉

식을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

$\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}=-2$에서 $2a^2+2=-2a^2+2$, $4a^2=0$

이때, $a\neq 0$이므로 식을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

$f(x)=a(x+4)(x-2)$, $g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-4)$인 경우

방정식 $f(x)-g(x)=0$은

$(a^2-1)x^2+2(a^2+1)x-8(a^2-1)=0$ ($\because a\neq 0$)

에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=\frac{-2(a^2+1)}{a^2-1}$, $mn=\frac{-8(a^2+1)}{a^2-1}=-8$

두 근의 곱이 -8이므로 가능한 순서쌍 (m, n)은 위와 동일하게

$(-1, 8)$, $(1, -8)$, $(8, -1)$, $(-8, 1)$, $(-2, 4)$, $(2, -4)$,

$(4, -2)$, $(-4, 2)$이다.

$(-1, 8)$, $(1, -8)$, $(8, -1)$, $(-8, 1)$인 경우 두 근의 합은

7 또는 -7이므로

$\frac{-2(a^2+1)}{a^2-1}=7$에서 $-2a^2-2=7a^2-7$, $9a^2=5$, $a=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{-2(a^2+1)}{a^2-1}=-7$에서 $2a^2+2=7a^2-7$, $5a^2=9$, $a=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$

$(-2, 4)$, $(2, -4)$, $(4, -2)$, $(-4, 2)$인 경우 두 근의 합은

2 또는 -2이므로

$\frac{-2(a^2+1)}{a^2-1}=2$에서 $-2a^2-2=2a^2-2$, $4a^2=0$

이때, $a\neq 0$이므로 식을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

$\frac{-2(a^2+1)}{a^2-1}=-2$에서 $2a^2+2=2a^2-2$, $2\neq -2$, 즉

식을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

따라서 방정식 $f(x)-g(x)=0$이 서로 다른 두 정수근을 가지면

두 근의 합은 7 또는 -7만 가능하므로 $|m+n|=7$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

462 ····· 답 9

$f(x)=ax^2-2abx+3=a(x-b)^2+3-ab^2$이므로

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(b, 3-ab^2)$이다.

a의 부호에 따라서 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $a>0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 b의 값의 범위에

따라 최솟값을 구하면 다음과 같다.

(i −㉠) $b<-2$인 경우

$x=-2$일 때 최솟값을 가지므로

$4a+4ab+3=-5$, $a(1+b)=-2$이다.

조건을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍은

$(1, -3)$으로 1개이다.

(i −㉡) $-2\le b\le 2$인 경우

$x=b$일 때 최솟값을 가지므로

$3-ab^2=-5$, $ab^2=8$이다.

조건을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍은

$(8, 1)$, $(8, -1)$, $(2, 2)$, $(2, -2)$로 4개이다.

(i −㉢) $b>2$인 경우

$x=2$일 때 최솟값을 가지므로

$4a-4ab+3=-5$, $a(b-1)=2$이다.

조건을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍은

$(1, 3)$으로 1개이다.

(ii) $a<0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 b의 값의 범위에 따라

최솟값을 구하면 다음과 같다.

(ii −㉠) $b<0$인 경우

$x=2$일 때 최솟값을 가지므로

$4a-4ab+3=-5$, $a(b-1)=2$이다.

조건을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍은

$(-1, -1)$로 1개이다.

(ii −㉡) $b\ge 0$인 경우

$x=-2$일 때 최솟값을 가지므로

아까하우스개스니그고조재우스시(사우)_해설서류.indb 92 22. 9. 14. 오후 8:20

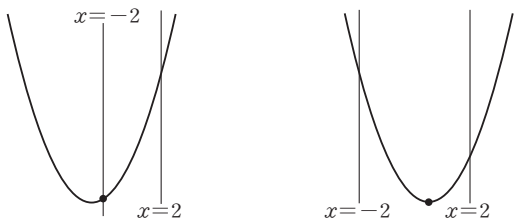
$4a+4ab+3=-5$, $a(1+b)=-2$이다.
조건을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍은
$(-2, 0)$, $(-1, 1)$로 2개이다.
(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$1+4+1+1+2=9$

TIP

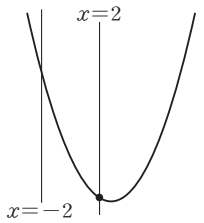
❶ $a>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $-2\le b\le 2$인 경우 꼭짓점에서 최솟값을 갖고, $b>2$인 경우 대칭축과 가장 가까운 점인 $x=2$일 때 최솟값을 갖고, $b<-2$인 경우 대칭축과 가장 가까운 점인 $x=-2$일 때 최솟값을 갖는다.
❷ $a<0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 대칭축과 가장 멀리 떨어진 점에서 최솟값을 가지므로 $b\ge 0$인 경우 $x=-2$일 때 최솟값을 갖고, $b<0$인 경우 $x=2$일 때 최솟값을 갖는다.

TIP

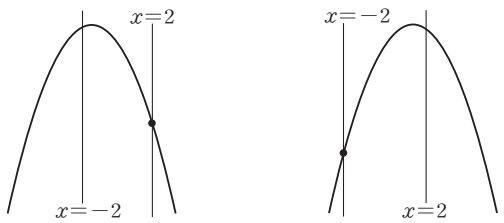
❶ $a>0$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프는 b의 값의 범위에 따라 다음과 같다.
(i -㉠) $b<-2$일 때 (i -㉡) $-2\le b\le 2$일 때



(i -㉢) $b>2$일 때



❷ $a<0$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프는 b의 값의 범위에 따라 다음과 같다.
(ii -㉠) $b<0$일 때 (ii -㉡) $b\ge 0$일 때



463 ····· 답 $-\frac{13}{3}$

조건 (나)에서 $f(x)-f(k)\ge h(x)-h(k)$이므로 양변을 $x-k$로 각각 나누면
$x>k$일 때 $\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\ge\frac{h(x)-h(k)}{x-k}$이고,
$x<k$일 때 $\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\le\frac{h(x)-h(k)}{x-k}$이다.
즉, $x>k$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(x, f(x))$, $(k, f(k))$를 지나는 직선의 기울기가 직선 $y=h(x)$의 기울기보다 항상 크거나 같고, $x<k$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(x, f(x))$, $(k, f(k))$를 지나는 직선의 기울기가 직선 $y=h(x)$의 기울기보다 항상 작거나 같다.
조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=h(x)$와 오직 한 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=k$에서 직선 $y=h(x)$와 접한다.
마찬가지로 $g(x)-g(2k)\ge h(x)-h(2k)$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=2k$에서 직선 $y=h(x)$와 접한다.
이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 최고차항의 계수가 각각 1, 4이므로
$f(x)-h(x)=(x-k)^2$
$g(x)-h(x)=4(x-2k)^2=(2x-4k)^2$
이때, 두 식의 양변을 각각 빼주면
$f(x)-g(x)=(x-k)^2-(2x-4k)^2$
$=\{(x-k)+(2x-4k)\}\{(x-k)-(2x-4k)\}$
$=(3x-5k)(-x+3k)$ ····· ㉠
그러므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는
$x=\frac{5}{3}k$ 또는 $x=3k$에서 만난다.
조건 (다)에서 두 이차함수가 만나는 점의 x좌표 중 더 큰 값이 1이므로 $3k=1$ ($\because k>0$)에서 $k=\frac{1}{3}$이고, $a=\frac{5}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$이다.
이를 ㉠에 대입하면 $f(x)-g(x)=-\left(3x-\frac{5}{3}\right)(x-1)$
$\therefore f(2)-g(2)=-\left(3\times 2-\frac{5}{3}\right)(2-1)$
$=-\frac{13}{3}$

464 ····· 답 ⑤

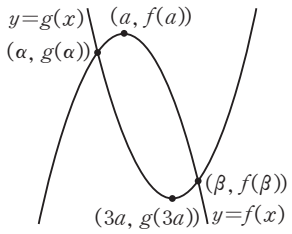
ㄱ. $a=1$이면 $f(x)=-x^2+2x$, $g(x)=x^2-6x+b$이고 방정식 $f(x)-g(x)=-2x^2+8x-b=0$의 두 근 α, β가 $\beta-\alpha=4$를 만족하므로 두 근은 α, $\alpha+4$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+4)=4$에서 $\alpha=0$이고,
$\alpha\beta=\frac{b}{2}$에서 $b=0$ ($\because \alpha=0$) (참)

ㄴ. $f(x)=-(x-a)^2+a^2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(a)=a^2$이고, $g(x)=(x-3a)^2-9a^2+b$에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 $g(3a)=-9a^2+b$이다.
조건 (가)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만나므로 $f(a)>g(3a)$이다.
이때, $f(\beta)-g(\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)$ ($\because f(\alpha)=g(\alpha)$)는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 두 점에서의 y좌표를 서로 뺀 값이고, $f(a)-g(3a)$는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 꼭짓점의 y좌표를 서로 뺀 값이다.
a의 값의 부호에 따라 $f(a)-f(\beta)$와 $f(a)-g(3a)$의 값을 비교하면 다음과 같다.

아쿠하이스쿨시그마조재우시(사이)_해설서로.indb 93 22. 9. 14. 오후 8:20

(i) $a>0$일 때

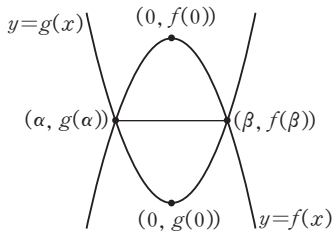
$a<3a$이므로 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $f(\beta)-g(\alpha)<f(a)-g(3a)$이다.

(ii) $a=0$일 때

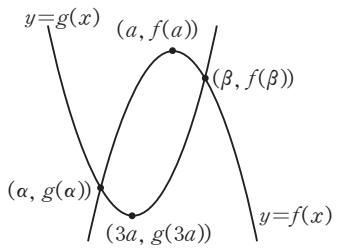
$a=3a=0$이므로 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $f(\beta)-g(\alpha)<f(a)-g(3a)$이다.

(iii) $a<0$일 때

$a>3a$이므로 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $f(\beta)-g(\alpha)\le f(a)-g(3a)$이다.

(i)~(iii)에서 항상 $f(\beta)-g(\alpha)\le f(a)-g(3a)$가 성립한다. (참)

ㄷ. $f(\alpha)=g(\beta)+10a^2-b$에서 $g(\beta)=f(\beta)$이므로

$f(\alpha)-f(\beta)=10a^2-b$이고,

$f(a)-g(3a)=a^2-(-9a^2+b)=10a^2-b$이므로

$f(\alpha)-f(\beta)=f(a)-g(3a)$이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 두 점이 각각 두 함수의 그래프의 꼭짓점이 되어야 한다. …… ㉠

(i) $a>0$인 경우

$a<3a$이므로 $\alpha=a$, $\beta=3a$이고 $\beta-\alpha=4$이므로

$3a=a+4$, $a=2$이다. 즉, 두 근은 2, 6이고 방정식

$f(x)-g(x)=-x^2+4x-(x^2-12x+b)=0$, 즉

$2x^2-16x+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{b}{2}=12$, $b=24$

그러므로 $a+b=2+24=26$이다.

(ii) $a=0$인 경우

ㄴ에서 $f(\beta)-f(\alpha)=0$이므로 ㉠을 만족하는 경우는 없다.

(iii) $a<0$인 경우

ㄴ에서 ㉠을 만족하는 경우는 없다.

(i)~(iii)에서 $a+b=26$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 모두 참이다.

465

립 243

방정식 $x^2-4x+2=-2x^2+2x+8$, $3x^2-6x-6=0$, 즉

$x^2-2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=12$ $\therefore |\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$

(사각형 ADBC의 넓이)

=(삼각형 ADC의 넓이)+(삼각형 BCD의 넓이)이고,

삼각형 ADC의 밑변이 선분 CD일 때 높이를 h_1,

삼각형 BCD의 밑변이 선분 CD일 때 높이를 h_2라 하면

$$(\text{사각형 ADBC의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times h_1+\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times h_2$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times(h_1+h_2)$$

이때, $h_1+h_2=|\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$으로 일정하므로 $\overline{CD}$가 최대일 때, 사각형 ADBC의 넓이가 최대이다.

직선 CD의 방정식이 $x=m$ $(\alpha<m<\beta)$일 때,

$\overline{CD}=(-2m^2+2m+8)-(m^2-4m+2)$

$=-3m^2+6m+6=-3(m-1)^2+9$

이므로 $\overline{CD}$의 최댓값은 9이고,

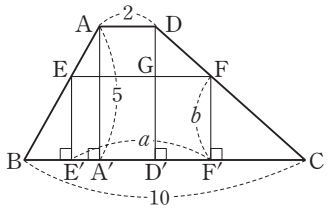
이때의 사각형 ADBC의 넓이의 최댓값은

$k=\frac{1}{2}\times9\times2\sqrt{3}=9\sqrt{3}$ $\therefore k^2=(9\sqrt{3})^2=243$

466

립 125

점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D′, 두 변 AB, DC 위에 존재하는 직사각형의 꼭짓점을 각각 E, F라 하고, 두 점 E, F에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 E′, F′이라 하자.



이 사다리꼴의 영역 안에 그린 직사각형 EE′F′F의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 넓이는 ab이다.

한편, $\overline{A'B}+\overline{D'C}=8$ …… ㉠

두 삼각형 ABA′와 EBE′가 서로 닮음이고,

두 삼각형 DD′C와 FF′C가 서로 닮음이므로

$\overline{AA'}:\overline{A'B}=\overline{EE'}:\overline{E'B}$, $\overline{DD'}:\overline{D'C}=\overline{FF'}:\overline{F'C}$

이때, $\overline{AA'}=\overline{DD'}$, $\overline{EE'}=\overline{FF'}$이므로

$\overline{AA'}:(\overline{A'B}+\overline{D'C})=\overline{EE'}:(\overline{E'B}+\overline{F'C})$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $5:8=b:(10-a)$이므로

$b=\frac{5}{8}(10-a)$

따라서 구하는 직사각형의 넓이는

$ab=\frac{5}{8}a(10-a)=-\frac{5}{8}(a-5)^2+\frac{125}{8}$

이고, $a=5$일 때 최댓값 $S=\frac{125}{8}$를 갖는다.

$\therefore 8S=125$

아쿠하이스내스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 94 22. 9. 14. 오후 8:20

03 여러 가지 방정식과 부등식

467 ····· 답 ③

$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x^2-2x+4=0$이다.
이때, 방정식 $x^2-2x+4=0$에서 $x=1\pm\sqrt{3}i$
ㄱ. 실근은 $x=-2$이다. (참)
ㄴ. 복소수 범위에서 실근 1개와 허근 2개를 가지므로 근의 개수는 3이다. (참)
ㄷ. 두 허근은 $x=1\pm\sqrt{3}i$이므로 합은 2이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

468 ····· 답 4

$f(x)=x^3+5x^2+10x+6$이라 하면
$f(-1)=-1+5-10+6=0$이므로
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	5	10	6
		-1	-4	-6
	1	4	6	0

이므로 $f(x)=(x+1)(x^2+4x+6)$ ····· ㉠
㉠에서 이차방정식 $x^2+4x+6=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-6=-2<0$이므로 서로 다른 두 허근을 가진다.
α, β는 방정식 $x^2+4x+6=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=6$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-12=4$

다른 풀이

$f(x)=x^3+5x^2+10x+6$이라 하면
$f(-1)=-1+5-10+6=0$이므로
삼차방정식 $x^3+5x^2+10x+6=0$의 세 근은 -1, α, β이다.
따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-1+\alpha+\beta=-5$, $(-1)\times\alpha\times\beta=-6$에서
$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=6$이다.
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-12=4$

469 ····· 답 ④

사차방정식 $x^4+2x^3-x^2-2x-3=0$의 네 근이 α, β, γ, δ이므로
$x^4+2x^3-x^2-2x-3=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$
이고, 모든 실수 x에 대하여 등식이 성립하므로
양변에 $x=2$를 대입하면
$16+16-4-4-3=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta)$
$\therefore (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta)=21$

470 ····· 답 ①

사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$의 모든 계수가 유리수이고 두 근이 $1-i$, $1+\sqrt{2}$이므로 나머지 두 근은 $1+i$, $1-\sqrt{2}$이다.
두 근이 $1-i$, $1+i$인 이차방정식은 두 근의 합이 2이고 곱이 2이므로 $x^2-2x+2=0$이다.
또한 두 근이 $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$인 이차방정식은 두 근의 합이 2이고 곱이 -1이므로 $x^2-2x-1=0$이다.
$\therefore x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2-2x+2)(x^2-2x-1)$
$=x^4-4x^3+5x^2-2x-2$
따라서 $a=-4$, $b=5$, $c=-2$, $d=-2$이므로
$abcd=-80$

471 ····· 답 -3

$x^4-2x^3-x+2=0$에서
$x^3(x-2)-(x-2)=0$
$(x-2)(x^3-1)=0$
$(x-2)(x-1)(x^2+x+1)=0$
이고, 방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4=-3<0$
이므로 α, β는 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.
이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$이므로
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-1)^2-4=-3$

472 ····· 답 ①

$x(x+1)(x+2)(x+3)-15=0$에서
$x(x+3)\times(x+1)(x+2)-15=0$
$(x^2+3x)(x^2+3x+2)-15=0$
이때, $x^2+3x=t$로 치환하면
$t(t+2)-15=0$, $t^2+2t-15=0$
$(t+5)(t-3)=0$에서 $(x^2+3x+5)(x^2+3x-3)=0$이므로
$x^2+3x+5=0$ 또는 $x^2+3x-3=0$
이 중에서 허근을 갖는 방정식은 $x^2+3x+5=0$이므로 ω는 이 방정식의 근이다.
따라서 $\omega^2+3\omega+5=0$이므로
$\omega^2+3\omega=-5$

473 ····· 답 ④

$x^4-16x^2+36=0$에서 $x^4-12x^2+36-4x^2=0$
$(x^2-6)^2-(2x)^2=0$, 즉 $(x^2+2x-6)(x^2-2x-6)=0$에서
이차방정식 $x^2+2x-6=0$의 근은 $x=-1\pm\sqrt{7}$이고,
이차방정식 $x^2-2x-6=0$의 근은 $x=1\pm\sqrt{7}$이다.
따라서 $M=1+\sqrt{7}$, $m=-1-\sqrt{7}$에서
$M-m=2+2\sqrt{7}$

아쿠하이스쿨시스템조재우시(사이)_해설서로.indb 95 22. 9. 14. 오후 8:20

474 답 ①

주어진 방정식의 한 근이 -2이므로 이를 방정식에 대입하면
$16+32-4-32-a=0$에서 $a=12$
그러므로 방정식은 $x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$이고
$x=1$을 대입하면 등식을 만족시키며 주어진 조건에서 -2가 한 근이므로 조립제법으로 인수분해하면 다음과 같다.

-2	1	-4	-1	16	-12
		-2	12	-22	12
1	1	-6	11	-6	0
		1	-5	6	
	1	-5	6	0	

$x^4-4x^3-x^2+16x-12=(x+2)(x-1)(x^2-5x+6)$
$=(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)$
이므로 -2를 제외한 나머지 세 근은 1, 2, 3이다.
따라서 나머지 세 근의 곱은
$1\times2\times3=6$

475 답 $k>\frac{1}{4}$

$x^3+2kx^2+(k^2+2k-1)x+k^2=0$에 $x=-1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

-1	1	$2k$	k^2+2k-1	k^2
		-1	$-2k+1$	$-k^2$
	1	$2k-1$	k^2	0

$(x+1)\{x^2+(2k-1)x+k^2\}=0$
이고, 방정식 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$이 두 허근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(2k-1)^2-4k^2<0$, $-4k+1<0$
$\therefore k>\frac{1}{4}$

476 답 ②

삼차방정식 $x^3+kx-2=0$이 중근 α와 또 다른 실근 β를 가지므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2\alpha+\beta=0$ …… ㉠
$\alpha^2+2\alpha\beta=k$ …… ㉡
$\alpha^2\beta=2$ …… ㉢
㉢에 ㉠을 대입하면
$\alpha^2(-2\alpha)=2$, $\alpha^3=-1$
$\therefore \alpha=-1$
$\alpha=-1$을 ㉢에 대입하면 $\beta=2$
$\alpha=-1$, $\beta=2$를 ㉡에 대입하면 $k=-3$
$\therefore k+\alpha+\beta=-2$

477 답 (1) -25 (2) 28

(1) 삼차방정식 $x^3-2x^2+4x+3=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-3$ …… ㉠
이때, $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$에서
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2^2-2\times4=-4$ …… ㉡
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$
이므로
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2\times(-4-4)+3\times(-3)$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$=-16-9=-25$
(2) (1)에서 구한 값을 이용하면
$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$
$\therefore \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=4^2-2\times(-3)\times2=28$

478 답 ①

$x^3+y^3=(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})=4$ …… TIP
$x^3y^3=(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=-1$이므로 $xy=-1$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서 $x+y=t$라 하면
$4=t^3+3t$, $t^3+3t-4=0$, $(t-1)(t^2+t+4)=0$
이므로 $t=1$ 또는 $t^2+t+4=0$
이때, 방정식 $t^2+t+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1-16=-15<0$이므로 두 허근을 갖는다.
따라서 두 실수 x, y에 대하여 구하는 값은
$x+y=1$

TIP
주어진 $x^3=2-\sqrt{5}$, $y^3=2+\sqrt{5}$의 값이 서로 켤레복소수이므로 더하거나 빼거나 혹은 곱했을 때 값이 간단해진다.
이때, 구하는 값이 $x+y$이므로 x^3+y^3의 값을 통해서 $x+y$의 값을 구하는 방향으로 풀이하면 된다.

479 답 ③

두 근이 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이므로
두 근의 합은 0이고 두 근의 곱은 음수이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $-(k^3-4k^2+k+6)$, 두 근의 곱은 $-k$
$k^3-4k^2+k+6=0$에서 $k=2$를 대입하면 등식이 성립하므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	-4	1	6
		2	-4	-6
	1	-2	-3	0

$(k-2)(k^2-2k-3)=0$
$(k+1)(k-2)(k-3)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$ 또는 $k=3$
이때, 두 근의 곱이 음수이므로 $-k<0$, 즉 $k>0$
따라서 구하는 실수 k의 값의 합은 $2+3=5$

아뿌하이노래시니노고재이시(사이)_해설서로.indb 96 22. 9. 14. 오후 8:20

480 ····· 답 ③

방정식 $x^3-3x^2+4x-2=0$에서 $x=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	−3	4	−2
		1	−2	2
	1	−2	2	0

$(x-1)(x^2-2x+2)=0$에서 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2=-1<0$이므로

방정식 $x^2-2x+2=0$은 두 허근 α, $\overline{\alpha}$를 갖는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=2$, $\alpha\overline{\alpha}=2$

$\therefore \left(\frac{\alpha+\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}i}{2}\right)^8=\{(1+i)^2\}^4=(2i)^4=16$

481 ····· 답 ②

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이고,

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega$

$=\omega^3(\omega^2+\omega+1)+(\omega^2+\omega+1)-1$

$=-1$

482 ····· 답 ②

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이고,

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^2+\omega+1=0$이고, 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$이므로

$\omega^4+2\omega^3-2\omega^2+2\omega+1$

$=\omega+2-2\omega^2+2\omega+1$ ($\because \omega^3=1$)

$=3\omega+3-2(-\omega-1)$ ($\because \omega^2=-\omega-1$)

$=5(\omega+1)=-5\overline{\omega}$ ($\because -\overline{\omega}=\omega+1$)

483 ····· 답 ②

삼차방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$이다.

이때, $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이고 나머지 한 근은 $\overline{\omega}$이므로

$\omega^3=-1$, $\overline{\omega}^3=-1$이고,

$\omega^2-\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$

$\therefore \omega^2+\overline{\omega}^4+\omega^6+\overline{\omega}^8+\omega^{10}=\omega^2-\overline{\omega}+1+\overline{\omega}^2-\omega$

$=(\omega^2-\omega+1)+(\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1)-1$

$=-1$

484 ····· 답 ④

방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=-1$이다. ····· ㉠

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$에서

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이 ω이고,

ω가 근이면 $\overline{\omega}$도 근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$ ····· ㉡

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$ ····· ㉢

ㄱ. ㉠에서 $\omega^9=(\omega^3)^3=(-1)^3=-1$ (참)

ㄴ. ㉡에서 $\omega^2-\omega+1=0$, $\omega=\omega^2+1$ (참)

ㄷ. $\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=\frac{\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}=1$ ($\because$ ㉢) (참)

ㄹ. ㉡에서 $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}+1=0$, $\overline{\omega}^2-\overline{\omega}=-1$ (거짓)

ㅁ. $(1-\omega)(1-\overline{\omega})=1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}$

$=1-1+1=1$ ($\because$ ㉢) (참)

ㅂ. $\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1+\overline{\omega}}=\frac{2+\omega+\overline{\omega}}{(1+\omega)(1+\overline{\omega})}=\frac{2+\omega+\overline{\omega}}{1+(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$

$=\frac{2+1}{1+1+1}=1$ ($\because$ ㉢) (참)

따라서 옳은 것의 개수는 5이다.

485 ····· 답 2

$\begin{cases} x+2y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=3-2y$를 ㉡에 대입하면

$(3-2y)^2+(3-2y)y+y^2=3$

$y^2-3y+2=0$, $(y-1)(y-2)=0$

$\therefore y=1$ 또는 $y=2$

즉, $x=1$, $y=1$ 또는 $x=-1$, $y=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2$의 값이 될 수 있는 것은 2 또는 5이다.

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 2이다.

486 ····· 답 풀이 참조

$\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y^2-xy-8=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=0$이므로

$x=y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2-y^2-8=0$, $y^2-4=0$에서

$y=2$ 또는 $y=-2$이므로

$x=2$, $y=2$ 또는 $x=-2$, $y=-2$

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2+y^2-8=0$, $y^2-2=0$에서

$y=\sqrt{2}$ 또는 $y=-\sqrt{2}$이므로

$x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

아뿌하이노베이션그룹조에이션(사이)_하베스터.indb 97 22. 9. 14. 오후 8:20

487 ④

$\begin{cases} x^2-3xy-4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-3xy-4y^2=(x-4y)(x+y)=0$이므로

$x=4y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=4y$를 ㉡에 대입하면

$(4y)^2+2y^2=18y^2=18$, $y^2=1$에서 $y=1$ 또는 $y=-1$이므로

$x=4$, $y=1$ 또는 $x=-4$, $y=-1$

따라서 $x+y$의 값은 5 또는 -5이다.

(ii) $x=-y$를 ㉡에 대입하면

$(-y)^2+2y^2=3y^2=18$, $y^2=6$에서

$y=\sqrt{6}$ 또는 $y=-\sqrt{6}$이므로

$x=\sqrt{6}$, $y=-\sqrt{6}$ 또는 $x=-\sqrt{6}$, $y=\sqrt{6}$

따라서 $x+y$의 값은 0이다.

(i), (ii)에서 $\alpha=4$, $\beta=1$일 때, $\alpha+\beta$의 최댓값은 5이다.

488 2

$\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(2-x)^2=a$, $2x^2-4x+4-a=0$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-2(4-a)=2a-4\geq 0 \quad \therefore a\geq 2$

따라서 구하는 양의 실수 a의 최솟값은 2이다.

489 21

$\begin{cases} x+y=2k+8 \\ xy=-2k \end{cases}$에서 x, y를 두 근으로 갖는 이차방정식은 두 근의 합이 $2k+8$, 두 근의 곱이 $-2k$이므로 방정식

$t^2-(2k+8)t-2k=0$, $t^2-2(k+4)t-2k=0$

이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+4)^2-(-2k)<0$, $k^2+10k+16<0$

$(k+2)(k+8)<0$에서 $-8<k<-2$이다.

그러므로 정수 k의 최댓값은 $M=-3$, 최솟값은 $m=-7$이므로

구하는 최댓값과 최솟값의 곱은 $Mm=21$이다.

490 7

1, 2, 3학년 학생 수를 각각 x, y, z라고 하자.

조건 (나)에서 $y=x-1=z+1$이므로 $z=x-2$ ····· ㉠

조건 (가)에서 $xyz=210$이므로 ㉠을 대입하면

$x(x-1)(x-2)=210$

이때 x는 자연수이고 $210=5\times 6\times 7$이므로

$x=7$, $y=6$, $z=5$

따라서 1학년 학생 수는 7이다.

491 48

$\overline{AB}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면

$x+y+3+7=30$이므로 $x+y=20$ ····· ㉠

두 직각삼각형 BAD, BCD에서 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+7^2=y^2+3^2$, $y^2-x^2=40$, $(y+x)(y-x)=40$이고,

㉠을 대입하면 $20(y-x)=40$이므로 $y-x=2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=9$, $y=11$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 두 직각삼각형 BAD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times 9\times 7+\frac{1}{2}\times 3\times 11=48$

492 2

정육면체 A의 한 모서리의 길이를 a라고 하면 직육면체 B의 밑면의 가로와 세로의 길이는 모두 $a+2$이고 높이는 $a-1$이다.

직육면체 B의 부피가 정육면체 A의 부피의 2배이므로

$2a^3=(a+2)^2(a-1)$, $2a^3=(a^2+4a+4)(a-1)$

$a^3-3a^2+4=0$에서 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

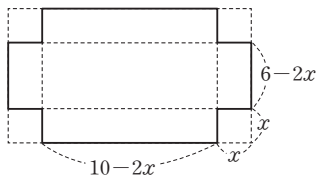
-1	1	-3	0	4
		-1	4	-4
	1	-4	4	0

$a^3-3a^2+4=(a+1)(a^2-4a+4)=(a+1)(a-2)^2=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

493 ③

철판 네 귀퉁이를 잘라낸 후 가로의 길이는 $10-2x$, 세로의 길이는 $6-2x$이므로 다음과 같다.



직육면체 모양의 상자의 부피는

$(10-2x)(6-2x)x=24$, $x^3-8x^2+15x-6=0$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

2	1	-8	15	-6
		2	-12	6
	1	-6	3	0

$(x-2)(x^2-6x+3)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=3-\sqrt{6}$ ($\because x<3$)

따라서 가능한 모든 x의 값의 합은 $2+(3-\sqrt{6})=5-\sqrt{6}$

494 5

문제의 조건에 의하여 a, b는 다음을 만족시킨다.

$\begin{cases} a^2+b^2=\frac{25}{4} & \cdots\cdots ㉠ \\ 2\{(a+2)+(b+2)\}=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

아쁘허어노새시ㅣㄴㄱㅗ조재어시ㅣ(사ㅇ)_해서설르.indb 98 22. 9. 14. 오후 8:20

㉡에서 $b=\frac{7}{2}-a$를 ㉠에 대입하면

$a^2+\left(\frac{7}{2}-a\right)^2=\frac{25}{4}$, $2a^2-7a+6=0$, $(2a-3)(a-2)=0$

$\therefore a=2,\ b=\frac{3}{2}\ (\because a>b)$

$\therefore a+2b=2+2\times\frac{3}{2}=5$

다른 풀이

위 풀이의 연립방정식의 ㉡에서 $a+b=\frac{7}{2}$이므로

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=\left(\frac{7}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=6$

$\therefore ab=3$

따라서 이차항의 계수가 1이고 a, b를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-\frac{7}{2}x+3=0$이므로

$2x^2-7x+6=0$, $(2x-3)(x-2)=0$

$\therefore a=2,\ b=\frac{3}{2}\ (\because a>b)$

495 ····· 답 -4, 1, 2

사차방정식 $x^4+3kx^2+2kx-2^n\times3=0$의 한 근이 k이므로 대입하면

$k^4+3k^3+2k^2-2^n\times3=0$, $k^2(k^2+3k+2)=2^n\times3$

$k^2(k+1)(k+2)=2^n\times3$

이때, k가 정수이므로 등식을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $k=1$일 때

$k^2(k+1)(k+2)=1^2\times2\times3=2\times3$

(ii) $k=2$일 때

$k^2(k+1)(k+2)=2^2\times3\times4=2^4\times3$

(iii) $k=-4$일 때

$k^2(k+1)(k+2)=(-4)^2(-3)(-2)=2^5\times3$

(i)~(iii)에서 정수 k의 값은 -4, 1, 2이다.

496 ····· 답 3

$|3x-1|<5$에서 $-5<3x-1<5$

$-4<3x<6$ $\therefore -\frac{4}{3}<x<2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는

-1, 0, 1로 3개이다.

497 ····· 답 $x\le\frac{a+b}{2}$

$a<b$이므로 $|x-a|\le|x-b|$에서 x의 값의 범위에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $x<a$일 때

$-(x-a)\le-(x-b)$, $a\le b$이므로 부등식이 성립한다.

(ii) $a\le x<b$일 때

$x-a\le-(x-b)$, $2x\le a+b$, $x\le\frac{a+b}{2}$이므로

만족시키는 x의 값의 범위는 $a\le x\le\frac{a+b}{2}$이다.

(iii) $x\ge b$

$x-a\le x-b$, $a\ge b$이므로 부등식을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 부등식의 해는 $x\le\frac{a+b}{2}$이다.

II

498 ····· 답 ④

$|ax-b|\le3$에서 $-3\le ax-b\le3$

$-3+b\le ax\le3+b$

$\therefore \frac{-3+b}{a}\le x\le\frac{3+b}{a}\ (\because a>0)$

이때, 해가 $-1\le x\le2$이므로

$\frac{-3+b}{a}=-1$, $\frac{3+b}{a}=2$

에서 $a+b=3$, $2a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore a-b=1$

499 ····· 답 ④

절댓값 기호 안의 식의 부호에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $x<-1$인 경우

$-(x+1)-(x-2)<9$, $2x>-8$에서 $x>-4$

이므로 x의 값의 범위는 $-4<x<-1$

(ii) $-1\le x<2$인 경우

$x+1-(x-2)=3<9$이므로

$-1\le x<2$에서 주어진 부등식을 항상 만족시킨다.

(iii) $x\ge2$인 경우

$x+1+x-2<9$, $2x<10$에서 $x<5$

이므로 x의 값의 범위는 $2\le x<5$

(i)~(iii)에서 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는

$-4<x<5$이므로 정수 x는 -3, -2, -1, …, 4의 8개이다.

500 ····· 답 ①

ㄱ. $a<b$에서 양변에 각각 c를 더해도 부등식이 성립하므로

$a+c<b+c$ (참)

ㄴ. $a=-1$, $b=2$인 경우

$ab=-2\ne0$이고 $a<b$이지만 $-1<\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이다. (거짓) ····· TIP 1

ㄷ. $a=1$, $b=-3$인 경우

$1^2<(-3)^2$이므로 $a^2<b^2$이지만 $a>b$이다. (거짓) ····· TIP 2

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

TIP 1

'$a<b$이면 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$이다.'가 항상 성립하기 위해서는 두 실수 a, b의 부호가 서로 같으면 된다.

즉, $ab>0$이고, $a<b$이면 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$이다.

(095-126)해설2-3.indd 99 22. 9. 19. 오후 2:39

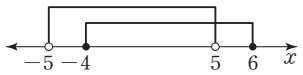
TIP 2

a, b가 모두 양수일 때 $a^2<b^2$이면 $a<b$이다.
a, b가 모두 음수일 때 $a^2<b^2$이면 $a>b$이다.

501 ····· 답 9

$-11<2x-1<9$에서 $-10<2x<10$이므로 $-5<x<5$

연립부등식 $\begin{cases} -4\le x\le 6 \\ -11<2x-1<9 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} -4\le x\le 6 \\ -5<x<5 \end{cases}$를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $-4\le x<5$이다.



따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는
-4, -3, -2, …, 3, 4로 9개이다.

502 ····· 답 5

$-15<2x-3<x+8$에서
(i) $-15<2x-3$인 경우
$2x>-12$에서 $x>-6$
(ii) $2x-3<x+8$인 경우
$x<11$
(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는 $-6<x<11$이다.
따라서 $p=-6$, $q=11$이므로 $p+q=-6+11=5$

503 ····· 답 ④

① $x^2+4x+5>0$에서 $(x+2)^2+1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4x+5>0$이 성립한다. (참)
② $x^2+2x-8\le 0$에서 $(x+4)(x-2)\le 0$이므로 $-4\le x\le 2$ (참)
③ $x^2+6x+10\le 0$에서 $(x+3)^2+1\le 0$
이때, 모든 실수 x에 대하여 $x^2+6x+10>0$이므로 해는 없다. (참)
④ $-x^2+4x-4<0$의 양변에 -1을 곱하면
$x^2-4x+4>0$, $(x-2)^2>0$
따라서 해는 $x\ne 2$인 모든 실수이다. (거짓)
⑤ $3x^2-x-2>0$에서 $(3x+2)(x-1)>0$이므로
$x<-\frac{2}{3}$ 또는 $x>1$ (참)
따라서 선지 중 해를 잘못 구한 것은 ④이다.

504 ····· 답 ③

이차항의 계수가 1이고, 해가 $-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{3}$인 이차부등식은
$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{7}{3}\right)<0$
주어진 부등식에서 이차항의 계수가 6이므로 양변에 6을 곱하면
$6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{7}{3}\right)<0$, $(2x+1)(3x-7)<0$
$\therefore 6x^2-11x-7<0$
따라서 $a=11$, $b=-7$이므로
$a+b=11+(-7)=4$

505 ····· 답 ②

이차부등식 $x^2+(a+1)x+a\ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차함수 $y=x^2+(a+1)x+a$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나거나 x축과 만나지 않아야 한다.
방정식 $x^2+(a+1)x+a=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(a+1)^2-4a\le 0$, $a^2-2a+1\le 0$, $(a-1)^2\le 0$
따라서 구하는 실수 a의 값은 1이다.

다른 풀이

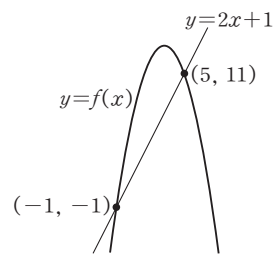
이차부등식 $x^2+(a+1)x+a\ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차함수 $y=x^2+(a+1)x+a$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나거나 x축과 만나지 않아야 한다.
함수 $y=x^2+(a+1)x+a=(x+1)(x+a)$에서 이차함수의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 반드시 지나므로 x축과 점 $(-1, 0)$에서 접해야 한다.
따라서 구하는 실수 a의 값은 1이다.

506 ····· 답 ③

이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $-3<x<1$이므로 이차식 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이고 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -3 또는 1이다.
$f(x)=a(x+3)(x-1)(a<0)$
부등식 $f(2x-1)\ge f(2)$에서
$a\{(2x-1)+3\}\{(2x-1)-1\}\ge a\times 5\times 1$
$(2x+2)(2x-2)\le 5$ ($\because a<0$), $4x^2-9\le 0$,
$(2x+3)(2x-3)\le 0$에서 $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}$
따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1로 3개이다.

507 ····· 답 $-1\le x\le 5$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 만나는 두 점의 y좌표가 각각 -1, 11이므로 $y=2x+1$에
$y=-1$을 대입하면 $-1=2x+1$에서 $x=-1$
$y=11$을 대입하면 $11=2x+1$에서 $x=5$
즉, 두 교점의 좌표는 $(-1, -1)$, $(5, 11)$이고, 그래프는 다음과 같다.



(095-126)해설2-3.indd 100 22. 9. 19. 오후 4:17

부등식 $f(x)-2x-1\geq 0$, 즉 $f(x)\geq 2x+1$을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 함숫값이 함수 $y=2x+1$의 함숫값보다 크거나 같도록 하는 x의 값의 범위를 구하면 되므로 $-1\leq x\leq 5$이다.

508 ····· 답 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편이 -6, 2이므로 방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 각각 -6, 2이다.

$f(x)=a(x+6)(x-2)$ $(a>0)$ ····· ㉠

이때, 함수 $f(x)$의 그래프의 y절편이 -12이므로

㉠에 $x=0$, $y=-12$를 대입하면

$-12=-12a$에서 $a=1$

즉, $f(x)=(x+6)(x-2)$이므로 부등식 $f(x)+7\geq 0$에서

$(x+6)(x-2)+7\geq 0$, $x^2+4x-5\geq 0$

$(x+5)(x-1)\geq 0$

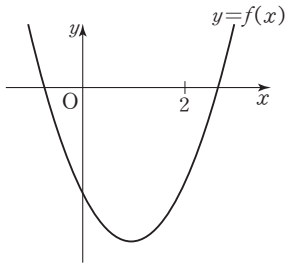
$\therefore x\leq -5$ 또는 $x\geq 1$

509 ····· 답 $\frac{5}{7}\leq k\leq 3$

$-2x^2+4kx-k+3>0$에서 $2x^2-4kx+k-3<0$

$f(x)=2x^2-4kx+k-3$이라 하면 $0<x<2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<0$을 만족시켜야 한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록이므로 $f(0)\leq 0$, $f(2)\leq 0$이어야 한다.



$f(0)=k-3\leq 0$에서 $k\leq 3$ ····· ㉠

$f(2)=8-8k+k-3\leq 0$, $7k\geq 5$에서 $k\geq \frac{5}{7}$ ····· ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$\frac{5}{7}\leq k\leq 3$

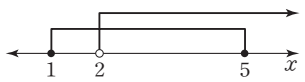
510 ····· 답 (1) $2<x\leq 5$ (2) $2\leq x<3$

(1) $\begin{cases} 2x-3>1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-6x+5\leq 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2x>4$이므로 $x>2$

㉡에서 $(x-1)(x-5)\leq 0$이므로 $1\leq x\leq 5$

각각의 범위를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $2<x\leq 5$이다.

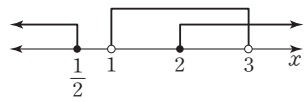
(2) $\begin{cases} x^2+3<4x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-5x+2\geq 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-4x+3<0$, $(x-1)(x-3)<0$이므로 $1<x<3$

㉡에서 $2x^2-5x+2\geq 0$, $(2x-1)(x-2)\geq 0$이므로

$x\leq \frac{1}{2}$ 또는 $x\geq 2$

각각의 범위를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $2\leq x<3$이다.

511 ····· 답 4

$x+2<x^2$에서

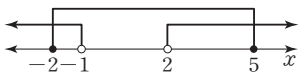
$x^2-x-2>0$, $(x+1)(x-2)>0$이므로

$x<-1$ 또는 $x>2$ ····· ㉠

$x^2\leq 3x+10$에서

$x^2-3x-10\leq 0$, $(x+2)(x-5)\leq 0$이므로 $-2\leq x\leq 5$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 부등식의 해는 $-2\leq x<-1$ 또는 $2<x\leq 5$이므로 정수 x는 -2, 3, 4, 5로 4개이다.

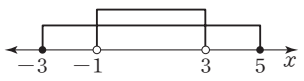
512 ····· 답 ③

$\begin{cases} |x-1|\leq 4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2x-3<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-4\leq x-1\leq 4$이므로 $-3\leq x\leq 5$

㉡에서 $x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$이므로 $-1<x<3$

각각의 범위를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 부등식의 해는 $-1<x<3$이므로 정수 x는 0, 1, 2로 3개이다.

513 ····· 답 ⑤

$x^2+6\leq 2x^2+x<x^2-2x+4$에서

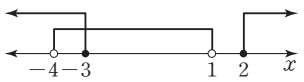
(i) $x^2+6\leq 2x^2+x$일 때

$x^2+x-6\geq 0$, $(x+3)(x-2)\geq 0$, $x\leq -3$ 또는 $x\geq 2$

(ii) $2x^2+x<x^2-2x+4$

$x^2+3x-4<0$, $(x+4)(x-1)<0$, $-4<x<1$

(i), (ii)에서 각각의 범위를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 연립부등식의 해는 $-4<x\leq -3$이다.

오쁘허오느새스ㅣㄴㄱㅗ즈재오스ㅣ(스ㅏ오)_허새스러르.indb 101 22. 9. 14. 오후 8:20

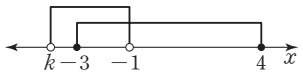
514 ····· 답 ③

$\begin{cases} x^2-x-12\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+(1-k)x-k<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+3)(x-4)\le 0$이므로 $-3\le x\le 4$

㉡에서 $(x+1)(x-k)<0$

이때, 연립부등식의 해가 $-3\le x<-1$이어야 하므로 조건을 만족시키는 경우를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $k<-3$이다.

515 ····· 답 ①

방정식 $x^2+(a-2)x+4=0$이 실근을 가져야 하므로

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-16\ge 0$, $a^2-4a-12\ge 0$

$(a+2)(a-6)\ge 0$이므로 $a\le -2$ 또는 $a\ge 6$ ····· ㉠

이때, 이 방정식의 두 근이 모두 양수이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-(a-2)>0 \quad \therefore a<2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 a의 값의 범위는 $a\le -2$이다.

516 ····· 답 $k<-\frac{1}{4}$

이차방정식 $x^2-4kx-4k-1=0$이 실근을 가져야 하므로 판별식 D에 대하여 $D\ge 0$이어야 한다.

이때, 두 근을 각각 α, β라 하면 $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$을 만족시켜야 한다.

(i) $\frac{D}{4}=4k^2-(-4k-1)=(2k+1)^2\ge 0$에서

모든 실수 k에 대하여 $(2k+1)^2\ge 0$이 성립한다. ····· TIP

(ii) $\alpha+\beta=4k<0$, $\alpha\beta=-4k-1>0$에서

$k<0$, $k<-\frac{1}{4}$이므로 $k<-\frac{1}{4}$이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 실수 k의 값의 범위는 $k<-\frac{1}{4}$이다.

TIP

모든 실수는 제곱하면 항상 0보다 크거나 같다.

k가 실수이면 $2k+1$도 실수이므로

모든 실수 k에 대하여 $(2k+1)^2\ge 0$이다.

517 ····· 답 ④

방정식의 두 근을 α, β라 할 때,

주어진 조건에서 두 근의 합과 곱이 모두 음수가 되어야 하므로 ····· TIP

$k^2-4k+3=(k-1)(k-3)<0$에서

$1<k<3$ ····· ㉠

$-k+2<0$에서 $k>2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 $2<k<3$

TIP

이 문제에서 판별식 조건을 생각해 줄 필요가 없다.

왜냐하면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 곱이 음수이면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{c}{a}<0$, 즉 $ac<0$이다.

이때, 주어진 방정식의 판별식을 D라 하면 $D=b^2-4ac$에서

$b^2\ge 0$이고 $-4ac>0$이므로 항상 $D>0$을 만족시킨다.

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 두 근의 곱이 음수인 것을 보이면 반드시 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식 조건을 따로 풀이해 주지 않아도 된다.

518 ····· 답 ②

물체를 위쪽으로 던지고 t초 후의 지면으로부터 이 물체의 높이가 $-t^2+3t+10$이므로 물체의 지면으로부터의 높이가 건물의 높이보다 낮으려면

$0\le -t^2+3t+10<10$을 만족시켜야 한다.

(i) $0\le -t^2+3t+10$인 경우

$t^2-3t-10=(t+2)(t-5)\le 0$

$\therefore 0\le t\le 5$ ($\because t\ge 0$)

(ii) $-t^2+3t+10<10$인 경우

$t^2-3t=t(t-3)>0$

$\therefore t>3$ ($\because t\ge 0$)

(i), (ii)에서 이 물체의 지면으로부터의 높이가 건물의 높이보다 낮은 시간은 $3<t\le 5$에서 2초 동안이다.

519 ····· 답 ③

방정식 $x^3-4x^2+(m-14)x+2m-4=0$에 $x=-2$를 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

−2	1	−4	$m-14$	$2m-4$
		−2	12	$-2m+4$
	1	−6	$m-2$	0

$(x+2)(x^2-6x+m-2)=0$

이때, 1보다 작거나 같은 근은 오직 한 개이므로 방정식 $x^2-6x+m-2=0$의 서로 다른 두 근은 모두 1보다 크다.

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-(m-2)>0$에서 $m<11$ ····· ㉠

이차함수 $y=x^2-6x+m-2$의 그래프의 축이 $x=3$이므로

이 함수의 x절편이 모두 1보다 크려면 $x=1$일 때의 함숫값이 0보다 커야 한다.

$1-6+m-2>0$에서 $m>7$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 m의 값의 범위가 $7<m<11$이므로

모든 정수 m의 값의 합은 $8+9+10=27$

아끄흐이노새스ㅣㄴㄱㅗ조새으스ㅣ(스ㅏ으)_흐새스ㅓ르.indb 102 22. 9. 14. 오후 8:20

520 ····· 답 풀이 참조

$x^3-kx^2+k-1=0$에서 $x=1$을 대입하면 등식이 성립하므로
조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

1	1	$-k$	0	$k-1$
		1	$-k+1$	$-k+1$
	1	$-k+1$	$-k+1$	0

$(x-1)\{x^2-(k-1)x-(k-1)\}=0$
이고, 이 방정식이 중근을 갖는 경우는 다음과 같다.
(i) 방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$x=1$을 대입하면
$1-(k-1)-(k-1)=0$에서 $2k=3$ $\therefore k=\frac{3}{2}$
(ii) 방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$이 중근을 갖는 경우
방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(k-1)^2+4(k-1)=0$
$(k-1)(k-1+4)=0$, $(k+3)(k-1)=0$
$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$
(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은
$\frac{3}{2}+(-3)+1=-\frac{1}{2}$

채점 요소	배점
인수정리와 조립제법을 이용하여 $(x-1)\{x^2-(k-1)x-(k-1)\}=0$으로 인수분해하기	20%
방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때의 k의 값 구하기	30%
방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$이 중근을 가질 때의 k의 값 구하기	30%
모든 실수 k의 값의 합 구하기	20%

521 ····· 답 ⑤

사차방정식 $(x^2-4x)^2+(x^2-4x)-20=0$에서
$x^2-4x=X$라 하면
$X^2+X-20=0$, $(X+5)(X-4)=0$
(i) $X=4$일 때
방정식 $x^2-4x=4$, 즉 $x^2-4x-4=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=4+4>0$이므로 두 실근을 갖는다.
그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 4이다.
$\therefore A=4$
(ii) $X=-5$일 때
방정식 $x^2-4x=-5$, 즉 $x^2-4x+5=0$의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=4-5<0$이므로 두 허근을 갖는다.
그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 곱은 5이다.
$\therefore B=5$
(i), (ii)에서 구하는 값은
$A+B=4+5=9$

522 ····· 답 ④

사차방정식 $x^4-6x^2+a-5=0$에서 $x^2=X$라 하면
$X^2-6X+a-5=0$ ····· ㉠
주어진 사차방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 ㉠이 음이 아닌 두 실근을 가져야 한다. ····· TIP
방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=9-(a-5)\geq 0$ $\therefore a\leq 14$ ····· ㉡
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 0보다 크거나 같으므로
$a-5\geq 0$ $\therefore a\geq 5$ ····· ㉢
㉡, ㉢에서 실수 a의 값의 범위는 $5\leq a\leq 14$이므로
정수 a는 5, 6, 7, …, 14의 10개이다.

TIP
사차방정식 $ax^4+bx^2+c=0$ ($a\neq 0$이고 a, b, c는 실수)에서 $x^2=X$라 할 때, X에 대한 이차방정식 $aX^2+bX+c=0$이 음이 아닌 두 실근 α, β를 가지면
(i) $x^2=\alpha$에서
$\alpha\neq 0$인 경우 $x=\pm\sqrt{\alpha}$ (서로 다른 두 실근)이고,
$\alpha=0$인 경우 $x=0$을 중근으로 갖는다.
(ii) $x^2=\beta$에서
$\beta\neq 0$인 경우 $x=\pm\sqrt{\beta}$ (서로 다른 두 실근)이고,
$\beta=0$인 경우 $x=0$을 중근으로 갖는다.
따라서 주어진 사차방정식의 근이 모두 실수이다.

523 ····· 답 ④

사차방정식 $x^4+(2-2a)x^2+10-5a=0$에서 $x^2=X$라 하면
$X^2+2(1-a)X+10-5a=0$ ····· ㉠
주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 두 허근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 부호의 두 실근을 가져야 한다. ····· TIP
즉, ㉠의 두 근의 곱은 음수이어야 하므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$10-5a<0$ $\therefore a>2$
$\therefore p=2$

TIP
사차방정식 $ax^4+bx^2+c=0$ ($a\neq 0$이고 a, b, c는 실수)에서 $x^2=X$라 할 때, X에 대한 이차방정식 $aX^2+bX+c=0$이 양의 실수 α와 음의 실수 β를 근으로 가지면
$x^2=\alpha$에서 $x=\pm\sqrt{\alpha}$ (서로 다른 두 실근),
$x^2=\beta$에서 $x=\pm\sqrt{-\beta}i$ (서로 다른 두 허근)
이므로 주어진 사차방정식은 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가진다.

오쁘허오느새시ㅣ느그소재오시ㅣ(사오)_허새서르.indb 103 22. 9. 14. 오후 8:20

524 답 ④

사차방정식 $x^4+ax^2+a^4-8a^2+2b^2-4b+18=0$에서 $x^2=X$라 하면

$X^2+aX+a^4-8a^2+2b^2-4b+18=0$ …… ㉠

주어진 사차방정식이 두 허근과 하나의 중근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 음의 실근과 0을 근으로 가져야 한다. …… TIP

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a<0 \quad \therefore a>0$ …… ㉡

$a^4-8a^2+2b^2-4b+18=0$

$(a^4-8a^2+16)+2(b^2-2b+1)=0$

$(a^2-4)^2+2(b-1)^2=0$

따라서 $a^2=4$에서 $a=2$ ($\because$ ㉡)이고, $b=1$이므로

$a+b=2+1=3$

TIP

방정식 $X^2+aX+a^4-8a^2+2b^2-4b+18=0$의 한 근을 α라 하면

❶ $\alpha>0$인 경우

$X=x^2=\alpha$에서 $x=\sqrt{\alpha}$ 또는 $x=-\sqrt{\alpha}$로

서로 다른 두 실근을 갖는다.

❷ $\alpha<0$인 경우

$X=x^2=\alpha$에서 $x=\sqrt{-\alpha}i$ 또는 $x=-\sqrt{-\alpha}i$로

서로 다른 두 허근을 갖는다.

❸ $\alpha=0$인 경우

$X=x^2=0$이면 $x=0$을 중근으로 갖는다.

525 답 $x=\frac{1}{2}$

삼차방정식 $2x^3-(2k+1)x^2+(5k+2)x-2k-1=0$에서

$k(-2x^2+5x-2)+(2x^3-x^2+2x-1)=0$

이때, k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$-2x^2+5x-2=0$이고, $2x^3-x^2+2x-1=0$이어야 한다.

$-2x^2+5x-2=(-2x+1)(x-2)=0$에서

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ …… ㉠

$2x^3-x^2+2x-1=0$, $x^2(2x-1)+(2x-1)=0$

$(x^2+1)(2x-1)=0$에서

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\pm i$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 근은 …… TIP

$x=\frac{1}{2}$

TIP

㉠에서 방정식 $-2x^2+5x-2=0$의 해가 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$라는 것을 구했으므로 방정식 $2x^3-x^2+2x-1=0$에 대입하여 등식을 만족시키는 값 $x=\frac{1}{2}$을 바로 구할 수도 있다.

526 답 ①

$x^4+4x^3-7x^2+4x+1=0$에서

$x^2+4x-7+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$ ($\because x\neq0$)

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-9=0$

이때, $x+\frac{1}{x}=k$이므로 $k^2+4k-9=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 k의 값의 곱은 -9이다.

527 답 ⑤

$x^4-7x^2+1=0$에서

$(x^4+2x^2+1)-9x^2=0$, $(x^2+1)^2-(3x)^2=0$

$(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)=0$

$x^2+3x+1=0$ 또는 $x^2-3x+1=0$이므로

$\alpha^2+3\alpha+1=0$ 또는 $\alpha^2-3\alpha+1=0$이다.

ㄱ. $\alpha^2+3\alpha+1=0$이므로 $\alpha^2+3\alpha=-1$을 만족시키는 α가 존재한다. (참)

ㄴ. $x^4-7x^2+1=0$에 $x=0$을 대입하면 식을 만족시키지 못하므로 $\alpha\neq0$이다.

$\alpha^2-3\alpha+1=0$에서 양변을 각각 α로 나누면

$\alpha-3+\frac{1}{\alpha}=0$에서 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

이므로 만족시키는 α가 존재한다. (참)

ㄷ. 방정식 $x^2+3x+1=0$의 판별식 $D_1=9-4=5>0$이고

방정식 $x^2-3x+1=0$의 판별식 $D_2=9-4=5>0$이므로

두 방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, α는 항상 실수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

528 답 10

$f(-2)=f(1)=f(3)=k$ (k는 상수)라 하면

방정식 $f(x)-k=0$의 세 근이 -2, 1, 3이므로

$f(x)-k=(x+2)(x-1)(x-3)$

이때, 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $x=2$이므로 $f(2)=0$이고,

이를 위의 식에 대입하면

$f(2)-k=4\times1\times(-1) \quad \therefore k=4$

$\therefore f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)+4$

$=x^3-2x^2-5x+10$

$=(x-2)(x^2-5)$

$=(x-2)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 나머지 두 근은

$x=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt{5}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=5+5=10$

이끄하이스내신스니그스지하이스시(사이)_해설서로.indb 104 22. 9. 14. 오후 8:20

529 답 11

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+20=0$의 모든 항의 계수가 실수이고 한 근이 $2+i$이므로 $2-i$도 근이다.
이때, 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(2+i)+(2-i)+\alpha=-a$ …… ㉠
$(2+i)(2-i)+(2-i)\alpha+\alpha(2+i)=b$ …… ㉡
$(2+i)(2-i)\alpha=-20$ …… ㉢
㉢에서 $5\alpha=-20$ $\therefore \alpha=-4$
㉠에서 $4-4=-a$ $\therefore a=0$
㉡에서 $5-4\times4=b$ $\therefore b=-11$
$\therefore a-b=11$

다른 풀이

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+20=0$의 모든 항의 계수가 실수이고 한 근이 $2+i$이므로 $2-i$도 근이다.
이때, 나머지 한 근을 α라 하면
$x^3+ax^2+bx+20=(x-\alpha)\{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\}$
$=(x-\alpha)(x^2-4x+5)$ …… 참고
$=x^3+(-\alpha-4)x^2+(4\alpha+5)x-5\alpha$
위 식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$20=-5\alpha$ $\therefore \alpha=-4$ …… ㉣
$x=-1$을 대입하면
$-1+a-b+20=-1-\alpha-4-4\alpha-5-5\alpha$
$\therefore a-b=-10\alpha-29$
$=-10\times(-4)-29=11$ ($\because$ ㉣)

참고

이차항의 계수가 1이고 두 근이 $2+i$, $2-i$인 이차방정식은
(두 근의 합)$=4$, (두 근의 곱)$=5$임을 이용하여
$x^2-4x+5=0$으로 식을 세울 수 있다.

530 답 ①

a, b, c가 실수이므로 조건 (가)에서 주어진 삼차방정식의 한 근이 $-1+\sqrt{2}i$이면 $-1-\sqrt{2}i$도 근이다.
이때, 나머지 한 근을 p라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(-1+\sqrt{2}i)+(-1-\sqrt{2}i)+p=-a$
$\therefore a=2-p$ …… ㉠
이때, 조건 (나)에서 이차방정식 $x^2+ax-8=0$의 한 근이 p가 되어야 하므로 이를 대입하면
$p^2+ap-8=p^2+(2-p)p-8=0$ ($\because$ ㉠)
$2p=8$ $\therefore p=4$
따라서 삼차방정식의 세 근이
$-1+\sqrt{2}i$, $-1-\sqrt{2}i$, 4
이므로 구하는 값은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$c=-(-1+\sqrt{2}i)\times(-1-\sqrt{2}i)\times4=-12$

531 답 $A=17$, $B=-6$

주어진 삼차방정식의 세 근이 α, β, γ이므로
$x^3-4x+2=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
위 식의 양변에 $x=3$을 대입하면
$A=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$
$=3^3-4\times3+2=17$
이때, $x^3=4x-2$이므로
$\alpha^3=4\alpha-2$, $\beta^3=4\beta-2$, $\gamma^2=4\gamma-2$
좌변, 우변을 각각 더해주면
$B=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=4(\alpha+\beta+\gamma)-6$
이고, 삼차방정식 $x^3-4x+2=0$의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=0$이므로 $B=-6$
$\therefore A=17$, $B=-6$

532 답 ①

$f(1-\sqrt{2i})=-1$, 즉 $f(1-\sqrt{2i})+1=0$에서 방정식 $f(x)+1=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2i}$이고, 모든 계수가 실수이므로 $1+\sqrt{2i}$도 이 방정식의 근이다.
사차식 $f(x)+1$이
$\{x-(1-\sqrt{2i})\}\{x-(1+\sqrt{2i})\}=x^2-2x+3$
을 인수로 가지므로
$f(x)+1=(x^2-2x+3)(x^2+px+q)$ (p, q는 실수)라 하면
$x^4+2x^3+ax^2+bx+6=(x^2-2x+3)(x^2+px+q)$
이 식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$-2+p=2$에서 $p=4$, $3q=6$에서 $q=2$
$f(x)+1=(x^2-2x+3)(x^2+4x+2)$
$=x^4+2x^3-3x^2+8x+6$
$\therefore f(x)=x^4+2x^3-3x^2+8x+5$
$\therefore a+b=-3+8=5$

533 답 11

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 α, β, γ이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$
$\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\beta\gamma}$, $\frac{1}{\gamma\alpha}$을 세 근으로 하는 삼차방정식이
$x^3-x^2+3x-1=0$이므로
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-a}{-c}=\frac{a}{c}=1$ …… ㉠
$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\times\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$
$=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\times\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$
$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}$
$=\frac{b}{c^2}=3$ …… ㉡

아크하이스쿨 수학Ⅰ 수학Ⅱ 수학Ⅰ(사이)_해설지.indb 105 22. 9. 14. 오후 8:20

$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{1}{c^2}=1$ …… ㉢

㉢에서 $c^2=1$이므로 ㉠에서 $a^2=1$

㉡에서 $\frac{b}{c^2}=b=3$이므로 $b^2=9$

$\therefore a^2+b^2+c^2=11$

534 ②

$3x^3+5x^2+(a+2)x+a=0$에 $x=-1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해 하면

-1	3	5	$a+2$	a
		-3	-2	$-a$
	3	2	a	0

$(x+1)(3x^2+2x+a)=0$

이 삼차방정식이 $x=-1$을 근으로 가지므로 이차방정식 $3x^2+2x+a=0$이 양의 실근과 -1이 아닌 음의 실근을 각각 하나씩 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-3a>0$에서 $a<\frac{1}{3}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 음수이어야 하므로

$\frac{a}{3}<0 \quad \therefore a<0$

이때 방정식 $3x^2+2x+a=0$에 $x=-1$을 대입하면 $3\times(-1)^2+2\times(-1)+a=0$에서 $a=-1$이고, 이차방정식이 -1이 아닌 음의 실근을 가져야 하므로 $a\neq-1$이어야 한다.

따라서 $a<0$, $a\neq-1$인 정수 a의 최댓값은 -2이다.

535 ③

삼차방정식 $ax^3+3x^2-3x-a=0$ $(a\neq0)$에 $x=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해 하면

1	a	3	-3	$-a$
		a	$a+3$	a
	a	$a+3$	a	0

$(x-1)\{ax^2+(a+3)x+a\}=0$

이때, 이차방정식 $ax^2+(a+3)x+a=0$이 1 이외의 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+3)^2-4a^2\geq0$, $\{(a+3)+2a\}\{(a+3)-2a\}\geq0$

$(3a+3)(-a+3)\geq0$, $3(a+1)(a-3)\leq0$에서 $-1\leq a\leq3$이다.

이때, a는 삼차항의 계수이므로 $a\neq0$이고,

이 방정식에 $x=1$을 대입하면

$a+(a+3)+a=0$, $3a=-3$에서 $a=-1$이므로

$a=-1$이면 방정식이 $x=1$만을 근으로 갖게 된다.

따라서 $-1\leq a\leq3$, $a\neq0$, $a\neq-1$이므로

모든 정수 a는 1, 2, 3으로 3개이다.

536 ③

삼차방정식 $x^3=8$의 한 허근이 w이므로 $w^3=8$이다.

$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)=0$에서

이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 한 허근이 w이므로

다른 한 근은 $\overline{w}$이다.

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$w+\overline{w}=-2$, $w\overline{w}=4$

ㄱ. $(\overline{w})^2+2\overline{w}+4=0$에서

$(\overline{w})^2=-2\overline{w}-4$

$=-2(-2-w)-4$ ($\because$ $w+\overline{w}=-2$)

$=2w$ (거짓)

ㄴ. $w^2+4=-2w$이고, ㄱ에서 $(\overline{w})^2=2w$이므로

$\frac{(\overline{w})^2}{w^2+4}=\frac{2w}{-2w}=-1$ (참)

ㄷ. $-w+\overline{w}+2=-w+(-2-w)+2=-2w$

이므로

$(-w+\overline{w}+2)^3=(-2w)^3=-8w^3$

$=(-8)\times8=-2^6$ (거짓)

ㄹ. $w^2-2w-4=w^2+w^2=2w^2$이므로

$(w^2-2w-4)^3=(2w^2)^3=8w^6$

$=8\times8^2=2^9$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ로 2개이다.

537 ⑤

$x^4-2x^3-x+2=(x-1)(x-2)(x^2+x+1)$이므로

허근 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이다.

즉, $\omega^2+\omega+1=0$이고, 양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$에서 $\omega^3-1=0$

$\therefore \omega^3=1$

$\therefore 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\cdots+\omega^{100}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\omega^6(1+\omega+\omega^2)$

$+\cdots+\omega^{96}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{99}(1+\omega)$

$=\omega^{99}(1+\omega)=(\omega^3)^{33}(1+\omega)$

$=1+\omega$

538 17

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이다.

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^2+\omega+1=0$이다.

$\left(\frac{\omega^3+2\omega^2+\omega+1}{\omega^4+\omega^3-\omega}\right)^n$에서 분모를 정리하면

$\omega^4+\omega^3-\omega=\omega+1-\omega=1$

분자를 정리하면

$\omega^3+2\omega^2+\omega+1=1+\omega^2+(\omega^2+\omega+1)$

$=1+\omega^2=-\omega$

이므로

아뿌하이스터디그룹재이시(사이)_해설서르.indb 106 22. 9. 14. 오후 8:20

$\left(\frac{\omega^3+2\omega^2+\omega+1}{\omega^4+\omega^3-\omega}\right)^n=(-\omega)^n=(-1)^n\times\omega^n$

이고, 이 값이 음의 실수가 되려면 n은 홀수이면서 3의 배수가 되어야 한다.

따라서 n은 100 이하의 3의 배수 중에서 6의 배수를 제외해주면 되므로 구하는 자연수 n의 개수는

$33-16=17$

539 ····· 답 ④

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이다.

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^2+\omega+1=0$이다.

$f(1)=\frac{\omega}{1+\omega}=\frac{\omega}{-\omega^2}=-\frac{1}{\omega}$

$f(2)=\frac{\omega^2}{1+\omega^2}=\frac{\omega^2}{-\omega}=-\omega$

$f(3)=\frac{\omega^3}{1+\omega^3}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$f(4)=\frac{\omega^4}{1+\omega^4}=\frac{\omega}{1+\omega}=f(1)$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(300)$

$=\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)$

$=100\times\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)=100\times\left(-\frac{\omega^2+1}{\omega}+\frac{1}{2}\right)$

$=100\times\frac{3}{2}=150$

540 ····· 답 ④

$\begin{cases} x^2-xy=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-y^2=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

에서 $2\times㉠-5\times㉡$을 하면

$2x^2-7xy+5y^2=0$, $(2x-5y)(x-y)=0$

$\therefore 2x=5y$ 또는 $x=y$

(i) $2x=5y$일 때

㉠에 $y=\frac{2}{5}x$를 대입하면

$x^2-\frac{2}{5}x^2=5$, $\frac{3}{5}x^2=5$, $x^2=\frac{25}{3}$

$\therefore x=\frac{5}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 또는 $x=-\frac{5}{\sqrt{3}}$, $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) $x=y$일 때

㉠에 $x=y$를 대입하면 $0=5$가 되므로 주어진 식을 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에서 구하는 값은

$\alpha\beta=\frac{5}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)\times\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{10}{3}$

다른 풀이

$\begin{cases} x^2-xy=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-y^2=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 ㉡을 빼면

$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=3$

에서 $|x-y|=\sqrt{3}$이므로

$x-y=\sqrt{3}$ 또는 $x-y=-\sqrt{3}$

㉠과 ㉡을 더하면

$x^2-y^2=7$ ····· ㉢

(i) $x-y=\sqrt{3}$인 경우

㉢에 대입하면 $x^2-(x-\sqrt{3})^2=7$, $2\sqrt{3}x=10$

$\therefore x=\frac{5}{\sqrt{3}}$이고 $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) $x-y=-\sqrt{3}$인 경우

㉢에 대입하면 $x^2-(x+\sqrt{3})^2=7$, $-2\sqrt{3}x=10$

$\therefore x=-\frac{5}{\sqrt{3}}$이고 $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

(i), (ii)에서 구하는 값은 $\alpha\beta=\frac{10}{3}$

541 ····· 답 ③

$x+y=A$, $xy=B$라 하면 ····· TIP

$x+y+xy=A+B=-2$ ····· ㉠

$x^2y+y^2x=xy(x+y)=AB=-24$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 A, B를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$t^2+2t-24=0$, 즉 $(t+6)(t-4)=0$이므로

$A=-6$, $B=4$ 또는 $A=4$, $B=-6$이다.

따라서 xy의 값이 될 수 있는 것은 -6 또는 4이므로 구하는 합은

$-6+4=-2$

TIP

주어진 연립방정식은 x, y에 대한 삼차식을 포함하고 있으므로 풀이가 어렵다.

따라서 x, y의 합과 곱을 치환해서 주어진 식을 간단하게 변형한 다음 x, y의 각각의 값을 구한다.

542 ····· 답 9

$\begin{cases} (x+2)(y+2)=a & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-4)(y-4)=a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 ㉡을 빼면

$(x+2)(y+2)-(x-4)(y-4)=0$

$xy+2(x+y)+4-\{xy-4(x+y)+16\}=0$

$6(x+y)=12$에서 $x+y=2$ ····· ㉢

㉠에 ㉢을 대입하면

$(x+2)(4-x)=a$, $x^2-2x+a-8=0$

이고, 주어진 연립방정식의 해가 오직 한 쌍만 존재하기 위해서는 이차방정식 $x^2-2x+a-8=0$이 중근을 가져야 한다.

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(a-8)=0$

$\therefore a=9$

아까하이노새시니그고자에이시(사이)_해새서르.indb 107 22. 9. 14. 오후 8:20

543 ····· 답 45

$(x-y)^2-(x-y)-2=0$에서 $x-y=X$라 하면
$X^2-X-2=0$, $(X+1)(X-2)=0$
에서 $X=-1$ 또는 $X=2$이므로
$x-y=-1$ 또는 $x-y=2$
(i) $x-y=-1$인 경우
$x^2=y^2+5$에 대입하면
$x^2=(x+1)^2+5$, $2x+6=0$
$\therefore x=-3$, $y=-2$
이때, x, y는 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $x-y=2$인 경우
$x^2=y^2+5$에 대입하면
$x^2=(x-2)^2+5$, $-4x+9=0$
$\therefore x=\frac{9}{4}$, $y=\frac{1}{4}$
(i), (ii)에서 구하는 값은
$80xy=80\times\frac{9}{4}\times\frac{1}{4}=45$

544 ····· 답 ③

두 연립방정식 $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+py^2=15 \end{cases}$, $\begin{cases} qx-y=5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$의 한 근이
$x=\alpha$, $y=\beta$이므로 이를 각각 대입하면
$\begin{cases} \alpha+\beta=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+p\beta^2=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$, $\begin{cases} q\alpha-\beta=5 & \cdots\cdots ㉢ \\ \alpha^2+\beta^2=17 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉠, ㉣에서
$\alpha^2+(3-\alpha)^2=17$, $2\alpha^2-6\alpha-8=0$, $\alpha^2-3\alpha-4=0$,
$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$
$\alpha=-1$일 때 $\beta=4$, $\alpha=4$일 때 $\beta=-1$
이때, $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=4$, $\beta=-1$
그러므로 ㉡에서 $4^2+p\times(-1)^2=15$, 즉 $p=-1$이고,
㉢에서 $4q-(-1)=5$, 즉 $q=1$이다.
$\therefore \alpha+\beta+p+q=4+(-1)+(-1)+1=3$

545 ····· 답 $10<k\leq11$

$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=k \\ x^2+xy+y^2=5 \end{cases}$에서 $x+y=A$, $xy=B$라 하면
$x^2+y^2=A^2-2B$이므로
$\begin{cases} A^2-2B+2A=k \\ A^2-2B+B=5 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} A^2-2B+2A=k & \cdots\cdots ㉠ \\ B=A^2-5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡을 ㉠에 대입하면
$A^2-2(A^2-5)+2A=k$에서
$A^2-2A+k-10=0$
이 A에 대한 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k-10)\geq0$에서 $k\leq11$
이때, $\alpha+\beta$의 값이 항상 양수가 되기 위해서는 이차방정식 $A^2-2A+k-10=0$의 두 근이 모두 양수이어야 하므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은
$k-10>0$에서 $k>10$
따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는 $10<k\leq11$이다.

546 ····· 답 147

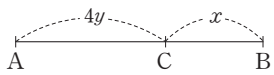
세 자리 자연수의 백의 자리의 숫자를 a, 십의 자리의 숫자를 b, 일의 자리의 숫자를 c라 하면
$\begin{cases} a+b+c=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2b=a+c & \cdots\cdots ㉡ \\ (100a+10b+c)+594=100c+10b+a & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$
㉢에서 $a-c=-6$ ····· ㉣
㉡을 ㉠에 대입하면
$b=4$, $a+c=8$ ····· ㉤
㉣, ㉤의 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $c=7$
따라서 처음 세 자리 자연수는 147이다.

547 ····· 답 $x=500$, $y=300$, $z=200$

X, Y, Z의 총 무게가 1 kg이므로
$x+y+z=1000$ ····· ㉠
조건 (가), (나)에 의하여
$x\times\frac{1}{100}+y\times\frac{2}{100}+z\times\frac{3}{100}=17$
$x+2y+3z=1700$ ····· ㉡
조건 (다)에 의하여
$x+y=4z$ ····· ㉢
㉠, ㉢에서 $5z=1000$이므로 $z=200$
㉠, ㉡에 $z=200$을 각각 대입한 뒤 연립하여 풀면
$x=500$, $y=300$
$\therefore x=500$, $y=300$, $z=200$

548 ····· 답 ②

갑의 속력을 x km/시, 을의 속력을 y km/시,
갑과 을이 만난 지점을 C라 하자.
갑과 을이 만날 때까지 걸린 시간을 t시간이라 하면
A지점에서 C지점까지 거리는 xt km
B지점에서 C지점까지 거리는 yt km
이때, 두 사람이 만나고 난 후 갑이 1시간 후에 B지점, 을이 4시간 후에 A지점에 도착하므로 A지점에서 C지점까지 거리는 $4y$ km,
B지점에서 C지점까지 거리는 x km이다.



그러므로
$xt=4y$ ····· ㉠
$yt=x$ ····· ㉡
㉡에서 $t=\frac{x}{y}$이고, 이를 ㉠에 대입하면

아쁘허어느내시시느그쇼재어시시(사아)_해시서르.indb 108 22. 9. 14. 오후 8:20

$\frac{x^2}{y}=4y$, $x^2=4y^2$이므로 $x=2y$ ($\because x>0$, $y>0$)

이때, C지점까지 갈 때, 갑이 을보다 8 km를 더 걸었다고 했으므로

$4y-x=8$이고, $x=2y$를 대입하면 $2y=8$이므로

$x=8$, $y=4$

그러므로 A지점에서 B지점까지의 거리 S는

$S=x+4y=8+4\times4=24$

$\therefore x+S=8+24=32$

549 ····· 답 ⑤

알약의 반구 부분의 반지름의 길이를 x mm라 하면

원기둥 부분의 높이는 $(x+6)$ mm이다.

알약의 전체 부피가 117π mm^{3}이므로

$\frac{4}{3}\pi x^3+\pi x^2(x+6)=117\pi$, $\frac{7}{3}x^3+6x^2-117=0$

이 방정식에 $x=3$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해 하면

3	$\frac{7}{3}$	6	0	-117
		7	39	117
	$\frac{7}{3}$	13	39	0

$(x-3)\left(\frac{7}{3}x^2+13x+39\right)=0$

이차방정식 $\frac{7}{3}x^2+13x+39=0$의 판별식을 D라 하면

$D=13^2-4\times\frac{7}{3}\times39<0$이므로 이 방정식을 만족시키는 실수가 존재하지 않는다.

따라서 $x=3$이므로 알약의 겉넓이는

$4\pi\times3^2+2\pi\times3\times9=36\pi+54\pi=90\pi(\text{mm}^2)$

550 ····· 답 ⑤

이차방정식 $x^2+(m-1)x+2m+3=0$의 두 근을 α, β $(\alpha\le\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1-m$ ····· ㉠

$\alpha\beta=2m+3$ ····· ㉡

㉠×2+㉡을 하면

$2\alpha+2\beta+\alpha\beta=5$, $(\alpha+2)(\beta+2)=9$

두 근 α, β는 모두 정수이므로

(i) $\alpha+2=1$, $\beta+2=9$일 때, $\alpha=-1$, $\beta=7$

(ii) $\alpha+2=3$, $\beta+2=3$일 때, $\alpha=1$, $\beta=1$

(iii) $\alpha+2=-3$, $\beta+2=-3$일 때, $\alpha=-5$, $\beta=-5$

(iv) $\alpha+2=-9$, $\beta+2=-1$일 때, $\alpha=-11$, $\beta=-3$

㉠에 의하여 $m=1-(\alpha+\beta)$이므로 (i)~(iv)에서

$m=-5$ 또는 $m=-1$ 또는 $m=11$ 또는 $m=15$

따라서 구하는 모든 실수 m의 값의 합은

$-5+(-1)+11+15=20$

551 ····· 답 ④

방정식 $2x^3-kx^2+49=0$의 한 근이 정수 a이므로 $x=a$를 대입하면

$2a^3-ka^2+49=0$에서 $a^2(2a-k)=-49$이고, a와 k가 모두 정수이므로 a^2과 $2a-k$도 정수이다.

$-49=(-1)\times7^2$이고, a는 1보다 큰 자연수이므로

$a^2=7^2$, $2a-k=-1$ $\therefore a=7$, $k=15$

그러므로 방정식은 $2x^3-15x^2+49=0$이고 $x=7$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해 하면

7	2	-15	0	49
		14	-7	-49
	2	-1	-7	0

$(x-7)(2x^2-x-7)=0$

이때, 이차방정식 $2x^2-x-7=0$의 두 근이 β, γ이고 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta+\gamma=\frac{1}{2}$, $\beta\gamma=-\frac{7}{2}$

$\beta^2+\gamma^2=(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)$

$=\frac{1}{4}+7=\frac{29}{4}$

$\therefore 4(\beta^2+\gamma^2)-k=4\times\frac{29}{4}-15=14$

552 ····· 답 8

$x^2+y^2-2x+4y-8=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=13$

$(x-1)^2+(y+2)^2=13$이고 x, y가 정수이므로

(i) $(x-1)^2=2^2$, $(y+2)^2=3^2$인 경우

$x-1=2$ 또는 $x-1=-2$이므로

$x=3$ 또는 $x=-1$

$y+2=3$ 또는 $y+2=-3$이므로

$y=1$ 또는 $y=-5$

가능한 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(3, 1)$, $(3, -5)$, $(-1, 1)$, $(-1, -5)$이다.

(ii) $(x-1)^2=3^2$, $(y+2)^2=2^2$인 경우

$x-1=3$ 또는 $x-1=-3$이므로

$x=4$ 또는 $x=-2$

$y+2=2$ 또는 $y+2=-2$이므로

$y=0$ 또는 $y=-4$

가능한 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(4, 0)$, $(4, -4)$, $(-2, 0)$, $(-2, -4)$이다.

(i), (ii)에서 $x=-2$, $y=-4$일 때, xy는 최댓값 8을 갖는다.

553 ····· 답 42

방정식 $ax^3-2bx^2+4(a+b)x-16a=0$에서 $x=2$를 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

아쿠하이스내시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 109 22. 9. 14. 오후 8:20

2	a	$-2b$	$4(a+b)$	$-16a$
		$2a$	$4a-4b$	$16a$
	a	$2a-2b$	$8a$	0

$(x-2)\{ax^2+2(a-b)x+8a\}=0$

주어진 방정식이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 방정식 $ax^2+2(a-b)x+8a=0$은 $x=2$를 근으로 갖지 않아야 한다.

이차방정식 $ax^2+2(a-b)x+8a=0$이 …… ㉠

2가 아닌 서로 다른 정수근을 가져야 하므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은 $\frac{-2(a-b)}{a}=\frac{2b}{a}-2$

두 근의 곱은 $\frac{8a}{a}=8$

따라서 방정식 ㉠의 2가 아닌 서로 다른 두 정수근은

1, 8 또는 -1, -8 또는 -2, -4이다.

(i) 방정식 ㉠의 두 근이 1, 8인 경우

두 근의 합은 $1+8=\frac{2b}{a}-2$에서 $b=\frac{11}{2}a$이므로

가능한 정수 a, b의 순서쌍은

$(2, 11)$, $(4, 22)$, $(-2, -11)$, $(-4, -22)$로 4개이다.

(ii) 방정식 ㉠의 두 근이 -1, -8인 경우

두 근의 합은 $-1-8=\frac{2b}{a}-2$에서 $b=-\frac{7}{2}a$이므로

가능한 정수 a, b의 순서쌍은

$(2, -7)$, $(4, -14)$, $(6, -21)$, $(8, -28)$,

$(-2, 7)$, $(-4, 14)$, $(-6, 21)$, $(-8, 28)$로 8개이다.

(iii) 방정식 ㉠의 두 근이 -2, -4인 경우

두 근의 합은 $-2-4=\frac{2b}{a}-2$에서 $b=-2a$이므로

가능한 정수 a, b의 순서쌍은

$(1, -2)$, $(2, -4)$, $(3, -6)$, …, $(15, -30)$,

$(-1, 2)$, $(-2, 4)$, $(-3, 6)$, …, $(-15, 30)$으로 30개이다.

(i)~(iii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4+8+30=42$이다.

554 ····· 답 ②

부등식 $|2-3x|+|x-4|\geq 14$에서

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때

$|2-3x|+|x-4|=2-3x-(x-4)$

$=-4x+6\geq 14$

이므로 $x\leq -2$

(ii) $\frac{2}{3}\leq x<4$일 때

$|2-3x|+|x-4|=-(2-3x)-(x-4)$

$=2x+2\geq 14$

이므로 $x\geq 6$에서 조건을 만족시키는 실수 x의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $x\geq 4$일 때

$|2-3x|+|x-4|=-(2-3x)+(x-4)$

$=4x-6\geq 14$

이므로 $x\geq 5$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\leq -2$ 또는 $x\geq 5$

555 ····· 답 ⑤

이차방정식 $ax^2+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로

주어진 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=-4ab>0$, 즉 $ab<0$

또한 $|ax+4|\geq b$에서 부등식의 해가

$x\geq 6$ 또는 $x\leq -2$이므로 $a<0$이고, $b>0$이다. …… TIP

$|ax+4|\geq b$에서 $ax+4\leq -b$ 또는 $ax+4\geq b$

$x\geq -\frac{b}{a}-\frac{4}{a}$ 또는 $x\leq \frac{b}{a}-\frac{4}{a}$

$\begin{cases} -\frac{b}{a}-\frac{4}{a}=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{b}{a}-\frac{4}{a}=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡에서 $-\frac{8}{a}=4$ $\therefore a=-2$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{b}{2}=4$ $\therefore b=8$

$\therefore a+b=-2+8=6$

TIP

절댓값의 성질에 의하여 실수 x의 값에 관계없이

$|ax+4|\geq 0$이므로 만약 $b\leq 0$이면 부등식 $|ax+4|\geq b$는

모든 실수 x에 대하여 성립한다.

즉, 해가 모든 실수가 되므로 문제에서 주어진 해를 만족시키지 못한다.

556 ····· 답 ①

주어진 조건에서

$|x-(-2)|+|x-5|\geq 9$

$|x+2|+|x-5|\geq 9$

이므로 범위를 나누어서 풀이하면 다음과 같다.

(i) $x<-2$인 경우

$-(x+2)-(x-5)\geq 9$, $-2x\geq 6$

이므로 $x\leq -3$

(ii) $-2\leq x<5$인 경우

$(x+2)-(x-5)\geq 9$, $7\geq 9$

이므로 조건을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않는다.

(iii) $x\geq 5$인 경우

$(x+2)+(x-5)\geq 9$, $2x\geq 12$

이므로 $x\geq 6$

(i)~(iii)에서 구하는 실수 x의 값의 범위는

$x\leq -3$ 또는 $x\geq 6$

아뿌려어나새시ㅣㄴㄱㅗ즈재어시ㅣ(사ㅇ)_해새서르.indb 110 22. 9. 14. 오후 8:20

557 ····· 답 ④

ㄱ. $a<b$이고 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이면 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$, $\frac{b-a}{ab}<0$

이때, $a<b$에서 $b-a>0$이므로 $ab<0$

$\therefore a<0$, $b>0$ (참)

ㄴ. $a^2+2ab>3b^2$에서 $a^2+2ab-3b^2=(a+3b)(a-b)$이고,

$0<a<b$에서 $a+3b>0$, $a-b<0$이므로 $(a+3b)(a-b)<0$

$\therefore a^2+2ab<3b^2$ (거짓)

ㄷ. $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$에서

$$a-b+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=a-b+\frac{b-a}{ab}$$

$$=(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)$$

$$=(a-b)\times\frac{ab-1}{ab}$$

이때, $0<a<b<1$에서 $a-b<0$, $ab>0$, $ab-1<0$이므로

$(a-b)\times\frac{ab-1}{ab}>0$ (참)

ㄹ. $a\geq0$, $b\geq0$이면 $|a|-|b|=a-b$이므로

$|a-b|\geq|a|-|b|$가 항상 성립한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이므로 3개이다.

558 ····· 답 ③

$|x+1|+|x-3|\leq k$에서 $f(x)=|x+1|+|x-3|$이라 하면

(i) $x\leq-1$일 때

$f(x)=-(x+1)-(x-3)=-2x+2$

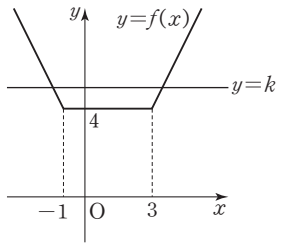
(ii) $-1<x\leq3$일 때

$f(x)=(x+1)-(x-3)=4$

(iii) $x\geq3$일 때

$f(x)=(x+1)+(x-3)=2x-2$

(i)~(iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 부등식 $|x+1|+|x-3|\leq k$의 해가 존재하려면

$k\geq4$이어야 한다.

따라서 실수 k의 최솟값은 4이다.

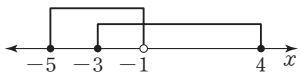
559 ····· 답 2

조건 (가)에서 $x-4\leq0$, $-3-x\leq0$이므로

$-3\leq x\leq4$ ····· ㉠

조건 (나)에서 $x+5\geq0$, $x+1<0$이므로

$-5\leq x<-1$ ····· ㉡



㉠, ㉡에서 x의 값의 범위는 $-3\leq x<-1$이므로

정수 x는 -3, -2로 2개이다.

560 ····· 답 ③

$x-1<|x+3|\leq|x-5|$에서

(i) $x<-3$일 때

$x-1<-(x+3)<-(x-5)$

$x-1<-(x+3)$에서 $2x<-2$, $x<-1$

$-(x+3)\leq-(x-5)$에서 $-3\leq5$이므로 부등식을 만족시킨다.

$\therefore x<-3$

(ii) $-3\leq x<5$일 때

$x-1<x+3\leq-(x-5)$

$x-1<x+3$에서 $-1<3$이므로 부등식을 만족시킨다.

$x+3\leq-(x-5)$에서 $2x\leq2$, $x\leq1$

$\therefore -3\leq x\leq1$

(iii) $x\geq5$일 때

$x-1<x+3\leq x-5$

$x-1<x+3$에서 $-1<3$이므로 부등식을 만족시킨다.

$x+3\leq x-5$에서 $3\leq-5$이므로 부등식을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 주어진 연립부등식의 해는 $x\leq1$이다.

561 ····· 답 $\frac{5}{3}<a\leq5$

$4x+a>3x+5>5x-a$에서

(i) $4x+a>3x+5$일 때, $x>5-a$

(ii) $3x+5>5x-a$일 때, $2x<5+a$, $x<\frac{5+a}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는 $5-a<x<\frac{5+a}{2}$이다.

이 부등식의 해가 존재하려면

$5-a<\frac{5+a}{2}$에서 $10-2a<5+a$, $3a>5$, $a>\frac{5}{3}$이어야 하고,

해가 모두 양수이려면 $5-a\geq0$에서 $a\leq5$이어야 한다.

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $\frac{5}{3}<a\leq5$이다.

562 ····· 답 5

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{4}$이므로

$a>0$

$ax^2+bx+c>0$의 양변을 각각 a로 나누면

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0$

이차방정식 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$의 두 근이 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{4}$이므로

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0$에서 $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)>0$

$\therefore$ $\frac{b}{a}=\frac{1}{4}$, $\frac{c}{a}=-\frac{1}{8}$ ····· ㉠

아끄하이노내시스템고조재이시스템(사이)_하내시서로.indb 111 22. 9. 14. 오후 8:20

부등식 $cx^2+bx+a>0$에서 양변을 각각 a로 나누면
$\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1>0$에서 $-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x+1>0$ ($\because$ ㉠)
위 식의 양변에 각각 -8을 곱하면
$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$ $\therefore -2<x<4$
따라서 구하는 모든 정수 x의 값의 합은
$-1+0+1+2+3=5$

563 ····· 답 ③

ㄱ. $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축 아래쪽에 있으므로
$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$
$x=\gamma$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축 위쪽에 있으므로
$f(\gamma)>0$
$\therefore f(\gamma)>f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (참)

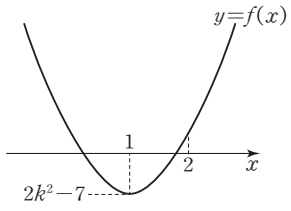
ㄴ. 방정식 $f(x)\{f(x)-g(x)\}=0$에서
$f(x)=0$ 또는 $f(x)-g(x)=0$
방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이고,
방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$이다.
즉, 방정식 $f(x)\{f(x)-g(x)\}=0$은 $x=\beta$를 중근으로 갖고 $x=\alpha$ 또는 $x=\gamma$를 근으로 가지므로 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

ㄷ. 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프보다 함수 $y=g(x)$의 그래프가 더 위쪽에 그려지는 범위이다.
그러므로 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 $\gamma<x<\beta$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

564 ····· 답 ③

$x^2-6x+8<0$에서 $(x-2)(x-4)<0$이므로
$2<x<4$
$f(x)=x^2-2x+2k^2-6$이라 하면
$f(x)=x^2-2x+2k^2-6=(x-1)^2+2k^2-7$
이므로 $x=1$일 때 최소이고, 그래프는 다음과 같다.



$2<x<4$인 모든 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2x+2k^2-6>0$, 즉 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(2)\geq 0$이어야 하므로
$f(2)=2k^2-6\geq 0$, $k^2\geq 3$
$\therefore k\geq\sqrt{3}$ 또는 $k\leq-\sqrt{3}$
따라서 $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=-\sqrt{3}$이므로
$\alpha\beta=-3$

565 ····· 답 ③

$(k+1)x^2+k-2\leq x^2-kx$에서
$kx^2+kx+k-2\leq 0$ ····· ㉠
(i) $k=0$일 때
㉠에 대입하면 $-2\leq 0$이므로 부등식을 만족시킨다.
(ii) $k>0$일 때
이차부등식 $kx^2+kx+k-2\leq 0$을 만족시키는 실수 x의 값이 존재하려면 이차함수 $y=kx^2+kx+k-2$가 x축과 적어도 한 점에서 만나야 하므로 방정식 $kx^2+kx+k-2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-4k(k-2)\geq 0$, $3k^2-8k\leq 0$, $k(3k-8)\leq 0$
$\therefore 0<k\leq\frac{8}{3}$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는 $0\leq k\leq\frac{8}{3}$이므로
정수 k는 0, 1, 2로 3개이다.

566 ····· 답 ③

부등식 $x^2-2yx+(3y^2+4ay+2)\geq 0$이 항상 성립하려면
이차방정식 $x^2-2yx+(3y^2+4ay+2)=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $D_1\leq 0$이어야 한다.
$\frac{D_1}{4}=y^2-(3y^2+4ay+2)\leq 0$, $2y^2+4ay+2\geq 0$
$\therefore y^2+2ay+1\geq 0$
이때, 위 부등식 $y^2+2ay+1\geq 0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $y^2+2ay+1=0$의 판별식을 D_2라 할 때, $D_2\leq 0$이어야 한다.
$\frac{D_2}{4}=a^2-1\leq 0$, $(a-1)(a+1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 1$
따라서 주어진 부등식이 성립하도록 하는 정수 a는 -1, 0, 1로 3개이다.

다른 풀이

$x^2-2xy+3y^2+4ay+2\geq 0$에서 완전제곱식을 이용하면
$(x^2-2xy+y^2)+2(y^2+2ay+1)\geq 0$
$(x-y)^2+2(y^2+2ay+1)\geq 0$
이고, 두 실수 x, y의 값에 관계없이 $(x-y)^2\geq 0$이므로
$y^2+2ay+1\geq 0$이 성립하면 된다.
이차방정식 $y^2+2ay+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-1\leq 0$이므로 $(a+1)(a-1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 1$
따라서 주어진 부등식이 성립하도록 하는 정수 a는 -1, 0, 1로 3개이다.

567 ····· 답 3

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.

아끄하ㅓ이ㄴ새ㅅ시ㅣㄴㄱㅗ즈새이ㅅ시ㅣ(사ㅏ이)_하새ㅅ서ㄹ.indb 112 22. 9. 14. 오후 8:20

$f(x)=k(x+1)(x-3)$ $(k<0)$라 하면

$$f\left(\frac{x-a}{2}\right)=k\left(\frac{x-a}{2}+1\right)\left(\frac{x-a}{2}-3\right)$$
$$=k\left(\frac{x-a+2}{2}\right)\left(\frac{x-a-6}{2}\right)$$
$$=\frac{k}{4}(x-a+2)(x-a-6)<0$$

이때, 이 부등식의 해가 $x<1$ 또는 $x>9$이므로
$a-2=1$, $a+6=9$에서 구하는 값은 $a=3$이다.

568 ····· 답 $2\le m<3$

(i) $m=2$일 때
$1>0$이므로 부등식을 만족시킨다.

(ii) $m\neq2$일 때
부등식 $(m-2)x^2-(2m-4)x+1>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 함수 $y=(m-2)x^2-(2m-4)x+1$의 그래프가 항상 x축 위쪽에 위치해야 한다.
즉, 함수 $y=(m-2)x^2-(2m-4)x+1$은 아래로 볼록한 이차함수이면서 x축과 만나지 않아야 하므로
$m-2>0$, 즉 $m>2$이고,
방정식 $(m-2)x^2-(2m-4)x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(m-2)^2-(m-2)<0$, $(m-2)\{(m-2)-1\}<0$
$(m-2)(m-3)<0$
$\therefore 2<m<3$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는 $2\le m<3$이다.

569 ····· 답 4

부등식 $x^2+2|x-2|\ge4$에서
(i) $x<2$인 경우
$x^2-2(x-2)\ge4$, $x^2-2x\ge0$
$x(x-2)\ge0$에서 $x\le0$ 또는 $x\ge2$
$\therefore x\le0$

(ii) $x\ge2$인 경우
$x^2+2(x-2)\ge4$, $x^2+2x-8\ge0$
$(x+4)(x-2)\ge0$에서 $x\le-4$ 또는 $x\ge2$
$\therefore x\ge2$

(i), (ii)에서 부등식 $x^2+2|x-2|\ge4$의 해는
$x\le0$ 또는 $x\ge2$ ····· ㉠
이때, 부등식 $x^2+ax+b\ge0$의 해가 ㉠과 같으므로 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근은 0, 2이다.
따라서 $x^2+ax+b=x(x-2)$에서 $a=-2$, $b=0$이므로
$a^2+b^2=4$

570 ····· 답 ⑤

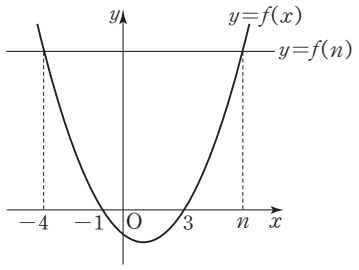
조건 (가)에서
$f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2+a$, $g(x)=2(x-p)^2+b$ (a, b는 상수)라 하면
두 이차식 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 각각 $\frac{1}{2}$, 2이므로
이차식 $f(x)-g(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$이고,
조건 (나)에서 부등식 $f(x)-g(x)\ge0$의 해가 $-2\le x\le3$이므로
$f(x)-g(x)=-\frac{3}{2}(x+2)(x-3)$ ····· ㉡
즉, $\frac{1}{2}(x-p)^2+a-\{2(x-p)^2+b\}=-\frac{3}{2}(x+2)(x-3)$에서
$-\frac{3}{2}x^2+3px-\frac{3}{2}p^2+a-b=-\frac{3}{2}(x^2-x-6)$
이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면
$3p=\frac{3}{2}$에서 $p=\frac{1}{2}$이다.
$\therefore 4p\times\{f(2)-g(2)\}=4\times\frac{1}{2}\times\left\{-\frac{3}{2}(2+2)(2-3)\right\}$ ($\because$ ㉡)
$=2\times6=12$

571 ····· 답 56

부등식 $f(x)\le g(x)$의 해가 $-2\le x\le3$이므로
$f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 부등식 $h(x)\le0$의 해가
$-2\le x\le3$이므로 함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고,
이차방정식 $h(x)=0$의 두 실근은 $x=-2$ 또는 $x=3$이다.
그러므로 함수 $h(x)$를 구하면
$h(x)=a(x+2)(x-3)$ $(a>0)$
이때, $f(1)-g(1)=-24$이므로
$h(1)=a\times3\times(-2)=-24$에서 $a=4$
$\therefore h(x)=4(x+2)(x-3)$
$\therefore f(5)-g(5)=h(5)=4\times7\times2=56$

572 ····· 답 52

$f(x)=(x-3)(x+1)$이라 하면 $f(n)=(n-3)(n+1)$
함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타내면 다음과 같다.



부등식 $(x-3)(x+1)<(n-3)(n+1)$의 해가 $-4<x<n$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(n)$의 두 교점의 x좌표가 -4, n이다.
이때, $(m-3)(m+1)=(n-3)(n+1)$에서 $f(n)=f(m)$이므로
$m=-4$ ($\because m<n$)이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선
$x=\frac{(-1)+3}{2}=1$에 대하여 대칭이므로 $\frac{(-4)+n}{2}=1$에서 $n=6$
$\therefore m^2+n^2=(-4)^2+6^2=52$

오쁘후우느새스ㅣㄴㄱㅗ조재으스ㅣ(스ㅏ으)_후새스러르.indb 113 22. 9. 14. 오후 8:20

573 ····· 답 $2 \le k < 6$

조건 (가)에서 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로

$f(2)=4-2(2k+1)+k^2-14<0$

$k^2-4k-12<0$, $(k-6)(k+2)<0$

$\therefore\ -2<k<6$ ····· ㉠

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 $x=\frac{2k+1}{2}$이고, 이 축이 조건 (나)에서 직선 $x=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$와 같거나 오른쪽에 존재해야 하므로

$\frac{2k+1}{2} \ge \frac{5}{2}$, $2k+1 \ge 5$

$\therefore\ k \ge 2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$2 \le k < 6$

574 ····· 답 $\frac{13}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a$, $g(x)=|x+3|+|x-1|$이라 하자.

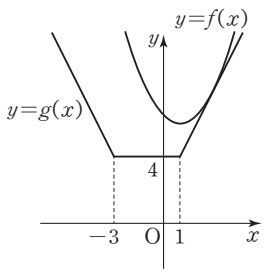
$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+a-\frac{1}{4}$이고,

$x<-3$일 때, $g(x)=-(x+3)-(x-1)=-2x-2$

$-3 \le x<1$일 때, $g(x)=(x+3)-(x-1)=4$

$x \ge 1$일 때, $g(x)=(x+3)+(x-1)=2x+2$

이므로 부등식 $\frac{1}{2}x^2-x+a \ge |x+3|+|x-1|$을 만족시키면서 실수 a의 값이 최소일 때는 다음과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x \ge 1$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프에 접할 때이다.



방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+a=2x+2$, 즉 $x^2-6x+2a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(2a-4)=0$, $2a=13$, $a=\frac{13}{2}$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 $\frac{13}{2}$이다.

575 ····· 답 ④

부등식 $0 \le f(x)<g(x)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로 x축 또는 x축보다 위쪽에 있어야 한다.

즉, 부등식 $f(x) \ge 0$을 만족시키는 범위는

$x \le a$ 또는 $x \ge d$ ····· ㉠

또한 $f(x)$의 함숫값보다 $g(x)$의 함숫값이 더 커야 하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프보다 더 위쪽에 있어야 한다.

즉, $f(x)<g(x)$를 만족시키는 범위는

$b<x<e$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 범위는 $d \le x<e$이다.

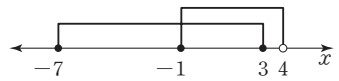
576 ····· 답 ③

$\begin{cases} |x+2| \le 5 & \cdots\cdots ㉠ \\ [x]^2-2[x]-8<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $-5 \le x+2 \le 5$ $\therefore\ -7 \le x \le 3$

㉡에서 $([x]+2)([x]-4)<0$, $-2<[x]<4$ $\therefore\ -1 \le x<4$

이를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 실수 x의 값의 범위는 $-1 \le x \le 3$이다.

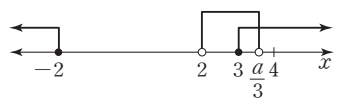
577 ····· 답 ④

$\begin{cases} x^2-x-6 \ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2-(a+6)x+2a<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+2)(x-3) \ge 0$ $\therefore\ x \le -2$ 또는 $x \ge 3$

㉡에서 $(3x-a)(x-2)<0$

이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3뿐인 경우는 다음과 같다.



그러므로 부등식 $(3x-a)(x-2)<0$의 해는

$2<x<\frac{a}{3}$이고, $3<\frac{a}{3} \le 4$이다.

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $9<a \le 12$이다.

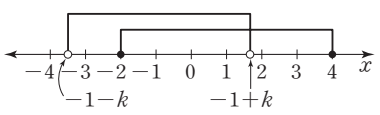
578 ····· 답 ⑤

$\begin{cases} x^2-2x-8 \le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ |x+1|<k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+2)(x-4) \le 0$ $\therefore\ -2 \le x \le 4$

㉡에서 $-k<x+1<k$ $\therefore\ -1-k<x<-1+k$

이때, 조건을 만족시키도록 수직선에 나타내면 다음과 같아야 한다.



····· TIP

즉, 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -2, -1, 0, 1의 4개로 조건을 만족시키므로

$1<-1+k \le 2$

$\therefore\ 2<k \le 3$

아끄하셔으내서시ㅣㄴㄱㅗ조재으서시(사ㅏ으)_ㅎ내서셔르.indb 114 22. 9. 14. 오후 8:20

TIP

부등식 $|x+1|<k$가 해를 가지려면 $k>0$이므로
$-1-k<0$이다.
그러므로 $-1-k<x<-1+k$에 -2, -1, 0, 1을 포함하도록 해야 한다.

579 ····· 답 $k\geq 1$

$\begin{cases} 3x-3k>2x-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-(k+2)x+2k\leq 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x>3k-1$

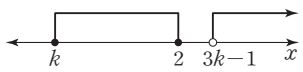
㉡에서 $(x-k)(x-2)\leq 0$

이때, $k\leq 2$이면 $k\leq x\leq 2$이고, $k>2$이면 $2\leq x\leq k$

그러므로 연립부등식의 해가 존재하지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) $k\leq 2$일 때

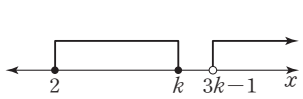
㉠, ㉡에서 각각의 부등식의 해가 $x>3k-1$, $k\leq x\leq 2$이므로 연립부등식의 해가 존재하지 않는 경우를 수직선에 표현하면 다음과 같다.



그러므로 $2\leq 3k-1$, 즉 $k\geq 1$이므로 실수 k의 값의 범위는 $1\leq k\leq 2$이다.

(ii) $k>2$일 때

㉠, ㉡에서 각각의 부등식의 해가 $x>3k-1$, $2\leq x\leq k$이므로 연립부등식의 해가 존재하지 않는 경우를 수직선에 표현하면 다음과 같다.



그러므로 $k\leq 3k-1$, 즉 $k\geq\frac{1}{2}$이므로 실수 k의 값의 범위는 $k>2$이다.

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $k\geq 1$이다.

580 ····· 답 ⑤

연립부등식 $\begin{cases} -3x^2+4x\leq a \\ |2x-a|\geq 3-b \end{cases}$의 해가 모든 실수가 되려면 각각의 부등식의 해가 모든 실수이어야 한다.

(i) $-3x^2+4x\leq a$의 해가 모든 실수일 때

$3x^2-4x+a\geq 0$에서 이차함수 $y=3x^2-4x+a$의 그래프가 x축과 만나거나 위쪽에 위치해야 하므로 이차방정식 $3x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-3a\leq 0$, $3a\geq 4$ $\quad\therefore a\geq\frac{4}{3}$

(ii) $|2x-a|\geq 3-b$의 해가 모든 실수일 때

좌변의 $|2x-a|$는 x의 값에 관계없이 항상 0보다 크거나 같으므로 부등식의 해가 모든 실수이려면 $3-b\leq 0$이어야 한다.

$\therefore b\geq 3$

(i), (ii)에서 $a\geq\frac{4}{3}$, $b\geq 3$이므로 두 정수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값은 $2+3=5$

581 ····· 답 ③

$\begin{cases} x^2-3x-4\geq 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2(k+1)x+(k+3)(k-1)\leq 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-4)(x+1)\geq 0$

$\therefore x\geq 4$ 또는 $x\leq -1$

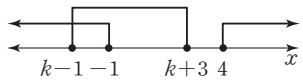
㉡에서 $x^2-2(k+1)x+(k+3)(k-1)\leq 0$

$\{x-(k+3)\}\{x-(k-1)\}\leq 0$

$\therefore k-1\leq x\leq k+3$

(i) $k-1<-1$인 경우

$k<0$이고, 연립부등식의 해는 $k-1\leq x\leq -1$이므로 수직선에 나타내면 다음과 같다.



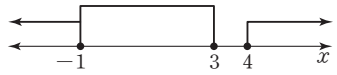
부등식을 만족시키는 정수인 x가 2개이려면

$k-1=-2$에서 $k=-1$

(ii) $k-1=-1$ 또는 $k+3=4$인 경우

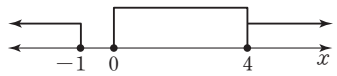
$k-1=-1$, 즉 $k=0$일 때

연립부등식의 해는 $x=-1$로 1개이다.



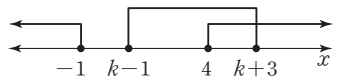
$k+3=4$, 즉 $k=1$일 때

연립부등식의 해는 $x=4$로 1개이다.



(iii) $k+3>4$, 즉 $k>1$인 경우

$k>1$이고, 연립부등식의 해는 $4\leq x\leq k+3$이므로 수직선에 나타내면 다음과 같다.



부등식을 만족시키는 정수인 x가 2개이려면

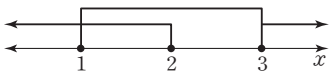
$k+3=5$에서 $k=2$

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은

$-1+2=1$

582 ····· 답 2

연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b\geq 0 \\ x^2+cx+d\leq 0 \end{cases}$의 해가 $x=3$ 또는 $1\leq x\leq 2$이므로 각각의 부등식이 나타내는 범위가 다음과 같아야 한다.



그러므로 부등식 $x^2+ax+b\geq 0$의 해는

$x\leq 2$ 또는 $x\geq 3$ $\cdots\cdots ㉠$

부등식 $x^2+cx+d\leq 0$의 해는

$1\leq x\leq 3$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠에서 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근이 $x=2$ 또는 $x=3$이므로

$x^2+ax+b=(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$

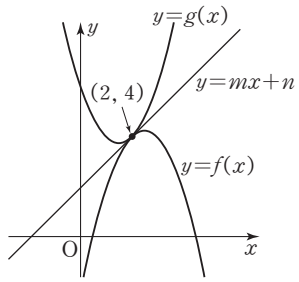
$\therefore a=-5$, $b=6$

아쿠하이스내시니그스재이시(사이)_해설서류.indb 115 22. 9. 14. 오후 8:20

㉡에서 방정식 $x^2+cx+d=0$의 두 실근이 $x=1$ 또는 $x=3$이므로
$x^2+cx+d=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$
$\therefore c=-4,\ d=3$
$\therefore (a+b)-(c+d)=(-5+6)-(-4+3)=2$

583 ····· 답 5

$f(x)=-x^2+5x-2,\ g(x)=x^2-3x+6$이라 하면
방정식 $f(x)=g(x)$는
$-x^2+5x-2=x^2-3x+6$에서
$2x^2-8x+8=0,\ 2(x-2)^2=0$
이므로 $x=2$에서 중근을 갖는다. 즉 $f(2)=g(2)=4$이므로
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$에서 서로 접한다.
모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^2+5x-2\le mx+n\le x^2-3x+6$
이 성립하려면 다음 그림과 같이 직선 $y=mx+n$이 점 $(2,\ 4)$에서
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 동시에 접해야 한다.



$y=mx+n$에 점 $(2,\ 4)$를 대입하면
$4=2m+n,\ n=4-2m$ ····· ㉠
함수 $f(x)=-x^2+5x-2$와 직선 $y=mx+4-2m$이 접하므로
이차방정식 $-x^2+5x-2=mx+4-2m$, 즉
$x^2+(m-5)x+6-2m=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(m-5)^2-4(6-2m)=0,\ m^2-2m+1=0,\ (m-1)^2=0$
따라서 $m=1$이고 $n=2$ ($\because$ ㉠)이다.
$\therefore m^2+n^2=1^2+2^2=5$

584 ····· 답 ①

이차방정식 $kx^2+4x-5k=0$의 두 근을 α, β라 하고,
판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4+5k^2>0$
이므로 모든 실수 k에 대하여 주어진 방정식이 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\frac{4}{k},\ \alpha\beta=-5$
이고, $|\alpha-\beta|\le 6$이므로
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{16}{k^2}+20\le 36$
$\frac{16}{k^2}\le 16,\ \frac{1}{k^2}\le 1$
$k^2-1\ge 0,\ (k+1)(k-1)\ge 0$
$\therefore k\le -1$ 또는 $k\ge 1$

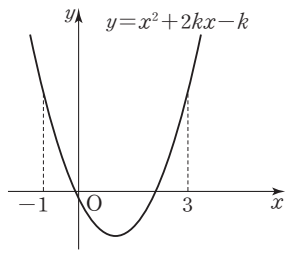
585 ····· 답 풀이 참조

주어진 방정식이 실근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을
D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=(2k-a)^2-(k^2+4k-a)\ge 0$
$4k^2-4ak+a^2-(k^2+4k-a)\ge 0$
$3k^2-2(2a+2)k+a^2+a\ge 0$
이때, 모든 실수 k에 대하여 이 부등식이 항상 성립해야 하므로
방정식 $3k^2-2(2a+2)k+a^2+a=0$이 허근 또는 중근을 가져야 한다. 이 방정식의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=(2a+2)^2-3(a^2+a)\le 0$
$4a^2+8a+4-3(a^2+a)\le 0$
$a^2+5a+4\le 0,\ (a+4)(a+1)\le 0$
따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는
$-4\le a\le -1$

채점 요소	배점
주어진 방정식의 판별식 조건으로 부등식 세우기	40%
실수 k의 값에 관계없이 부등식이 성립하도록 하는 판별식 조건으로 부등식 세우기	40%
실수 a의 값의 범위 구하기	20%

586 ····· 답 ⑤

$f(x)=x^2+2kx-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을
α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, $-1<\alpha<\beta<3$이어야 하므로 이차함수
$y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



즉, $f(x)=(x+k)^2-k^2-k$에서 이차함수의 그래프의 축이 두 직선
$x=-1$, $x=3$ 사이에 있어야 한다.
또한 $f(-k)<0$이고, $f(-1)>0$, $f(3)>0$이어야 한다.
(i) $-1<-k<3$
$-3<k<1$
(ii) $f(-k)<0$
$-k^2-k<0,\ k(k+1)>0$ $\therefore k>0$ 또는 $k<-1$
(iii) $f(-1)>0$, $f(3)>0$
$1-2k-k>0,\ 9+6k-k>0$에서 $k<\frac{1}{3}$, $k>-\frac{9}{5}$
$\therefore -\frac{9}{5}<k<\frac{1}{3}$
(i), (ii), (iii)을 모두 만족시키는 실수 k의 값의 범위는
$-\frac{9}{5}<k<-1$ 또는 $0<k<\frac{1}{3}$

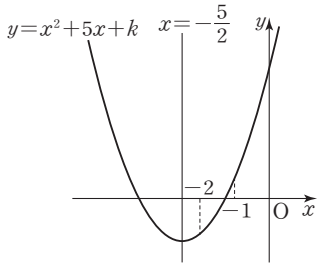
오투하이노베이션_노그소재오시(상하)_해설수정.indb 116 22. 9. 14. 오후 8:20

587 답 5

이차방정식 $x^2+3x+2=0$, 즉 $(x+2)(x+1)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=-1$
이므로 이차방정식 $x^2+5x+k=0$의 한 근이 -2와 -1 사이에 존재해야 한다.

이때, 이차함수 $y=x^2+5x+k=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+k-\frac{25}{4}$에서

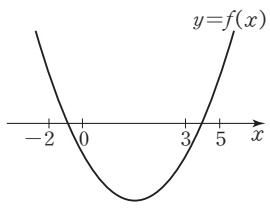
축이 $x=-\frac{5}{2}$이므로 이 함수의 그래프는 다음과 같다.



즉, $f(-2)<0$이고, $f(-1)>0$이므로
$f(-2)=4-10+k<0$에서 $k<6$
$f(-1)=1-5+k>0$에서 $k>4$
따라서 $4<k<6$에서 구하는 정수 k의 값은 5이다.

588 답 $\frac{1}{5}<a<\frac{13}{9}$

이차방정식 $x^2-2(a+1)x+a-2=0$에서
$f(x)=x^2-2(a+1)x+a-2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 다음과 같다.



그러므로 $f(-2)>0$, $f(0)<0$이고, $f(3)<0$, $f(5)>0$이다.

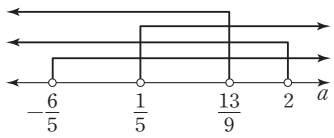
$f(-2)=4+4(a+1)+a-2=5a+6>0$에서 $a>-\frac{6}{5}$

$f(0)=a-2<0$에서 $a<2$

$f(3)=9-6(a+1)+a-2=-5a+1<0$에서 $a>\frac{1}{5}$

$f(5)=25-10(a+1)+a-2=-9a+13>0$에서 $a<\frac{13}{9}$

이므로 위 조건을 모두 만족시키는 범위를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $\frac{1}{5}<a<\frac{13}{9}$이다.

589 답 ④

테이블의 개수를 x, 이 특별활동 반 학생 수를 y라 하자.
3명씩 앉으면 2명이 앉지 못하므로
$y=3x+2$ …… ㉠
5명씩 앉으면 테이블 2개가 비고, 마지막 학생이 앉은 테이블에는 학생이 1명 이상 5명 이하가 앉을 수 있으므로
$5(x-3)+1\le y\le 5(x-2)$에서
$5x-14\le 3x+2\le 5x-10$ ($\because$ ㉠)
(i) $5x-14\le 3x+2$에서 $2x\le 16$ $\therefore x\le 8$
(ii) $3x+2\le 5x-10$에서 $2x\ge 12$ $\therefore x\ge 6$
(i), (ii)에서 $6\le x\le 8$이므로 $20\le 3x+2\le 26$
따라서 이 반의 학생 수가 될 수 있는 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합은 $20+26=46$

590 답 4

$a+1$, $a+2$, $a+4$는 각각 변의 길이이므로
$a+1>0$, $a+2>0$, $a+4>0$에서 $a>-1$ …… ㉠
삼각형이 되려면 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로
$(a+1)+(a+2)>a+4$에서 $a>1$ …… ㉡
또한 둔각삼각형이 되기 위해서는
$(a+1)^2+(a+2)^2<(a+4)^2$
즉, $a^2-2a-11<0$이어야 하므로
$1-2\sqrt{3}<a<1+2\sqrt{3}$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 실수 a의 값의 범위는
$1<a<1+2\sqrt{3}$
따라서 $p=1$, $q=1$, $r=2$이므로
$p+q+r=4$

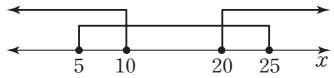
591 답 ⑤

이 커피숍의 녹차라떼 가격을 a(원),
녹차라떼를 주문하는 사람의 수를 b(명)이라 하자.
가격을 x % 인상하면 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$(원)이고,
녹차라떼를 주문하는 사람의 수는 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$(명)이다.
녹차라떼의 총 판매액이 12 % 이상 증가해야 하므로
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\ge ab\left(1+\frac{12}{100}\right)$
$\frac{100+x}{100}\times\frac{200-x}{200}\ge\frac{112}{100}$
$(100+x)(200-x)\ge 22400$
$x^2-100x+2400\le 0$
$(x-60)(x-40)\le 0$
$\therefore 40\le x\le 60$
따라서 x의 최댓값은 60이다.

아쿠아이너지스 니그그자이스 (사이)_해설서르.indb 117 22. 9. 14. 오후 8:20

592 ····· 답 15

둘레의 길이가 60 m인 직사각형 모양의 화단의 짧은 변의 길이를 x(m)라 하면 긴 변의 길이는 $(30-x)$m이다.
이때, 화단의 넓이가 125 m^2 이상 200 m^2 이하이므로
$125 \le x(30-x) \le 200$
$125 \le x(30-x)$에서
$x^2-30x+125 \le 0$, $(x-5)(x-25) \le 0$
$\therefore 5 \le x \le 25$ ····· ㉠
$x(30-x) \le 200$에서
$x^2-30x+200 \ge 0$, $(x-10)(x-20) \ge 0$
$\therefore x \le 10$ 또는 $x \ge 20$ ····· ㉡



㉠, ㉡에서 x의 값의 범위는
$5 \le x \le 10$ 또는 $20 \le x \le 25$
이때, x가 짧은 변의 길이이므로 $5 \le x \le 10$이다.
따라서 x의 최댓값과 최솟값의 합은 $10+5=15$이다.

593 ····· 답 9

$x=-1$, $x=k$를 대입하면 주어진 방정식을 만족시키므로
조립제법을 이용해서 좌변을 인수분해하면

-1	1	$-k$	$-(k+1)$	k^2	k^2
		-1	$k+1$	0	$-k^2$
k	1	$-k-1$	0	k^2	0
		k	$-k$	$-k^2$	
	1	-1	$-k$	0	

$(x+1)(x-k)(x^2-x-k)=0$
이 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면
$k \ne -1$ ····· ㉠
이고, 방정식 $x^2-x-k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
방정식 $x^2-x-k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1+4k>0$에서 $k>-\frac{1}{4}$ ····· ㉡
이때, $x=-1$이 방정식 $x^2-x-k=0$의 근이 아니어야 하므로
$1+1-k \ne 0$에서 $k \ne 2$ ····· ㉢
또한, $x=k$도 방정식 $x^2-x-k=0$의 근이 아니어야 하므로
$k^2-2k=k(k-2) \ne 0$에서 $k \ne 0$, $k \ne 2$ ····· ㉣
따라서 ㉠~㉣에서 조건을 만족시키는 10 이하의 정수 k의 개수는
1, 3, 4, …, 10의 9이다.

594 ····· 답 ⑤

방정식 $x^3-2x^2+x=k^3-2k^2+k$에서
$x^3-2x^2+x-k^3+2k^2-k=0$이고, $x=k$를 대입하면 방정식을 만족시키므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

k	1	-2	1	$-k^3+2k^2-k$	
		k	k^2-2k	k^3-2k^2+k	
	1	$k-2$	k^2-2k+1	0	

$(x-k)\{x^2+(k-2)x+k^2-2k+1\}=0$
이 방정식이 중근을 가지려면 방정식
$x^2+(k-2)x+k^2-2k+1=0$이 $x=k$를 한 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.
(i) 방정식 $x^2+(k-2)x+k^2-2k+1=0$이 $x=k$를 한 근으로 갖는 경우
이 방정식에 $x=k$를 대입하면
$k^2+k(k-2)+k^2-2k+1=0$
$3k^2-4k+1=0$, $(3k-1)(k-1)=0$
$\therefore k=\frac{1}{3}$ 또는 $k=1$
(ii) 방정식 $x^2+(k-2)x+k^2-2k+1=0$이 중근을 갖는 경우
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(k-2)^2-4(k^2-2k+1)=0$
$-3k^2+4k=0$, $-k(3k-4)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=\frac{4}{3}$
(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은
$\frac{1}{3}+1+0+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

595 ····· 답 6

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-2=0$의 계수가 모두 실수이므로
$\alpha=p+qi$ (p, q는 실수, $q \ne 0$)라 할 때, α를 허근으로 가지면
켤레복소수 $\overline{\alpha}$도 근으로 갖는다.
$\frac{\alpha^2}{2}=\overline{\alpha}$에서 $\frac{(p+qi)^2}{2}=p-qi$
$p^2-q^2+2pqi=2p-2qi$
이때, 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$2pq=-2q$ ····· ㉠
$p^2-q^2=2p$ ····· ㉡
㉠에서 $q(p+1)=0$이므로 $p=-1$ ($\because q \ne 0$)
㉡에 $p=-1$을 대입하면 $q^2=3$에서
$q=\sqrt{3}$ 또는 $q=-\sqrt{3}$
그러므로 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-2=0$의 두 허근은
$-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$이다.
이 방정식의 나머지 한 실근을 k라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$k(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)=4k=2$에서 $k=\frac{1}{2}$
두 근이 $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$인 이차방정식은 $x^2+2x+4=0$이고,
나머지 한 실근이 $x=\frac{1}{2}$이므로 주어진 삼차방정식은
$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+2x+4)=0$, $x^3+\frac{3}{2}x^2+3x-2=0$
에서 $a=\frac{3}{2}$, $b=3$
$\therefore 2a+b=6$

이끄하이스내스ㅣㄴㄱㅗ자이스ㅣ(스ㅏ이)_하내스커르.indb 118 22. 9. 14. 오후 8:20

596 ····· 답 61

사차방정식 $(x^2+2ax+2a)(x^2+bx+4)=0$의 근 중 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우는 다음과 같다.

(i) 두 이차방정식 $x^2+2ax+2a=0$, $x^2+bx+4=0$이 각각 중근을 가질 때

방정식 $x^2+2ax+2a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-2a=0$, $a(a-2)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=2$

방정식 $x^2+bx+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=b^2-16=0$, $(b+4)(b-4)=0$에서 $b=4$ 또는 $b=-4$

이때, $a=2$, $b=4$인 경우 주어진 방정식은 $(x+2)^4=0$으로 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

그러므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times2-1=3$이다.

(ii) 한 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖고, 나머지 한 이차방정식은 두 허근을 가질 때

방정식 $x^2+2ax+2a=0$이 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 $x^2+bx+4=0$이 두 허근을 갖는 경우는

$\frac{D_1}{4}=a(a-2)>0$에서 $a<0$ 또는 $a>2$

$D_2=(b-4)(b+4)<0$에서 $-4<b<4$

그러므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $8\times7=56$이다.

방정식 $x^2+2ax+2a=0$이 두 허근을 갖고, 방정식 $x^2+bx+4=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는

$\frac{D_1}{4}=a(a-2)<0$에서 $0<a<2$

$D_2=(b-4)(b+4)>0$에서 $b<-4$ 또는 $b>4$

그러므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $1\times2=2$이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3+56+2=61$이다.

597 ····· 답 ①

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=1$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

ㄱ. $f(3)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}=\frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^3}=\frac{0}{1}=0$ (참)

ㄴ. $f(3k-2)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^{3k-2}}$

$=\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)+\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)+\cdots+\frac{1}{\omega^{3(k-1)}}\times\frac{1}{\omega}$

$=0+1\times0+\cdots+1\times\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\omega}$ (거짓)

ㄷ. 자연수 k에 대하여

(i) $n=3k$일 때

$f(3k)=0$이므로 $\{f(n)\}^2+f(n)=0+0=0$

(ii) $n=3k-1$일 때

$f(3k-1)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^{3k-2}}+\frac{1}{\omega^{3k-1}}$

$=\frac{1}{\omega^{3(k-1)}}\times\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)$

$=\frac{\omega+1}{\omega^2}$

$=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

이므로 $\{f(n)\}^2+f(n)=(-1)^2+(-1)=0$

(iii) $n=3k-2$일 때

ㄴ에서 $f(3k-2)=\frac{1}{\omega}$이므로

$\{f(n)\}^2+f(n)=\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}=-1\neq0$

즉, (i), (ii)일 때 주어진 조건을 만족시키므로 구하는 값은

$90-30=60$ ($\because$ $10\le3k-2<100$, $4\le k<34$) (거짓)

따라서 선지 중 옳은 것은 ㄱ이다.

참고

방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이 ω이므로

$\overline{\omega}$ ($\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)도 이 방정식의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega\overline{\omega}=1$에서 $\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}$

그러므로 $f(n)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}$에 대입하면

$f(n)=\overline{\omega}+\overline{\omega}^2+\overline{\omega}^3+\cdots+\overline{\omega}^n$으로 해석하여 풀이할 수도 있다.

598 ····· 답 ⑤

$[x]^2+[x]-6=0$에서 $([x]+3)([x]-2)=0$

즉, $[x]=-3$ 또는 $[x]=2$이므로

$-3\le x<-2$ 또는 $2\le x<3$

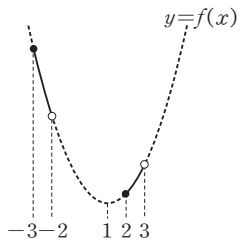
$x+y=2$를 $x^2+2x+2y^2$에 대입하면

$x^2+2x+2(2-x)^2=3x^2-6x+8$

$=3(x^2-2x+1)+5$

$=3(x-1)^2+5$

$f(x)=3(x-1)^2+5$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 이차함수 $f(x)$는

$x=-3$일 때 최댓값 $M=f(-3)=48+5=53$을 갖고,

$x=2$일 때 최솟값 $m=f(2)=3+5=8$을 갖는다.

$\therefore M+m=53+8=61$

아끄하너어느내시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅏㅇ)_하내시ㅓㄹ.indb 119 22. 9. 14. 오후 8:20

599 답 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{1}{5}\end{cases}$, $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

방정식 $2x^2+3xy+y^2-3x-y-2=0$의 좌변을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+3x(y-1)+y^2-y-2=0$

$2x^2+3x(y-1)+(y+1)(y-2)=0$

$(x+y-2)(2x+y+1)=0$

$\therefore x+y-2=0$ 또는 $2x+y+1=0$ …… ㉠

방정식 $2x^2-5xy+2y^2+x+y-1=0$의 좌변을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+x(1-5y)+2y^2+y-1=0$

$2x^2+x(1-5y)+(y+1)(2y-1)=0$

$(x-2y+1)(2x-y-1)=0$

$\therefore x-2y+1=0$ 또는 $2x-y-1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 다음과 같이 경우를 나누어 살펴보면

(i) $x+y-2=0$이고, $x-2y+1=0$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

(ii) $x+y-2=0$이고, $2x-y-1=0$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

(iii) $2x+y+1=0$이고, $x-2y+1=0$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $x=-\frac{3}{5}$, $y=\frac{1}{5}$

(iv) $2x+y+1=0$이고, $2x-y-1=0$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $x=0$, $y=-1$

(i)~(iv)에서 구하는 해는

$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{1}{5}\end{cases}$, $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

600 답 3

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 접하므로 방정식 $f(x)=2x+1$이 중근을 갖는다.

$\{f(x)-2x\}^3-2\{f(x)-2x\}^2-5\{f(x)-2x\}+6=0$에서

$f(x)-2x=t$라 하면

$t^3-2t^2-5t+6=0$

$t=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

1	1	−2	−5	6
		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

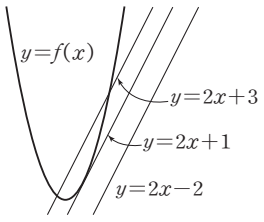
$(t-1)(t^2-t-6)=0$

$(t+2)(t-1)(t-3)=0$

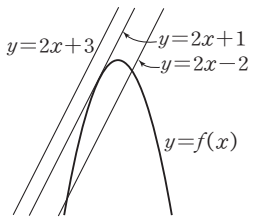
$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$ 또는 $t=3$

즉, $f(x)-2x=-2$ 또는 $f(x)-2x=1$ 또는 $f(x)-2x=3$에서

$f(x)=2x-2$ 또는 $f(x)=2x+1$ 또는 $f(x)=2x+3$이다.



[그림1]



[그림2]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는

[그림1]과 같이 아래로 볼록한 경우와

[그림2]와 같이 위로 볼록한 경우 모두 세 직선 $y=2x+1$, $y=2x+3$, $y=2x-2$와 만나는 점의 개수가 항상 3이다. …… TIP

따라서 방정식 $f(x)=2x+1$ 또는 $f(x)=2x+3$ 또는 $f(x)=2x-2$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

TIP

[그림1]에서

함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록한 경우

직선 $y=2x+1$과 한 점에서 만나고,

직선 $y=2x+3$과 두 점에서 만나고,

직선 $y=2x-2$와 만나지 않는다.

[그림2]에서

함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록한 경우

직선 $y=2x+1$과 한 점에서 만나고,

직선 $y=2x-2$와 두 점에서 만나고,

직선 $y=2x+3$과 만나지 않는다.

601 답 ⑤

$x^4+2(1-a)x^2+a^2-2a-8=0$에서

$x^4+(2-2a)x^2+(a+2)(a-4)=0$

$(x^2-a+4)(x^2-a-2)=0$ $\therefore x^2=a-4$ 또는 $x^2=a+2$

ㄱ. 방정식 $x^2=a-4$에서 $a-4\geq 0$이면 실근을 갖고, $a-4<0$이면 허근을 갖는다.

방정식 $x^2=a+2$에서 $a+2\geq 0$이면 실근을 갖고, $a+2<0$이면 허근을 갖는다.

방정식 $x^4+2(1-a)x^2+a^2-2a-8=0$이 실근과 허근을 모두 가지려면 $a+2\geq 0$, $a-4<0$이어야 한다.

이때 실근은 $x^2=a+2$에서 $x=\sqrt{a+2}$ 또는 $x=-\sqrt{a+2}$이고, 모든 실근의 곱이 -4이므로

$\sqrt{a+2}\times(-\sqrt{a+2})=-(a+2)=-4$ $\therefore a=2$

그러므로 허근은 $x^2=a-4=-2$에서

$x=\sqrt{2}i$ 또는 $x=-\sqrt{2}i$이므로

모든 허근의 곱은 $\sqrt{2}i\times(-\sqrt{2}i)=2$ (참)

ㄴ. 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면

두 이차방정식 $x^2=a-4$, $x^2=a+2$ 중 하나는 서로 다른 두 실근을 가지고 나머지 하나는 중근 0을 가져야 한다.

방정식 $x^2=a-4$가 중근 0을 가질 때 $a=4$이고, 이를 방정식 $x^2=a+2$에 대입하면 $x^2=6$에서 $x=\sqrt{6}$ 또는 $x=-\sqrt{6}$이므로 조건을 만족시킨다.

아끄하우느새스ㅣ느그소조새으스ㅣ(스사으)_하새스러르.indb 120 22. 9. 14. 오후 8:20

방정식 $x^2=a+2$이 중근 0을 가질 때 $a=-2$이고, 이를 방정식 $x^2=a-4$에 대입하면 $x^2=-6$에서 $x=\sqrt{6}i$ 또는 $x=-\sqrt{6}i$로 두 허근을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다. 그러므로 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 a는 4로 1개이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 방정식 $x^4+2(1-a)x^2+a^2-2a-8=0$이 네 실근을 가지려면 $a+2\geq 0$, $a-4\geq 0$에서 $a\geq 4$이다.
a가 10 이하의 정수이므로 방정식 $x^2=a-4$가 정수인 근을 갖는 경우는 $\sqrt{a-4}$의 값이 0, 1, 2일 때이다.
즉, $\sqrt{a-4}=0$일 때 $a=4$, $\sqrt{a-4}=1$일 때 $a=5$, $\sqrt{a-4}=2$일 때 $a=8$
방정식 $x^2=a+2$가 정수인 근을 갖는 경우는 $\sqrt{a+2}$의 값이 3일 때이다.
즉, $\sqrt{a+2}=3$일 때 $a=7$
그러므로 정수 a의 값의 합은 $4+5+7+8=24$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

602 ····· 답 ③

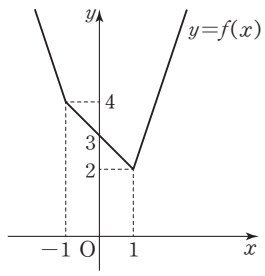
$|2x-2|+|x+1|\leq k$에서 $f(x)=|2x-2|+|x+1|$이라 하자.

(i) $x<-1$일 때
$f(x)=-(2x-2)-(x+1)=-3x+1$

(ii) $-1\leq x<1$일 때
$f(x)=-(2x-2)+(x+1)=-x+3$

(iii) $x\geq 1$일 때
$f(x)=(2x-2)+(x+1)=3x-1$

(i)~(iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, 부등식 $|2x-2|+|x+1|\leq k$를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 0이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프보다 직선 $y=k$가 더 위쪽에 위치할 때의 x의 값의 범위가 자연수 n에 대하여 $-n\leq x\leq n$이어야 한다.
$x=-n$일 때 $f(-n)=3n+1$이고,
$x=n+1$일 때 $f(n+1)=3(n+1)-1=3n+2$이므로
$3n+1\leq k<3n+2$일 때 부등식 $|2x-2|+|x+1|\leq k$의 해가 $-n\leq x\leq n$이 된다.
즉, k가 정수이므로 $k=3n+1$일 때 조건을 만족시킨다.
따라서 30 이하의 자연수 k의 개수는 4, 7, 10, …, 28의 9이다.

603 ····· 답 ①

$1<\alpha<2$, $5<\beta<6$ ····· ㉠
에서 $6<\alpha+\beta<8$, $5<\alpha\beta<12$
이므로 이차방정식 $ax^2-bx+2c=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $6<\frac{b}{a}<8$, $5<\frac{2c}{a}<12$

이때, a, b, c는 10보다 작은 자연수이므로 $a=1$, $b=7$이고, $c=3$ 또는 $c=4$ 또는 $c=5$

(i) $c=3$일 때
$x^2-7x+6=0$이므로
$(x-1)(x-6)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=6$
이는 조건 ㉠을 만족시키지 않는다.

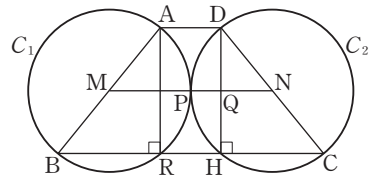
(ii) $c=4$일 때
$x^2-7x+8=0$이므로 $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$
이는 조건 ㉠을 만족시킨다.

(iii) $c=5$일 때
$x^2-7x+10=0$이므로 $(x-2)(x-5)=0$
이는 조건 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 $a=1$, $b=7$, $c=4$이므로 $f(x)=x^2-7x+8$
이차부등식 $f(x)<-2$는 $x^2-7x+8<-2$, $x^2-7x+10<0$
$(x-2)(x-5)<0$에서 $2<x<5$
따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 3, 4로 2개이다.

604 ····· 답 164

선분 AB를 지름으로 하는 원을 C_1, 선분 CD를 지름으로 하는 원을 C_2라 하자. 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면 두 점 M, N은 각각 두 원 C_1, C_2의 중심이다. $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 서로 같고, 원 C_1과 원 C_2는 오직 한 점에서 만나므로 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점은 선분 MN의 중점이다. 선분 MN의 중점을 P, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 DH와 선분 MN이 만나는 점을 Q라 하자.



두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 r라 하면
$\overline{QN}=\overline{PN}-\overline{PQ}=r-2$에서 $\overline{HC}=2\times\overline{QN}=2r-4$이므로
$\overline{DH}^2=\overline{CD}^2-\overline{HC}^2=16r-16$ ····· ㉠
점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면
$\overline{BR}=\overline{HC}=2r-4$, $\overline{RH}=4$이므로
$\overline{BC}=\overline{BR}+\overline{RH}+\overline{HC}=(2r-4)+4+(2r-4)=4r-4$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서
$S^2=\left\{\frac{1}{2}\times(\overline{BC}+\overline{AD})\times\overline{DH}\right\}^2=\frac{1}{4}\times(\overline{BC}+\overline{AD})^2\times\overline{DH}^2$
$=\frac{1}{4}\times\{(4r-4)+4\}^2\times(16r-16)=64r^2(r-1)$
$l=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}=2r+(4r-4)+2r+4=8r$
$S^2+8l=6720$에서 $64r^2(r-1)+64r=6720$
$r^3-r^2+r-105=(r-5)(r^2+4r+21)=0$
$\therefore r=5$ 또는 $r^2+4r+21=0$
이때, 이차방정식 $r^2+4r+21=0$의 판별식을 D라 하면

아쿠하이스쿨시너지고3재수시(사이)_해설지르.indb 121 22. 9. 14. 오후 8:20

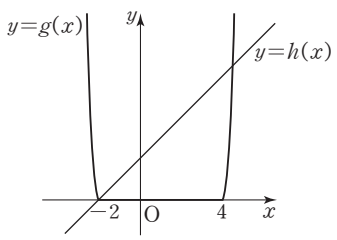
$\frac{D}{4}=2^2-21=-17<0$이므로 방정식 $r^2+4r+21=0$을 만족시키는 실수 r가 존재하지 않는다.
따라서 $r=5$이고, $\overline{BD}^2=\overline{BH}^2+\overline{DH}^2=100+64=164$

605 ④

방정식 $(x-p)(x-q)(x-r)=14$의 한 근이 정수 α이므로
$(\alpha-p)(\alpha-q)(\alpha-r)=14$
p, q, r가 정수이므로 $\alpha-p$, $\alpha-q$, $\alpha-r$도 정수이고,
$p<q<r$이므로 $\alpha-p>\alpha-q>\alpha-r$이다. …… ㉠
이때, 세 정수를 곱해서 14가 되는 경우를 다음과 같이 나누어 보자.
(i) $1\times2\times7$인 경우
$\alpha-p=7$, $\alpha-q=2$, $\alpha-r=1$ ($\because$ ㉠)이고, 각 변끼리 더하면
$3\alpha-p-q-r=10$, $3\alpha=p+q+r+10$
$\therefore \alpha=\frac{p+q+r+10}{3}$
(ii) $(-1)\times(-2)\times7$인 경우
$\alpha-p=7$, $\alpha-q=-1$, $\alpha-r=-2$ ($\because$ ㉠)이고, 각 변끼리 더하면
$3\alpha-p-q-r=4$, $3\alpha=p+q+r+4$
$\therefore \alpha=\frac{p+q+r+4}{3}$
(iii) $(-1)\times2\times(-7)$인 경우
$\alpha-p=2$, $\alpha-q=-1$, $\alpha-r=-7$ ($\because$ ㉠)이고, 각 변끼리 더하면
$3\alpha-p-q-r=-6$, $3\alpha=p+q+r-6$
$\therefore \alpha=\frac{p+q+r-6}{3}$
(iv) $1\times(-2)\times(-7)$인 경우
$\alpha-p=1$, $\alpha-q=-2$, $\alpha-r=-7$ ($\because$ ㉠)이고, 각 변끼리 더하면
$3\alpha-p-q-r=-8$, $3\alpha=p+q+r-8$
$\therefore \alpha=\frac{p+q+r-8}{3}$
(i)~(iv)에서 선지 중 α의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

606 $1\le a<2$

$g(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}$라 할 때, $f(x)=(x+2)(x-4)$에서
$x<-2$ 또는 $x>4$일 때, $f(x)>0$이므로 $g(x)=\frac{2f(x)}{2}=f(x)$
$-2\le x\le4$일 때, $f(x)\le0$이므로 $g(x)=\frac{-f(x)+f(x)}{2}=0$
이때, $h(x)=a(x+2)$라 하면 직선 $y=h(x)$는 기울기가 a이고, 점 $(-2, 0)$을 반드시 지나므로 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



부등식 $\frac{|f(x)|+f(x)}{2}\le a(x+2)$를 만족시키는 정수 x의 개수가 8이 되려면
부등식의 해가 $-2\le x\le k$라 할 때, $5\le k<6$이어야 한다.
즉, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 만나는 점 중 $(-2, 0)$을 제외한 나머지 점의 x좌표가 5보다 크거나 같고 6보다 작아야 한다.
방정식 $x^2-2x-8=a(x+2)$이 $x=5$를 근으로 가질 때
$5^2-2\times5-8=a(5+2)$, $7a=7$ $\therefore a=1$
방정식 $x^2-2x-8=a(x+2)$이 $x=6$을 근으로 가질 때
$6^2-2\times6-8=a(6+2)$, $8a=16$ $\therefore a=2$
따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $1\le a<2$이다.

607 $-\frac{1}{2}$

$x^7=1$에서
$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$
이므로 $x=1$ 또는 $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$이다.
(i) $x=1$인 경우
$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^6}=\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}$
(ii) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$인 경우
$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^6}$에서 분자는
$x(1+x^4)(1+x^6)+x^2(1+x^2)(1+x^6)+x^3(1+x^2)(1+x^4)$
$=x+x^5+x^7+x^{11}+x^2+x^4+x^8+x^{10}+x^3+x^5+x^7+x^9$
$=2+2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5$ ($\because x^7=1$)
$=2(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$
$=-2x^6$ ($\because x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$)
이때, 분모는
$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)$
$=(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^6)$
$=1+x^2+x^4+2x^6+x^8+x^{10}+x^{12}$
$=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)+x^6$ ($\because x^7=1$)
$=x^6$ ($\because x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$)
$\therefore \frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^6}=\frac{-2x^6}{x^6}=-2$
(i), (ii)에서 구하는 값의 합은
$\frac{3}{2}+(-2)=-\frac{1}{2}$

608 3

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=1$ …… ㉠
이때, $f\left(\frac{2\beta+2\gamma}{\alpha}\right)=f\left(\frac{2\alpha+2\gamma}{\beta}\right)=f\left(\frac{2\alpha+2\beta}{\gamma}\right)=0$에서
$\frac{2(\beta+\gamma)}{\alpha}=\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}-2$, $\frac{2(\alpha+\gamma)}{\beta}=\frac{2(1-\beta)}{\beta}=\frac{2}{\beta}-2$
$\frac{2(\alpha+\beta)}{\gamma}=\frac{2(1-\gamma)}{\gamma}=\frac{2}{\gamma}-2$이므로

아뿌하이노새시니그노조재이시(사이)_해새서르.indb 122 22. 9. 14. 오후 8:20

$f\left(\frac{2}{\alpha}-2\right)=f\left(\frac{2}{\beta}-2\right)=f\left(\frac{2}{\gamma}-2\right)=0$이다.

이를 사차식 $f(x)=(x+2)^3+p(x+2)^2+q(x+2)+r$에 대입하면

$\left(\frac{2}{\alpha}\right)^3+p\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2+q\left(\frac{2}{\alpha}\right)+r=\left(\frac{2}{\beta}\right)^3+p\left(\frac{2}{\beta}\right)^2+q\left(\frac{2}{\beta}\right)+r$

$=\left(\frac{2}{\gamma}\right)^3+p\left(\frac{2}{\gamma}\right)^2+q\left(\frac{2}{\gamma}\right)+r=0$

그러므로 방정식 $x^3+px^2+qx+r=0$의 세 근이 $\frac{2}{\alpha}$, $\frac{2}{\beta}$, $\frac{2}{\gamma}$이다.

$\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}=\frac{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2\times3}{1}=6$ ($\because$ ㉠)이므로

$-p=6$에서 $p=-6$

$\frac{2}{\alpha}\times\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\beta}\times\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{\gamma}\times\frac{2}{\alpha}=\frac{4}{\alpha\beta}+\frac{4}{\beta\gamma}+\frac{4}{\gamma\alpha}$

$=\frac{4(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{4\times1}{1}=4$

이므로 $q=4$

$\frac{2}{\alpha}\times\frac{2}{\beta}\times\frac{2}{\gamma}=\frac{8}{\alpha\beta\gamma}=\frac{8}{1}=8$이므로

$-r=8$에서 $r=-8$

$\therefore \frac{pq}{r}=\frac{(-6)\times4}{-8}=3$

609 ····· 답 ④

절댓값 안의 부호를 기준으로 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $x<0$일 때

$-2x-(2x-m)<n$, $4x>m-n$에서

$x>\frac{m-n}{4}$

(ii) $0\le x<\frac{m}{2}$일 때

$2x-(2x-m)<n$, $m<n$이므로

$0\le x<\frac{m}{2}$일 때 항상 주어진 부등식을 만족시킨다.

(iii) $x\ge\frac{m}{2}$일 때

$2x+2x-m<n$, $4x<m+n$에서

$x<\frac{m+n}{4}$

(i)~(iii)에서 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는

$\frac{m-n}{4}<x<\frac{m+n}{4}$ ····· ㉠

ㄱ. ㉠에 $m=5$, $n=7$을 대입하면

$-\frac{1}{2}<x<3$이므로 정수 x는 0, 1, 2로 3개이다.

$F(5, 7)=3$ (참)

ㄴ. ㉠에 $m=2a$, $n=6a+4$를 대입하면

$\frac{-4a-4}{4}<x<\frac{8a+4}{4}$, $-a-1<x<2a+1$이므로

정수 x의 개수는 $2a+1-(-a-1)-1=3a+1$

$F(2a, 6a+4)=3a+1$ (거짓)

ㄷ. $F(2a, 10a)>100$을 만족시키려면 ㉠에서

$\frac{2a+10a}{4}-\frac{2a-10a}{4}-1>100$, $5a>101$이므로

$a>\frac{101}{5}$

그러므로 자연수 a의 최솟값은 21이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

610 ····· 답 14

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\ge g(x_1)$이 성립하기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립해야 한다.

$x^2+4x+6\ge-x^2-2ax-2$, $2x^2+2(a+2)x+8\ge0$

$x^2+(a+2)x+4\ge0$

이때, 방정식 $x^2+(a+2)x+4=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-16\le0$, $a^2+4a-12\le0$, $(a+6)(a-2)\le0$

$\therefore -6\le a\le2$

즉, 정수 a는 -6, -5, -4, …, 2의 9개이므로

$p=9$

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\ge g(x_2)$가 성립하기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 최솟값이 함수 $y=g(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 하므로 ····· TIP

$f(x)=(x+2)^2+2$, $g(x)=-(x+a)^2+a^2-2$

에서 $2\ge a^2-2$, $a^2-4\le0$, $(a+2)(a-2)\le0$

$\therefore -2\le a\le2$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이므로

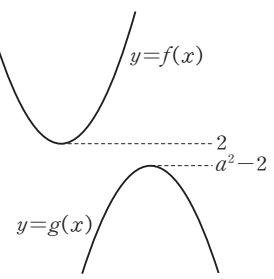
$q=5$

$\therefore p+q=9+5=14$

TIP

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\ge g(x_2)$가 성립하기 위해서는 x에 서로 다른 값을 대입해도 항상 $f(x)$의 함숫값이 $g(x)$의 함숫값보다 크거나 같아야 한다.

그러므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같아야 한다.



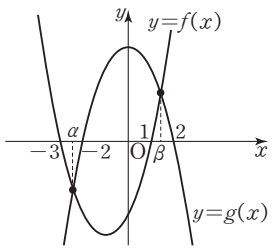
즉, 함수 $y=f(x)$의 최솟값이 함수 $y=g(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.

아뜨허어느새시ㅣㄴㄱㅗ조재어시ㅣ(사ㅏ어)_해새서르.indb 123 22. 9. 14. 오후 8:20

611 ④

$\{f(x)\}^2>f(x)g(x)$에서 $f(x)\{f(x)-g(x)\}>0$

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $-3<\alpha<-2$, $1<\beta<2$이다.



주어진 부등식을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $f(x)>0$, $f(x)-g(x)>0$인 경우

$f(x)>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있어야 하므로

$x<-3$ 또는 $x>1$ …… ㉠

$f(x)>g(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 더 위쪽에 있어야 하므로

$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ …… ㉡

이때, ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<-3$ 또는 $x>\beta$이므로 정수 x는 -5, -4, 2, 3, 4, 5의 6개이다.

(ii) $f(x)<0$, $f(x)-g(x)<0$인 경우

$f(x)<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있어야 하므로

$-3<x<1$ …… ㉢

$f(x)<g(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 더 아래쪽에 있어야 하므로

$\alpha<x<\beta$ …… ㉣

이때, ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $\alpha<x<1$이므로 정수 x는 -2, -1, 0으로 3개이다.

(i), (ii)에서 구하는 정수 x의 개수는 $6+3=9$이다.

612 ③

$$\begin{cases} |2x-1|\geq 3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-(a+1)x+a<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x\geq\frac{1}{2}$일 때 $2x-1\geq 3$, 즉 $x\geq 2$이고

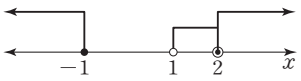
$x<\frac{1}{2}$일 때 $-(2x-1)\geq 3$, $2x\leq -2$, 즉 $x\leq -1$이다.

따라서 ㉠의 해는 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 2$

㉡에서 $x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)<0$이므로

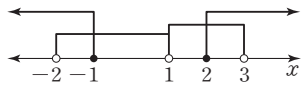
$a>1$일 때 $1<x<a$이고, $a<1$일 때 $a<x<1$이고, $a=1$일 때 해가 없다.

ㄱ. $a=2$일 때 ㉡의 해는 $1<x<2$이므로 연립부등식의 해를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



연립부등식의 해가 존재하지 않으므로 $f(2)=0$이다.(참)

ㄴ. $f(a)=1$이려면 다음과 같이 부등식 ㉡의 해가 -1을 포함하거나 2를 포함해야 한다.



$a>1$일 때, ㉡의 해가 2를 포함해야 하므로 $2<a\leq 3$이다.

$a<1$일 때, ㉡의 해가 -1을 포함해야 하므로 $-2\leq a<-1$이다.

그러므로 모든 정수 a의 값의 곱은 $3\times(-2)=-6$이다. (참)

ㄷ. $f(a)\geq 3$이려면

$a>1$일 때 ㉡의 해가 4 이상의 정수를 포함해야 하므로 $a>4$이고,

$a<1$일 때 ㉡의 해가 -3 이하의 정수를 포함해야 하므로 $a<-3$이다.

따라서 양의 정수 a의 최솟값은 $\alpha=5$이고, 음의 정수 a의 최댓값은 $\beta=-4$이므로 $\alpha-\beta=5-(-4)=9$이다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

613 ③

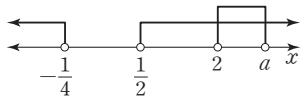
$8x^2>2x+1$에서 $(4x+1)(2x-1)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{4}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$

$x^2-(2+a)x+2a<0$에서 $(x-a)(x-2)<0$ …… ㉠

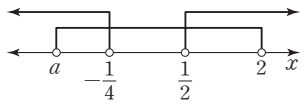
ㄱ. $a=2$일 때 ㉠에서 $(x-2)^2<0$이므로 ㉠을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $4<a\leq 5$일 때 ㉠의 해는 $2<x<a$



위의 그림에서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 3, 4이다. (참)

ㄷ. 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 -1, 1만 존재하도록 하려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 실수 a의 값의 범위는 $-2\leq a<-1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

614 ④

주어진 연립부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 두 부등식 $ax^2+bx+c>0$, $px^2+qx+r<0$이 각각 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

$ax^2+bx+c>0$에서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 아래로 볼록하고 x축과 만나지 않아야 하므로

$a>0$, $b^2-4ac<0$

$px^2+qx+r<0$에서 이차함수 $y=px^2+qx+r$의 그래프가 위로 볼록하고 x축과 만나지 않아야 하므로

$p<0$, $q^2-4pr<0$

ㄱ. $a>0$, $p<0$이므로 $a>p$에서 $a-p>0$이다. (참)

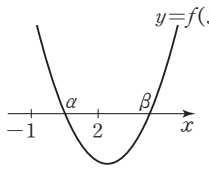
아끄하ㅓㅇㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ새ㅅㅓㄹ.indb 124 22. 9. 14. 오후 8:20

ㄴ. $b^2-q^2>4(ac-pr)$에서
$b^2-4ac>q^2-4pr$
이때, $b^2-4ac<0$이고 $q^2-4pr<0$이지만
$b^2-4ac>q^2-4pr$인지는 알 수 없다. (거짓) ····· TIP
ㄷ. $px^2+qx+r<0$이므로 양변에 각각 -1을 곱해주면
$-px^2-qx-r>0$이고, $ax^2+bx+c>0$이므로 모든 실수 x에 대하여
$(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)>0$이 성립한다.
방정식 $(a-p)x^2+(b-q)x+(c-r)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(b-q)^2-4(a-p)(c-r)<0$
이므로 $(b-q)^2<4(a-p)(c-r)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

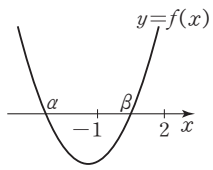
TIP
ㄴ. [반례] $a=2$, $b=1$, $c=2$이고, $p=-1$, $q=1$, $r=-1$인 경우
$b^2-4ac=1-16=-15$이고, $q^2-4pr=1-4=-3$이므로
$b^2-4ac<q^2-4pr$이다.

615 ····· 답 ④

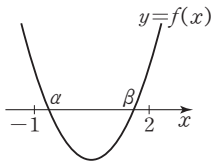
$\alpha<\beta$라 두고 $f(x)=x^2-(k+1)x+k-4$라 할 때, 경우를 나누어 보면 다음과 같다.
(i) $-1\le\alpha\le2<\beta$인 경우



$f(-1)\ge0$, $f(2)\le0$이 되어야 하므로
$f(-1)=1+k+1+k-4=2k-2\ge0$에서 $k\ge1$
$f(2)=4-2k-2+k-4=-k-2\le0$에서 $k\ge-2$
그러므로 실수 k의 값의 범위는 $k\ge1$
(ii) $\alpha<-1\le\beta\le2$인 경우



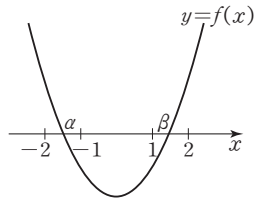
$f(-1)\le0$, $f(2)\ge0$이 되어야 하므로
$f(-1)=1+k+1+k-4=2k-2\le0$에서 $k\le1$
$f(2)=4-2k-2+k-4=-k-2\ge0$에서 $k\le-2$
그러므로 실수 k의 값의 범위는 $k\le-2$
(iii) $-1\le\alpha<\beta\le2$인 경우



이차방정식 $x^2-(k+1)x+k-4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(k+1)^2-4(k-4)=k^2-2k+17=(k-1)^2+16>0$
이므로 주어진 방정식은 k의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.
또한 $f(-1)\ge0$, $f(2)\ge0$이고, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 두 직선 $x=-1$, $x=2$ 사이에 존재해야 하므로
$f(-1)=1+k+1+k-4=2k-2\ge0$에서 $k\ge1$
$f(2)=4-2k-2+k-4=-k-2\ge0$에서 $k\le-2$
축이 $x=\frac{k+1}{2}$이므로 $-1<\frac{k+1}{2}<2$에서
$-3<k<3$
그러므로 조건을 만족시키는 실수 k의 값이 존재하지 않는다.
(i)~(iii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는
$k\le-2$ 또는 $k\ge1$

616 ····· 답 ③

이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k-3=0$의 두 근 α, β가 각각 $[\alpha]=-2$, $[\beta]=1$을 만족시키므로 $-2\le\alpha<-1$, $1\le\beta<2$이다.
$f(x)=x^2+(2k-1)x+k-3$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $f(-2)\ge0$, $f(-1)<0$, $f(1)\le0$, $f(2)>0$을 만족시켜야 한다.
(i) $f(-2)=4-4k+2+k-3=-3k+3\ge0$에서 $k\le1$
(ii) $f(-1)=1-2k+1+k-3=-k-1<0$에서 $k>-1$
(iii) $f(1)=1+2k-1+k-3=3k-3\le0$에서 $k\le1$
(iv) $f(2)=4+4k-2+k-3=5k-1>0$에서 $k>\frac{1}{5}$

(i)~(iv)에서 실수 k의 값의 범위는 $\frac{1}{5}<k\le1$이다.

$\therefore p+q=\frac{1}{5}+1=\frac{6}{5}$

617 ····· 답 −2

방정식 $(3x-k^2+3k)(3x-2k)=0$의 해가
$x=\frac{k^2-3k}{3}$ 또는 $x=\frac{2k}{3}$이므로
이차부등식 $(3x-k^2+3k)(3x-2k)\le0$의 해는
$\frac{2k}{3}\le\frac{k^2-3k}{3}$일 때 $\frac{2k}{3}\le x\le\frac{k^2-3k}{3}$이고,
$\frac{2k}{3}>\frac{k^2-3k}{3}$일 때 $\frac{k^2-3k}{3}\le x\le\frac{2k}{3}$이다.
조건 (가)에서 $\beta-\alpha$가 자연수이고, α, β가 정수가 아닌 실수이므로
조건 (나)에서 $\alpha\le x\le\beta$를 만족시키는 정수 x의 개수가 2이려면
$\beta-\alpha=2$이다.

아끄하ㅓ이ㄴ새ㅅ시ㅣㄴㄱㅗ조재ㅇ스시(사ㅇ)_ㅎ새ㅅ서르.indb 125 22. 9. 14. 오후 8:20

(i) 이차부등식의 해가 $\frac{2k}{3} \le x \le \frac{k^2-3k}{3}$일 때

$\frac{k^2-3k}{3} - \frac{2k}{3} = 2$에서 $k^2-5k-6=0$, $(k+1)(k-6)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=6$

$k=-1$일 때 $\frac{k^2-3k}{3} = \frac{4}{3}$, $\frac{2k}{3} = -\frac{2}{3}$이므로 두 근이 정수가 아니다.

$k=6$일 때 $\frac{k^2-3k}{3} = 6$, $\frac{2k}{3} = 4$이므로 두 근이 정수이다.

(ii) 이차부등식의 해가 $\frac{k^2-3k}{3} \le x \le \frac{2k}{3}$일 때

$\frac{2k}{3} - \frac{k^2-3k}{3} = 2$에서 $k^2-5k+6=0$, $(k-2)(k-3)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=3$

$k=2$일 때 $\frac{k^2-3k}{3} = -\frac{2}{3}$, $\frac{2k}{3} = \frac{4}{3}$이므로 두 근이 정수가 아니다.

$k=3$일 때 $\frac{k^2-3k}{3} = 0$, $\frac{2k}{3} = 2$이므로 두 근이 정수이다.

(i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값은 $k=-1$ 또는 $k=2$이므로
모든 실수 k의 값의 곱은 $-1\times 2=-2$

618 ····· 답 ②

부등식 $x^2-2x-8<0$에서 $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ ····· ㉠

부등식 $x^2-(3k+2)x+2k^2+7k-15\ge 0$에서

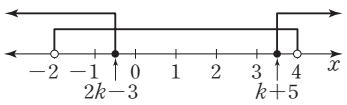
$x^2-(3k+2)x+(k+5)(2k-3)\ge 0$

$\{x-(k+5)\}\{x-(2k-3)\}\ge 0$ ····· ㉡

(i) $k+5\ge 2k-3$, 즉 $k\le 8$인 경우

㉡에서 $x\ge k+5$ 또는 $x\le 2k-3$이다.

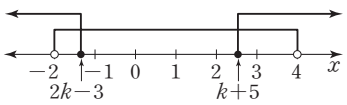
(i −①) 정수인 해가 $x=-1$만 존재하는 경우를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



$-1\le 2k-3<0$에서 $1\le k<\frac{3}{2}$이고,

$k+5>3$에서 $k>-2$이므로 정수 k의 값은 $k=1$이다.

(i −②) 정수인 해가 $x=3$만 존재하는 경우를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



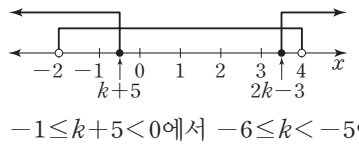
$2<k+5\le 3$에서 $-3<k\le -2$이고,

$2k-3<-1$에서 $k<1$이므로 정수 k의 값은 $k=-2$이다.

(ii) $k+5<2k-3$, 즉 $k>8$인 경우

㉡에서 $x\ge 2k-3$ 또는 $x\le k+5$이다.

(ii −①) 정수인 해가 $x=-1$만 존재하는 경우를 수직선에 나타내면 다음과 같다.

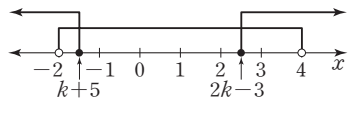


$-1\le k+5<0$에서 $-6\le k<-5$이고,

$2k-3>3$에서 $k>3$이므로

조건을 만족시키는 정수 k의 값이 존재하지 않는다.

(ii −②) 정수인 해가 $x=3$만 존재하는 경우를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



$2<2k-3\le 3$에서 $\frac{5}{2}<k\le 3$이고

$k+5<-1$에서 $k<-6$이므로

조건을 만족시키는 정수 k의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 정수 k는 1, −2이므로 구하는 합은
$1+(-2)=-1$이다.

아끄하ㅓㅇㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ새ㅅㅓㄹ.indb 126 22. 9. 14. 오후 8:20

III 도형의 방정식

01 평면좌표

619 ····· 답 3

두 점 A(2, t), B(1−t, 1)에 대하여
$\overline{AB}=\sqrt{\{(1-t)-2\}^2+(1-t)^2}$
$=\sqrt{(t+1)^2+(t-1)^2}$
$=\sqrt{2t^2+2}=\sqrt{20}$
이므로 $2t^2+2=20$
$t^2=9$, $t=\pm3$
$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

620 ····· 답 ②

세 점 A(4, −1), B(0, 1), C(1, a)에 대하여
$\overline{AB}=\sqrt{(0-4)^2+\{1-(-1)\}^2}=\sqrt{20}$
$\overline{BC}=\sqrt{(1-0)^2+(a-1)^2}=\sqrt{a^2-2a+2}$
$\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=4\overline{BC}^2$이므로
$20=4(a^2-2a+2)$
$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$-1+3=2$

621 ····· 답 풀이 참조

점 P는 x축 위의 점이므로 P(a, 0)이라 하자.
이때, 점 P가 두 점 A, B에서 같은 거리에 있으므로 $\overline{AP}=\overline{BP}$이다.
두 점 A(2, −1), B(−3, 4)에 대하여
$\overline{AP}=\sqrt{(a-2)^2+\{0-(-1)\}^2}=\sqrt{(a-2)^2+1^2}$
$\overline{BP}=\sqrt{\{a-(-3)\}^2+(0-4)^2}=\sqrt{(a+3)^2+4^2}$
$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-2)^2+1^2=(a+3)^2+4^2$
$a^2-4a+5=a^2+6a+25$
$10a=-20$, $a=-2$
$\therefore \overline{OP}=|a|=2$

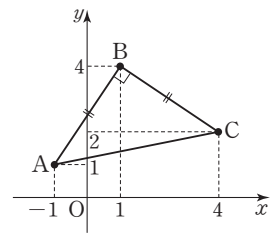
채점 요소	배점
점 P의 좌표 놓기	10 %
두 점 사이의 거리를 이용하여 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$에 대한 식 세우기	40 %
점 P의 x좌표 구하기	30 %
$\overline{OP}$의 값 구하기	20 %

622 ····· 답 ④

점 P(a, b)가 직선 $y=2x-3$ 위의 점이므로
$b=2a-3$ ····· ㉠
따라서 P(a, $2a-3$)이다.
이때, 점 P에서 두 점 A, B에 이르는 거리가 같으므로
$\overline{AP}=\overline{BP}$이다.
두 점 A(5, −2), B(2, 3)에 대하여
$\overline{AP}=\sqrt{(a-5)^2+\{(2a-3)-(-2)\}^2}=\sqrt{5a^2-14a+26}$
$\overline{BP}=\sqrt{(a-2)^2+\{(2a-3)-3\}^2}=\sqrt{5a^2-28a+40}$
$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$5a^2-14a+26=5a^2-28a+40$
$14a=14$ $\therefore a=1$, $b=-1$ ($\because$ ㉠)
$\therefore a+b=0$

623 ····· 답 ⑤

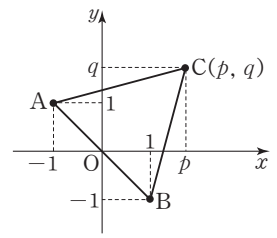
세 점 A(−1, 1), B(1, 4), C(4, 2)에 대하여
$\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(4-1)^2}=\sqrt{13}$
$\overline{BC}=\sqrt{(4-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{13}$
$\overline{CA}=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$
즉, $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이고, $\overline{AB}=\overline{BC}$이다.



따라서 삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

624 ····· 답 ②

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이다.



세 점 A(−1, 1), B(1, −1), C(p, q)에 대하여
$\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}$
$\overline{BC}=\sqrt{(p-1)^2+\{q-(-1)\}^2}=\sqrt{(p-1)^2+(q+1)^2}$
$\overline{CA}=\sqrt{\{p-(-1)\}^2+(q-1)^2}=\sqrt{(p+1)^2+(q-1)^2}$
$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$에서 $(p-1)^2+(q+1)^2=8$ ····· ㉠
$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$에서 $(p+1)^2+(q-1)^2=8$ ····· ㉡
㉠−㉡에서 $-4p+4q=0$ $\therefore p=q$
이를 ㉠에 대입하면
$(p-1)^2+(p+1)^2=8$
$(p^2-2p+1)+(p^2+2p+1)=8$
$p^2=3$, $p=\sqrt{3}$ ($\because p>0$), $q=\sqrt{3}$
$\therefore p+q=2\sqrt{3}$

아크하이너시스템즈(사이)_해설지.indb 127 22. 9. 14. 오후 8:20

625 답 ④

세 점을 각각 A(−4, 2), B(4, 6), C(8, −2), 외심을 P(a, b)라 하면 삼각형의 외심에서 각 꼭짓점까지의 거리는 모두 같으므로 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이다.

$\overline{AP}=\sqrt{\{a-(-4)\}^2+(b-2)^2}$
$=\sqrt{(a+4)^2+(b-2)^2}$

$\overline{BP}=\sqrt{(a-4)^2+(b-6)^2}$

$\overline{CP}=\sqrt{(a-8)^2+\{b-(-2)\}^2}$
$=\sqrt{(a-8)^2+(b+2)^2}$

(i) $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서
$(a+4)^2+(b-2)^2=(a-4)^2+(b-6)^2$
$16a+8b=32 \quad \therefore 2a+b=4$ …… ㉠

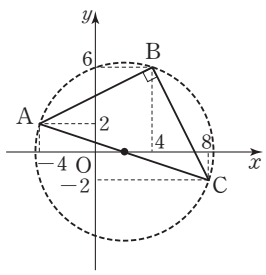
(ii) $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$에서
$(a-4)^2+(b-6)^2=(a-8)^2+(b+2)^2$
$8a-16b=16 \quad \therefore a-2b=2$ …… ㉡

(i), (ii)에서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=0$
$\therefore a+b=2$

다른 풀이

'**유형 03 선분의 내분과 외분**'을 학습한 이후 중점의 좌표를 이용하여 다음과 같이 풀이할 수 있다.

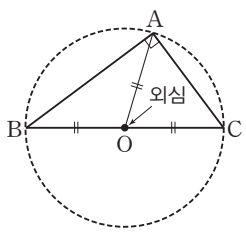
A(−4, 2), B(4, 6), C(8, −2)라 할 때,
$\overline{AB}=\sqrt{\{4-(-4)\}^2+(6-2)^2}=4\sqrt{5}$
$\overline{BC}=\sqrt{(8-4)^2+(-2-6)^2}=4\sqrt{5}$
$\overline{CA}=\sqrt{(-4-8)^2+\{2-(-2)\}^2}=4\sqrt{10}$
에서 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로
삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이다.



따라서 삼각형 ABC의 외심은 선분 AC의 중점이므로 …… TIP
점 (a, b)는 $\left(\frac{-4+8}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right)$, 즉 (2, 0)이다.
$\therefore a+b=2$

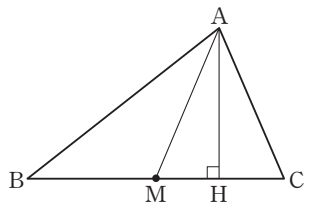
TIP

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점에 위치한다.



626 답 ⑤

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.



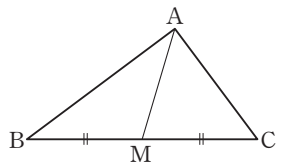
직각삼각형 ABH에서
$\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$
$=(\boxed{\overline{BM}+\overline{MH}})^2+\overline{AH}^2$
$=\overline{BM}^2+2\times\overline{BM}\times\overline{MH}+\overline{MH}^2+\overline{AH}^2$
$=\overline{BM}^2+2\overline{BM}\times\overline{MH}+(\boxed{\overline{AM}})^2$ …… ㉠

직각삼각형 AHC에서
$\overline{AC}^2=\overline{CH}^2+\overline{AH}^2$
$=(\boxed{\overline{CM}-\overline{MH}})^2+\overline{AH}^2$
$=\overline{CM}^2-2\times\overline{CM}\times\overline{MH}+\overline{MH}^2+\overline{AH}^2$
$=\overline{CM}^2-2\overline{CM}\times\overline{MH}+(\boxed{\overline{AM}})^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 변끼리 더하면
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$
$=\overline{BM}^2+\overline{CM}^2+2\overline{BM}\times\overline{MH}-2\overline{CM}\times\overline{MH}+2\times\overline{AM}^2$
$=2\times\overline{BM}^2+2\times\overline{AM}^2$ ($\because \overline{BM}=\overline{CM}$)
$=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$

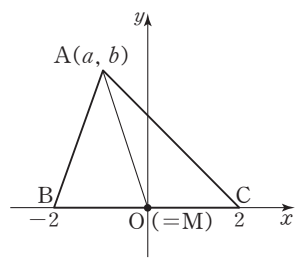
TIP

<중선정리>
삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$
이 성립하고, 이를 중선정리라 한다.



627 답 ③

직선 BC를 x축으로 하고 점 M이 원점이 되도록 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓으면 $\overline{BC}=4$이므로
B(−2, 0), C(2, 0)
이때, A(a, b)라 하자.

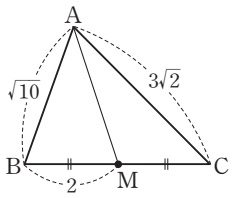


아쿠하우스내신_니그고자우시(사우)_해설지로.indb 128 22. 9. 14. 오후 8:20

$\overline{AB}=\sqrt{10}$이므로 $(a+2)^2+b^2=10$ ····· ㉠
$\overline{CA}=3\sqrt{2}$이므로 $(a-2)^2+b^2=18$ ····· ㉡
㉠−㉡에서 $8a=-8$ $\therefore a=-1$
이를 ㉠에 대입하면 $b^2=9$
$\therefore \overline{AM}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+9}=\sqrt{10}$

다른 풀이

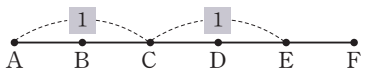
삼각형 ABC는 다음 그림과 같다.



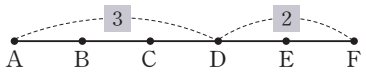
삼각형 ABC에서 중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 성립하므로
$\sqrt{10}^2+(3\sqrt{2})^2=2(\overline{AM}^2+2^2)$
$\overline{AM}^2=10$
$\therefore \overline{AM}=\sqrt{10}$ ($\because \overline{AM}>0$)

628 ····· 답 ③

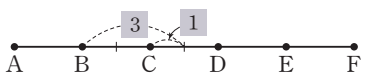
① 선분 AE의 중점은 C이다. (참)



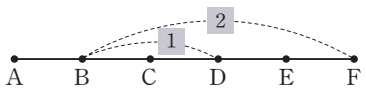
② 선분 AF를 3 : 2로 내분하는 점은 D이다. (참)



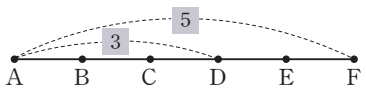
③ 선분 BC를 3 : 1로 외분하는 점은 선분 CD의 중점이다. (거짓)



④ 선분 DF를 1 : 2로 외분하는 점은 B이다. (참)



⑤ 선분 FD를 5 : 3으로 외분하는 점은 A이다. (참)



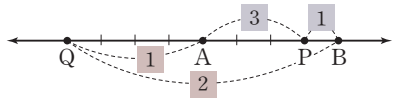
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

629 ····· 답 ④

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\frac{2\times5+1\times2}{2+1}, \frac{2\times2+1\times(-4)}{2+1}\right)$, 즉 $(4, 0)$
선분 AP를 1 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는
$\left(\frac{1\times4-2\times2}{1-2}, \frac{1\times0-2\times(-4)}{1-2}\right)$, 즉 $(0, -8)$
$\therefore a+b=0+(-8)=-8$

630 ····· 답 ③

네 점 A, B, P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



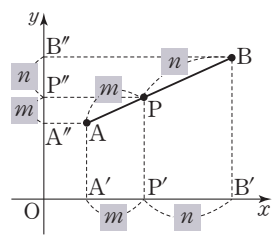
$\overline{BP}=a$ ($a>0$)라 하면
점 P는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이므로
$\overline{AP}=3a$, $\overline{AB}=4a$
점 Q는 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점이므로
$\overline{AQ}=\overline{AB}=4a$
$\therefore \overline{PQ}=\overline{AP}+\overline{AQ}=3a+4a=7a$
따라서 $\overline{PQ}=t\overline{AB}$에서 $7a=4at$이므로
$t=\frac{7a}{4a}=\frac{7}{4}$

631 ····· 답 (5, −5)

두 점 A(1, 3), B(4, −3)에 대하여
선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\frac{2\times4+1\times1}{2+1}, \frac{2\times(-3)+1\times3}{2+1}\right)$
$\therefore$ P(3, −1)
선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는
$\left(\frac{2\times4-1\times1}{2-1}, \frac{2\times(-3)-1\times3}{2-1}\right)$
$\therefore$ Q(7, −9)
따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는
$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{-1+(-9)}{2}\right)$
$\therefore$ (5, −5)

참고

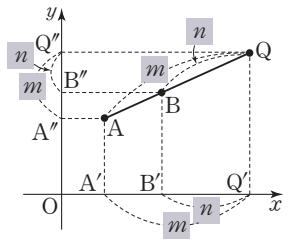
좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점을 P라 하자.
세 점 A, P, B에서
x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, P′, B′이라 하고,
y축에 내린 수선의 발을 각각 A″, P″, B″이라 하면
평행선의 성질에 의하여 다음이 성립한다.
$\overline{AP} : \overline{PB}=\overline{A'P'} : \overline{P'B'}=\overline{A''P''} : \overline{P''B''}$
$=m : n$



아끄하ㅕ이ㄴ내ㅅ시ㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅ시(사ㅇ)_해ㅐ서ㅓ르.indb 129 22. 9. 14. 오후 8:20

좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를
$m : n$ $(m \neq n)$으로 외분하는 점을 Q라 하자.
세 점 A, B, Q에서
x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, Q′이라 하고,
y축에 내린 수선의 발을 각각 A″, B″, Q″이라 하면
평행선의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$\overline{AQ} : \overline{BQ} = \overline{A'Q'} : \overline{B'Q'} = \overline{A''Q''} : \overline{B''Q''}$
$= m : n$



632

답 ②

두 점 A(2, 2), B(10, 4)에 대하여
선분 AB를 $1 : k$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times 10-k\times 2}{1-k}, \frac{1\times 4-k\times 2}{1-k}\right)$

$\therefore \left(\frac{10-2k}{1-k}, \frac{4-2k}{1-k}\right)$

이 점이 직선 $y=-2x-3$ 위에 있으므로

$\frac{4-2k}{1-k}=-2\times\frac{10-2k}{1-k}-3$

$4-2k=-2(10-2k)-3(1-k)$

$4-2k=-20+4k-3+3k$

$9k=27$

$\therefore k=3$

633

답 10

세 점 A(−1, 2), B(p, 3), C(5, 1)에 대하여
삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-1+p+5}{3}, \frac{2+3+1}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{p+4}{3}, 2\right)$ ..... TIP

이 점이 점 (4, q)와 일치하므로

$\frac{p+4}{3}=4$에서 $p=8$, $q=2$

$\therefore p+q=10$

TIP

<삼각형의 무게중심의 좌표>

좌표평면 위의 세 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)에 대하여
삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

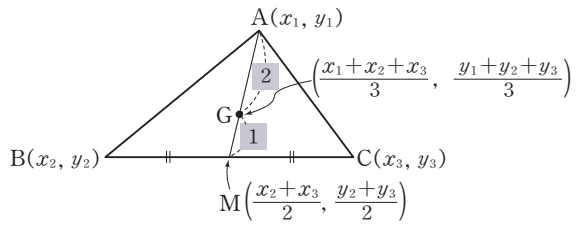
$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

[증명]

삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 꼭짓점으로부터 각각
2 : 1로 내분한다.
이때, 선분 BC의 중점을 M이라 하면
$M\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$이고, 무게중심 G는 선분 AM을 2 : 1로
내분하는 점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{2\times\frac{x_2+x_3}{2}+1\times x_1}{2+1}, \frac{2\times\frac{y_2+y_3}{2}+1\times y_1}{2+1}\right)$

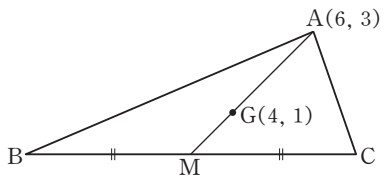
$\therefore \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$



634

답 8

그림과 같이 선분 AG의 연장선이 선분 BC와 만나는 점을 M이라 하자.



$\overline{AG}=\sqrt{(6-4)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$이고, $\overline{AM}=\frac{3}{2}\overline{AG}=3\sqrt{2}$

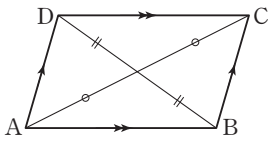
이때, $\overline{AB}^2=58$, $\overline{AC}^2=10$이므로
삼각형 ABC에서 중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$, $58+10=2(18+\overline{BM}^2)$
$18+\overline{BM}^2=34$에서 $\overline{BM}^2=16$이므로 $\overline{BM}=4$ ($\because \overline{BM}>0$)
$\therefore \overline{BC}=2\overline{BM}=8$

635

답 (1) 5 (2) 20

(1) 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로
선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점이 일치한다.

아쿠후이노내신니그노조재이신(상이)_해설서로.indb 130 22. 9. 14. 오후 8:20



선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{a+(-2)}{2}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{a-2}{2}\right)$

선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{b+5}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{b+5}{2}, 2\right)$

두 점이 일치하므로

$a=6$, $b=-1$

$\therefore a+b=5$

(2) 마름모는 모든 변의 길이가 서로 같으므로

$\overline{AB}=\overline{AD}$

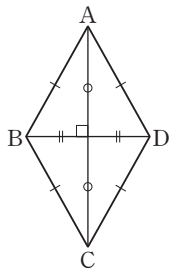
$\sqrt{(p-1)^2+\{6-(-1)\}^2}=\sqrt{(6-1)^2+\{4-(-1)\}^2}$

$p^2-2p+50=50$, $p(p-2)=0$에서

$p=2$ ($\because p>0$) ····· ㉠

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점이 일치한다.



선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+q}{2}, \frac{-1+r}{2}\right)$

선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{p+6}{2}, \frac{6+4}{2}\right)$, 즉 $(4, 5)$ ($\because$ ㉠)

두 점이 일치하므로 $q=7$, $r=11$

$\therefore p+q+r=2+7+11=20$

636 ····· 답 ⑤

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점은

$D\left(\frac{1\times2+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times5+2\times1}{1+2}\right)$ $\therefore D\left(0, \frac{7}{3}\right)$

선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점은

$E\left(\frac{1\times5+2\times2}{1+2}, \frac{1\times(-3)+2\times5}{1+2}\right)$ $\therefore E\left(3, \frac{7}{3}\right)$

선분 CA를 1 : 2로 내분하는 점은

$F\left(\frac{1\times(-1)+2\times5}{1+2}, \frac{1\times1+2\times(-3)}{1+2}\right)$ $\therefore F\left(3, -\frac{5}{3}\right)$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+3+3}{3}, \frac{\frac{7}{3}+\frac{7}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)}{3}\right)$, 즉 $(2, 1)$이다.

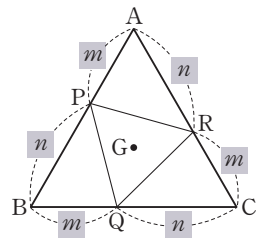
다른 풀이

세 변 AB, BC, CA를 각각 1 : 2로 내분하는 점 D, E, F에 대하여 삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다. ····· TIP

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-1+2+5}{3}, \frac{1+5+(-3)}{3}\right)$, 즉 $(2, 1)$이다.

TIP



세 변 AB, BC, CA를 각각 $m : n$ ($m>0$, $n>0$)으로 내분하는 세 점 또는 $m : n$ ($m>0$, $n>0$, $m\neq n$)으로 외분하는 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심과 삼각형 ABC의 무게중심은 일치한다.

[증명]

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하면

삼각형 ABC의 무게중심 G는

$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

이때, 세 변 AB, BC, CA를 $m : n$ ($m>0$, $n>0$)으로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라 하면

$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

$Q\left(\frac{mx_3+nx_2}{m+n}, \frac{my_3+ny_2}{m+n}\right)$

$R\left(\frac{mx_1+nx_3}{m+n}, \frac{my_1+ny_3}{m+n}\right)$

이므로 삼각형 PQR의 무게중심 G′도

$G'\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

마찬가지로 세 변 AB, BC, CA를 $m : n$ ($m>0$, $n>0$, $m\neq n$)으로 외분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심도 점 G와 일치한다.

637 ····· 답 ③

점 P의 좌표를 a라 하면 $\overline{AP}+\overline{BP}\leq7$에서

$|a+1|+|a-2|\leq7$이다.

(i) $a<-1$일 때

$-(a+1)-(a-2)\leq7$, $-2a\leq6$, $a\geq-3$이므로

$-3\leq a<-1$

(ii) $-1\leq a<2$일 때

$(a+1)-(a-2)\leq7$, $3\leq7$이므로

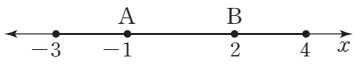
$-1\leq a<2$

(iii) $a\geq2$일 때

$(a+1)+(a-2)\leq7$, $2a\leq8$, $a\leq4$이므로

에쓰하이스쿨_수학Ⅰ_고교자습서_수Ⅰ(사이)_해설_1권.indb 131 22. 9. 14. 오후 8:20

$2 \le a \le 4$



(i)~(iii)에 의하여 $-3 \le a \le 4$이므로 점 P가 나타내는 도형의 길이는
$4-(-3)=7$

638 ····· 답 ③

점 P는 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로
$P(a, a-2)$라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\{(a+1)^2+(a-3)^2\}+\{(a-1)^2+(a-5)^2\}$
$=4a^2-16a+36=4(a-2)^2+20$
따라서 $a=2$, 즉 점 P의 좌표가 $(2, 0)$일 때,
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 최솟값 20을 갖는다.

639 ····· 답 ②

세 점 $A(1, -1)$, $B(-3, 4)$, $C(5, 6)$에 대하여
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$이 최소가 될 때는 점 P가 삼각형 ABC의 무게중심일 때이므로 점 P의 좌표 (a, b)는 ····· TIP
$\left(\frac{1+(-3)+5}{3}, \frac{(-1)+4+6}{3}\right)$, 즉, $(1, 3)$
그러므로 $a=1$, $b=3$이고 최솟값 m은
$m=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$
$=[(1-1)^2+\{(-1)-3\}^2]+[\{(-3)-1\}^2+(4-3)^2]$
$+\{(5-1)^2+(6-3)^2\}$
$=16+17+25=58$
$\therefore a+b+m=1+3+58=62$

TIP

좌표평면 위의 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$이 최솟값을 가질 때, 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.
[증명]
$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하고, $P(a, b)$라 하면
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$
$=\{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2\}+\{(a-x_2)^2+(b-y_2)^2\}$
$+\{(a-x_3)^2+(b-y_3)^2\}$
$=3a^2-2(x_1+x_2+x_3)a+3b^2-2(y_1+y_2+y_3)b$
$+x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2$
$=3\left(a-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(b-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2$
$-\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}$
$+x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2$
이므로 $a=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $b=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$일 때 최솟값을 갖는다.
즉, 점 P의 좌표가 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$일 때 최솟값을 가지므로 점 P가 삼각형 ABC의 무게중심일 때,
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 최솟값을 갖는다.

640 ····· 답 ④

$\sqrt{x^2+y^2+6x-4y+13}+\sqrt{x^2+y^2-2x-8y+17}$
$=\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$
에서 주어진 식은 두 점 $(-3, 2)$, $(1, 4)$와 점 (x, y) 사이의 거리의 합이다.
이 값이 최소가 되려면 점 (x, y)가 두 점 $(-3, 2)$, $(1, 4)$를 잇는 선분의 중점이 되어야 하므로 좌표는
$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$, 즉 $(-1, 3)$
따라서 구하는 최솟값은
$\sqrt{(-1+3)^2+(3-2)^2}+\sqrt{(-1-1)^2+(3-4)^2}$
$=\sqrt{4+1}+\sqrt{4+1}=2\sqrt{5}$

641 ····· 답 $\left(\frac{2}{7}, 0\right)$, $(0, -2)$

정류장을 설치할 곳을 나타내는 점을 P라 하면
점 P는 x축 또는 y축 위의 점이므로
$P(a, 0)$ 또는 $P(0, b)$라 할 수 있고,
$A(4, 1)$, $B(-3, 2)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$이어야 한다.
(i) $P(a, 0)$일 때
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서 $(a-4)^2+1^2=(a+3)^2+2^2$
$a=\frac{2}{7}$이므로 $P\left(\frac{2}{7}, 0\right)$
(ii) $P(0, b)$일 때
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서 $4^2+(b-1)^2=3^2+(b-2)^2$
$b=-2$이므로 $P(0, -2)$
(i), (ii)에 의하여 정류장을 설치할 수 있는 곳의 좌표는
$\left(\frac{2}{7}, 0\right)$, $(0, -2)$이다.

642 ····· 답 풀이 참조

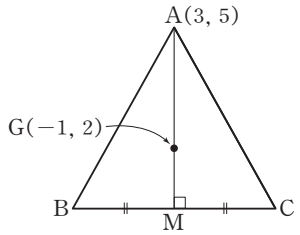
두 도로를 좌표평면 위에 놓으면 t분 후
갑의 위치는 점 $(0, -720+40t)$,
을의 위치는 점 $(960-40t, 0)$이다.
두 점 사이의 거리는
$\sqrt{(960-40t)^2+(-720+40t)^2}$
$=40\sqrt{(t-24)^2+(t-18)^2}$
$=40\sqrt{2t^2-84t+900}$
$=40\sqrt{2(t-21)^2+18}$
이므로 $t=21$일 때, 최솟값 $120\sqrt{2}$를 갖는다.
따라서 $a=21$, $b=120\sqrt{2}$이다.

채점 요소	배점
갑, 을의 위치를 좌표로 놓기	30 %
갑과 을 사이의 거리에 대한 식 세우기	30 %
갑과 을 사이의 거리의 최솟값 구하기	30 %
답 구하기	10 %

아쿠하이노내시ㅣ노그소자이스ㅣ(사이)_하내시ㅓ르.indb 132 22. 9. 14. 오후 8:20

643 ④

정삼각형 ABC의 무게중심을 G, 선분 BC의 중점을 M이라 하자.



A(3, 5), G(−1, 2)에 대하여

$\overline{AG}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$

이때, $\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$이므로 $\overline{AG}:\overline{AM}=2:3$이다.

$\therefore \overline{AM}=\frac{3}{2}\overline{AG}=\frac{3}{2}\times 5=\frac{15}{2}$

$\overline{AM}$은 정삼각형 ABC의 높이이므로

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$에서

$\frac{15}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$ …… TIP

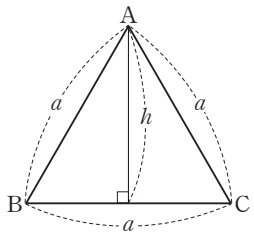
$\therefore \overline{AB}=5\sqrt{3}$

따라서 정삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$3\times 5\sqrt{3}=15\sqrt{3}$

TIP

<정삼각형의 높이와 넓이>



한 변의 길이가 a인 정삼각형 ABC의 높이를 h, 넓이를 S라 하면

$h=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

644 ②

삼각형 ABC의 외심을 P(−1, −1)이라 하면

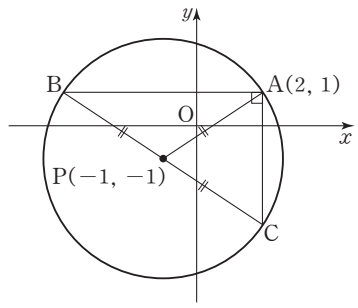
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$이다. …… TIP 1

한편, 삼각형 ABC의 외심이 변 BC 위에 있으므로

삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이고,

선분 BC의 중점이 P이다. …… TIP 2

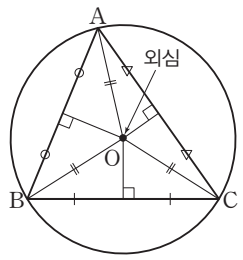


따라서 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\sqrt{13}$이고, $\overline{BC}=2\overline{PB}=2\sqrt{13}$이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=(2\sqrt{13})^2=52$

TIP 1

<삼각형의 외심>



① 정의 : 삼각형의 세 꼭짓점이 한 원 위에 있을 때, 이 원을 삼각형의 외접원이라 하고, 외접원의 중심을 외심(O)이라 한다.

② 성질 : 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다. 즉, 외접원의 반지름의 길이는 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$이다.

③ 작도 : 삼각형의 세 변의 수직이등분선이 만나는 점이 '삼각형의 외심'이다.

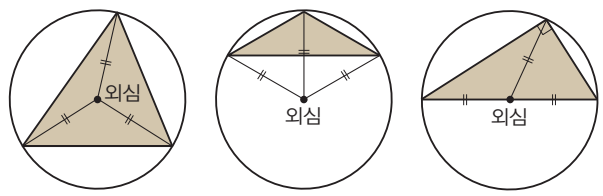
TIP 2

<삼각형의 외심의 위치>

예각삼각형의 외심은 삼각형 내부에 존재하고,

둔각삼각형의 외심은 삼각형 외부에 존재한다.

또한 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점에 위치한다.



645 풀이 참조

세 점 A(−1, −1), B(0, $-k$), C(2, −2)에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{(-1)^2+(k-1)^2}=\sqrt{k^2-2k+2}$

$\overline{BC}=\sqrt{2^2+(k-2)^2}=\sqrt{k^2-4k+8}$

$\overline{CA}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

이므로 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되는 경우는 다음과 같다.

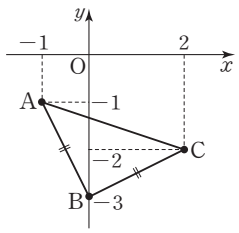
아뜨혁이노래시니그고재이시(사이)_해설서로.indb 133 22. 9. 14. 오후 8:20

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$일 때

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$k^2-2k+2=k^2-4k+8$

$2k=6$이므로 $k=3$



(ii) $\overline{BC}=\overline{CA}$일 때

$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$에서

$k^2-4k+8=10$, $k^2-4k-2=0$

$\therefore k=2\pm\sqrt{6}$

즉, 조건을 만족시키는 정수 k의 값이 존재하지 않는다.

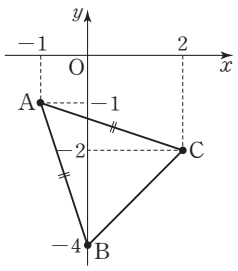
(iii) $\overline{CA}=\overline{AB}$일 때

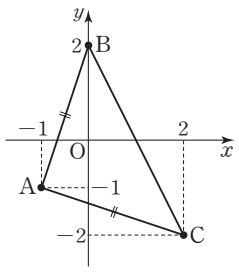
$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$에서

$k^2-2k+2=10$

$k^2-2k-8=0$, $(k+2)(k-4)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=4$





(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

$-2+3+4=5$이다.

채점 요소	배점
두 점 사이의 거리를 이용하여 세 변의 길이 구하기	20 %
이등변삼각형이 되도록 하는 k의 값 구하기 (1)	25 %
이등변삼각형이 되도록 하는 k의 값 구하기 (2)	25 %
이등변삼각형이 되도록 하는 k의 값 구하기 (3)	25 %
답 구하기	5 %

646 ····· 답 ⑤

삼각형 ABC의 외심에서 각 꼭짓점까지의 거리는 모두 같으므로

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$에서

$\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-1)^2+b^2}=\sqrt{(a-8)^2+(b-1)^2}$

(i) $\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$일 때

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+b^2-2b+1=a^2+b^2-2a+1$, 즉 $-2a=-2b$에서

$a=b$ ····· ㉠

(ii) $\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-8)^2+(b-1)^2}$일 때

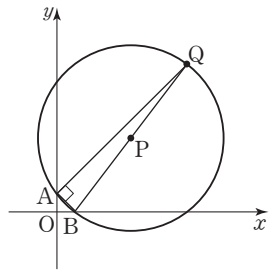
양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+b^2-2b+1=a^2+b^2-16a-2b+65$,

즉 $16a=64$에서 $a=4$, $b=4$ ($\because$ ㉠) ····· ㉡

(i), (ii)에서 P(4, 4)이다.

다음 그림과 같이 삼각형 ABQ에서 선분 BQ는 외심원의 지름이므로 $\angle A=90^\circ$이다.



따라서 삼각형 ABQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BQ}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times2\overline{BP}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{1^2+1^2}\times2\sqrt{(4-1)^2+4^2}$

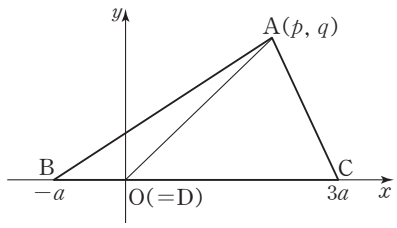
$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times10=5\sqrt{2}$

$\therefore abS=4\times4\times5\sqrt{2}$

$=80\sqrt{2}$

647 ····· 답 ③

좌표평면 위에 점 D를 원점, 선분 BC를 x축이 되도록 놓고 B$(-a, 0)$, C$(3a, 0)$, A(p, q) $(a>0, p>0, q>0)$라 하면 다음과 같다. ····· TIP



$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3$, $\overline{AD}=\sqrt{15}$이므로

$(p+a)^2+q^2=25$ ····· ㉠

$(p-3a)^2+q^2=9$ ····· ㉡

$p^2+q^2=15$ ····· ㉢

㉠−㉢을 하면 $2ap+a^2=10$ ····· ㉣

㉡−㉢을 하면 $-6ap+9a^2=-6$에서

$2ap-3a^2=2$ ····· ㉤

㉣−㉤을 하면 $4a^2=8$에서 $a^2=2$

$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

$\therefore \overline{BC}=4a=4\sqrt{2}$

참고

㉣에서 $p=2\sqrt{2}$이고, 이를 ㉢에 대입하면 $q=\sqrt{7}$이므로

점 A의 좌표는 $(2\sqrt{2}, \sqrt{7})$이다.

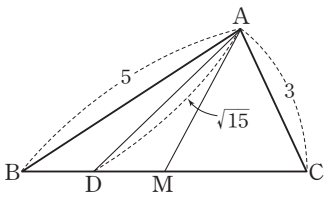
에쓰플러스니그조재으시(사으)_해설서로.indb 134 22. 9. 14. 오후 8:20

TIP

좌표축을 이용하여 주어진 도형의 성질을 설명할 때,
좌표축을 어떻게 설정하여도 도형의 성질은 변하지 않는다.
따라서 계산이 편리하도록
주어진 도형의 꼭짓점 또는 변의 중점이 원점이 되도록
설정하거나 x축이나 y축을 주어진 도형의 한 변 또는
대칭축이 되도록 설정하자.

다른 풀이

선분 BC의 중점을 M이라 하면 선분 BM의 중점이 D이므로
다음과 같다.

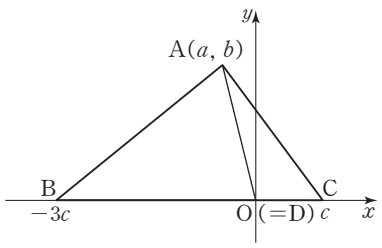


$\overline{AM}=m$, $\overline{BM}=2a$ ($m>0$, $a>0$)라 하면
삼각형 ABC에서 중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$
$5^2+3^2=2\{m^2+(2a)^2\}$
$\therefore\ m^2+4a^2=17$ ····· ㉠
삼각형 ABM에서 중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AM}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$
$5^2+m^2=2(\sqrt{15}^2+a^2)$
$\therefore\ m^2-2a^2=5$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\sqrt{2}$, $m=3$이다.
$\therefore\ \overline{BC}=4a=4\sqrt{2}$

648

답 $\frac{3}{4}$

$\overline{BD}=3\overline{DC}$에서 $\overline{BD}:\overline{DC}=3:1$이므로
변 BC 위의 점 D는 선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점이다.
직선 BC를 x축으로 하고, 점 D가 원점이 되도록
삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓고,
A(a, b), B($-3c$, 0), C(c, 0)이라 하면
다음과 같다.

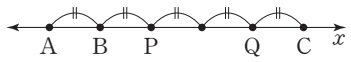


$3\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=k(\overline{AB}^2+3\overline{AC}^2)$에서
$3(a^2+b^2)+(-3c)^2=k[(a+3c)^2+b^2+3\{(a-c)^2+b^2\}]$
$3a^2+3b^2+9c^2=k(4a^2+4b^2+12c^2)$
$\therefore\ k=\frac{3a^2+3b^2+9c^2}{4a^2+4b^2+12c^2}=\frac{3}{4}$ ($\because\ a^2+b^2+3c^2\neq0$)

649

답 A, B, P, Q, C

두 점 P($\sqrt{2}$), Q($\sqrt{3}$)에 대하여
점 A($2\sqrt{2}-\sqrt{3}$), 즉 A$\left(\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-1}\right)$은
선분 QP를 2 : 1로 외분하는 점이고,
점 B$\left(\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{-2}\right)$, 즉 B$\left(\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{1-3}\right)$는
선분 PQ를 1 : 3으로 외분하는 점이고,
점 C$\left(\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)$, 즉 C$\left(\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-1}\right)$는
선분 PQ를 3 : 1로 외분하는 점이다.
그러므로 5개의 점을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

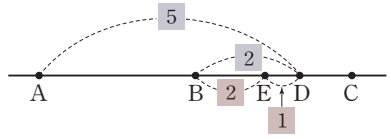


따라서 다섯 개의 점 P, Q, A, B, C의 위치를 왼쪽부터 순서대로
나열하면 A, B, P, Q, C이다.

650

답 ⑤

점 A, B, C, D, E를 직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=\frac{3}{2}\overline{BD}+\frac{2}{3}\overline{BD}=\frac{13}{6}\overline{BD}$
$\therefore\ \frac{\overline{AE}}{\overline{BD}}=\frac{13}{6}$

651

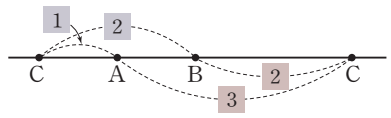
답 ⑤

두 점 A(-5, 1), B(1, -3)에 대하여
선분 AB를 $(1-t):t$ ($0<t<1$)로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{(1-t)\times1+t\times(-5)}{(1-t)+t},\ \frac{(1-t)\times(-3)+t\times1}{(1-t)+t}\right)$
$\therefore\ (-6t+1,\ 4t-3)$
이 점이 제3사분면에 있기 위해서는
$-6t+1<0$이고 $4t-3<0$이어야 한다.
따라서 $\frac{1}{6}<t<\frac{3}{4}$이므로 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{3}{4}$이다.
$\therefore\ a+b=\frac{11}{12}$

652

답 풀이 참조

$2\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$이므로
점 C는 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 또는
선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점이다.



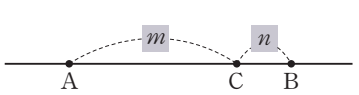
아끄하ㅓㅇㄴ내ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ내ㅅㅓㄹ.indb 135 22. 9. 14. 오후 8:20

두 점 A(−1, 3), B(2, 6)에 대하여
(i) 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times2-2\times(-1)}{1-2}, \frac{1\times6-2\times3}{1-2}\right)$ ∴ (−4, 0)
(ii) 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{3\times2-2\times(-1)}{3-2}, \frac{3\times6-2\times3}{3-2}\right)$ ∴ (8, 12)
따라서 구하는 점 C의 좌표는 (−4, 0), (8, 12)이다.

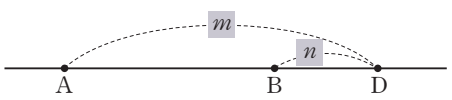
채점 요소	배점
조건을 만족시키는 점 C의 조건 (i) 찾기	20 %
조건을 만족시키는 점 C의 조건 (ii) 찾기	20 %
조건 (i)을 만족시키는 점 C의 좌표 구하기	30 %
조건 (ii)를 만족시키는 점 C의 좌표 구하기	30 %

653 ····· 답 ④

$\overline{AB}=k$ ($k>0$)라 하면
점 C가 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점이므로
$\overline{AC}=\frac{m}{m+n}k$



점 D가 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점이므로
$\overline{AD}=\frac{m}{m-n}k$



$\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{k}$, $\frac{1}{\overline{AC}}=\frac{m+n}{mk}$, $\frac{1}{\overline{AD}}=\frac{m-n}{mk}$에서
$\frac{m+n}{mk}+\frac{m-n}{mk}=\frac{2m}{mk}=\frac{2}{k}$를 만족시킨다.
∴ $\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}=\frac{2}{\overline{AB}}$

654 ····· 답 ⑤

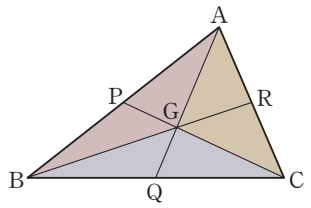
두 점 A, B의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 할 때,
선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는 각각 다음과 같다.
$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$, $Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$
선분 AQ의 중점의 좌표는
$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}+x_1\right), \frac{1}{2}\left(\frac{my_2-ny_1}{m-n}+y_1\right)\right)$
이고, 이 점이 점 P와 일치하므로
$\frac{mx_2+nx_1}{m+n}=\frac{1}{2}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}+x_1\right)$,
$\frac{2(mx_2+nx_1)}{m+n}=\frac{mx_2+(m-2n)x_1}{m-n}$
양변에 $(m+n)(m-n)$을 곱하여 정리하면
$2m(m-n)x_2+2n(m-n)x_1=m(m+n)x_2+(m-2n)(m+n)x_1$
이므로
$2m(m-n)=m(m+n)$, $2n(m-n)=m^2-mn-2n^2$에서
$m^2=3mn$, $m=3n$ ($\because m\neq0$)
∴ $\frac{m}{n}=3$

655 ····· 답 171

삼각형 ABC의 내부의 점 D에 대하여
세 삼각형 ABD, BCD, CAD의 넓이가 서로 같으므로
점 D는 삼각형 ABC의 무게중심이다. ····· TIP
세 점 A(2, −1), B(a, 2), C(b, −4)에 대하여
삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{2+a+b}{3}, \frac{-1+2-4}{3}\right)$ ∴ $\left(\frac{2+a+b}{3}, -1\right)$
이 점이 D(5, ab)와 일치하므로 $a+b=13$, $ab=-1$
∴ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=13^2-2\times(-1)=171$

TIP

❶ 삼각형 ABC에 대하여 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 P, Q, R라 하고 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 6개의 삼각형 APG, BPG, BQG, CQG, CRG, ARG의 넓이는 모두 같으므로 세 삼각형 ABG, BCG, CAG의 넓이는 서로 같다.



[증명]
삼각형 ABQ에서 $\overline{AG}:\overline{GQ}=2:1$이므로
두 삼각형 ABG, BQG의 넓이의 비가 2 : 1이다.
삼각형 ABG에서 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로 두 삼각형 APG, BPG의 넓이가 서로 같다.
따라서 세 삼각형 APG, BPG, BQG의 넓이가 서로 같다.
마찬가지 방법으로 세 삼각형 ARG, CRG, CQG의 넓이가 서로 같다.
또한 $\overline{BQ}=\overline{CQ}$에서 두 삼각형 ABQ, ACQ의 넓이가 서로 같으므로 6개의 삼각형 APG, BPG, BQG, CQG, CRG, ARG의 넓이는 서로 같다.

❷ 삼각형 ABC 내부의 점 G에 대하여 세 삼각형 ABG, BCG, CAG의 넓이가 서로 같으면 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

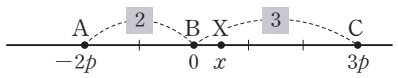
[증명]
직선 AG가 선분 BC와 만나는 점을 Q, 직선 BG가 선분 AC와 만나는 점을 R, 직선 CG가 선분 AB와 만나는 점을 P라 하자.

아뿌하이스쿨시스템고3재수시(사이)_해설서2.indb 136 22. 9. 14. 오후 8:20

두 삼각형 ABG, BQG의 넓이의 비와 두 삼각형 ACG, CQG의 넓이의 비는 $\overline{AG} : \overline{GQ}$와 같고, 이때 두 삼각형 ABG, ACG의 넓이가 서로 같으므로 두 삼각형 BQG, CQG의 넓이가 서로 같다.
따라서 삼각형 GBC에서 $\overline{BQ}=\overline{CQ}$이므로 점 Q는 선분 BC의 중점이다.
마찬가지 방법으로 선분 AB의 중점이 P이고, 선분 AC의 중점이 R이다. 삼각형 ABC의 세 중선의 교점이 G이므로 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

656 ③

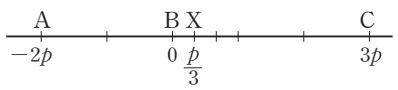
$3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB} : \overline{BC}=2 : 3$이고,
B지점은 A지점과 C지점 사이에 위치하므로
점 B는 선분 AC를 2 : 3으로 내분하는 점이다.



따라서 직선도로를 수직선으로, 점 B를 원점으로 생각하면
A$(-2p)$, B(0), C$(3p)$로 놓을 수 있다.
보관 창고의 위치를 X(x)라 하면
운반 비용은 $\overline{XA}^2+\overline{XB}^2+\overline{XC}^2$의 값에 비례하므로

$$\begin{aligned}\overline{XA}^2+\overline{XB}^2+\overline{XC}^2&=(x+2p)^2+x^2+(x-3p)^2\\&=3x^2-2px+13p^2\\&=3\left(x-\frac{p}{3}\right)^2+\frac{38}{3}p^2\end{aligned}$$

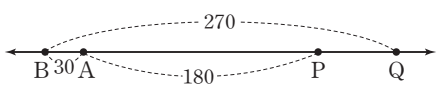
에서 운반 비용은 $x=\frac{p}{3}$일 때 최소이다.



따라서 $\overline{AB}=6\overline{BX}$에서 $\overline{AX} : \overline{BX}=7 : 1$이므로
보관 창고의 위치는 선분 AB를 7 : 1로 외분하는 점이다.

657 ③

수직선 위에 처음 두 사람 A, B의 위치를 각각 점 A, B로 나타내면 다음과 같다.



B의 속력이 A의 속력의 1.5배이므로 B가 결승점까지 270 m를 달리는 동안 A는 180 m를 달린다.
따라서 B에서 Q까지의 거리가 270 m, A에서 P까지의 거리가 180 m이다.
$\overline{AP}=180$, $\overline{AQ}=240$, $\overline{PQ}=60$이므로
점 A는 선분 PQ를 180 : 240 = 3 : 4로 외분한다.
$\therefore m-n=3-4=-1$

658 ③

두 점 B, C의 좌표를 각각 (p_1, q_1), (p_2, q_2)라 하면
선분 AB의 중점의 좌표 (x_1, y_1)은 $\left(\frac{3+p_1}{2}, \frac{-1+q_1}{2}\right)$이고,
선분 AC의 중점의 좌표 (x_2, y_2)는 $\left(\frac{3+p_2}{2}, \frac{-1+q_2}{2}\right)$이다.

$x_1+x_2=\frac{3+p_1}{2}+\frac{3+p_2}{2}$에서 $6=\frac{6+p_1+p_2}{2}$이므로
$p_1+p_2=6$

$y_1+y_2=\frac{-1+q_1}{2}+\frac{-1+q_2}{2}$에서 $-1=\frac{-2+q_1+q_2}{2}$이므로
$q_1+q_2=0$

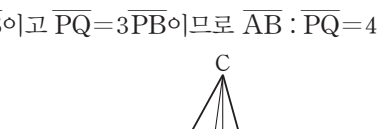
따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{3+p_1+p_2}{3}, \frac{-1+q_1+q_2}{3}\right)$이므로 $\left(\frac{3+6}{3}, \frac{-1+0}{3}\right)$,
즉 $\left(3, -\frac{1}{3}\right)$이다.

$\therefore a=3, b=-\frac{1}{3}$

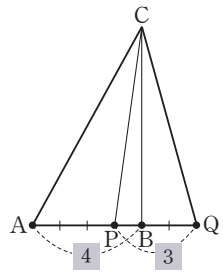
$\therefore a+b=3+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}$

659 ⑤

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q를 직선 AB 위에 나타내면 다음과 같다.



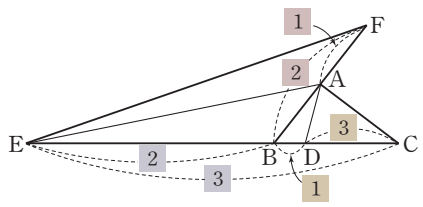
ㄱ. $\overline{AP}=3\overline{PB}=\overline{PQ}$이므로 점 P는 선분 AQ의 중점이다. (참)
ㄴ. $\overline{AB}=4\overline{PB}$, $\overline{AQ}=6\overline{PB}$이므로 $\overline{AB} : \overline{AQ}=4 : 6=2 : 3$이다.
그러므로 점 A는 선분 BQ를 2 : 3으로 외분하는 점이다. (참)
ㄷ. $\overline{AB}=4\overline{PB}$이고 $\overline{PQ}=3\overline{PB}$이므로 $\overline{AB} : \overline{PQ}=4 : 3$이다.



그러므로 직선 AB 위에 있지 않은 점 C에 대하여
두 삼각형 ABC와 PQC의 넓이의 비는 4 : 3이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

660 16

삼각형 ABC와 세 점 D, E, F를 나타내면 다음과 같다.



(삼각형 ABC의 넓이)$=S$라 하자.
점 D는 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점이므로

아끄하이노래시니그소재으시(사으)_하새서르.indb 137 22. 9. 14. 오후 8:20

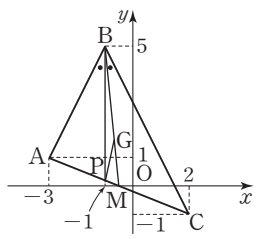
(삼각형 ABD의 넓이)$=\frac{1}{4}S$ …… ㉠

점 E는 선분 BC를 2 : 3으로 외분하는 점이므로
(삼각형 AEB의 넓이)$=2S$
점 F는 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점이므로
(삼각형 FEB의 넓이)$=4S$ …… ㉡
(삼각형 FEB의 넓이)$=k\times$(삼각형 ABD의 넓이)에서

㉠, ㉡에 의하여 $4S=k\times\frac{1}{4}S$ $\therefore k=16$

661 답 15

각 B의 이등분선이 변 AC와 만나는 점이 P이므로
$\overline{AB} : \overline{BC}=\overline{AP} : \overline{CP}$이다. …… TIP
세 점 A$(-3, 1)$, B$(-1, 5)$, C$(2, -1)$에 대하여
$\overline{AB}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{BC}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$
이므로 $\overline{AP} : \overline{CP}=\overline{AB} : \overline{BC}=2 : 3$이다.
따라서 점 P는 선분 AC를 2 : 3으로 내분하는 점이므로
$P\left(\frac{2\times2+3\times(-3)}{2+3}, \frac{2\times(-1)+3\times1}{2+3}\right)$, 즉 $P\left(-1, \frac{1}{5}\right)$
다음과 같이 선분 BG의 연장선이 선분 AC와 만나는 점을 M이라 하면 점 M은 선분 AC의 중점이고, 그 좌표는
$\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right)$, 즉 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$이다.

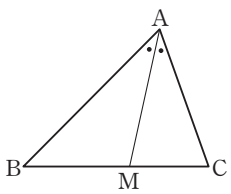


이때, $\overline{AC}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$, $\overline{PM}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{29}}{10}$이므로
삼각형 BPM의 넓이를 S_3이라 하면
삼각형 ABC와 삼각형 BPM의 넓이의 비는
$\overline{AC} : \overline{PM}=10 : 1$이므로 $S_1=10S_3$
삼각형 BPM과 삼각형 BPG의 넓이의 비는
$\overline{BM} : \overline{BG}=3 : 2$이므로 $S_2=\frac{2}{3}S_3$

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{10S_3}{\frac{2}{3}S_3}=15$

TIP

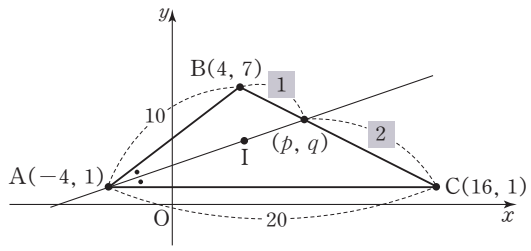
<각의 이등분선의 성질>



삼각형 ABC에서 선분 AM이 각 A의 이등분선일 때,
$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BM} : \overline{CM}$이다.

662 답 13

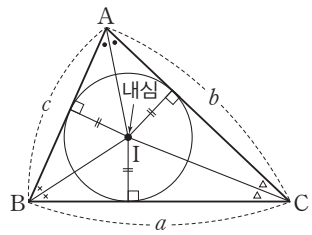
삼각형 ABC의 세 내각의 이등분선의 교점이
삼각형 ABC의 내심 I이므로 …… TIP
직선 AI는 삼각형 ABC의 내각 BAC를 이등분한다.



세 점 A$(-4, 1)$, B$(4, 7)$, C$(16, 1)$에 대하여
$\overline{AB}=\sqrt{8^2+6^2}=10$, $\overline{AC}=|16-(-4)|=20$
이므로 $\overline{AB} : \overline{AC}=1 : 2$이다.
따라서 각의 이등분선의 성질에 의하여 두 직선 AI와 BC가 만나는 점 (p, q)는 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점과 같다.
따라서 점 (p, q)는 $\left(\frac{1\times16+2\times4}{1+2}, \frac{1\times1+2\times7}{1+2}\right)$,
즉 $(8, 5)$이므로 $p+q=13$

TIP

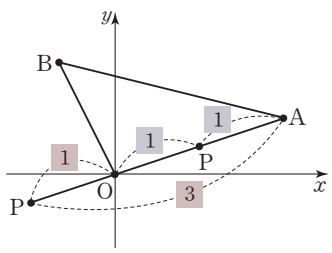
<삼각형의 내심>



① 정의 : 삼각형의 세 변에 접하는 원을 삼각형의 내접원이라 하고, 내접원의 중심을 내심(I)이라 한다.
② 성질 : 삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 내접원의 반지름의 길이 r로 같다.
(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$
③ 작도 : 삼각형의 세 내각의 이등분선이 만나는 점이 '삼각형의 내심'이다.

663 답 ①

조건 (나)에서 $\overline{OP} : \overline{OA}=1 : 2$이므로
직선 OA 위의 점 P는 선분 OA를 1 : 1로 내분하는 점, 즉 중점 또는 1 : 3으로 외분하는 점이다.

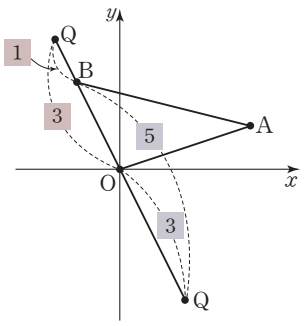


아쿠하이스내스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해ㅅㅓ르.indb 138 22. 9. 14. 오후 8:20

조건 (가)에 의하여 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 선분 OA의 중점이다.

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$, 즉 (3, 1)이다.

조건 (다)에서 $\overline{OQ} : \overline{OB}=3 : 2$이므로
직선 OB 위의 점 Q는 선분 OB를 3 : 1로 외분하는 점 또는 3 : 5로 외분하는 점이다.



조건 (가)에 의하여 점 Q는 제2사분면 위의 점이므로 선분 OB를 3 : 1로 외분하는 점이다.

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{3\times(-2)-1\times0}{3-1}, \frac{3\times4-1\times0}{3-1}\right)$,

즉 (−3, 6)이다.

두 점 P(3, 1), Q(−3, 6)에 대하여 직선 PQ의 방정식은

$y=\frac{6-1}{-3-3}(x-3)+1$

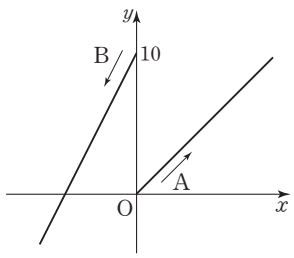
따라서 $5x+6y=21$이므로 $m=5$, $n=6$

$\therefore m+n=11$

664

답 ①

좌표평면 위에 지점 O를 원점, 동서 방향을 x축, 남북 방향을 y축이라 하고 두 학생 A, B의 위치를 각각 두 점 A, B라 하자.



학생 A는 원점에서 출발하여 직선 $y=x$를 따라 움직이므로

t시간 후 A의 위치를 P(a, a)라 하면

$\overline{OP}=a\sqrt{2}=2\sqrt{2}\times t$에서 $a=2t$

즉, P($2t$, $2t$)이다.

한편, 학생 B는 점 (0, 10)에서 출발하여

t시간마다 x축 방향으로 $-t$만큼, y축 방향으로 $-2t$만큼 움직이므로 t시간 후 B의 위치를 Q라 하면

Q($-t$, $10-2t$)이다.

t시간 후 두 사람 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(3t)^2+(4t-10)^2}=\sqrt{25t^2-80t+100}$

$=\sqrt{25\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+36}$

이므로 $\frac{8}{5}$시간 후 두 사람 사이의 거리가 6 km로 최소이다.

따라서 $x=\frac{8}{5}\times60=96$, $y=6$이다.

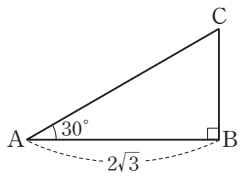
$\therefore x+y=96+6=102$

665

답 ②

다음과 같은 직각삼각형 ABC에서

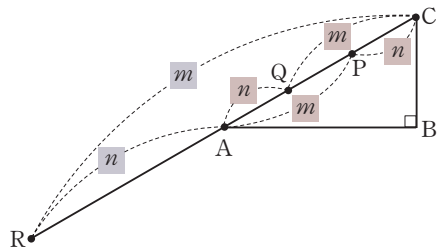
$\overline{AC} : \overline{AB}=2 : \sqrt{3}$이므로 $\overline{AC}=4$이다.



선분 AC를 $m : n$으로 내분하는 점이 P,

$n : m$으로 내분하는 점이 Q,

$n : m$으로 외분하는 점이 R이므로 다음과 같다.



$\overline{AC} : \overline{AQ}=(m+n) : n$, $\overline{AC} : \overline{CP}=(m+n) : n$에서

$\overline{AQ}=\overline{CP}$

따라서 $\overline{AC}=\overline{PQ}+2\overline{AQ}$이므로

$4=\frac{4}{5}+2\overline{AQ}$ $\quad\therefore \overline{AQ}=\frac{8}{5}$

즉, $n : m=\overline{AQ} : \overline{CQ}=\frac{8}{5} : \frac{12}{5}=2 : 3$이므로

점 R는 선분 AC를 2 : 3으로 외분하는 점이다.

$\therefore \overline{AR}=2\overline{AC}=2\times4=8$

666

답 ③

점 P가 선분 AC를 $m : n$으로 내분하는 점이므로

$p=\frac{mc+na}{m+n}$ …… ㉠

또한 점 P가 선분 BC를 $m : n$으로 외분하는 점이므로

$p=\frac{mc-nb}{m-n}$ …… ㉡

즉, ㉠, ㉡에 의하여

$\frac{mc+na}{m+n}=\frac{mc-nb}{m-n}$ …… ㉢

ㄱ. $a=1$, $b=5$, $m=1$, $n=2$이면 ㉢에서

$\frac{c+2}{3}=\frac{c-10}{-1}$

$-c-2=3c-30$

$\therefore c=7$ (참)

아끄하이노새시니그고자이시(사이)_해서르.indb 139 22. 9. 14. 오후 8:20

ㄴ. $a=0$, $c=3$, $m=2$, $n=1$이면 ㉢에서

$\frac{6+0}{3}=\frac{6-b}{1}$

즉, $p=2$, $b=4$이므로

$a<p<c<b$로 ㄴ이 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. ㉠에서 $(m+n)p=mc+na$ …… ㉣

㉡에서 $(m-n)p=mc-nb$ …… ㉤

㉣−㉤을 하면

$2np=na+nb$

$\therefore p=\frac{a+b}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

667 ····· 답 12

$\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{(a-8)^2+b^2}$

$\therefore (a-8)^2+b^2=80$ …… ㉠

삼각형 ABC와 삼각형 PQC에서

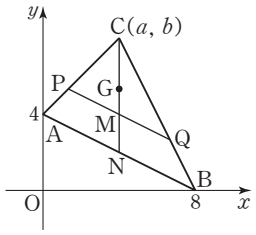
두 점 P, Q가 두 선분 AC, BC를 각각 1 : 2로 내분하므로

$\overline{AC}:\overline{PC}=\overline{BC}:\overline{QC}=3:2$

$\angle C$가 공통이므로

삼각형 ABC와 삼각형 PQC는 닮은 도형이고 닮음비는 3 : 2이다.

그러므로 그림과 같이 직선 CG가 두 선분 PQ, AB와 만나는 점을 각각 M, N이라 하면 $\overline{CM}:\overline{CN}=2:3$이다.



$\overline{CG}=\frac{8}{3}$에서 $\overline{CM}=\frac{3}{2}\overline{CG}=\frac{3}{2}\times\frac{8}{3}=4$

$\therefore \overline{CN}=\frac{3}{2}\overline{CM}=\frac{3}{2}\times 4=6$

선분 AB의 중점 N의 좌표는 $\left(\frac{0+8}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 (4, 2)이므로

$\overline{CN}=\sqrt{(a-4)^2+(b-2)^2}=6$

$(a-4)^2+(b-2)^2=36$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$-8a+4b=0$, $b=2a$이고, 이를 ㉠에 대입하면

$(a-8)^2+(2a)^2=80$, $5a^2-16a-16=0$,

$(5a+4)(a-4)=0$에서 $a=4$ ($\because a>0$)이고 $b=8$

$\therefore a+b=12$

668 ····· 답 12

y축이 선분 AB를 $m:n$으로 내분하므로

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 x좌표가 0이다.

$\frac{-2m+an}{m+n}=0$ $\therefore 2m=an$ …… ㉠

x축이 선분 AC를 $m:n$으로 내분하므로

선분 AC를 $m:n$으로 내분하는 점의 y좌표가 0이다.

$\frac{-2m+bn}{m+n}=0$ $\therefore 2m=bn$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $an=bn$, 즉 $a=b$ ($\because n\neq 0$)이므로

점 A는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

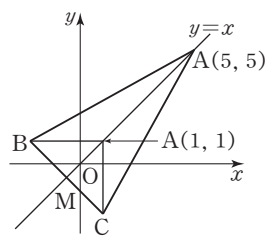
이때, a, b가 5 이하의 자연수이므로

삼각형 ABC의 넓이는 점 A의 좌표가 (1, 1)일 때 최소이고,

(5, 5)일 때 최대이다.

다음과 같이 선분 BC의 중점을 M이라 할 때 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AM}$이다. …… ㉢



점 M의 좌표는 $\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{1+(-2)}{2}\right)$, 즉 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$이고,

$\overline{BC}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$이다.

점 A의 좌표가 (1, 1)일 때 $\overline{AM}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$이므로

㉢에서 $S_1=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}=\frac{9}{2}$

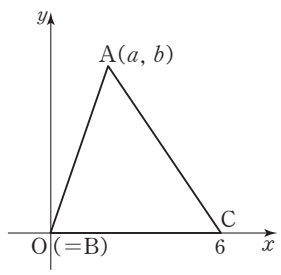
점 A의 좌표가 (5, 5)일 때 $\overline{AM}=\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2}=\frac{11}{2}\sqrt{2}$이므로

㉢에서 $S_2=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\frac{11}{2}\sqrt{2}=\frac{33}{2}$

$\therefore S_2-S_1=\frac{33}{2}-\frac{9}{2}=12$

669 ····· 답 ③

두 점 B, C의 좌표가 각각 (0, 0), (6, 0), 점 A가 제1사분면 위에 오도록 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓자.



점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 $(a>0, b>0)$

$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{10}$이므로

$a^2+b^2=40$ …… ㉠

$\overline{AC}=\sqrt{(a-6)^2+b^2}=2\sqrt{13}$이므로

$(a-6)^2+b^2=52$ …… ㉡

㉠에서 ㉡을 빼면 $12a-36=-12$이므로 $a=2$이고,

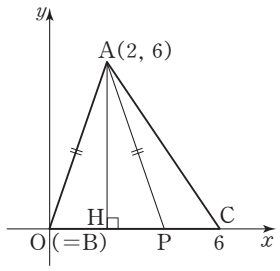
이를 ㉠에 대입하면 $b=6$ ($\because b>0$)

$\therefore$ A(2, 6)

아끄하우노래시ㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇ시ㅣ(사ㅇ)_해시ㅓㄹ.indb 140 22. 9. 14. 오후 8:20

ㄱ. $m=n$일 때, 점 P는 선분 BC의 중점이므로
P(3, 0)
$\therefore \overline{AP}=\sqrt{(3-2)^2+(0-6)^2}=\sqrt{37}$ (참)

ㄴ. $\overline{AB}=\overline{AP}$일 때, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 H(2, 0)이다.



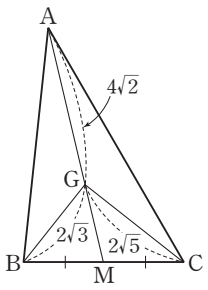
이때, 삼각형 ABP가 이등변삼각형이므로
$\overline{BH}=\overline{HP}$에서 P(4, 0)이다.
즉, $\overline{BP}:\overline{PC}=4:2=2:1$이므로
$m=2$, $n=1$ $\therefore m-n=1$ (거짓)

ㄷ. 점 P의 좌표를 $(p, 0)$ $(p>0)$이라 하면
$\overline{AP}=\sqrt{(p-2)^2+(0-6)^2}=3\sqrt{5}$에서
$p^2-4p+40=45$
$p^2-4p-5=0$, $(p-5)(p+1)=0$
즉, $p=5$ ($\because p>0$)이므로 P(5, 0)이다.
$\overline{BP}:\overline{PC}=5:1$이므로
$m=5$, $n=1$ $\therefore m+2n=7$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

670 ····· 답 ②

직선 AG가 선분 BC와 만나는 점을 M이라 하면
선분 BC의 중점이 M이고,
$\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$이므로 $\overline{GM}=2\sqrt{2}$이다.



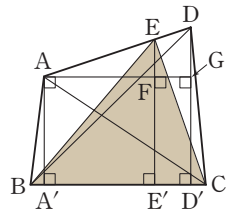
삼각형 BCG에서 중선정리에 의하여
$\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=2(\overline{GM}^2+\overline{BM}^2)$
$(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{5})^2=2\{(2\sqrt{2})^2+\overline{BM}^2\}$
$32=2(8+\overline{BM}^2)$ $\therefore \overline{BM}=2\sqrt{2}$ ($\because \overline{BM}>0$)
이때, 삼각형 BCG에서 $\overline{GM}=\overline{BM}=\overline{CM}$이므로
삼각형 BCG는 $\angle BGC=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\therefore$ (삼각형 BCG의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{5}=2\sqrt{15}$

$\therefore$ (삼각형 ABC의 넓이)$=3\times$(삼각형 BCG의 넓이)
$=3\times 2\sqrt{15}$
$=6\sqrt{15}$

671 ····· 답 ⑤

세 점 A, E, D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 각각 A′, E′, D′이라 하고, 점 A를 지나고 직선 AA′에 수직인 직선이 두 선분 EE′, DD′과 만나는 점을 각각 F, G라 하자.



삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 DBC의 넓이의 비가 2 : 3이므로
$\overline{AA'}:\overline{DD'}=2:3$이다.
$\overline{AA'}=\overline{GD'}$이므로 $\overline{GD'}:\overline{DD'}=2:3$에서 $\overline{DG}:\overline{GD'}=1:2$이다.
즉, $\overline{DG}:\overline{AA'}=1:2$ ····· ㉠
한편, 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점이 E이므로
$\overline{AE}:\overline{AD}=3:4$에서 $\overline{EF}:\overline{DG}=3:4$ ····· ㉡
㉠, ㉡에 의하여

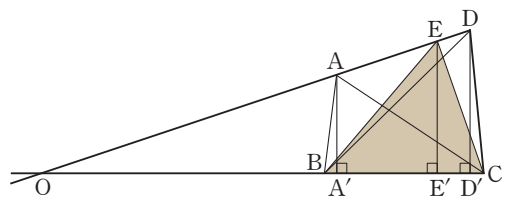
$\overline{EF}=\frac{3}{4}\overline{DG}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\overline{AA'}=\frac{3}{8}\overline{AA'}$이므로

$\overline{EE'}=\overline{EF}+\overline{FE'}=\frac{3}{8}\overline{AA'}+\overline{AA'}=\frac{11}{8}\overline{AA'}$

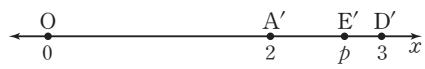
$\therefore$ (삼각형 EBC의 넓이)$=\frac{11}{8}\times$(삼각형 ABC의 넓이)
$=\frac{11}{8}\times 2=\frac{11}{4}$

다른 풀이

다음 그림과 같이 두 직선 AD와 BC의 교점을 O라 하고, 세 점 A, E, D에서 선분 BC 위에 내린 수선의 발을 각각 A′, E′, D′이라 하자.



삼각형 ABC의 넓이는 2이고 삼각형 DBC의 넓이는 3이므로
$\overline{OA'}:\overline{OD'}=\overline{AA'}:\overline{DD'}=2:3$이고,
점 E는 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점이므로
$\overline{A'E'}:\overline{E'D'}=\overline{AE}:\overline{ED}=3:1$이다.



수직선 위에 네 점 O, A′, E′, D′을
O(0), A′(2), E′(p), D′(3)이라 놓으면
$p=\frac{3\times 3+1\times 2}{3+1}=\frac{11}{4}$

$\therefore \overline{AA'}:\overline{EE'}=\overline{OA'}:\overline{OE'}=2:\frac{11}{4}$

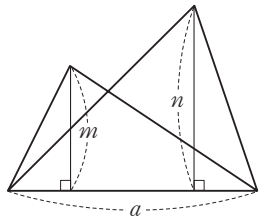
따라서 구하는 삼각형 EBC의 넓이는
$2\times\frac{11}{8}=\frac{11}{4}$

오투확인체크ㅣ드릴조재은ㅅㅣ(사ㅇ)_해설.indb 141 22. 9. 14. 오후 8:20

TIP

<밑변의 길이가 같은 삼각형의 넓이>

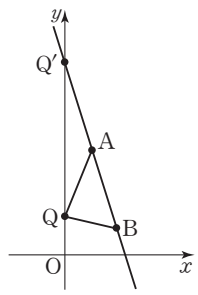
밑변의 길이가 서로 같은 삼각형의 높이의 비가 $m : n$이면 두 삼각형의 넓이의 비도 $m : n$이다.



$$\frac{1}{2}am : \frac{1}{2}an = m : n$$

672 ····· 답 59

직선 AB와 y축의 교점을 Q′이라 하자.



y축 위의 점 Q에 대하여

(i) 점 Q가 점 Q′에 위치하지 않을 때

삼각형 ABQ에 대하여

$\overline{AQ} < \overline{AB} + \overline{BQ}$에서 $\overline{AQ} - \overline{BQ} < \overline{AB}$이고,

$\overline{AQ} + \overline{AB} > \overline{BQ}$에서 $\overline{AQ} - \overline{BQ} > -\overline{AB}$이므로

$-\overline{AB} < \overline{AQ} - \overline{BQ} < \overline{AB}$에서

$|\overline{AQ} - \overline{BQ}| < \overline{AB}$

(ii) 점 Q가 점 Q′에 위치할 때

$|\overline{AQ} - \overline{BQ}| = |\overline{AQ'} - \overline{BQ'}| = |-\overline{AB}| = \overline{AB}$

(i), (ii)에 의하여

$|\overline{AQ} - \overline{BQ}| \le \overline{AB}$

따라서 점 Q가 점 Q′에 위치할 때, $|\overline{AQ} - \overline{BQ}|$는 최댓값 $\overline{AB}$를 갖는다.

두 점 A(1, 4), B(2, 1)을 지나는 직선 AB의 방정식은

$y - 4 = \frac{1-4}{2-1}(x-1) \quad \therefore y = -3x + 7$

즉, 점 Q′의 y좌표는 7이므로 $a = 7$이다.

또한 $\overline{AB} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$이므로

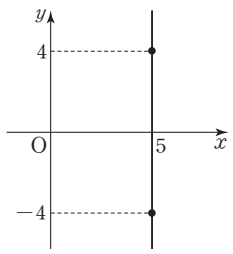
$b = \sqrt{10}$

$\therefore a^2 + b^2 = 7^2 + (\sqrt{10})^2 = 59$

02 직선의 방정식

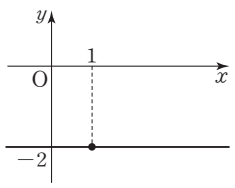
673 ····· 답 풀이 참조

(1) 두 점 (5, −4), (5, 4)를 지나는 직선의 방정식은 $x = 5$이다.



(2) y축에 수직인 직선의 방정식은 $y = k$ (k는 상수)이다.

따라서 점 (1, −2)를 지나고 y축에 수직인 직선의 방정식은 $y = -2$이다.



(3) 기울기가 4이고, 점 (−2, −1)을 지나는 직선의 방정식은 $y-(-1) = 4\{x-(-2)\}$에서 $y = 4x + 7$이다.

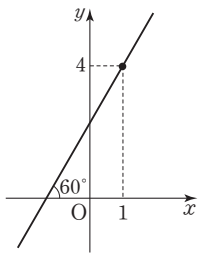
(4) 두 점 (3, −2), (1, 8)을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{8-(-2)}{1-3} = -5$

따라서 기울기가 −5이고, 점 (3, −2)를 지나는 직선의 방정식은 $y-(-2) = -5(x-3)$에서 $y = -5x + 13$이다.

(5) 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°이므로 직선의 기울기는 $\tan 60° = \sqrt{3}$이다.

따라서 기울기가 $\sqrt{3}$이고, 점 (1, 4)를 지나는 직선의 방정식은 $y - 4 = \sqrt{3}(x-1)$에서 $y = \sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3}$이다.



674 ····· 답 ④

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{2\times 5 + 1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times 0 + 1\times 3}{2+1}\right)$에서 P(3, 1)

선분 BC의 중점 Q의 좌표는

$Q\left(\frac{5+(-3)}{2}, \frac{-2}{2}\right)$에서 Q(1, −1)

두 점 P(3, 1), Q(1, −1)을 지나는 직선의 기울기는

아끄하ㅓ이ㄴ내ㅅㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 142 22. 9. 14. 오후 8:20

$\frac{1-(-1)}{3-1}=1$

이므로 기울기가 1이고 한 점 P(3, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=x-3$에서 $y=x-2$이고

이 직선의 x절편은 $x-2=0$에서 $x=2$이다.

675 ····· 답 ③

직선 $x+\frac{y}{2}=1$이 x축과 만나는 점은 A(1, 0),

직선 $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$이 y축과 만나는 점은 B(0, -4)이므로

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{1}+\frac{y}{-4}=1$, 즉 $4x-y-4=0$이다.

TIP

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

x절편이 a이고, y절편이 b인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이다.

[증명]

두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{0-b}{a-0}x+b=-\frac{b}{a}x+b$에서 $\frac{b}{a}x+y=b$

양변을 각각 b로 나누면 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이다.

676 ····· 답 ①

$2x+3y-4=0$, $3x-2y+7=0$을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=2$이므로

두 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-2y+7=0$의 교점의 좌표는

$(-1, 2)$이다.

따라서 두 점 $(-1, 2)$, $(3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{0-2}{3-(-1)}(x-3)$, $y=-\frac{1}{2}(x-3)$

$\therefore x+2y-3=0$

다른 풀이

두 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-2y+7=0$의 교점을 지나는

직선의 방정식을

$2x+3y-4+k(3x-2y+7)=0$ $(k\neq 0)$이라 하자. ····· ㉠

이 직선이 점 $(3, 0)$을 지나므로

$6-4+k(9+7)=0$, $2+16k=0$ $\therefore k=-\frac{1}{8}$

$k=-\frac{1}{8}$을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$2x+3y-4-\frac{1}{8}(3x-2y+7)=0$

$13x+26y-39=0$

$\therefore x+2y-3=0$

TIP

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는

직선의 방정식은 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)

로 나타낼 수 있다.

이때, $k=0$이면 직선 $ax+by+c=0$을 나타내고, 위의 직선의

방정식으로 두 직선의 교점을 지나는 직선 중 직선

$a'x+b'y+c'=0$만 나타낼 수 없다.

III

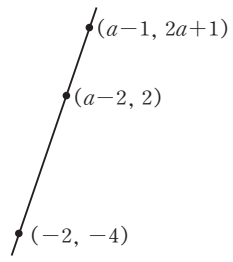
677 ····· 답 ②

세 점 $(-2, -4)$, $(a-2, 2)$, $(a-1, 2a+1)$이 한 직선 위에

있으므로 두 점 $(-2, -4)$, $(a-2, 2)$를 지나는 직선의 기울기와

두 점 $(a-2, 2)$, $(a-1, 2a+1)$을 지나는 직선의 기울기는 서로

같다.



즉, $\frac{2-(-4)}{a-2-(-2)}=\frac{2a+1-2}{a-1-(a-2)}$에서 $\frac{6}{a}=2a-1$

양변에 각각 a를 곱하면

$6=a(2a-1)$, $2a^2-a-6=0$

$(2a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

다른 풀이

두 점 $(-2, -4)$, $(a-2, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+4=\frac{2-(-4)}{a-2-(-2)}\{x-(-2)\}$

$\therefore y+4=\frac{6}{a}(x+2)$

이때, 이 직선이 점 $(a-1, 2a+1)$을 지나므로

$2a+5=\frac{6}{a}(a+1)$

양변에 각각 a를 곱하면

$2a^2+5a=6a+6$, $2a^2-a-6=0$

$(2a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

678 ····· 답 5

$(k+1)x+(2k+1)y+(k+2)=0$에서

$(x+y+2)+(x+2y+1)k=0$

이 직선이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표는 k에

대한 항등식을 만족시키므로

$x+y+2=0$, $x+2y+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=1$

아끄하이노내시ㅣㄴㄱㅗ즈재이오시ㅣ(사ㅇ)_하내시ㅓㄹ.indb 143 22. 9. 14. 오후 8:20

즉, 점 P의 좌표는 $(-3, 1)$이다.

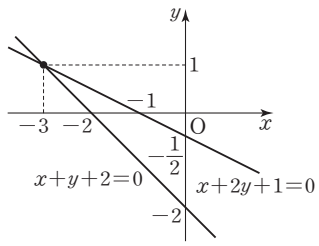
이때 점 P가 삼각형 OAB의 무게중심 $\left(\frac{a-4}{3}, \frac{4+b}{3}\right)$와 일치하므로

$\frac{a-4}{3}=-3$에서 $a=-5$, $\frac{4+b}{3}=1$에서 $b=-1$이다.

$\therefore ab=(-5)\times(-1)=5$

참고

직선 $(x+y+2)+(x+2y+1)k=0$은 두 직선 $x+y+2=0$, $x+2y+1=0$의 교점 $(-3, 1)$을 지나는 직선이다.

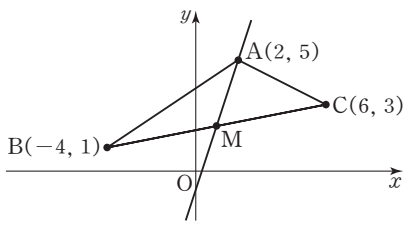


679

답 ④

점 A를 지나는 직선 중 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 선분 BC의 중점을 지나야 한다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$이다.



따라서 직선 AM의 방정식은

$y-2=\frac{5-2}{2-1}(x-1)$, $y=3x-1$

$\therefore 3x-y-1=0$

680

답 ⑤

직선 $2x-y+7=0$, 즉 $y=2x+7$에 평행한 직선은 이 직선과 기울기가 같으므로 기울기가 2이다.

점 $(-1, 3)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y-3=2\{x-(-1)\}$

$\therefore y=2x+5$

다른 풀이

직선 $2x-y+7=0$에 평행한 직선의 방정식을 $2x-y+k=0$ (k는 실수, $k\neq 7$)이라 하면 …… TIP

이 직선이 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$-2-3+k=0$ $\therefore k=5$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$2x-y+5=0$에서 $y=2x+5$이다.

TIP

직선 $ax+by+c=0$에 평행한 직선의 방정식을 $ax+by+k=0$ (k는 실수, $k\neq c$)로 놓을 수 있다.

[증명]

직선 $ax+by+c=0$에 평행한 직선의 방정식을 $a'x+b'y+c'=0$이라 하면 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$이다.

이때, $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=m$ ($m\neq 0$)이라 하면

$a'=am$, $b'=bm$, $c'\neq cm$이므로

직선 $a'x+b'y+c'=0$은

$amx+bmy+km=0$ (k는 실수, $k\neq c$)에서

$ax+by+k=0$이다.

681

답 ①

직선 $3x-y+2=0$, 즉 $y=3x+2$와 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다. …… TIP 1

점 $(2, 1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{3}(x-2)$ $\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

따라서 구하는 직선의 y절편은 $\frac{5}{3}$이다.

다른 풀이

직선 $3x-y+2=0$과 수직인 직선의 방정식을 $x+3y+k=0$ (k는 실수)이라 하면 …… TIP 2

점 $(2, 1)$을 지나므로

$2+3+k=0$ $\therefore k=-5$

따라서 직선 $x+3y-5=0$에서 구하는 직선의 y절편은 $\frac{5}{3}$이다.

TIP 1

서로 수직인 두 직선의 기울기를 각각 m, m'이라 하면

$mm'=-1$이므로 $m'=-\frac{1}{m}$이다.

TIP 2

직선 $ax+by+c=0$과 수직인 직선의 방정식을 $bx-ay+k=0$ (k는 실수)으로 놓을 수 있다.

[증명]

직선 $ax+by+c=0$과 수직인 직선의 방정식을 $a'x+b'y+c'=0$이라 하면 $aa'+bb'=0$이다.

$aa'=-bb'$에서 $\frac{a'}{b}=\frac{-b'}{a}=m$ ($m\neq 0$)이라 하면

$a'=bm$, $b'=-am$이므로 직선 $a'x+b'y+c'=0$은

$bmx-amy+c'=0$에서 $bx-ay+\frac{c'}{m}=0$이다.

$\frac{c'}{m}$은 실수이므로 k라 하면 $bx-ay+k=0$이다.

아뜨헤어나새시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해새서ㄹ.indb 144 22. 9. 14. 오후 8:20

682 ····· 답 ②

세 직선 중 두 직선이 서로 수직일 때 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 된다.
두 직선 $2x-y=0$과 $x+y-1=0$은 서로 수직이 아니므로
직선 $ax-y+3=0$이 직선 $2x-y=0$ 또는 직선 $x+y-1=0$과 수직일 때, 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 된다.
(i) 직선 $ax-y+3=0$이 직선 $2x-y=0$과 수직일 때
두 직선의 기울기가 각각 a, 2이므로
$2a=-1$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$
(ii) 직선 $ax-y+3=0$이 직선 $x+y-1=0$과 수직일 때
두 직선의 기울기가 각각 a, -1이므로
$-a=-1$ $\therefore a=1$
(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은
$-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

683 ····· 답 ③

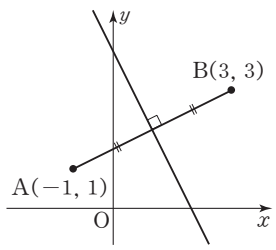
직선 $y=ax+2$에서 $ax-y+2=0$ ····· ㉠
직선 ㉠이 직선 $bx-3y-3=0$과 수직이므로
$a\times b+(-1)\times(-3)=0$ $\therefore ab=-3$
또한 직선 ㉠이 직선 $(b-2)x+y-4=0$과 평행하므로
$\frac{a}{b-2}=\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{-4}$에서 $a=-(b-2)$, 즉 $a+b=2$
$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\times(-3)=10$

다른 풀이

직선 $bx-3y-3=0$은 $y=\frac{b}{3}x-1$이므로 기울기가 $\frac{b}{3}$이다.
따라서 직선 $y=ax+2$가 이 직선과 수직일 때,
$a\times\frac{b}{3}=-1$에서 $ab=-3$이다.
직선 $(b-2)x+y-4=0$은 $y=(2-b)x+4$이므로
기울기가 $2-b$이다.
따라서 직선 $y=ax+2$가 이 직선과 평행할 때,
$a=2-b$에서 $a+b=2$이다.
$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\times(-3)=10$

684 ····· 답 풀이 참조

선분 AB의 수직이등분선은 직선 AB와 수직이고, 선분 AB의 중점을 지나므로 다음과 같다.

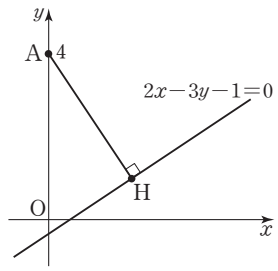


직선 AB의 기울기는 $\frac{3-1}{3-(-1)}=\frac{1}{2}$이므로
이 직선과 수직인 직선의 기울기는 -2이다.
선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$이므로
선분 AB의 수직이등분선의 방정식은
$y-2=-2(x-1)$에서 $y=-2x+4$이다.

채점 요소	배점
직선 AB와 수직인 직선의 기울기 구하기	30 %
선분 AB의 중점의 좌표 구하기	30 %
수직이등분선의 방정식 구하기	40 %

685 ····· 답 ①

점 A$(0, 4)$에서 직선 $2x-3y-1=0$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



점 H는 점 A를 지나고 직선 $2x-3y-1=0$과 수직인 직선과 직선 $2x-3y-1=0$의 교점이다.
직선 $2x-3y-1=0$의 기울기가 $\frac{2}{3}$이므로
이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이다.
따라서 점 A$(0, 4)$를 지나고 기울기가 $-\frac{3}{2}$인 직선의 방정식은
$y=-\frac{3}{2}x+4$에서 $3x+2y-8=0$이다.
이때, 점 H(a, b)는 두 직선 $2x-3y-1=0$, $3x+2y-8=0$의 교점이므로
$2a-3b-1=0$, $3a+2b-8=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=1$
$\therefore a+b=3$

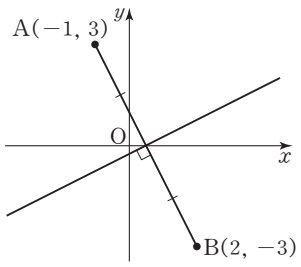
다른 풀이

점 A를 지나고 직선 $2x-3y-1=0$과 수직인 직선의 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.
직선 $2x-3y-1=0$과 수직인 직선의 방정식을
$3x+2y+k=0$ (k는 실수)이라 하면
이 직선이 점 A$(0, 4)$를 지나므로
$k+8=0$ $\therefore k=-8$
$\therefore 3x+2y-8=0$

아쿠하이스쿨시니그고자이시(사이)_해설지르.indb 145 22. 9. 14. 오후 8:20

686 ····· 답 ③

두 점 A(−1, 3), B(2, −3)으로부터 떨어진 거리가 같은 점의 자취는 선분 AB의 중점을 지나고 직선 AB와 수직인 직선이다.



두 점 A(−1, 3), B(2, −3)의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{3+(-3)}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$이고,

직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-3}{2-(-1)}=-2$이므로

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

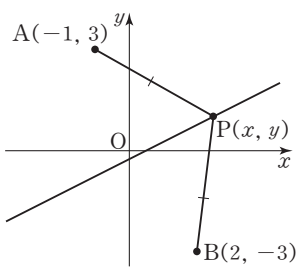
따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

$\therefore 2x-4y-1=0$

다른 풀이

두 점 A(−1, 3), B(2, −3)으로부터 떨어진 거리가 같은 점을 P(x, y)라 하자.



$\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y+3)^2$

$2x-6y+10=-4x+6y+13$

$6x-12y-3=0$

$\therefore 2x-4y-1=0$

687 ····· 답 ④

점 (−1, −2)와 직선 $3x-4y-a+2=0$ 사이의 거리가 2이므로

$\frac{|3\times(-1)-4\times(-2)-a+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

$\frac{|-a+7|}{5}=2$, $|-a+7|=10$에서

$-a+7=\pm 10$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=17$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $-3+17=14$이다.

688 ····· 답 ②

$x+ky-2(k-1)=0$에서 $x+2+(y-2)k=0$ ····· ㉠

이 직선이 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표는 k에 대한 항등식 ㉠을 만족시키므로 $x+2=0$, $y-2=0$에서

$x=-2$, $y=2$, 즉 P(−2, 2)이다.

점 P(−2, 2)와 직선 $x-3y+a=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2-3\times 2+a|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10}$이므로

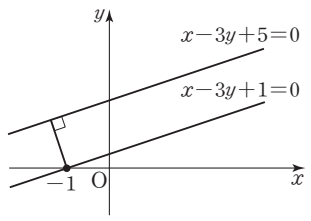
$|a-8|=10$에서 $a-8=\pm 10$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=18$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $(-2)\times 18=-36$이다.

689 ····· 답 ④

직선 $x-3y+1=0$ 위의 임의의 점과 직선 $x-3y+5=0$ 사이의 거리를 구하면 된다. ····· TIP



직선 $x-3y+1=0$이 점 (−1, 0)을 지나므로

점 (−1, 0)과 직선 $x-3y+5=0$ 사이의 거리를 구하면

$\frac{|-1-3\times 0+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

TIP

평행한 두 직선 사이의 거리는 두 직선 중 한 직선 위의 임의의 점과 다른 직선 사이의 거리와 같다.
그러므로 한 직선 위의 점 중 구하기 쉬운 점을 적당히 하나 정해서 그 점과 다른 직선 사이의 거리를 구하여 평행한 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

690 ····· 답 ④

두 점 (−3, −2), (1, 6)을 지나는 직선의 방정식은

$y-6=\frac{6-(-2)}{1-(-3)}(x-1)$에서 $2x-y+4=0$이다.

직선 $2x-y+4=0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{OP}$의 최솟값은 점 O(0, 0)과 직선 $2x-y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

구하는 값은

$\frac{|2\times 0-0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

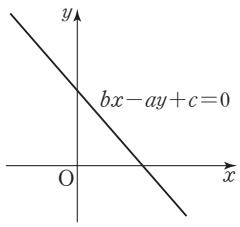
아끄흐ㅇㄴ내ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ내ㅅㅓㄹ.indb 146 22. 9. 14. 오후 8:20

691 ····· 답 $3x-4y+13=0$, $3x-4y-17=0$

직선 $3x-4y+1=0$에 평행한 직선의 방정식을
$3x-4y+a=0$ (a는 실수, $a\neq1$)이라 하자.
점 (2, 1)과 직선 $3x-4y+a=0$ 사이의 거리가 3이므로
$\frac{|3\times2-4\times1+a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$
$\frac{|a+2|}{5}=3$에서 $|a+2|=15$, $a+2=\pm15$
$\therefore a=13$ 또는 $a=-17$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$3x-4y+13=0$, $3x-4y-17=0$이다.

692 ····· 답 ③

직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프에서
이 직선의 기울기와 y절편이 모두 양수이므로
$-\frac{a}{b}>0$에서 $\frac{a}{b}<0$ ····· ㉠
$-\frac{c}{b}>0$에서 $\frac{c}{b}<0$ ····· ㉡
㉡에서 $\frac{b}{c}<0$이므로 $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}>0$ ····· ㉢
이때, 직선 $bx-ay+c=0$, 즉 $y=\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$에서
$\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$이므로 ($\because$ ㉠, ㉢)
직선 $bx-ay+c=0$의 개형은 다음과 같다.



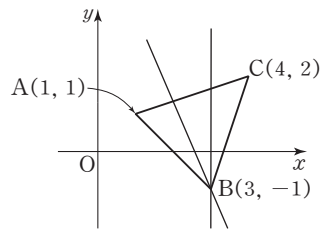
따라서 직선 $bx-ay+c=0$이 지나지 않는 사분면은
제3사분면이다.

693 ····· 답 7

두 점 A(−14, −12), B(10, 4)를 지나는 직선의 방정식은
$y-4=\frac{4-(-12)}{10-(-14)}(x-10)$, 즉 $y=\frac{2}{3}(x-10)+4$
선분 AB 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수이려면
$-14<x<10$이고 $x-10=3k$ (k는 정수)를 만족시켜야 한다.
따라서 이를 만족시키는 x좌표는 −11, −8, −5, …, 7에서
7개이므로 구하는 점의 개수는 7이다.

694 ····· 답 $\frac{31}{10}$

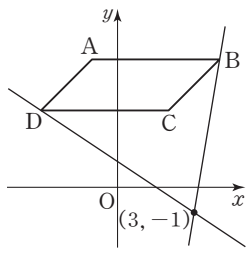
$(k+1)x+(2-k)y-4k-1=0$에서
$(x+2y-1)+(x-y-4)k=0$ ····· ㉠
두 식 $x+2y-1=0$, $x-y-4=0$을 연립하여 풀면
$x=3$, $y=-1$이므로 직선이 k의 값에 관계없이 점 B(3, −1)을
지난다.
삼각형 ABC가 직선에 의하여 나누어진 두 개의 도형의 넓이의
비가 1 : 2가 되려면, 다음 그림과 같이 직선이 선분 AC를 1 : 2
또는 2 : 1로 내분하는 점을 지나야 한다.



(i) 직선이 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점을 지날 때
선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times4+2\times1}{1+2}, \frac{1\times2+2\times1}{1+2}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{4}{3}\right)$
이를 ㉠에 대입하면
$\left(2+\frac{8}{3}-1\right)+\left(2-\frac{4}{3}-4\right)k=0$, $-\frac{10}{3}k=-\frac{11}{3}$
$\therefore k=\frac{11}{10}$
(ii) 직선이 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점을 지날 때
선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{2\times4+1\times1}{2+1}, \frac{2\times2+1\times1}{2+1}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{5}{3}\right)$
이를 ㉠ 대입하면
$\left(3+\frac{10}{3}-1\right)+\left(3-\frac{5}{3}-4\right)k=0$, $-\frac{8}{3}k=-\frac{16}{3}$
$\therefore k=2$
(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은
$\frac{11}{10}+2=\frac{31}{10}$

695 ····· 답 −4

직선 $mx-y-3m-1=0$, 즉 $y=m(x-3)-1$은 m의 값에 관계없
이 항상 점 (3, −1)을 지나므로, 사각형 ABCD와 만나도록 하는
기울기 m이 가장 클 때는 직선이 점 B를 지날 때이고,
가장 작을 때는 직선이 점 D를 지날 때이다.



이끄하이스내신니그노즈재이스1(상이)_해설지르.indb 147 22. 9. 14. 오후 8:20

(i) 직선이 점 B를 지날 때
두 점 $(3, -1)$, $(4, 5)$를 지나는 직선의 기울기는
$\frac{5-(-1)}{4-3}=6$

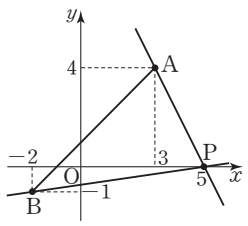
(ii) 직선이 점 D를 지날 때
두 점 $(3, -1)$, $(-3, 3)$을 지나는 직선의 기울기는
$\frac{3-(-1)}{-3-3}=-\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는 $-\frac{2}{3}\le m\le 6$이므로

실수 m의 최댓값과 최솟값의 곱은 $6\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-4$이다.

696 ····· 답 ⑤

직선 l : $kx+3y-5k=0$이라 하자.
$k(x-5)+3y=0$에서 직선 l은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(5, 0)$을 지난다.



P$(5, 0)$이라 하면 직선 l이 선분 AB와 만나기 위해서는 직선 l의 기울기가 직선 AP의 기울기보다 크거나 같고, 직선 BP의 기울기보다 작거나 같아야 한다.

직선 AP의 기울기는 $\frac{0-4}{5-3}=-2$,

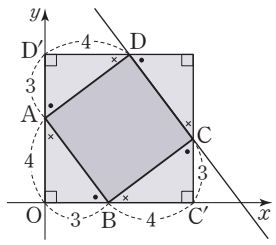
직선 BP의 기울기는 $\frac{0-(-1)}{5-(-2)}=\frac{1}{7}$,

직선 l의 기울기는 $-\frac{k}{3}$이므로

$-2\le-\frac{k}{3}\le\frac{1}{7}$ $\quad\therefore\ -\frac{3}{7}\le k\le 6$

697 ····· 답 (1) 41 (2) −7

(1) 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 5이므로 $\overline{AB}=5$이고,
$\overline{OA}=4$이므로 직각삼각형 AOB에서 $\overline{OB}=3$, 즉 B$(3, 0)$이다.
점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 C′,
점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 D′이라 하면
세 삼각형 AOB, BC′C, DD′A는 서로 합동이다.



따라서 두 점 C, D의 좌표는 각각 $(7, 3)$, $(4, 7)$이다.
구하는 직선 CD의 방정식은

$y-3=\frac{7-3}{4-7}(x-7)$, 즉 $4x+3y-37=0$이므로

$a=4$, $b=-37$

$\therefore\ a-b=41$

(2) 직선이 정사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면
사각형 ABCD의 대각선의 교점을 지나야 한다. ····· TIP
정사각형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로
선분 AC의 중점이 대각선의 교점과 같다.

선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(0+\frac{7}{2}, \frac{4+3}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

그러므로 두 점 $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{7}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{\frac{7}{2}-1}(x-1)$, $y=2(x-1)-\frac{3}{2}$

즉, $y=2x-\frac{7}{2}$이므로 $m=2$, $n=-\frac{7}{2}$

$\therefore\ mn=2\times\left(-\frac{7}{2}\right)=-7$

다른 풀이

(1) 두 점 C, D 중 한 점의 좌표만 구해서 직선 CD의 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

직선 AB의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로 직선 CD의 기울기도 $-\frac{4}{3}$이고,

점 C$(7, 3)$을 지나는 직선 CD의 방정식은

$y-3=-\frac{4}{3}(x-7)$, $4x+3y-37=0$이다.

$a=4$, $b=-37$

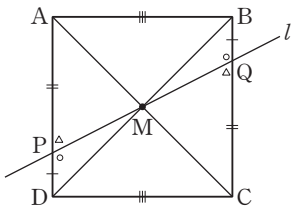
$\therefore\ a-b=41$

TIP

직선 l이 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 지나면
직선 l은 정사각형 ABCD의 넓이를 이등분한다.

[증명]

다음 그림과 같이 정사각형 ABCD의 대각선의 교점을 M이라 할 때, 이 점을 지나는 직선 l이 정사각형 ABCD와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

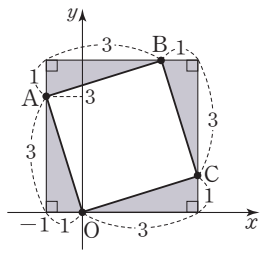


$\angle PMD=\angle QMB$, $\angle MDP=\angle MBQ$, $\overline{DM}=\overline{BM}$에서 두 삼각형 DMP, BMQ는 합동이다.(ASA합동)
따라서 두 사각형 ABQP, CQPD의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이와 같으므로 직선 l은 정사각형 ABCD의 넓이를 이등분한다.
같은 방식으로 평행사변형, 마름모, 직사각형에서도 이 내용이 성립한다.

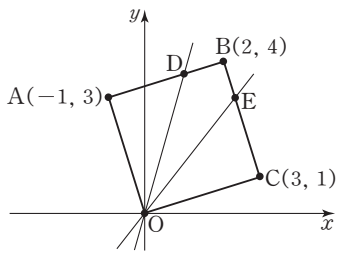
오투해의나침반_나침반해설(상)_해설서.indb 148 22. 9. 14. 오후 8:20

698 ····· 답 $y=\frac{11}{3}x$, $y=\frac{9}{7}x$

A$(-1, 3)$이므로 점 C가 제1사분면 위에 있도록 정사각형 OABC를 그리면 다음과 같다.



이때, 두 점 A, C를 각각 지나고 x축에 수직인 직선 및 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선을 그렸을 때, 세 직선과 x축으로 둘러싸인 정사각형과 정사각형 OABC에 의해 만들어지는 색칠한 네 삼각형이 서로 합동이므로 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(2, 4)$, $(3, 1)$이다.



점 O를 지나면서 정사각형 OABC의 넓이를 3등분하는 두 직선이 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.
$\overline{OA}=\sqrt{10}$이므로 정사각형 OABC의 넓이는 10이다.
$\overline{AD}=k$라 하면 삼각형 OAD의 넓이는 정사각형 OABC의 넓이의 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times k=\frac{1}{3}\times 10$ $\therefore k=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

그러므로 점 D는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이고,
마찬가지로 점 E는 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이다.

점 D의 좌표는 $\left(\frac{2\times 2+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times 4+1\times 3}{2+1}\right)$ $\therefore$ D$\left(1, \frac{11}{3}\right)$

점 E의 좌표는 $\left(\frac{1\times 3+2\times 2}{1+2}, \frac{1\times 1+2\times 4}{1+2}\right)$ $\therefore$ E$\left(\frac{7}{3}, 3\right)$

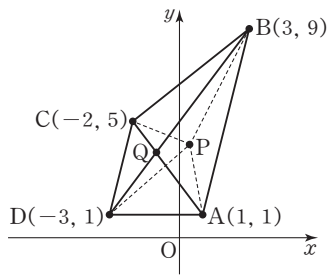
직선 OD의 방정식은 $y=\frac{11}{3}x$,

직선 OE의 방정식은 $y=\frac{9}{7}x$이다.

따라서 구하는 두 직선의 방정식은 $y=\frac{11}{3}x$, $y=\frac{9}{7}x$이다.

699 ····· 답 ⑤

선분 AC와 선분 BD의 교점을 Q라 하자.
$\overline{PA}+\overline{PC}\geq\overline{AC}$, $\overline{PB}+\overline{PD}\geq\overline{BD}$이고,
$\overline{AC}=\overline{QA}+\overline{QC}$, $\overline{BD}=\overline{QB}+\overline{QD}$이므로
$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}\geq\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}$이다.



따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$는 점 P가 점 Q에 위치할 때, 최솟값을 갖는다.
직선 AC의 방정식은

$y-1=\frac{5-1}{-2-1}(x-1)$ $\therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$ ····· ㉠

직선 BD의 방정식은

$y-1=\frac{9-1}{3-(-3)}\{x-(-3)\}$ $\therefore y=\frac{4}{3}x+5$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=\frac{11}{3}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(-1, \frac{11}{3}\right)$이다.

700 ····· 답 ④

$l:(k-1)x+(2k+1)y-6k=0$ ····· ㉠

ㄱ. $k=1$일 때, ㉠에서 $3y-6=0$, 즉 $y=2$이다.
따라서 직선 l은 x축에 평행하다. (참)

ㄴ. $k=-1$일 때, ㉠에서 $-2x-y+6=0$, 즉 $2x+y-6=0$이다.
직선 l과 직선 $2x+y+3=0$이 평행하므로 만나지 않는다. (참)

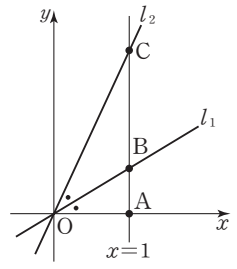
ㄷ. ㉠에서 $-x+y+(x+2y-6)k=0$ ····· ㉡
$-x+y=0$, $x+2y-6=0$에서 두 식을 연립하여 풀면
$x=2$, $y=2$
이므로 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표는 $(2, 2)$이다.
따라서 직선 l은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 2)$를 지나므로 제1사분면을 반드시 지난다. (참)

ㄹ. ㉡에서 직선 $x+2y-6=0$을 만드는 실수 k는 존재하지 않는다.
따라서 직선 l은 두 직선 $x+2y-6=0$, $x-y=0$의 교점을 지나는 직선 중 $x+2y-6=0$을 제외한 직선을 나타낸다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 3개이다.

701 ····· 답 $2\sqrt{2}$

직선 l_1의 기울기를 a $(a>0)$라 하면 조건 (가)에 의하여 직선 l_2의 기울기는 $4a$이다.
이때, 직선 $x=1$이 x축 및 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.

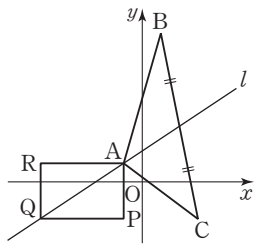


아쿠아이내시니그고3재수시(사이)_해설지.indb 149 22. 9. 14. 오후 8:20

$\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=4a$이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$이다.
조건 (나)에 의하여 각 AOC의 이등분선이 직선 l_1이므로
$\overline{OA}:\overline{OC}=\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$
$\therefore \overline{OC}=3\ (\because \overline{OA}=1)$
따라서 직각삼각형 OAC에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{OA}^2+\overline{AC}^2=\overline{OC}^2$이므로 $1+(4a)^2=9$
$a^2=\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because a>0)$
$\therefore$ (직선 l_2의 기울기)$=4a=2\sqrt{2}$

702 ····· 답 9

점 A를 지나는 직선 l이 직사각형 APQR와 삼각형 ABC의 넓이를 각각 이등분하려면 다음 그림과 같이 직사각형의 대각선의 중점과 삼각형의 변 BC의 중점을 모두 지나야 한다.



이때, 직선 l이 직사각형의 한 꼭짓점 A를 지나므로 점 Q를 지나면 두 대각선의 교점을 지나게 된다.
직사각형의 가로와 세로의 길이의 비가 3 : 2이므로 직선 l의 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 점 A$(-1, 1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은
$y-1=\frac{2}{3}\{x-(-1)\}$, 즉 $y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$
선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$이고
직선 l이 이 점을 지나므로 대입하면
$\frac{b-2}{2}=\frac{2}{3}\times\frac{a+3}{2}+\frac{5}{3}$, $3(b-2)=2(a+3)+10$
$\therefore 2a-3b+22=0$
위의 식을 만족시키는 두 자연수 a, b의 최솟값은 $a=1$, $b=8$이다.
따라서 구하는 $a+b$의 최솟값은 9이다.

703 ····· 답 $\frac{5}{2}$

네 점 A$(0, 2)$, B$(1, 0)$, C$(3, 1)$, D$(2, 3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD는 정사각형이다.
직선 AB의 방정식은 $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$에서 $y=-2x+2$이므로
점 P의 좌표를 $(a, -2a+2)$라 하자.
선분 DP를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{3a+1\times2}{3+1}, \frac{3(-2a+2)+1\times3}{3+1}\right)$ $\therefore$ Q$\left(\frac{3a+2}{4}, \frac{-6a+9}{4}\right)$
이때, 직선 AC의 방정식은 $y=\frac{1-2}{3-0}x+2$에서 $y=-\frac{1}{3}x+2$이고,
점 Q가 직선 AC 위의 점이므로
$\frac{-6a+9}{4}=-\frac{1}{3}\times\frac{3a+2}{4}+2=\frac{-3a+22}{12}$
$-3a+22=-18a+27$
$15a=5$ $\therefore a=\frac{1}{3}$
따라서 Q$\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$이므로 $m=\frac{3}{4}$, $n=\frac{7}{4}$
$\therefore m+n=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

다른 풀이

네 점 A$(0, 2)$, B$(1, 0)$, C$(3, 1)$, D$(2, 3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD는 정사각형이다.
대각선 AC는 각 A를 이등분하므로 삼각형 APD에서
$\overline{AP}:\overline{AD}=\overline{PQ}:\overline{QD}$
이때, 점 Q가 선분 DP를 3 : 1로 내분하므로
$\overline{AP}:\overline{AD}=\overline{PQ}:\overline{QD}=1:3$이다.
$\overline{AD}=\overline{AB}$에서 $\overline{AP}:\overline{AB}=1:3$이므로 점 P는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이다.
즉, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$이다.
점 Q는 선분 DP를 3 : 1로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는
$\left(\frac{1+2}{4}, \frac{4+3}{4}\right)$ $\therefore$ Q$\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$
따라서 $m=\frac{3}{4}$, $n=\frac{7}{4}$이므로 $m+n=\frac{5}{2}$

704 ····· 답 ④

점 (a, b)가 직선 $3x+4y-2=0$ 위를 움직이므로
$3a+4b-2=0$에서 $b=-\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}$이다.
이때, 점 $(a+b, a-b)$는 점 $\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}, \frac{7}{4}a-\frac{1}{2}\right)$이므로
$\begin{cases}\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}=X & \cdots\cdots ㉠\\ \frac{7}{4}a-\frac{1}{2}=Y & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
라 하자.
㉠에서 $a=4X-2$, ㉡에서 $a=\frac{4}{7}Y+\frac{2}{7}$이므로
$4X-2=\frac{4}{7}Y+\frac{2}{7}$ $\therefore 7X-Y-4=0$
따라서 구하는 자취의 방정식은 $7x-y-4=0$이다.

다른 풀이 1

점 (a, b)가 직선 $3x+4y-2=0$ 위를 움직이므로
$3a+4b-2=0$ ····· ㉠
점 $(a+b, a-b)$에서 $a+b=X$, $a-b=Y$라 하면
$a=\frac{X+Y}{2}$, $b=\frac{X-Y}{2}$이므로 이를 ㉠에 대입하면
$\frac{3(X+Y)}{2}+\frac{4(X-Y)}{2}-2=0$

아쿠하우스내신수학상(사이)_해설지르.indb 150 22. 9. 14. 오후 8:20

$3(X+Y)+4(X-Y)-4=0$
$\therefore 7X-Y-4=0$
따라서 구하는 자취의 방정식은 $7x-y-4=0$이다.

다른 풀이 2

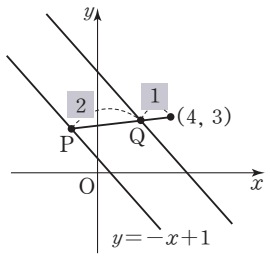
점 (a, b)가 직선 $3x+4y-2=0$ 위의 임의의 점이므로
이 직선 위의 두 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$에 대하여
점 $(a+b, a-b)$의 자취는
두 점 $\left(0+\frac{1}{2}, 0-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{3}+0, \frac{2}{3}-0\right)$, 즉
두 점 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$를 지난다.
따라서 구하는 자취의 방정식은

$$y+\frac{1}{2}=\frac{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right),\ y+\frac{1}{2}=7\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore 7x-y-4=0$

705 ····· 답 ④

직선 AB의 방정식은 $y+1=-(x-2)$에서 $y=-x+1$
점 P가 직선 AB 위의 점이므로 $P(a, -a+1)$이라 하고, 점 Q의 좌표를 (X, Y)라 하면 점 Q가 두 점 $(a, -a+1)$, $(4, 3)$을 이은 선분을 2 : 1로 내분한다.



즉, 점 (X, Y)는 $\left(\frac{8+a}{3}, \frac{6+(-a+1)}{3}\right)$이므로 $\left(\frac{8+a}{3}, \frac{-a+7}{3}\right)$

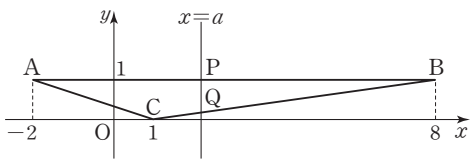
$X=\frac{8+a}{3}$에서 $a=3X-8$이고,

$Y=\frac{-a+7}{3}$에서 $a=-3Y+7$이므로

$3X-8=-3Y+7$
$\therefore X+Y-5=0$
따라서 구하는 자취의 방정식은 $x+y-5=0$이다.

706 ····· 답 (1) $x=8-\sqrt{35}$ (2) $y=x-2+\sqrt{10}$

(1) 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



삼각형 ABC의 밑변을 AB라 하면
$\overline{AB}=8-(-2)=10$이고, 높이는 1이므로
삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times10\times1=5$이다.
삼각형 ABC의 넓이를 이등분하고, x축에 수직인 직선의 방정식을 $x=a$ (a는 실수)라 하자.
$1<a<8$이므로 ····· TIP 1
직선 $x=a$가 두 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q라 하면
삼각형 BPQ의 넓이가 $\frac{5}{2}$이어야 한다.
직선 BC의 방정식은 $y=\frac{1-0}{8-1}(x-1)$에서 $y=\frac{1}{7}(x-1)$이므로
점 Q의 좌표는 $\left(a, \frac{1}{7}(a-1)\right)$이고, 점 P의 좌표는 $(a, 1)$이다.

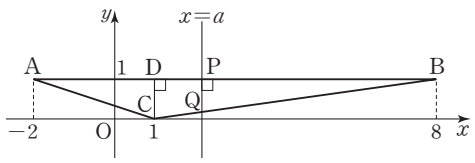
$\overline{PQ}=1-\frac{1}{7}(a-1)=\frac{8-a}{7}$이고,
$\overline{BP}=8-a$이므로

$$(\text{삼각형 BPQ의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{PQ}$$
$$=\frac{1}{2}\times(8-a)\times\frac{8-a}{7}$$
$$=\frac{(8-a)^2}{14}$$

즉, $\frac{(8-a)^2}{14}=\frac{5}{2}$이므로
$(a-8)^2=35$
$\therefore a=8-\sqrt{35}$ ($\because 1<a<8$)
따라서 구하는 직선의 방정식은 $x=8-\sqrt{35}$이다.

다른 풀이

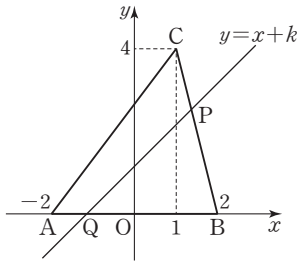
(1) 직선 PQ의 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.



직선 $x=1$이 선분 AB와 만나는 점을 D라 하면 두 삼각형 BPQ, BDC는 닮음이다.
삼각형 BDC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times7\times1=\frac{7}{2}$이므로
두 삼각형 BPQ, BDC의 넓이의 비는 $\frac{5}{2}:\frac{7}{2}=5:7$
즉, 두 삼각형 BPQ, BDC의 닮음비는 $\sqrt{5}:\sqrt{7}$이다.
$\overline{BP}:\overline{BD}=\sqrt{5}:\sqrt{7}$에서
$\overline{BP}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\overline{BD}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\times7=\sqrt{35}$
따라서 $a=8-\sqrt{35}$이므로
구하는 직선의 방정식은 $x=8-\sqrt{35}$이다.

(2) 삼각형 ABC의 넓이는 밑변을 변 AB로 두면 높이는 점 C의 y좌표와 같으므로
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times4=8$ ····· ㉠
구하는 기울기가 1인 직선 $y=x+k$ (k는 실수)라 하자.
이때, $-2<k<2$이어야 하므로 ····· ㉡ ····· TIP 2

아뿌리오내신ㅣ노그조재오시ㅣ(사ㅇ)_해설지르.indb 151 22. 9. 14. 오후 8:20



직선 BC의 방정식은 $y=\frac{0-4}{2-1}(x-2)$, $y=-4x+8$이고

점 P의 좌표를 구하면 $-4x+8=x+k$, $5x=8-k$에서

$x=\frac{8-k}{5}$이고 $y=\frac{8+4k}{5}$, 즉 $\mathrm{P}\left(\frac{8-k}{5}, \frac{8+4k}{5}\right)$

직선 $y=x+k$가 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 점 Q의 좌표를 구하면 $x+k=0$에서 $x=-k$, 즉 $\mathrm{Q}(-k, 0)$

그러므로 삼각형 PQB의 넓이는 밑변을 변 QB로 두면 높이가 점 P의 y좌표와 같다.

(삼각형 PQB의 넓이)$=\frac{1}{2}$(삼각형 ABC의 넓이)$=4$ ($\because$ ㉠)이므로

$\frac{1}{2}\times\{2-(-k)\}\times\frac{8+4k}{5}=4$, $(k+2)^2=10$, $k+2=\pm\sqrt{10}$

$\therefore k=-2+\sqrt{10}$ ($\because -2<k<2$)

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x-2+\sqrt{10}$이다.

TIP 1

직선 $x=1$이 선분 AB와 만나는 점을 D라 할 때,
두 삼각형 ADC, BDC의 넓이의 비는 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:7$이다.
따라서 직선 $x=a$가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 직선 $x=1$보다 점 B에 더 가까워야 하므로 $1<a<8$이어야 한다.

TIP 2

직선 $y=x+k$가 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$을 지날 때, 즉 $k=2$일 때
직선 $y=x+2$와 직선 BC가 만나는 점을 $\mathrm{P}(a, a+2)$라 하면 $a>1$이고, 이때 y좌표는 $a+2>3$이다.
즉, 삼각형 PAB는 밑변의 길이가 4이고 높이가 3보다 크므로 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$배보다 크다.
그러므로 직선 $y=x+k$는 직선 $y=x+2$보다 아래에 위치하면서 삼각형 ABC의 내부를 지나야 하므로 $-2<k<2$이다.

707

답 ④

직선 $(k^2+2k-3)x+(k+3)y=2$에서

$(k+3)(k-1)x+(k+3)y=2$ …… ㉠

직선 ㉠과 직선 $(k-4)x+(k-1)y=-1$이 서로 수직이 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $k+3\neq0$, $k-1\neq0$일 때

두 직선의 기울기는 각각

$\frac{(k+3)(k-1)}{-(k+3)}=-(k-1)$, $\frac{k-4}{-(k-1)}$이므로

두 직선이 서로 수직이려면

$-(k-1)\times\frac{k-4}{-(k-1)}=-1$에서

$k-4=-1$ $\therefore k=3$

(ii) $k+3=0$ 또는 $k-1=0$일 때

$k=-3$인 경우, $(k+3)(k-1)x+(k+3)y=2$는 직선의 방정식이 아니다.

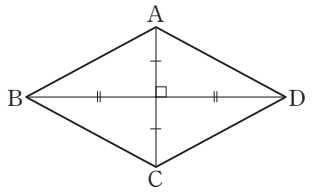
$k=1$인 경우, 두 직선은 각각 $y=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$이므로 서로 수직이다.

(i), (ii)에서 두 직선이 서로 수직이 되는 모든 실수 k의 값의 합은 $3+1=4$이다.

708

답 50

마름모 ABCD에서 두 대각선 AC, BD는 서로를 수직이등분한다.



두 선분 AC, BD의 중점이 서로 같으므로

점 $\left(\frac{-2+q}{2}, \frac{1+8}{2}\right)$과 점 $\left(\frac{p+1}{2}, \frac{4+r}{2}\right)$가 일치한다.

$-2+q=p+1$에서 $q=p+3$ …… ㉠

$9=4+r$에서 $r=5$

또한 두 직선 AC, BD는 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1이다.

$\frac{8-1}{q-(-2)}\times\frac{r-4}{1-p}=-1$에서 $(q+2)(p-1)=7$ ($\because r=5$)

㉠을 대입하면 $(p+5)(p-1)=7$

$p^2+4p-12=0$, $(p+6)(p-2)=0$

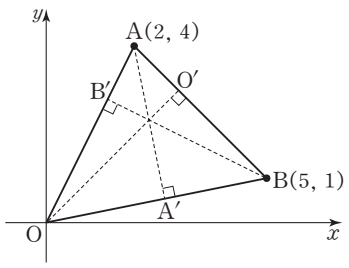
$\therefore p=2$ ($\because p>0$), $q=5$

$\therefore pqr=2\times5\times5=50$

709

답 $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$

세 꼭짓점 O, A, B에서 대변에 내린 수선의 발을 각각 O′, A′, B′이라 하자.



직선 AB의 기울기가 $\frac{1-4}{5-2}=-1$이므로

직선 AB와 수직인 직선 OO′의 방정식은 $y=x$

직선 OA의 기울기가 $\frac{4}{2}=2$이므로

직선 OA와 수직인 직선 BB′의 방정식은

아끄하ㅓㅇㄴ내ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_해ㅐㅅㅓㄹ.indb 152 22. 9. 14. 오후 8:20

$y-1=-\frac{1}{2}(x-5)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

두 직선 OO′, BB′의 교점의 x좌표는

$x=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$에서 $x=\frac{7}{3}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$이다. …… TIP

TIP

삼각형의 세 꼭짓점에서 대변에 내린 수선은 한 점에서 만나므로 삼각형의 세 꼭짓점 중 두 꼭짓점에서 각각 대변에 내린 두 수선의 교점을 구하면 된다.

한편, 직선 AA′의 방정식은 $y=-5x+14$이고,

점 $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$은 직선 AA′ 위에 있음을 알 수 있다.

710 ⑤

두 직선 $(k+4)x+2(k+2)y+1=0$,

$(4-k)x+4(k+2)y+2=0$이 서로 평행하려면

(i) $k\neq-2$일 때, $\frac{k+4}{4-k}=\frac{2(k+2)}{4(k+2)}\neq\frac{1}{2}$이어야 한다.

이때, $\frac{2(k+2)}{4(k+2)}=\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=4$일 때, 두 직선은 각각 $8x+12y+1=0$, $24y+2=0$에서

$8x+12y+1=0$, $y=-\frac{1}{12}$이므로 서로 평행하지 않다.

(iii) $k=-2$일 때, 두 직선은 각각 $2x+1=0$, $6x+2=0$에서

$x=-\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{3}$이므로 서로 평행하다.

(i)~(iii)에서 $k=-2$이고, 이때 두 직선 사이의 거리는

$m=\left|-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{6}$이다.

$\therefore k+m=-2+\frac{1}{6}=-\frac{11}{6}$

711 ②

ㄱ. $a=-1$일 때 직선 l은 $y=-x+1$이고, 직선 m은 $y=4x+5$이다.

방정식 $-x+1=4x+5$에서

$x=-\frac{4}{5}$, $y=-\left(-\frac{4}{5}\right)+1=\frac{9}{5}$

즉, 두 직선 l, m이 점 $\left(-\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)$에서 만나므로 제2사분면에서 만난다. (참)

ㄴ. $a=0$일 때, 직선 l은 $y=2$, 직선 m은 $x=-2$이므로 두 직선 l, m은 서로 수직이다.

$a\neq0$일 때, 두 직선 l, m의 기울기가 각각 a, $-\frac{4}{a}$이고,

그 곱은 $a\times\left(-\frac{4}{a}\right)=-4$이므로 수직이 아니다.

그러므로 두 직선이 수직이 되도록 하는 a의 값은 0으로 오직 하나이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $a\neq0$일 때, 두 직선 l, m의 기울기가 각각 a, $-\frac{4}{a}$이므로 두 직선이 서로 평행하기 위해서는

$a=-\frac{4}{a}$, 즉 $a^2=-4$이어야 하지만 이를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

III

712 ⑤

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때 점 G의 좌표는

$\left(\frac{4+1+(-2)}{3}, \frac{3+5+(-2)}{3}\right)$, 즉 (1, 2)

점 G를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=k(x-1)$ $\therefore y=k(x-1)+2$ (k는 상수) …… ㉠

이때 이 직선과 점 A 사이의 거리가 최대가 될 때는 직선

$y=k(x-1)+2$와 직선 AG가 수직일 때이다. …… TIP

직선 AG의 기울기가 $\frac{3-2}{4-1}=\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3}k=-1$에서 $k=-3$

이를 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$y=-3(x-1)+2$ $\therefore y=-3x+5$

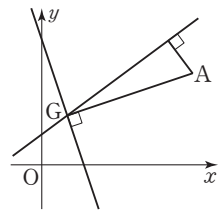
따라서 구하는 직선의 x절편은

$-3x+5=0$ $\therefore x=\frac{5}{3}$

TIP

직선 $y=k(x-1)+2$가 직선 AG와 수직이 아닌 경우

점 A와 직선 $y=k(x-1)+2$ 사이의 거리는 선분 AG를 빗변으로 하는 직각삼각형의 한 변의 길이가 된다.



따라서 점 A와 직선 $y=k(x-1)+2$ 사이의 거리는

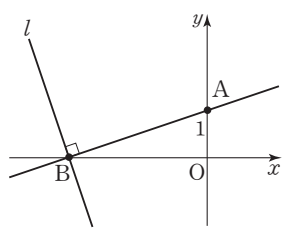
직선 AG와 직선 $y=k(x-1)+2$가 서로 수직일 때

선분 AG의 길이를 최댓값으로 갖는다.

713 ④

A(0, 1), l: $2x+(k-1)y+6=0$이라 하고,

점 A를 지나는 직선과 직선 l이 x축 위에서 수직으로 만나는 점을 B라 하자.



아끄하ㅓㅇㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(사ㅇ)_ㅎ새ㅅㅓㄹ.indb 153 22. 9. 14. 오후 8:20

$2x+(k-1)y+6=0$에 $y=0$을 대입하면 $x=-3$이므로
B$(-3,\ 0)$이다.
즉, 직선 AB와 직선 l은 점 $(-3,\ 0)$에서 수직으로 만난다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로

직선 l의 기울기는 -3이다.

$l : 2x+(k-1)y+6=0$에서 $y=-\frac{2}{k-1}x-\frac{6}{k-1}$이므로

$-\frac{2}{k-1}=-3,\ k-1=\frac{2}{3}$

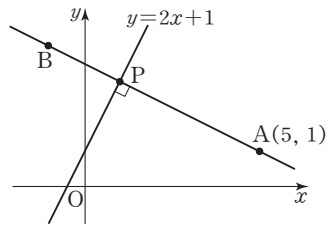
$\therefore\ k=\frac{5}{3}$

참고

위의 풀이에서 문제의 조건을 만족시키는 직선 l의 방정식은 $3x+y+9=0$이고, 직선 AB의 방정식은 $x-3y+3=0$이다.

714 ····· 답 3

선분 AB와 직선 $y=2x+1$이 수직으로 만나는 점이 P이므로
점 A에서 직선 $y=2x+1$에 내린 수선의 발이 P이다.



직선 AP와 직선 $y=2x+1$이 서로 수직이므로
직선 AP의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}(x-5)$

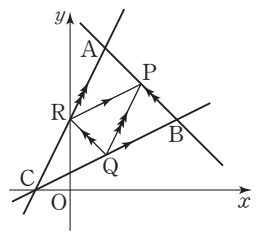
$\therefore\ x+2y-7=0$
두 직선 $x+2y-7=0$, $y=2x+1$의 교점이 P이므로
두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=3$에서 P$(1,\ 3)$이다.
$\overline{AP} : \overline{BP}=2 : 1$이고, 점 P가 선분 AB 위에 존재하므로
점 B는 선분 AP를 $3 : 1$로 외분하는 점이다.
따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{3\times1-1\times5}{3-1},\ \frac{3\times3-1\times1}{3-1}\right)$, 즉 $(-1,\ 4)$
이므로
$a=-1,\ b=4 \qquad \therefore\ a+b=3$

715 ····· 답 1

두 직선 PR, QR의 방정식이 각각
$x-2y+4=0,\ x+y-2=0$
이므로 두 직선이 만나는 점은 R이다.

$\frac{1}{2}x+2=-x+2$에서 $x=0$이고 $y=2$, 즉 R$(0,\ 2)$이다.

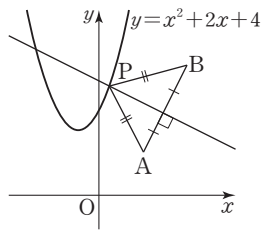
다음 그림과 같이 직선 AB는 점 P를 지나고 직선 QR와 평행하고,
직선 BC는 점 Q를 지나고 직선 PR와 평행하다.



그러므로 직선 AB의 방정식은
$y-3=\frac{2-1}{0-1}(x-2)$에서 $y=-x+5$이고,
직선 BC의 방정식은
$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$에서 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이다.
두 직선 AB, BC가 만나는 점 B의 좌표는
$-x+5=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$에서 $x=3$이고 $y=2$, 즉 B$(3,\ 2)$이므로
$a=3,\ b=2 \qquad \therefore\ a-b=3-2=1$

716 ····· 답 ④

$\overline{AP}=\overline{BP}$이면 삼각형 APB는 이등변삼각형이고,
선분 AB의 수직이등분선이 함수 $y=x^2+2x+4$의 그래프와
제1사분면에서 만나는 점이 P이다.



선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{2+6}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 4)$이고,

직선 AB의 기울기는 $\frac{6-2}{4-2}=2$이므로 수직이등분선의 기울기는

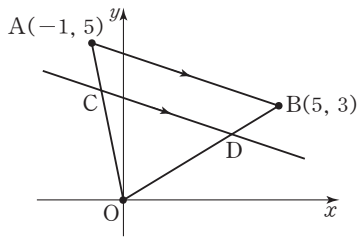
$-\frac{1}{2}$이다.

그러므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은
$y-4=-\frac{1}{2}(x-3)$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$이고
이 직선이 함수 $y=x^2+2x+4$의 그래프와 만나는 점 P의 좌표는
$-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}=x^2+2x+4,\ 2x^2+4x+8=-x+11$
$2x^2+5x-3=0,\ (2x-1)(x+3)=0$에서
$x=\frac{1}{2}$ $(\because\ x>0)$이고 $y=\frac{21}{4}$, 즉 P$\left(\frac{1}{2},\ \frac{21}{4}\right)$이므로
$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{21}{4} \qquad \therefore\ a+b=\frac{1}{2}+\frac{21}{4}=\frac{23}{4}$

717 ····· 답 ④

삼각형 OAB의 넓이를 이등분하고 선분 AB와 평행한 직선이 두 선분 OA, OB와 만나는 점을 각각 C, D라 하면 두 삼각형 OCD, OAB는 닮음이다.

아끄하이노래시스템고조개이시(사이)_해설서로.indb 154 22. 9. 14. 오후 8:20



이때, 두 삼각형의 넓이의 비가 1 : 2이므로
두 삼각형의 닮음비는 1 : $\sqrt{2}$이어야 한다.
따라서 선분 OA를 1 : $(\sqrt{2}-1)$로 내분하는 점이 C이므로
점 C의 좌표는

$$\left(\frac{1\times(-1)+(\sqrt{2}-1)\times 0}{1+(\sqrt{2}-1)},\ \frac{1\times 5+(\sqrt{2}-1)\times 0}{1+(\sqrt{2}-1)}\right)$$

$$\therefore \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

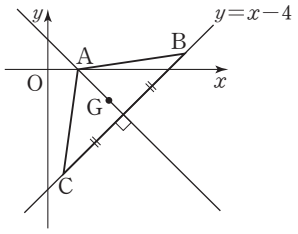
직선 AB의 기울기는 $\frac{3-5}{5-(-1)}=-\frac{1}{3}$이므로
직선 AB와 평행한 직선 CD의 방정식은

$$y-\frac{5\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{3}\left\{x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

따라서 이 직선의 y절편은 $-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{3}$이다.

718 ····· 답 8

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 다음 그림과 같이 점 A와 변 BC의 중점을 지나는 직선은 변 BC의 수직이등분선과 같다.



직선 BC의 기울기가 1이므로 직선 AG의 기울기는 −1이고,
점 G(2, −1)을 지나므로 직선 AG의 방정식은
$y-(-1)=-(x-2)$, 즉 $y=-x+1$이다.
두 점 B, C가 직선 $y=x-4$ 위의 점이므로
B$(p,\ p-4)$, C$(q,\ q-4)$ $(p>q)$라 하자.
직선 AG와 직선 BC가 만나는 점이 선분 BC의 중점이므로 중점의 좌표는

$-x+1=x-4$, $2x=5$, $x=\frac{5}{2}$이고 $y=-\frac{3}{2}$, 즉 $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

그러므로 $\frac{p+q}{2}=\frac{5}{2}$에서 $p+q=5$ ····· ㉠

이때, $\overline{BC}=4\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{(p-q)^2+\{(p-4)-(q-4)\}^2}=4\sqrt{2}$
$(p-q)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ $(\because p>q)$에서 $p-q=4$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=\frac{9}{2}$, $q=\frac{1}{2}$이고

B$\left(\frac{9}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, C$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{7}{2}\right)$이다.

이때 A$(r,\ s)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $(2,\ -1)$이므로

$\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}+r\right)=2$에서 $r+5=6$, $r=1$

$\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}+\left(-\frac{7}{2}\right)+s\right\}=-1$에서 $s-3=-3$, $s=0$

따라서 두 점 A(1, 0), B$\left(\frac{9}{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{9}{2}-1}(x-1),\ y=\frac{1}{7}(x-1) \qquad \therefore\ x-7y-1=0$$

따라서 $a=1$, $b=-7$이므로
$a-b=1-(-7)=8$

719 ····· 답 $\frac{61}{3}$

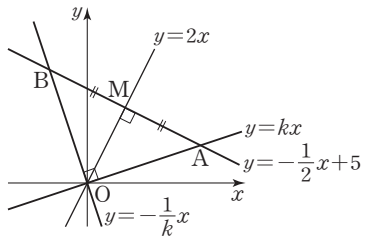
두 직선 $kx-y=0$, $x+ky=0$의 기울기는 각각 k, $-\frac{1}{k}$이므로

$k\times\left(-\frac{1}{k}\right)=-1$에서 두 직선은 서로 수직이다.

$\angle$AOB를 이등분하는 직선이 선분 AB를 수직이등분하므로
삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이고,
선분 AB의 수직이등분선의 방정식은 $y=2x$이다.

두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+5$, $y=2x$가 만나는 점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$-\frac{1}{2}x+5=2x$, $\frac{5}{2}x=5$, $x=2$이고 $y=4$, 즉 M(2, 4)이다.



두 직선 $y=kx$, $y=-\frac{1}{2}x+5$가 만나는 점 A의 x좌표는

$kx=-\frac{1}{2}x+5$, $\left(k+\frac{1}{2}\right)x=5$, $x=\frac{10}{2k+1}$이고,

두 직선 $y=-\frac{1}{k}x$, $y=-\frac{1}{2}x+5$가 만나는 점 B의 x좌표는

$-\frac{1}{k}x=-\frac{1}{2}x+5$, $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)x=5$, $x=\frac{10k}{k-2}$

이때 선분 AB의 중점이 M이므로

$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{2k+1}+\frac{10k}{k-2}\right)=2$, $\frac{5}{2k+1}+\frac{5k}{k-2}=2$,
$5(k-2)+5k(2k+1)=2(k-2)(2k+1)$,
$10k^2+10k-10=4k^2-6k-4$

$3k^2+8k-3=0$, $(3k-1)(k+3)=0$에서 $k=\frac{1}{3}$ $(\because k>0)$

이때, 삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이므로
$\overline{OM}=\overline{AM}=\overline{BM}$이다.
따라서 삼각형 OAB의 넓이는

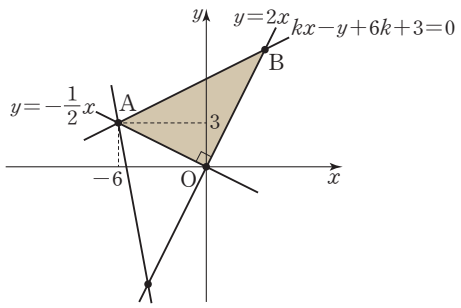
$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OM}=\frac{1}{2}\times 2\times\overline{OM}^2=\left(\sqrt{2^2+4^2}\right)^2=20$

$\therefore\ k+S=\frac{1}{3}+20=\frac{61}{3}$

아뿌후이노새시ㅣ노그소재으시ㅣ(사ㅏ으)_후새스러르.indb 155 22. 9. 14. 오후 8:20

720 ④

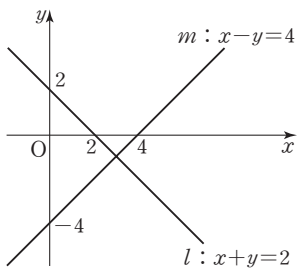
두 직선 $x+2y=0$, $2x-y=0$은 각각 $y=-\frac{1}{2}x$, $y=2x$이므로
서로 수직이고, 모두 원점을 지난다.
직선 $kx-y+6k+3=0$에서 $k(x+6)-(y-3)=0$이므로
이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-6, 3)$을 지나고,
기울기가 양수 k인 직선이다.
따라서 주어진 세 직선으로 둘러싸인 부분은 다음과 같다.



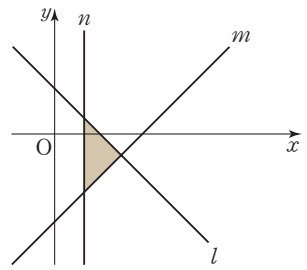
A$(-6, 3)$이라 하면 점 A는 직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 위의 점이다.
두 직선 $y=2x$, $kx-y+6k+3=0$이 만나는 점을
B$(a, 2a)$라 하면
$\overline{OA}=\sqrt{(-6)^2+3^2}=3\sqrt{5}$
$\overline{OB}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}|a|$
삼각형 AOB의 넓이가 30이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\sqrt{5}|a|=30$
$\therefore |a|=4$
점 B가 직선 $kx-y+6k+3=0$ 위의 점이므로
점 B의 좌표가 $(4, 8)$일 때, $k=\frac{1}{2}$
점 B의 좌표가 $(-4, -8)$일 때, $k=-\frac{11}{2}$
$\therefore k=\frac{1}{2}$ ($\because k>0$)

721 풀이 참조

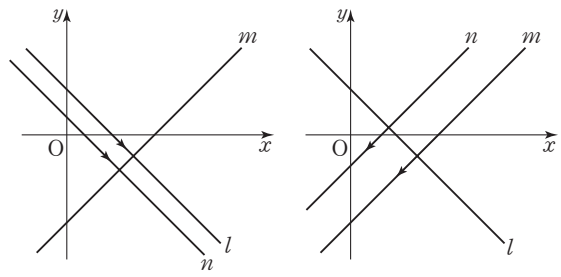
세 직선을 각각 $l : x+y=2$, $m : x-y=4$, $n : 3x-ky=4$라 하자.
직선 n은 k의 값에 관계없이 항상 점 $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$을 지나고,
두 직선 l, m을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



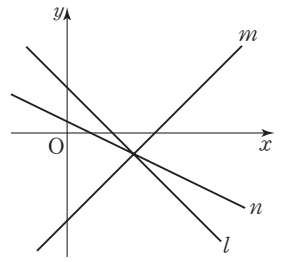
$k=0$일 때, 직선 $n : x=\frac{4}{3}$이므로 다음 그림과 같이 세 직선
l, m, n은 삼각형을 이룬다.



$k\neq0$일 때, 세 직선 l, m, n의 기울기는 각각 -1, 1, $\frac{3}{k}$이고,
두 직선 l, m은 서로 평행하지 않으므로
세 직선 l, m, n이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.
(i) 직선 n이 직선 l 또는 직선 m에 평행한 경우



(가) 직선 n이 직선 l에 평행할 때,
$\frac{3}{k}=-1$에서 $k=-3$
(나) 직선 n이 직선 m에 평행할 때,
$\frac{3}{k}=1$에서 $k=3$
(ii) 직선 n이 두 직선 l, m의 교점을 지나는 경우



$x+y=2$, $x-y=4$를 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-1$이므로
두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $(3, -1)$이다.
직선 $3x-ky=4$가 점 $(3, -1)$을 지나므로
$9+k=4$
$\therefore k=-5$
(i), (ii)에서 가능한 모든 실수 k의 값의 곱은
$(-3)\times3\times(-5)=45$이다.

채점 요소	배점
$k=0$일 때에 대하여 확인하기	10 %
세 직선으로 삼각형이 만들어지지 않는 경우의 k의 값 구하기 (1) 어느 두 직선이 평행한 경우	40 %
세 직선으로 삼각형이 만들어지지 않는 경우의 k의 값 구하기 (2) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우	40 %
답 구하기	10 %

아까하이나새시니그고재이시(사이)_해새서르.indb 156 22. 9. 14. 오후 8:20

722 ····· 답 풀이 참조

(i) $a\neq0$, $b\neq0$일 때, 직선 l: $ax+by+c=0$의 기울기는

$\boxed{-\frac{a}{b}}$이고, 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을

$\mathrm{H}(x_2, y_2)$라 하면 직선 PH와 직선 l이 수직이므로

$\boxed{-\frac{a}{b}}\times\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$이다.

이 식을 정리하여 $\frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}=k$ (k는 상수) ····· ㉠

라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(ak)^2+(bk)^2}$

$=|k|\times\boxed{\sqrt{a^2+b^2}}$ ····· ㉡

한편, 점 H가 직선 l 위의 점이므로 $ax_2+by_2+c=0$이다.

㉠에 의하여 $a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0$이므로

$k=\boxed{-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}}$

이를 ㉡에 대입하여 정리하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\boxed{\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ ····· ㉢

(ii) $a=0$, $b\neq0$ 또는 $a\neq0$, $b=0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$은 x축 또는 y축에 평행하고 이때에도 ㉢이 성립한다.

따라서 (가) : $-\frac{a}{b}$, (나) : $\sqrt{a^2+b^2}$, (다) : $-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$,

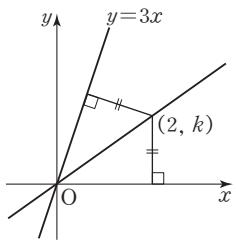
(라) : $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

723 ····· 답 ②

다음 그림과 같이 직선 $y=3x$와 x축의 양의 방향이 이루는 각을 이등분하는 직선이 점 $(2, k)$를 지나므로

점 $(2, k)$와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리는

점 $(2, k)$와 x축 사이의 거리 k와 같다.



$\frac{|3\times2-k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=k$, $|6-k|=k\sqrt{10}$에서

$6-k=\pm k\sqrt{10}$이다.

$6-k=k\sqrt{10}$에서

$(\sqrt{10}+1)k=6$, $k=\frac{6}{\sqrt{10}+1}$ $\therefore k=\frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}$

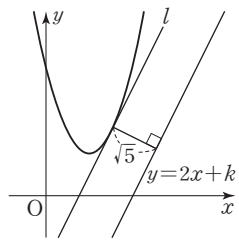
$6-k=-k\sqrt{10}$에서

$(\sqrt{10}-1)k=-6$, $k=-\frac{6}{\sqrt{10}-1}$ $\therefore k=-\frac{2(\sqrt{10}+1)}{3}$

점 $(2, k)$가 제1사분면 위의 점이므로 $k=\frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}$이다.

724 ····· 답 ①

이차함수 $y=x^2-4x+6$의 그래프 위의 점에서 직선 $y=2x+k$에 이르는 거리의 최솟값이 $\sqrt{5}$이면 곡선 $y=x^2-4x+6$의 접선 중 직선 $y=2x+k$와 평행한 직선을 l이라 할 때, 직선 l과 직선 $y=2x+k$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이다.



직선 l의 방정식을 $y=2x+a$ (a는 상수)라 할 때 이차방정식 $x^2-4x+6=2x+a$, 즉 $x^2-6x+6-a=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(6-a)=0$ $\therefore a=-3$

즉, 직선 l의 방정식은 $y=2x-3$이다.

직선 l 위의 점 $(0, -3)$과 직선 $y=2x+k$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|3+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|k+3|=5$이고

$k+3=5$에서 $k=2$ 또는 $k+3=-5$에서 $k=-8$

이때, 직선 $y=2x+k$는 직선 l보다 아래에 있어야 하므로

$k=-8$ 이다.

725 ····· 답 3

직선 $k(x+y)-x+3y+4=0$에서

$(k-1)x+(k+3)y+4=0$

원점 $(0, 0)$과 직선 $(k-1)x+(k+3)y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{4}{\sqrt{(k-1)^2+(k+3)^2}}$ ····· ㉠

이 값이 최대가 되려면 분모가 최소가 되어야 한다.

즉, $(k-1)^2+(k+3)^2=2k^2+4k+10=2(k+1)^2+8$에서

$k=-1$일 때, ㉠의 최댓값은 $\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$이다.

따라서 $a=-1$, $b=\sqrt{2}$이므로

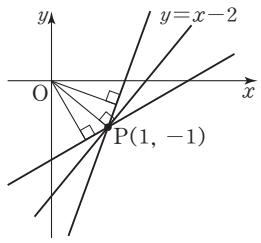
$a^2+b^2=1+2=3$

다른 풀이

직선 $k(x+y)-x+3y+4=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면 $x+y=0$, $-x+3y+4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-1$

즉, 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1, -1)$을 지난다.



아쿠아이노베이션_수학상_해설지.indb 157 22. 9. 14. 오후 8:20

P(1, −1)이라 하고, 점 P를 지나는 직선을 l이라 하면
직선 l이 직선 OP와 수직일 때, 원점과 직선 l 사이의 거리가 최대이고, 이때의 최댓값은 $\overline{OP}=\sqrt{2}$이므로 $b=\sqrt{2}$이다.
직선 OP의 기울기가 −1이므로 직선 OP와 수직일 때 직선 l의 방정식은 $y-(-1)=x-1$, 즉 $x-y-2=0$이다.
두 직선 $(k-1)x+(k+3)y+4=0$과 $x-y-2=0$이 일치해야 하므로 $\frac{k-1}{1}=\frac{k+3}{-1}=\frac{4}{-2}$에서

$k=-1$ $\therefore a=-1$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+(\sqrt{2})^2=3$

726 ····· 답 $-\frac{25}{4}$

선분 AB의 길이는 평행한 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$, $y=-\frac{1}{2}x-1$ 사이의 거리와 같다.

직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 위의 점 (0, 3)과 직선 $x+2y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times3+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$

직선 l은 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$, $y=-\frac{1}{2}x-1$과 수직으로 만나므로 기울기가 2인 직선이다.
직선 l의 방정식을 $y=2x+k$ (k는 상수)라 하면
삼각형 OAB에서 밑변을 선분 AB로 두면 높이는 원점과 직선 l 사이의 거리와 같다. 삼각형 CAB의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{8}{\sqrt{5}}\times\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$, $\frac{4}{5}|k|=2$, $|k|=\frac{5}{2}$에서

$k=\frac{5}{2}$ 또는 $k=-\frac{5}{2}$

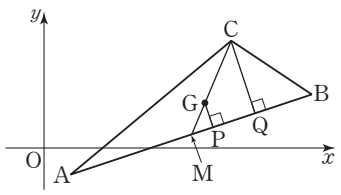
따라서 구하는 가능한 모든 y절편의 곱은 $\frac{5}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{25}{4}$이다.

727 ····· 답 15

삼각형 ABC의 무게중심이 G(6, b)이므로

$\frac{(-1)+2+a}{3}=b$에서 $a=3b-1$ ····· ㉠

다음 그림과 같이 변 AB의 중점을 M, 두 점 G, C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자.



두 직각삼각형 GMP, CMQ는 닮음이고, 무게중심 G는 선분 CM을 2 : 1로 내분하는 점이므로 이때 닮음비는 1 : 3이다.
$\overline{GP}=\sqrt{10}$에서 $\overline{CQ}=3\sqrt{10}$이고, 직선 AB의 방정식은

$y-(-1)=\frac{2-(-1)}{10-1}(x-1)$, $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$ $\therefore x-3y-4=0$

점 C와 직선 $x-3y-4=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{10}$이므로

$\frac{|7-3a-4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=3\sqrt{10}$, $|3-3a|=30$,
$|1-a|=10$에서 $1-a=\pm10$
$a=11$ ($\because a>0$)이고, $b=4$ ($\because$ ㉠)
$\therefore a+b=11+4=15$

다른 풀이

직선 AB의 방정식은 $y-(-1)=\frac{2-(-1)}{10-1}(x-1)$

$y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$, 즉 $x-3y-4=0$

점 G와 직선 AB 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|6-3b-4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10}$, $|2-3b|=10$에서 $2-3b=\pm10$

$b=-\frac{8}{3}$ 또는 $b=4$

무게중심 G(6, b)는 삼각형 내부에 있어야 하므로 $b=4$

$\frac{(-1)+2+a}{3}=4$이므로 $a=11$

$\therefore a+b=11+4=15$

728 ····· 답 $\frac{27}{2}$

삼각형 ABC에서 밑변을 $\overline{AB}$로 두면
$\overline{AB}=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(2-5)^2}=3\sqrt{5}$이고,
삼각형 ABC의 높이는 점 C와 직선 AB 사이의 거리이다.
두 점 A(−1, 5), B(5, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{2-5}{5-(-1)}(x-5)$

$\therefore x+2y-9=0$

점 C(2, −1)과 직선 $x+2y-9=0$ 사이의 거리는

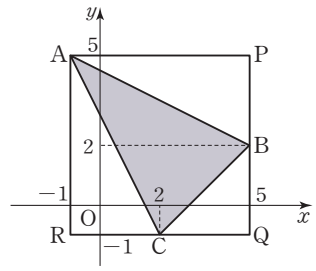
$\frac{|2-2-9|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{9}{\sqrt{5}}=\frac{27}{2}$

다른 풀이 1

P(5, 5), Q(5, −1), R(−1, −1)이라 하면



(삼각형 ABC의 넓이)
=(사각형 ARQP의 넓이)−(삼각형 APB의 넓이)
−(삼각형 BQC의 넓이)−(삼각형 ARC의 넓이)
$=36-9-\frac{9}{2}-9=\frac{27}{2}$

아끄하우느새시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해시ㅓㄹ.indb 158 22. 9. 14. 오후 8:20

다른 풀이 2

세 점 A(−1, 5), B(5, 2), C(2, −1)에 대하여

(삼각형 ABC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-1 & 5 & 2 & -1\\ 5 & 2 & -1 & 5\end{matrix}\right|$ ..... TIP

$=\frac{1}{2}|(-2-5+10)-(25+4+1)|$

$=\frac{27}{2}$

TIP

세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|$이다.

[증명]

삼각형 ABC의 밑변을 AB라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이고,

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$에서

$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-x_1y_2+x_2y_1=0$이므로

점 $C(x_3, y_3)$과 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|(y_2-y_1)x_3-(x_2-x_1)y_3-x_1y_2+x_2y_1|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$

$=\frac{|x_3y_2+x_1y_3+x_2y_1-x_3y_1-x_2y_3-x_1y_2|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\frac{|x_3y_2+x_1y_3+x_2y_1-x_3y_1-x_2y_3-x_1y_2|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$

$=\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|$

이다.

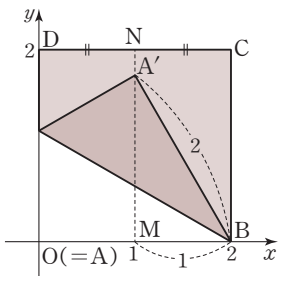
이때, 다음과 같은 방법을 이용하여 공식을 쉽게 이용할 수 있다.

$\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_1\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{matrix}\right|$ ⇦ ↘ 방향의 두 수의 곱을 모두 더한 것에서 ↙ 방향의 두 수의 곱을 모두 더한 것을 뺀다.

⇨ $\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|$

729 ..... 답 ③

A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)가 되도록 정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓으면 M(1, 0), N(1, 2)이다.



$\overline{MB}=1$이고, $\overline{A'B}=\overline{AB}=2$이므로

직각삼각형 A′MB에서 $\overline{A'M}=\sqrt{3}$이다.

∴ $A'(1, \sqrt{3})$

직선 A′B의 방정식은 $y=\frac{0-\sqrt{3}}{2-1}(x-2)$에서 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$

따라서 점 A(0, 0)과 직선 A′B 사이의 거리는

$\frac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\sqrt{3}$이다.

III

730 ..... 답 $\frac{5-\sqrt{17}}{2}$

직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점의 x좌표는

방정식 $x^2=x$, $x^2-x=x(x-1)=0$의 실근이므로

$x=0$ 또는 $x=1$이다.

그러므로 두 점 A, B의 x좌표는 모두 0과 1 사이이다.

$A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ $(0<a<b<1)$이라 할 때,

ABCD가 정사각형이므로 두 직선 AB, CD는 평행하다.

즉, 직선 AB의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기 1과 같다.

$\frac{b^2-a^2}{b-a}=1$에서 $a+b=1$ ..... ㉠

또한 정사각형의 모든 변의 길이는 서로 같으므로 $\overline{AD}=\overline{AB}$이다.

즉, 점 $A(a, a^2)$과 직선 $x-y=0$ 사이의 거리는 두 점 A, B 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|a-a^2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{(a-b)^2+(a^2-b^2)^2}$

$\frac{|a-a^2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{(a-b)^2\{1+(a+b)^2\}}$

$|a-a^2|=(b-a)\sqrt{2\{1+(a+b)^2\}}$ $(\because b>a)$

$|a-a^2|=2(1-2a)$ $(\because$ ㉠$)$이고 $0<a<1$이므로

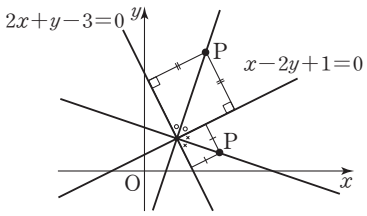
$a-a^2=2(1-2a)$, $a^2-5a+2=0$이고 근의 공식에 의하여

$a=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times2}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$에서 $a=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ $(\because a<1)$

731 ..... 답 $x+3y-4=0$, $3x-y-2=0$

두 직선 $2x+y-3=0$, $x-2y+1=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점을 $P(a, b)$라 하면

점 P와 두 직선 $2x+y-3=0$, $x-2y+1=0$ 사이의 거리가 서로 같다.



즉, $\frac{|2a+b-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|a-2b+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$에서

$|2a+b-3|=|a-2b+1|$

(i) $2a+b-3=a-2b+1$인 경우

$a+3b-4=0$이므로 각의 이등분선의 방정식은

$x+3y-4=0$

아쿠하이스쿨시스템고등개념(상)_해설.indb 159 22. 9. 14. 오후 8:20

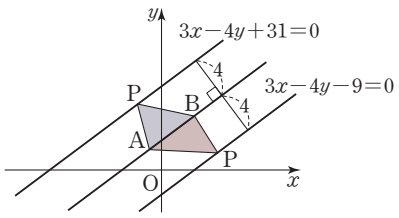
(ii) $2a+b-3=-(a-2b+1)$인 경우
$3a-b-2=0$이므로 각의 이등분선의 방정식은
$3x-y-2=0$
(i), (ii)에서 구하는 직선의 방정식은
$x+3y-4=0$, $3x-y-2=0$이다.

참고

두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선은 두 직선으로부터 떨어진 거리가 같은 점들의 자취이다.
두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선은 2개이고, 그 두 직선은 항상 서로 수직이다.

732 ····· 답 $3x-4y-9=0$, $3x-4y+31=0$

$A(-1, 2)$, $B(3, 5)$에서 $\overline{AB}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(5-2)^2}=5$
이때, 삼각형 ABP의 넓이가 10이므로
$10=\frac{1}{2}\times5\times4$에서 선분 AB를 밑변으로 하는 삼각형 ABP의 높이는 4이어야 한다.
즉, 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 4이므로 점 P가 나타내는 도형은 직선 AB와 평행하고 직선 AB와의 거리가 4인 직선이다.
직선 AB의 기울기는 $\frac{5-2}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$이므로 점 P가 나타내는 직선의 방정식을 $3x-4y+k=0$ (k는 상수)이라 하면
점 A와 이 직선 사이의 거리가 4이어야 하므로
$\frac{|-3-8+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4$, $|k-11|=20$, $k-11=\pm20$
$\therefore k=-9$ 또는 $k=31$



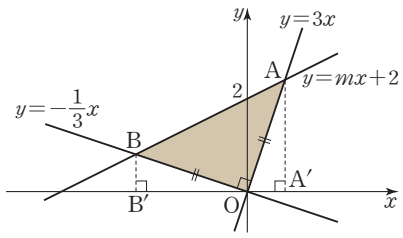
따라서 구하는 도형의 방정식은
$3x-4y-9=0$, $3x-4y+31=0$이다.

733 ····· 답 ④

$\overline{OA}=2\overline{AC}$에서 $\overline{OA}:\overline{AC}=2:1$이므로
두 점 A, C를 $A(2a, 0)$, $C(3a, 0)$ ($a>0$)이라 하자.
이때, 직선 l_1의 기울기가 -3이므로 점 $B(0, b)$라 하면
$\frac{0-b}{2a-0}=-3$ $\therefore b=6a$
$\therefore B(0, 6a)$
한편, 두 삼각형 ACP와 BDP의 넓이가 서로 같으므로
두 삼각형 AOB, COD의 넓이가 서로 같다.
(삼각형 AOB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}$
$=\frac{1}{2}\times2a\times6a$
$=6a^2$ ····· ㉠
점 $D(0, d)$라 하면
(삼각형 COD의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{OD}$
$=\frac{1}{2}\times3a\times d$
$=\frac{3ad}{2}$ ····· ㉡
㉠=㉡에서 $6a^2=\frac{3ad}{2}$이므로 $d=4a$
$\therefore D(0, 4a)$
따라서 직선 l_2의 기울기는
$\frac{0-4a}{3a-0}=-\frac{4}{3}$

734 ····· 답 $\frac{16}{5}$

두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{3}x$는 원점에서 수직으로 만난다.
이 두 직선이 직선 $y=mx+2$와 만나는 점을 각각 A, B라 하면 삼각형 AOB가 이등변삼각형일 때 삼각형 AOB는 $\overline{AO}=\overline{BO}$인 직각이등변삼각형이므로 이를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



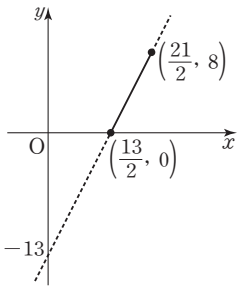
두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면
두 삼각형 OA′A, BB′O가 합동이므로
점 A의 좌표를 $(a, 3a)$ ($a>0$)라 하면 점 B의 좌표는 $(-3a, a)$이다.
직선 AB의 기울기가 $\frac{3a-a}{a-(-3a)}=\frac{1}{2}$이므로 $m=\frac{1}{2}$
점 $A(a, 3a)$가 직선 $y=\frac{1}{2}x+2$ 위의 점이므로
$3a=\frac{1}{2}a+2$, $\frac{5}{2}a=2$ $\therefore a=\frac{4}{5}$
따라서 $\overline{OA}=\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{10}a=\frac{4\sqrt{10}}{5}$이므로
구하는 삼각형 AOB의 넓이는
$\frac{1}{2}\overline{OA}^2=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2=\frac{16}{5}$

735 ····· 답 ①

직사각형 ABCD의 네 꼭짓점을 좌표평면 위의 네 점
$A(0, 8)$, $B(0, 0)$, $C(16, 0)$, $D(16, 8)$로 나타내고
점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
점 P가 직사각형 내부 및 둘레 위의 점이므로
$0\le x\le16$, $0\le y\le8$이다. ····· ㉠
$\overline{AP}^2-\overline{CP}^2=16$이므로
$x^2+(y-8)^2-\{(x-16)^2+y^2\}=16$
$-16y+64+32x-256=16$
$\therefore y=2x-13$

아쿠하이스내시니그고즈재이시(사이)_해설서로.indb 160 22. 9. 14. 오후 8:21

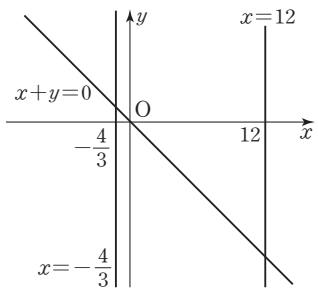
이때, ㉠에 의하여 점 P의 자취는 두 점 $\left(\frac{13}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{21}{2}, 8\right)$을 잇는 선분이므로 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 점 P의 자취가 나타내는 도형의 길이는
$\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$이다.

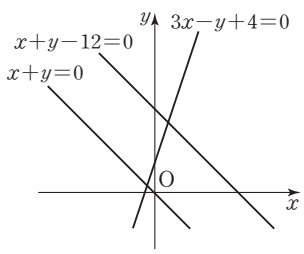
736 ····· 답 0, 1, −3, −5

(i) $a=0$일 때,
두 직선 $x+ay-12=0$, $3x-ay+4=0$은 각각
$x=12$, $x=-\frac{4}{3}$로 서로 평행하다.
이때, 세 직선 $x+y=0$, $x=12$, $x=-\frac{4}{3}$에 의하여 좌표평면은 6개의 부분으로 나누어진다.

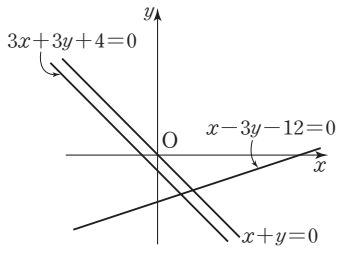


(ii) $a\neq0$일 때,
세 직선 $x+y=0$, $x+ay-12=0$, $3x-ay+4=0$에 의하여 좌표평면이 6개의 부분으로 나누어지는 경우는 다음과 같다. ····· TIP

㈎ 세 직선 중 두 직선만 서로 평행한 경우
세 직선 $x+y=0$, $x+ay-12=0$, $3x-ay+4=0$의 기울기는 각각 -1, $-\frac{1}{a}$, $\frac{3}{a}$이고, $-\frac{1}{a}\neq\frac{3}{a}$이므로
$-1=-\frac{1}{a}$일 때 $a=1$
$-1=\frac{3}{a}$일 때 $a=-3$

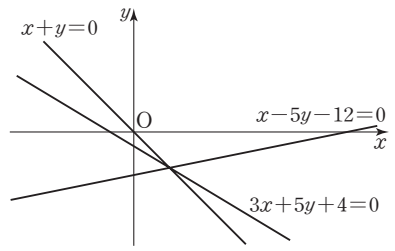


[$a=1$인 경우]

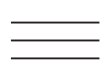
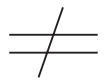


[$a=-3$인 경우]

㈏ 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
두 직선 $x+ay-12=0$, $3x-ay+4=0$의 교점 $\left(2, \frac{10}{a}\right)$이 직선 $x+y=0$ 위의 점이어야 하므로
$2+\frac{10}{a}=0$에서 $a=-5$

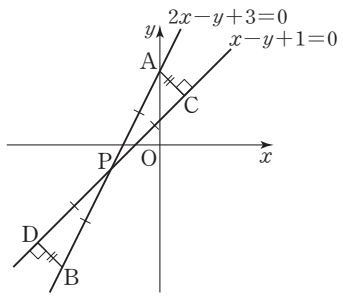


(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값은 0, 1, −3, −5이다.

TIP
한 평면 위에 있는 서로 다른 세 직선의 위치 관계에 따라 평면이 나누어지는 부분의 개수는 다음과 같다.
(i) 세 직선이 모두 서로 평행한 경우
평면이 나누어지는 부분의 개수는 4이다.
(ii) 세 직선 중 두 직선만 서로 평행한 경우
평면이 나누어지는 부분의 개수는 6이다.
(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
평면이 나누어지는 부분의 개수는 6이다.
(iv) 세 직선 중 두 직선이 각각 서로 다른 한 점에서 만나는 경우
평면이 나누어지는 부분의 개수는 7이다.
(i)  (ii)  (iii)  (iv) 

737 ····· 답 ④

두 직선 $2x-y+3=0$, $x-y+1=0$의 교점을 P라 할 때,
$\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{PA}=\overline{PB}$이고,
두 삼각형 PAC, PBD는 서로 합동이다.



점 A$(a, 2a+3)$ (a는 실수)이라 하면
점 A와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로
$\frac{|a-(2a+3)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, $|-a-2|=2$에서
$-a-2=\pm2$
$-a-2=2$일 때 $a=-4$, $2a+3=-5$이고
$-a-2=-2$일 때 $a=0$, $2a+3=3$

아뿌하이스쿨시스템고등자료아이(사이)_하태서리르.indb 161 22. 9. 14. 오후 8:21

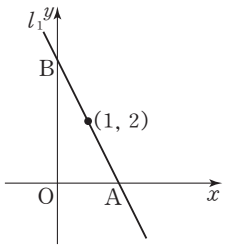
그러므로 A(0, 3), B(−4, −5)이다.
두 직선 $x-y+1=0$, $2x-y+3=0$의 교점 P의 좌표는
$x+1=2x+3$, $x=-2$이고 $y=-1$, 즉 P(−2, −1)이다.
$\overline{PA}=\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{3-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$
이므로 직각삼각형 PCA에서
$\overline{PC}^2=\overline{PA}^2-\overline{AC}^2=(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2=18$에서 $\overline{PC}=3\sqrt{2}$
사각형 ACBD는 마주 보는 두 쌍의 변이 평행한 평행사변형이므로
사각형 ACBD의 넓이는 삼각형 ACD의 넓이의 2배이다.
따라서 구하는 넓이는
$2\times\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{AC}=2\overline{PC}\times\overline{AC}=2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=12$

738 ····· 답 130

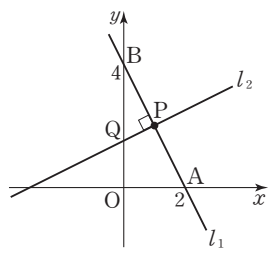
사각형 OAEF의 넓이와 삼각형 DEF의 넓이의 합은 삼각형 OAD의 넓이이고, 사각형 BCFD의 넓이와 삼각형 DEF의 넓이의 합은 삼각형 CEB의 넓이이다.
즉, 삼각형 OAD의 넓이는 삼각형 CEB의 넓이보다 4만큼 크다.
$\overline{OA}=\overline{CB}=4$이므로
삼각형 OAD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times\overline{DA}$이고,
삼각형 CEB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times\overline{BE}$이다.
$\frac{1}{2}\times4\times\overline{DA}=\frac{1}{2}\times4\times\overline{BE}+4$에서 $\overline{DA}=\overline{BE}+2$
그러므로 $\overline{BE}=k$ $(k>0)$라 하면 $\overline{DA}=k+2$이므로
직선 OD의 기울기는 $\frac{k+2}{4}$이고, 직선 CE의 기울기는 $-\frac{k}{4}$
두 직선 OD, CE의 기울기의 곱이 $-\frac{7}{9}$이므로
$\frac{k+2}{4}\times\left(-\frac{k}{4}\right)=-\frac{7}{9}$, $9k(k+2)=112$
$9k^2+18k-112=0$, $(3k+14)(3k-8)=0$에서 $k=\frac{8}{3}$ $(\because k>0)$
직선 OD의 방정식은 $y=\frac{7}{6}x$이고,
직선 CE의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+5$
두 직선이 만나는 점은 $\frac{7}{6}x=-\frac{2}{3}x+5$, $7x=-4x+30$, $11x=30$
$x=\frac{30}{11}$이고 $y=\frac{35}{11}$에서 $F\left(\frac{30}{11}, \frac{35}{11}\right)$이다.
따라서 $a=\frac{30}{11}$, $b=\frac{35}{11}$이므로
$22(a+b)=22\times\left(\frac{30}{11}+\frac{35}{11}\right)=130$

739 ····· 답 ①

직선 l_1이 제1사분면 위의 점 (1, 2)를 지나고 기울기가 음수이므로 직선 l_1의 x절편과 y절편이 모두 양수이다.

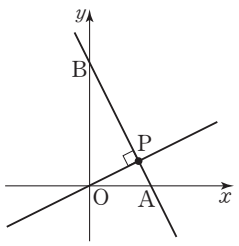


직선 l_1의 방정식을 $y=m(x-1)+2$ $(m<0)$이라 하면
x절편이 $1-\frac{2}{m}$, y절편이 $2-m$이므로
(삼각형 OAB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{m}\right)\times(2-m)$
$=\frac{-(m-2)^2}{2m}=4$
$-(m-2)^2=8m$, $m^2+4m+4=0$
$(m+2)^2=0$ $\therefore m=-2$
따라서 직선 l_1의 방정식은 $y=-2x+4$이다.
두 직선 l_1, l_2의 교점을 P, 직선 l_2가 y축과 만나는 점을 Q(0, k)라 하면 직선 l_2가 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하므로
$0<k<4$이다. ····· TIP
이때, 삼각형 BPQ의 넓이는 2가 되어야 한다.



두 삼각형 AOB, QPB가 서로 닮음이므로
$\overline{QP}:\overline{BP}=\overline{AO}:\overline{BO}=1:2$이다.
$\overline{PQ}=p$ (p는 실수)라 하면 $\overline{BP}=2p$이므로
(삼각형 BPQ의 넓이)$=\frac{1}{2}\times p\times2p=2$에서
$p=\sqrt{2}$ $(\because p>0)$이다.
직각삼각형 BPQ에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{BQ}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$이므로 $\overline{OQ}=4-\sqrt{10}$
따라서 구하는 직선 l_2의 y절편은 $4-\sqrt{10}$이다.

TIP



만약 l_2가 원점을 지나는 직선이면 삼각형 OBP의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{1}{2}$보다 크다.
따라서 직선 l_2가 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하려면 직선 l_2가 점 B에 더 가까워져야 하므로 직선 l_2의 y절편 k가 $0<k<4$이어야 함을 알 수 있다.

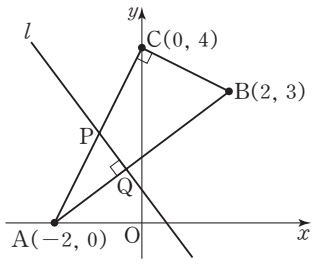
아끄하이노내시ㅣㄴㄱㅗ즈재이ㅇ시ㅣ(사ㅏㅇ)_하내시ㅓ르.indb 162 22. 9. 14. 오후 8:21

740 ····· 답 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

$\overline{AC}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{BC}=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$에서

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$이므로

삼각형 APQ의 넓이는 $\frac{1}{5}\times5=1$이다.



두 삼각형 ABC, APQ가 서로 닮음이므로

$\overline{AQ}:\overline{PQ}=\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$이다.

$\overline{PQ}=a$, $\overline{AQ}=2a$ (a는 실수)라 하면 삼각형 APQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times2a=a^2=1$이므로

$a=1$ ($\because a>0$) ····· ㉠

따라서 $\overline{AQ}=2$이므로 점 A와 직선 l 사이의 거리가 2이다.

직선 AB의 기울기가 $\frac{3-0}{2-(-2)}=\frac{3}{4}$이므로

직선 l의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

$l:y=-\frac{4}{3}x+k$, 즉 $4x+3y-3k=0$ (k는 실수)이라 하면

점 A$(-2, 0)$과 직선 l 사이의 거리는 $\frac{|-8-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$에서

$|3k+8|=10$, $3k+8=\pm10$

$\therefore k=\frac{2}{3}$ ($\because k>0$)

따라서 직선 l의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ ····· TIP

다른 풀이

㉠ 이후의 풀이를 다음과 같이 할 수 있다.

$\overline{AQ}=2$이고, $\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=5$이므로

$\overline{BQ}=3$이다.

즉, 점 Q는 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{4+(-6)}{2+3}, \frac{6+0}{2+3}\right)$

$\therefore Q\left(-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$

한편, 직선 AB의 기울기가 $\frac{3-0}{2-(-2)}=\frac{3}{4}$이므로

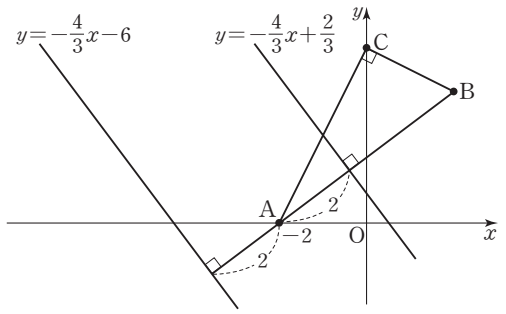
직선 l의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

따라서 직선 l의 방정식은

$y-\frac{6}{5}=-\frac{4}{3}\left\{x-\left(-\frac{2}{5}\right)\right\}$

$\therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

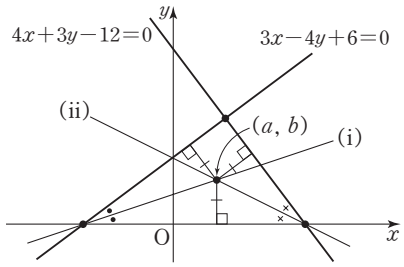
TIP



기울기가 $-\frac{4}{3}$이고 점 $(-2, 0)$에서 거리가 10인 직선은 위와 같이 두 개가 존재하며 이 중 삼각형 ABC와 만나는 직선 l의 방정식은 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$이다.

741 ····· 답 2

삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이고, 세 내각의 이등분선은 항상 한 점에서 만나므로 세 내각 중 두 내각의 이등분선을 각각 구해서 두 직선의 교점의 좌표를 구하면 된다.



(i) 두 직선 $y=0$, $3x-4y+6=0$에 이르는 거리가 같은 점 (x, y)의 자취의 방정식은

$|y|=\frac{|3x-4y+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$ ····· TIP

$|3x-4y+6|=5|y|$

$\therefore x-3y+2=0$ 또는 $3x+y+6=0$

이 중 내심 (a, b)를 지나는 직선의 기울기는 양수이므로

$x-3y+2=0$

(ii) 두 직선 $y=0$, $4x+3y-12=0$에 이르는 거리가 같은 점 (x, y)의 자취의 방정식은

$|y|=\frac{|4x+3y-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$|4x+3y-12|=5|y|$

$\therefore x+2y-3=0$ 또는 $2x-y-6=0$

이 중 내심 (a, b)를 지나는 직선의 기울기는 음수이므로

$x+2y-3=0$

(i), (ii)에서 두 내각의 이등분선 $x-3y+2=0$과 $x+2y-3=0$을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

따라서 내심의 좌표는 $(1, 1)$이다.

즉, $a=1$, $b=1$이므로 $a+b=2$

아뿌하이스내시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 163 22. 9. 14. 오후 8:21

TIP

각의 이등분선 위의 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P와 두 직선 $y=0$, $3x-4y+6=0$ 사이의 거리가 서로 같으므로

$|y|=\frac{|3x-4y+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$이다.

참고

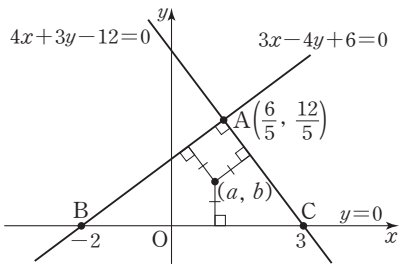
삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리가 서로 같으므로 점 (a, b)와 세 직선 사이의 거리를 각각 같다고 하면

$|b|=\frac{|3a-4b+6|}{5}=\frac{|4a+3b-12|}{5}$이고,

이는 결국 본 풀이와 동일한 과정으로 풀 수 있다.

다른 풀이

두 직선 $3x-4y+6=0$, $4x+3y-12=0$이 서로 수직이므로 주어진 세 직선으로 둘러싸인 삼각형은 직각삼각형이고, 이를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



두 직선 $3x-4y+6=0$, $4x+3y-12=0$의 교점의 좌표는 $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$이고,

두 직선 $3x-4y+6=0$, $4x+3y-12=0$의 x절편은 각각 -2, 3이므로

$A\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$, $B(-2, 0)$, $C(3, 0)$이라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=4$,

$\overline{AC}=\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(-\frac{12}{5}\right)^2}=3$,

$\overline{BC}=5$이다.

즉, 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times4\times3=6$

한편, 내심 (a, b)에서 변 BC에 이르는 거리가 $|b|$이므로 내접원의 반지름의 길이가 $|b|$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

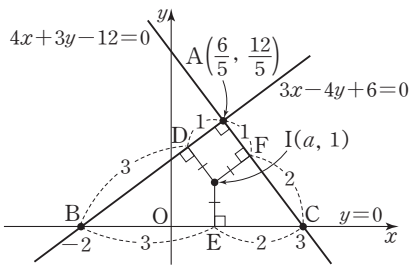
$\frac{1}{2}\times|b|\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})=\frac{1}{2}\times|b|\times(4+5+3)$

$=6|b|$

이므로 $6|b|=6$에서 $b=1$ ($\because b>0$)

내심을 I라 하고, 점 I에서 세 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면

$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=1$이다.



사각형 ADIF가 정사각형이므로 $\overline{AD}=1$에서

$\overline{BE}=\overline{BD}=3$이므로 $a=-2+3=1$

$\therefore a+b=1+1=2$

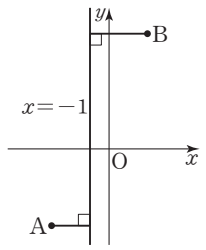
742 ····· 답 $x=-1$, $3x-4y+3=0$

직선 l이 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 l이 x축 또는 y축과 평행한 직선인 경우

두 점 A, B의 x좌표의 차가 $2-(-3)=5$이므로

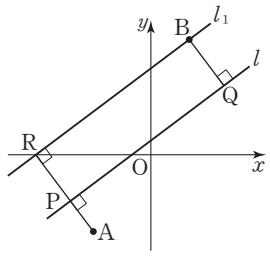
다음 그림과 같이 직선 l이 $x=-1$일 때 조건을 만족시킨다.



(ii) 직선 l이 x축 또는 y축과 평행한 직선이 아닌 경우

다음 그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, 직선 l과 평행하고 점 B를 지나는 직선 l_1에 대하여 점 A에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overline{AR}=5$이다.



직선 l_1이 점 B를 지나므로 직선의 방정식을

$y-6=a(x-2)$, 즉

$ax-y-2a+6=0$ (a는 상수)이라 하면 ····· ㉠

이 직선과 점 A 사이의 거리가 5이므로

$\frac{|a\times(-3)-1\times(-4)-2a+6|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=5$,

$|-5a+10|=5\sqrt{a^2+1}$, $|-a+2|^2=a^2+1$

$a^2-4a+4=a^2+1$, $4a=3$ $\therefore a=\frac{3}{4}$

이를 ㉠에 대입하면 직선 l_1의 방정식은 $3x-4y+18=0$이다.

직선 l은 직선 l_1과 평행하므로 직선 l의 방정식을

$3x-4y+b=0$ (b는 실수)이라 하면 ····· ㉡

점 B와 직선 l 사이의 거리가 3이므로

아쿠후이노내신ㅣ노그노조재으신ㅣ(사이)_해설서로.indb 164 22. 9. 14. 오후 8:21

$\frac{|3\times2-4\times6+b|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$, $|b-18|=15$

$b-18=\pm15$에서 $b=33$ 또는 $b=3$

이때 직선 l은 직선 l_1보다 아래에 존재해야 하므로 $b=3$

이를 ㉡에 대입하면 직선 l의 방정식은 $3x-4y+3=0$이다.

(i), (ii)에서 직선 l의 방정식은

$x=-1$, $3x-4y+3=0$

03 원의 방정식

743 ····· 답 ③

원 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$에서

$(x^2+6x+9)+(y^2-2y+1)=10-6$

$\therefore (x+3)^2+(y-1)^2=4$

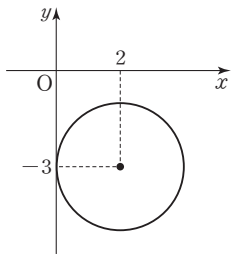
이 원의 중심은 $(-3, 1)$이고 반지름의 길이는 2이므로

$m=-3$, $n=1$, $r=2$

$\therefore m+n+r=0$

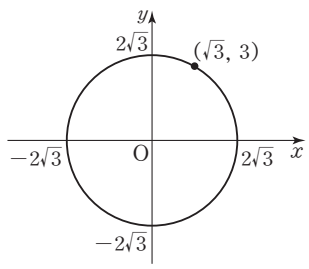
744 ····· 답 ③

ㄱ. 좌표평면 위의 한 점 $(2, -3)$으로부터 거리가 2인 모든 점으로 이루어진 도형은 중심이 $(2, -3)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.



즉, 도형의 방정식은 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$이다. (참)

ㄴ. 중심이 원점인 원의 방정식을 $x^2+y^2=a$ $(a>0)$라 하면 점 $(\sqrt{3}, 3)$을 지나므로 $3+9=a$에서 $a=12$이다.

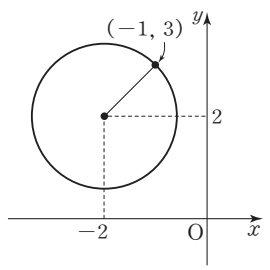


즉, 원의 방정식은 $x^2+y^2=12$이다. (참)

ㄷ. 원 $x^2+y^2+4x-4y=0$에서

$(x+2)^2+(y-2)^2=8$

즉, 구하는 원의 중심은 $(-2, 2)$이다.



중심이 $(-2, 2)$이고 점 $(-1, 3)$을 지나는 원의 반지름의 길이는 두 점 $(-2, 2)$와 $(-1, 3)$ 사이의 거리와 같으므로 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

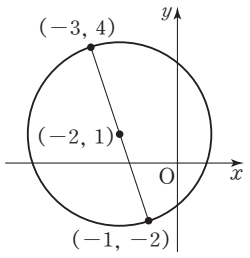
아쁘허어느새시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해서ㄹ.indb 165 22. 9. 14. 오후 8:21

745 ····· 답 ②

$x^2+y^2+4ax-4y+5a^2-2a-11=0$에서
$(x^2+4ax+4a^2)+(y^2-4y+4)=-a^2+2a+15$
$\therefore (x+2a)^2+(y-2)^2=-(a+3)(a-5)$
이 방정식이 좌표평면 위의 원을 나타내려면
$-(a+3)(a-5)>0$을 만족시켜야 한다.
즉, $(a+3)(a-5)<0$에서 $-3<a<5$이므로
자연수 a의 최댓값은 4이다.

746 ····· 답 ①

두 점 A$(-3, 4)$, B$(-1, -2)$가 지름의 양 끝점이면
원의 중심은 선분 AB의 중점이므로
$\left(\frac{-3+(-1)}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right)$, 즉 $(-2, 1)$이다.



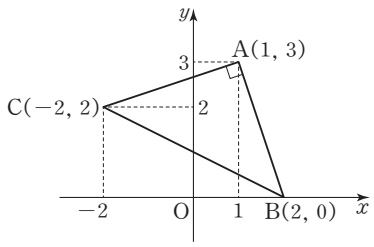
원의 반지름의 길이는 원의 중심 $(-2, 1)$과
원 위의 점 $(-3, 4)$ 사이의 거리와 같으므로
$\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$이다.
따라서 중심이 $(-2, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y-1)^2=10$
$\therefore x^2+y^2+4x-2y-5=0$
즉, $a=4$, $b=-2$, $c=-5$이므로 $a+b+c=-3$

747 ····· 답 ②

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (A, B, C는 상수)이라 하면 이 원이 세 점 $(1, 3)$, $(2, 0)$, $(-2, 2)$를 지나므로
$x=1$, $y=3$을 대입하면 $A+3B+C+10=0$
$x=2$, $y=0$을 대입하면 $2A+C+4=0$
$x=-2$, $y=2$를 대입하면 $-2A+2B+C+8=0$
세 식을 연립하여 풀면 $A=0$, $B=-2$, $C=-4$
즉, $x^2+y^2-2y-4=0$에서 $x^2+(y-1)^2=5$
이 원의 중심은 $(0, 1)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.
$\therefore a+b+r^2=6$

다른 풀이

A$(1, 3)$, B$(2, 0)$, C$(-2, 2)$라 하고, 이를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.

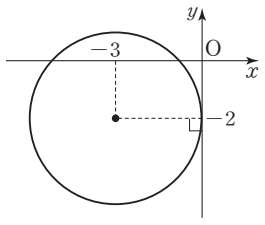


직선 AB의 기울기는 -3이고, 직선 AC의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

두 직선의 기울기의 곱이 $(-3)\times\frac{1}{3}=-1$이므로
두 직선 AB, AC는 서로 수직이다.
따라서 선분 BC가 세 점 A, B, C를 지나는 원의 지름이므로
이 원의 중심은 선분 BC의 중점과 같다.
$\left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$, 즉 $(0, 1)$에서 $a=0$, $b=1$
반지름의 길이는 두 점 $(0, 1)$과 $(2, 0)$ 사이의 거리와 같으므로
$r=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$에서 $r^2=5$
$\therefore a+b+r^2=0+1+5=6$

748 ····· 답 ⑤

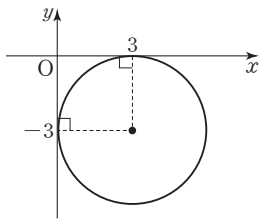
중심이 $(-3, -2)$이고 y축에 접하는 원은 다음과 같다.



원의 반지름의 길이는 원의 중심의 x좌표의 절댓값과 같으므로 3이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y+2)^2=9$

749 ····· 답 ④

원의 둘레의 길이가 6π이므로 원의 반지름의 길이는 3이다.
x축과 y축에 동시에 접하고 중심이 제4사분면 위에 있으며 반지름의 길이가 3인 원은 다음과 같으므로 중심은 $(3, -3)$이다. ····· TIP



따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+3)^2=9$에서 $x^2+y^2-6x+6y+9=0$이므로
$a=-6$, $b=6$, $c=9$
$\therefore 2a+b+c=3$

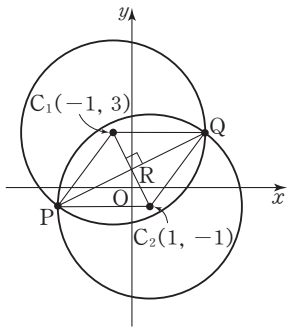
TIP

원의 중심을 (a, b)라 할 때,
원이 x축에 접하므로 $|b|=$(반지름의 길이)$=3$,
원이 y축에 접하므로 $|a|=$(반지름의 길이)$=3$이다.
이때, 원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로 $a>0$, $b<0$에서
$a=3$, $b=-3$이다.
따라서 원의 중심은 $(3, -3)$이다.

오쁘허오느새스ㅣ느그스재오스ㅣ(스ㅏ오)_흐새스ㅓ르.indb 166 22. 9. 14. 오후 8:21

750 ③

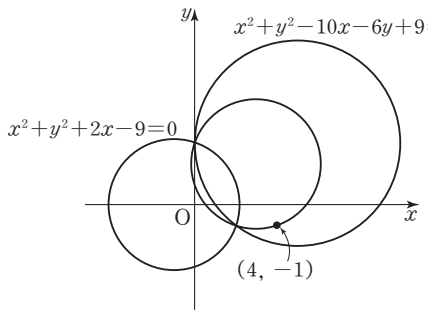
원 $(x+1)^2+(y-3)^2=25$는 중심이 $(-1, 3)$이고,
반지름의 길이가 5이다.
원 $(x-1)^2+(y+1)^2=25$는 중심이 $(1, -1)$이고,
반지름의 길이가 5이다.
두 원의 중심을 각각 $C_1(-1, 3)$, $C_2(1, -1)$이라 하고,
두 선분 C_1C_2, PQ의 교점을 R라 하면 다음과 같다.



두 원의 반지름의 길이가 같으므로 사각형 C_1PC_2Q는 마름모이다.
따라서 두 선분 C_1C_2, PQ는 서로 수직이등분한다.
$\overline{C_1C_2}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$에서 $\overline{C_1R}=\sqrt{5}$
직각삼각형 C_1PR에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{PR}=\sqrt{5^2-\sqrt{5}^2}=2\sqrt{5}$
$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PR}=4\sqrt{5}$

751 ⑤

두 원 $x^2+y^2+2x-9=0$, $x^2+y^2-10x-6y+9=0$의
교점을 지나는 원의 방정식은 …… TIP
$x^2+y^2+2x-9+k(x^2+y^2-10x-6y+9)=0\ (k\neq-1)$ …… ㉠



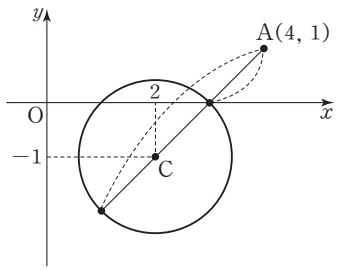
이 원이 점 $(4, -1)$을 지나므로
$x=4$, $y=-1$을 ㉠에 대입하면
$16-8k=0$에서 $k=2$
$k=2$를 ㉠에 대입하면 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2+2x-9+2(x^2+y^2-10x-6y+9)=0$
$x^2+y^2-6x-4y+3=0$
$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=10$
따라서 이 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로
구하는 원의 넓이는 10π이다.

TIP

두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$이
교점을 가질 때, 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0\ (k\neq-1)$
이다.
이 방정식을 만족시키는 x, y는 실수 k의 값에 관계없이
두 원의 방정식을 모두 만족시키므로
두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을 나타낸다.
이때, $k=0$이면 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$을 나타내므로
두 원의 교점을 지나는 원 중 원 $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$을
제외한 모든 원을 나타낼 수 있다.

752 ②

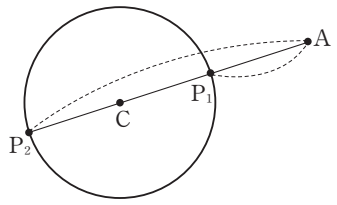
원 $(x-2)^2+(y+1)^2=2$의 중심을 C라 하면
C$(2, -1)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이다.



점 A$(4, 1)$과 원 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 길이는
$\overline{AC}$의 길이에서 반지름의 길이를 뺀 값을
최솟값으로 갖고,
$\overline{AC}$의 길이에 반지름의 길이를 더한 값을
최댓값으로 갖는다. …… TIP
이때, $\overline{AC}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{AP}$의
최댓값은 $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$이고,
최솟값은 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$이다.
따라서 구하는 값은 $3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6$이다.

TIP

원 밖의 점 A와 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}$의
최댓값과 최솟값은 다음과 같이 구할 수 있다.



원의 중심을 C라 하고, 점 C와 점 A를 이은 직선이
원과 만나는 두 점 중 점 A에 가까운 점을 P_1,
먼 점을 P_2라 하면 $P=P_1$일 때 $\overline{AP}$는 최소이고,
$P=P_2$일 때 $\overline{AP}$는 최대이다.
즉, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{AP}$의
최솟값은 $\overline{AP_1}=\overline{AC}-\overline{CP_1}=\overline{AC}-r$이고,
최댓값은 $\overline{AP_2}=\overline{AC}+\overline{CP_2}=\overline{AC}+r$이다.
따라서 $\overline{AP}$는 점 A와 원의 중심 사이의 거리에서
반지름의 길이를 뺀 값을 최솟값으로 갖고,
반지름의 길이를 더한 값을 최댓값으로 갖는다.

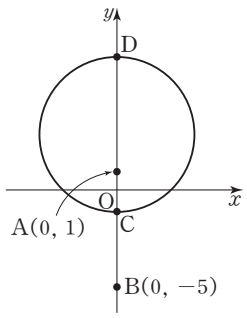
아뿌후이노베이션그룹주식회사(사이)_해설수학.indb 167 22. 9. 14. 오후 8:21

753 답 ②

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
$\overline{AP} : \overline{BP}=1 : 2$에서 $2\overline{AP}=\overline{BP}$이므로
$2\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+5)^2}$
양변을 각각 제곱하면
$4(x^2+y^2-2y+1)=x^2+y^2+10y+25$
$x^2+y^2-6y-7=0$
$\therefore x^2+(y-3)^2=16$

다른 풀이

두 점 A(0, 1), B(0, −5)에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D라 할 때,
$\overline{AP} : \overline{BP}=1 : 2$를 만족시키는 점 P의 자취는
선분 CD를 지름으로 하는 원이다. …… TIP



선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 C의 좌표는
$\left(\frac{0}{3}, \frac{-5+2}{3}\right)$ $\therefore$ C(0, −1)
선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 D의 좌표는
$\left(\frac{0}{-1}, \frac{-5-2}{-1}\right)$ $\therefore$ D(0, 7)
구하는 원의 중심은 선분 CD의 중점이므로
$\left(\frac{0}{2}, \frac{-1+7}{2}\right)$, 즉 (0, 3)이고, 반지름의 길이는
두 점 (0, 3), (0, −1) 사이의 거리와 같으므로 4이다.
따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은
$x^2+(y-3)^2=16$이다.

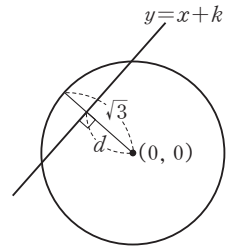
TIP

두 점 A, B에 대하여 $\overline{PA} : \overline{PB}=m : n$을 만족시키는 점 P의 자취는 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다.
이를 만족시키는 원을 아폴로니오스의 원이라 한다.

754 답 풀이 참조

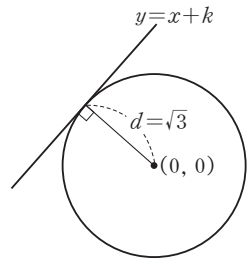
원 $x^2+y^2=3$의 중심 (0, 0)과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면 $d=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$이다.

(1) 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리 d가 반지름의 길이 $\sqrt{3}$보다 작아야 한다.



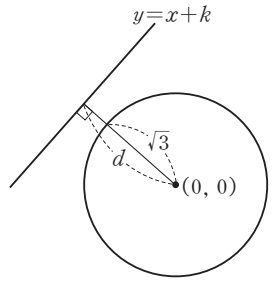
$d=\frac{|k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{3}$에서 $|k|<\sqrt{6}$
$\therefore -\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$

(2) 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리 d가 반지름의 길이 $\sqrt{3}$과 같아야 한다.



$d=\frac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$에서 $|k|=\sqrt{6}$
$\therefore k=-\sqrt{6}$ 또는 $k=\sqrt{6}$

(3) 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리 d가 반지름의 길이 $\sqrt{3}$보다 커야 한다.



$d=\frac{|k|}{\sqrt{2}}>\sqrt{3}$에서 $|k|>\sqrt{6}$
$\therefore k<-\sqrt{6}$ 또는 $k>\sqrt{6}$

다른 풀이

직선의 방정식 $y=x+k$를 원의 방정식 $x^2+y^2=3$에 대입한 이차방정식 $x^2+(x+k)^2=3$, 즉 $2x^2+2kx+k^2-3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-3)$
$=-k^2+6$

(1) 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^2+(x+k)^2=3$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=-k^2+6>0$에서 $k^2<6$
$\therefore -\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$

(2) 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 한 점에서 만나려면 방정식 $x^2+(x+k)^2=3$이 중근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=-k^2+6=0$에서 $k^2=6$
$\therefore k=-\sqrt{6}$ 또는 $k=\sqrt{6}$

아끄하ㅓ이ㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ새ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ새ㅅㅓㄹ.indb 168 22. 9. 14. 오후 8:21

(3) 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=x+k$가 만나지 않으려면 방정식 $x^2+(x+k)^2=3$의 실근이 존재하지 않아야 하므로

$\frac{D}{4}=-k^2+6<0$에서 $k^2>6$

$\therefore k<-\sqrt{6}$ 또는 $k>\sqrt{6}$

755 ····· 답 ②

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=10$은 중심이 $(2, -1)$이고,
반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이다.
이 원이 직선 $y=3x+k$와 한 점에서 만나려면
원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리가
원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같아야 하므로

$\frac{|7+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

$|k+7|=10$

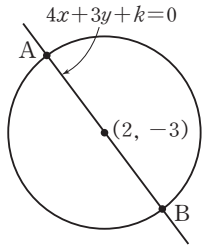
$k+7=\pm10$

$\therefore k=-17$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 -14이다.

756 ····· 답 ③

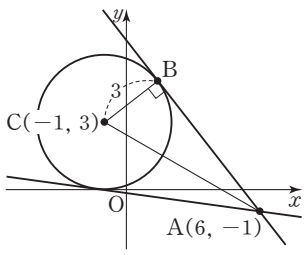
원 $x^2+y^2-4x+6y+8=0$에서
$(x-2)^2+(y+3)^2=5$
즉, 주어진 원의 중심은 $(2, -3)$이다.
직선 $4x+3y+k=0$이 원과 만나는 두 점 A, B에 대하여
선분 AB의 길이는 선분 AB가 지름이 될 때 최대이다.



따라서 선분 AB가 지름이 되려면 직선 $4x+3y+k=0$이
원의 중심 $(2, -3)$을 지나야 하므로
$8-9+k=0$
$\therefore k=1$

757 ····· 답 ④

원 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$는 중심이 $(-1, 3)$이고,
반지름의 길이가 3이다.
원의 중심을 C라 하면 다음과 같이 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 $\overline{AC}$인 직각삼각형이다.



$\overline{AC}=\sqrt{7^2+(-4)^2}=\sqrt{65}$, $\overline{BC}=3$이므로
피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AB}=\sqrt{\sqrt{65}^2-3^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$

TIP

원 밖의 점과 원 밖의 점에서 원에 그은 두 접선의 두 접점까지의 거리는 서로 같다. 그러므로 원 밖의 점 A에서 그은 두 접선의 접점 중 어느 것을 점 B로 잡아도 선분 AB의 길이는 같다.

758 ····· 답 ⑤

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식은
$3x+y=10$이다.
$\therefore y=-3x+10$

759 ····· 답 ②

직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$은 기울기가 2인 직선이므로
이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
원 $x^2+y^2=20$의 반지름의 길이는 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이므로
원 $x^2+y^2=20$에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x\pm2\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{1}{4}+1}$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x\pm5$

이 직선이 점 $(1, k)$를 지나므로 $k=-\frac{1}{2}\pm5$

$\therefore k=\frac{9}{2}$ ($\because k>0$)

다른 풀이

직선 $2x-y+3=0$과 수직인 직선의 방정식을
$x+2y+a=0$ (a는 상수)이라 하자.
이 직선이 원 $x^2+y^2=20$에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과
이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{5}$와 같다.

즉, $\frac{|a|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$에서 $|a|=10$ $\therefore a=\pm10$

따라서 직선 $x+2y\pm10=0$이 점 $(1, k)$를 지나므로
$1+2k\pm10=0$

$\therefore k=\frac{9}{2}$ ($\because k>0$)

760 ····· 답 풀이 참조

점 $(3, -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을
$y=m(x-3)-1$ (m은 상수) ····· ㉠
라 하면 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-3m-1=0$ 사이의
거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$에서

$|-3m-1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 각각 제곱하면

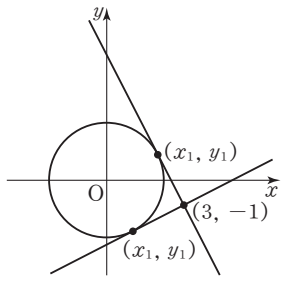
아끄하이노새시ㅣㄴㄱㅗ조재이스ㅣ(사ㅇ)_해설편.indb 169 22. 9. 14. 오후 8:21

$(3m+1)^2=5(m^2+1)$, $2m^2+3m-2=0$
$(2m-1)(m+2)=0$
$\therefore\ m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=-2$
이 값을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$, $y=-2x+5$이다.

채점 요소	배점
점 $(3,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식 세우기	20%
접선의 방정식에서 미지수 구하기	60%
접선의 방정식 구하기	20%

다른 풀이

점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 접점을 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=5$ …… ㉡



이 접선이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로
$3x_1-y_1=5$ …… ㉢
또한 점 $(x_1,\ y_1)$이 원 위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=5$ …… ㉣
㉢에서 $y_1=3x_1-5$를 ㉣에 대입하면
$x_1^2+(3x_1-5)^2=5$, $10x_1^2-30x_1+20=0$
$x_1^2-3x_1+2=0$, $(x_1-1)(x_1-2)=0$
$\therefore\ x_1=1,\ y_1=-2$ 또는 $x_1=2,\ y_1=1$
이 값을 ㉡에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$x-2y=5$, $2x+y=5$이다.

채점 요소	배점
접점을 미지수로 둔 접선의 방정식 세우기	20%
접점의 좌표 구하기	60%
접선의 방정식 구하기	20%

761

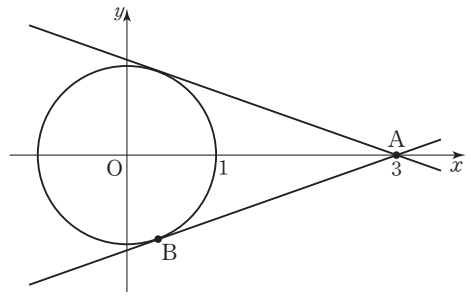
답 ④

점 $(2,\ 0)$에서 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$에 그은 접선의 방정식을 $y=m(x-2)$ (m은 상수)라 하면
원의 중심 $(2,\ 3)$과 직선 $mx-y-2m=0$ 사이의 거리가
원의 반지름의 길이 1과 같으므로
$\frac{|2m-3-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $\sqrt{m^2+1}=3$
$m^2=8$ $\therefore\ m=\pm2\sqrt{2}$
따라서 두 접선의 기울기의 곱은
$2\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=-8$

762

답 ⑤

점 A$(3,\ 0)$과 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 B에 대하여 두 점을 이은 직선의 기울기가 최대일 때는 다음과 같이 직선 AB가 제4사분면에서 원 $x^2+y^2=1$과 접할 때이다.



원과 제4사분면에서 접하는 접선의 기울기를 m ($m>0$)이라 하면 접선의 방정식은 $y=m(x-3)$이다.
따라서 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y-3m=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로
$\frac{|-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$에서 $|3m|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 각각 제곱하면
$9m^2=m^2+1$, $m^2=\frac{1}{8}$
$\therefore\ m=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ($\because\ m>0$)

참고

점 A가 x축 위의 점이고 원 $x^2+y^2=1$이 x축에 대하여 대칭이므로 점 A에서 원에 그은 두 접선도 x축에 대하여 대칭이다.
이때, 점 A에서 원에 그은 두 접선 중
접점이 제4사분면에 있는 접선의 기울기가 $\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로
접점이 제1사분면에 있는 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.
따라서 직선 AB의 기울기를 k라 하면 k의 값의 범위는
$-\frac{\sqrt{2}}{4}\le k\le\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.

763

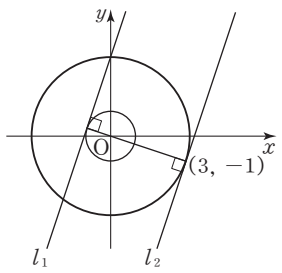
답 ③

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은
$2x+y=5$이다.
이 직선이 원 $x^2+y^2=15$와 만나는 두 점의 x좌표는 두 식 $y=-2x+5$, $x^2+y^2=15$를 연립한 이차방정식 $x^2+(-2x+5)^2=15$의 해와 같다.
정리하면 $5x^2-20x+10=0$ $\therefore\ x^2-4x+2=0$
이 이차방정식의 두 실근이 α, β이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=12$

오투확인체크_내신_기출문제_정답(상)_해설.indb 170 22. 9. 14. 오후 8:21

764 ④

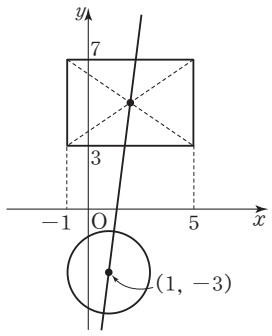
원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3, -1)$에서의 접선 l_2의 방정식은
$3x-y=10$, 즉 $y=3x-10$이고,
직선 l_1의 기울기도 3이므로 두 직선 l_1, l_2는 평행하다.



두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 원점에서 두 직선 l_1, l_2로 각각 내린 두 수선의 길이의 합과 같고, 이는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같으므로 구하는 값은 $1+\sqrt{10}$이다.

765 풀이 참조

원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심을 지나야 하고,
직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.



원 $x^2+y^2-2x+6y+6=0$에서
$(x-1)^2+(y+3)^2=4$
즉, 주어진 원의 중심은 $(1, -3)$이다.
네 직선 $x=-1$, $x=5$, $y=3$, $y=7$로 둘러싸인
직사각형의 두 대각선의 교점은
$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$, 즉 $(2, 5)$이다.
따라서 구하는 직선은 두 점 $(1, -3)$, $(2, 5)$를 지나는
직선이므로 직선의 방정식은
$y+3=\frac{5-(-3)}{2-1}(x-1)$
$\therefore y=8x-11$

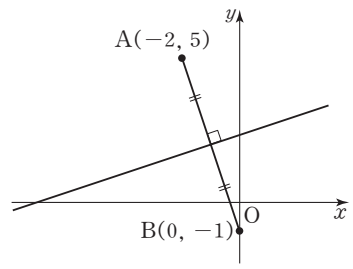
채점 요소	배점
주어진 원의 중심 구하기	30 %
주어진 직사각형의 대각선의 교점의 좌표 구하기	30 %
원과 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 방정식 구하기	40 %

766 ③

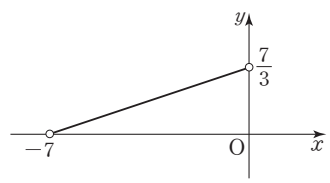
원 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$에서 $(x-3)^2+(y+2)^2=25$이고
두 직선 $y=ax$와 $y=bx+c$에 의하여 원의 넓이가 4등분 되려면
두 직선이 모두 원의 중심을 지나고 두 직선이 서로 수직이어야 한다.
직선 $y=ax$가 원의 중심 $(3, -2)$를 지나므로 대입하면
$-2=3a$에서 $a=-\frac{2}{3}$, 이때 직선의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x$이다.
직선 $y=bx+c$는 직선 $y=-\frac{2}{3}x$와 수직이므로 $b=\frac{3}{2}$이고
원의 중심 $(3, -2)$를 지나므로 대입하면
$-2=\frac{3}{2}\times 3+c$, $c=-\frac{13}{2}$
이때 직선의 방정식은 $y=\frac{3}{2}x-\frac{13}{2}$이다.
$\therefore abc=\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{13}{2}\right)=\frac{13}{2}$

767 ③

A$(-2, 5)$, B$(0, -1)$이라 하자.
두 점 A, B를 지나는 원은 중심에서 두 점 A, B까지의 거리가 서로 같으므로
원의 중심이 그리는 도형은 선분 AB의 수직이등분선의 일부이다.



선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{5+(-1)}{2}\right)$ $\therefore (-1, 2)$
직선 AB의 기울기가 $\frac{-1-5}{0-(-2)}=-3$이므로 선분 AB의
수직이등분선의 방정식은
$y-2=\frac{1}{3}(x+1)$ $\therefore x-3y+7=0$
이 직선의 x절편이 -7, y절편이 $\frac{7}{3}$이므로 원의 중심이
제2사분면 위에 있을 때 원의 중심이 그리는 도형은 다음과 같다.

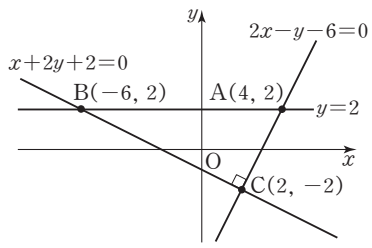


따라서 원의 중심이 그리는 도형의 길이는
$\sqrt{7^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2}=\frac{7\sqrt{10}}{3}$

아뜨헤어느래스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해설ㅅㅓㄹ.indb 171 22. 9. 14. 오후 8:21

768 ····· 답 ①

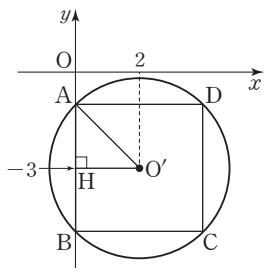
두 직선 $2x-y-6=0$, $y=2$의 교점의 좌표는 $(4, 2)$
두 직선 $x+2y+2=0$, $y=2$의 교점의 좌표는 $(-6, 2)$
두 직선 $2x-y-6=0$, $x+2y+2=0$의 교점의 좌표는
두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-2$이므로 $(2, -2)$이다.
$A(4, 2)$, $B(-6, 2)$, $C(2, -2)$라 하면 다음과 같다.



이때, 두 직선 $2x-y-6=0$, $x+2y+2=0$은 서로 수직이므로
삼각형 ABC는 $\angle ACB=90^\circ$인 직각삼각형이다.
따라서 외접원의 중심은 선분 AB의 중점인 $(-1, 2)$이고,
반지름의 길이는 두 점 $(-1, 2)$, $(4, 2)$ 사이의 거리와
같으므로 5이다.
따라서 외접원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-2)^2=25$이므로
$a=-1$, $b=2$, $r=25$
$\therefore a+b+r=26$

769 ····· 답 ②

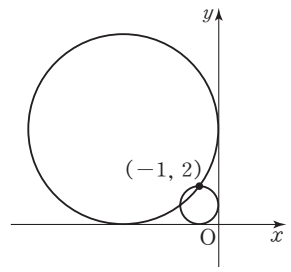
방정식 $\frac{a}{2}x^2+y^2-4x+6y+b=0$이 원을 나타내므로
x^2의 계수와 y^2의 계수가 같아야 한다.
즉, $\frac{a}{2}=1$에서 $a=2$
원 $x^2+y^2-4x+6y+b=0$에서
$(x-2)^2+(y+3)^2=13-b$ ····· ㉠
이므로 중심이 $(2, -3)$이다.
원의 중심을 $O'(2, -3)$이라 하고, 다음과 같이
점 O'에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



정사각형 ABCD가 원에 내접하므로
네 삼각형 ABO′, BCO′, CDO′, DAO′이 서로 합동이다.
$\angle O'AH=45^\circ$이므로 삼각형 O′AH는 직각이등변삼각형이고,
$\overline{O'H}=2$이므로
$\overline{AO'}=\sqrt{2}\times\overline{O'H}=2\sqrt{2}$
즉, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 ㉠에서
$13-b=(2\sqrt{2})^2$ $\therefore b=5$
$\therefore a+b=2+5=7$

770 ····· 답 $4\sqrt{2}$

점 $(-1, 2)$를 지나면서 x축과 y축에 모두 접하는 원의 중심은
다음과 같이 제2사분면 위에 있다.



따라서 원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$라 하면
중심이 $(-r, r)$이므로 원의 방정식은
$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$
$r^2-6r+5=0$, $(r-1)(r-5)=0$ $\therefore r=1$ 또는 $r=5$
따라서 구하는 두 원의 중심은 각각 $(-1, 1)$, $(-5, 5)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$이다.

771 ····· 답 (1) 40π (2) 16π

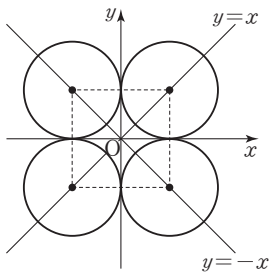
(1) x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표는
(a, a) 또는 $(a, -a)$로 놓을 수 있다. ····· TIP
원의 중심이 직선 $x+2y-6=0$ 위에 있으므로
중심이 (a, a)일 때, $a+2a-6=0$에서 $a=2$
중심이 $(a, -a)$일 때, $a-2a-6=0$에서 $a=-6$
$a=2$일 때, 원의 반지름의 길이는 2이므로 원의 넓이는
$\pi\times2^2=4\pi$
$a=-6$일 때, 원의 반지름의 길이는 6이므로 원의 넓이는
$\pi\times6^2=36\pi$
따라서 구하는 모든 원의 넓이의 합은 $4\pi+36\pi=40\pi$이다.

(2) x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표는
(a, a) 또는 $(a, -a)$으로 놓을 수 있다.
(i) 원의 중심이 (a, a)일 때
원의 중심이 곡선 $y=x^2-x-3$ 위의 점이므로 대입하면
$a=a^2-a-3$, $a^2-2a-3=(a+1)(a-3)=0$
$a=-1$ 또는 $a=3$
$a=-1$일 때, 원의 반지름의 길이는 1이므로 원의 넓이는
$\pi\times1^2=\pi$
$a=3$일 때, 원의 반지름의 길이는 3이므로 원의 넓이는
$\pi\times3^2=9\pi$
(ii) 원의 중심이 $(a, -a)$일 때
원의 중심이 곡선 $y=x^2-x-3$ 위의 점이므로 대입하면
$-a=a^2-a-3$, $a^2-3=(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$
$a=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$
이때, 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이므로 원의 넓이는
$\pi(\sqrt{3})^2=3\pi$
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 원의 넓이의 합은
$\pi+9\pi+3\pi+3\pi=16\pi$

아끄하ㅓ아ㄴ새ㅅ시ㅣㄴㄱㅗ조재아ㅅ시ㅣ(사ㅏ아)_하새ㅅ서ㄹ.indb 172 22. 9. 14. 오후 8:21

TIP

x축, y축에 동시에 접하는 원이
제1사분면 또는 제3사분면 위에 있을 때
원의 중심은 (a, a)로 놓을 수 있고
제2사분면 또는 제4사분면 위에 있을 때
원의 중심은 $(a, -a)$로 놓을 수 있다.



772 ····· 답 5

두 점 A$(-3, 0)$, B$(1, 0)$의 중점의 좌표는
$\left(\frac{(-3)+1}{2}, 0\right)$, 즉 $(-1, 0)$
이고, 이 점과 점 B$(1, 0)$ 사이의 거리는 $1-(-1)=2$이므로
원의 중심이 $(-1, 0)$이고 반지름의 길이가 2이다.
그러므로 원의 방정식은 $(x+1)^2+y^2=4$이고, ····· ㉠
x의 값의 범위는 $-3\le x\le 1$이다.
$y^2-2x=4-(x+1)^2-2x$ ($\because$ ㉠)
$\quad=-x^2-4x+3=-(x+2)^2+7$
$-3\le x\le 1$일 때 $x=-2$에서 최댓값 7을 갖고,
$x=1$에서 최솟값 -2를 갖는다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $7+(-2)=5$

773 ····· 답 ②

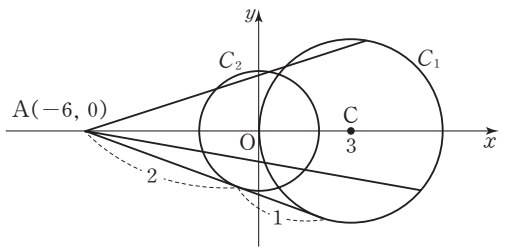
$x^2+y^2-2(a+1)x+2(a-1)y=2a+3$에서
$\{x-(a+1)\}^2+\{y+(a-1)\}^2=(a+1)^2+(a-1)^2+2a+3$
$\quad=2a^2+2a+5$
즉 중심이 $(a+1, -a+1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2a^2+2a+5}$인 원이다. ····· ㉠
ㄱ. 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2a^2+2a+5}$이고,
$2a^2+2a+5=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$에서
$a=-\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $\frac{9}{2}$를 갖는다.
그러므로 원의 넓이의 최솟값은 $\pi\times\left(\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2=\frac{9}{2}\pi$이다. (참)
ㄴ. 원이 x축과 접하면 중심의 y좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같으므로 ㉠에서 $|-a+1|=\sqrt{2a^2+2a+5}$
양변을 각각 제곱하면
$a^2-2a+1=2a^2+2a+5$, $a^2+4a+4=0$, $(a+2)^2=0$에서
$a=-2$이다. (참)
ㄷ. 원의 중심을 (x, y)라 하면 ㉠에서
$x=a+1$, $y=-a+1$에서 $y=-(x-1)+1=-x+2$이다.
즉, 원의 중심 (x, y)는 항상 직선 $y=-x+2$ 위에 있다.
직선 $y=-x+2$의 x절편은 2이고, y절편은 2이므로 이 직선과
x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$이다.
(거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

774 ····· 답 $x^2+y^2=4$

B(x_1, y_1)이라 하면 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{2x_1-6}{3}, \frac{2y_1}{3}\right)$
점 P의 좌표를 (x, y)라 하면
$x=\frac{2x_1-6}{3}$, $y=\frac{2y_1}{3}$
$\therefore x_1=\frac{3x+6}{2}$, $y_1=\frac{3}{2}y$ ····· ㉠
이때, 점 B가 원 $x^2+y^2-6x=0$ 위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2-6x_1=0$
$\left(\frac{3x+6}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2-6\times\frac{3x+6}{2}=0$ ($\because$ ㉠)
$(x+2)^2+y^2-4(x+2)=0$ $\quad\therefore x^2+y^2=4$
따라서 구하는 도형의 방정식은 $x^2+y^2=4$이다.

다른 풀이

원 C_1 : $x^2+y^2-6x=0$이라 하면
C_1 : $(x-3)^2+y^2=9$
이 원은 중심이 $(3, 0)$이고 반지름의 길이가 3이다.
점 A$(-6, 0)$과 원 C_1 위의 점 B에 대하여
선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이 나타내는 도형을 C_2라 하면
두 도형 C_1, C_2는 닮음비가 3 : 2인 닮은 도형이다.



원 C_1의 반지름의 길이가 3이므로 원 C_2의 반지름의 길이는 2이고,
원 C_1의 중심을 C$(3, 0)$이라 하면
원 C_2의 중심은 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $(0, 0)$이다.
따라서 구하는 원 C_2의 방정식은 $x^2+y^2=4$이다.

775 ····· 답 ⑤

점 P의 좌표를 (x_1, y_1), 점 G의 좌표를 (x, y)라 하면
$x=\frac{5+(-2)+x_1}{3}$, $y=\frac{-2+(-4)+y_1}{3}$이므로
$x_1=3x-3$, $y_1=3y+6$ ····· ㉠
이때, 점 P가 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=4$

아쿠후우노내시ㅣ노그고조재으시ㅣ(사ㅇ)_해시ㅓ르.indb 173 22. 9. 14. 오후 8:21

즉, $(3x-3)^2+(3y+6)^2=4$ ($\because$ ㉠)이므로

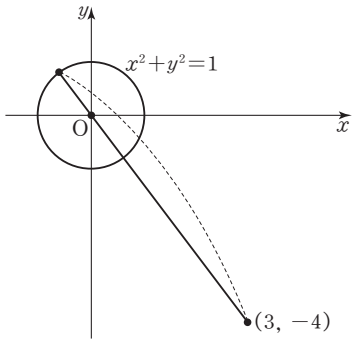
$(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{4}{9}$

따라서 점 G가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{2}{3}$인 원이므로

그 길이는 $\frac{4}{3}\pi$이다.

776 ····· 답 36

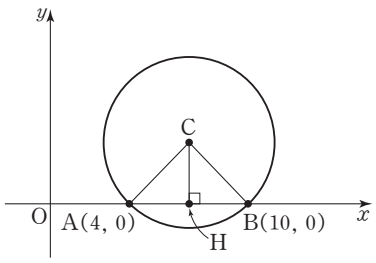
두 점 A$(-1, 0)$, B$(1, 0)$에 대하여 점 P(a, b)가
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=4$를 만족시키므로
$(a+1)^2+b^2+(a-1)^2+b^2=4$, $2a^2+2b^2=2$
$\therefore a^2+b^2=1$
따라서 점 P의 자취는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이다.
이때, $(a-3)^2+(b+4)^2$은 두 점 (a, b), $(3, -4)$ 사이의 거리의 제곱과 같다.



점 $(3, -4)$와 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 (a, b) 사이의 거리의 최댓값은 원의 중심 $(0, 0)$과 점 $(3, -4)$ 사이의 거리에 반지름의 길이 1을 더한 값이므로
$\sqrt{3^2+(-4)^2}+1=6$
따라서 $(a-3)^2+(b+4)^2$의 최댓값은 $6^2=36$이다.

777 ····· 답 20

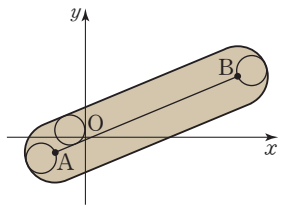
원의 중심을 C라 하고, 원의 중심에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형 ABC에서
점 H는 선분 AB의 중점이므로 점 H의 좌표는
$\left(\frac{4+10}{2}, 0\right)$ $\therefore$ H$(7, 0)$
$\overline{AH}=3$, $\overline{AC}=5$이므로 직각삼각형 AHC에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{CH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$이다.
$\therefore$ C$(7, 4)$
이때, 점 O$(0, 0)$과 원의 중심 C$(7, 4)$ 사이의 거리는
$\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}$이므로
점 O$(0, 0)$과 원 위의 점 P 사이의 거리를 k라 할 때,
$\sqrt{65}-5\le k\le\sqrt{65}+5$
따라서 자연수 k의 값은 4, 5, 6, …, 13이고,
각 값에 대하여 점 P가 2개씩 존재하므로
구하는 점 P의 개수는 $10\times2=20$이다.

778 ····· 답 $4\pi+26$

선분 AB와 적어도 한 점에서 만나면서 반지름의 길이가 1인 원이 나타내는 도형은 다음과 같다.



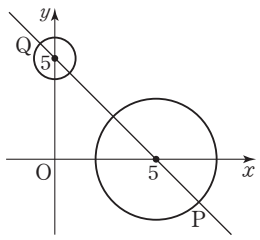
이 도형은 가로의 길이가 $\overline{AB}=\sqrt{(-2-10)^2+(-1-4)^2}=13$이고 세로의 길이가 4인 직사각형과 반지름의 길이가 2인 두 반원으로 이루어진다.
직사각형의 가로인 두 변의 길이의 합은 $13\times2=26$이고,
두 반원의 호의 길이의 합은 $2\times\left(\frac{1}{2}\times4\pi\right)=4\pi$
따라서 구하는 도형의 둘레의 길이는 $4\pi+26$이다.

779 ····· 답 ③

ㄱ. $m=n=1$일 때, 도형 C는 선분 AB의 수직이등분선을 나타낸다. (거짓)

ㄴ. $m\ne n$일 때, 도형 C는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 나타낸다.
$m<n$일 때, 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점은 점 A의 오른쪽에, 외분하는 점은 점 A의 왼쪽에 위치하므로 도형 C의 내부에 점 A가 존재한다. (참)

ㄷ. $m=3$, $n=1$일 때, 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{3\times4+1\times(-4)}{3+1}, 0\right)$, 즉 $(2, 0)$이고 3 : 1로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{3\times4-1\times(-4)}{3-1}, 0\right)$, 즉 $(8, 0)$이므로 도형 C는 중심이 $(5, 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.
이때, 원 $x^2+(y-5)^2=1$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}$의 최댓값은 두 원의 중심 사이의 거리에 두 원의 반지름의 길이를 각각 더한 값과 같다.

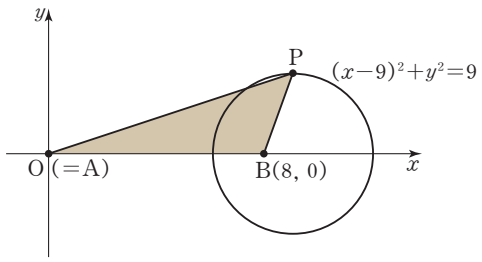


그러므로 $\overline{PQ}=\sqrt{5^2+5^2}+1+3=4+5\sqrt{2}$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

이쁘허이노새시니그노조재으시(사이)_해설서로.indb 174 22. 9. 14. 오후 8:21

780 ····· 답 ③

두 지점 A, B를 각각 좌표평면 위의 두 점 A(0, 0), B(8, 0)으로 놓고, 지점 P를 점 P(a, b)라 하자.
지점 A에서 출발하는 배의 속력이 지점 B에서 출발하는 배의 속력보다 3배 빠르므로 $\overline{AP}=3\overline{BP}$이다.
즉, $\sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{(a-8)^2+b^2}$이므로
양변을 각각 제곱하면 $a^2+b^2=9(a^2-16a+64+b^2)$
$a^2-18a+b^2+72=0$ $\therefore (a-9)^2+b^2=9$
따라서 점 P의 자취는 원 $(x-9)^2+y^2=9$이다.



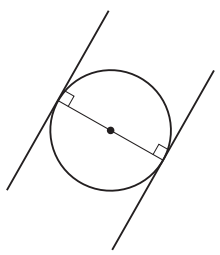
이때, 삼각형 ABP에서 선분 AB를 밑변으로 놓으면 높이가 최대일 때 넓이도 최대가 된다.
삼각형 ABP의 높이는 점 P의 y좌표의 절댓값과 같으므로 점 P의 좌표가 (9, 3) 또는 (9, −3)일 때 최댓값 3을 갖는다.
따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은
$\frac{1}{2}\times 8\times 3=12(\text{km}^2)$이다.

다른 풀이

$\overline{AP}=3\overline{BP}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형을 다음과 같이 구할 수 있다.
$\overline{AP}=3\overline{BP}$에서 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$을 만족시키는 점 P의 자취는
선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 (6, 0)과
선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 (12, 0)을
지름의 양 끝점으로 하는 원이다.
따라서 중심이 (9, 0)이고 반지름의 길이가 3인 원 $(x-9)^2+y^2=9$를 나타낸다.
이후 풀이는 본풀이와 같다.

781 ····· 답 ⑤

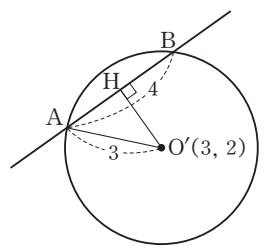
평행한 두 직선 $2x-y+1=0$, $px-y+q=0$은 기울기가 같으므로 $p=2$이다.
다음과 같이 평행한 두 직선에 동시에 접하는 원의 지름의 길이는 두 직선 사이의 거리와 같다.



원의 넓이가 5π이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이고,
지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.
직선 $2x-y+1=0$ 위의 점 (0, 1)과 직선 $2x-y+q=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이므로
$\frac{|-1+q|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$
$\frac{|q-1|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$, $|q-1|=10$
$\therefore q=11$ ($\because q>0$)
$\therefore p+q=2+11=13$

782 ····· 답 ①

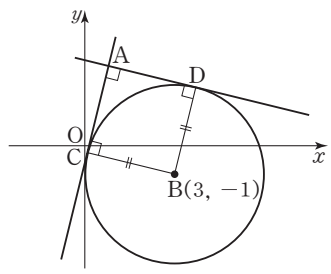
원 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$에서 $(x-3)^2+(y-2)^2=9$이므로 중심이 (3, 2)이고 반지름의 길이가 3이다.
원의 중심을 O′이라 하고, 다음과 같이 원과 직선 $y=2x+k$가 만나는 두 점을 A, B, 원 O′에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{AB}=4$이므로 $\overline{AH}=2$,
$\overline{AO'}=3$이므로 직각삼각형 AO′H에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{O'H}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$
이때, $\overline{O'H}$는 점 O′(3, 2)와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\overline{O'H}=\frac{|6-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}$
즉, $\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$에서 $|k+4|=5$이므로
$k=1$ 또는 $k=-9$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 −8이다.

783 ····· 답 ②

점 A(1, k)라 하고, 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$의 중심을 B(3, −1), 점 A(1, k)에서 원에 그은 두 접선이 원과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자.



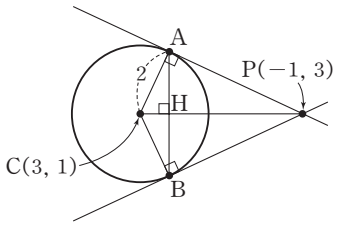
이때, 사각형 ACBD의 네 각이 모두 직각이고, $\overline{BC}=\overline{BD}=3$이므로 사각형 ACBD는 정사각형이다.

아끄하우스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해ㅅㅓ르.indb 175 22. 9. 14. 오후 8:21

따라서 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{(-2)^2+(k+1)^2}=3\sqrt{2}$
양변을 각각 제곱하면 $(-2)^2+(k+1)^2=18$
$(k+1)^2=14$, $k+1=\sqrt{14}$ ($\because k>0$)
$\therefore k=\sqrt{14}-1$

784 ····· 답 ②

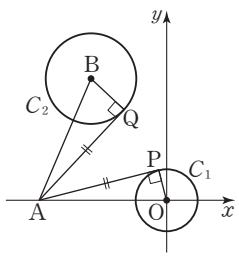
원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$에서 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$이므로
중심이 (3, 1)이고 반지름의 길이가 2이다.
중심을 C(3, 1)이라 하고, 다음과 같이 선분 CP와 선분 AB의 교점을 H라 하자.



$\overline{CP}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{AC}=2$이므로 직각삼각형 ACP에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AP}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$
$\overline{CP}:\overline{AP}=2\sqrt{5}:4$, 즉 $\overline{CP}:\overline{AP}=\sqrt{5}:2$
두 삼각형 ACP, HAP가 닮음이므로 넓이의 비는 5 : 4이다.
이때, 삼각형 ACP의 넓이가 $\frac{1}{2}\times4\times2=4$이므로
삼각형 HAP의 넓이는 $4\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$
따라서 삼각형 PAB의 넓이는
$2\times\frac{16}{5}=\frac{32}{5}$

785 ····· 답 $-\frac{42}{5}$

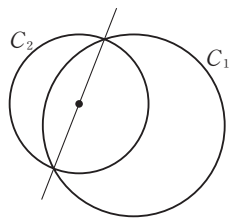
$C_2: x^2+y^2+10x-16y+80=0$에서 $C_2: (x+5)^2+(y-8)^2=9$
원 C_2의 중심을 B, 점 A의 좌표를 $(a, 0)$ (a는 실수)라 하자.



$\overline{AO}=|a|$, $\overline{AB}=\sqrt{(a+5)^2+8^2}=\sqrt{a^2+10a+89}$이고,
$\overline{OP}=2$, $\overline{BQ}=3$이므로
$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{|a|^2-2^2}=\sqrt{a^2-4}$,
$\overline{AQ}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BQ}^2}=\sqrt{a^2+10a+89-3^2}=\sqrt{a^2+10a+80}$
이때, $\overline{AP}=\overline{AQ}$이므로
$\sqrt{a^2-4}=\sqrt{a^2+10a+80}$에서 양변을 각각 제곱하면
$a^2-4=a^2+10a+80$, $10a=-84$
$\therefore a=-\frac{42}{5}$

786 ····· 답 ①

$C_1: x^2+y^2+4ax-2ay-3=0$,
$C_2: x^2+y^2-6x+2y+3=0$이라 하자.
원 C_1이 원 C_2의 둘레를 이등분할 때, 두 원의 교점을 이은 선분이 원 C_2의 지름이므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 C_2의 중심을 지난다.



원 $C_2: x^2+y^2-6x+2y+3=0$에서
$(x-3)^2+(y+1)^2=7$이므로 중심이 (3, −1)이다.
두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2+4ax-2ay-3)-(x^2+y^2-6x+2y+3)=0$
$(4a+6)x-(2a+2)y-6=0$
$\therefore (2a+3)x-(a+1)y-3=0$
이 직선이 점 (3, −1)을 지나므로
$3(2a+3)+(a+1)-3=0$, $7a+7=0$
$\therefore a=-1$

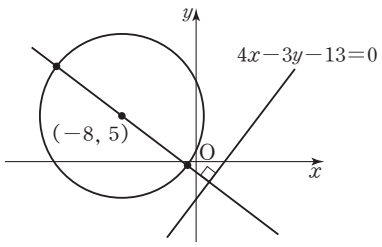
787 ····· 답 ④

직선 l을 $y=ax+b$ (a, b는 실수)라 하면
직선 l이 곡선 $y=-\frac{1}{2}x^2$에 접하므로 이차방정식
$-\frac{1}{2}x^2=ax+b$, 즉 $x^2+2ax+2b=0$이 중근을 가진다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-2b=0$, $a^2=2b$ ····· ㉠
직선 $y=ax+b$가 원 $x^2+(y-2)^2=4$에 접하므로 원의 중심 (0, 2)와 직선 $y=ax+b$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.
$\frac{|-2+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2$, $|b-2|=2\sqrt{a^2+1}$에서 양변을 각각 제곱하면
$b^2-4b+4=4(2b+1)$ ($\because$ ㉠)
$b^2-12b=b(b-12)=0$에서 $b=0$ 또는 $b=12$
$b=0$일 때, $a=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
$b=12$일 때, $a^2=24$이므로 $a=2\sqrt{6}$ 또는 $a=-2\sqrt{6}$
따라서 구하는 직선 l의 모든 기울기의 곱은
$2\sqrt{6}\times(-2\sqrt{6})=-24$

아끄하셔이노내스시ㅣㄴㄱㅗ즈재이스시ㅣ(사ㅇ)_해설서ㄹ.indb 176 22. 9. 14. 오후 8:21

788 ····· 답 ③

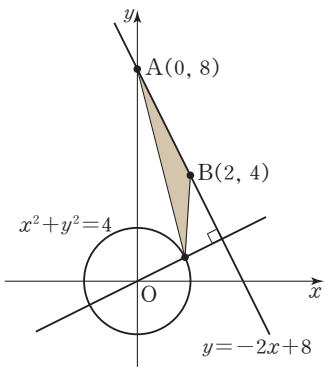
원 $x^2+y^2+16x-10y+8=0$에서 $(x+8)^2+(y-5)^2=81$이므로
중심이 $(-8, 5)$이고 반지름의 길이가 9이다.



원 위의 점 A와 직선 $4x-3y-13=0$ 사이의 거리는
원의 중심 $(-8, 5)$와 직선 $4x-3y-13=0$ 사이의 거리에
반지름의 길이를 더한 값을 최댓값으로 갖고,
반지름의 길이를 뺀 값을 최솟값으로 갖는다.
원의 중심 $(-8, 5)$와 직선 $4x-3y-13=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-32-15-13|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{60}{5}=12$이므로
구하는 최댓값은 $12+9=21$이고, 최솟값은 $12-9=3$이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은
$21+3=24$이다.

789 ····· 답 $8-2\sqrt{5}$

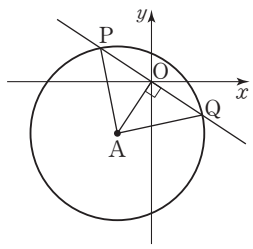
삼각형 PAB의 밑변을 선분 AB라 하면
$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$로 일정하다.
삼각형 PAB의 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리이므로
원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소일 때,
삼각형 PAB의 넓이가 최소이다.



직선 AB의 방정식은
$y=\frac{4-8}{2-0}x+8 \quad \therefore y=-2x+8$
원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은
원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x+y-8=0$ 사이의 거리에서
반지름의 길이 2를 뺀 값이므로
$\frac{|-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}-2=\frac{8}{\sqrt{5}}-2$
따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은
$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\left(\frac{8}{\sqrt{5}}-2\right)=8-2\sqrt{5}$

790 ····· 답 ⑤

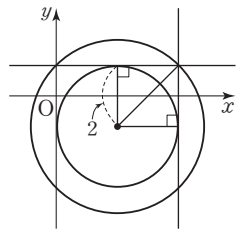
원 $(x+2)^2+(y+3)^2=25$의 중심 A$(-2, -3)$과 직선 $y=kx$
사이의 거리가 최대일 때, 현 PQ의 길이가 최소이다.
이때, 점 A와 직선 $y=kx$ 사이의 거리가 최대일 때는 직선 OA와
직선 $y=kx$가 서로 수직일 때이다.



직선 OA의 기울기가 $\frac{3}{2}$이므로
직선 $y=kx$의 기울기는 $k=-\frac{2}{3}$이고,
$\overline{OA}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, $\overline{AP}=5$에서
$\overline{OP}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{5^2-\sqrt{13}^2}=2\sqrt{3}$
그러므로 $\overline{PQ}=2\overline{OP}=4\sqrt{3}$이고, 삼각형 APQ의 둘레의 길이는
$4\sqrt{3}+2\times 5=10+4\sqrt{3}$

791 ····· 답 $6\sqrt{2}$

$x^2+y^2-4x+2y+1=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$이고,
이 원에 접하는 접선들 중에서 서로 수직인 두 직선의 교점 P가
그리는 도형은 중심이 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$와 일치하고
반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이다.

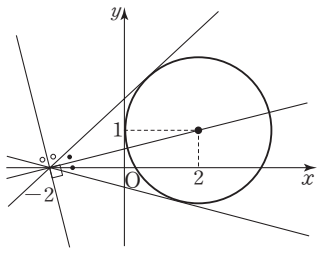


그러므로 점 P가 나타내는 도형의 방정식은
$(x-2)^2+(y+1)^2=8$
이고, 이 원과 직선 $y=x+5$ 사이의 거리의 최댓값은 원의 중심과
직선 사이의 거리에서 반지름의 길이를 더한 값과 같으므로
$\frac{|2+1+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

792 ····· 답 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$, $y=-4x-8$

다음과 같이 점 $(-2, 0)$에서 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$에 그은
두 접선이 이루는 각을 이등분하는 두 직선 중 한 직선은
원의 중심을 지난다.

오투확인체크 | 도형의 방정식(사은)_해설.indb 177 22. 9. 14. 오후 8:21



즉, 이 직선은 점 $(-2, 0)$과 원의 중심 $(2, 1)$을 지나므로
직선의 방정식은

$y=\frac{1-0}{2-(-2)}(x+2)$ $\therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

두 접선이 이루는 각을 이등분하는 다른 한 직선은

직선 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$과 수직이면서 점 $(-2, 0)$을 지나므로

직선의 방정식은

$y=-4(x+2)$ $\therefore y=-4x-8$

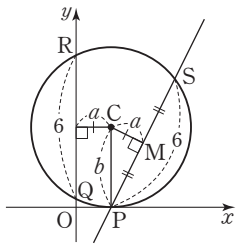
따라서 구하는 두 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$, $y=-4x-8$

793 ····· 답 ①

원의 중심을 $C(a, b)$라 하면 점 P의 좌표는 $(a, 0)$이다.
점 P를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은
$y=2(x-a)$, 즉 $2x-y-2a=0$이다.
이때, $\overline{QR}=\overline{PS}=6$이므로 원의 중심에서 y축 사이의 거리와 원의 중심에서 직선 $2x-y-2a=0$ 사이의 거리가 서로 같다.

$a=\frac{|2a-b-2a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$, $b=\sqrt{5}a$ $(\because b>0)$ ····· ㉠



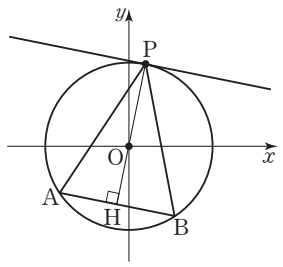
점 C에서 직선 PS에 내린 수선의 발을 M이라 할 때
$\overline{PM}=3$이고 삼각형 CPM에서
$b^2=a^2+3^2$, $(\sqrt{5}a)^2=a^2+9$ $(\because$ ㉠$)$

$4a^2=9$에서 $a=\frac{3}{2}$ $(\because a>0)$이고 $b=\frac{3}{2}\sqrt{5}$

$\therefore a^2+b^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)^2=\frac{27}{2}$

794 ····· 답 26

삼각형 ABP의 밑변을 선분 AB라 할 때,
$\overline{AB}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$
으로 일정하므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형의 넓이가 최대이다.
따라서 다음과 같이 직선 AB와 평행한 원의 접선 중 제1사분면에서 원과 접하는 접선의 접점이 P가 될 때, 삼각형 ABP의 넓이가 최대이다.
점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PH는 점 P에서의 접선과 수직이므로 원의 중심인 원점을 지난다.



이때, 이등변삼각형 OAB에서 점 H는 선분 AB의 중점이므로
점 H의 좌표는

$\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{-2+(-3)}{2}\right)$

$\therefore \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

$\overline{OH}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$이고,
$\overline{PH}=\overline{OP}+\overline{OH}$이므로

$\overline{PH}=\sqrt{13}+\frac{\sqrt{26}}{2}$

따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

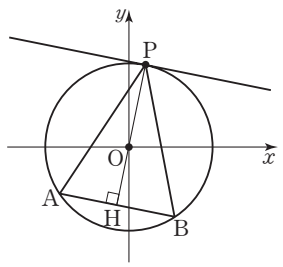
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times\left(\sqrt{13}+\frac{\sqrt{26}}{2}\right)$

$=\frac{13}{2}(1+\sqrt{2})$

이므로 $p=2$, $q=13$
$\therefore pq=26$

다른 풀이

삼각형 ABP의 밑변을 선분 AB라 할 때,
$\overline{AB}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$
으로 일정하므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때, 삼각형의 넓이가 최대이다.
따라서 다음과 같이 직선 AB와 평행한 원의 접선 중 제1사분면에서 원과 접하는 접선의 접점이 P가 될 때, 삼각형의 넓이가 최대이다.



두 점 $A(-3, -2)$, $B(2, -3)$을 지나는 직선 AB의 기울기는
$\frac{-3-(-2)}{2-(-3)}=-\frac{1}{5}$

기울기가 $-\frac{1}{5}$인 원 $x^2+y^2=13$의 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{5}x\pm\sqrt{13}\times\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2+1}$에서

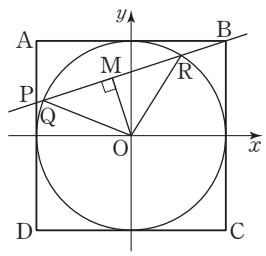
$y=-\frac{1}{5}x+\frac{13\sqrt{2}}{5}$

아끄하이노래시니그고즈재오시(사이)_해설서로.indb 178 22. 9. 14. 오후 8:21

정리하면 $x+5y-13\sqrt{2}=0$
점 A$(-3,\ -2)$에서 이 직선까지의 거리는
$\dfrac{|-3-10-13\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\dfrac{13+13\sqrt{2}}{\sqrt{26}}$
따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은
$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{26}\times\dfrac{13+13\sqrt{2}}{\sqrt{26}}=\dfrac{13}{2}(1+\sqrt{2})$
이므로 $p=2$, $q=13$
$\therefore\ pq=26$

795 ····· 답 $\dfrac{12\sqrt{15}}{5}$

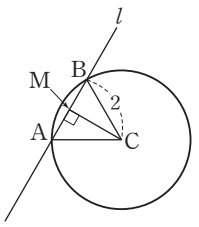
주어진 도형을 원의 중심을 원점으로 좌표평면에 나타내면
원의 방정식은 $x^2+y^2=36$이고, 네 점 A, B, C, D의 좌표는
A$(-6,\ 6)$, B$(6,\ 6)$, C$(6,\ -6)$, D$(-6,\ -6)$이다.
선분 AD를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는 $(-6,\ 2)$이므로
두 점 P$(-6,\ 2)$, B$(6,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-6=\dfrac{6-2}{6-(-6)}(x-6)$, 즉 $x-3y+12=0$이다.



원점에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 M이라 하면
$\overline{OM}$은 원점과 직선 BP 사이의 거리와 같으므로
$\overline{OM}=\dfrac{|12|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$
삼각형 OMQ에서
$\overline{QM}=\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{6^2-\left(\dfrac{12}{\sqrt{10}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{108}{5}}=\dfrac{6\sqrt{15}}{5}$
$\therefore\ \overline{QR}=2\overline{QM}=\dfrac{12\sqrt{15}}{5}$

796 ····· 답 ④

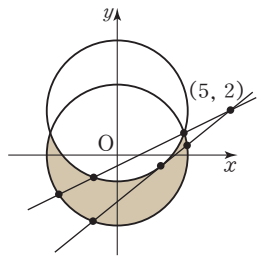
ㄱ. $k=0$일 때, $C: x^2+(y-1)^2=4$에서 원의 중심이 $(0,\ 1)$이고,
직선 $l: y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(0,\ 1)$을 지난다.
그러므로 직선 l은 원 C의 넓이를 이등분한다. (참)
ㄴ. $k=3$일 때, $C: (x-3)^2+(y-1)^2=4$이고,
직선 l과 원이 접할 때를 구하면
$\dfrac{|3m-1+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $|3m|=2\sqrt{m^2+1}$에서 양변을 각각 제곱하면
$9m^2=4(m^2+1)$, $5m^2=4$에서 $m=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$ 또는 $m=-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$
이므로 원 C와 직선 l이 만나기 위한 실수 m의 값의 범위는
$-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}\le m\le\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$이다.
그러므로 실수 m의 값의 최댓값은 $\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$이다. (거짓)
ㄷ. $m=2$일 때, 직선 l의 방정식은 $y=2x+1$이고
직선 l이 원 C와 만나는 두 점 A, B와 원의 중심 C에 대하여
삼각형 ABC가 정삼각형이면 $\overline{AB}$는 원의 반지름의 길이와
같으므로 $\overline{AB}=2$이다.



점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 M이라 할 때,
$\overline{CB}=2$, $\overline{BM}=1$이므로
삼각형 CBM에서 $\overline{CM}=\sqrt{2^2-(-1)^2}=\sqrt{3}$이다.
점 C와 직선 l 사이의 거리는 $\overline{CM}=\dfrac{|2k-1+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$,
$|2k|=\sqrt{15}$에서 $k=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ 또는 $k=-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$이다.
그러므로 모든 실수 k의 값의 곱은
$\dfrac{\sqrt{15}}{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)=-\dfrac{15}{4}$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

797 ····· 답 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

점 $(5,\ 2)$를 지나는 직선과 주어진 도형의 둘레가 서로 다른 세
점에서 만나려면 직선이 제1사분면 위의 두 원 $x^2+y^2=10$,
$x^2+(y-2)^2=10$의 교점을 지나거나 직선이 제4사분면에서
원 $x^2+(y-2)^2=10$과 접할 때이다.



(i) 직선이 제1사분면 위의 두 원 $x^2+y^2=10$, $x^2+(y-2)^2=10$의
교점을 지날 때
$x^2+(y-2)^2=10$에서 $x^2+y^2-4y-6=0$이고, $x^2+y^2-10=0$과
연립하여 풀면 $4y-4=0$에서 $y=1$, $x=3$이다.
즉 직선이 두 점 $(3,\ 1)$, $(5,\ 2)$를 지나므로 기울기는
$\dfrac{2-1}{5-3}=\dfrac{1}{2}$이다.
(ii) 직선이 제4사분면에서 원 $x^2+(y-2)^2=10$과 접할 때
점 $(5,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-2=k(x-5)$, 즉 $kx-y-5k+2=0$ $(k>0)$이고,
이 직선이 원 $x^2+(y-2)^2=10$에 접하므로
$\dfrac{|-2-5k+2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$, $|-5k|=\sqrt{10(k^2+1)}$에서 양변을
각각 제곱하면

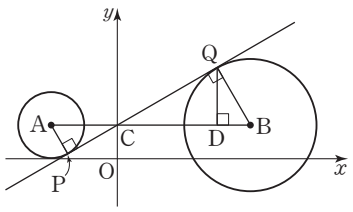
아끄하ㅕ이ㄴ내ㅅ시ㅣㄴㄱㅗㅈ재이ㅅ시ㅣ(사ㅇ)_하내ㅅ서ㄹ.indb 179 22. 9. 14. 오후 8:21

$25k^2=10(k^2+1)$, $3k^2=2$에서 $k=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ($\because k>0$)이다.

(i), (ii)에서 구하는 직선의 모든 기울기의 곱은 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$이다.

798 ····· 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

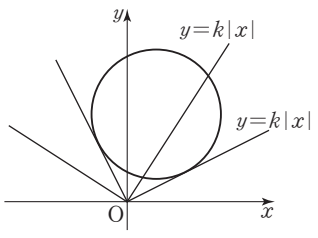
$\frac{d-b}{c-a}$는 직선 PQ의 기울기와 같고, 직선 PQ의 기울기가 최대가 될 때는 직선이 다음과 같이 두 원에 동시에 접할 때이다.



두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $(x-4)^2+(y-1)^2=4$의 중심을 각각 A, B라 하고, 두 직선 AB, PQ의 교점을 C, 점 Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 D라 하자.
두 삼각형 APC, BQC는 서로 닮음이고 닮음비는
$\overline{AP}:\overline{BQ}=1:2$이다.
$\overline{AB}=4-(-2)=6$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=1:2$이므로
$\overline{AC}=2$, $\overline{BC}=4$이고, 삼각형 APC에서
$\overline{PC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{QC}=2\overline{PC}=2\sqrt{3}$이다.
이때, 두 삼각형 APC, QDC도 서로 닮음이므로 구하는 기울기의 최댓값은 $\frac{\overline{QD}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

799 ····· 답 1

$x^2+y^2-4x-12y+20=0$에서 $(x-2)^2+(y-6)^2=20$
이 원과 함수 $y=k|x|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나려면 다음 그림과 같이 실수 k의 값이 양수이면서 제1사분면에서 원과 접할 때보다 크고, 제2사분면에서 원과 접할 때보다 작아야 한다.



(i) 원과 함수 $y=k|x|$의 그래프가 제1사분면에서 접할 때
제1사분면에서 함수 $y=k|x|$는 $y=kx$이고,
원의 중심 $(2, 6)$과 직선 $y=kx$ $(k>0)$ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같다.
$\frac{|2k-6|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{20}$, $|k-3|=\sqrt{5(k^2+1)}$에서 양변을 각각 제곱하면
$k^2-6k+9=5k^2+5$, $4k^2+6k-4=0$,
$2k^2+3k-2=(2k+1)(k-2)=0$
$\therefore k=\frac{1}{2}$ ($\because k>0$)

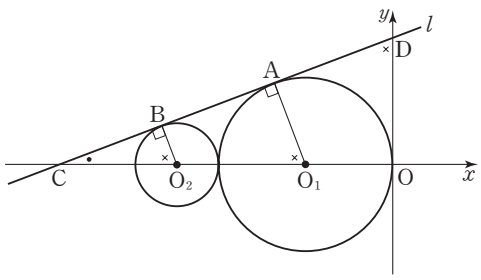
(ii) 원과 함수 $y=k|x|$의 그래프가 제2사분면에서 접할 때
제2사분면에서 함수 $y=k|x|$는 $y=-kx$이고,
원의 중심 $(2, 6)$과 직선 $y=-kx$ $(k>0)$ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같다.
$\frac{|2k+6|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{20}$, $|k+3|=\sqrt{5(k^2+1)}$에서 양변을 각각 제곱하면
$k^2+6k+9=5k^2+5$, $4k^2-6k-4=0$,
$2k^2-3k-2=(2k+1)(k-2)=0$
$\therefore k=2$ ($\because k>0$)

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $\frac{1}{2}<k<2$이다.

$\therefore \alpha\beta=\frac{1}{2}\times 2=1$

800 ····· 답 $8\sqrt{2}$

원 $x^2+y^2+4x=0$에서 $(x+2)^2+y^2=4$이므로
중심이 $(-2, 0)$이고 반지름의 길이가 2이다.
원 $x^2+y^2+10x+24=0$에서 $(x+5)^2+y^2=1$이므로
중심이 $(-5, 0)$이고 반지름의 길이가 1이다.
두 원의 중심을 각각 $O_1(-2, 0)$, $O_2(-5, 0)$이라 하고,
두 원이 직선 l과 만나는 점을 각각 A, B,
직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자.



두 삼각형 CBO_2, CAO_1은 닮음이고,
$\overline{O_2B}=1$, $\overline{O_1A}=2$이므로
두 삼각형 CBO_2, CAO_1의 닮음비는 $1:2$이다.
$\therefore \overline{CO_2}=\overline{O_2O_1}=3$
$\therefore \overline{CO}=\overline{CO_2}+\overline{O_2O_1}+\overline{O_1O}$
$=3+3+2=8$
직각삼각형 CBO_2에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{CB}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$
두 삼각형 CBO_2, COD가 닮음이므로
$\overline{CB}:\overline{CO}=\overline{O_2B}:\overline{DO}$에서
$2\sqrt{2}:8=1:\overline{DO}$
$\therefore \overline{DO}=\frac{8}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$
따라서 구하는 삼각형 COD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{CO}\times\overline{DO}=\frac{1}{2}\times 8\times 2\sqrt{2}$
$=8\sqrt{2}$

아끄하ㅓㅇㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ새ㅅㅓㄹ.indb 180 22. 9. 14. 오후 8:21

801

답 $\frac{75}{4}$

점 (5, 0)에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선의 방정식을
$y=a(x-5)$ (a는 상수)라 하면 …… ㉠
원의 중심 (0, 0)과 직선 $ax-y-5a=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\frac{|-5a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=3$에서 $|-5a|=3\sqrt{a^2+1}$

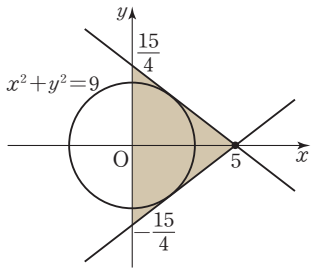
양변을 각각 제곱하면 $25a^2=9(a^2+1)$

$16a^2=9$, $a^2=\frac{9}{16}$이므로 $a=\pm\frac{3}{4}$

이 값을 ㉠에 대입하면 두 접선의 방정식은 각각

$y=\frac{3}{4}(x-5)$, $y=-\frac{3}{4}(x-5)$이다.

따라서 두 접선과 y축으로 둘러싸인 부분은 다음과 같다.



두 접선의 y절편이 각각 $-\frac{15}{4}$, $\frac{15}{4}$이고, x절편은 5이므로

두 접선과 y축으로 둘러싸인 부분은 밑변의 길이가

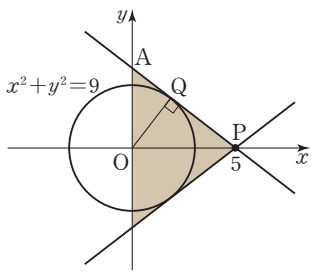
$\frac{15}{4}-\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{15}{2}$이고 높이가 5인 삼각형이다.

따라서 구하는 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{15}{2}\times5=\frac{75}{4}$이다.

다른 풀이

점 P(5, 0)이라 하고, 점 P에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 한 접선이 y축과 만나는 점을 A, 원과 만나는 접점을 Q라 하자.



$\overline{OP}=5$, $\overline{OQ}=3$이므로 직각삼각형 QOP에서
피타고라스 정리에 의하여
$\overline{PQ}=\sqrt{5^2-3^2}=4$
두 삼각형 AOP, OQP가 닮음이므로
$\overline{OP}:\overline{PQ}=\overline{OA}:\overline{OQ}$에서

$5:4=\overline{OA}:3$ $\quad\therefore\ \overline{OA}=\frac{15}{4}$

삼각형 AOP의 넓이는 $\frac{1}{2}\times5\times\frac{15}{4}=\frac{75}{8}$이므로

구하는 부분의 넓이는 $2\times\frac{75}{8}=\frac{75}{4}$이다.

802

답 4

원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 P(a, b)에서의 접선의 방정식은
$ax+by=16$이다.
이 접선이 원 $(x-8)^2+y^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 (8, 0)과 직선 $ax+by-16=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1보다 작아야 한다.

즉, $\frac{|8a-16|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$ …… ㉠

이때, 점 P(a, b)가 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=16$
이를 ㉠에 대입하면

$|8a-16|<4$, $-4<8a-16<4$, $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$

이므로 $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{5}{2}$

$\therefore\ m+n=4$

803

답 ⑤

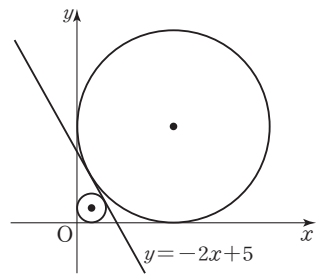
점 (0, 5)에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 기울기가 음수인 접선 l의 방정식을 $y=mx+5$ ($m<0$)이라 하면
원의 중심 (0, 0)과 직선 $mx-y+5=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$에서 $5=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 각각 제곱하면 $m^2+1=5$ $\quad\therefore\ m=-2$ ($\because\ m<0$)

따라서 직선 l : $y=-2x+5$이다.

x축, y축 및 직선 l에 동시에 접하면서 중심이 제1사분면 위에 있는 두 원은 다음과 같다.



x축, y축에 동시에 접하므로 원의 중심을 (r, r) ($r>0$)라 하면
이 원의 반지름의 길이는 r이다.
또한 직선 l에 접하므로 원의 중심 (r, r)와
직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같다.

즉, $\frac{|2r+r-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=r$에서 $|3r-5|=\sqrt{5}r$

양변을 각각 제곱하면

$9r^2-30r+25=5r^2$ $\quad\therefore\ 4r^2-30r+25=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은

$\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$

따라서 구하는 두 원의 반지름의 길이의 합은 $\frac{15}{2}$이다.

아끄하이노래시ㅣㄴㄱㅗ즈재이ㅅㅣ(사ㅇ)_해시ㅓㄹ.indb 181 22. 9. 14. 오후 8:21

804 답 ②

두 원 $x^2+y^2=9$, $(x-4)^2+(y-2)^2=17$의 교점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$(x-4)^2+(y-2)^2-17-(x^2+y^2-9)=0$

$-8x-4y+12=0$ $\therefore 2x+y-3=0$

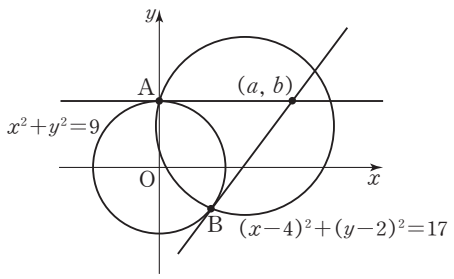
$2x+y-3=0$, $x^2+y^2=9$를 연립하여 풀면

$x^2+(-2x+3)^2=9$, $5x^2-12x=0$, $x(5x-12)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{12}{5}$

이를 $2x+y-3=0$에 각각 대입하면 $y=3$, $y=-\frac{9}{5}$이므로

두 점 A, B의 좌표는 $(0, 3)$, $\left(\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right)$이다.



두 점 A, B가 모두 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

점 $(0, 3)$에서의 접선의 방정식은

$3y=9$에서 $y=3$ …… ㉠

점 $\left(\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{12}{5}x-\frac{9}{5}y=9$에서 $4x-3y=15$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=6$, $y=3$이므로 두 접선의 교점의 좌표는 $(6, 3)$이다.

$\therefore a+b=6+3=9$

805 답 ⑤

점 P의 좌표를 (a, b)라 할 때,

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=a^2+(b-5)^2+(a-2)^2+(b-3)^2$

$=2a^2+2b^2-4a-16b+38$

$=2\{(a-1)^2+(b-4)^2\}+4$ …… ㉠

이때, $(a-1)^2+(b-4)^2$은

두 점 (a, b), $(1, 4)$ 사이의 거리의 제곱과 같으므로

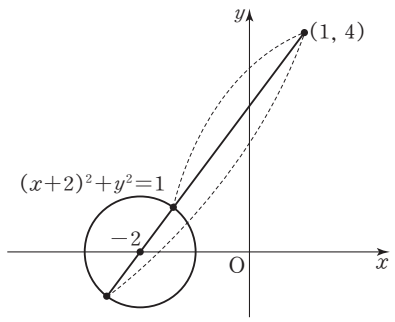
원 $x^2+y^2+4x+3=0$ 위의 점과 점 $(1, 4)$ 사이의 거리가

최대일 때 ㉠은 최댓값을 갖고,

최소일 때 ㉠은 최솟값을 갖는다.

원 $x^2+y^2+4x+3=0$에서 $(x+2)^2+y^2=1$이므로

중심이 $(-2, 0)$이고 반지름의 길이가 1이다.



원의 중심 $(-2, 0)$과 점 $(1, 4)$ 사이의 거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$

즉, 원 위의 점과 점 $(1, 4)$ 사이의 거리의

최댓값은 $5+1=6$이고, 최솟값은 $5-1=4$이다.

따라서 ㉠의 최댓값은 $2\times6^2+4=76$이고,

최솟값은 $2\times4^2+4=36$이다.

따라서 구하는 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값과 최댓값의 합은

$36+76=112$이다.

806 답 ⑤

원 $x^2+y^2-6x-2y=0$에서 …… ㉠

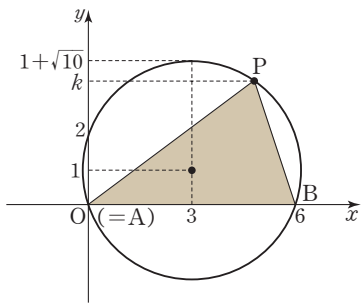
$(x-3)^2+(y-1)^2=10$

즉, 주어진 원은 중심이 $(3, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이다.

㉠에 $y=0$을 대입하면 $x^2-6x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=6$

A$(0, 0)$, B$(6, 0)$이라 하면 다음과 같다.



$\overline{AB}=6$이고, 점 P의 y좌표를 k라 하면

(삼각형 ABP의 넓이)$=\frac{1}{2}\times6\times k=3k$

따라서 $3k$가 자연수이어야 한다.

한편, 제1사분면 위의 점 P에 대하여 점 P의 y좌표의 범위는

$0<k\le1+\sqrt{10}$

이때, ㉠에 $x=0$을 대입하면 $y^2-2y=0$에서

$y=0$ 또는 $y=2$

즉, y좌표가 k인 점 P의 개수는

$0<k\le2$일 때 1개, $2<k<1+\sqrt{10}$일 때 2개이다.

(i) $0<3k\le6$일 때

가능한 자연수 $3k$의 값은 1, 2, …, 6

이때, 점 P는 각각 1개씩이므로 총 6개이다.

(ii) $2<k<1+\sqrt{10}$, 즉 $6<3k<3+3\sqrt{10}$일 때

가능한 자연수 $3k$의 값은 7, 8, …, 12

이때, 점 P는 각각 2개씩이므로 총 $2\times6=12$(개)이다.

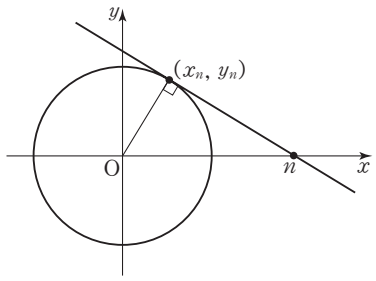
따라서 구하는 점 P의 개수는

$6+12=18$이다.

오투해설_내신_수상_수학(상)_해설서.indb 182 22. 9. 14. 오후 8:21

807 ④

점 $(n, 0)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선 중 제1사분면에서 원과 접하는 접선의 접점의 좌표가 (x_n, y_n)이므로
이 접선의 방정식을 $x_nx+y_ny=1$이라 하자.



직선 $x_nx+y_ny=1$이 점 $(n, 0)$을 지나므로

$x_nn=1 \quad \therefore x_n=\frac{1}{n}$

또한 점 (x_n, y_n)이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_n^2+y_n^2=1$

$\therefore y_n=\sqrt{1-x_n^2}\ (\because y_n>0)$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}=\sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}}$

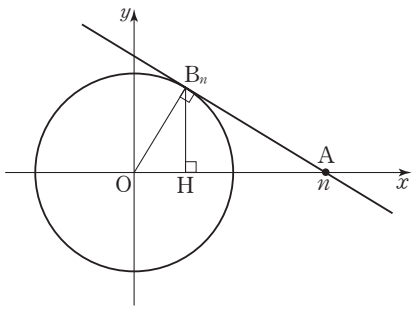
$\therefore y_2\times y_3\times y_4\times\cdots\times y_9$

$=\sqrt{\frac{1\times3}{2^2}}\times\sqrt{\frac{2\times4}{3^2}}\times\sqrt{\frac{3\times5}{4^2}}\times\cdots\times\sqrt{\frac{8\times10}{9^2}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ····· TIP

다른 풀이

점 $A(n, 0)$이라 하고, 점 A에서 원에 그은 접선 중 원과 제1사분면에서 접하는 접선의 접점을 $B_n(x_n, y_n)$, 점 B_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OA}=n$, $\overline{OB_n}=1$이므로 직각삼각형 AB_nO에서
$\overline{AB_n}=\sqrt{n^2-1}$이다.
두 직각삼각형 OB_nA, OHB_n이 닮음이므로
$\overline{OA}:\overline{AB_n}=\overline{OB_n}:\overline{B_nH}$
즉, $n:\sqrt{n^2-1}=1:y_n$이므로

$y_n=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}=\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}$

$=\sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}}$

$\therefore y_2\times y_3\times y_4\times\cdots\times y_9$

$=\sqrt{\frac{1\times3}{2^2}}\times\sqrt{\frac{2\times4}{3^2}}\times\sqrt{\frac{3\times5}{4^2}}\times\cdots\times\sqrt{\frac{8\times10}{9^2}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

TIP

제곱근 안에서 분자와 분모가 규칙적으로 소거되므로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$\sqrt{\frac{1\times3}{2^2}}\times\sqrt{\frac{2\times4}{3^2}}\times\sqrt{\frac{3\times5}{4^2}}\times\cdots\times\sqrt{\frac{8\times10}{9^2}}$

$=\sqrt{\frac{1\times3}{2\times2}\times\frac{2\times4}{3\times3}\times\frac{3\times5}{4\times4}\times\cdots\times\frac{8\times10}{9\times9}}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{10}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

III

808 $B\left(\frac{3}{8}, \frac{9\sqrt{7}}{8}\right)$

원점에서 점 S까지의 거리가 $3+1=4$이므로 점 S는 원 $x^2+y^2=16$ 위에 있다.
원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $(3, 0)$에서의 접선의 방정식은 $x=3$이므로 $x^2+y^2=16$에 $x=3$을 대입하면
$y^2=7$에서 $y=\pm\sqrt{7}$
$\therefore S(3, \sqrt{7})\ (\because$ S는 제1사분면 위의 점)
점 B의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 점 B는 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=9$ ····· ㉠

점 $B(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=9$

이 접선이 점 $S(3, \sqrt{7})$을 지나므로

$3x_1+\sqrt{7}y_1=9$ ····· ㉡

㉡에서 $y_1=\frac{9-3x_1}{\sqrt{7}}$을 ㉠에 대입하면

$x_1^2+\left(\frac{9-3x_1}{\sqrt{7}}\right)^2=9$

$8x_1^2-27x_1+9=0,\ (x_1-3)(8x_1-3)=0$

$\therefore x_1=3$ 또는 $x_1=\frac{3}{8}$

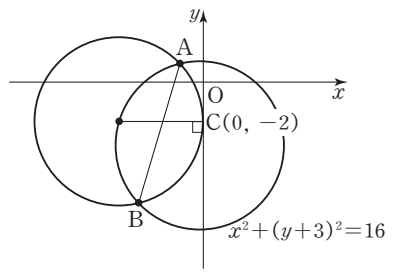
이때, 점 $B(x_1, y_1)$은 점 $(3, 0)$이 아닌 다른 접점이므로

$x_1=\frac{3}{8}$, $y_1=\frac{9\sqrt{7}}{8}$

$\therefore B\left(\frac{3}{8}, \frac{9\sqrt{7}}{8}\right)$

809 22

$C(0, -2)$라 하면 다음과 같이 호 ACB를 포함하는 원은 원 $x^2+(y+3)^2=16$과 직선 AB에 대하여 대칭이다.



아끄하ㅓㅇㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ재ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ새ㅅㅓㄹ.indb 183 22. 9. 14. 오후 8:21

호 ACB를 포함하는 원은 점 C(0, −2)에서 y축에 접하므로
중심의 y좌표는 −2이다.
또한 이 원은 원 $x^2+(y+3)^2=16$과 직선 AB에 대하여 대칭이므로
반지름의 길이는 4이다.
원이 y축에 접할 때, 중심의 x좌표의 절댓값이 반지름의 길이와
같으므로 중심의 x좌표는 −4이다.
따라서 호 ACB를 포함하는 원은 중심이 (−4, −2)이고 반지름의
길이가 4이므로 원의 방정식은
$(x+4)^2+(y+2)^2=16$
직선 AB는 두 원 $x^2+(y+3)^2=16$, $(x+4)^2+(y+2)^2=16$의
교점을 지나는 직선이므로 직선의 방정식은
$\{x^2+(y+3)^2-16\}-\{(x+4)^2+(y+2)^2-16\}=0$

$-8x+2y-11=0 \qquad \therefore y=4x+\frac{11}{2}$

따라서 $m=4$, $n=\frac{11}{2}$이므로

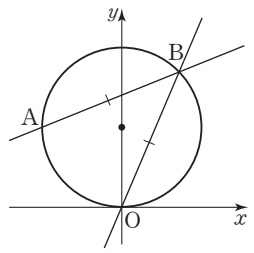
$mn=22$

810 ····· 답 200

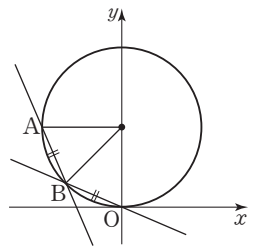
원의 중심이 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위에 있으므로
원의 중심의 좌표를 (k, k^2)이라 하자.
이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|k|$이다.
이 원이 직선 $y=\sqrt{3}x-2$에 접하므로 원의 중심 (k, k^2)에서
직선 $\sqrt{3}x-y-2=0$까지의 거리가 원의 반지름의
길이와 같다.
즉, $\frac{|\sqrt{3}k-k^2-2|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}}=|k|$에서
$|\sqrt{3}k-k^2-2|=2|k|$
(i) $\sqrt{3}k-k^2-2=2k$인 경우
이차방정식 $k^2+(2-\sqrt{3})k+2=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$D_1=(2-\sqrt{3})^2-8<0$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 값이
존재하지 않는다.
(ii) $\sqrt{3}k-k^2-2=-2k$인 경우
이차방정식 $k^2+(-2-\sqrt{3})k+2=0$의 판별식을 D_2라 할 때,
$D_2=(-2-\sqrt{3})^2-8>0$이므로 두 실근이 존재하고
두 실근의 곱은 2이다.
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 두 원의 반지름의 길이 a, b의 곱은
$ab=2$이다.
$\therefore 100ab=200$

811 ····· 답 −2

$y=kx+2k+2$에서 $y=k(x+2)+2$이므로 이 직선은 k의 값에
관계없이 점 (−2, 2)를 지나고, 이 점은 원 $x^2+(y-2)^2=4$ 위의
점이다.
점 B의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 크므로 점 A의 좌표가
(−2, 2)이고, $S_1=S_2$이므로 $\overline{AB}=\overline{OB}$이어야 한다.
그러므로 선분 OA의 수직이등분선과 원 $x^2+(y-2)^2=4$의 교점이
B가 되어야 한다.
선분 OA의 중점은 $\left(\frac{-2}{2}, \frac{2}{2}\right)$, 즉 (−1, 1)이고,
직선 OA의 기울기는 $\frac{-2}{2}=-1$이므로 수직이등분선의 기울기는
1이다.
점 (−1, 1)을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은
$y-1=x-(-1)$, 즉 $y=x+2$이다.
직선 $y=x+2$와 원 $x^2+(y-2)^2=4$가 만나는 점의 좌표를 구하면
$x^2+x^2=4$, $x^2=2$에서 $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}$
따라서 점 B의 좌표는 $(\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ 또는 $(-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$이다.
(i) 점 B의 좌표가 $(\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$일 때



직선 AB는 두 점 (−2, 2), $(\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$를 지나므로
k의 값은 $\frac{(2+\sqrt{2})-2}{\sqrt{2}-(-2)}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$
(ii) 점 B의 좌표가 $(-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$일 때



직선 AB는 두 점 (−2, 2), $(-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$를 지나므로
k의 값은 $\frac{(2-\sqrt{2})-2}{-\sqrt{2}-(-2)}=\frac{-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}-1$
(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은 $(\sqrt{2}-1)+(-\sqrt{2}-1)=-2$

812 ····· 답 $-\frac{6}{7}$

점 P와 원 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PB}=3\sqrt{2}$이므로 두 점
A, B는 중심이 점 P이고 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원 위의 점이다.
즉, 두 점 A, B는 원 $(x-3)^2+y^2=10$과
원 $(x+3)^2+(y-2)^2=18$의 교점이다.
두 원 $(x-3)^2+y^2=10$과 $(x+3)^2+(y-2)^2=18$의 교점을 지나는
직선의 방정식은
$(x-3)^2+y^2-10-\{(x+3)^2+(y-2)^2-18\}=0$
$-12x+4y+4=0 \qquad \therefore y=3x-1$
$y=3x-1$과 $(x-3)^2+y^2=10$을 연립하여 풀면
$(x-3)^2+(3x-1)^2=10$, $10x^2-12x=0$
$x(5x-6)=0$이므로 $x=0$ 또는 $x=\frac{6}{5}$
이를 $y=3x-1$에 각각 대입하면 $y=-1$, $y=\frac{13}{5}$
따라서 $A\left(\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$, B(0, −1)이다.

아뀨혀어느새시니그고조재어시(사어)_해설서로.indb 184 22. 9. 14. 오후 8:21

직선 PA의 기울기는 $\dfrac{\frac{13}{5}-2}{\frac{6}{5}-(-3)}=\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{21}{5}}=\dfrac{1}{7}$이고,

직선 PB의 기울기는 $\dfrac{-1-2}{0-(-3)}=-1$이므로

두 직선의 기울기의 합은

$\dfrac{1}{7}+(-1)=-\dfrac{6}{7}$

813 ····· 답 ④

$C_1 : (x+1)^2+(y-2)^2=10$

$C_2 : (x-2)^2+(y+1)^2=k$ ····· ㉠

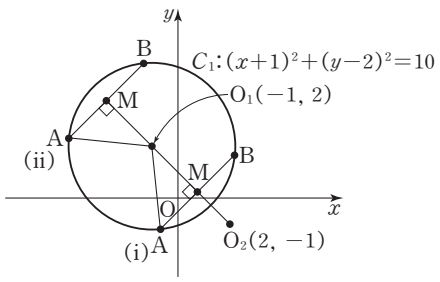
라 하고, 두 원의 중심을 각각 $O_1(-1, 2)$, $O_2(2, -1)$이라 하자.

두 원이 만나는 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

점 M은 직선 O_1O_2 위에 존재하므로

원 C_1 위에 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$가 되는 경우를 나타내면

다음과 같은 두 가지 경우가 생긴다.



$\overline{AB}=2\sqrt{2}$에서 $\overline{AM}=\sqrt{2}$

원 C_1의 반지름의 길이는 $\overline{O_1A}=\sqrt{10}$

직각삼각형 AMO_1에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{O_1M}=\sqrt{\sqrt{10}^2-\sqrt{2}^2}=2\sqrt{2}$

또한 두 원의 중심 사이의 거리는

$\overline{O_1O_2}=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

한편, ㉠에서 k의 값은 원 C_2의 반지름의 길이의 제곱과 같으므로

직각삼각형 AMO_2에서 피타고라스 정리에 의하여

$k=\overline{AO_2}^2=\overline{AM}^2+\overline{MO_2}^2=2+\overline{MO_2}^2$

(i) $\overline{MO_2}=\overline{O_1O_2}-\overline{O_1M}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$이면

$k=2+2=4$

(ii) $\overline{MO_2}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_1M}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$이면

$k=2+50=52$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은 $4+52=56$이다.

814 ····· 답 ②

원 위의 세 점 A, B, P에 대하여 호 AB에 대한 원주각이

$\angle APB=45^\circ$이므로 호 AB에 대한 중심각은 $\angle ACB=90^\circ$이고,

삼각형 ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 직각이등변삼각형이다.

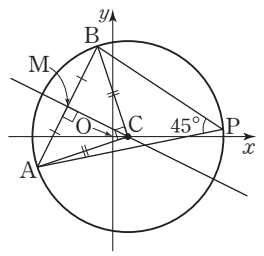
주어진 원의 반지름의 길이를 $r(r>0)$라 하면 삼각형 ABC에서

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=2r^2$이다.

이때 선분 AB의 길이는 $\overline{AB}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$이므로

$2r^2=80$에서 $r=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ ····· ㉠

원의 중심 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 직선 CM은 선분 AB의 수직이등분선이다.



선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{-5+(-1)}{2}, \dfrac{-2+6}{2}\right)$, 즉 $(-3, 2)$

이고, 직선 AB의 기울기가 $\dfrac{6-(-2)}{-1-(-5)}=2$이므로

직선 CM의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다. 그러므로 직선 CM의 방정식은

$y-2=-\dfrac{1}{2}(x+3)$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

이고, 점 C가 이 직선 위에 있으므로 $C\left(a, -\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}\right)$이라 하면

원의 방정식은

$(x-a)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}\right)^2=40$ ($\because$ ㉠)

점 $A(-5, -2)$가 이 원 위의 점이므로

$(-5-a)^2+\left(-2+\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}\right)^2=40$

$(a+5)^2+\dfrac{1}{4}(a-5)^2=40$

$4(a^2+10a+25)+(a^2-10a+25)=160$

$5a^2+30a-35=0$, $a^2+6a-7=(a+7)(a-1)=0$에서

$a=-7$ 또는 $a=1$이다.

$a=-7$일 때, $C(-7, 4)$이고 $k=\overline{OC}^2=(-7)^2+4^2=65$

$a=1$일 때, $C(1, 0)$이고 $k=\overline{OC}^2=1$

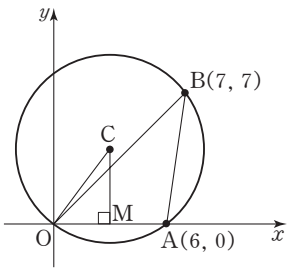
따라서 구하는 모든 k의 값의 합은 $65+1=66$이다.

815 ····· 답 75

각 OPA의 크기가 일정하도록 점 P가 움직이므로 점 P는

선분 OA를 현으로 하면서 각 OPA가 원주각이 되는 원 위를

움직인다.



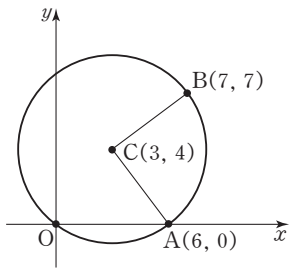
이때, 원의 중심을 C, 점 C에서 선분 OA에 내린 수선의 발을

M이라 하자.

직선 CM이 선분 OA를 수직이등분하므로 점 C의 x좌표는 3이다.

아크하이스내시ㅣ닉그스재이스ㅣ(사이)_해설서르.indb 185 22. 9. 14. 오후 8:21

C(3, a) (a는 상수)라 하면 $\overline{OC}=\sqrt{9+a^2}$이므로
원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-a)^2=9+a^2$ ····· ㉠
점 B(7, 7)이 원 위의 점이므로
$16+(7-a)^2=9+a^2$ $\therefore a=4$
이를 ㉠에 대입하면 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-4)^2=25$



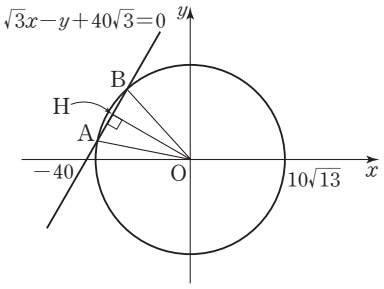
직선 AC의 기울기는
$\frac{0-4}{6-3}=-\frac{4}{3}$
직선 BC의 기울기는
$\frac{7-4}{7-3}=\frac{3}{4}$
즉, 두 직선 AC, BC는 서로 수직이므로
$\angle ACB=90^\circ$
따라서 점 P가 점 A에서 점 B까지 원을 따라 움직인 거리는
$10\pi\times\frac{90^\circ}{360^\circ}=\frac{5}{2}\pi$이므로 $k=\frac{5}{2}$
$\therefore 30k=75$

다른 풀이

주어진 원의 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.
원의 방정식을 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이라 하면
세 점 O(0, 0), A(6, 0), B(7, 7)이 원 위의 점이므로
$x=0$, $y=0$을 대입하면 $c=0$
$x=6$, $y=0$을 대입하면 $36+6a=0$에서 $a=-6$
$x=7$, $y=7$을 대입하면 $49+49-42+7b=0$에서 $b=-8$
즉, $x^2+y^2-6x-8y=0$에서
$(x-3)^2+(y-4)^2=25$
따라서 이 원의 중심은 (3, 4)이고, 반지름의 길이가 5이다.
이후 풀이는 본풀이와 같다.

816 ····· 답 ③

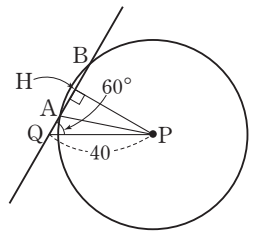
P 지점을 좌표평면 위의 원점, 동쪽 방향, 북쪽 방향을 각각 x축, y축의 양의 방향으로 놓으면 레이더 화면은
원 $x^2+y^2=1300$의 내부를 나타낸다.
배가 서 있던 지점, 즉 P 지점에서 서쪽으로 40 km 떨어진 지점을 점 $(-40, 0)$이라 하면
배가 이동하는 경로를 나타내는 직선의 기울기는
$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이다.
따라서 배는 직선 $y=\sqrt{3}(x+40)$, 즉 $\sqrt{3}x-y+40\sqrt{3}=0$을 따라 움직인다.
다음과 같이 원 $x^2+y^2=1300$과 직선 $\sqrt{3}x-y+40\sqrt{3}=0$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면 배가 레이더 화면에 나타나면서 이동한 거리는 $\overline{AB}$이다.
원의 중심 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{AO}=10\sqrt{13}$이고, 점과 직선 사이의 거리에 의하여
$\overline{OH}=\frac{|40\sqrt{3}|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}}=20\sqrt{3}$이므로
직각삼각형 AHO에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AH}=\sqrt{(10\sqrt{13})^2-(20\sqrt{3})^2}$
$=\sqrt{1300-1200}=10$
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=20$
따라서 배가 레이더 화면에 나타나며 이동한 거리가 20 km이고,
배의 속력은 시속 4 km이므로
배가 레이더 화면에 보였다가 사라질 때까지 걸리는 시간은
$\frac{20}{4}=5$(시간)이다.

다른 풀이

레이더가 나타내는 화면은 P 지점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $10\sqrt{13}$인 원의 내부이다.
P 지점으로부터 서쪽으로 40 km만큼 떨어진 지점이 배가 서 있던 지점이고, 이 지점을 점 Q라 하자.
배의 진행 방향은 동쪽 방향과 60°를 이루므로 배가 이동하는 경로를 나타내면 다음과 같다.



배가 이동하는 경로를 나타내는 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B라 하고, 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면
직각삼각형 PHQ에서 $\angle PQH=60^\circ$이므로 $\overline{PH}=20\sqrt{3}$이고,
$\overline{PA}=10\sqrt{13}$이므로
직각삼각형 PHA에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AH}=\sqrt{(10\sqrt{13})^2-(20\sqrt{3})^2}=10$
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=20$
따라서 배가 레이더 화면에 나타나며 이동한 거리가 20 km이고,
배의 속력은 시속 4 km이므로
배가 레이더 화면에 보였다가 사라질 때까지 걸리는 시간은
$\frac{20}{4}=5$(시간)이다.

아끄하이스내시ㅣㄴㄱㅗ즈재이스ㅣ(사ㅇ)_해시설르.indb 186 22. 9. 14. 오후 8:21

817 ····· 답 풀이 참조

x축, y축에 모두 접하는 원의 중심은 (a, a) 또는 $(a, -a)$로 놓을 수 있고,
이때 원의 반지름의 길이는 $|a|$이다. (단, a는 실수)

(i) 중심이 (a, a)인 경우

이 원이 직선 $3x-4y+6=0$에 접하므로 원의 중심 (a, a)와 직선 $3x-4y+6=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\frac{|3a-4a+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|a|$에서

$|-a+6|=5|a|$

$-a+6=5a$일 때, $a=1$이므로 중심은 $(1, 1)$이다.

$-a+6=-5a$일 때, $a=-\frac{3}{2}$이므로 중심은 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$이다.

(ii) 중심이 $(a, -a)$인 경우

이 원이 직선 $3x-4y+6=0$에 접하므로 원의 중심 $(a, -a)$와 직선 $3x-4y+6=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\frac{|3a+4a+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|a|$에서

$|7a+6|=5|a|$

$7a+6=5a$일 때, $a=-3$이므로 중심은 $(-3, 3)$이다.

$7a+6=-5a$일 때, $a=-\frac{1}{2}$이므로 중심은 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

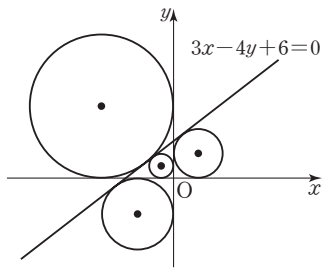
(i), (ii)에서 구하는 모든 원의 중심의 좌표는

$(1, 1)$, $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $(-3, 3)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

채점 요소	배점
x축, y축에 모두 접하는 원의 중심의 좌표 놓기	20 %
중심이 (a, a)인 경우에 중심의 좌표 구하기	40 %
중심이 $(a, -a)$인 경우에 중심의 좌표 구하기	40 %

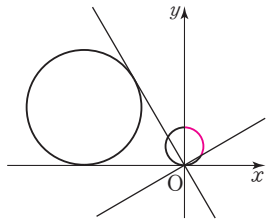
참고

조건을 만족시키는 네 원은 다음과 같다.

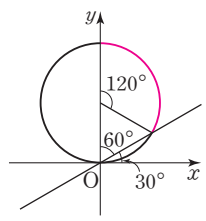


818 ····· 답 $\frac{2}{3}\pi$

$ac+bd=0$에서 $\frac{bd}{ac}=-1$ ($\because ac\neq 0$), 즉 $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=-1$이므로
원점 O에 대하여 직선 OA와 직선 OB가 서로 수직이다.
원점을 지나는 직선을 $y=kx$ (k는 실수)라 할 때,
직선 $y=kx$와 원 $(x+3\sqrt{3})^2+(y-3)^2=9$가 접할 때를 구해 보면
$\frac{|-3\sqrt{3}k-3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=3$, $|\sqrt{3}k+1|=\sqrt{k^2+1}$에서 양변을 각각 제곱하면
$3k^2+2\sqrt{3}k+1=k^2+1$, $k^2+\sqrt{3}k=k(k+\sqrt{3})=0$에서
$k=0$ 또는 $k=-\sqrt{3}$
그러므로 직선 $y=kx$와 원 $(x+3\sqrt{3})^2+(y-3)^2=9$가 만나기 위한 실수 k의 값의 범위는 $-\sqrt{3}\le k\le 0$이고, 이때 직선 $y=kx$와 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$보다 크거나 같으므로 점 A가 그리는 도형은 다음과 같다.



이때, 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 x축의 양의 방향이 이루는 각이 30°이므로
y축의 양의 방향과 이루는 각은 60°이다.
그러므로 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 A가 나타내는 도형은 중심각이 120°이고 반지름의 길이가 1인 호이다.

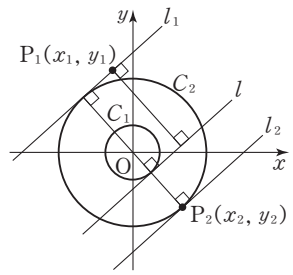


따라서 구하는 도형의 길이는 $2\pi\times 1\times\frac{120^\circ}{360^\circ}=\frac{2}{3}\pi$이다.

819 ····· 답 49

원점에서 직선 l : $ax+by+1=0$까지의 거리가 1이므로

$\frac{|1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$ $\quad\therefore a^2+b^2=1$ ····· ㉠



점 $P_1(x_1, y_1)$에서 직선 l까지의 거리는 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이의 합과 같으므로

$\frac{|ax_1+by_1+1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}+1$

$\therefore |ax_1+by_1+1|=2\sqrt{2}+1$ ($\because$ ㉠) ····· ㉡

점 $P_2(x_2, y_2)$에서 직선 l까지의 거리는 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이의 차와 같으므로

$\frac{|ax_2+by_2+1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}-1$

$\therefore |ax_2+by_2+1|=2\sqrt{2}-1$ ($\because$ ㉠) ····· ㉢

㉡, ㉢에서

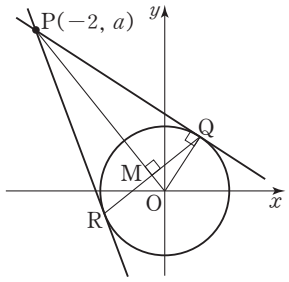
$|ax_1+by_1+1|\times|ax_2+by_2+1|=(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)=7$

$\therefore (ax_1+by_1+1)^2(ax_2+by_2+1)^2=7^2=49$

(166-208)해설3-3.indd 187 22. 9. 19. 오후 4:36

820 ····· 답 $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{16}\ (x<0, y>0)$

점 P$(-2, a)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선의 접점 Q, R와 선분 QR의 중점 M을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



$\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+a^2}=\sqrt{a^2+4}$, $\overline{OQ}=1$이고,
두 삼각형 OPQ, OQM이 닮음이므로
$\overline{OP}:\overline{OQ}=\overline{OQ}:\overline{OM}$
즉, $\sqrt{a^2+4}:1=1:\overline{OM}$에서

$\overline{OM}=\frac{1}{\sqrt{a^2+4}}$ ····· ㉠

$\therefore \overline{PM}=\overline{OP}-\overline{OM}$

$=\sqrt{a^2+4}-\frac{1}{\sqrt{a^2+4}}=\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+4}}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{OM}:\overline{PM}=\frac{1}{\sqrt{a^2+4}}:\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+4}}=1:(a^2+3)$

이므로 점 M은 선분 OP를 $1:(a^2+3)$으로 내분하는 점이다.
따라서 두 점 O$(0, 0)$, P$(-2, a)$에 대하여 점 M의 좌표는

$\left(\frac{-2}{a^2+4}, \frac{a}{a^2+4}\right)$

$x=\frac{-2}{a^2+4}$, $y=\frac{a}{a^2+4}$라 두면 ····· ㉢

양의 실수 a에 대하여 $x<0$, $y>0$이므로
점 M은 제2사분면 위의 점이다.

이때, $\left(\frac{-2}{a^2+4}\right)^2+\left(\frac{a}{a^2+4}\right)^2=\frac{1}{a^2+4}$이므로

$x^2+y^2=-\frac{x}{2}$ ($\because$ ㉢)

$\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\right)+y^2=\frac{1}{16}$

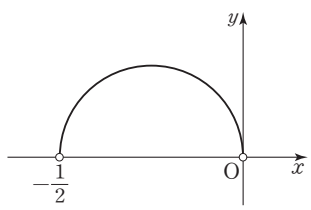
$\therefore \left(x+\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{16}$

따라서 점 M이 그리는 도형의 방정식은

$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{16}\ (x<0, y>0)$이다.

참고

점 M이 나타내는 도형 $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{16}\ (x<0, y>0)$을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



04 도형의 이동

821 ····· 답 ④

평행이동 $(x, y)\to(x+a, y+b)$에 의하여
점 $(1, 3)$은 점 $(1+a, 3+b)$로 옮겨진다.
점 $(1+a, 3+b)$가 점 $(4, 1)$과 일치하므로
$a=3$, $b=-2$
$\therefore a+b=1$

822 ····· 답 ③

점 $(2, 3)$이 점 $(-1, 5)$로 옮겨지므로
x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
이 평행이동에 의하여 점 $(2, 4)$로 옮겨지는 점의 좌표를 (a, b)라 하면 점 $(a-3, b+2)$가 점 $(2, 4)$와 일치하므로
$a=5$, $b=2$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(5, 2)$이다.

다른 풀이

점 $(2, 3)$이 점 $(-1, 5)$로 옮겨지므로
x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
이 평행이동에 의하여 점 $(2, 4)$로 옮겨지는 점은
점 $(2, 4)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점과 같다. ····· TIP
따라서 구하는 점의 좌표는 $(2+3, 4-2)$, 즉 $(5, 2)$이다.

TIP

x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시키는 평행이동에 의하여 점 A가 점 B로 옮겨질 때,
x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동시키는 평행이동에 의하여 점 B가 점 A로 옮겨진다.

823 ····· 답 ④

직선 $2x+y+k=0$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은
$2(x+3)+(y-2)+k=0$, 즉 $2x+y+k+4=0$이고,
직선 l이 점 $(-2, -2)$를 지나므로 대입하면
$-4-2+k+4=0$
$\therefore k=2$

824 ····· 답 10

평행이동 $(x, y)\to(x-1, y+4)$는
x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하는 것이다.

(166-208)해설3-3.indd 188 22. 9. 19. 오후 2:33

이 평행이동에 의하여 직선 $y=2x-1$은
$y-4=2\{x-(-1)\}-1$, 즉 $y=2x+5$로 옮겨진다. …… 참고
따라서 $a=2$, $b=5$이므로
$ab=10$

참고

직선 $y=mx+n$을
x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면
직선 $y-b=m(x-a)+n$이다.
따라서 직선을 평행이동하여도 '기울기'는 변하지 않는다.

825 ····· 답 ①

점 $(1, 4)$가 점 $(3, 3)$으로 옮겨지므로 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
이 평행이동에 의하여 직선 $y=mx+n$을 평행이동하면
$y+1=m(x-2)+n$ $\therefore y=mx-2m+n-1$
이 직선이 직선 $y=3x-6$과 수직이므로 $m=-\frac{1}{3}$
또한 직선 $y=3x-6$이 x축과 만나는 점 $(2, 0)$을 지나므로
$0=2m-2m+n-1$ $\therefore n=1$
$\therefore m+n=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

다른 풀이

직선 $y=3x-6$이 x축과 점 $(2, 0)$에서 만나므로
직선 $y=3x-6$과 x축 위의 한 점 $(2, 0)$에서 수직으로 만나는
직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}(x-2)$ …… ㉠
점 $(1, 4)$가 점 $(3, 3)$으로 옮겨질 때, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로
직선 ㉠을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선이 $y=mx+n$이다. …… TIP
$y=-\frac{1}{3}\{(x+2)-2\}+1$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+1$에서
$m=-\frac{1}{3}$, $n=1$
$\therefore m+n=\frac{2}{3}$

TIP

x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시키는 평행이동에 의하여 도형 A가 도형 A'으로 옮겨질 때,
x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동시키는 평행이동에 의하여 도형 A'이 도형 A로 옮겨진다.

826 ····· 답 -12

원 $x^2+y^2-2x+4y-6=0$에서
$(x-1)^2+(y+2)^2=11$ …… ㉠
원 $x^2+y^2+6x-2y-1=0$에서
$(x+3)^2+(y-1)^2=11$ …… ㉡
㉠을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-p-1)^2+(y-q+2)^2=11$
이는 ㉡과 일치하므로 $-p-1=3$, $-q+2=-1$에서
$p=-4$, $q=3$ $\therefore pq=-4\times3=-12$

참고

원 $x^2+y^2=r^2$을
x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면
원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이다.
따라서 원을 평행이동하여도 '반지름의 길이'는 변하지 않고 원이 평행이동한 방향과 원의 중심이 평행이동한 방향이 서로 같다.
이를 이용하면 원의 중심의 평행이동만으로 원의 평행이동을 알 수 있다.
이 문제에서 원의 중심 점 $(1, -2)$에서 점 $(-3, 1)$로 옮겨진 것으로부터 원이 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것임을 알 수 있다.

827 ····· 답 ③

포물선 $y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$을
x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면
$y=(x-p-2)^2-3+q$
이 포물선이 $y=x^2+1$과 같다고 하면
$-p-2=0$, $-3+q=1$에서 $p=-2$, $q=4$이다.
즉, x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
이 평행이동에 의하여 직선 $l: x-y-2=0$을 평행이동하면
$(x+2)-(y-4)-2=0$이므로
$l': x-y+4=0$이다.
직선 l 위의 점 $(0, -2)$와 직선 $l': x-y+4=0$ 사이의 거리를 구하면 평행한 두 직선 l과 l' 사이의 거리는
$\frac{|0-(-2)+4|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$이다.

참고

포물선 $y=a(x-b)^2+c$를
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
포물선 $y=a(x-m-b)^2+c+n$이다.
따라서 포물선을 평행이동하여도 '이차항의 계수'는 변하지 않고 포물선이 평행이동한 방향과 꼭짓점이 평행이동한 방향이 서로 같다.
이를 이용하면 포물선의 꼭짓점의 평행이동만으로 포물선의 평행이동을 알 수 있다.
이 문제에서 포물선의 꼭짓점이 점 $(2, -3)$에서 점 $(0, 1)$로 옮겨진 것으로부터 포물선이 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것임을 알 수 있다.

아끄하이스내시ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(사ㅇ)_해시커르.indb 189 22. 9. 14. 오후 8:21

828 ····· 답 ②

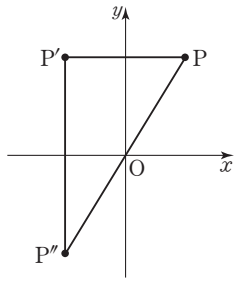
점 A(3, 1)을 x축에 대하여 대칭이동하면 B(3, -1)
점 B(3, -1)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 C(-1, 3)
따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{3+3-1}{3}, \frac{1-1+3}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{5}{3}, 1\right)$

829 ····· 답 6

점 P(a, b)가 제1사분면에 있는 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로
$b=a+2$에서 P(a, $a+2$) ($a>0$)이다.



점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점이 P′($-a$, $a+2$),
원점에 대하여 대칭이동한 점이 P″($-a$, $-a-2$)이므로
삼각형 PP′P″은 $\angle PP'P''=90^\circ$인 직각삼각형이다.
따라서 삼각형 PP′P″의 넓이는

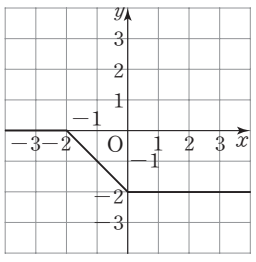
$\frac{1}{2}\times\overline{PP'}\times\overline{P'P''}=\frac{1}{2}\times 2a\times 2(a+2)$

$=2a(a+2)=16$

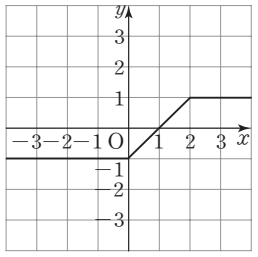
$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a>0$), $b=4$
$\therefore a+b=6$

830 ····· 답 풀이 참조

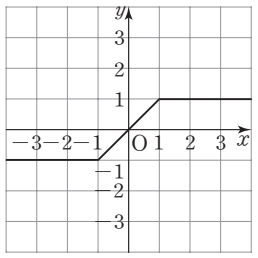
(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼,
y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
$y=f(x+2)-1$이므로 그래프는 다음과 같다.



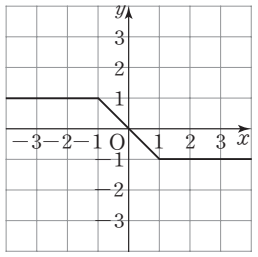
(2) $y=f(2-x)$에서 $y=f(-(x-2))$이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면
$y=f(-x)$이고, 이를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$y=f(-(x-2))$이므로 그래프는 다음과 같다.



(3) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면
$y=-f(x)$이고, 이를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
$y=-f(x+1)$이므로 그래프는 다음과 같다.



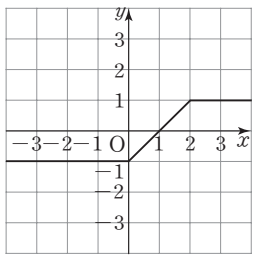
(4) $y=-f(1-x)$에서 $y=-f(-(x-1))$이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면
$y=-f(-x)$이고, 이를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면
$y=-f(-(x-1))$이므로 그래프는 다음과 같다.



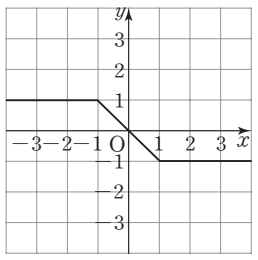
다른 풀이

참고 1, 참고 2를 이용하면 다음과 같이 해석할 수 있다.

(2) 함수 $y=f(2-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선
$x=1$에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음과 같다.



(4) $y=-f(1-x)$에서 $0-y=f(1-x)$이다.
즉, 함수 $y=-f(1-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의
그래프를 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음과 같다.



아끄하ㅓㅇㄴ대ㅅㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 190 22. 9. 14. 오후 8:21

참고 1

〈직선 $x=a$ 또는 직선 $y=b$에 대한 대칭이동〉

(1) 점 (x, y)를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 점은 $(2a-x, y)$이다.

(2) 점 (x, y)를 직선 $y=b$에 대하여 대칭이동한 점은 $(x, 2b-y)$이다.

(3) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(2a-x, y)=0$이다.

(4) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=b$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, 2b-y)=0$이다.

[증명]

(3) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 위의 점 (x, y)를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 점을 (x', y')이라 하면

$\frac{x+x'}{2}=a,\ y=y'$ …… ㉠

즉, $x=2a-x'$, $y=y'$이므로 $f(2a-x', y')=0$이다.

따라서 점 (x', y')은 방정식 $f(2a-x, y)=0$이 나타내는 도형 위에 있다.

(1) ㉠에서 $x'=2a-x$, $y'=y$이므로 점 (x, y)를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 점은 $(2a-x, y)$이다.

참고 2

〈점 (a, b)에 대한 대칭이동〉

(1) 점 (x, y)를 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 점은 $(2a-x, 2b-y)$이다.

(2) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(2a-x, 2b-y)=0$이다.

[증명]

(2) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 위의 점 (x, y)를 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 점을 (x', y')이라 하면

$\frac{x+x'}{2}=a,\ \frac{y+y'}{2}=b$ …… ㉡

즉, $x=2a-x'$, $y=2b-y'$이므로 $f(2a-x', 2b-y')=0$이다.

따라서 점 (x', y')은 방정식 $f(2a-x, 2b-y)=0$이 나타내는 도형 위에 있다.

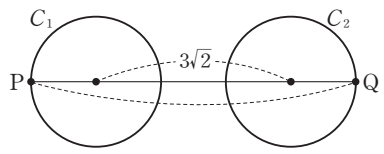
(1) ㉡에서 $x'=2a-x$, $y'=2b-y$이므로 점 (x, y)를 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 점은 $(2a-x, 2b-y)$이다.

831 ③

직선 $2x-y+1=0$을 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면
$2(x+3)-y+1=0$
$\therefore 2x-y+7=0$
이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
$2y-x+7=0$
$\therefore x-2y-7=0$
이 직선이 원 $x^2+y^2-2ax+4y+a^2=0$의 넓이를 이등분하려면 이 원의 중심을 지나야 한다.
이때, 원 $x^2+y^2-2ax+4y+a^2=0$은 $(x-a)^2+(y+2)^2=4$에서 중심이 $(a, -2)$이므로
$a-2\times(-2)-7=0$
$\therefore a=3$

832 ③

원 C_1 : $x^2+y^2-4x+2y+3=0$은
$(x-2)^2+(y+1)^2=2$이므로
중심이 $(2, -1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이다.
원 C_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 중심은 $(-1, 2)$이고
반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다. …… 참고



두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$이고,
두 원 위를 각각 움직이는 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 두 원의 중심 사이의 거리와 두 원의 반지름의 길이의 합과 같으므로
$3\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$이다.

참고

원 C_1 : $(x-2)^2+(y+1)^2=2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 방정식은
$(x+1)^2+(y-2)^2=2$

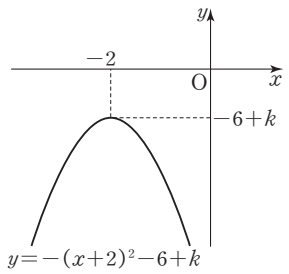
833 3

직선 l의 기울기를 m이라 하면
점 $(1, -3)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y=m(x-1)-3$ $\therefore y=mx-m-3$
이 직선을 x축에 대하여 대칭이동하면
$-y=mx-m-3$ $\therefore y=-mx+m+3$
이 직선을 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면
$y=-m(x+4)+m+3$ $\therefore y=-mx-3m+3$
이 직선을 y축에 대하여 대칭이동하면
$y=mx-3m+3$
이 직선이 처음 직선 $y=mx-m-3$과 일치하므로
$-3m+3=-m-3$
$\therefore m=3$

834 ②

곡선 $y=x^2-4x+10=(x-2)^2+6$을
원점에 대하여 대칭이동하면
$-y=(-x-2)^2+6$ $\therefore y=-(x+2)^2-6$
이를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면
$y=-(x+2)^2-6+k$
이 이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 그림과 같이
$-6+k<0$을 만족시켜야 한다.

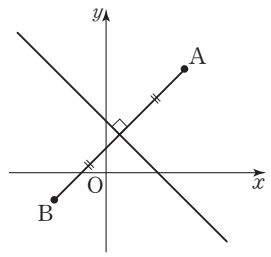
아쿠하이스쿨시스템수학Ⅱ(사이)_해설지로.indb 191 22. 9. 14. 오후 8:21



따라서 $k<6$이므로 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5로 5개이다.

835 ④

A(3, 4), B(p, q)라 하면 두 점 A, B가 직선 $y=-x+2$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=-x+2$는 선분 AB를 수직이등분한다.



직선 AB가 직선 $y=-x+2$와 수직이므로

직선 AB의 기울기는 $\frac{q-4}{p-3}=1$에서

$q-4=p-3$ $\quad\therefore p-q=-1$ …… ㉠

또한 직선 $y=-x+2$가 선분 AB의 중점 $\left(\frac{p+3}{2}, \frac{q+4}{2}\right)$를 지나므로

$\frac{q+4}{2}=-\frac{p+3}{2}+2$, $q+4=-(p+3)+4$

$\therefore p+q=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=-2$, $q=-1$

$\therefore p^2+q^2=5$

다른 풀이

점 (3, 4)와 직선 $y=-x+2$를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 각각 점 (3, 2)와 직선 $y=-x$이다.

점 (3, 2)를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2, -3)$이고, 점 $(-2, -3)$을 다시 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 구하는 점이고 그 좌표는 $(-2, -1)$이다.

$\therefore p=-2$, $q=-1$

$\therefore p^2+q^2=5$

TIP

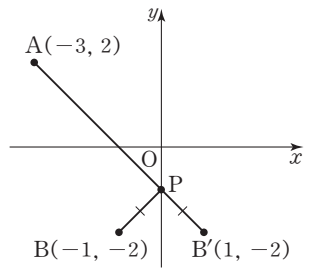
점을 직선 $y=mx+n$에 대하여 대칭이동한 점을 구할 때, $m=\pm1$인 경우는 다른 풀이와 같이 풀 수 있다.

점과 직선을 y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동하여 직선 $y=\pm x$에 대한 대칭이동을 이용한 후 다시 y축의 방향으로 n만큼 평행이동하여 대칭이동한 점을 구할 수 있다.

836 ③

점 A에서 y축 위의 점 P를 거쳐 점 B까지 가는 거리는 $\overline{AP}+\overline{PB}$이다.

점 B$(-1, -2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 B′$(1, -2)$이고, $\overline{BP}=\overline{B'P}$이다.



$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$이고, 세 점 A, P, B′이 일직선 위에 있을 때 이 값이 최소이므로

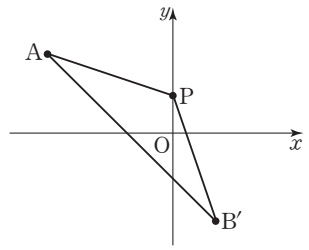
$\overline{AP}+\overline{PB'}\ge\overline{AB'}$

$=\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$ …… TIP

따라서 구하는 최단거리는 $4\sqrt{2}$이다.

TIP

점 P가 선분 AB′ 위에 있지 않을 때, 삼각형 APB′에서 $\overline{AP}+\overline{PB'}>\overline{AB'}$이고, 점 P가 선분 AB′ 위에 있을 때, $\overline{AP}+\overline{PB'}=\overline{AB'}$이다.

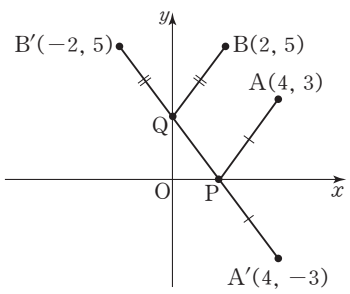


따라서 $\overline{AP}+\overline{PB'}\ge\overline{AB'}$이고,
세 점 A, P, B′이 일직선 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{PB'}$이 $\overline{AB'}$으로 최솟값을 갖는다.

837 ②

점 A(4, 3)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′$(4, -3)$

점 B(2, 5)를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 B′$(-2, 5)$



$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

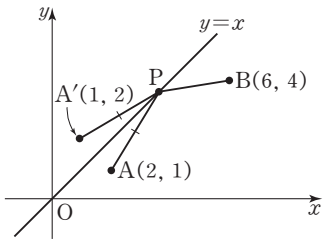
$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$이고,

아쿠하이스쿨시스템수학상(사이)_해설지로.indb 192 22. 9. 14. 오후 8:21

네 점 A′, P, Q, B′이 일직선 위에 있을 때 이 값이 최소이므로
$\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'} \geq \overline{A'B'}$
$=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$
따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은 10이다.

838 답 (1) $\sqrt{29}$ (2) $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$

(1) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면
A′(1, 2)



$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$이고,
세 점 A′, P, B가 일직선 위에 있을 때 …… ㉠
이 값이 최소이므로
$\overline{A'P}+\overline{BP} \geq \overline{A'B}$
$=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$
따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\sqrt{29}$이다.

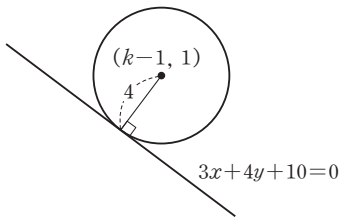
(2) ㉠에서 점 P가 직선 A′B 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소이므로
점 P는 직선 A′B와 직선 $y=x$의 교점이다.
직선 A′B의 방정식은
$y=\frac{4-2}{6-1}(x-1)+2$
$\therefore y=\frac{2}{5}x+\frac{8}{5}$
직선 A′B와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는
$\frac{2}{5}x+\frac{8}{5}=x$에서 $x=\frac{8}{3}$
따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$이다.

839 답 ②

점 P를 점 A(3, 8)에서 시작하여 주어진 규칙에 따라
이동시켜 보면 다음과 같다.
$A(3, 8) \xrightarrow[(가)]{} (6, 8) \xrightarrow[(가)]{} (9, 8) \xrightarrow[(나)]{} (9, 10)$
$\xrightarrow[(가)]{} (12, 10) \xrightarrow[(나)]{} B(12, 12)$
따라서 점 B의 x좌표와 y좌표는 모두 12이므로
구하는 합은 $12+12=24$이다.

840 답 ②

원 $x^2+y^2+2x-6y-6=0$에서
$(x+1)^2+(y-3)^2=16$
즉, 원의 중심이 $(-1, 3)$이고 반지름의 길이가 4이다.
이 원을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 -2만큼
평행이동한 원의 중심은 $(k-1, 1)$이고 반지름의 길이는 4이다.
…… 참고
이 원이 직선 $3x+4y+10=0$과 접하므로 원의 중심에서 직선까지의
거리가 반지름의 길이와 같다.

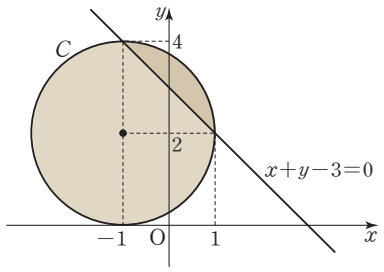


즉, $\frac{|3\times(k-1)+4\times1+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$에서
$|3k+11|=20$
$\therefore k=3$ 또는 $k=-\frac{31}{3}$
따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 곱은
$3\times\left(-\frac{31}{3}\right)=-31$

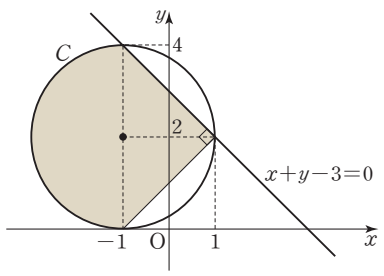
참고
원 $(x+1)^2+(y-3)^2=16$을 x축의 방향으로 k만큼,
y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-k+1)^2+(y-1)^2=16$이다.

841 답 ②

원 $x^2+y^2-2x+6y+6=0$에서 $(x-1)^2+(y+3)^2=4$
이 원을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 5만큼
평행이동하면 $C : (x+1)^2+(y-2)^2=4$
원 C와 직선 $x+y-3=0$을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



따라서 두 부분의 넓이의 차는 다음과 같이 반지름의 길이가 2인
반원의 넓이와 직각을 낀 두 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인
직각이등변삼각형의 넓이의 합과 같다.



아끄하ㅓㅇㄴ새ㅅㅣㄴㄱㅗㅈ새ㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎ새ㅅㅓㄹ.indb 193 22. 9. 14. 오후 8:21

따라서 구하는 넓이의 차는

$\frac{1}{2}\times 4\pi+\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2=2\pi+4$

842 ④

원 $x^2+y^2=2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$이다.

이때, 두 직선 중 한 직선을 y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 직선이 다른 한 직선이 되므로

직선 $y=mx-\sqrt{2(m^2+1)}$을 y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이 직선 $y=mx+\sqrt{2(m^2+1)}$과 같아야 한다.

즉, $y=mx-\sqrt{2(m^2+1)}+6$이 $y=mx+\sqrt{2(m^2+1)}$과 같으므로

$-\sqrt{2(m^2+1)}+6=\sqrt{2(m^2+1)}$에서

$\sqrt{2(m^2+1)}=3$, $2(m^2+1)=9$

$\therefore m^2=\frac{7}{2}$

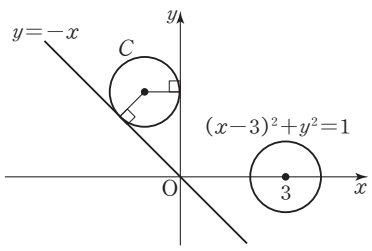
843 ①

원 $x^2+y^2-6x+8=0$에서

$(x-3)^2+y^2=1$

이 원은 중심이 $(3, 0)$이고 반지름의 길이가 1이다.

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원을 C라 하면 원 C의 중심은 $(a+3, b)$이고, 반지름의 길이는 1이다. …… 참고



원 C가 y축에 접하므로 중심의 x좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같다. 이때, 중심이 제2사분면 위에 있으므로

$a+3=-1$ $\therefore a=-4$

또한 원 C가 직선 $y=-x$에 접하므로

원의 중심 $(-1, b)$와

직선 $y=-x$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.

따라서 $\frac{|-1+b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$에서 $|b-1|=\sqrt{2}$

$\therefore b=\sqrt{2}+1$ ($\because b>0$)

$\therefore a+b=-4+(\sqrt{2}+1)=-3+\sqrt{2}$

참고

원 $(x-3)^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-3)^2+(y-b)^2=1$이다.

844 4

포물선 $y=x^2+2ax+2a^2=(x+a)^2+a^2$을

포물선 $y=x^2+a^2-a$로 옮기는 평행이동에 의하여

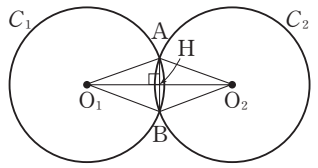
꼭짓점이 점 $(-a, a^2)$에서 점 $(0, a^2-a)$로 옮겨진다.

즉, 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.

원 $C_1: x^2+(y-5)^2=9$는 중심이 $(0, 5)$이고, 반지름의 길이가 3이다.

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 원의 중심은 $(a, 5-a)$이고, 반지름의 길이는 3이다. …… 참고

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고, 두 선분 O_1O_2, AB가 만나는 점을 H라 하자.



사각형 AO_1BO_2가 마름모이므로 두 선분 O_1O_2와 AB는 서로 다른 것을 수직이등분한다.

$\overline{AB}=2$에서 $\overline{AH}=1$이고, $\overline{AO_1}=3$이므로 직각삼각형 AHO_1에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{O_1H}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

즉, $\overline{O_1O_2}=2\overline{O_1H}=4\sqrt{2}$이다.

한편, $O_1(0, 5)$, $O_2(a, 5-a)$에서

$\overline{O_1O_2}=\sqrt{a^2+(-a)^2}=\sqrt{2}a$ ($\because a>0$)

이므로 $\sqrt{2}a=4\sqrt{2}$

$\therefore a=4$

참고

원 $C_1: x^2+(y-5)^2=9$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 원의 방정식은

$C_2: (x-a)^2+(y+a-5)^2=9$이다.

845 8

삼각형 OAB의 내접원은 x축과 y축에 동시에 접하고 중심이 제2사분면에 존재하므로 원의 방정식을

$(x+a)^2+(y-a)^2=a^2$ ($a>0$)이라 하자.

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}a(3+4+5)$ $\therefore a=1$

그러므로 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$이다.

이때, 점 $A(-4, 0)$이 점 $A'(2, 1)$로 옮겨지므로 세 점 $O(0, 0)$, $A(-4, 0)$, $B(0, 3)$과 내접원은 각각 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

그러므로 삼각형 $O'A'B'$의 내접원의 방정식은

$\{(x-6)+1\}^2+\{(y-1)-1\}^2=1$, $(x-5)^2+(y-2)^2=1$

그러므로 $p=5$, $q=2$, $r=1$이다.

$\therefore p+q+r=5+2+1=8$

(166-208)해설3-3.indd 194 22. 9. 19. 오후 2:33

846 답 10

점 P가 점 (5, 2)에서 출발하여 규칙에 따라 다음과 같이 이동한다.

$P(5, 2) \xrightarrow[(가)]{} (2, 5) \xrightarrow[(가)]{} (6, -1) \xrightarrow[(나)]{} (6, 1)$

$\xrightarrow[(가)]{} (1, 6) \xrightarrow[(가)]{} (5, 0)$

그러므로 점 P는 5번 이동하고 점 (5, 0)에서 멈추므로

$n=5$, $a=5$, $b=0$이다.

$\therefore a+b+n=5+0+5=10$

847 답 ④

ㄱ. 직선 $x=2$를 x축에 대하여 대칭이동하면 $x=2$이므로
자기 자신과 일치한다.

ㄴ. $|x|+|y|=4$를 x축에 대하여 대칭이동하면
$|x|+|-y|=4$ $\therefore |x|+|y|=4$
즉, 자기 자신과 일치한다.

ㄷ. $y=x^2+2|x|-3$을 x축에 대하여 대칭이동하면
$-y=x^2+2|x|-3$ $\therefore y=-x^2-2|x|+3$
즉, 자기 자신과 일치하지 않는다.

ㄹ. $x^2+y^2-3x+1=0$을 x축에 대하여 대칭이동하면
$x^2+(-y)^2-3x+1=0$ $\therefore x^2+y^2-3x+1=0$
즉, 자기 자신과 일치한다.

따라서 x축에 대하여 대칭이동시켰을 때 자기 자신과 일치하는 도형의 방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

848 답 풀이 참조

직선 $2x+y-3=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$2y+x-3=0$ $\therefore x+2y-3=0$

이 직선을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$(x-k)+2y-3=0$에서 $x+2y-k-3=0$이다.

이 직선이 원 $(x-2)^2+y^2=5$와 만나므로 원의 중심 (2, 0)과 직선 $x+2y-k-3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$보다 작거나 같아야 한다.

즉, $\frac{|2-k-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} \le \sqrt{5}$이므로

$|k+1| \le 5$, $-5 \le k+1 \le 5$

$\therefore -6 \le k \le 4$

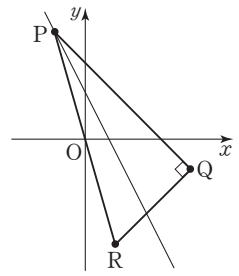
채점 요소	배점
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식 구하기	25 %
x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식 구하기	25 %
직선이 원과 만날 조건을 이용하여 답 구하기	50 %

849 답 ④

점 $P(a, b)$가 직선 $y=-2x+3$ 위의 점이므로

$b=-2a+3$ $(a<0)$이고, …… ㉠

$Q(b, a)$, $R(-a, -b)$이다.



$\overline{PQ}=\sqrt{(b-a)^2+(a-b)^2}=\sqrt{2}|a-b|$

$\overline{QR}=\sqrt{(b+a)^2+(a+b)^2}=\sqrt{2}|a+b|$

$\overline{PR}=\sqrt{(-2a)^2+(-2b)^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$

에서 $\overline{PR}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2$이므로 삼각형 PQR는

$\angle PQR=90°$인 직각삼각형이다. …… 참고

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{QR}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}|a-b|\times\sqrt{2}|a+b|$

$=|a^2-b^2|$

$=|a^2-(-2a+3)^2|$ ($\because$ ㉠)

$=|3a^2-12a+9|=45$

즉, $|a^2-4a+3|=15$에서 $a^2-4a+3=\pm15$

(i) $a^2-4a+3=-15$일 때

$a^2-4a+18=0$의 실근은 존재하지 않는다.

(ii) $a^2-4a+3=15$일 때

$a^2-4a-12=0$, $(a+2)(a-6)=0$이므로

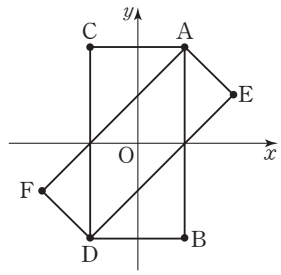
$a=-2$ ($\because a<0$)

(i), (ii)에서 $a=-2$이므로 ㉠에서 $b=7$

$\therefore a+b=5$

참고

x축 또는 y축 또는 직선 $y=\pm x$ 위에 있지 않은 점 A에 대하여 점 A를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 B, C, D라 하고, 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 E, 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 F라 하면 그림과 같이 사각형 ABDC, AEDF는 모두 직사각형이다.



두 직선 AB, CD는 x축에 수직이고, 두 직선 AC, BD는 y축에 수직이므로 사각형 ABDC는 직사각형이다.

두 직선 AE, FD는 직선 $y=x$에 수직이고, 두 직선 AF, ED는 직선 $y=-x$에 수직이므로 사각형 AEDF는 직사각형이다.

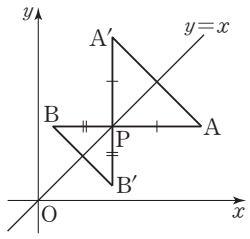
아쿠아이너시스템스고등개념시리즈(사이)_해설서로.indb 195 22. 9. 14. 오후 8:21

850 ····· 답 ②

곡선 $y=x^2+3x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면
$y=(x-a)^2+3(x-a)$이다.
두 점 P, Q가 직선 $y=-x$ 위의 점이므로
점 P의 좌표를 $(k, -k)$ $(k<0)$라 하면
이와 원점에 대하여 대칭인 점은 $Q(-k, k)$이다.
$(x-a)^2+3(x-a)=-x$에서
방정식 $x^2+(4-2a)x+a^2-3a=0$의 두 근이 k, $-k$이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합은 $k+(-k)=2a-4$에서 $a=2$
두 근의 곱은 $k\times(-k)=a^2-3a=-2$
따라서 두 점 P, Q의 x좌표의 곱은 -2이다.

851 ····· 답 23

두 점 A$(11, k)$, B$(1, 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은
각각 A′$(k, 11)$, B′$(5, 1)$이고, $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로 두
삼각형 APA′, BPB′는 이등변삼각형이다.
즉, 직선 $y=x$가 두 선분 AA′, BB′의 수직이등분선이므로 점 P는
직선 $y=x$ 위의 점이다.



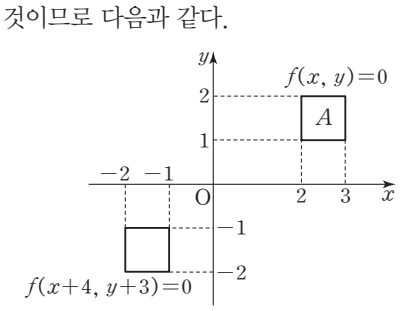
이때, 두 삼각형 APA′, BPB′는 닮음이고,
넓이의 비가 9 : 4이므로 닮음비는 3 : 2이다.
$\overline{AA'}:\overline{BB'}=3:2$에서
$\sqrt{(11-k)^2+(k-11)^2}:\sqrt{4^2+4^2}=3:2$
$\sqrt{2}(11-k):4\sqrt{2}=3:2$ $(\because 11-k>0)$이므로
$12\sqrt{2}=2\sqrt{2}(11-k)$, $6=11-k$ $\therefore k=5$
즉, A$(11, 5)$, A′$(5, 11)$이다.
두 점 A$(11, 5)$, B$(1, 5)$에서 직선 AB의 방정식은 $y=5$이므로
직선 $y=x$와 만나는 점의 좌표는 P$(5, 5)$이고,
선분 AA′의 중점을 M이라 하면 그 좌표는
$\left(\frac{11+5}{2}, \frac{5+11}{2}\right)$, 즉 $(8, 8)$이다.
그러므로 삼각형 APA′의 넓이는
$m=\frac{1}{2}\times\overline{AA'}\times\overline{PM}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6^2+6^2}\times\sqrt{3^2+3^2}$
$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=18$
$\therefore k+m=5+18=23$

852 ····· 답 ④

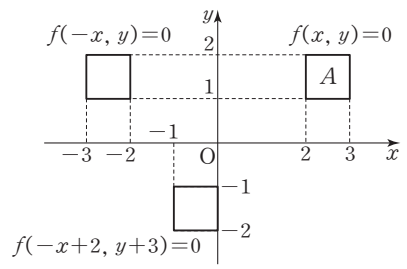
서로 다른 두 점 A, B가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
A(p, q), B(q, p) $(p\neq q)$라 하자.
두 점 A, B가 포물선 $y=x^2-2x-2$ 위에 있으므로
$q=p^2-2p-2$ ····· ㉠
$p=q^2-2q-2$ ····· ㉡
㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면
$q-p=(p^2-q^2)-2(p-q)$
$(p+q)(p-q)-(p-q)=0$
즉, $(p+q-1)(p-q)=0$이므로
$p=q$ 또는 $p+q=1$
이때, $p=q$이면 두 점 A, B가 서로 같으므로 $p\neq q$
따라서 $p+q=1$이다.
$q=1-p$를 ㉠에 대입하면 $1-p=p^2-2p-2$에서
$p^2-p-3=0$
마찬가지로 $p=1-q$를 ㉡에 대입하면
$q^2-q-3=0$
따라서 p, q가 이차방정식 $x^2-x-3=0$의 두 근이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$p+q=1$, $pq=-3$
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(q-p)^2+(p-q)^2}=\sqrt{2(p-q)^2}$
$=\sqrt{2}\times\sqrt{(p+q)^2-4pq}$
$=\sqrt{2}\times\sqrt{13}=\sqrt{26}$

853 ····· 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. 도형 $f(x+4, y+3)=0$은 도형 $f(x, y)=0$을
x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼
평행이동한 것이므로 다음과 같다.



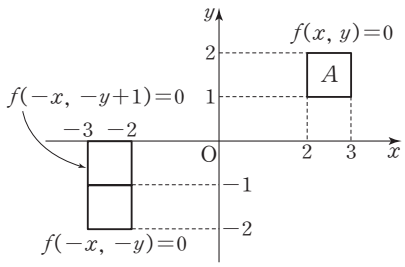
그러므로 도형 $f(x+4, y+3)=0$은 도형 B와 같다.
ㄴ. 도형 $f(-x+2, y+3)=0$에서
$f(-(x-2), y+3)=0$
즉, 이 도형은 도형 $f(x, y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 후
x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한
것이므로 다음과 같다.



그러므로 도형 $f(-x+2, y+3)=0$은 도형 B와 같지 않다.
ㄷ. 도형 $f(-x, -y+1)=0$에서
$f(-x, -(y-1))=0$
즉, 이 도형은 도형 $f(x, y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 후

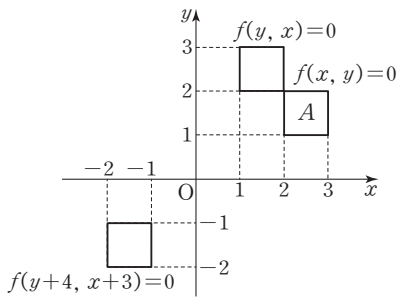
이끄하이스내신느그노재이스1(상이)_해설지르.indb 196 22. 9. 14. 오후 8:21

y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음과 같다.



그러므로 도형 $f(-x, -y+1)=0$은 도형 B와 같지 않다.

ㄹ. 도형 $f(y+4, x+3)=0$은
도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후
x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 다음과 같다.

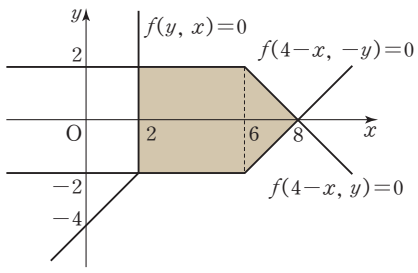


그러므로 도형 $f(y+4, x+3)=0$은 도형 B와 같다.

따라서 도형 B를 나타내는 방정식으로 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

854 ····· 답 ③

도형 $f(4-x, y)=0$에서 $f(-(x-4), y)=0$이므로
도형 $f(x, y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
도형 $f(4-x, -y)=0$은 도형 $f(4-x, y)=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.
도형 $f(y, x)=0$은 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다. ····· TIP
즉, 세 도형으로 둘러싸인 부분은 다음과 같다.



따라서 구하는 부분의 넓이는 한 변의 길이가 4인 정사각형과 밑변의 길이가 4이고 높이가 2인 삼각형의 넓이의 합과 같으므로

$4\times4+\frac{1}{2}\times4\times2=20$이다.

다른 풀이

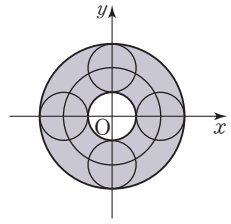
다음과 같이 해석하여 그래프를 나타낼 수 있다.
도형 $f(4-x, y)=0$은 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $x=2$에 대하여 대칭이동한 것이다.
도형 $f(4-x, -y)=0$은 도형 $f(x, y)=0$을 점 $(2, 0)$에 대하여 대칭이동한 것이다.

TIP

주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형을 그릴 때, 도형 위의 특정한 점을 대칭이동한 점을 먼저 구한 후 그래프를 그리면 좀 더 편리하다.
예를 들어, 도형 $f(x, y)=0$ 위의 두 점 $(-4, 0)$, $(-2, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $(0, -4)$, $(2, -2)$를 먼저 찾고 두 점을 지나는 도형 $f(y, x)=0$을 그린다.

855 ····· 답 ②

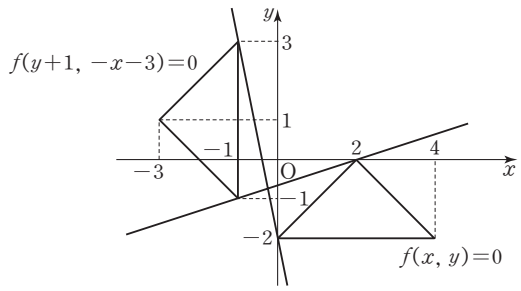
원 $x^2+(y+2)^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면
$(x-a)^2+\{(y-b)+2\}^2=1$, 즉 $(x-a)^2+\{y-(b-2)\}^2=1$
이므로 중심이 $(a, b-2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.
이때, $a^2+b^2=4b$, 즉 $a^2+(b-2)^2=4$에서 점 $(a, b-2)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 도형의 자취 C는 중심이 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있고 반지름의 길이가 1인 원을 그리므로 도형 C는 다음과 같이 색칠된 영역이다.



따라서 구하는 도형 C의 넓이는 반지름의 길이가 3인 원의 넓이에서 반지름의 길이가 1인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로
$\pi\times3^2-\pi\times1^2=8\pi$

856 ····· 답 ④

도형 $f(y+1, -x-3)=0$은 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 다음, x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음과 같다.



$\frac{d-b}{c-a}$는 두 점 (a, b), (c, d)를 지나는 직선의 기울기이므로
점 (a, b)가 점 $(0, -2)$, 점 (c, d)가 점 $(-1, 3)$일 때 최소이고,
점 (a, b)가 점 $(2, 0)$, 점 (c, d)가 점 $(-1, -1)$일 때 최대이다.

아쿠하이스쿨시스템수학Ⅱ(상)_해설지르.indb 197 22. 9. 14. 오후 8:21

따라서 최솟값은 $\frac{3-(-2)}{-1-0}=-5$, 최댓값은 $\frac{-1-0}{-1-2}=\frac{1}{3}$이므로

구하는 합은 $-5+\frac{1}{3}=-\frac{14}{3}$

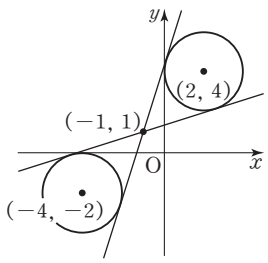
857 ····· 답 $\frac{18}{5}$

$\frac{b+c}{a+d}=\frac{b-(-c)}{a-(-d)}$에서 두 점 (a, b), $(-d, -c)$를 지나는 직선의 기울기와 같다. 점 $(-d, -c)$는 점 $\mathrm{Q}(c, d)$를 원점에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 한 점과 같다.

점 Q가 원 $x^2+y^2+8x+4y+16=0$, 즉 $(x+4)^2+(y+2)^2=4$ 위의 점이므로 원의 중심 $(-4, -2)$를 원점에 대하여 대칭이동하면 $(4, 2)$이고, 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(2, 4)$이다.

즉, 점 $(-d, -c)$는 중심이 $(2, 4)$이고 반지름이 2인 원 $(x-2)^2+(y-4)^2=4$ 위의 점이다.

그러므로 두 점 (a, b), $(-d, -c)$를 지나는 직선의 기울기는 다음과 같이 직선이 두 원의 중심 $(-4, -2)$, $(2, 4)$를 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$, 즉 $(-1, 1)$을 지나며 두 원에 동시에 접할 때, 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.



점 $(-1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=k(x+1)$ (k는 상수), 즉 $kx-y+k+1=0$이고,

이 직선이 원 $(x+4)^2+(y+2)^2=4$에 접하므로

$\frac{|-4k+2+k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$에서

$3|-k+1|=2\sqrt{k^2+1}$의 양변을 각각 제곱하면

$9k^2-18k+9=4k^2+4$, $5k^2-18k+5=0$에서 근의 공식에 의하여

$k=\frac{9\pm\sqrt{9^2-25}}{5}=\frac{9\pm2\sqrt{14}}{5}$

그러므로 $\frac{9-2\sqrt{14}}{5}\le\frac{b+c}{a+d}\le\frac{9+2\sqrt{14}}{5}$이므로

$M=\frac{9+2\sqrt{14}}{5}$, $m=\frac{9-2\sqrt{14}}{5}$이다.

$\therefore M+m=\frac{18}{5}$

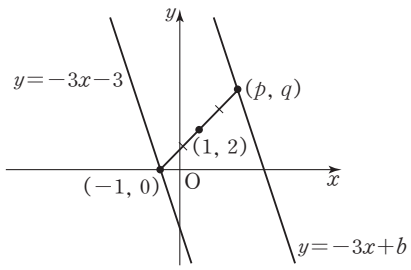
858 ····· 답 10

직선을 어떤 점에 대하여 대칭이동하였을 때 직선의 기울기는 변하지 않으므로 ····· TIP

직선 $y=-3x-3$을 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이동한 직선 l의 방정식 $y=ax+b$에서

$a=-3$

$\therefore l : y=-3x+b$ ····· ㉠



직선 $y=-3x-3$ 위의 한 점 $(-1, 0)$을 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 l 위의 점이므로 이 점을 (p, q)라 하면 두 점 $(-1, 0)$과 (p, q)를 이은 선분의 중점이 점 $(1, 2)$이다.

즉, 점 $\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q}{2}\right)$가 점 $(1, 2)$와 일치하므로

$p=3$, $q=4$

따라서 직선 l이 점 $(3, 4)$를 지나므로 $x=3$, $y=4$를 ㉠에 대입하면

$4=-9+b$ $\therefore b=13$

$\therefore a+b=10$

다른 풀이

도형 $f(x, y)=0$을 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(2a-x, 2b-y)=0$이다.

즉, 직선 $y=-3x-3$을 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $4-y=-3(2-x)-3$

따라서 $y=-3x+13$이므로

$a=-3$, $b=13$

$\therefore a+b=10$

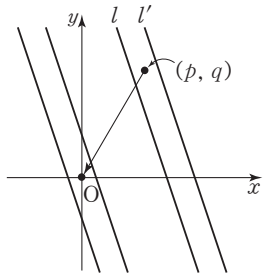
TIP

직선 l을 점 (p, q)에 대하여 대칭이동한 직선을 l'이라 하자.

점 (p, q)를 원점으로 옮기는 평행이동에 의하여 두 직선 l, l'을 평행이동하여도 두 직선 l, l'의 기울기는 변하지 않는다.

이때, 두 직선 l, l'을 평행이동한 두 직선은 원점에 대하여 대칭이므로 두 직선의 기울기는 같다.

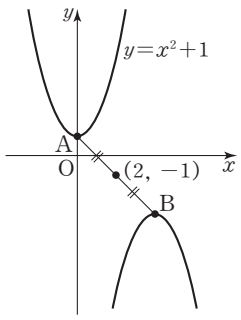
따라서 두 직선 l, l'의 기울기는 서로 같다.



859 ····· 답 ①

이차함수 $y=x^2+1$의 그래프의 꼭짓점을 $\mathrm{A}(0, 1)$이라 하고, 이 그래프와 점 $(2, -1)$에 대하여 대칭인 이차함수의 그래프의 꼭짓점을 $\mathrm{B}(p, q)$라 하자.

아쿠텐오내신시스템고3재수시(사이)_해설지.indb 198 22. 9. 14. 오후 8:21



선분 AB의 중점이 $(2, -1)$이므로

점 $\left(\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$이 점 $(2, -1)$과 일치한다.

$\therefore p=4, q=-3$

또한 이차함수 $y=x^2+1$의 그래프를 점 $(2, -1)$에 대하여 대칭이동한 그래프를 갖는 이차함수의 이차항의 계수는 -1이다. …… TIP

따라서 대칭인 이차함수는 $y=-(x-4)^2-3$이다.

이차함수 $y=x^2+1$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$y=-x^2-1$

이 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=-(x-4)^2-3$이 되므로

$a=4, b=-2$

$\therefore a+b=2$

다른 풀이

도형 $f(x, y)=0$을 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(2a-x, 2b-y)=0$이다.

이차함수 $y=x^2+1$의 그래프를 점 $(2, -1)$에 대하여 대칭이동하면

$-2-y=(4-x)^2+1 \quad \therefore y=-(x-4)^2-3$

이차함수 $y=x^2+1$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면 $y=-x^2-1$이고, 이 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=-(x-4)^2-3$이 되므로

$a=4, b=-2$

$\therefore a+b=2$

TIP

이차함수 $y=p(x+q)^2+r$의 그래프를 점 (m, n)에 대하여 대칭이동한 그래프를 갖는 이차함수를 $y=p'(x+q')^2+r'$이라 하자.

점 (m, n)을 원점으로 옮기는 평행이동에 의하여

두 곡선 $y=p(x+q)^2+r$, $y=p'(x+q')^2+r'$은 각각 $y=p(x+m+q)^2+r-n$, $y=p'(x+m+q')^2+r'-n$으로 옮겨지고, 이 두 곡선은 원점에 대하여 서로 대칭이다.

곡선 $y=p(x+m+q)^2+r-n$을 원점에 대하여 대칭이동하면

$-y=p(-x+m+q)^2+r-n$

$\therefore y=-p(x-m-q)^2-r+n$

이 곡선이 $y=p'(x+m+q')^2+r'-n$과 같으므로

$p'=-p$이다.

즉, 두 이차함수의 그래프가 어떤 점에 대하여 대칭일 때, 두 이차함수의 이차항의 계수는 서로 절댓값이 같으면서 부호가 반대인 수이다.

860 ····· 풀이 참조

원 $x^2+y^2+6x+4y+4=0$에서 $(x+3)^2+(y+2)^2=9$

원 $x^2+y^2+2x-12y+k=0$에서 $(x+1)^2+(y-6)^2=37-k$

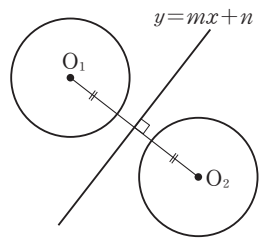
이때, 두 원이 직선에 대하여 서로 대칭이므로 두 원의 반지름의 길이는 서로 같다.

따라서 $9=37-k$에서 $k=28$이다.

두 원의 중심을 각각 $O_1(-3, -2)$, $O_2(-1, 6)$이라 하면

두 점이 직선 $y=mx+n$에 대하여 대칭이므로

직선 $y=mx+n$은 선분 O_1O_2의 수직이등분선이다.



선분 O_1O_2의 중점이 $\left(\frac{-3+(-1)}{2}, \frac{-2+6}{2}\right)$, 즉 $(-2, 2)$이고,

직선 O_1O_2의 기울기가 $\frac{6-(-2)}{-1-(-3)}=4$이므로

선분 O_1O_2의 수직이등분선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{4}(x+2) \quad \therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

따라서 $m=-\frac{1}{4}$, $n=\frac{3}{2}$이므로

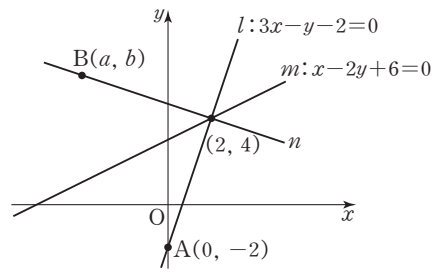
$kmn=28\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{3}{2}=-\frac{21}{2}$

채점 요소	배점
직선에 대하여 대칭인 두 원의 반지름의 길이를 이용하여 k의 값 구하기	30 %
직선에 대하여 대칭인 두 원의 중심을 이은 선분을 수직이등분하는 직선의 방정식 구하기	60 %
답 구하기	10 %

861 ····· $x+3y-14=0$

$l : 3x-y-2=0$, $m : x-2y+6=0$이라 하고,

직선 l을 직선 m에 대하여 대칭이동한 직선을 n이라 하자.



두 직선 l, m의 교점이 $(2, 4)$이므로 직선 n도 점 $(2, 4)$를 지난다.

또한 직선 l 위의 한 점 $A(0, -2)$를 직선 m에 대하여 대칭이동한 점을 $B(a, b)$라 하면 직선 n이 점 B를 지난다.

점 B의 좌표를 구해 보면 다음과 같다.

아뿌허이노내스ㅣㄴㄱㅗ조재으스ㅣ(사ㅇ)_허내스러르.indb 199 22. 9. 14. 오후 8:21

두 점 A, B가 직선 m에 대하여 대칭이므로 직선 m이 선분 AB를 수직이등분한다.

직선 AB가 직선 m: $x-2y+6=0$과 수직이므로 직선 AB의 기울기는 $\frac{b+2}{a}=-2$

$\therefore 2a+b=-2$ …… ㉠

또한 직선 m: $x-2y+6=0$이 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$를 지나므로

$\frac{a}{2}-2\times\frac{b-2}{2}+6=0$

$\therefore a-2b=-16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=6$이므로

B$(-4, 6)$

따라서 직선 n은 두 점 $(2, 4)$, $(-4, 6)$을 지나므로 직선 n의 방정식은

$y=\frac{4-6}{2-(-4)}(x-2)+4$

$\therefore x+3y-14=0$

다른 풀이

직선 $3x-y-2=0$ 위의 점을 직선 $x-2y+6=0$에 대하여 대칭이동한 점의 자취의 방정식이 구하는 직선의 방정식이다.

직선 $3x-y-2=0$ 위의 점을 A(x_1, y_1)이라 하고, 이 점을 직선 $x-2y+6=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B(x, y)라 하면 선분 AB의 수직이등분선이 직선 $x-2y+6=0$이다.

직선 $x-2y+6=0$의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

직선 AB의 기울기는 $\frac{y-y_1}{x-x_1}=-2$

$\therefore 2x+y-2x_1-y_1=0$ …… ㉢

직선 $x-2y+6=0$이 선분 AB의 중점 $\left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{x+x_1}{2}-2\times\frac{y+y_1}{2}+6=0$

$\therefore x-2y+x_1-2y_1+12=0$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 x_1항을 소거하면

$4x-3y-5y_1+24=0$ $\therefore y_1=\frac{4x-3y+24}{5}$

㉢, ㉣을 연립하여 y_1항을 소거하면

$3x+4y-5x_1-12=0$ $\therefore x_1=\frac{3x+4y-12}{5}$

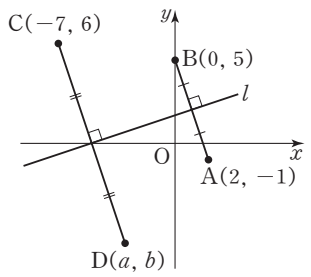
이때, 점 (x_1, y_1)이 직선 $3x-y-2=0$ 위의 점이므로

$3\times\frac{3x+4y-12}{5}-\frac{4x-3y+24}{5}-2=0$

$\therefore x+3y-14=0$

862 ····· 답 18

A$(2, -1)$, B$(0, 5)$라 하고, 두 점이 겹치도록 모눈종이를 접었을 때 접은 선이 되는 직선을 l이라 하면 두 점 A, B는 직선 l에 대하여 서로 대칭이다.



따라서 직선 l은 선분 AB의 수직이등분선이다.

선분 AB의 중점이 $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{5+(-1)}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$이고,

직선 AB의 기울기가 -3이므로 직선 l의 방정식은

$y=\frac{1}{3}(x-1)+2$ $\therefore l: x-3y+5=0$

C$(-7, 6)$이라 하면 모눈종이를 접을 때 점 C와 겹치는 점은 직선 l에 대하여 대칭인 점이다.

이 점을 D(a, b)라 하면 직선 l이 선분 CD를 수직이등분한다.

직선 l의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로 직선 CD의 기울기는

$\frac{b-6}{a-(-7)}=-3$

$b-6=-3(a+7)$ $\therefore 3a+b=-15$ …… ㉠

직선 $l: x-3y+5=0$이 선분 CD의 중점 $\left(\frac{a-7}{2}, \frac{b+6}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{a-7}{2}-3\times\frac{b+6}{2}+5=0$ $\therefore a-3b=15$ …… ㉡

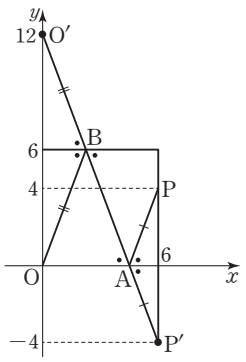
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-6$

$\therefore ab=18$

863 ····· 답 ④

점 P$(6, 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 P′$(6, -4)$이고, 원점 O$(0, 0)$을 직선 $y=6$에 대하여 대칭이동한 점을 O′이라 하면 O′$(0, 12)$이다.



위와 같이 빛이 반사되는 점을 각각 A, B라 하면

$\overline{PA}=\overline{P'A}$, $\overline{BO}=\overline{BO'}$이고, 입사각과 반사각의 크기가 서로 같으므로 네 점 P′, A, B, O′은 일직선 위에 있다.

따라서 빛이 움직인 거리는

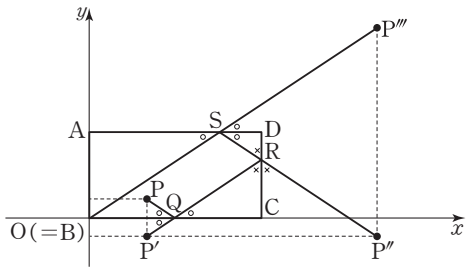
$\overline{PA}+\overline{AB}+\overline{BO}=\overline{P'A}+\overline{AB}+\overline{BO'}$

$=\overline{P'O'}=\sqrt{(-6)^2+16^2}=2\sqrt{73}$

아쿠하이스내스ㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_해ㅐㅅㅓㄹ.indb 200 22. 9. 14. 오후 8:21

864 ····· 답 ②

직사각형 ABCD를 A(0, 90), B(0, 0), C(180, 0), D(180, 90)이 되도록 좌표평면 위에 놓고 당구공이 변 BC, CD, DA와 부딪힌 점을 각각 Q, R, S라 하자.

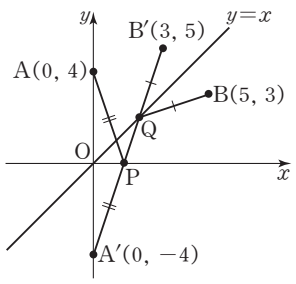


당구공의 처음 위치를 점 P라 하면 P(60, 20)이다.
점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면
P′(60, −20)
점 P′을 직선 $x=180$에 대하여 대칭이동한 점을 P″이라 하면
P″(300, −20)
점 P″을 직선 $y=90$에 대하여 대칭이동한 점을 P‴이라 하면
P‴(300, 200)
따라서 당구공이 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SB}&=\overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SB}\\&=\overline{P''R}+\overline{RS}+\overline{SB}\\&=\overline{P'''S}+\overline{SB}\\&=\overline{P'''B}\\&=\overline{OP'''}\\&=\sqrt{300^2+200^2}=100\sqrt{13}\,(\text{cm})\end{aligned}$$

865 ····· 답 1

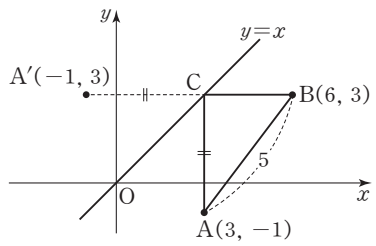
점 A(0, 4)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면
A′(0, −4)
점 B(5, 3)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면
B′(3, 5)



$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로
$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$이고, 네 점 A′, P, Q, B′이 일직선 위에 있을 때 이 값이 최소이다.
따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$가 최솟값을 가질 때 직선 PQ의 방정식은 직선 A′B′의 방정식과 같으므로
$y=\dfrac{5-(-4)}{3-0}x-4$에서 $y=3x-4$
따라서 $-3x+y+4=0$이므로
$a=-3$, $b=4$
$\therefore a+b=1$

866 ····· 답 ②

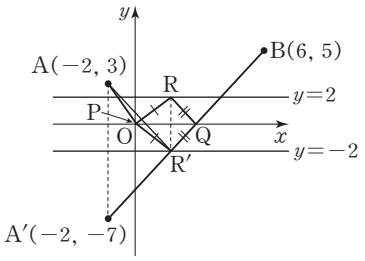
점 C(p, p)는 직선 $y=x$ 위의 점이다.



삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$로 일정하므로
$\overline{BC}+\overline{CA}$가 최소일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소이다.
점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면
A′(−1, 3)
$\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{BC}+\overline{CA'}$이고 세 점 A′, C, B가 일직선 위에 있을 때 이 값이 최소이다.
이때, 두 점 A′, B를 지나는 직선은 $y=3$이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소일 때 C(3, 3)이고,
이때 $\angle BCA=90^\circ$이므로 삼각형 ABC의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$이다.

867 ····· 답 $4\sqrt{13}$

점 R를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 R′이라 하면 점 R′는 직선 $y=-2$ 위에 있고, $\overline{PR}=\overline{PR'}$, $\overline{RQ}=\overline{R'Q}$이다.
또한 점 A를 직선 $y=-2$에 대하여 대칭이동한 점을 A′(−2, −7)이라 하면 $\overline{AR'}=\overline{A'R'}$이다.

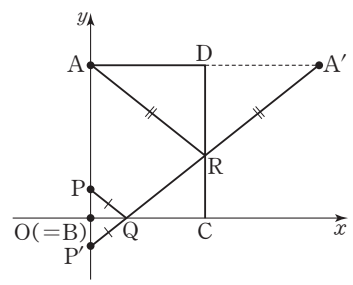


$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QB}&=\overline{AP}+\overline{PR'}+\overline{R'Q}+\overline{QB}\\&\geq\overline{AR'}+\overline{R'B}\geq\overline{A'B}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QB}$의 최솟값은
$\overline{A'B}=\sqrt{\{6-(-2)\}^2+\{5-(-7)\}^2}=\sqrt{64+144}=4\sqrt{13}$

868 ····· 답 ②

네 점 A, B, C, D를 각각 A(0, 80), B(0, 0), C(50, 0), D(50, 80)이 되도록 좌표평면 위에 놓자.

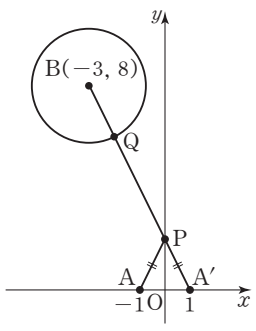


아쿠하이스내시니그고즈재이시(사이)_해설서르.indb 201 22. 9. 14. 오후 8:21

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는 (0, 20)이고,
점 P(0, 20)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면
P′(0, −20)
점 A(0, 80)을 직선 $x=50$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면
A′(100, 80)
이때, $\overline{PQ}=\overline{P'Q}$이고 $\overline{RA}=\overline{RA'}$이므로
$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RA}=\overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RA'}$이고,
네 점 P′, Q, R, A′이 일직선 위에 있을 때 이 값이 최소이다.
$\therefore \overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RA'}\geq\overline{P'A'}$
$=\sqrt{100^2+100^2}$
$=100\sqrt{2}$
따라서 구하는 최솟값은 $100\sqrt{2}$이다.

869 ····· 답 45

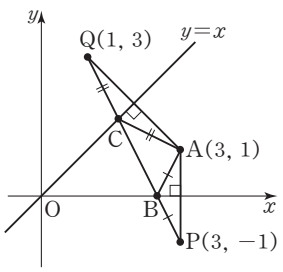
점 A(−1, 0)을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면
A′(1, 0)이다.



$\overline{AP}+\overline{PQ}=\overline{A'P}+\overline{PQ}$이고, 세 점 A′, P, Q가 일직선 위에 있을 때 이 값이 최소이므로 $\overline{A'P}+\overline{PQ}\geq\overline{A'Q}$
이때, 점 Q가 원의 중심과 점 A′을 이은 선분 위에 있을 때 $\overline{A'Q}$가 최소이다.
원의 중심을 B(−3, 8)이라 하면 구하는 최솟값은 $\overline{A'B}$에서 원의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로
$k=\sqrt{4^2+(-8)^2}-\sqrt{5}=3\sqrt{5}$
$\therefore k^2=45$

870 ····· 답 ⑤

지점 O가 원점, 직선도로 l이 x축이 되도록 좌표평면 위에 놓으면 직선도로 m은 직선 $y=x$를 나타내고,
정류소 A의 좌표는 A(3, 1)이다.

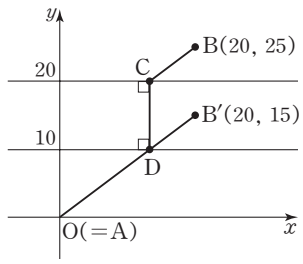


점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하면
P(3, −1)
점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하면
Q(1, 3)
$\overline{AB}=\overline{PB}$, $\overline{CA}=\overline{CQ}$이므로 만들려는 도로의 길이는
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{PB}+\overline{BC}+\overline{CQ}$이고,
네 점 P, B, C, Q가 일직선 위에 있을 때 이 값이 최소이다.
따라서 $\overline{PB}+\overline{BC}+\overline{CQ}$가 최솟값을 가질 때, 직선 BC의 방정식은 직선 PQ의 방정식과 같으므로
$y=\frac{3-(-1)}{1-3}(x-3)-1 \qquad \therefore y=-2x+5$

따라서 직선 $y=-2x+5$와 x축이 만나는 점은 $B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$,
직선 $y=-2x+5$와 직선 $y=x$의 교점은 $C\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$이므로
도로의 길이가 최소일 때 두 정류소 B와 C 사이의 거리는
$\overline{BC}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{3}-0\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$

871 ····· 답 ③

건물 A의 위치가 점 A(0, 0), 도로의 위, 아래 경계선이 각각 직선 $y=10$, $y=20$이 되도록 좌표평면 위에 놓고, 건물 B의 위치를 점 B라 하면 점 B의 y좌표는 10+10+5=25이므로
B(b, 25) ($b>0$)이라 하자.
$\overline{AB}=5\sqrt{41}$이므로 $\sqrt{b^2+25^2}=5\sqrt{41}$에서
$b^2+25^2=25\times41$, $b^2=25\times16=20^2$
$\therefore b=20$ ($\because b>0$)

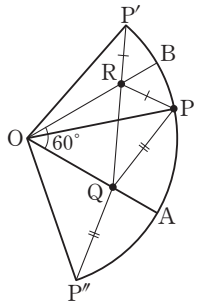


횡단보도가 도로의 경계선과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하면
횡단보도는 도로와 수직이므로 $\overline{CD}=10$이다.
이때, 건물 A에서 이 횡단보도를 거쳐 건물 B로 이동하는 거리는
$\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{BC}=\overline{AD}+10+\overline{BC}$ ····· ㉠
이므로 $\overline{AD}+\overline{BC}$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.
선분 BC를 점 C가 점 D로 옮겨지도록 평행이동할 때, 즉 y축의 방향으로 −10만큼 평행이동할 때, 점 B(20, 25)가 이동되는 점을 B′이라 하면
B′(20, 15)
이때, $\overline{BC}=\overline{B'D}$이므로
$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{B'D}$
세 점 A, D, B′이 일직선 위에 있을 때 이 값이 최소이므로
$\overline{AD}+\overline{B'D}\geq\overline{AB'}$
$=\sqrt{20^2+15^2}=25$
따라서 ㉠에서 구하는 최솟값은
25+10=35(m)

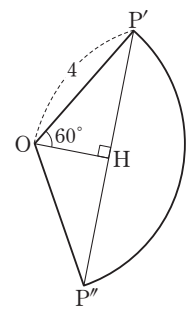
오투해설내지_수상(사이)_해설서로.indb 202 22. 9. 14. 오후 8:21

872 ····· 답 ④

다음과 같이 점 P를 직선 OB에 대하여 대칭이동한 점을 P′,
직선 OA에 대하여 대칭이동한 점을 P″이라 하자.



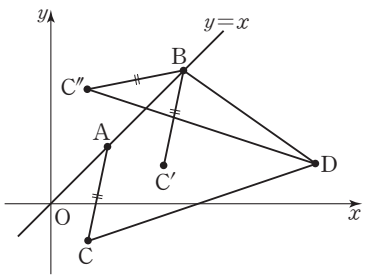
$\overline{PR}=\overline{P'R}$, $\overline{PQ}=\overline{P''Q}$이므로 삼각형 PQR의 둘레의 길이는
$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P''Q}+\overline{QR}+\overline{RP'}$이다.
네 점 P′, R, Q, P″이 일직선 위에 있을 때 이 값이 최소이므로
$\overline{P''Q}+\overline{QR}+\overline{RP'}\geq\overline{P'P''}$
이때, $\angle P'OB=\angle POB$, $\angle POA=\angle P''OA$이므로
$\angle P'OP''=2(\angle POB+\angle POA)=120^\circ$



점 O에서 선분 P′P″에 내린 수선의 발을 H라 할 때,
$\angle P'OH=60^\circ$, $\overline{OP'}=4$이므로 $\overline{P'H}=2\sqrt{3}$
$\therefore\ \overline{P'P''}=2\overline{P'H}=4\sqrt{3}$
따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{3}$이다.

873 ····· 답 ③

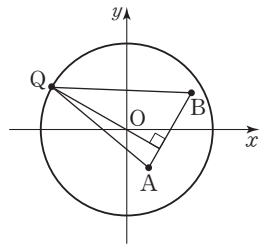
두 점 A, B의 좌표를 각각 (a, a), (b, b) $(b>a)$라 하면
$\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(b-a)^2}$
$\quad=\sqrt{2}|b-a|=2\sqrt{2}$
에서 $b-a=2$ ($\because\ b>a$)이므로
$b=a+2$
즉, 점 A(a, a)에 대하여 B$(a+2, a+2)$이다.
또한 사각형 ACDB에서 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{CD}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$으로
각각 일정하므로 사각형의 둘레의 길이는 $\overline{AC}+\overline{BD}$가
최소일 때 최솟값을 갖는다.



선분 AC를 점 A(a, a)가 점 B$(a+2, a+2)$로 옮겨지도록
평행이동하면 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼
평행이동하는 것과 같으므로 점 C$(1, -1)$이 이동되는 점을
C′이라 하면 C′$(3, 1)$이다.
또한 점 C′을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C″이라 하면
C″$(1, 3)$이다.
$\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{BC'}+\overline{BD}=\overline{BC''}+\overline{BD}$이고, 세 점 B, C″, D가 일직선
위에 있을 때 이 값이 최소이므로
$\overline{BC''}+\overline{BD}\geq\overline{C''D}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$
따라서 사각형 ACDB의 둘레의 길이의 최솟값은
$2\sqrt{2}+2\sqrt{10}+2\sqrt{10}=2\sqrt{2}+4\sqrt{10}$이다.

874 ····· 답 ⑤

원 $(x-2)^2+y^2=16$은 중심이 $(2, 0)$이고 반지름의 길이가 4이고,
원의 중심 $(2, 0)$을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(0, 0)$이므로 점 Q는 원
$x^2+y^2=16$ 위의 점이다.
이때, 직선 AB의 방정식은
$y-(-\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{3-1}(x-1)$, $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$ ····· ㉠
이고, 선분 AB를 밑변으로 할 때 삼각형 ABQ의 높이는 점 Q에서
직선 AB에 내린 수선이 원점을 지날 때 최대이다.



원 $x^2+y^2=16$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$ 사이의
거리는
$\dfrac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$
그러므로 삼각형 ABQ의 넓이의 최댓값 S은
$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times(\sqrt{3}+4)$
$\quad=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}\times(\sqrt{3}+4)=2(\sqrt{3}+4)$
㉠에서 직선 AB의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로 직선 AB와 수직이고 원점을
지나는 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$이고, 이 직선이 원
$x^2+y^2=16$과 제2사분면에서 만나는 점이 Q이므로
$x^2+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2=16$, $\dfrac{4}{3}x^2=16$, $x^2=12$, $x=-2\sqrt{3}$ ($\because\ x<0$)이고
$y=2$, 즉 Q$(-2\sqrt{3}, 2)$이다.
점 Q를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $(2, -2\sqrt{3})$이고, 이
점을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $(4, -2\sqrt{3})$이다.
즉, 이 점이 P이므로 $a=4$이다.
$\therefore\ a+S=4+2(\sqrt{3}+4)=12+2\sqrt{3}$

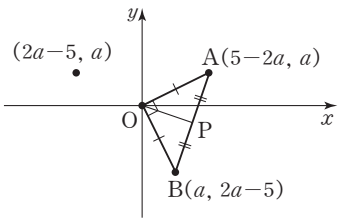
아뿌하우스_수학의 정석 고등 수학Ⅱ(상)_해설_최종.indb 203 22. 9. 14. 오후 8:21

875 ····· 답 ②

점 A$(5-2a,\ a)$를 y축에 대하여 대칭이동하면
점 $(2a-5,\ a)$이다.
이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
점 B$(a,\ 2a-5)$이다.
이때, $\overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{a^2+(2a-5)^2}$이고,
(직선 OA의 기울기)$\times$(직선 OB의 기울기)

$=\frac{a}{5-2a}\times\frac{2a-5}{a}=-1$

이므로 삼각형 AOB는 $\angle AOB=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.



따라서 삼각형 OAB의 외심 P는 선분 AB의 중점이므로

(삼각형 OBP의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(삼각형 OAB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\overline{OB}^2$

$=\frac{1}{4}\overline{OB}^2$ ····· ㉠

따라서 $\overline{OB}$가 최소일 때, 삼각형 OBP의 넓이가 최솟값을 갖는다.
점 B$(a,\ 2a-5)$는 직선 $y=2x-5$ 위의 점이고,
점 O$(0,\ 0)$에서 직선 $2x-y-5=0$까지의 거리는

$\frac{|-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

따라서 $\overline{OB}$의 최솟값은 $\sqrt{5}$이므로 삼각형 OBP의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{4}\times(\sqrt{5})^2=\frac{5}{4}$ ($\because$ ㉠)이다.

다른 풀이

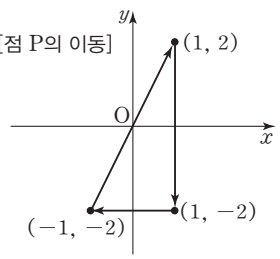
B$(a,\ 2a-5)$이므로 ㉠에서 삼각형 OBP의 넓이는

$\frac{1}{4}\overline{OB}^2=\frac{1}{4}\{a^2+(2a-5)^2\}=\frac{5}{4}(a-2)^2+\frac{5}{4}$

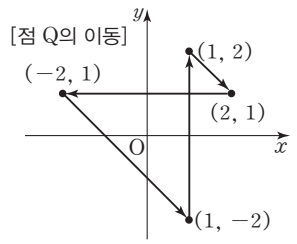
에서 $a=2$일 때, 최솟값 $\frac{5}{4}$를 갖는다.

876 ····· 답 333

점 P는 점 $(1,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 $(1,\ -2)$이고,
이 점을 다시 y축에 대하여 대칭이동하면 $(-1,\ -2)$이고,
이 점을 다시 원점에 대하여 대칭이동하면 $(1,\ 2)$이므로
세 점 $(1,\ -2)$, $(-1,\ -2)$, $(1,\ 2)$를 차례로 반복해서 이동한다.



점 Q는 점 $(1,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(2,\ 1)$이고,
이 점을 다시 y축에 대하여 대칭이동하면 $(-2,\ 1)$이고,
이 점을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $(1,\ -2)$이고,
이 점을 다시 x축에 대하여 대칭이동하면 $(1,\ 2)$이므로
네 점 $(2,\ 1)$, $(-2,\ 1)$, $(1,\ -2)$, $(1,\ 2)$를 차례로 반복해서 이동한다.



따라서 두 점 P, Q는 점 $(1,\ 2)$ 또는 $(1,\ -2)$에서 일치한다.

(i) 점 $(1,\ 2)$에서 일치하는 경우
점 P는 3, 6, 9, …번 이동했을 때 점 $(1,\ 2)$에 위치하고,
점 Q는 4, 8, 12, …번 이동했을 때 점 $(1,\ 2)$에 위치하므로
자연수 k에 대하여 $12k$번째마다 두 점 P, Q가 일치한다.
이때, $2000=12\times166+8$이므로
2000번 중 166번은 점 $(1,\ 2)$에서 일치한다.

(ii) 점 $(1,\ -2)$에서 일치하는 경우
점 P는 1, 4, 7, 10, …번 이동했을 때 점 $(1,\ -2)$에 위치하고,
점 Q는 3, 7, 11, …번 이동했을 때 점 $(1,\ -2)$에 위치하므로
두 점이 각각 7번 이동했을 때 점 $(1,\ -2)$로 일치하고,
이후 12번째마다 일치한다.
즉, 자연수 k에 대하여 $12k-5$번째마다 두 점 P, Q가
일치하므로 2000번 중 167번 일치한다.

(i), (ii)에 의하여 두 점이 일치하는 횟수는
$166+167=333$

877 ····· 답 ③

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면 두 점이
이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프 위의 점이므로
A$(a,\ a^2-2a+2)$, B$(b,\ b^2-2b+2)$이다. (단, $a\neq b$)

두 점 A, B가 직선 $y=-\frac{1}{2}x+12$에 대하여 대칭이므로

직선 $y=-\frac{1}{2}x+12$가 선분 AB를 수직이등분한다.

직선 AB가 직선 $y=-\frac{1}{2}x+12$와 수직이므로

직선 AB의 기울기는

$\frac{(b^2-2b+2)-(a^2-2a+2)}{b-a}=\frac{(b^2-a^2)-2(b-a)}{b-a}$

$=a+b-2=2$ ($\because$ $a\neq b$)

$\therefore$ $a+b=4$ ····· ㉡

또한 직선 $y=-\frac{1}{2}x+12$가 선분 AB의 중점

$\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a^2+b^2-2a-2b+4}{2}\right)$를 지나므로

$\frac{a^2+b^2-2a-2b+4}{2}=-\frac{1}{2}\times\frac{a+b}{2}+12$

이퓨쳐오너시스템즈(사)_해설수정.indb 204 22. 9. 14. 오후 8:21

$2\{a^2+b^2-2(a+b)+4\}=-(a+b)+48$
이 식에 ㉠을 대입하면 $2(a^2+b^2-4)=44$
$\therefore a^2+b^2=26$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=5$, $b=-1$ 또는 $a=-1$, $b=5$
따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(-1, 5)$, $(5, 17)$이므로
$\overline{AB}=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5}$

다른 풀이

두 점 A, B가 직선 $y=-\frac{1}{2}x+12$에 대하여 대칭이므로

직선 $y=-\frac{1}{2}x+12$가 선분 AB를 수직이등분한다.

직선 $y=-\frac{1}{2}x+12$와 수직인 직선 AB의 방정식을

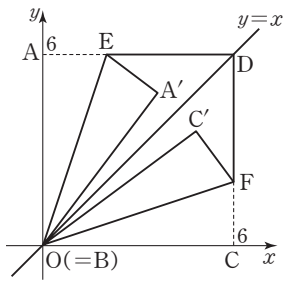
$y=2x+k$ (k는 상수)라 하면 두 점 A, B는 포물선 $y=x^2-2x+2$와 직선 $y=2x+k$의 교점이다.
두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면
방정식 $x^2-2x+2=2x+k$, 즉 $x^2-4x+2-k=0$ …… ㉢
의 두 근이 a, b이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$a+b=4$ …… ㉣

한편, 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+12$, $y=2x+k$의 교점의 x좌표는

$-\frac{1}{2}x+12=2x+k$에서 $x=\frac{2}{5}(12-k)$
이때, 두 직선의 교점은 선분 AB의 중점과 같으므로
$\frac{2}{5}(12-k)=\frac{a+b}{2}=2$ ($\because$ ㉣)에서 $k=7$
이를 ㉢에 대입하면
$x^2-4x-5=0$, $(x-5)(x+1)=0$
$\therefore a=5$, $b=-1$ 또는 $a=-1$, $b=5$
따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(-1, 5)$, $(5, 17)$이므로
$\overline{AB}=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5}$

878 ····· 답 11

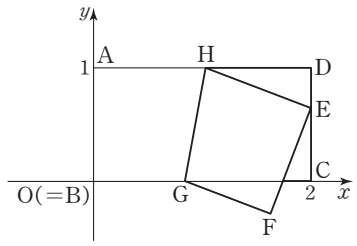
다음과 같이 A(0, 6), B(0, 0), C(6, 0), D(6, 6)이 되도록 사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓으면
E(2, 6), F(6, 2)



직선 BE의 방정식은 $y=3x$이고, 점 A′은 점 A를 직선 BE에 대하여 대칭이동한 점이므로 직선 BE는 선분 AA′을 수직이등분한다.
A′(a, b)라 하면 직선 AA′이 직선 $y=3x$와 수직이므로
직선 AA′의 기울기는
$\frac{b-6}{a}=-\frac{1}{3}$
$\therefore a+3b=18$ …… ㉠
또한 직선 $y=3x$가 선분 AA′의 중점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b+6}{2}\right)$을 지나므로
$\frac{b+6}{2}=3\times\frac{a}{2}$
$\therefore 3a-b=6$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{18}{5}$, $b=\frac{24}{5}$이므로
A′$\left(\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\right)$
한편, 직선 BD의 방정식은 $y=x$이고, 두 점 A′과 C′은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
C′$\left(\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right)$
따라서 $\overline{A'C'}=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(-\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{6}{5}\sqrt{2}$이므로
$p=5$, $q=6$
$\therefore p+q=11$

879 ····· 답 $\frac{2}{3}$

점 B가 원점이고, A(0, 1), C(2, 0), D(2, 1)이 되도록 좌표평면 위에 직사각형 ABCD를 놓고, 점 E의 좌표를 $(2, a)$라 하자.



점 A가 점 E와 직선 GH에 대하여 대칭이므로 직선 GH는 선분 AE의 수직이등분선이다.
직선 AE의 기울기가 $\frac{a-1}{2}$이고, 선분 AE의 중점이
$\left(1, \frac{a+1}{2}\right)$이므로 직선 GH의 방정식은
$y=\frac{-2}{a-1}(x-1)+\frac{a+1}{2}$
직선 GH 위의 점 G의 y좌표가 0이므로
$0=\frac{-2}{a-1}(x-1)+\frac{a+1}{2}$에서
$x=-\frac{a+1}{2}\times\frac{a-1}{-2}+1=\frac{a^2+3}{4}$
$\therefore \overline{BG}=\frac{a^2+3}{4}$
직선 GH 위의 점 H의 y좌표가 1이므로
$1=\frac{-2}{a-1}(x-1)+\frac{a+1}{2}$에서
$x=\frac{1-a}{2}\times\frac{a-1}{-2}+1=\frac{(a-1)^2}{4}+1$
$\therefore \overline{AH}=\frac{a^2-2a+5}{4}$

아끄하ㅓ이ㄴ새ㅅ시ㅣㄴㄱㅗㅈ재이ㅅ시ㅣ(사ㅏ이)_하새ㅅ서ㄹ.indb 205 22. 9. 14. 오후 8:21

이때, 사다리꼴 EFGH의 넓이는 사다리꼴 ABGH의 넓이와 같으므로

$$\frac{1}{2}\times(\overline{BG}+\overline{AH})\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a^2+3}{4}+\frac{a^2-2a+5}{4}\right)\times 1$$
$$=\frac{a^2-a+4}{4}=\frac{17}{18}$$

즉, $18(a^2-a+4)=4\times 17$에서 $9a^2-9a+2=0$

$(3a-1)(3a-2)=0$

$\therefore a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

$\therefore \overline{CE}=a=\frac{2}{3}\left(\because \overline{CE}>\frac{1}{2}\right)$

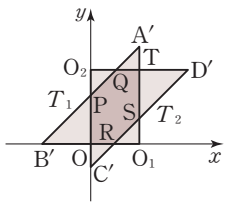
880 ③

세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점을 각각 O_1, A′, B′이라 하면

$O_1(t, 0)$, $A'(t, 2)$, $B'(-2+t, 0)$

세 점 O, C, D를 y축의 방향으로 $2t$만큼 평행이동한 점을 각각 O_2, C′, D′이라 하면

$O_2(0, 2t)$, $C'(0, -2+2t)$, $D'(2, 2t)$



두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되려면 선분 A′B′이 두 선분 O_2C', O_2D'과 A′, B′이 아닌 두 점에서 만나야 한다. 또한 선분 C′D′이 두 선분 O_1B', O_1A'과 C′, D′이 아닌 두 점에서 만나야 한다. …… TIP

선분 A′B′이 두 선분 O_2C', O_2D'과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 C′D′이 두 선분 O_1B', O_1A'과 만나는 점을 각각 R, S라 하면

$P(0, 2-t)$, $Q(3t-2, 2t)$, $R(2-2t, 0)$, $S(t, 3t-2)$

따라서 조건을 만족시키는 육각형이 만들어지려면

(점 P의 y좌표)<(점 O_2의 y좌표)<(점 A′의 y좌표)

이어야 하므로 $2-t<2t<2$이고,

$2-t<2t$에서 $t>\frac{2}{3}$, $2t<2$에서 $t<1$

즉, 두 부등식을 모두 만족시키는 t의 값의 범위는 $\frac{2}{3}<t<1$이다.

또한

(점 C′의 y좌표)<(점 O_1의 y좌표)<(점 S의 y좌표)

이어야 하므로 $-2+2t<0<3t-2$이고,

$-2+2t<0$에서 $t<1$, $0<3t-2$에서 $t>\frac{2}{3}$이므로

위와 마찬가지로 $\frac{2}{3}<t<1$이다. 그러므로 $a=\frac{2}{3}$이다.

이때, 두 선분 A′O_1, O_2D′의 교점을 T라 하고 육각형의 넓이를 $f(t)\left(\frac{2}{3}<t<1\right)$라 하면

$f(t)$=(직사각형 OO_1TO_2의 넓이)−(삼각형 O_1SR의 넓이)
−(삼각형 O_2PQ의 넓이)

$=t\times 2t-2\times\frac{1}{2}(3t-2)^2$

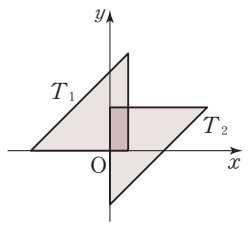
$=-7t^2+12t-4$

$=-7\left(t-\frac{6}{7}\right)^2+\frac{8}{7}$

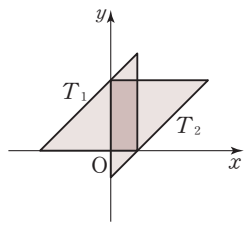
따라서 $f(t)$는 $t=\frac{6}{7}$일 때 최대이고 이때 최댓값은 $M=\frac{8}{7}$이다.

$\therefore a+M=\frac{2}{3}+\frac{8}{7}=\frac{38}{21}$

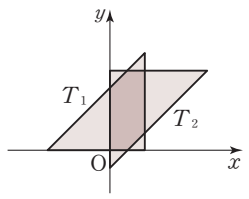
TIP



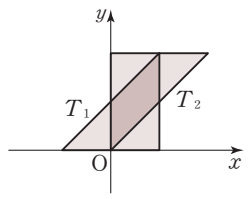
$\left[0<t<\frac{2}{3}\text{일 때}\right]$



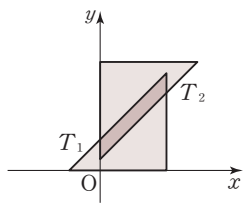
$\left[t=\frac{2}{3}\text{일 때}\right]$



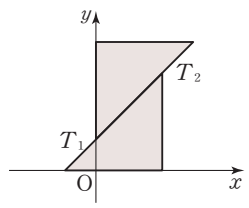
$\left[\frac{2}{3}<t<1\text{일 때}\right]$



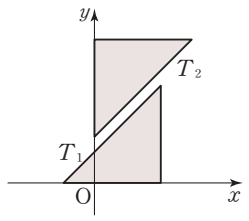
[$t=1$일 때]



$\left[1<t<\frac{4}{3}\text{일 때}\right]$



$\left[t=\frac{4}{3}\text{일 때}\right]$



$\left[t>\frac{4}{3}\text{일 때}\right]$

아뿌하우니새시니그고조재으시(사으)_해설서로.indb 206 22. 9. 14. 오후 8:21

MEMO

ㅇㅠㅎㅕㅇㄴㅐㅅㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 207 22. 9. 14. 오후 8:21

MEMO

ㅇㅠㅎㅕㅇㄴㅐㅅㅣㄴㄱㅗㅈㅐㅇㅅㅣ(ㅅㅏㅇ)_ㅎㅐㅅㅓㄹ.indb 208 22. 9. 14. 오후 8:21